



グローバル感度解析コードGSALabの開発

GSALab Computer Code for Global Sensitivity Analysis

劉 峭 本間 俊充 西巻 祐一郎 林 寛子 寺門 正人 田村 智志

Qiao LIU, Toshimitsu HOMMA, Yuichiro NISHIMAKI, Hiroko HAYASHI
Masato TERAKADO and Satoshi TAMURA

安全研究センター

原子力エネルギー関連施設安全評価研究ユニット

Nuclear Facility Safety Research Unit
Nuclear Safety Research Center

March 2010

Japan Atomic Energy Agency

日本原子力研究開発機構

JAEA-
Data/
Code

本レポートは独立行政法人日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。
本レポートの入手並びに著作権利用に関するお問い合わせは、下記あてにお問い合わせ下さい。
なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ホームページ (<http://www.jaea.go.jp>)
より発信されています。

独立行政法人日本原子力研究開発機構 研究技術情報部 研究技術情報課
〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根2番地4
電話 029-282-6387, Fax 029-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency
Inquiries about availability and/or copyright of this report should be addressed to
Intellectual Resources Section, Intellectual Resources Department,
Japan Atomic Energy Agency
2-4 Shirakata Shirane, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195 Japan
Tel +81-29-282-6387, Fax +81-29-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

© Japan Atomic Energy Agency, 2010

グローバル感度解析コード GSALab の開発

日本原子力研究開発機構 安全研究センター
原子力エネルギー関連施設安全評価研究ユニット

劉 岬、本間 俊充、西巻 祐一郎*、林 寛子*、寺門 正人* 田村 智志*

(2010年1月4日 受理)

原子力発電所などの工学施設のリスク評価モデルには、機器故障率などのモデル入力変数の不確実さが伝播することにより計算結果に不確実さが生じる。リスク評価結果の不確実さ及びその不確実さへの各入力変数の寄与度を評価するためのツールとして、モンテカルロ手法を用いたグローバル感度解析コード GSALab を開発した。本コードは、乱数発生部、不確実さ解析部、感度解析部で構成される。乱数発生部では、確率分布に従った乱数の生成機能を有する。不確実さ解析部では、モデル出力の平均値や分散などの統計量の計算、そして確率密度分布や累積分布の計算が可能である。感度解析部には、分散に基づく指標をはじめとして、複数のグローバル感度指標の計算機能を備えた。また、GSALab に GUI(グラフィカル・ユーザー・インターフェース)を組み込み、利便性を向上させている。本コードは、原子力発電所のリスク評価だけでなく、一般的な計算モデルに対する不確実さ解析・感度解析にも適用可能である。

GSALab Computer Code for Global Sensitivity Analysis

Qiao LIU, Toshimitsu HOMMA, Yuichiro NISHIMAKI*, Hiroko HAYASHI*,
Masato TERAKADO* and Satoshi TAMURA*

Nuclear Facility Safety Research Unit, Nuclear Safety Research Center,
Japan Atomic Energy Agency
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received January 4, 2010)

For a risk assessment model of an engineering system, e.g., nuclear power plants, the uncertainties in the model inputs propagate through the model and lead to the uncertainty in the model output. In order to evaluate the model output uncertainty and the contribution of each model input to the output uncertainty, the computer code GSALab, which is based on Monte Carlo simulations, has been developed. It is composed of three parts, namely, random samples generation, uncertainty analysis and sensitivity analysis. The random samples are generated based on the probability distribution of model input variables in the part of random sample generation. The statistics (e.g., mean value, variance, etc.) as well as the distribution of the model output are computed in the part of uncertainty analysis. In the part of sensitivity analysis, several global sensitivity indicators, including the popularly used variance-based indicators, are implemented. In addition, the GUI(Graphical User Interface)of GSALab has been developed for the user's convenience. In addition to risk assessment models, it is also possible to use GSALab for uncertainty and sensitivity analysis of a wide class of mathematical models.

Keywords: Global Sensitivity Analysis, Sensitivity Index, Sensitivity Indicator, Uncertainty Analysis, Importance Measures, Risk Analysis

* Visible Information Center, Inc.

目 次

1.はじめに	1
2.乱数発生部の開発	2
2.1 一様分布	3
2.2 対数一様分布	4
2.3 正規分布	5
2.4 対数正規分布	6
2.5 指数分布	7
2.6 三角分布	8
3.不確実さ解析部の開発	10
3.1 ヒストグラム法	11
3.2 カーネル密度推定法	11
4.感度解析部の開発	15
4.1 Sobol'の S_1 と S_T 指標	15
4.1.1 Ishigami&Homma 手法による S_1 と S_T の計算	16
4.1.2 拡張 FAST 手法による S_1 と S_T の計算	18
4.2 Borgonovo の δ_i 指標	21
4.3 Liu&Homma の S_{X_i} 指標	22
4.4 情報エントロピーに基づく指標 <i>Entropy</i>	23
4.5 Kullback-Libler 距離に基づく <i>KLD</i> 指標	24
4.6 Minkowski 距離に基づく <i>MD</i> 指標	24
5.GSALab コード GUI の開発	26
5.1 入力変数の設定画面	26
5.2 モデル関数の設定画面	30
5.3 不確実さ解析画面	34
5.3.1 ヒストグラム法に関する設定画面	34
5.3.2 カーネル密度推定法に関する設定画面	39
5.3.3 不確実さ解析に関するほかの設定	43
5.4 感度解析画面	44
6.解析例	49
6.1 初期条件の設定	49
6.2 解析結果	50
6.2.1 モデル入力変数の乱数の発生	50
6.2.2 モデル出力変数の出力	51
6.2.3 不確実さ解析結果	52
6.2.4 感度解析結果	54

7. まとめ	56
謝辞	56
参考文献	57

Contents

1. Introduction.....	1
2. Development of Random Samples Generation Code.....	2
2.1 Uniform Distribution.....	3
2.2 Log-Uniform Distribution	4
2.3 Normal Distribution	5
2.4 Lognormal Distribution.....	6
2.5 Exponential Distribution	7
2.6 Triangular Distribution.....	8
3. Development of Uncertainty Analysis Code	10
3.1 Histogram Method	11
3.2 Kernel Density Estimation Method.....	11
4. Development of Sensitivity Analysis Code	15
4.1 Sobol's S_1 and S_T indices.....	15
4.1.1 Calculation of S_1 and S_T Based on Ishigami&Homma's Method.....	16
4.1.2 Calculation of S_1 and S_T Based on Extended Fast Method.....	18
4.2 Borgonovo's δ_i index	21
4.3 Liu&Homma's S_{X_i} index	22
4.4 Information Entropy Based Index: <i>Entropy</i>	23
4.5 Kullback-Libler Distance Based Index: <i>KLD</i>	24
4.6 Minkowski Distance Based Index: <i>MD</i>	24
5. Development of the GUI of GSALab code.....	26
5.1 Display for Setting Input Variable	26
5.2 Display for Setting Model Functions.....	30
5.3 Display for Uncertainty Analysis.....	34
5.3.1 Display for Setting Histogram Method.....	34
5.3.2 Display for Setting Kernel Density Estimation Method.....	39
5.3.3 Display for Other Settings.....	43
5.4 Display for Sensitivity Analysis.....	44
6. Example	49
6.1 Initial Condition Setting	49
6.2 Results.....	50
6.2.1 Random Samples of Model Inputs.....	50
6.2.2 The Model Output.....	51
6.2.3 Uncertainty Analysis Results.....	52
6.2.4 Sensitivity Analysis Results.....	54

7. Summary	56
Acknowledgement	56
References.....	57

図リスト

図 2.1	一様分布 ($x_{\min} = 0.0$ 、 $x_{\max} = 1.0$)	3
図 2.2	対数一様分布 ($x_{\min} = 1.0$ 、 $x_{\max} = 10$)	4
図 2.3	正規分布 ($\sigma = 1.0$ 、 $\mu = 0.0$)	5
図 2.4	対数正規分布 ($\sigma = 1.0$ 、 $\mu = 0.0$)	7
図 2.5	指數分布 ($\lambda = 1.0$ 、 $b = 0.0$)	8
図 2.6	三角分布 ($x_{\min} = 0.0$ 、 $x_{peak} = 1.0$ 、 $x_{\max} = 4.0$)	9
図 3.1	累積分布関数 (CDF) と各%位のYの値.....	10
図 3.2	カーネル密度推定法による PDF 計算の例.....	12
図 4.1	$f_{Y X_i}(y)$ と $f_Y(y)$ の相違は両者間の面積 $s(x_i^*)$ で評価する	22
図 4.2	$F_{Y X_i}(y)$ と $F_Y(y)$ の相違は、両者間の面積 $A_{X_i}(x_i^*)$ で評価する.....	23
図 5.1	モデル入力変数設定画面.....	26
図 5.2	モデル入力変数のパラメータの設定.....	27
図 5.3	モデル入力変数乱数同士の散布図.....	28
図 5.4	生成したモデル入力変数の乱数の頻度分布.....	28
図 5.5	モデル入力変数間の相関係数	29
図 5.6	生成したモデル入力変数の乱数マトリックス	29
図 5.7	リスクモデル関数設定画面（初期状態）	30
図 5.8	リスクモデル関数設定画面（モデル設定中）	31
図 5.9	変数間の散布図.....	32
図 5.10	モデル出力変数の頻度分布（階級数=50）	32
図 5.11	変数間の相関係数表	33
図 5.12	生成した変数値.....	33
図 5.13	Uncertainty and Sensitivity Analysis タブ初期画面.....	34
図 5.14	ヒストグラム法による不確実さ解析設定画面.....	35
図 5.15	モデル出力変数の PDF の表示画面（ヒストグラム法）	36
図 5.16	モデル出力変数の CDF の表示画面（ヒストグラム法）	37
図 5.17	ヒストグラムの階級数を変更したときの PDF 表示例.....	38
図 5.18	モデル出力変数の PDF の表示画面（カーネル密度推定法）	39
図 5.19	モデル出力変数の CDF の表示画面（カーネル密度推定法）	40
図 5.20	モデル出力変数の PDF の表示画面（カーネル密度推定法、バンド幅 $h = 1.0$ ）	41
図 5.21	不確実さ解析（カーネル密度推定法、バンド幅 $h=0.1$ ）	42
図 5.22	CCDF表示及びSheather-Jonesバンド幅の計算方法の設定画面.....	43
図 5.23	モデル出力変数のCCDF表示画面.....	43
図 5.24	感度解析画面（初期状態）	44
図 5.25	S1 指標を計算中のポップアップ表示例	45

図 5.26	S1 指標による感度解析結果の図表示（順位）	45
図 5.27	S1 指標による感度解析結果の図表示（数値）	46
図 5.28	S1 指標による感度解析結果の表表示	47
図 5.29	S1 と ST 指標の計算手法の設定.....	48
図 5.30	拡張 FAST 手法に関する詳細な設定.....	48
図 6.1	入力変数の設定.....	49
図 6.2	Ishigami関数の設定	50
図 6.3	入力変数乱数の散布図	51
図 6.4	出力変数 Y_1 と入力変数 $\{X_1, X_2, X_3\}$ の相関関係.....	52
図 6.5	ヒストグラム法による Y_1 の確率密度分布表示（階級数 100）	53
図 6.6	カーネル密度推定法による Y_1 の確率密度分布表示（バンド幅 $h=0.2451$ ）	54

表リスト

表 3.1	Y の集合	10
表 4.1	入力変数の個数 N と各入力変数に与えた特定周波数 ω_i	19
表 6.1	発生させた乱数の相関係数	50
表 6.2	出力変数 Y_1 の各統計量.....	53
表 6.3	各感度指標の計算結果	55

1. はじめに

日本原子力研究開発機構（JAEA）では、原子力安全委員会の重点安全研究計画に基づき、原子力施設の確率論的安全評価（Probabilistic Safety Assessment: PSA）手法の高度化と、その手法を応用したリスク情報の活用に関する研究を進めている。PSAによって得られる「リスク情報」を原子力施設などの安全規制や事業者における保安活動などに適切に活用していくことは、安全規制の科学的合理性や保安活動の効率性を向上させる有効な手段として期待されている。

原子力発電所などの施設のリスクを評価する際、人間の過誤や機器の故障（あるいは損傷）率などのばらつきが存在し、リスク評価結果に不確実さを生じさせる。そのため、施設のリスクを評価する際には、不確実さ解析（Uncertainty Analysis: UA）が重要となる。また、施設のリスク評価結果の不確実さを低減させるため、限りある資源をリスク評価結果の不確実さへの寄与度の大きいシステム、構造物および機器（System, Structures and Components: SSCs）に配分する必要がある。その際、感度解析（Sensitivity Analysis）が有用となる。そこで、JAEAでは PSA 手法の高度化研究の一環として、原子力発電所など工学施設のリスクの不確実さ解析および SSCs のリスク上の重要度を評価するためのツールとして、グローバル感度解析コード GSALab（Global Sensitivity Analysis Lab）を開発した。

GSALab は、以下より構成される。

- 亂数発生部
- 不確実さ解析部
- 感度解析部

乱数発生部ではモンテカルロ手法を用い、各モデル入力変数の確率分布に従って乱数を生成する。不確実さ解析部では、モデル計算結果の平均値や分散などの統計量の計算および確率密度分布、累積分布の計算が行われる。感度解析部には、近年計算機の発達に伴い、注目されているグローバル感度解析に着目し、分散に基づく指標をはじめとする複数のグローバル感度指標を実装した。また、GSALab コードに GUI（Graphical User Interface）を組み込み、ユーザの利便性を向上させている。本報告書では、グローバル感度解析コード GSALab の概要と機能を記載する。

2. 亂数発生部の開発

一般に、リスク評価モデルを式(2-1)のように定義できる。

ここで、 Y はモデルの出力変数であり、リスク指標である。 X_1, \dots, X_m はモデルの入力変数で、人間の過誤や機器の故障率などを表す。この入力変数にはばらつきが存在し、その分布を周辺確率密度分布 f_{X_1}, \dots, f_{X_m} で表すものとする。これらのばらつきを持った入力変数を用いて、リスク指標 Y のばらつきを調べるプロセスが不確実さ解析である。また、 Y の不確実さに対して、各入力変数の不確実さの寄与度を調べるプロセスが感度解析である。

不確実さ解析・感度解析には様々な手法が用いられるが、ここではリスク評価モデルの入力変数のばらつきは乱数を生成させることで表現し、モンテカルロ手法を用いて出力変数の不確実さを解析する。乱数の発生方法としては、メルセンヌ・ツイスター (Mersenne twister; MT) 法¹⁾を採用する。MTにより(0,1)区間の一様乱数を発生させ、逆変換等から、リスクモデルの入力変数の確率分布に従う乱数を計算する。また、発生させた乱数同士の相関を評価するため、各変数について相関係数を計算する。

変数 X_i と X_j の相関係数 r_{ij} は、変数間の共分散を各々の標準偏差で割ったものであり、具体的には式(2-2)で計算される。

$$r_{ij} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_j}} \quad (2.2)$$

ここで、 N は発生させた乱数の数、 x_{ik}, x_{jk} はそれぞれ X_i, X_j として発生させた乱数の要素、

\bar{x}_i, \bar{x}_j はそれぞれ X_i, X_j の平均、 $\sigma_{x_i}, \sigma_{x_j}$ はそれぞれ X_i, X_j の不偏標準偏差である。

本コードで取り扱い可能な確率分布は、以下のものである。

- 一様分布 (uniform distribution)
 - 対数一様分布 (loguniform distribution)
 - 正規分布 (normal distribution)
 - 対数正規分布 (lognormal distribution)
 - 指数分布 (exponential distribution)
 - 三角分布 (triangular distribution)

以下に、MTにより生成した(0,1)区間（※分布によっては[0,1]区間）の一様乱数 r を、上記の各確率分布に従う乱数 r' に変換する手法を述べる。

2.1 一様分布

一様分布(図 2.1)を規定するパラメータは、区間最小値 x_{\min} と最大値 x_{\max} である。 $r \rightarrow r'$ の変換は、区間幅だけ乱数分布を引き伸ばし、 x_{\min} まで値をシフトさせればよい。具体的には式(2-3)で一様分布乱数を得る。

$$r' = r \times (x_{\max} - x_{\min}) + x_{\min} \quad \dots \dots \dots \quad (2.3)$$

この分布の確率密度関数 (probability density function: PDF) $f(x)$ と累積分布関数 $F(x)$ (cumulative distribution function: CDF) は次式で定義される。

確率密度関数：

累積分布関数：

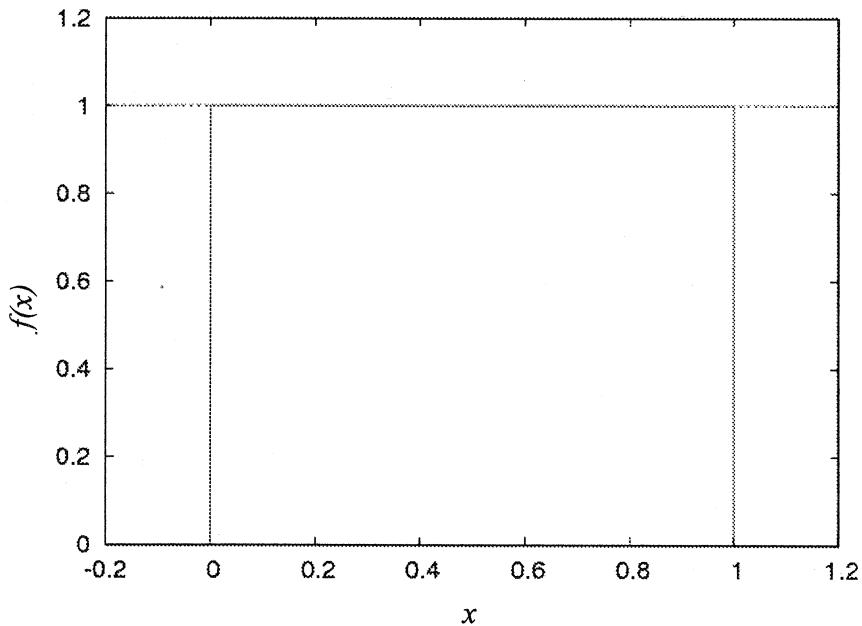


図 2.1 一様分布 ($x_{\min} = 0.0$ 、 $x_{\max} = 1.0$)

2.2 対数一様分布

対数一様分布(図 2.2)を規定するパラメータは、最小値 x_{\min} と最大値 x_{\max} である。 $r \rightarrow r'$ の変換は式(2-6)で行う。

$$r' = \exp\{r(\log(x_{\max}) - \log(x_{\min})) + \log(x_{\min})\} \quad \dots \dots \dots \quad (2-6)$$

この分布の確率密度関数 $f(x)$ と累積分布関数 $F(x)$ は、次式で定義される。

確率密度関数：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\log x_{\max} - \log x_{\min})x} & (x_{\min} < x < x_{\max}) \\ 0 & (x \leq x_{\min} \text{ or } x_{\max} \leq x) \end{cases} \quad \dots \quad (2.7)$$

累積分布関数：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_{\min}) \\ \frac{\log x - \log x_{\min}}{\log x_{\max} - \log x_{\min}} & (x_{\min} < x < x_{\max}) \\ 1 & (x_{\max} \leq x) \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (2.8)$$

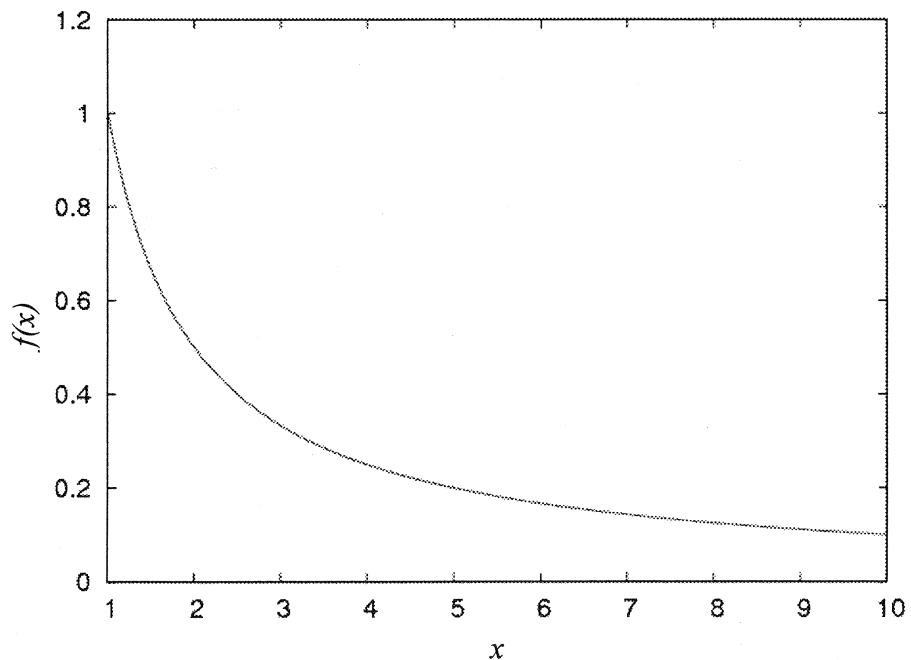


図 2.2 対数一様分布 ($x_{\min}=1.0$ 、 $x_{\max}=10$)

2.3 正規分布

正規分布(図 2.3)を規定するパラメータは、平均値 μ と標準偏差 σ である。一般に、 μ 、 σ の正規分布は、 $N(\mu, \sigma^2)$ で表し、確率密度分布関数は次式で定義される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \dots \dots \dots \quad (2.9)$$

本コードでは、一様な乱数から正規分布に従う乱数を発生させる方法として、ボックス・ミュラー (Box-Muller) 法を採用している。

$(0,1]$ 区間の一様な二つの乱数を r_1, r_2 とすると、 $N(0,1^2)$ 分布に従う乱数 r'_1, r'_2 は次式で与えられる。

$$\begin{cases} r'_1 = \sqrt{-2 \ln r_1} \sin(2\pi r_2) \\ r'_2 = \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2) \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (2.10)$$

$N(\mu, \sigma^2)$ に従う乱数は、上記の $N(0,1^2)$ に従う乱数 r'_1, r'_2 を

$$r'' = r' \times \sigma + \mu \quad \dots \dots \dots \quad (2.11)$$

に変換して求められる。

正規分布は裾が無限に広がっているため、非常に大きい値が乱数として生成される可能性があり、そのような数値が生成されれば解析に悪影響を与える可能性がある。これを防ぐため本コードでは σ と μ に加えて、値切捨てのパラメータ `Trun_min` と `Trun_max` ($0 \leq \text{Trun_min} < \text{Trun_max} \leq 1$) を導入する。

`Trun_min` : $\text{CDF}(r'') < \text{Trun_min}$ となる r'' は破棄

`Trun_max` : $\text{CDF}(r'') > \text{Trun_max}$ となる r'' は破棄

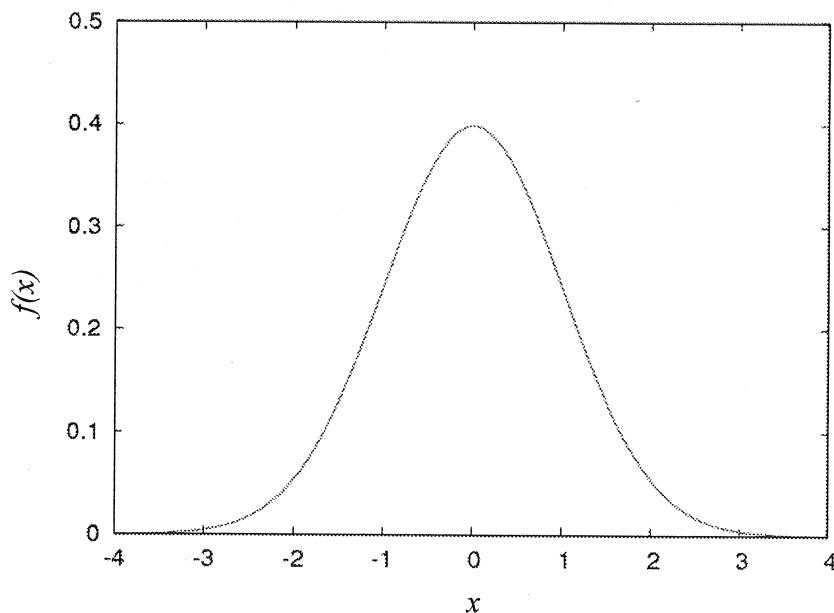


図 2.3 正規分布 ($\sigma=1.0$ 、 $\mu=0.0$)

2.4 対数正規分布

変数 X の対数をとった値が正規分布に従うとき、変数 X は対数正規分布に従うという(図 2.4)。 X の確率密度分布関数は、その対応する正規分布のパラメータ μ と σ を用いて次式で定義される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \dots \dots \dots \quad (2.12)$$

対数正規分布を規定するパラメータは、上記(μ , σ)以外にも何通りかの与え方がある。本コードでは(μ , σ)に加え、(Median, EF(Error Factor)) 及び(Mean, EF)での入力が可能である。パラメータを median, EF や mean, EF の形式で与える場合は、これらのパラメータから μ および σ が計算される。

median, EF を用いる場合

$$\sigma = \log(EF) \div 1.64485$$

$$\mu = \log(\text{median})$$

mean, EF を用いる場合

$$\sigma = \log(EF) \div 1.64485$$

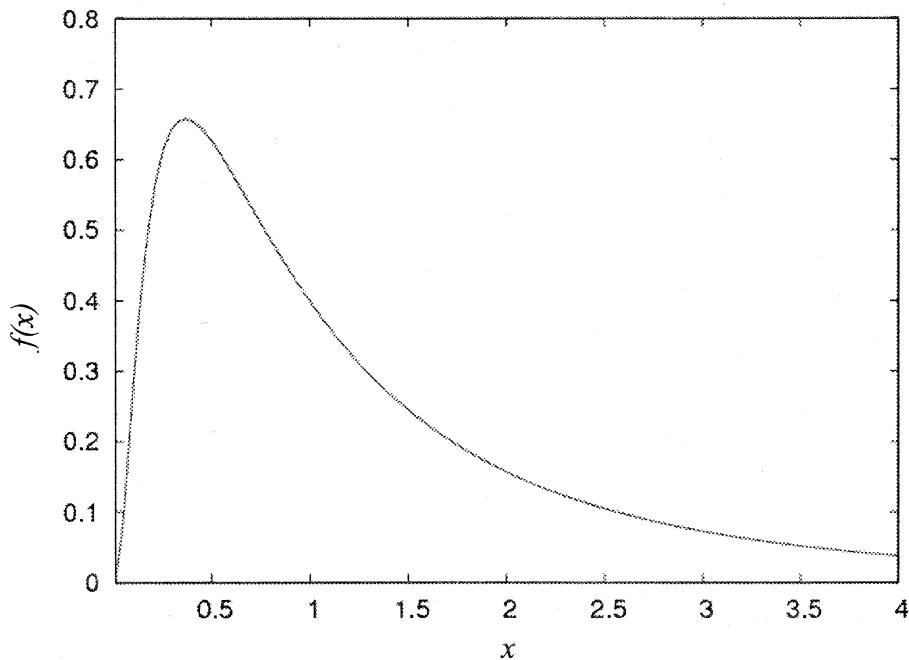
$$\mu = \log(\text{mean}) - \frac{\sigma^2}{2}$$

対数をとった値が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うことから、対数正規乱数は正規乱数の指数値を計算することにより得ることが出来る。本コードでは、まず 2.3 節に記したボックス・ミュラー (Box-Muller) 法で正規乱数を得て、その指数値を計算し対数正規乱数とする。

$(0,1]$ 区間の一様な二つの乱数を r_1, r_2 とすると、対数正規分布 (μ, σ) に従う乱数 r'_1, r'_2 は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} r_1' = \exp\left\{\sigma\sqrt{-2\ln r_1}\sin(2\pi r_2) + \mu\right\} \\ r_2' = \exp\left\{\sigma\sqrt{-2\ln r_1}\cos(2\pi r_2) + \mu\right\} \end{cases} \quad (2-13)$$

対数正規分布は裾が無限に広がっているため、本コードでは正規分布と同様、分布を規定するパラメータに加えてパラメータ `Trun_min` と `Trun_max` ($0 \leq \text{Trun_min} < \text{Trun_max} \leq 1$) を導入する。

図 2.4 対数正規分布 ($\sigma=1.0$ 、 $\mu=0.0$)

2.5 指数分布

指数分布(図 2.5)を規定するパラメータは $\lambda (>0)$ と b である。ここで λ は機器の故障(損傷)率、 b は定数である。確率密度関数 $f(x)$ 、累積分布関数 $F(x)$ は、それぞれ次式で定義される。

確率密度関数 :

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda(x-b)) \quad \dots \dots \dots \quad (2 \cdot 14)$$

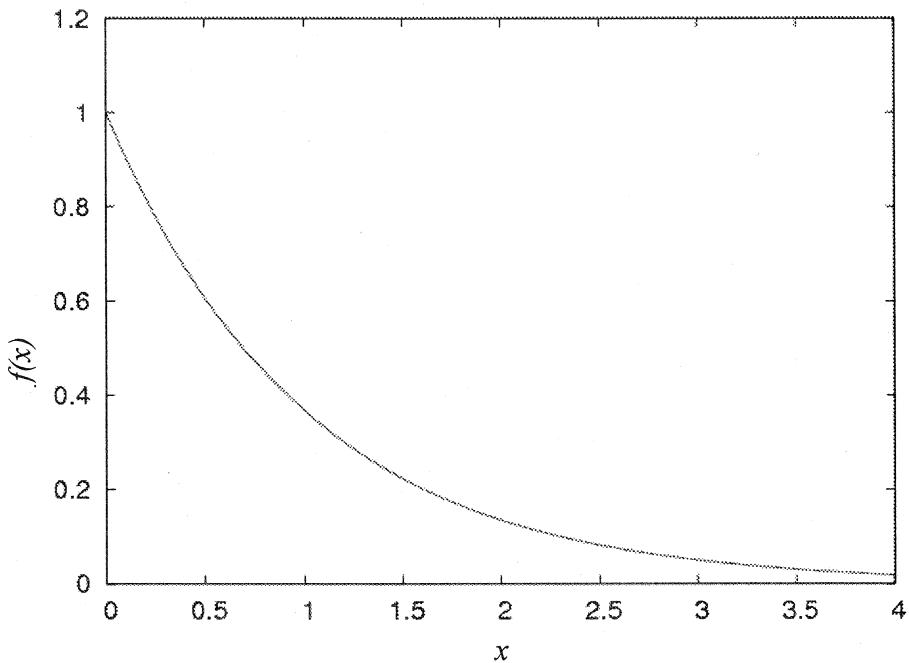
累積分布関数 :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda \cdot (x-b)) & (x \geq b) \\ 0 & (x < b) \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (2 \cdot 15)$$

従って、累積分布関数の逆関数は、式(2・16)で与えられる。 $F^{-1}(x)$ を用いて逆変換することにより、一様乱数 r から指数分布に従う乱数 r' が得られる。

$$F^{-1}(x) = -\frac{\log(1-x)}{\lambda} + b \quad (0 \leq x < 1) \quad \dots \dots \dots \quad (2 \cdot 16)$$

本コードでは、 λ に代えて尺度母数 $\theta = 1/\lambda$ を用いたパラメータ設定も行えるよう整備した。また、指数分布は裾が上側に無限に広がっているため、正規分布と同様、指数分布を規定するパラメータに加えてパラメータ $\text{Trun_max}(0 < \text{Trun_max} \leq 1)$ を導入する。

図 2.5 指数分布 ($\lambda=1.0$ 、 $b=0.0$)

2.6 三角分布

三角分布(図 2.6)を規定するパラメータは、区間最小値 x_{\min} 、最大値 x_{\max} 、ピーク位置 x_{peak} である。確率密度分布 $f(x)$ と累積分布関数 $F(x)$ は、それぞれ式(2-17)と式(2-18)で定義される。

確率密度分布 :

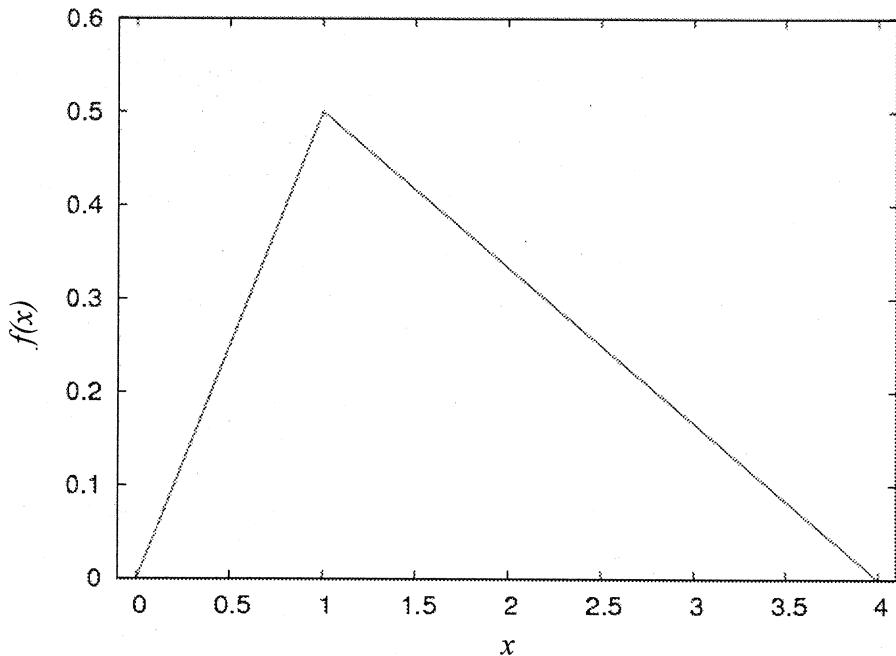
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x_{peak} - x_{\min})(x_{\max} - x_{\min})}(x - x_{\min}) & (x_{\min} \leq x \leq x_{peak}) \\ \frac{2}{(x_{peak} - x_{\max})(x_{\max} - x_{\min})}(x - x_{\max}) & (x_{peak} < x \leq x_{\max}) \end{cases} \quad (2-17)$$

累積分布関数 :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{\min})^2}{(x_{peak} - x_{\min})(x_{\max} - x_{\min})} & (x_{\min} < x \leq x_{peak}) \\ \frac{(x - x_{\max})^2}{(x_{peak} - x_{\max})(x_{\max} - x_{\min})} + 1 & (x_{peak} < x \leq x_{\max}) \end{cases} \quad (2-18)$$

これより、累積分布関数の逆関数は、式(2-19)のようになる。 $F^{-1}(x)$ を用いて逆変換することにより、一様乱数 r から三角分布に従う乱数 r' に変換できる。

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} x_{\min} + \sqrt{x(x_{\text{peak}} - x_{\min})(x_{\max} - x_{\min})} & \left(0 < x \leq \frac{x_{\text{peak}} - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right) \\ x_{\max} - \sqrt{(x-1)(x_{\text{peak}} - x_{\min})(x_{\max} - x_{\min})} & \left(\frac{x_{\text{peak}} - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} < x \leq 1 \right) \end{cases} \quad (2-19)$$

図 2.6 三角分布 ($x_{\min}=0.0$ 、 $x_{\text{peak}}=1.0$ 、 $x_{\max}=4.0$)

3. 不確実さ解析部の開発

不確実さ解析は、以下のように行う。2章の各確率分布に従って発生させたリスク評価モデルの入力変数 $\{X_1, \dots, X_m\}$ の乱数マトリクスを、リスク評価モデル式(2-1)に代入し、出力変数 Y の集合を得る(表3.1)。

表 3.1 Y の集合

X_1	X_2	…	X_m	Y
x_{11}	x_{21}	…	x_{m1}	y_1
x_{12}	x_{22}	…	x_{m2}	y_2
…	…	…	…	…
x_{1n}	x_{2n}	…	x_{mn}	y_n

Y の集合から、確率密度関数 $f_Y(y)$ および累積分布関数 $F_Y(y)$ が得られる。 $F_Y(y)$ に基づき、次の諸統計量を計算する。

- Y の最小値 Y_{\min} 、最大値 Y_{\max} 、中央値 Y_{median}
- 5%位、25%位、75%位、95%位の Y の値 $Y_{0.05}, Y_{0.25}, Y_{0.75}, Y_{0.95}$
- 95%信頼度区間の値 (2.5%~97.5%区間幅)

また、 Y の平均値 Y_{mean} および分散 V_Y を計算し、リスクを評価する。図3.1に累積分布関数と各 Y 値の概要を示した。

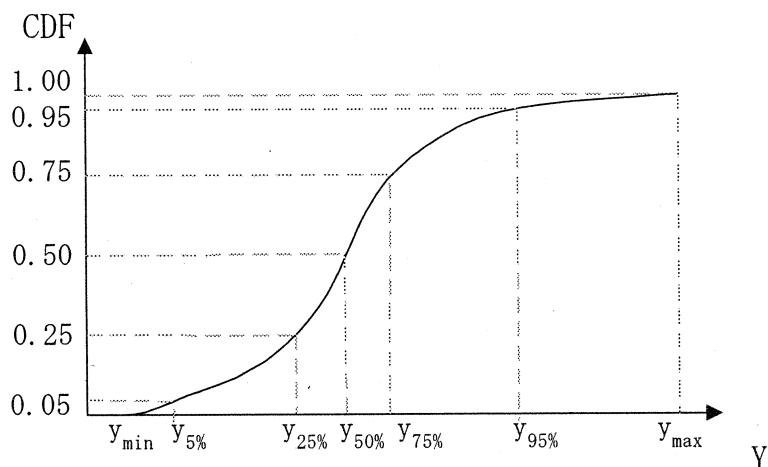


図 3.1 累積分布関数 (CDF) と各%位の Y の値

確率密度分布 $f_Y(y)$ には、ヒストグラム (Histogram) 法とカーネル密度推定法 (Kernel Density Estimation: KDE) による算出が可能である。

以下に、 $f_Y(y)$ の計算手法について述べる。

3.1 ヒストグラム法

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ について、最小の y を y_{\min} 、最大の y を y_{\max} とする。区間幅は $y_{\max} - y_{\min}$ とし、階級数 N を与えると、階級幅 $\Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/N$ を得る。区間 $[y_{\min}, y_{\min} + \Delta y]$ に存在する Y の個数を数え、 $f_Y(y_{\min})$ とする。同様に、次の階級値として、 $[y_{\min} + \Delta y, y_{\min} + 2\Delta y]$ 区間に存在する Y の個数を数え、 $f_Y(y_{\min} + \Delta y)$ とする。以下同様に、 $[y, y + \Delta y]$ 区間にに入った Y の個数を $f_Y(y)$ とする。これを、 Y が現れなくなるまで行う。結果として、 Y のヒストグラムが生成され、得られた $f_Y(y)$ が Y の確率密度分布となる。

3.2 カーネル密度推定法

離散的な集合 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ が与えられたとき、 Y の頻度分布を平滑化し、確率密度を求める手法として、カーネル確率密度推定値を用いる方法がある。ヒストグラム法よりカーネル密度推定法の方がより正確な確率密度分布が得られると言われている²⁾。ある値 y^* でのカーネル確率密度推定値は、次式で与えられる。

$$\hat{f}_h(y^*) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y^* - y_i}{h}\right) \quad \dots \quad (3-1)$$

ここで、 n は乱数サンプルの個数、 h はバンド幅 (bandwidth)、 $K(u)$ はカーネル関数であり、次の式を満足する分布関数である。

$$\int K(z) dz = 1 \quad \dots \quad (3-2)$$

すなわち、各 y_i の周辺確率密度分布としてカーネル関数を与え、その総和を規格化し、確率密度関数を得る手法である。通常、カーネル関数は、ガウス型カーネル (正規分布関数。式(3-3)) やイパネクニコフ・カーネル (式(3-4)) が良く用いられている。

ガウス型カーネル :
$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad \dots \quad (3-3)$$

カーネル密度推定法による確率密度分布を求める例を図 3.2 に示す。

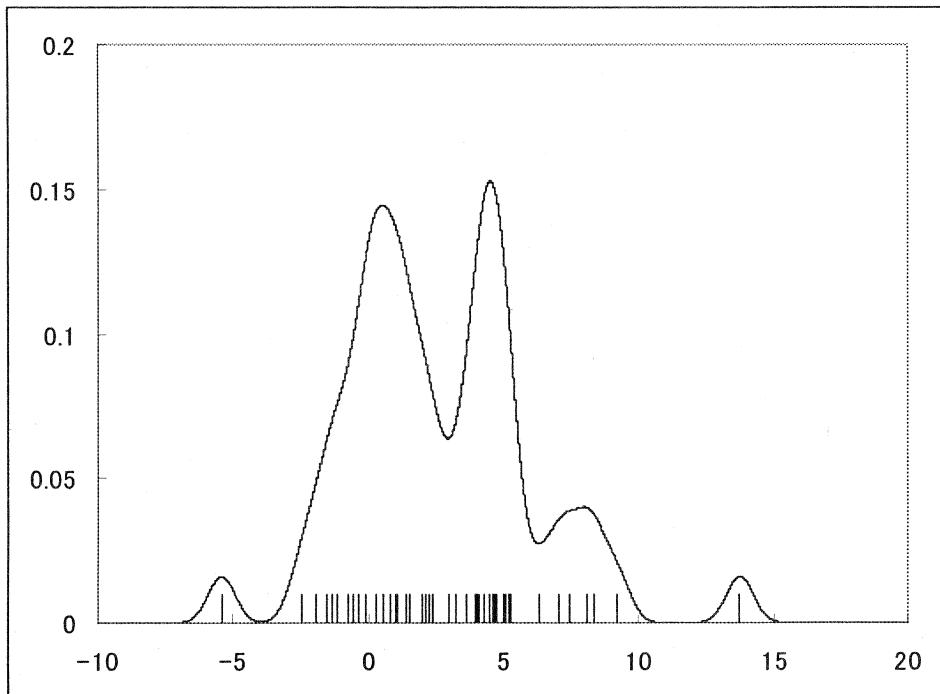


図 3.2 カーネル密度推定法による PDF 計算の例

(離散的な 50 変数の分布 (図中黒棒) にガウス型カーネル関数を掛けて、畳み込んだもの。

平滑化された密度推定分布 $\hat{f}_y(y)$ が得られる。この例では、ケース数が 50 と少ないため、局所的なピークが残っている。)

本コードでは、 $K(u)$ をガウス型カーネル関数として計算を行う。

$$K\left(\frac{y - y_i}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - y_i)^2}{2h^2}\right) \dots \quad (3.5)$$

バンド幅 h は、 $\hat{f}_h(y)$ の平滑さ、ひいては形状に大きな影響を与えるので、慎重に決定する必要がある。本コードでは、最適なバンド幅 h を決定するために、Sheather-Jones の幅選択法⁴⁾を使用する。以下に Sheather-Jones の幅選択法の概要を述べる。

本来の密度関数 f が十分滑らか (f'' は絶対連続で f'' が 2 乗可積分) であると仮定すると、
 $n \rightarrow \infty$ のときに $h \rightarrow 0$ かつ $nh \rightarrow \infty$ であれば、本来の密度関数 f と、推定密度関数 \hat{f} の差 $Bias$

と分散Varは、テーラー展開によって、次式で表せる。

$$Bias[\hat{f}(x)] = \frac{h^2 \sigma_K^2 f''(x)}{2} + O(h^4) \quad \dots \dots \dots \quad (3.6)$$

$$Var[\hat{f}(x)] = \frac{f(x)R(K)}{nh} + O(n^{-1}h^{-1}) \quad \dots \dots \dots \quad (3.7)$$

それぞれの誤差項を除いた $Bias$ の 2 乗と分散 Var を足し合せたものが漸近的な平均二乗誤差 $AMSE$ (Asymptotic Mean Squared Error) となる。

$$AMSE[\hat{f}(x)] = \left[\frac{h^2 \sigma_K^2 f''(x)}{2} \right]^2 + \frac{f(x)R(K)}{nh} + \dots \quad (3.8)$$

式(3-8)を x の全領域で積分を行うと、AMISE (Asymptotic Mean Integrated Squared Error) が得られる。

従って、最適なバンド幅は次の式を満たす。

$$h_0 = \left[\frac{R(K)}{\sigma_K^4 R(f'')} \right]^{1/5} n^{-1/5} \quad \dots \dots \dots \quad (3-10)$$

式(3-10)において、 $R(f'')$ の推定値として $R(\hat{f}'')$ を仮定し、 h を解くと、式(3-11)になる。

$$\left[\frac{R(K)}{\sigma_K^4 \hat{S}_D(\hat{\alpha}_2(h))} \right]^{1/5} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/5} - h = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (3-11)$$

ここで、 K はカーネル関数であり、本モデルでは正規分布を仮定する。

$$K\left(\frac{X - X_i}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(X - X_i)^2}{h^2}\right). \dots \quad (3-12)$$

$R(K), \sigma_K$ は次式で定義され、正規分布カーネル関数の場合は積分可能で、それぞれ $1/(2\sqrt{\pi})$, 1 である。

\hat{S}_D は次の式で表される。

$$\hat{S}_D(\alpha) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{\alpha^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi^{iv} \left\{ \frac{(X_i - X_j)}{\alpha} \right\} \quad \dots \quad (3-15)$$

$\hat{\alpha}_2$ については、 $D_1(\phi)/R^{1/7}(\phi)$ を一定とすると、次式で表される。

$$\hat{\alpha}_2(h) = 1.357 \left\{ \frac{\hat{S}_D(a)}{\hat{T}_D(b)} \right\}^{1/7} h^{5/7} \quad \dots \quad (3-16)$$

ここで、カッコ内の項は、 $R(f'')/R(f''')$ の2階推定値であり、 \hat{T}_D については次式で表される。

$$\hat{T}_D(b) = -\frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{b^7} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi^{vi} \left\{ \frac{X_i - X_j}{b} \right\} \quad \dots \quad (3-17)$$

ここで、 $\phi(x)$ はある分布関数であり、ここでは正規分布を仮定する。従って、 ϕ およびその微分式は、それぞれに次式で表せる。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \dots \quad (3-18)$$

$$\phi^{iv}(x) = \frac{d^4\phi}{dx^4} = (x^4 - 6x^2 + 3)\phi(x) \quad \dots \quad (3-19)$$

$$\phi^{vi}(x) = \frac{d^6\phi}{dx^6} = (x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15)\phi(x) \quad \dots \quad (3-20)$$

a, b は次の値である。

$$a = 0.920 \hat{\lambda} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/7}, \quad b = 0.912 \hat{\lambda} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/9} \quad \dots \quad (3-21)$$

4. 感度解析部の開発

リスク評価モデル（式(2-1)）の入力変数 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ の不確実さが出力変数 Y の不確実さへ及ぼす影響の度合いを調べるために、感度解析を実施する。感度解析は、大別するとローカル感度解析とグローバル感度解析の2つに分類できる。ある入力変数の重要度を評価するとき、他の入力変数の値を平均値（或いは中央値）に固定し、着目する変数も平均値（或いは中央値）から僅かの変動範囲に限定して変化させる場合の感度解析手法はローカル感度解析と呼ばれている。それとは逆に、着目変数及び他のモデル入力変数が、各々の確率分布関数に従って、分布の全範囲の値を考慮に入れる感度解析手法をグローバル感度解析と呼ぶ。本コードでは、グローバル感度指標に着目し、分散に基づく Sobol' の感度解析指標 S_1 及び S_T ^{5,6)}を始め、複数の感度指標を実装した。

以下に、それぞれの指標について述べる。

4.1 Sobol'の S_1 と S_T 指標

入力変数 X_i に対して、Sobol' の1次の感度指標(First-order sensitivity index) S_1 ⁵⁾および全感度指標(Total sensitivity index) S_T ⁶⁾は、それぞれ次の式で与えられる。

$$S_{1i} = \frac{V(E(Y|X_i))}{V(Y)} \quad \dots \dots \dots \quad (4-1)$$

$$S_{Ti} = \frac{E(V(Y|X_{-i}))}{V(Y)} = 1 - \frac{V(E(Y|X_{-i}))}{V(Y)} \quad \dots \dots \dots \quad (4-2)$$

ここで、 $V(Y)$ はすべての X_i を変動させたときの Y の分散である。 $E(Y|X_i)$ は、 X_i をある値に固定したときの Y の期待値、 $V(E(Y|X_i))$ は X_i の値を変化させたときの $E(Y|X_i)$ の分散である。従って、 S_1 は Y の全分散に対する着目する入力変数の単独の寄与度を表す。一方、 $V(Y|X_{-i})$ は、 X_i 以外のすべての入力変数 $\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_m\}$ をそれぞれある値に固定し、 X_i の値だけを変動させたときの Y の分散であり、 $E(V(Y|X_{-i}))$ は、 X_i 以外のすべての入力変数を変化させたときの $V(Y|X_{-i})$ の期待値である。従って、 S_T は Y の全分散に対する着目する入力変数のすべての寄与度を表す。

式(4-1)及び(4-2)の通り、 S_1 と S_T の計算では2重の積分を行わなければならないので、計算量が膨大になる。そのため、Saltelli⁷⁾は計算ループを減らし、 S_1 と S_T の近似解を導出する手法を提案した。この手法は、Ishigami&Homma⁸⁾の計算手法を発展させたものであり、以下では Ishigami&Homma 手法と呼ぶこととする。また、Saltelli ら¹³⁾は既存の FAST(Fourier

Amplitude Sensitivity Test) 手法⁸⁻¹²⁾を拡張し、 S_1 と S_T を求める手法を提出した。ここで、この手法を拡張 FAST 手法と呼ぶ。

以下には、Ishigami&Homma 手法と拡張 FAST 手法による S_1 と S_T の計算プロセスを紹介する。

4.1.1 Ishigami & Homma 手法による S_1 と S_T の計算

i) Ishigami & Homma 手法による S_1 の計算

リスク評価モデルの入力変数 $\{X_1, \dots, X_m\}$ が相互独立の場合、入力変数の同時確率分布は式(4・3)で計算する。

モデル出力変数 Y の期待値と分散は式(4-4)と(4-5)により求める。

$$V(Y) = \int \int \dots \int (f(x_1, x_2, \dots, x_k) - E(Y))^2 \prod_{j=1}^m p_j(x_j) dx_i \dots \dots \dots \quad (4.5)$$

$$= \int \int \dots \int f^2(x_1, x_2, \dots, x_k) \prod_{j=1}^m p_j(x_j) dx_j - E^2(Y)$$

ある入力変数 X_i だけをある値 \tilde{x}_i に固定して、得られた条件付き Y の分散は次式で計算される。

$$V(Y|X_i = \tilde{x}_i) = \int \int \dots \int (f(x_1, x_2, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_m) - E(Y|X_i = \tilde{x}_i))^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m p_j(x_j) dx_j$$

$$= \int \int \dots \int (f^2(x_1, x_2, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_m)) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m p_j(x_j) dx_j - E^2(Y|X_i = \tilde{x}_i) \quad \dots(4-6)$$

$V(Y|X_i = \tilde{x}_i)$ の期待値は、式(4-7)のように計算される。

$$E(V(Y|X_i)) = \int \dots \int f^2(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k) \prod_{j=1}^m p_j(x_j) dx_j - \left[E^2(Y|X_i = \tilde{x}_i) p_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i \right] \quad \dots \dots \dots (4-7)$$

式(4-5)と式(4-7)の差は次式に表される。

$$V(Y) - E(V(Y|X_i)) = \int E^2(Y|X_i = \tilde{x}_i) p_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i - E^2(Y) \dots \dots \dots (4.8)$$

$V(Y) = E(V(Y|X_i)) + V(E(Y|X_i))$ であることから、式(4・8)は次式に等しい。

$$V(E(Y|X_i)) = \int E^2(Y|X_i = \tilde{x}_i) p_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i - E^2(Y) \quad \dots \dots \dots \quad (4.9)$$

$\int E^2(Y|X_i = \tilde{x}_i) p_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i$ を高速に計算するため、Ishigami&Homma 手法³⁾を用いて次式のように書き替える。

$$\begin{aligned}
 & \int E^2(Y|X_i = \tilde{x}_i) p_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i = \\
 & \int \left\{ \int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_m) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m p_j(x_j) dx_j \right\}^2 p_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i = \dots (4-10) \\
 & \int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_m) f(x'_1, x'_2, \dots, \tilde{x}'_i, \dots, x'_m) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (p_j(x_j) dx_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (p_j(x'_j) dx'_j) p_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i = \\
 & \int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m) f(x'_1, x'_2, \dots, x_i, \dots, x'_m) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (p_j(x_j) dx_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (p_j(x'_j) dx'_j)
 \end{aligned}$$

式(4-10)は、 $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m)f(x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_m)$ の期待値であり、以下のように与えられる。

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N f(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rm}) f(x'_{r1}, x'_{r2}, \dots, x'_{r(i-1)}, x_{ri}, x'_{r(i+1)}, \dots, x'_{rm}) \dots \dots \dots \quad (4-11)$$

ここで、 N は乱数の個数である。

式(4-1)、(4-9)、(4-10)、(4-11)から、 S_1 が求められる。

$$S_{1i} = \frac{V(E(Y|X_i))}{V(Y)} = \frac{(\hat{U}_i - E^2(y))}{V(Y)} \quad \dots \quad (4.12)$$

ii) Ishigami & Homma 手法による S_T の計算

S_1 と同様なアプローチで、 S_T も求められる。

$$S_{Ti} = \frac{E(V(Y|X_{-i}))}{V(Y)} = \frac{V(Y) - V(E(Y|X_{-i}))}{V(Y)} \\ = 1 - \frac{V(E(Y|X_{-i}))}{V(Y)} = 1 - \frac{\hat{U}_{-i} - E^2(Y)}{V(Y)} \quad \dots \dots \dots \quad (4.13)$$

ここで、

4.1.2 拡張 FAST 手法による S_1 と S_T の計算

FAST 手法とは、ある変形関数 $G_i(\sin \omega_i s)$ (Transformation Function) 及び特定周波数 ω_i (Characteristic Frequency)を用い、モデルの各入力変数を書き換えて、フーリエ変換により各入力変数の分散によるモデル出力変数の分散への寄与度を評価する手法である。従来の FAST 手法⁸⁻¹²⁾では S_1 しか計算できなかったが、近年、Saltelli ら¹³⁾が既存の FAST 手法を拡張し、 S_T の計算もできるように拡張した。以下には、拡張 FAST 手法による S_1 と S_T の計算手法を示す。

i) 拡張 FAST 手法による S_1 の計算

式(2-1)から Y の r 次モーメントを計算できる。

ここで、 K^n は入力変数の集合、 $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ はすべての入力変数の同時確率密度関数である。

ある変形関数 $G_i(\sin \omega_i s)$ 及び特定周波数 ω_i を用いて、式(4-15)の入力変数 X_i を式 (4-16) に変形できる。

ここで、 s がスカラ変数で、 $(-\infty, +\infty)$ に変動する。変形関数 $G_i(\sin \omega_i s)$ に関しては、文献¹³⁾記載の

$$G_i(\sin \omega_i s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin(\omega_i s + \varphi_i)) \quad \dots \dots \dots \quad (4-17)$$

を用いた。ここで、 φ_i は $[0, 2\pi]$ の乱数である。 $\varphi_i = 0$ の時、式(4-17)は

$$G_i(\sin \omega_i s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin \omega_i s) \quad \dots \dots \dots \quad (4-18)$$

になる。

式(4-16)中の ρ_0 は式(4-19)を満足する必要がある。

ここで、 a_i は任意の整数で、 m は入力変数の個数である。計算の際、 a_i が

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq M+1 \quad \dots \dots \dots \quad (4.20)$$

を満足していれば、式(4-19)で得られた ω_i が使用可能である。ここで、 M は干渉係数(the interference factor)であり、通常、整数 4 か 6 を用いる。なお、一例として、 $M=4$ の時に式(4-20)を満足する ω_i を、表 4.1 に示す。

表 4.1 入力変数の個数 N と各入力変数に与えた特定周波数 ω_i

Number of Input Variables	Frequencies
N	$\{\omega_i\}$
5	{11, 21, 27, 35, 39}
6	{1, 21, 31, 37, 45, 49}
7	{17, 39, 59, 69, 75, 83, 87}
8	{23, 55, 77, 97, 107, 113, 121, 125}

Ergodic 定理により、式(4-15)は次式に等しい。

$$\bar{y}^{(r)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^r(x_1(s), x_2(s), \dots, x_m(s)) \, ds \quad \dots \dots \dots \quad (4.21)$$

従って、 $\langle y^{(r)} \rangle$ を求めることは、 $\bar{y}^{(r)}$ を求める事になる。簡略化のため、

$f^r(x_1(s), x_2(s), \dots, x_m(s))$ を $f(s)$ と記す。 ω_i が正の整数の時、 $T=2\pi$ なので、式(4-21)は式(4-22)になる。

$$\bar{y}^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^r(s) \, ds \quad \dots \dots \dots \quad (4.22)$$

$r=1$ を式(4-22)に代入し、

$$\bar{y}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \, ds \quad \dots \dots \dots \quad (4.23)$$

となる。 $r=2$ を式(4-22)に代入すると、

$$\bar{y}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(s) \, ds \quad \dots \dots \dots \quad (4.24)$$

となる。また、 Y の分散は

で与えられる。

式(4-22)中の $f(s)$ を Fourier 変換すると

ここで、

Parseval 定理により、式(4-24)は

となる。式(4-25)、(4-27)-(4-29)から、 $V(Y)$ が求められる。

同様に、

$$V(E(Y | X_i)) = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (A_{p\omega_i}^2 + B_{p\omega_i}^2) \quad \dots \dots \dots \quad (4-31)$$

従って、式(4-1)、(4-30)、(4-31)により、各入力変数の S_1 が計算できる。

ii) 拡張 FAST 手法による S_T の計算

4.1.2 i)で述べたように、ある入力変数 X_i の S_i を求めるとき、 X_i に周波数 ω_i を与えた。 S_T

を求めるときにも、同じ ω_i を X_i に与える。ただし、他の入力変数 $\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_m\}$ には ω_i

より小さい($\leq \omega_i/(2M)$)周波数 $\{\omega_{-i}\} = \{\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_m\}$ を与える必要がある¹³⁾。

式(4-31)と同様に、 $V(E(Y | X_{-i}))$ が式(4-32)から求められる。

$$V(E(Y | X_{-i})) = 2 \sum_{L=1}^{\frac{\omega_i}{2}} (A_L^2 + B_L^2) \quad \dots \dots \dots \quad (4.32)$$

ここで、 $V(E(Y|X_i))$ 及び $V(E(Y|X_i X_{-i}))$ による $V(E(Y|X_{-i}))$ への影響を取り除くため、通常 L の上限を ω_i の $1/2$ までにする。

未完

$$V(Y) = V(E(Y | X_{-i})) + E(V(Y | X_{-i})) \quad (4.33)$$

があるため、 $E(V(Y|X_{-i}))$ が次式により求められる。

$$E(V(Y | \dot{X}_{-i})) \equiv V(Y) - V(E(Y | X_{-i})) \quad (4.34)$$

従って、式(4-2)、(4-30)、(4-34)により S_T が求められる。

4.2 Borgonovo の δ_i 指標

すべての入力変数 $\{X_1, \dots, X_m\}$ の値が変動する際に得られる Y の確率密度関数を $f_Y(y)$ とする。また、 X_i だけをある値 x_i^* に固定して、他のすべての入力変数の値が変動する際に得られた条件付 Y の確率分布を $f_{Y|X_i}(y)$ とする。 $f_{Y|X_i}(y)$ と $f_Y(y)$ の相違を、図 4.1 に示すように両者間の面積 $s(x_i^*)$ で評価する。Sobol' の感度指標は Y の分散という 2 次のモーメントに対する着目変数の寄与度を表すのに対して、以下の式(4-35)は確率密度関数の変化を表す指標で Y のモーメントに依存しない。

X_i のすべての値に対して、 $f_Y(y)$ からの $f_{Y|X_i}(y)$ への移動による面積 $s(x_i^*)$ の期待値は、次式で計算できる。

ここで、 $f_{X_i}(x_i)$ は X_i の周辺確率密度分布である。

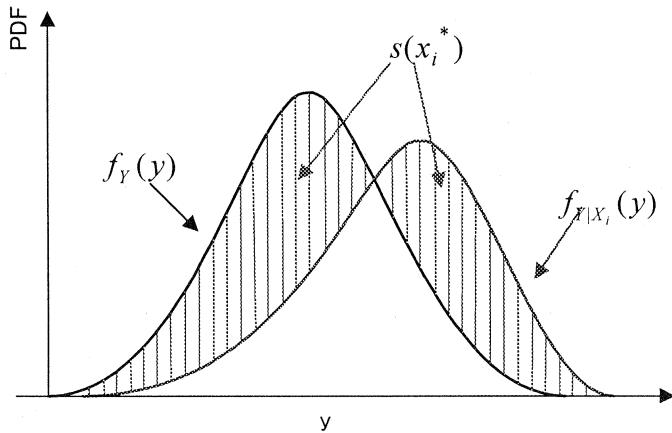


図 4.1 $f_{Y|X_i}(y)$ と $f_Y(y)$ の相違は両者間の面積 $s(x_i^*)$ で評価する

Borgonovo は、式(4-36)を用いて、 δ_i 指標を次式で定義した¹⁴⁾。

4.3 Liu&Homma の S_{X_i} 指標

すべての入力変数 $\{X_1, \dots, X_m\}$ の値が変動する際に得られた Y の累積密度関数を $F_Y(y)$ とする。また、 X_i だけをある値 x_i^* に固定して、他のすべての入力変数の値が変動する際に得られた条件付 Y の累積確率分布を $F_{Y|X_i}(y)$ とする。Liu&Homma¹⁵⁾は、Borgonovo の δ_i 指標を拡張し、確率密度関数の変化から累積密度関数 $F_{Y|X_i}(y)$ と $F_Y(y)$ の相違を、両者間の面積 $A_{X_i}(x_i^*)$ で評価した（図 4.2）。

X_i のすべての値に対して、 $F_y(y)$ から $F_{y|X_i}(y)$ へのシフト期待値は、式(4-39)で計算する。

ここで、 $f_{X_i}(x_i)$ は、 X_i の周辺確率密度分布である。

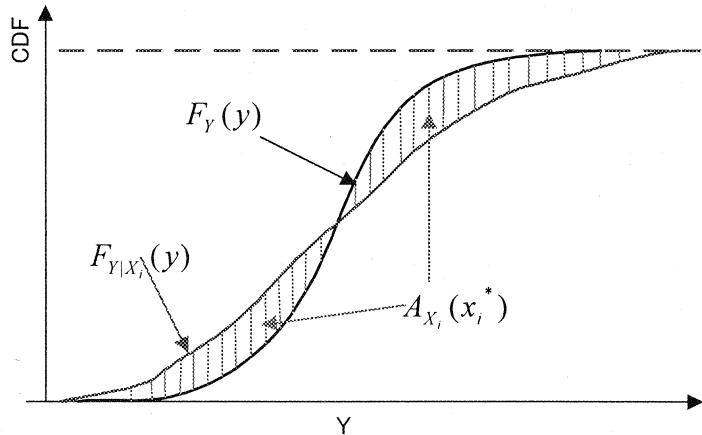


図 4.2 $F_{Y|X_i}(y)$ と $F_Y(y)$ の相違は、両者間の面積 $A_{X_i}(x_i^*)$ で評価する

Liu&Homma¹⁵⁾は、次式で S_{X_i} 指標を定義した。

ただし、リスク評価モデルにおいて、出力変数であるリスク評価結果の期待値 $E(Y) > 0$ なので、

S_{X_i} は次式で定義される。

4.4 情報エントロピーに基づく指標 *Entropy*

すべての入力変数が変動するとき、出力変数 Y の情報エントロピーは式(4.42)で定義される。

$$H(Y) = - \int f_Y(y) \ln(f_Y(y)) dy \quad \dots \dots \dots \quad (4.42)$$

ここで、 $f_Y(y)$ はすべての入力変数が変動するとき、得られた Y の確率密度分布である。

入力変数 X_i をある値 x_i^* に固定し、他のすべての入力変数が変動するときの Y の条件付エンタロピーは式(4-43)で表される。

$$H(Y | X_i = x_i^*) = - \int f_{Y|X_i}(y) \ln(f_{Y|X_i}(y)) dy \quad \dots \dots \dots \quad (4.43)$$

ここで、 $f_{Y|X_i}(y)$ は、 X_i をある値 x_i^* に固定したときの Y の条件付確率密度分布である。

X_i のすべての値に対して、 Y の条件付エントロピーは次式で表される。

ここで、 $f_{X_i}(x_i)$ は X_i の周辺確率密度分布である。

X_i の情報エントロピー感度指標は、式(4・45)で定義される。

4.5 Kullback-Libler 距離に基づく KLD 指標

すべての入力変数 $\{X_1, \dots, X_m\}$ の値が変動する際に得られた Y の確率密度関数を $f_Y(y)$ とする。また、 X_i だけをある値 x_i^* に固定して、他のすべての入力変数の値が変動する際に得られた条件付 Y の確率分布を $f_{Y|X_i}(y)$ とする。 $f_{Y|X_i}(y)$ と $f_Y(y)$ の相違は、式(4-46)で評価することができる。

$$Deviation(x_i^*) = \int f_{Y|X_i}(y) \ln \left[\frac{f_{Y|X_i}(y)}{f_Y(y)} \right] dy \quad \dots \dots \dots \quad (4.46)$$

X_i のすべての値に対して、 $f_Y(y)$ と $f_{Y|X_i}(y)$ のシフト期待値がエントロピー指標 KLD_{X_i} であり、式(4-47)で定義される。

4.6 Minkowski 距離に基づく MD 指標

入力変数 X_i をある値 x_i^* に固定したときの Y の条件付累積分布関数を $F_{Y|X_i}(y)$ とする。すべての入力変数が変動するときの Y の累積分布関数を $F_Y(y)$ とする。 $F_Y(y)$ と $F_{Y|X_i}(y)$ の相違 $D(x_i^*)$ は、次の式で表される。

$$D\left(x_i^*\right) = \frac{1}{E(Y)} \left\{ \int_0^1 \left(y_{\left(X_i=x_i^*\right)}^{(p)} - y^{(p)} \right)^2 dp \right\}^{1/2} \quad \dots \dots \dots \quad (4.48)$$

ここで、 $y^{(p)}$ は累積分布関数 $F_Y(y)$ 上で累積確率 p となる Y の値(p 位点)である。また、 $y_{(X_i=x_i)}^{(p)}$

は、条件付累積分布関数 $F_{Y|X_i}(y)$ 上で累積確率 p となる Y の値である。 $E(Y)$ はすべての入力変数が変動するときの Y の期待値である。

X_i のすべての値に対して、 $F_{Y|X_i}$ の $F_Y(y)$ からの相違 $D(x)$ の期待値が Minkowski 距離に基づく指標 MD であり、次式で定義される。

5. GSALab コード GUI の開発

GSALab コードの使用利便性を向上させるため、GUI の開発を行った。GSALab コードの GUI の概要を以下に示す。

5.1 入力変数の設定画面

GSALab コードを起動すると、入力変数設定画面（図 5.1）が表示される。

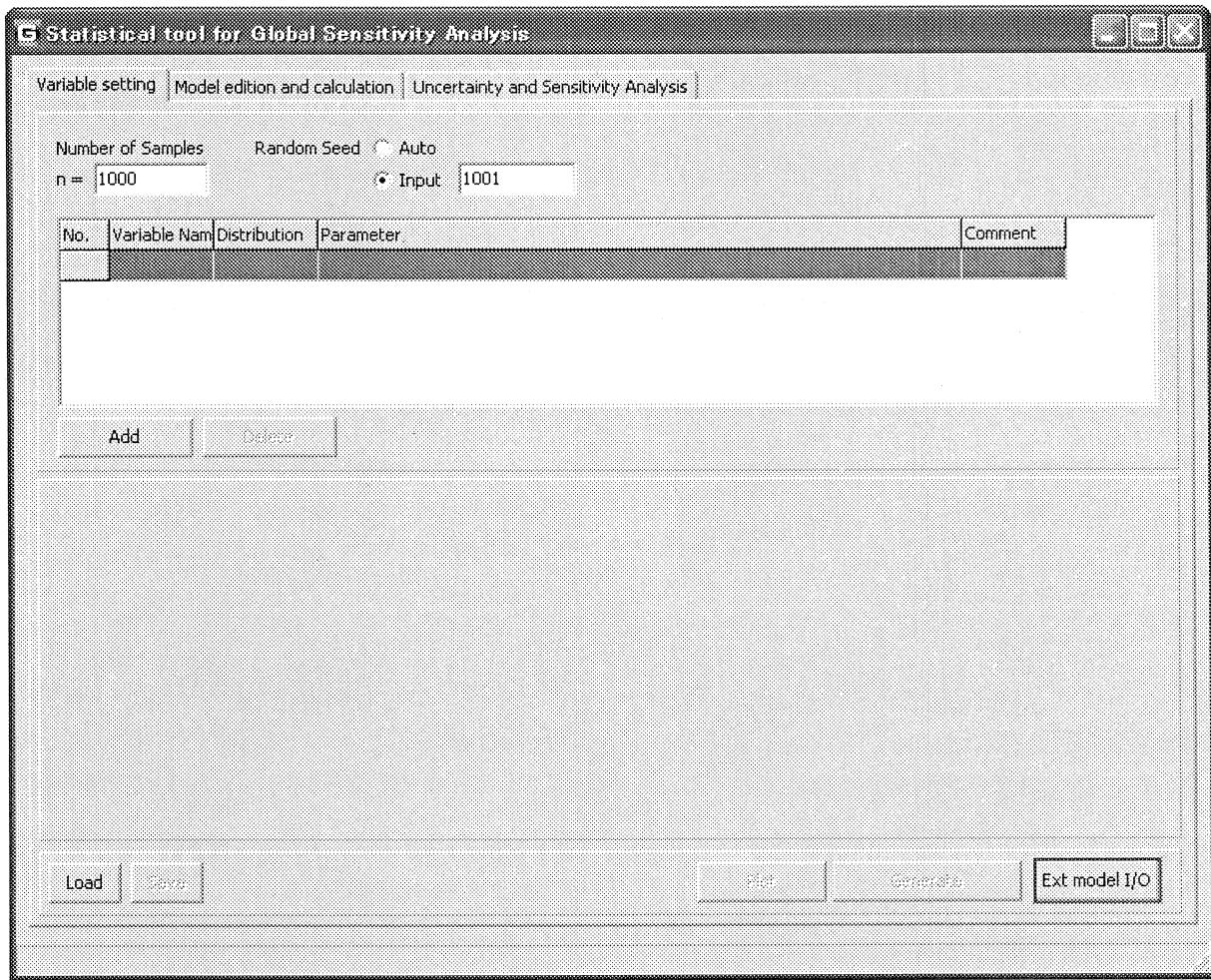


図 5.1 モデル入力変数設定画面

サンプル数、乱数シードをそれぞれ指定し、「Add」をクリックすると、図 5.2 下部のような、パラメータ設定画面が表示される。ここで、変数名、確率分布の種類、分布のパラメータなどを指定する。「Set」により、編集した内容が確定され、上部の変数リストに結果が反映される。「Add」を再度押すと、2 番目の変数設定画面となる。これを繰り返し、必要な変数数だけパラメータをセットする。

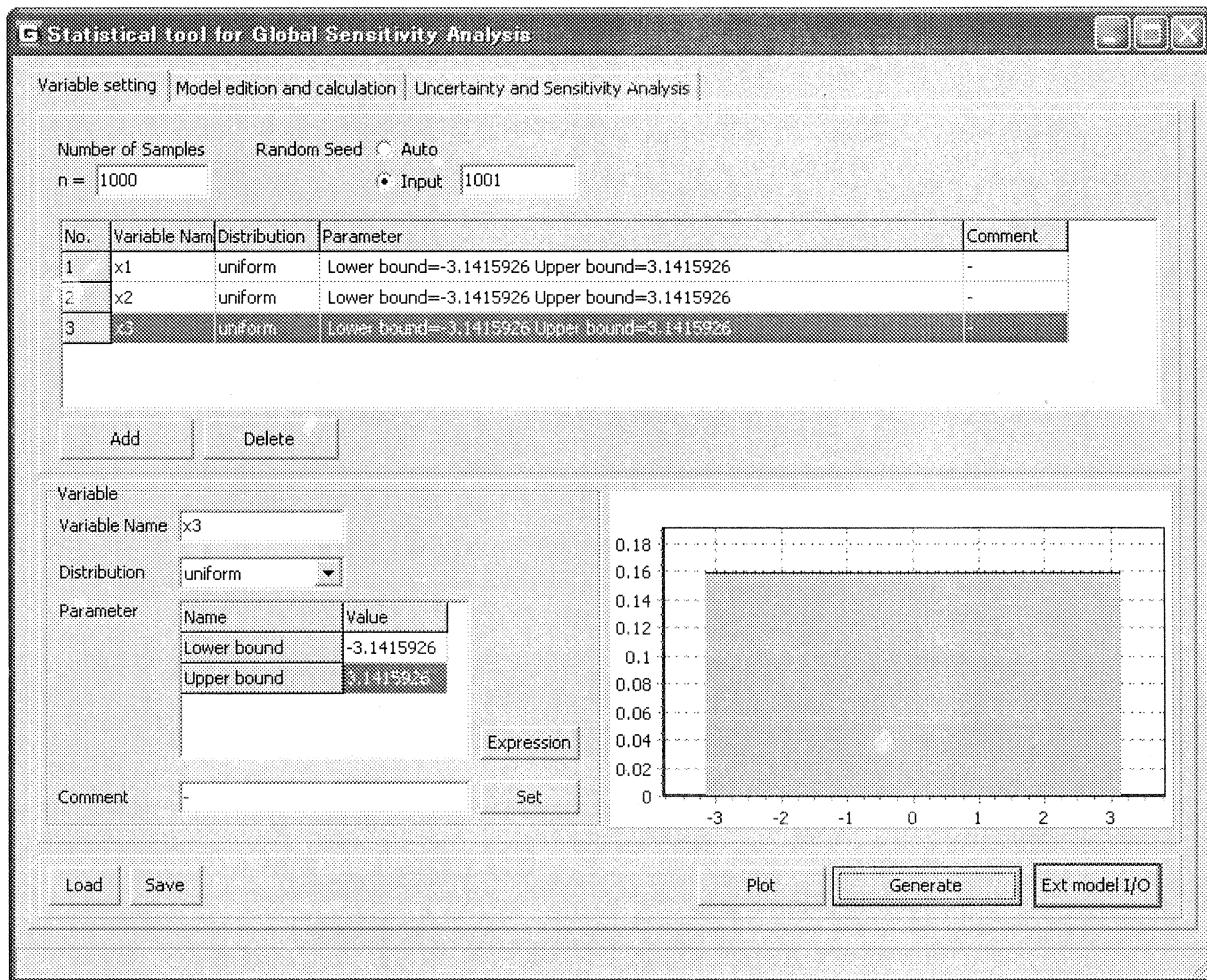


図 5.2 モデル入力変数のパラメータの設定

入力変数のパラメータの確定後、「Generate」により乱数計算が実施され、入力変数マトリクスが生成される。画面左下の[Save]により、発生した乱数マトリックスのデータファイルへの保存ができる。また、指定したデータファイルから入力変数の乱数マトリクスを読み込む場合には、[Load]を用いる。画面右下の「Plot」により、生成した入力変数の乱数同士の散布図、入力変数の乱数の頻度分布などの表示ができる（図 5.3—図 5.6）。

（「Copy All」により、生成されたすべての値のクリップボードへのコピーができる。また、コピーの部分指定は、マウスで領域を選定し、Ctrl キー + 「C」でできる。）

以上で入力変数の設定は終了である。次節に GSALab コードに取り組まれるモデルに関する設定を説明する。GSALab コードに取り組まれない外部モデルについては、図 5.2 右下の「Ext Model I/O」により、GSALab コードで発生した入力変数の乱数マトリックスをデータファイルへの出力や外部モデルで計算した結果の GSALab コードへの読み込みが可能である。

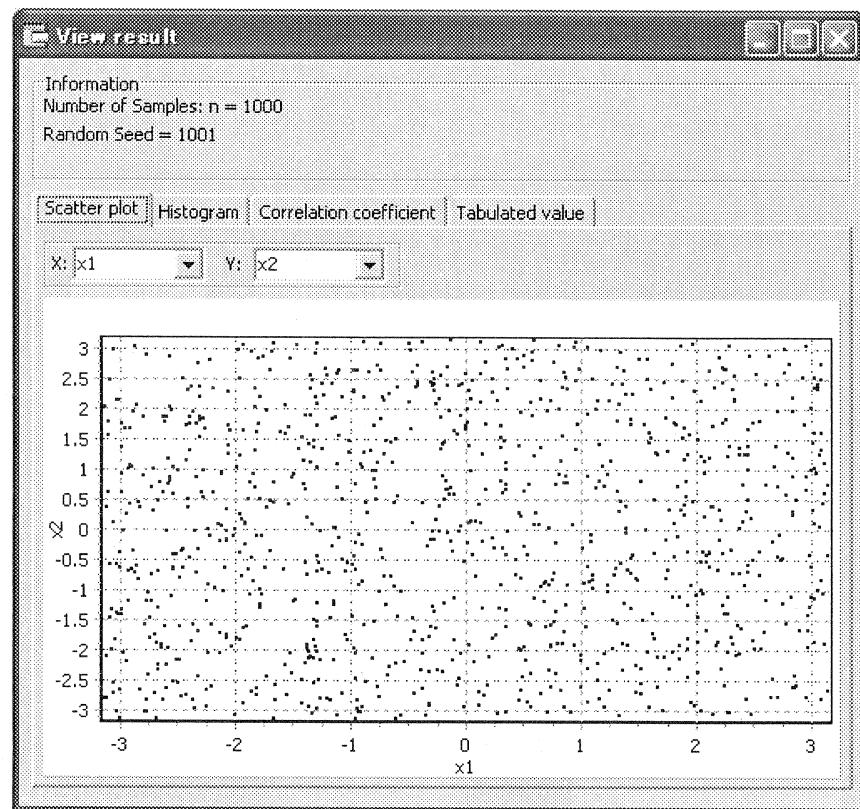


図 5.3 モデル入力変数乱数同士の散布図

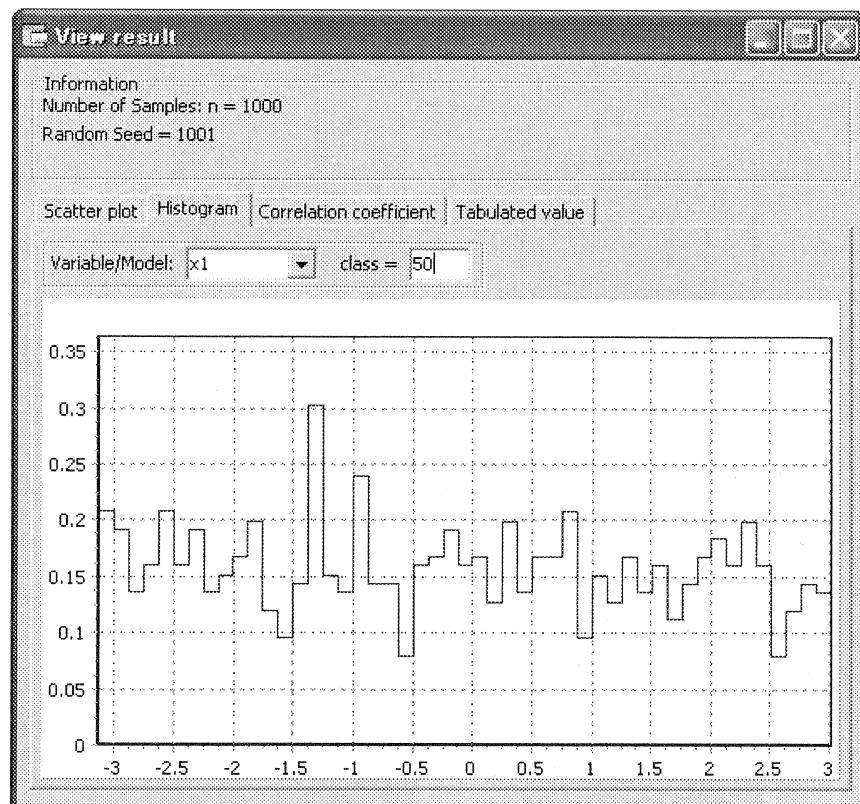


図 5.4 生成したモデル入力変数の乱数の頻度分布

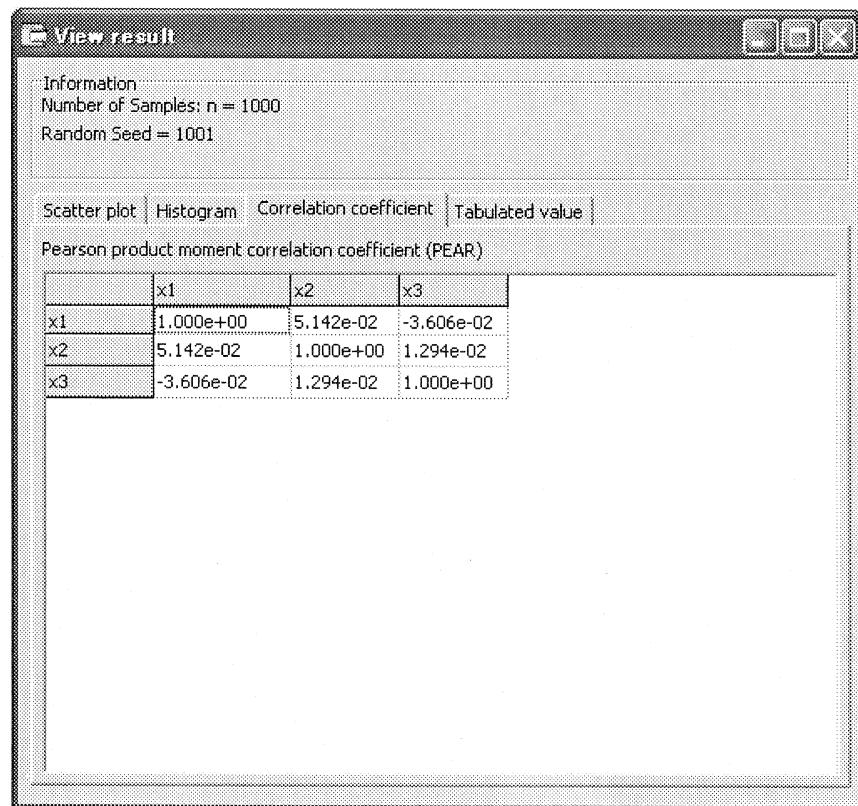


図 5.5 モデル入力変数間の相関係数

Information
Number of Samples: n = 1000
Random Seed = 1001

Scatter plot | Histogram | Correlation coefficient | Tabulated value |

	x1	x2	x3
1	-2.794e+00	1.867e+00	2.298e-01
2	-7.299e-01	-4.736e-01	-2.367e+00
3	-8.984e-01	-2.919e+00	-1.868e+00
4	-2.654e-01	-1.629e+00	1.736e+00
5	2.429e+00	-2.795e+00	2.807e-01
6	1.584e+00	1.613e+00	-8.946e-01
7	-1.311e+00	2.194e+00	1.747e+00
8	8.134e-01	3.062e+00	2.380e+00
9	-2.726e+00	-7.319e-01	1.968e+00
10	-2.791e-01	2.422e+00	2.900e+00
11	-2.710e+00	9.902e-01	-2.595e+00
12	-2.766e+00	-3.008e+00	2.437e+00
13	-2.598e+00	-2.615e+00	-2.140e+00
14	1.763e+00	-2.304e+00	-1.060e+00
15	1.509e+00	1.453e+00	-2.116e+00

Page : 1 / 10 View No.: 1 - 100 Copy All

図 5.6 生成したモデル入力変数の乱数マトリックス

5.2 モデル関数の設定画面

「Model edition and calculation」タブの初期状態を図 5.7 に示す。「Add」ボタンで、リスクモデル関数の設定を開始する。

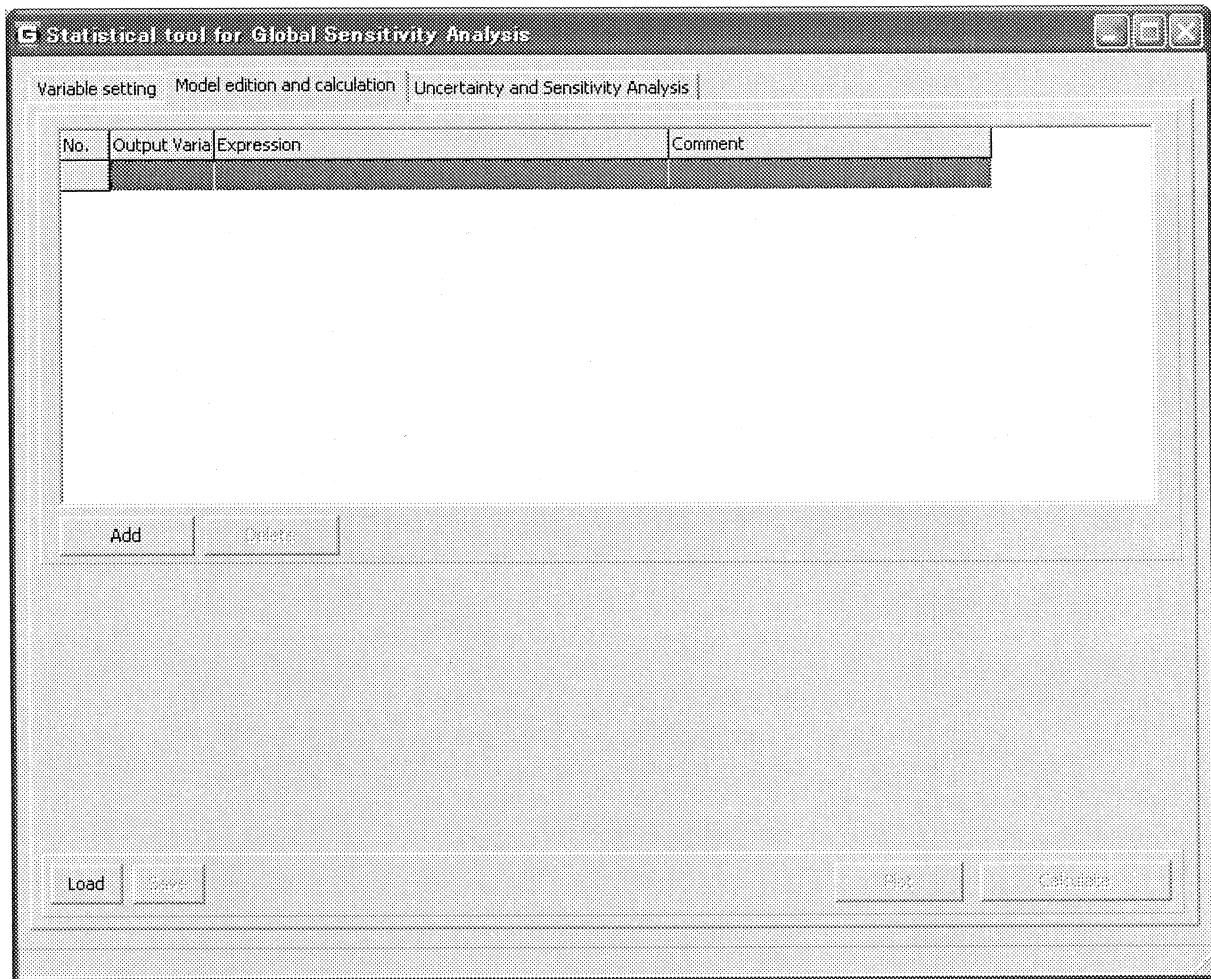


図 5.7 リスクモデル関数設定画面（初期状態）

「Add」により、図 5.8 のようなリスクモデル関数設定画面が表示される。出力変数名及び関数を記入し、「Set」で、記入内容を上部の出力変数リストに反映させると、「Calculate」の実行ができるようになる。

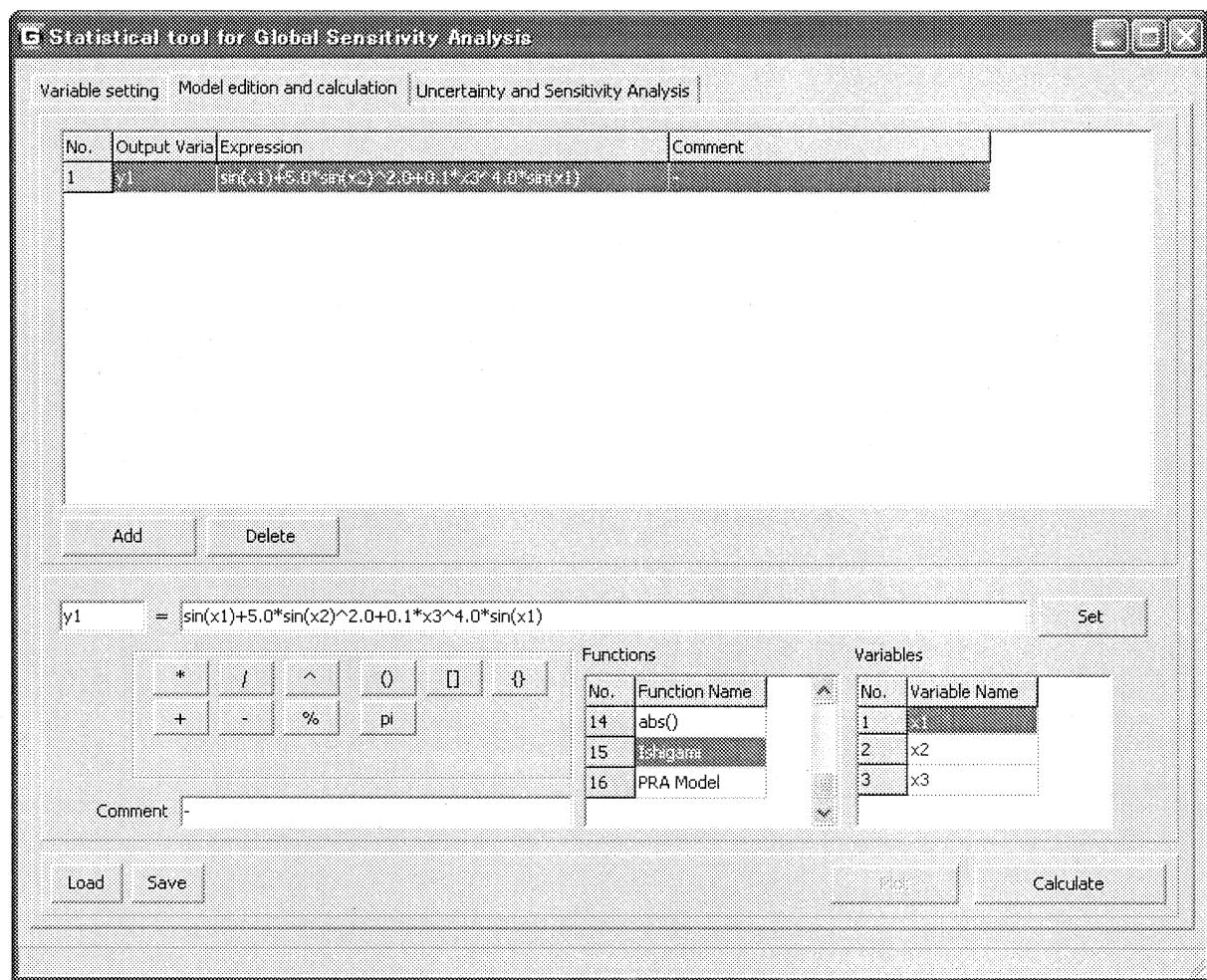


図 5.8 リスクモデル関数設定画面（モデル設定中）

リスクモデル関数を設定したら、「Calculate」で計算が実行される。生成した出力変数と入力変数の相関関係などのプロット図は、「Plot」により確認できる（図 5.9—図 5.12）。

図 5.6 のときと同様、「Copy All」により乱数表データがクリップボードへコピーされ、Excel などへの貼り付けができる。

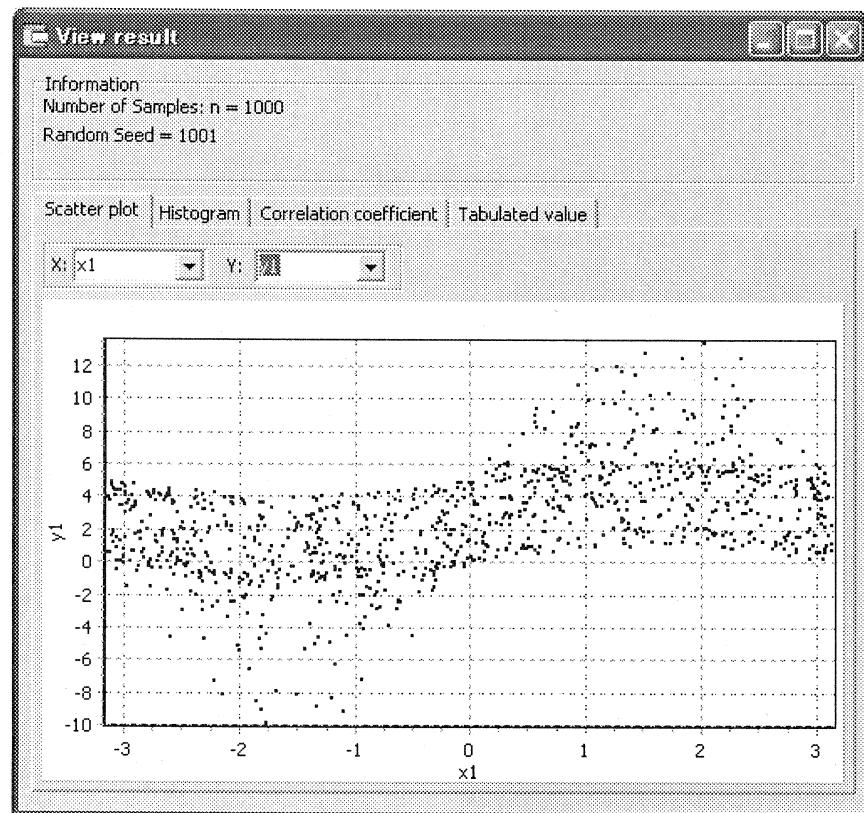


図 5.9 変数間の散布図

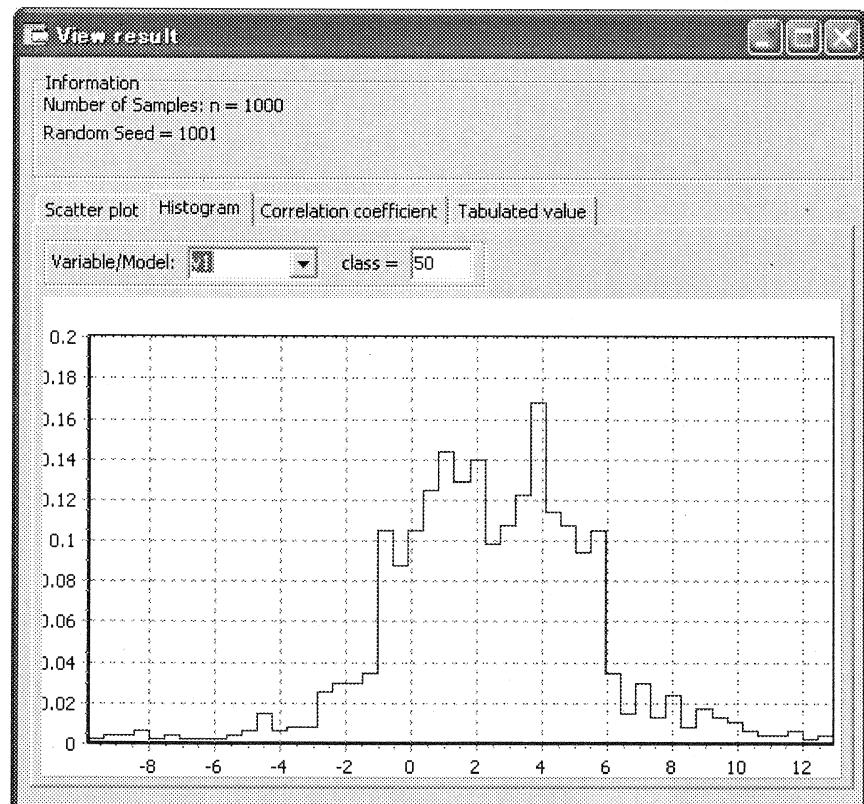


図 5.10 モデル出力変数の頻度分布（階級数=50）

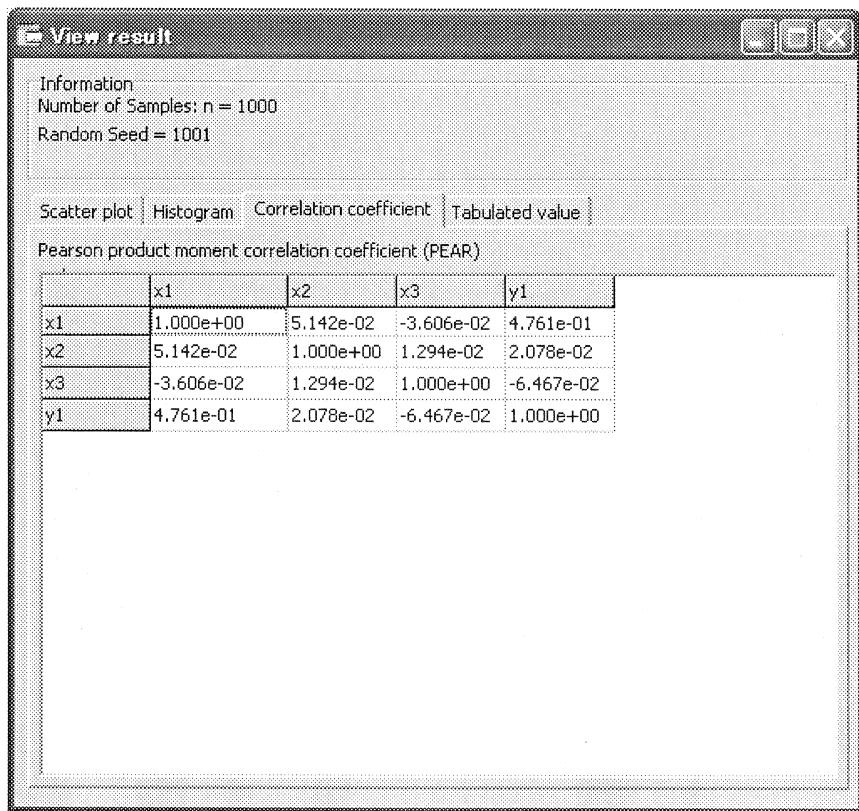


図 5.11 変数間の相関係数表

The screenshot shows a software window titled "View result". In the top left, there is an "Information" section with the text: "Number of Samples: n = 1000" and "Random Seed = 1001". Below this is a tab bar with four tabs: "Scatter plot", "Histogram", "Correlation coefficient", and "Tabulated value". The "Tabulated value" tab is selected, displaying a table of 15 rows of generated data values for variables x1, x2, x3, and y1. The table is as follows:

	x1	x2	x3	y1
1	-2.794e+00	1.867e+00	2.298e-01	4.233e+00
2	-7.299e-01	-4.736e-01	-2.367e+00	-1.721e+00
3	-8.984e-01	-2.919e+00	-1.868e+00	-1.490e+00
4	-2.654e-01	-1.629e+00	1.736e+00	4.483e+00
5	2.429e+00	-2.795e+00	2.807e-01	1.233e+00
6	1.584e+00	1.613e+00	-8.946e-01	6.055e+00
7	-1.311e+00	2.194e+00	1.747e+00	1.429e+00
8	8.134e-01	3.062e+00	2.380e+00	3.089e+00
9	-2.726e+00	-7.319e-01	1.968e+00	1.225e+00
10	-2.791e-01	2.422e+00	2.900e+00	-5.425e-02
11	-2.710e+00	9.902e-01	-2.595e+00	1.184e+00
12	-2.766e+00	-3.008e+00	2.437e+00	-1.570e+00
13	-2.598e+00	-2.615e+00	-2.140e+00	-3.431e-01
14	1.763e+00	-2.304e+00	-1.060e+00	3.865e+00
15	1.509e+00	1.453e+00	-1.211e+00	7.034e+00

At the bottom left, it says "Page : 1 / 10 View No.: 1 - 100". At the bottom right, there is a "Copy All" button.

図 5.12 生成した変数値

5.3 不確実さ解析画面

5.1 及び 5.2 節で設定した入力変数及びモデル関数を用いて、不確実さ解析・感度解析を実施することができる。不確実さ解析・感度解析の設定は、「Uncertainty and Sensitivity Analysis」タブで行う。図 5.13 に不確実さ解析の初期画面を示す。「Model」ドロップダウンリストで、解析を行う出力変数名を選び、「Uncertainty Analysis」を選択すると、不確実さ解析画面が表示される(図 5.14)。

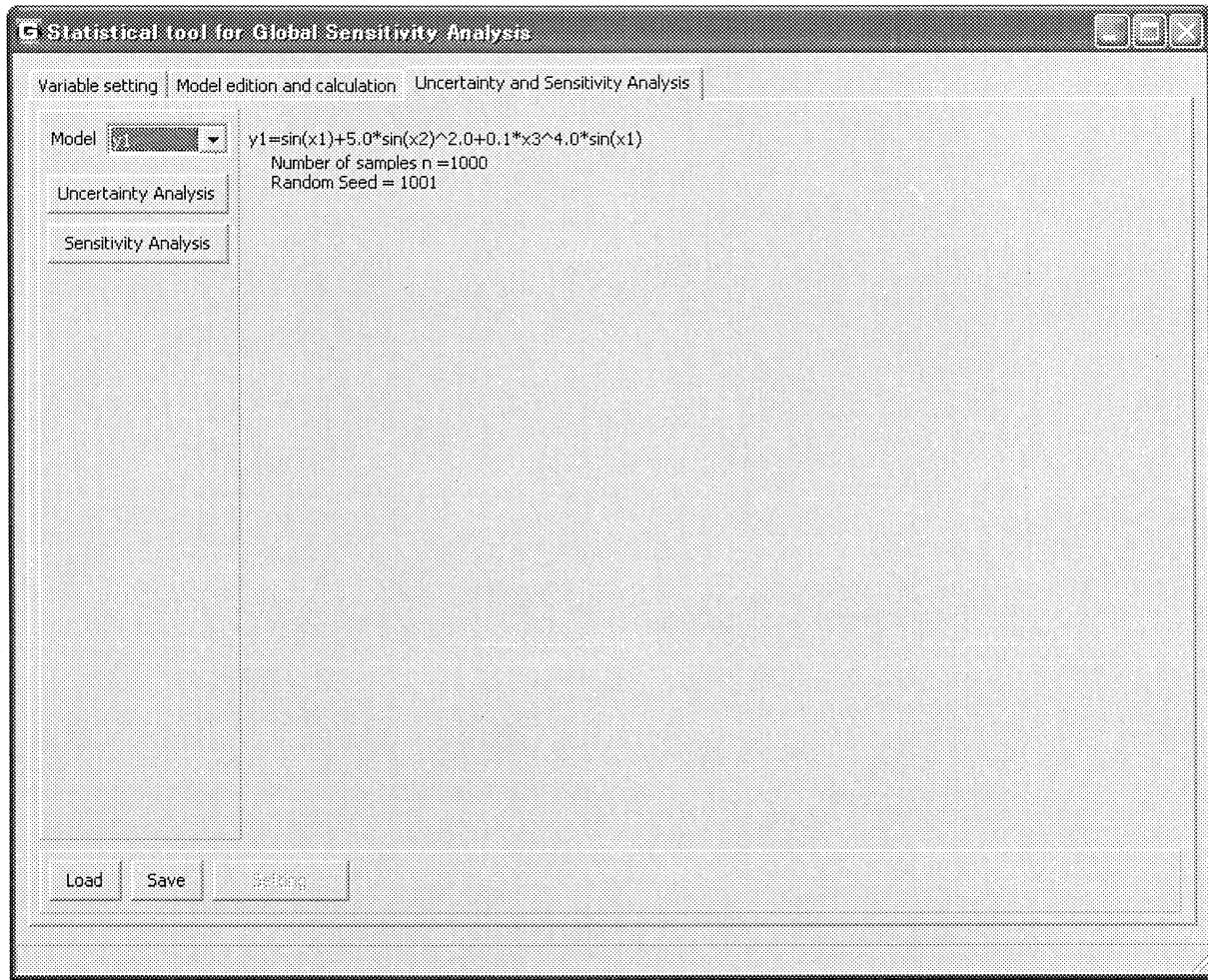


図 5.13 Uncertainty and Sensitivity Analysis タブ初期画面

5.3.1 ヒストグラム法に関する設定画面

出力変数のヒストグラムを表示するには、図 5.14 のように、「Histogram」ラジオボタンを選択し、「class」で階級数を設定する。「PDF」は確率密度分布を、「CDF」は累積分布を表す。「View」により、ヒストグラムの表示ができる。また、各種統計量、各%位点も計算され、右側に表示される（図 5.15）。

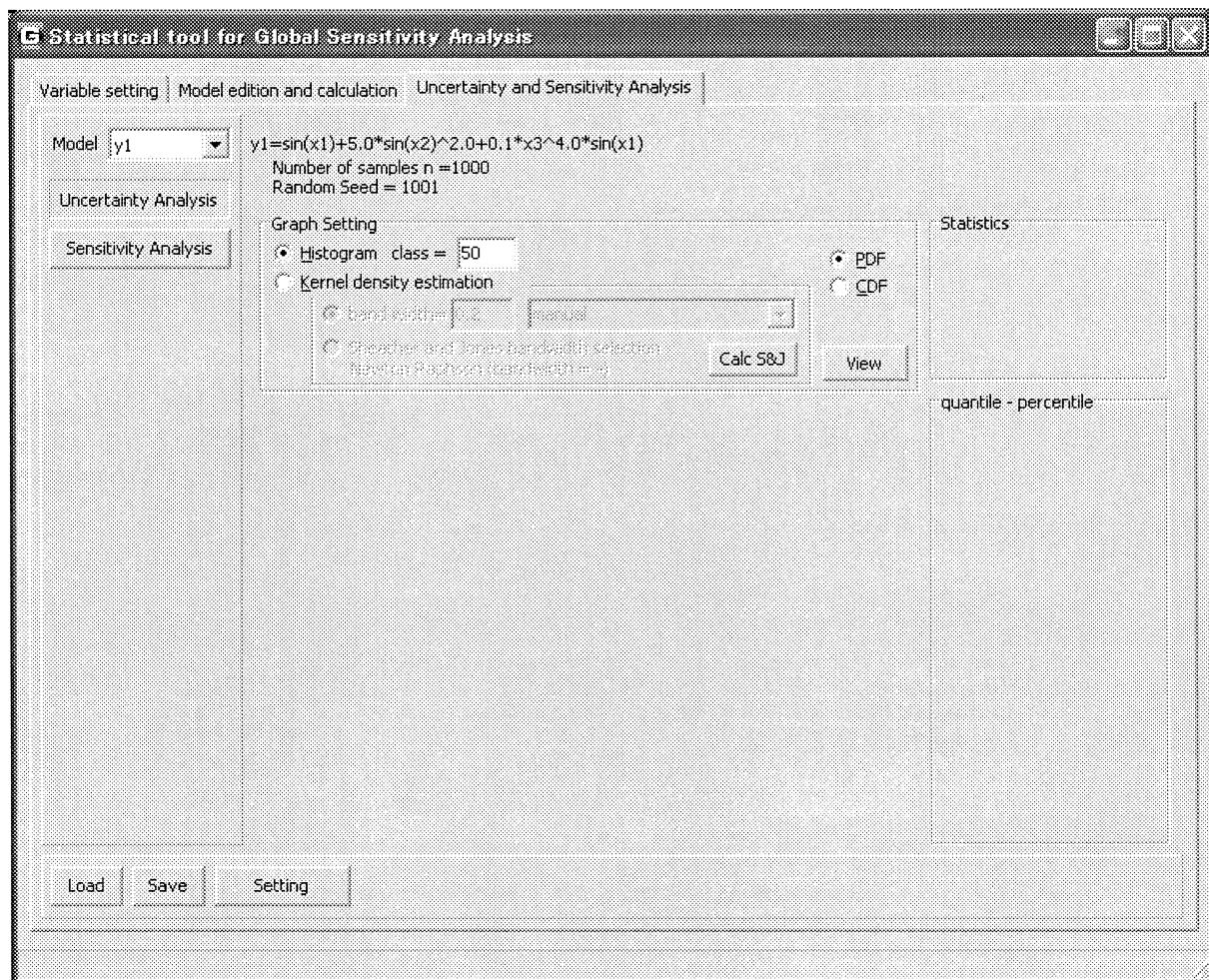


図 5.14 ヒストグラム法による不確実さ解析設定画面

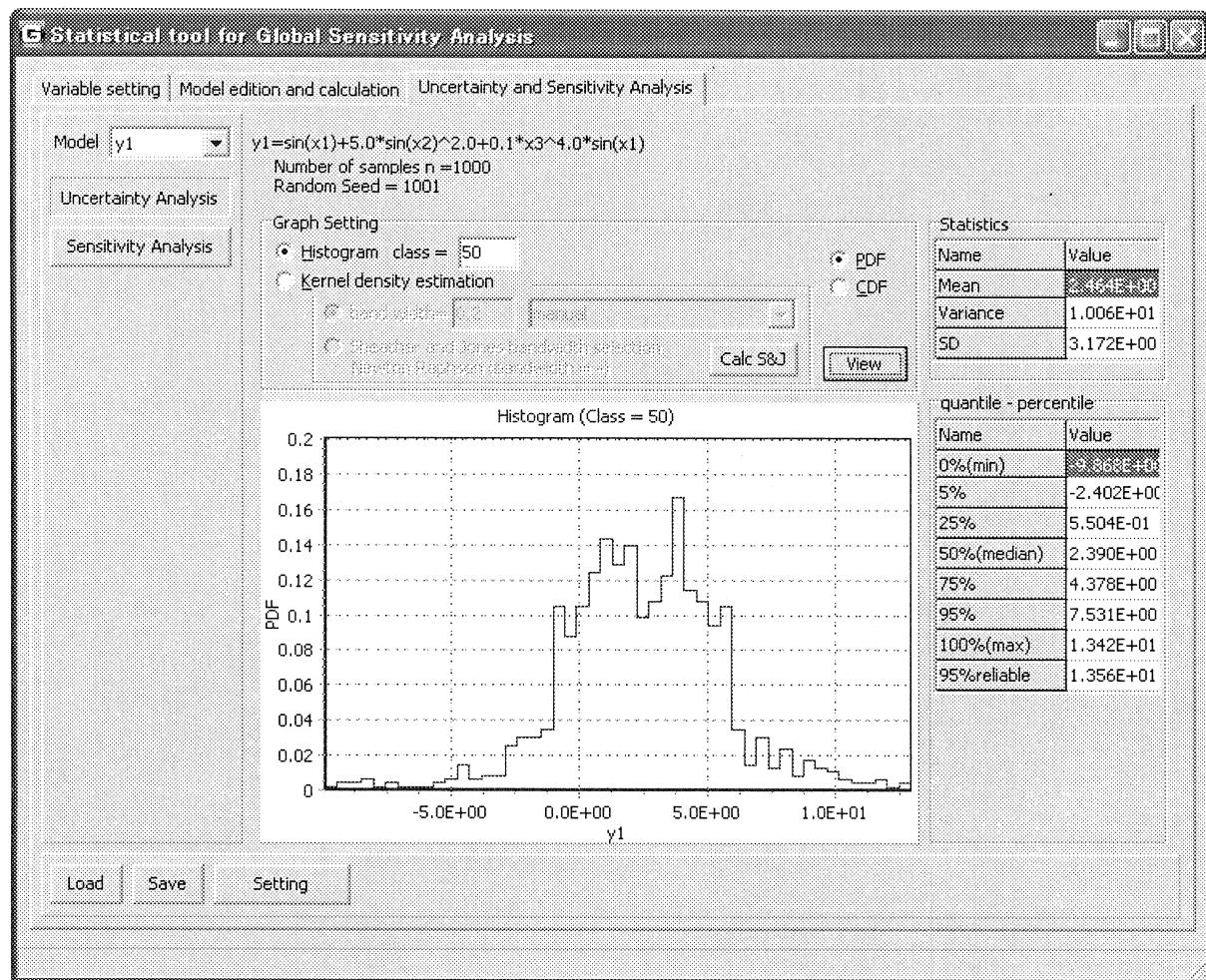


図 5.15 モデル出力変数の PDF の表示画面（ヒストグラム法）

ラジオボタンを「CDF」に切り替え、「View」を再度クリックすれば、累積分布の表示ができる（図 5.16）。

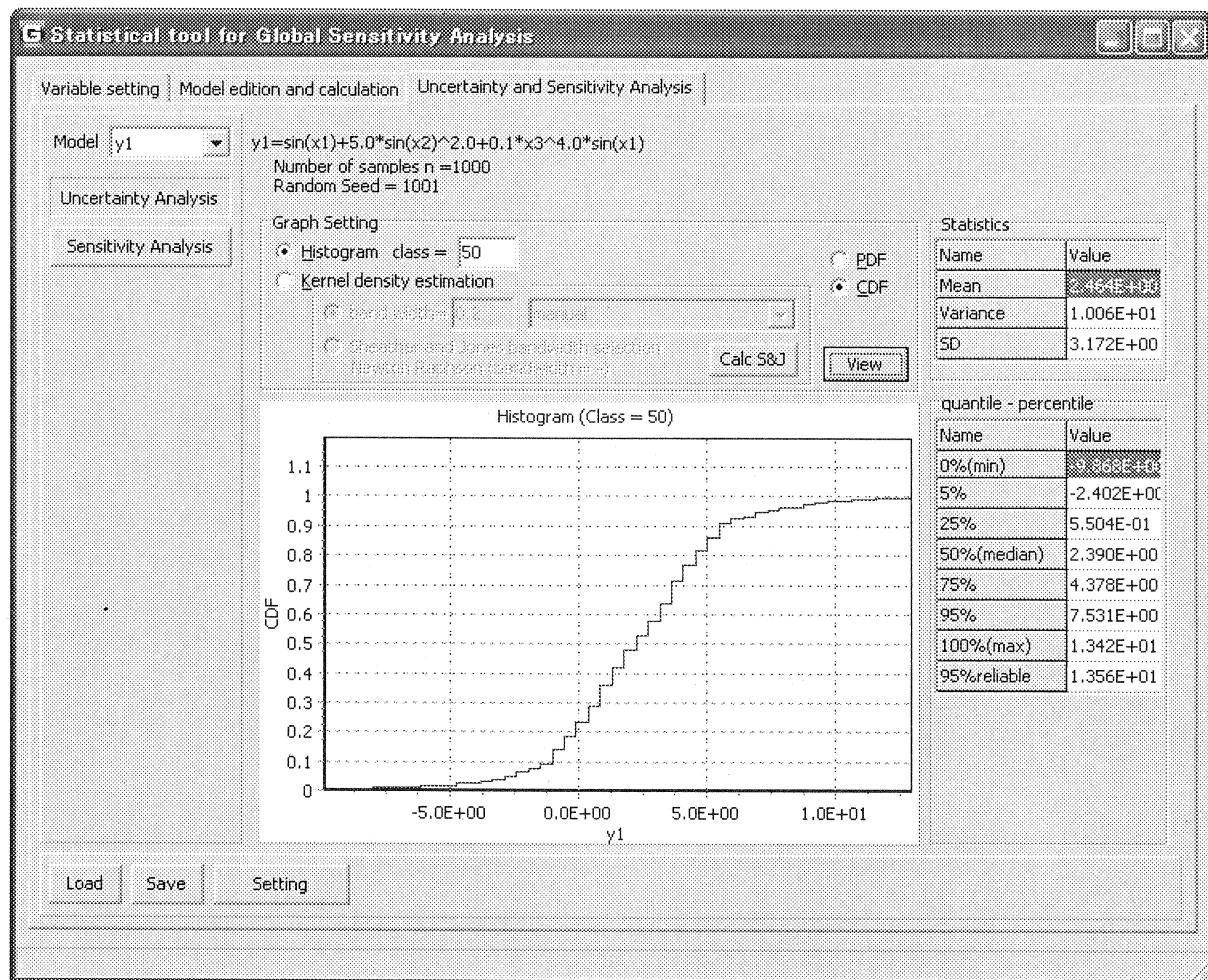


図 5.16 モデル出力変数の CDF の表示画面（ヒストグラム法）

ヒストограмの階級数を変更する場合には、「class」を変更し、「View」を再度実行すれば良い。図 5.17 は、階級数を 100 としたときの表示画面である。

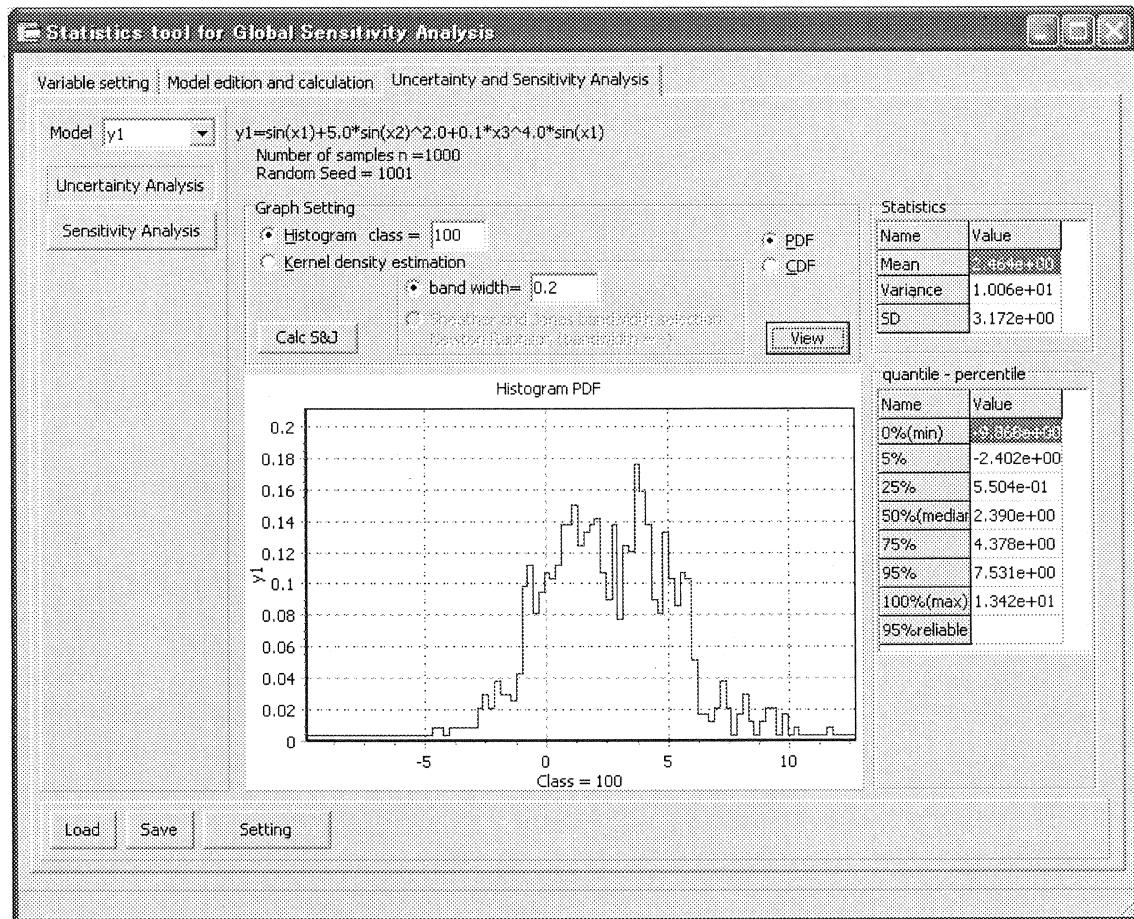


図 5.17 ヒストограмの階級数を変更したときの PDF 表示例

5.3.2 カーネル密度推定法に関する設定画面

カーネル密度推定法を利用する場合の不確実さ解析の実施法を以下に述べる。カーネル密度推定法を用いるとき、「Kernel density estimation」を選択する。参考文献 4)の方法で計算されたバンド幅 h を利用するには、「Calc S&J」を実行してから、「Sheather and Jones bandwidth ~」を選択する。図 5.18 の例では、バンド幅 h は約 0.5745 と計算されている。「View」により、PDF 又は CDF のプロットの表示ができる。

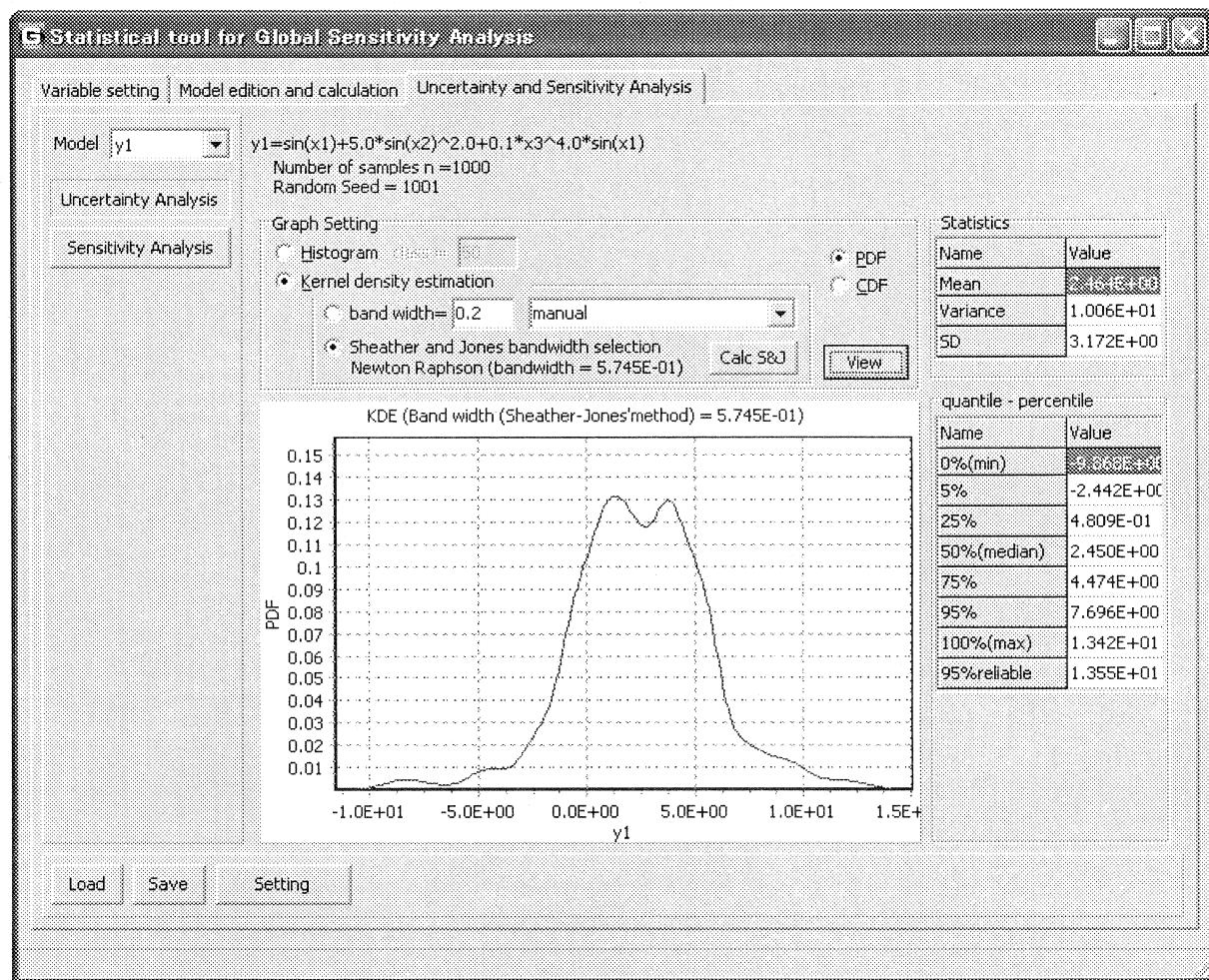


図 5.18 モデル出力変数の PDF の表示画面（カーネル密度推定法）

また、ヒストグラム法のときと同様に、累積分布表示への切り替えも可能である（図 5.19）。

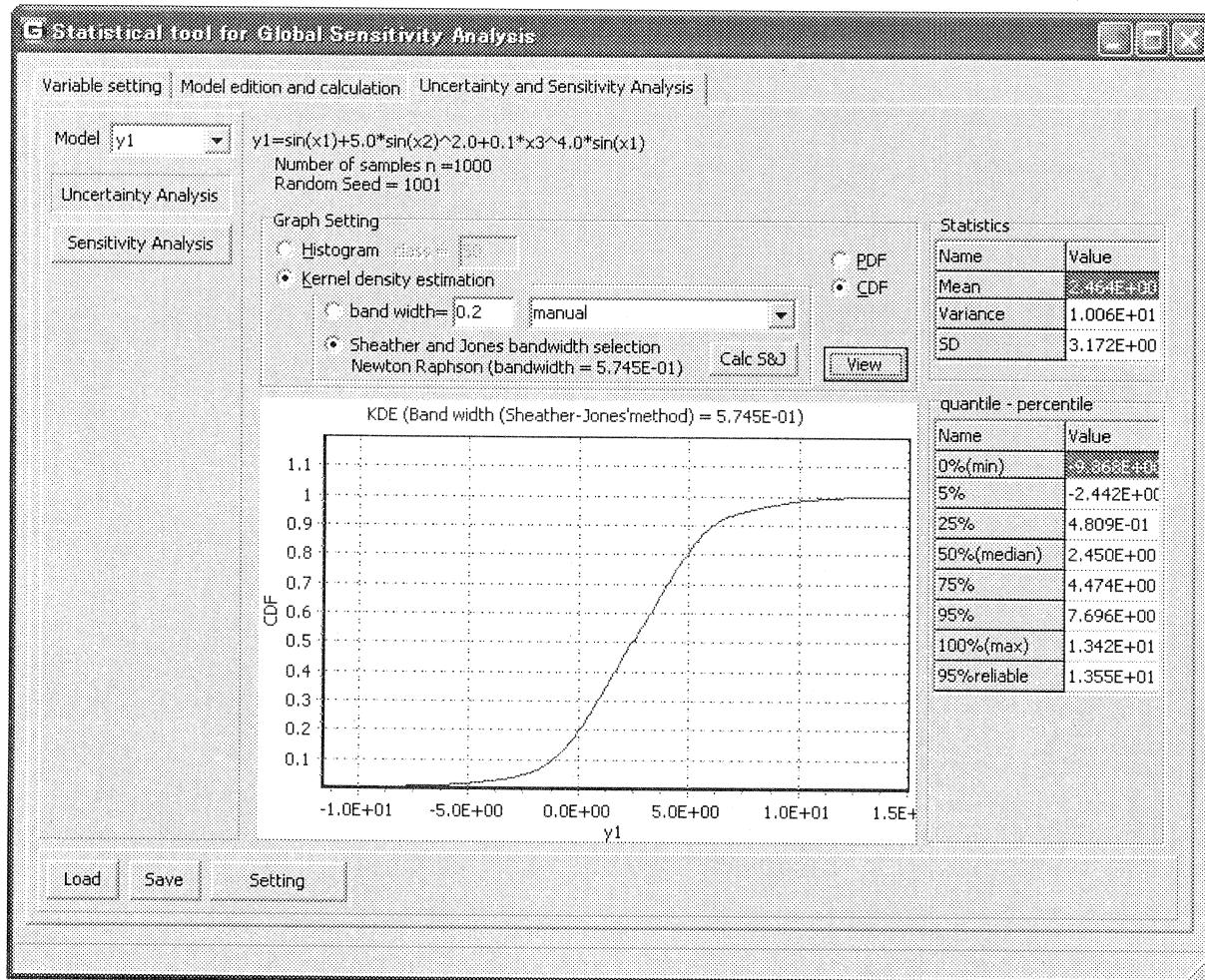


図 5.19 モデル出力変数の CDF の表示画面（カーネル密度推定法）

カーネル密度推定法では、バンド幅の指定も可能である。「band width」に数値を設定し、「View」をクリックする。バンド幅に 1.0 を設定した際の PDF の表示画面を図 5.20 に示す。過剰な平滑化によって細かいプロファイルが失われているが理解できる。

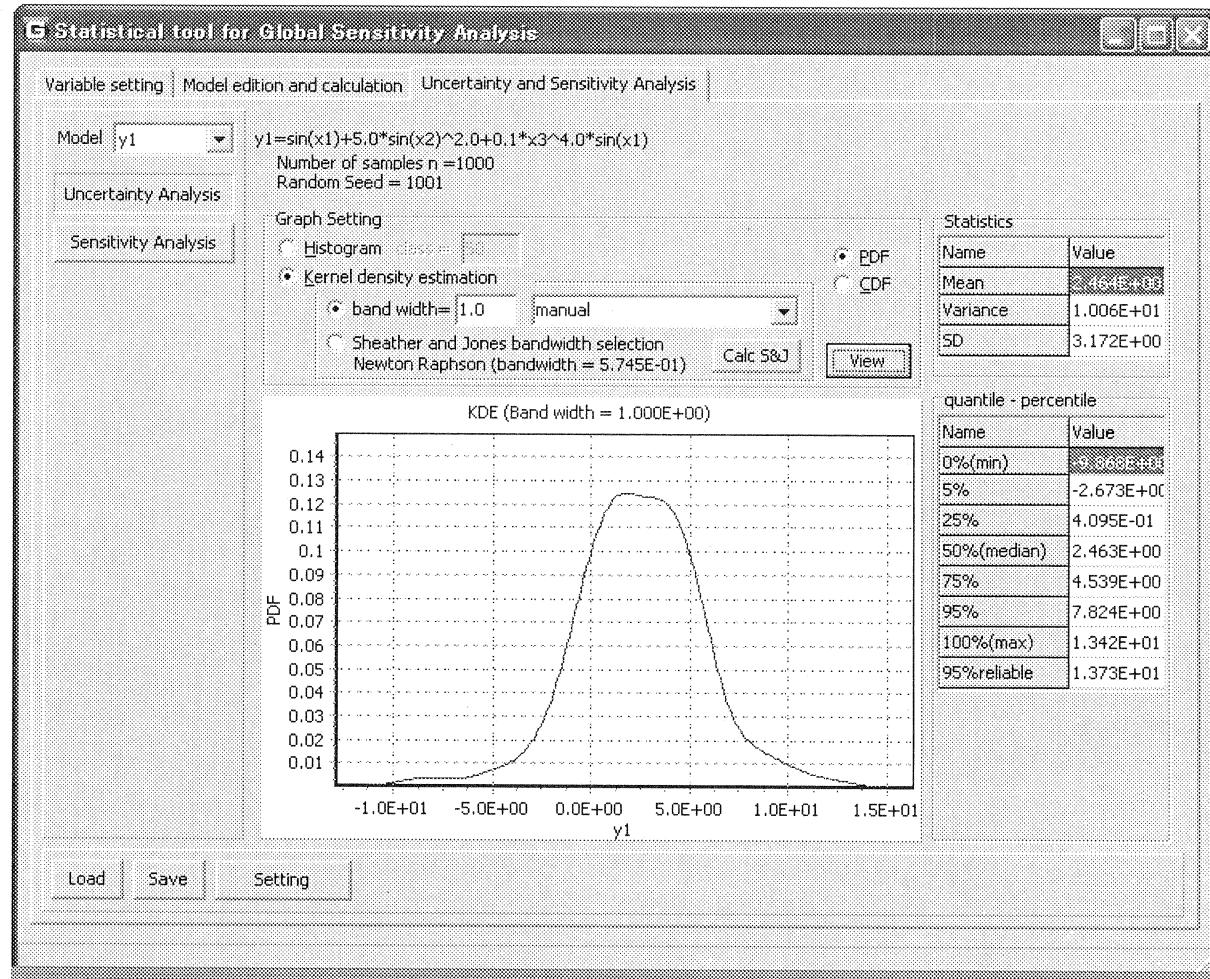


図 5.20 モデル出力変数の PDF の表示画面（カーネル密度推定法、バンド幅 $h=1.0$ ）

一方、バンド幅に 0.1 を設定した際の PDF の表示画面を図 5.21 に示す。平滑化が足りず、乱数に起因する細かいピークがプロファイルに残っていることが分かる。

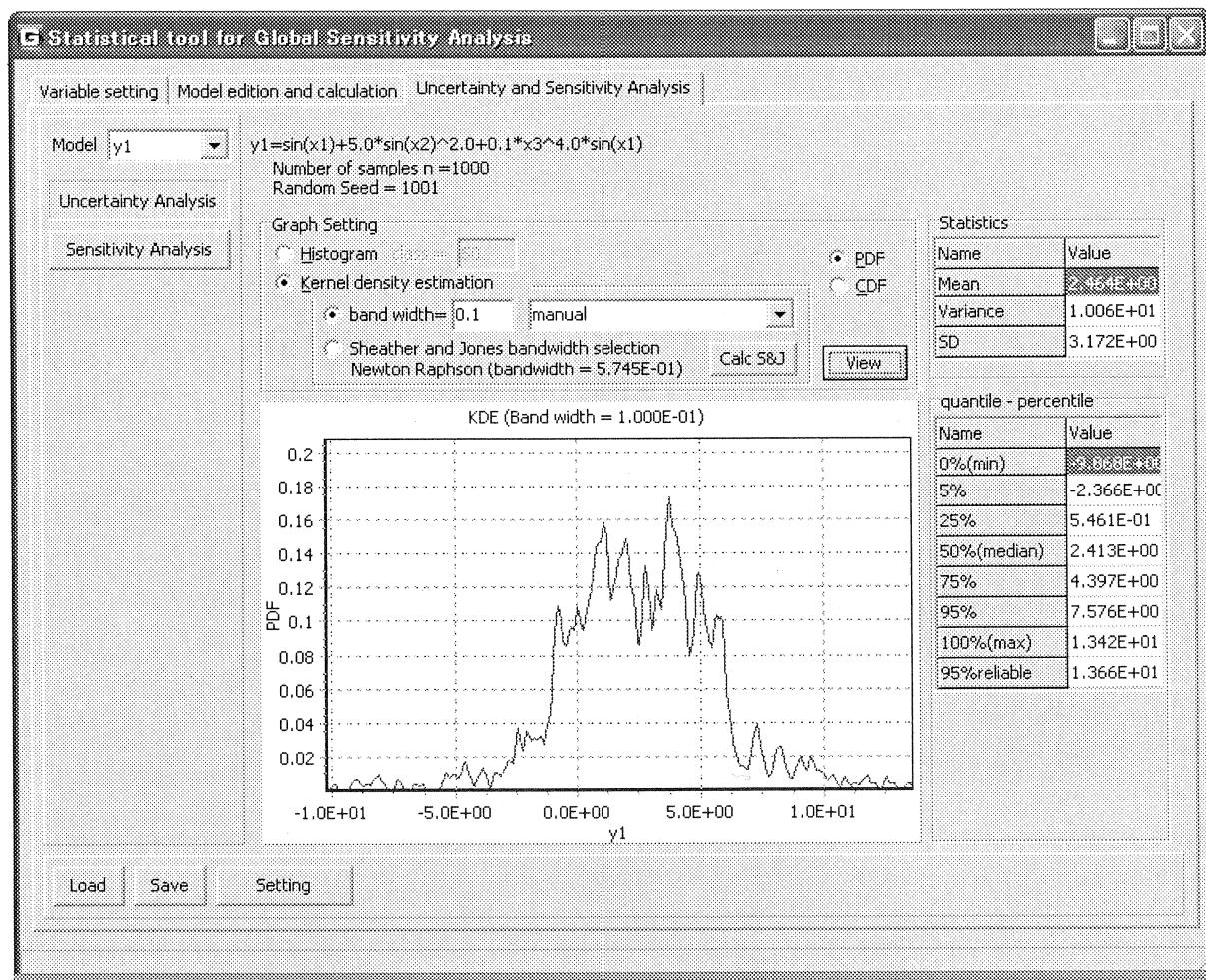


図 5.21 不確実さ解析（カーネル密度推定法、バンド幅 h=0.1）

5.3.3 不確実さ解析に関するほかの設定

モデル出力変数の補累積分布（Complementary Cumulative Distribution Function: CCDF）を表示させたい場合には、不確実さ解析画面左下の「Setting」（図 5.22）により、設定画面（図 5.23）を呼び出す。[ViewCCDF]を選択し、[OK]をクリックすると、CCDF が表示される（図 5.24）。また、カーネル密度推定法による Sheather-Jones バンド幅の計算に使用される Newton-Raphson 法又は二分法の指定は図 5.22 で設定できる。

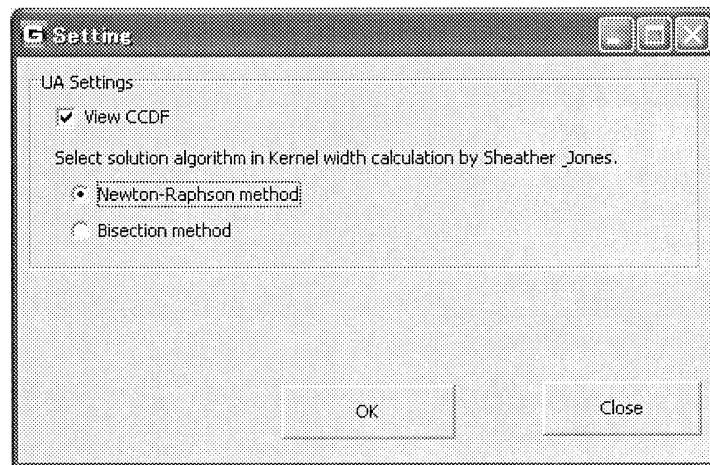


図 5.22 CCDF 表示及び Sheather-Jones バンド幅の計算方法の設定画面

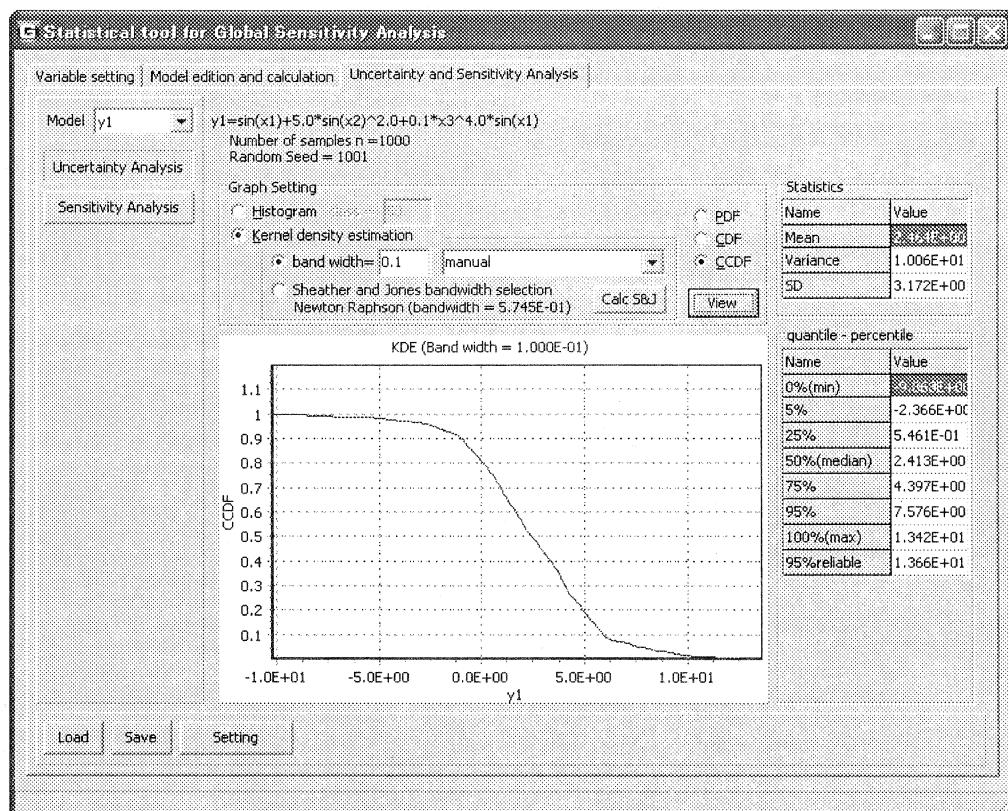


図 5.23 モデル出力変数の CCDF 表示画面

5.4 感度解析画面

図 5.13 の「Sensitivity Analysis」ボタンをクリックすれば、図 5.24 のような感度解析画面に切り替わる。計算したい感度指標を選択し、「Calculate」により計算が実行され、その結果が画面に表示される。計算中に、図 5.25 のようなポップアップが表示され、計算の進行状況を把握できる。

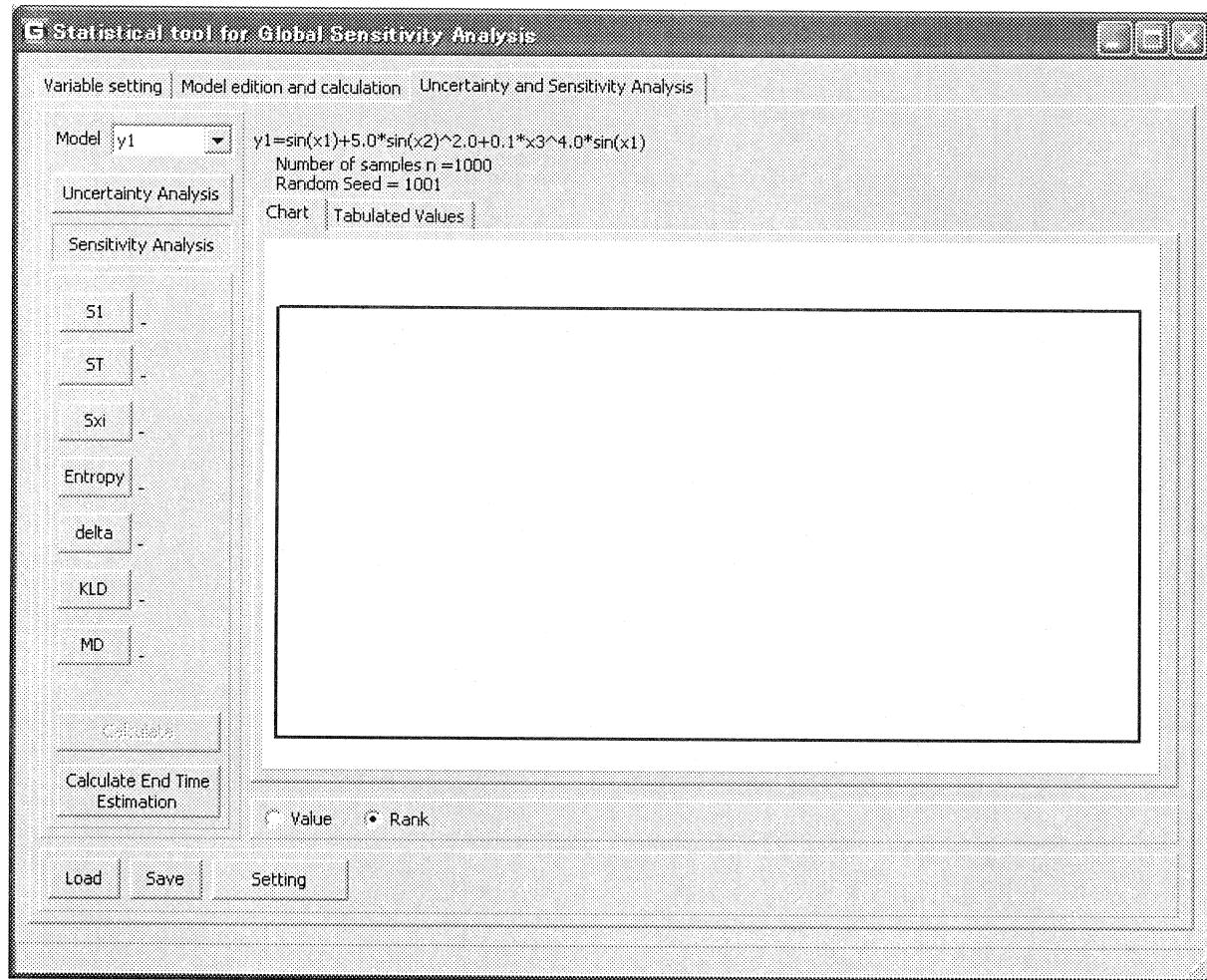


図 5.24 感度解析画面（初期状態）

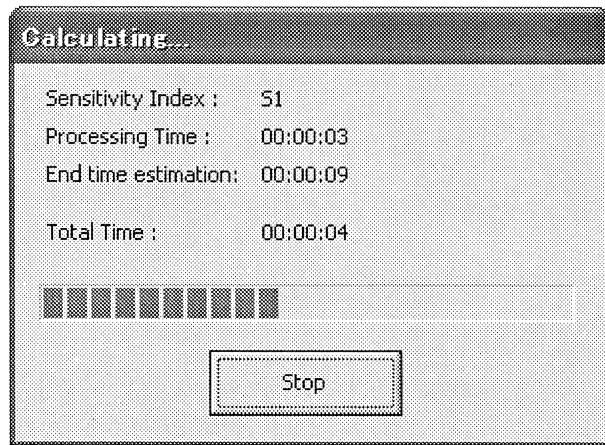


図 5.25 S1 指標を計算中のポップアップ表示例

計算が終了すると、図 5.26 と図 5.27 のように、感度指標の順位や数値がグラフとして表示される。順位、数値の切り替えはグラフ下部の[Value]及び[Rank]で行う。

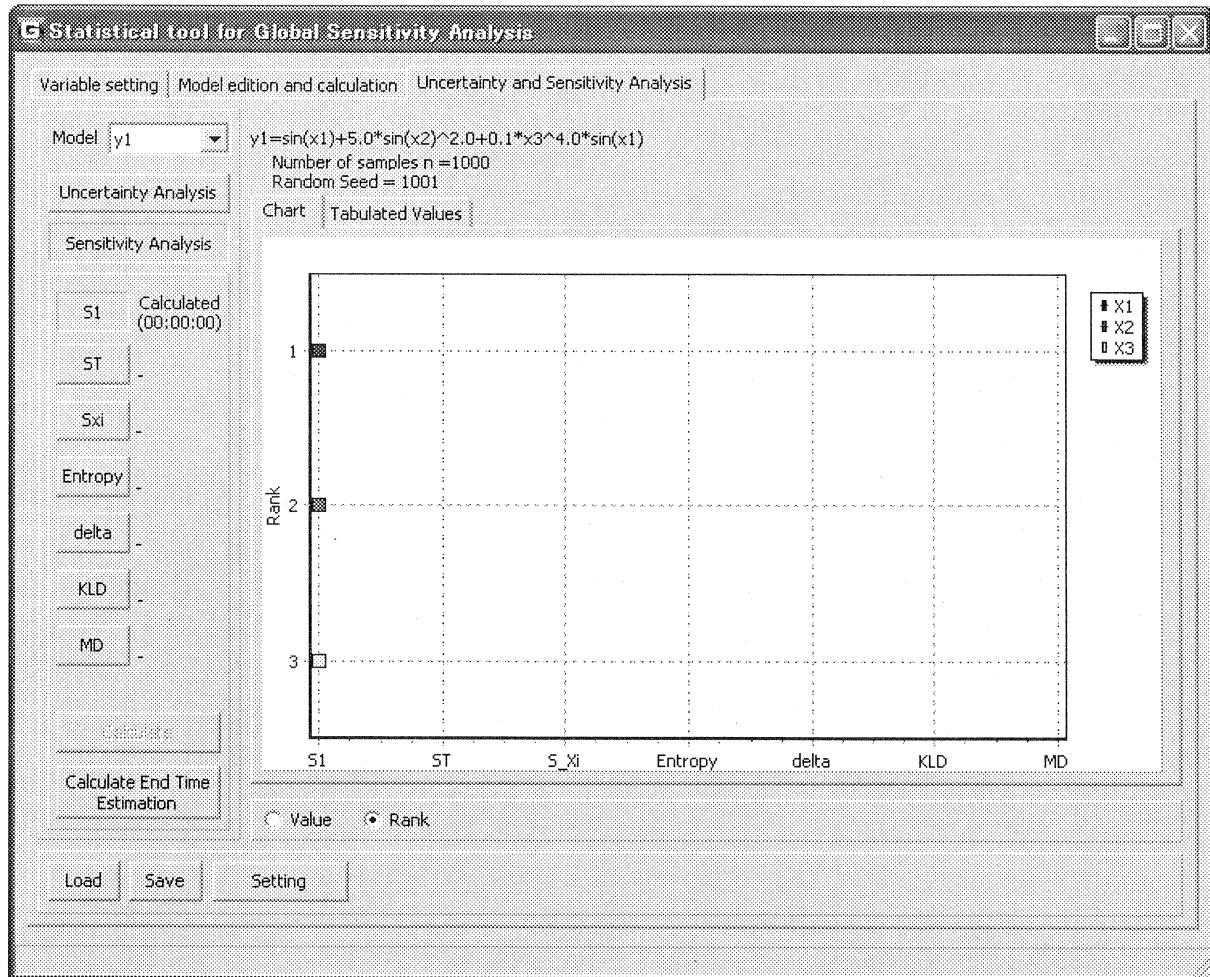


図 5.26 S1 指標による感度解析結果の図表示（順位）

(X1 が最も重要で、ついで X2、X3 の順であったことを示している。)

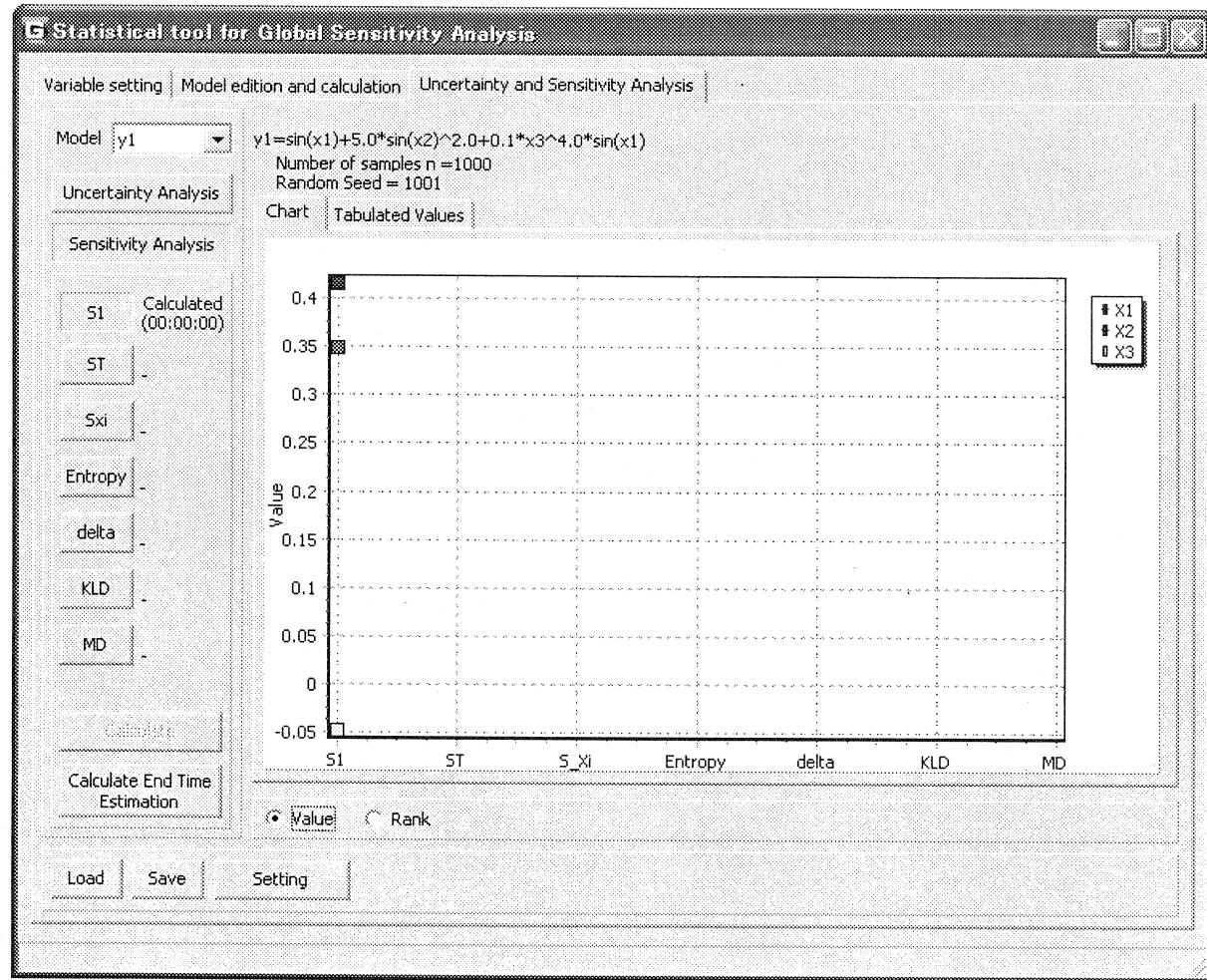


図 5.27 S1 指標による感度解析結果の図表示（数値）

また、「Tabulated Values」タブに切り替えることで、グラフ表示ではなく、表形式で値を参照することも可能である（図 5.28）。計算した結果をファイルに出力させたい場合には、図 5.28 画面左下の[Save]ボタンを利用する。また、[Load]ボタンにより、ファイルからの計算結果の読み込みも可能である。

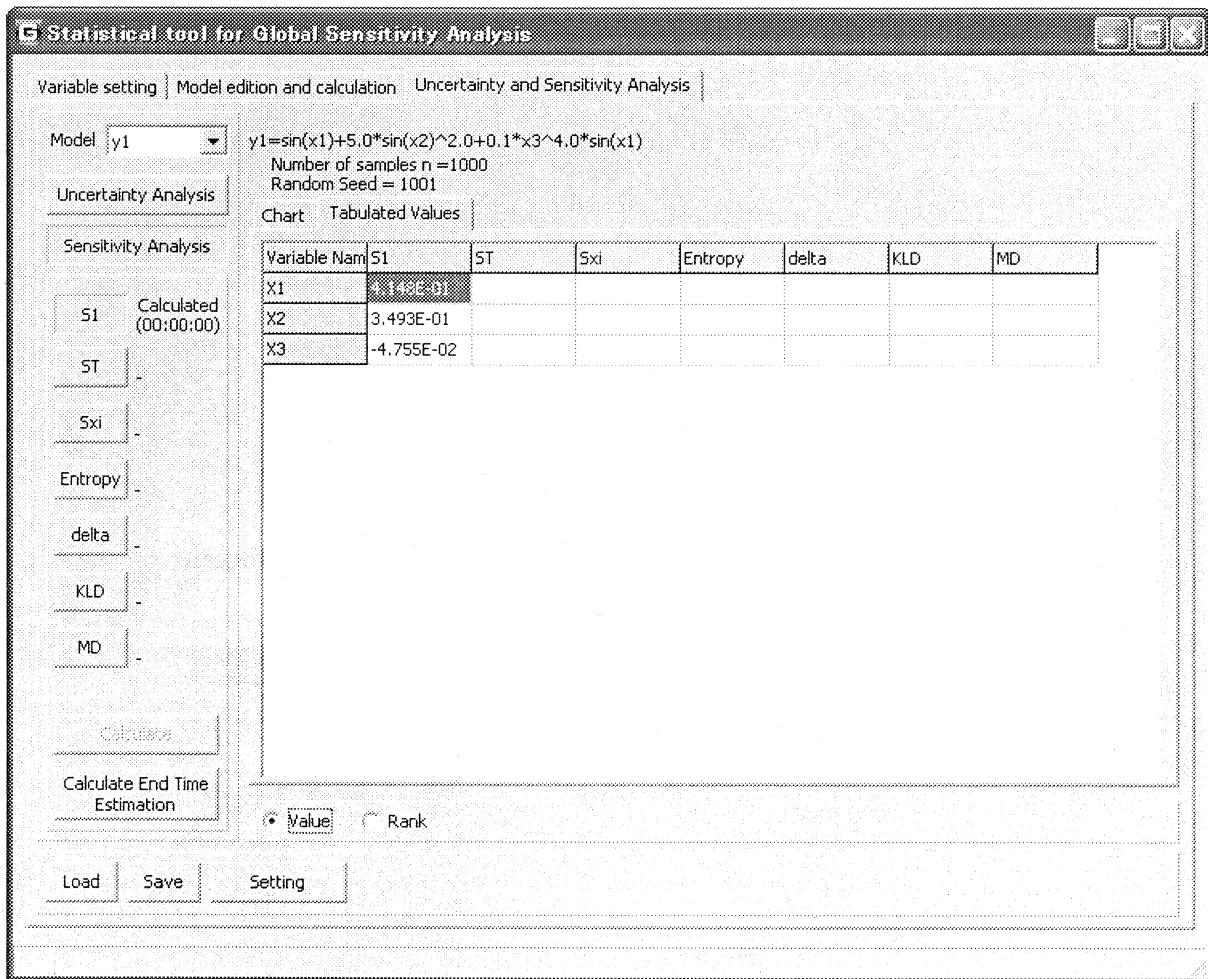


図 5.28 S1 指標による感度解析結果の表表示

S1 指標と ST 指標は、定義通りで式(4-1)及び式(4-2)で計算できるが、Ishigami & Homma 手法及び拡張 FAST 手法を用いた計算もできる。計算手法の選定は、図 5.29 の画面で指定する。また、拡張 FAST 手法に関する詳細な設定は、[Extended FAST Settings]をクリックすれば、図 5.30 のような設定画面が表示され、変形関数や発生する乱数の個数などを設定できる。

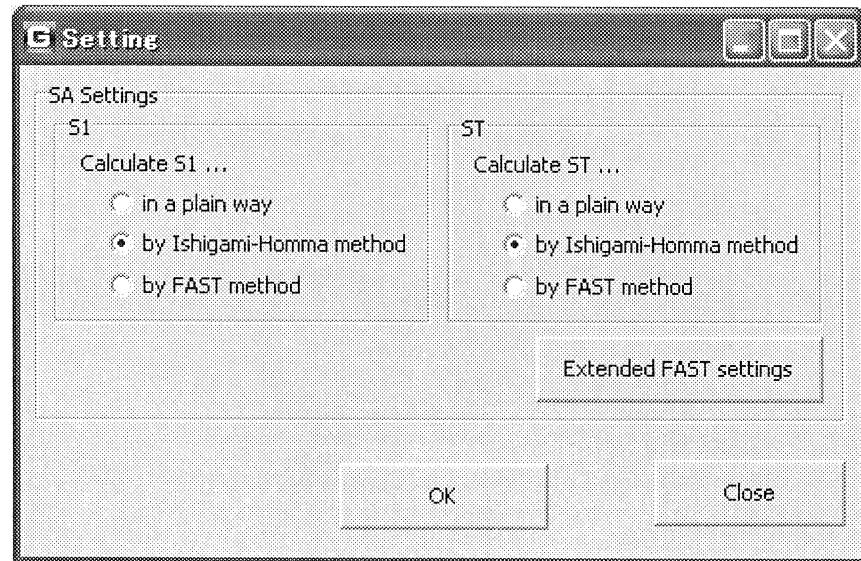


図 5.29 S1 と ST 指標の計算手法の設定

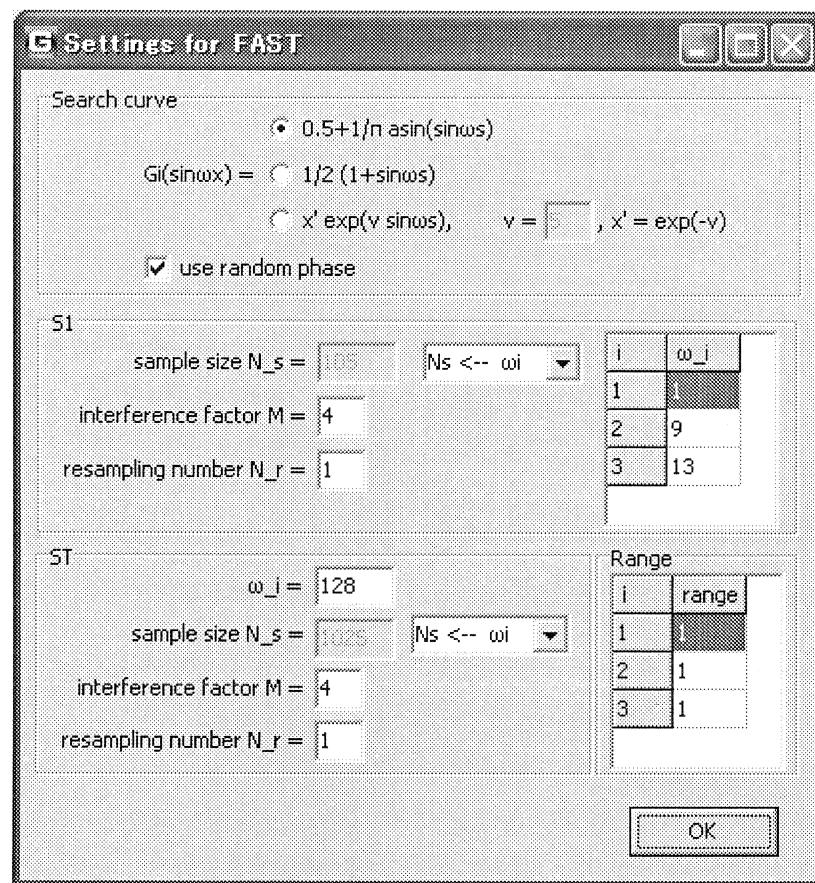


図 5.30 拡張 FAST 手法に関する詳細な設定

6. 解析例

本章では、GSALab コードの機能を検証するために、次式で与えられる Ishigami 関数³⁾を用いて、不確実さ解析および感度解析を行う。

ここで、入力変数 X_1 、 X_2 と X_3 が相互独立で、それぞれの確率密度分布は $[-\pi, \pi]$ 間の一様分布とする。また、a と b は係数で、それぞれ $a=5$ 、 $b=0.1$ とする。

6.1 初期条件の設定

各入力変数 X_1, X_2, X_3 の分布及び範囲を図 6.1 に設定する。

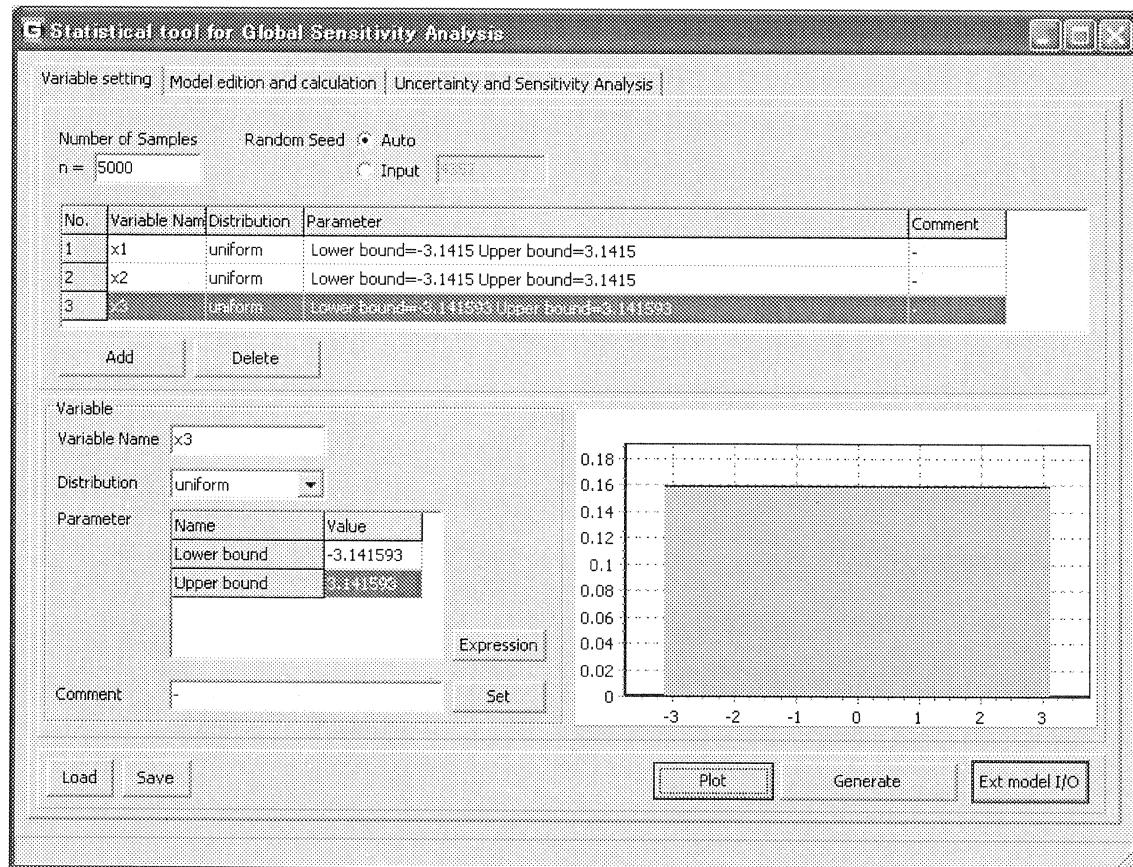


図 6.1 入力変数の設定

また、Ishigami 関数は、モデル関数の設定と計算画面で設定した（図 6.2）。

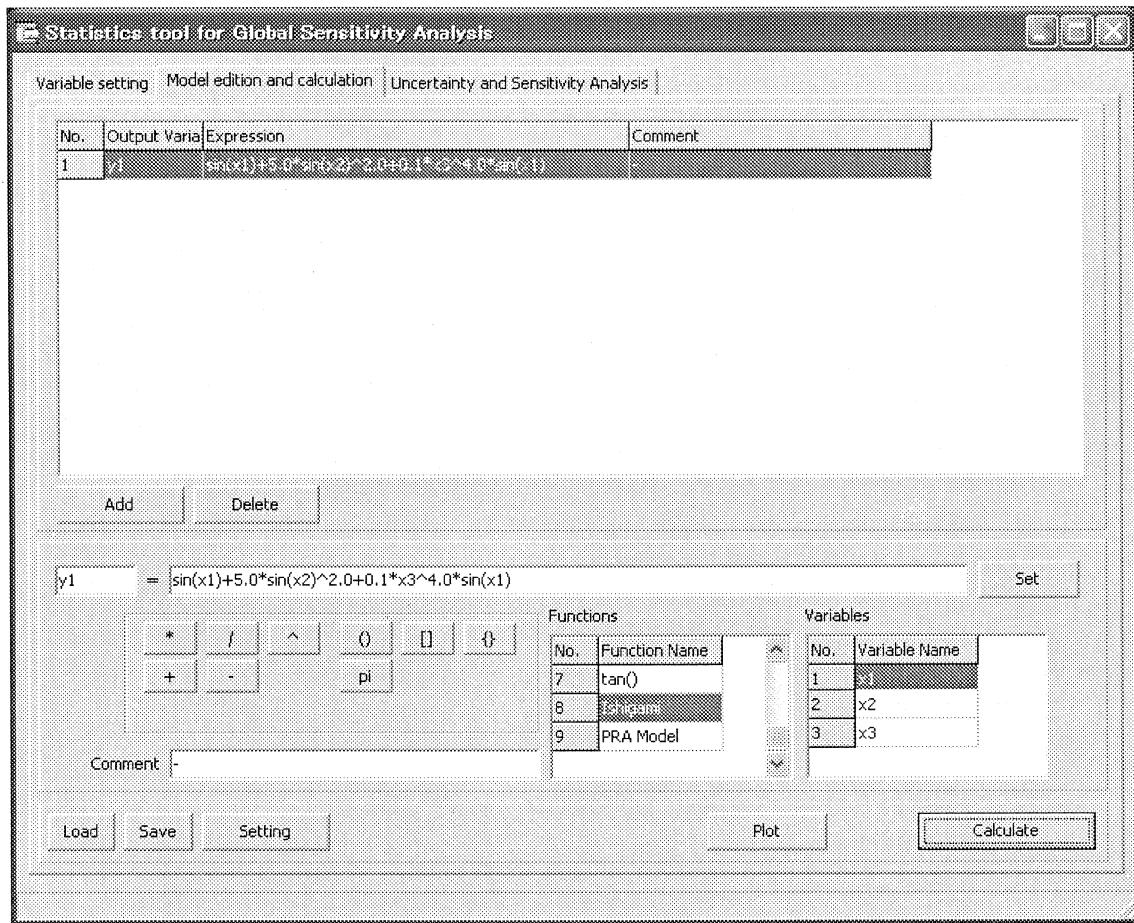


図 6.2 Ishigami 関数の設定

6.2 解析結果

6.2.1 モデル入力変数の乱数の発生

式(6-1)中の入力変数 X_1, X_2, X_3 を、それぞれ(-3.14159265,3.14159265)の一様乱数として、5000 亂数を発生させた。各々の相関係数を表 6.1 に示す。また、散布図を図 6.3 に示す。相関係数および散布図の結果から、一様で相互独立な乱数を生成していると判断できる。

表 6.1 発生させた乱数の相関係数

	X_1	X_2	X_3
X_1	1.000e+00	4.725e-03	2.189e-03
X_2	4.725e-03	1.000e+00	-2.573e-03
X_3	2.189e-03	-2.573e-03	1.000e+00

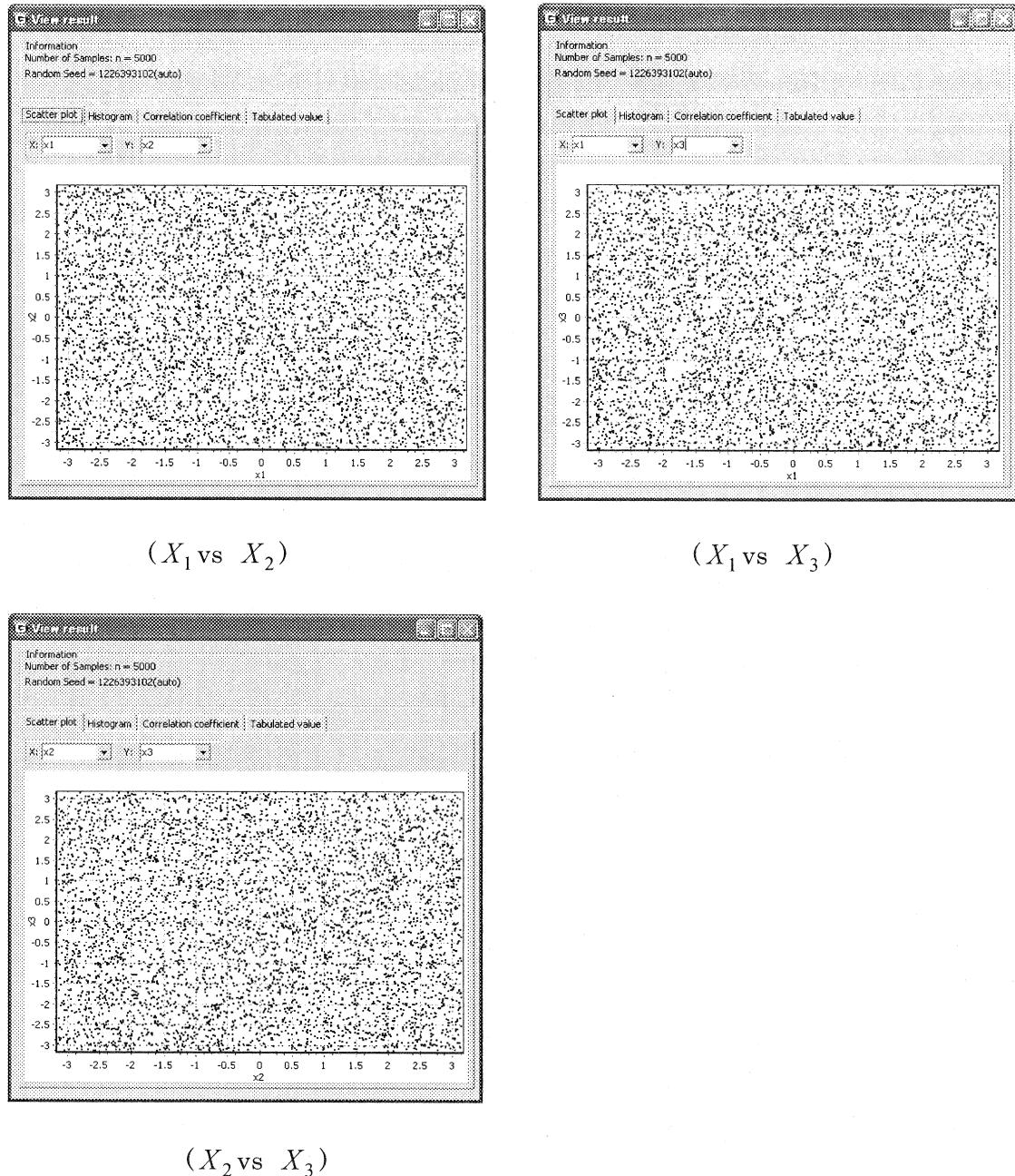
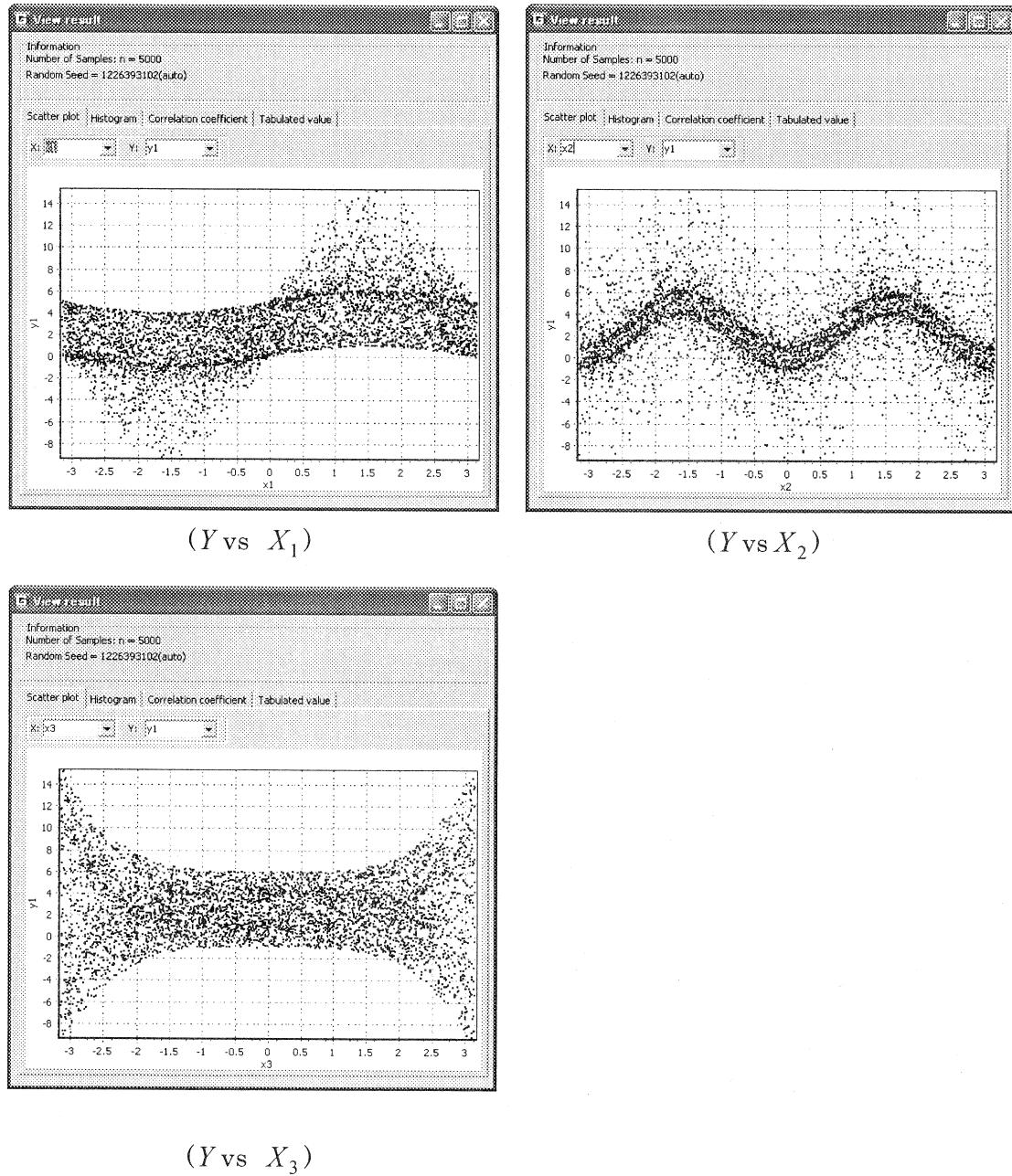


図 6.3 入力変数乱数の散布図

6.2.2 モデル出力変数の出力

発生した入力変数の乱数マトリクスから、Ishigami 関数の出力変数 Y_1 を計算し、 Y_1 と各々の入力変数の相関関係をプロットしたものを図 6.4 に示す。これらは、文献¹⁶⁾と同様の傾向が見られることを確認できる。

図 6.4 出力変数 Y_1 と入力変数 $\{X_1, X_2, X_3\}$ の相関関係

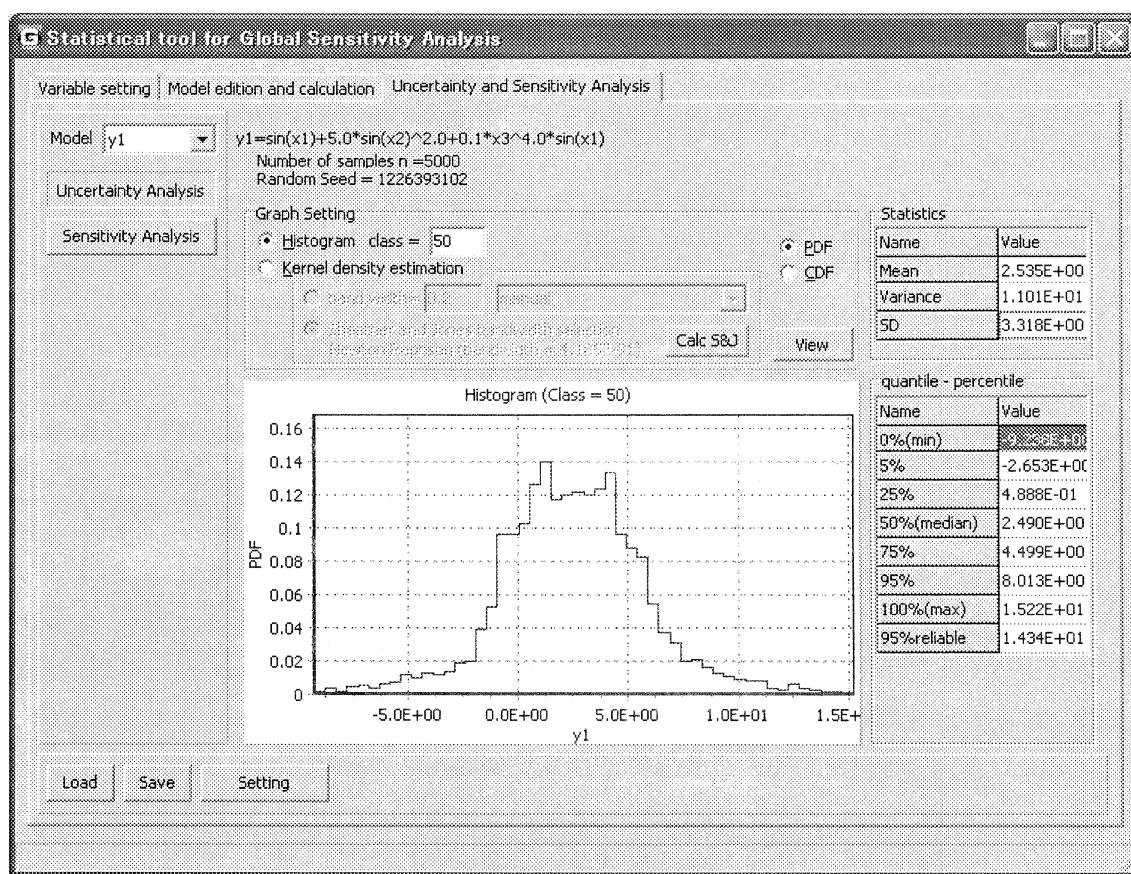
6.2.3 不確実さ解析結果

得られた Y_1 の値に対して、各統計量を計算し、またヒストグラム及びカーネル密度推定法で Y_1 の分布をプロットする。ここで、カーネル密度推定法で計算したバンド幅は、Sheather-Jones のバンド幅選定法で計算された値 $h=0.4185$ を用いた。

Y の各種統計量を表 6.2 に示す。また、図 6.5 と図 6.6 に出力変数の確率密度分布を示す。

表 6.2 出力変数 Y_1 の各統計量

		ヒストグラム	カーネル密度推定法
平均値		2.535E+00	2.535E+00
分散		1.101E+01	1.101E+01
標準偏差		3.318E+00	3.318E+00
各%点	0%点(=min)	-9.238E+01	-9.238E+01
	5%点	-2.653E+00	-2.719E+00
	25%点	4.888E-01	4.703E-01
	50%点	2.490E+00	2.469E+00
	75%点	4.499E+00	4.545E+00
	95%点	8.013E+00	8.050E+00
	100% 点 (=max)	1.522E+01	1.522E+01
95%信頼区間の幅		1.434E+01	1.437E+01

図 6.5 ヒストグラム法による Y_1 の確率密度分布表示（階級数 100）

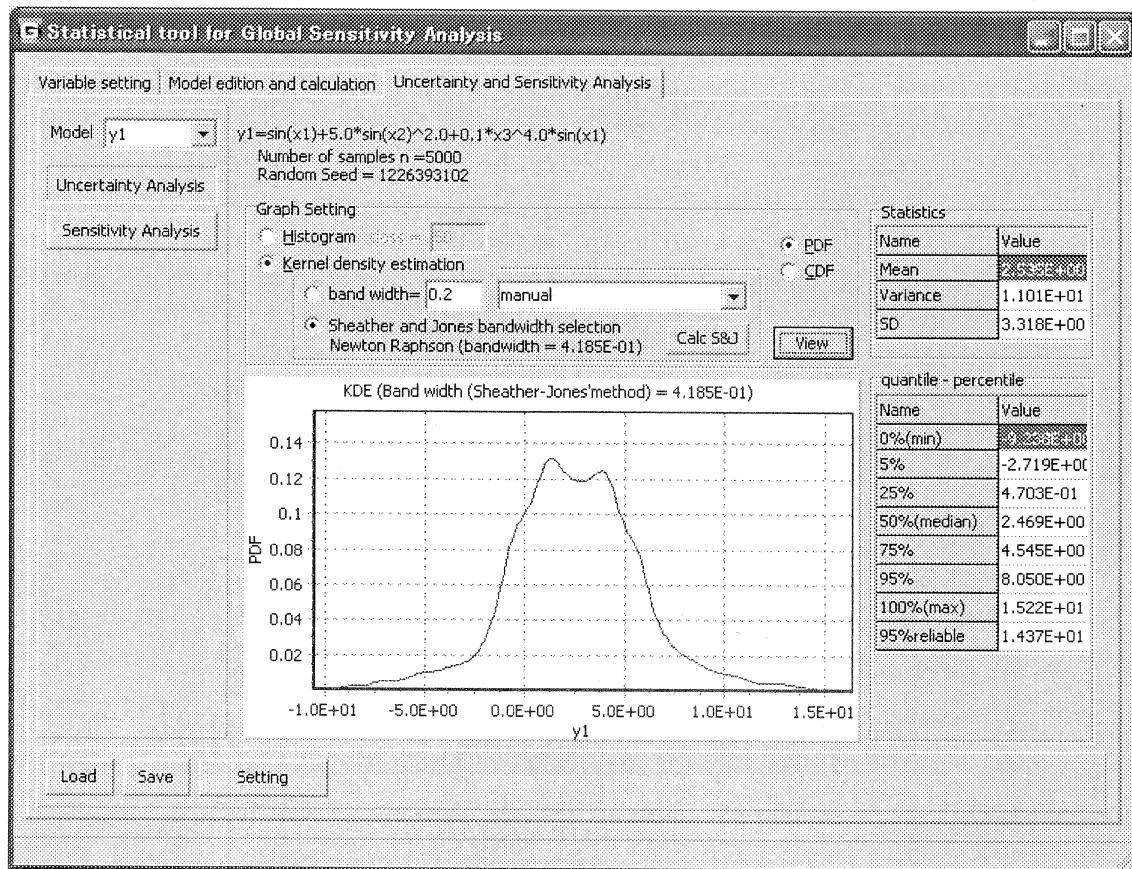


図 6.6 カーネル密度推定法による Y_1 の確率密度分布表示 (バンド幅 $h=0.2451$)

6.2.4 感度解析結果

サンプル数を 5000(乱数シード=5001)にした時の感度指標計算の結果を表 6.3 に示す。表 6.3 中の S_1 と S_T の計算は Ishigami&Homma 手法で計算された。 S_1 、 S_{X_i} 、Entropy、KLD、MD 指標による入力変数の重要度順位が同じく X_1 、 X_2 、 X_3 の順である。一方、 S_T 指標による入力変数の重要度順位が X_1 、 X_3 、 X_2 で、 δ 指標による入力変数の重要度順位が X_2 、 X_1 、 X_3 の順である。

このように、複数の定義の異なる指標を使うことにより、異なる視点からモデル入力変数の重要度を評価することができ、重要度の高い変数選定の堅固度も向上できる。

以上で、本コードを用いてモデルの不確実さ解析及び感度解析が可能であることを確認できた。

表 6.3 各感度指標の計算結果

変数	S_1		S_T		δ		S_{X_i}		$Entropy$		KLD		MD	
	Rank	Value	Rank	Value	Rank	Value	Rank	Value	Rank	Value	Rank	Value	Rank	Value
X_1	1	0.4124	1	0.7244	2	0.2830	1	0.8304	1	0.3565	1	0.3658	1	0.9622
X_2	2	0.2894	3	0.2760	1	0.3403	2	0.6708	2	0.2864	2	0.2940	2	0.7285
X_3	3	-0.0041	2	0.2871	3	0.2292	3	0.4429	3	0.2553	3	0.2628	3	0.6606

7.まとめ

本報告書は、PSA 手法の高度化研究の一環として、原子力発電所など技術施設のリスクの不確実さ解析および感度解析コード GSALab の開発を行った。コードの開発に当たっては、広範に使用されているモンテカルロ手法を用いた。乱数発生部では、6 種類の分布形の取り扱いが可能である。不確実さ解析部には、平均値や分散などの統計量の計算、そして確率密度分布及び累積分布の出力が可能である。感度解析計算部については、分散に基づく指標をはじめ、複数のグローバル感度指標を実装した。

また、GSALab のパラメータ設定、操作および計算結果の表示に関する GUI を開発し、ユーザの利便性を向上させた。

本コードは、原子力施設などのリスク評価モデルに限らず、一般的な計算モデルの不確実さ解析・感度解析にも適用可能である。

謝辞

本報告書の作成にあたり、ご助力をいただいた石川淳氏と波戸真治氏に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) M. Matsumoto, T. Nishimura: "Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator", CM Trans. on Modeling and Computer Simulations, 8, PP. 3-30(1998).
- 2) M. P. Wand, M. C. Jones, "Kernel Smoothing," Chapman and Hall, London(1995).
- 3) T. Ishigami, T. Homma, "An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models," Proceedings of the first international symposium on uncertainty modeling and analysis, Maryland(1990).
- 4) S. J. Sheather, M. C. Jones, "A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation," Journal of the Royal Statistical Society, Series. B, 53, PP.683-690(1991).
- 5) I. M. Sobol, "Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models," Mathematical Modeling and Computational Experiment, 1, PP. 407-414(1993).
- 6) T. Homma, A. Saltelli, "Importance measures in global sensitivity analysis on nonlinear models," Reliability Engineering and System Safety, 52, PP. 1-17(1996).
- 7) A. Saltelli, "Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices," Computer Physics Communication, 145, PP. 280-297(2002).
- 8) R. I. Cukier, et al., "Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients I: theory," The Journal of Chemical Physics, 59, PP.3873-3878(1973).
- 9) J. H. Schaibly, et al., "Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficient II: applications," The Journal of Chemical Physics, 59, PP. 3879-3888(1973).
- 10) R. I. Cukier, et al., "Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients III: analysis of the approximations," The Journal of Chemical Physics, 63, PP. 1140-1149(1975).
- 11) R. I. Cukier, et al., "Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems," Journal of Computational Physics, 26, PP. 1-42(1978).
- 12) M. Koda, et al., "Automatic Sensitivity Analysis of Kinetic Mechanisms," International Journal of Chemical Kinetics, 7, PP. 427-444(1979).
- 13) A. Saltelli, et al., "A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output," Technometrics, 41, PP. 39-55(1999).
- 14) E. Borgonovo, "A new uncertainty importance measure," Reliability Engineering and System Safety, 92, PP. 771-784(2007).
- 15) Q. Liu, T. Homma, "A robust importance measure for sensitivity analysis," Proceedings of SAMO 2007, Budapest(2007).
- 16) A. Saltelli, et al., "Sensitivity analysis," John Wiley & Sons, Chichester(2000).

This is a blank page.

国際単位系 (SI)

表1. SI 基本単位

基本量	SI 基本単位	
	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質量	モル	mol
光度	カンデラ	cd

表2. 基本単位を用いて表されるSI組立単位の例

組立量	SI 基本単位	
	名称	記号
面積	平方メートル	m^2
体積	立方メートル	m^3
速度, 加速度	メートル毎秒	m/s
波数	メートル毎秒	m/s
密度, 質量密度	キログラム毎立方メートル	kg/m^3
面積密度	キログラム毎平方メートル	kg/m^2
比體積	立方メートル毎キログラム	m^3/kg
電流密度	アンペア毎平方メートル	A/m^2
磁界の強さ	アンペア毎メートル	A/m
量濃度 ^(a) , 濃度	モル毎立方メートル	mol/m^3
質量濃度	キログラム毎立方メートル	kg/m^3
輝度	カンデラ毎平方メートル	cd/m^2
屈折率 ^(b)	(数字の) 1	1
比透磁率 ^(b)	(数字の) 1	1

(a) 量濃度(amount concentration)は臨床化学の分野では物質濃度(substance concentration)ともよばれる。

(b) これらは無次元量あるいは次元1をもつ量であるが、そのことを表す単位記号である数字の1は通常は表記しない。

表3. 固有の名称と記号で表されるSI組立単位

組立量	SI 組立単位		
	名称	記号	他のSI単位による表し方
平面角	ラジアン ^(b)	rad	$1^{(b)}$
立体角	ステラジアン ^(b)	sr ^(c)	$1^{(b)}$
周波数	ヘルツ ^(d)	Hz	s^{-1}
力	ニュートン	N	$m \ kg \ s^{-2}$
圧力, 応力	パスカル	Pa	N/m^2
エネルギー, 仕事, 熱量	ジュール	J	$m^2 \ kg \ s^{-2}$
仕事率, 工率, 放射束	ワット	W	$m^2 \ kg \ s^{-3}$
電荷, 電気量	クーロン	C	$s \ A$
電位差(電圧), 起電力	ボルト	V	$m^2 \ kg \ s^{-3} \ A^{-1}$
静電容量	ファラード	F	C/V
電気抵抗	オーム	Ω	$m^2 \ kg \ s^{-3} \ A^{-2}$
コンダクタンス	シーメンス	S	A/V
磁束密度	ウエーバー	Wb	$m^2 \ kg \ s^{-2} \ A^{-1}$
磁束密度	テスラ	T	Wb/m^2
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A
セルシウス度	セルシウス度 ^(e)	°C	K
光束度	ルーメン	lm	cd sr ^(c)
照度	ルクス	lx	lm/m^2
放射性核種の放射能 ^(f)	ベクレル ^(d)	Bq	s^{-1}
吸収線量, 比エネルギー一分率	グレイ	Gy	J/kg
カーマ			$m^2 \ s^{-2}$
線量当量, 周辺線量当量, 方向性線量当量, 個人線量当量	シーベルト ^(g)	Sv	J/kg
酸素活性	カタール	kat	$m^2 \ s^{-2}$

(a) SI接頭語は固有の名称と記号を持つ組立単位と組み合せても使用できる。しかし接頭語を付した単位はもはやコヒーレントではない。

(b) ラジアンとステラジアンは数字の1に対する単位の特別な名称で、量についての情報をつたえるために使われる。実際には、使用する時には記号rad及びsrが用いられるが、習慣として組立単位としての記号である数字の1は明示されない。

(c) 測光学ではステラジアンという名称と記号srを単位の表し方の中に、そのまま維持している。

(d) ヘルツは周期現象についてのみ、ベクレルは放射性核種の統計的過程についてのみ使用される。

(e) セルシウス度はケルビンの特別な名称で、セルシウス度を表すために使用される。セルシウス度とケルビンの単位の大きさは同一である。したがって、温度差や温度間隔を表す数値はどちらの単位で表しても同じである。

(f) 放射性核種の放射能(activity referred to a radionuclide)は、しばしば誤った用語で“radioactivity”と記される。

(g) 単位シーベルト(PV,2002,70,205)についてはICIPM勧告2(CI-2002)を参照。

表4. 単位の中に固有の名称と記号を含むSI組立単位の例

組立量	SI 組立単位		
	名称	記号	SI 基本単位による表し方
粘度	パスカル秒	Pa s	$m^{-1} \ kg \ s^{-1}$
力のモーメント	ニュートンメートル	N m	$m^2 \ kg \ s^{-2}$
表面張力	ニュートン每メートル	N/m	$kg \ s^{-2}$
角速度	ラジアン毎秒	rad/s	$m^{-1} \ s^{-1}=s^{-1}$
角加速度	ラジアン毎秒毎秒	rad/s ²	$m^{-1} \ s^{-2}=s^{-2}$
熱流密度, 放射照度	ワット每平方メートル	W/m ²	$kg \ s^{-3}$
熱容量, エントロピー	ジュール每ケルビン	J/K	$m^2 \ kg \ s^{-2} \ K^{-1}$
比熱容量, 比エントロピー	ジュール每キログラム毎ケルビン	J/(kg K)	$m^2 \ s^{-2} \ K^{-1}$
比エネルギー	ジュール每キログラム	J/kg	$m^2 \ s^{-2}$
熱伝導率	ワット每メートル毎ケルビン	W/(m K)	$m \ kg \ s^{-3} \ K^{-1}$
体積エネルギー	ジュール每立方メートル	J/m ³	$m^1 \ kg \ s^2$
電界の強さ	ボルト每メートル	V/m	$m \ kg \ s^{-3} \ A^{-1}$
電荷密度	クーロン每立方メートル	C/m ³	$m^{-3} \ sA$
表面電荷密度	クーロン每平方メートル	C/m ²	$m^{-2} \ sA$
電束密度, 電気変位	クーロン每平方メートル	C/m ²	$m^{-2} \ sA$
誘電率	アラード每メートル	F/m	$m^3 \ kg^{-1} \ s^4 \ A^2$
透磁率	ヘンリー每メートル	H/m	$m \ kg \ s^{-2} \ A^2$
モルエネルギー	ジュール每モル	J/mol	$m^2 \ kg \ s^{-2} \ mol^{-1}$
モルエントロピー, モル熱容量	ジュール每モル每ケルビン	J/(mol K)	$m^2 \ kg \ s^{-2} \ K^{-1} \ mol^{-1}$
照射線量(X線及びγ線)	クーロン每キログラム	C/kg	$kg^{-1} \ sA$
吸収線量率	グレイ毎秒	Gy/s	$m^{-2} \ s^{-3}$
放射強度	ワット每スチラジアン	W/sr	$m^3 \ m^{-2} \ kg \ s^{-3}=m^2 \ kg \ s^{-3}$
放射輝度	ワット每平方メートル每スチラジアン	W/(m ² sr)	$m^2 \ m^{-2} \ kg \ s^{-3}=kg \ s^{-3}$
酵素活性濃度	カタール每立方メートル	kat/m ³	$m^{-3} \ s^{-1} \ mol$

表5. SI接頭語

乗数	接頭語	記号	乗数	接頭語	記号
10^{24}	ヨタ	Y	10^{-1}	デシ	d
10^{21}	ゼタ	Z	10^{-2}	センチ	c
10^{18}	エクサ	E	10^{-3}	ミリ	m
10^{15}	ペタ	P	10^{-6}	マイクロ	μ
10^{12}	テラ	T	10^{-9}	ナノ	n
10^9	ギガ	G	10^{-12}	ピコ	p
10^6	メガ	M	10^{-15}	フェムト	f
10^3	キロ	k	10^{-18}	アト	a
10^2	ヘクト	h	10^{-21}	ゼット	z
10^1	デカ	da	10^{-24}	ヨクト	y

表6. SIに属さないが、SIと併用される単位

名称	記号	SI 単位による値
分	min	1 min=60s
時	h	1 h=60 min=3600 s
日	d	1 d=24 h=86 400 s
度	°	$1^\circ=(\pi/180) \ rad$
分	'	$1'=(1/60)^\circ=(n/10800) \ rad$
秒	"	$1''=(1/60)'=(n/648000) \ rad$
ヘクタール	ha	$1ha=1hm^2=10^4m^2$
リットル	L	$1L=1dm^3=10^3cm^3=10^{-3}m^3$
トン	t	$1t=10^3kg$

表7. SIに属さないが、SIと併用される単位で、SI単位で表される数値が実験的に得られるもの

名称	記号	SI 単位で表される数値
電子ボルト	eV	$1eV=1.602 \ 176 \ 53(14) \times 10^{-19}J$
ダルトン	Da	$1Da=1.660 \ 538 \ 86(28) \times 10^{-27}kg$
統一原子質量単位	u	$1u=1 Da$
天文単位	ua	$1ua=1.495 \ 978 \ 706 \ 91(6) \times 10^{11}m$

表8. SIに属さないが、SIと併用されるその他の単位

名称	記号	SI 単位で表される数値
バール	bar	$1bar=0.1MPa=100kPa=10^5Pa$
水銀柱ミリメートル	mmHg	$1mmHg=133.322Pa$
オングストローム	Å	$1 \text{ \AA}=0.1nm=100pm=10^{-10}m$
海里	M	$1 M=1852m$
ノット	b	$1 b=100fm^2=(10^{-12}cm)^2=10^{-28}m^2$
ノット	kn	$1 kn=(1852/3600)m/s$
ペル	Np	SI単位との数値的な関係は、対数量の定義に依存。
ベル	B	
デジベル	dB	

表9. 固有の名称をもつCGS組立単位

名称	記号	SI 単位で表される数値
エルグ	erg	$1 erg=10^{-7}J$
ダイナ	dyn	$1 dyn=10^{-5}N$
ポアソン	P	$1 P=1 \text{ dyn } s \text{ cm}^{-2}=0.1Pa \ s$
ストークス	St	$1 St=1cm^2 \ s^{-1}=10^4m^2 \ s^{-1}$
スチルブ	sb	$1 sb=1cd \ cm^{-2}=10^4cd \ m^{-2}$
フォント	ph	$1 ph=1cd \ sr \ cm^{-2} \ 10^4lx$
ガル	Gal	$1 Gal=1cm \ s^{-2}=10^{-2}ms^{-2}$
マックスウェル	Mx	$1 Mx=1G \ cm^2=10^8Wb$
ガウス	G	$1 G=1Mx \ cm^2=10^4T$
エルステッド	Oe	$1 Oe \triangleq (10^3/4\pi)A \ m^{-1}$

(c) 3元系のCGS単位系とSIでは直接比較できないため、等号「 \triangleq 」は対応関係を示すものである。

表10. SIに属さないその他の単位の例

名称	記号	SI 単位で表される数値
キュリ	Ci	$1 Ci=3.7 \times 10^{10}Bq$
レントゲン	R	$1 R=2.58 \times 10^4C/kg$
ラド	rad	$1 rad=1cGy=10^2Gy$
レム	rem	$1 rem=1cSv=10^2Sv$
ガンマ	γ	$1 \gamma=1 nT=10^{-9}T$
フェルミ	fm	$1 \text{フェルミ}=1 fm=10^{-15}m$
メートル系カラット		$1 \text{メートル系カラット}=200 mg=2 \times 10^{-4}kg$
トル	Torr	$1 Torr = (101 325/760) Pa$
標準大気圧	atm	$1 atm = 101 325 Pa$
カロリ	cal	$1 cal=4.1868J \ (15^\circ C \text{カロリー}), 4.1868J \ ((IT) \text{カロリー})$
ミクロン	μ	$1 \mu=1 \mu m=10^{-6}m$

