



**次世代炉心解析システム MARBLE 用
一点炉動特性ソルバー Pointkinetics の開発**

Development of the Point Kinetics Solver, Pointkinetics
in the Next Generation Reactor Analysis Code System, MARBLE

深谷 裕司

Yuji FUKAYA

原子力基礎工学研究部門

核工学・炉工学ユニット

Division of Nuclear Data and Reactor Engineering
Nuclear Science and Engineering Directorate

December 2011

本レポートは独立行政法人日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。
本レポートの入手並びに著作権利用に関するお問い合わせは、下記あてにお問い合わせ下さい。
なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ホームページ (<http://www.jaea.go.jp>)
より発信されています。

独立行政法人日本原子力研究開発機構 研究技術情報部 研究技術情報課
〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根 2 番地 4
電話 029-282-6387, Fax 029-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency
Inquiries about availability and/or copyright of this report should be addressed to
Intellectual Resources Section, Intellectual Resources Department,
Japan Atomic Energy Agency
2-4 Shirakata Shirane, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195 Japan
Tel +81-29-282-6387, Fax +81-29-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

次世代炉心解析システム MARBLE 用一点炉動特性ソルバー

Pointkinetics の開発

日本原子力研究開発機構
原子力基礎工学研究部門 核工学・炉工学ユニット

深谷 裕司

(2011 年 9 月 26 日受理)

次世代炉心解析システム MARBLE 第 1 版においては燃焼解析を含む静的な核特性の解析を目的として整備された。今後、MARBLE を過渡解析へ適用させるため、動特性解析機能を実装する必要があり、今回は一点炉動特性ソルバーを開発した。

一点炉動特性ソルバーを開発するにあたり、種々の手法の理論的整理及び定式化を行い、これらの手法を MARBLE に実装した。また、代表的な 3 タイプの反応度添加パターンに対し各手法を適用し精度の評価を行った。

その結果、一点炉動特性ソルバーに対して、従来計算時間を要していたが、安定して高い精度が得られる行列指数関数を用いた手法が適していることがわかった。なお、本開発において行われた理論的整理や精度評価から得られた知見は、今後の MARBLE の空間動特性解析への拡張に資するものと期待できる。

Development of the Point Kinetics Solver, Pointkinetics in the Next Generation Reactor Analysis Code System, MARBLE

Yuji FUKAYA

Division of Nuclear Data and Reactor Engineering
Nuclear Science and Engineering Directorate
Japan Atomic Energy Agency
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received September 26, 2011)

The next generation reactor analysis code system, MARBLE version 1.0 had been developed to solve the static neutronic characteristics of reactors including burnup calculation. To solve transient problem in the MARBLE, neutronic kinetics module should be implemented. The neutronic kinetics composes space kinetics and point kinetics. Therefore, the objective of this development is to implement the point kinetics in the first place.

First, theoretical categorization of the methods to solve kinetic problem was performed to develop the point kinetics solver. Second, implementation and evaluation of the error for these methods was performed with three types of pattern for reactivity insertion.

As a result, it is found that the method using matrix exponential is preferable to apply for the point kinetics calculation due to the high reliability. Furthermore, the calculation time is not significant now.

However, the knowledge obtained by the theoretical categorization or the error evaluation profits for the future development of space kinetics in the MARBLE.

Keywords: Point Kinetics, Stiffness, Initial Value Problem, MARBLE

目次

1. 背景及び目的	1
2. 一点炉動特性方程式	2
2. 1 一点炉動特性方程式の導出	2
2. 2 一点炉動特性方程式の参照解	3
2. 2. 1 一点炉動特性方程式の解析解	3
2. 2. 2 一点炉動特性方程式の線形近似解	4
3. 一点炉動特性方程式の数値解法	7
3. 1 行列指数関数を用いた解法	7
3. 2 陽解法	9
3. 3 陰解法	9
3. 4 θ 法	9
3. 5 ルンゲクッタ法	10
3. 6 時間積分法	11
3. 7 即発跳躍近似	11
3. 8 SCM(Stiffness Confinement Method)	12
4. 一点炉動特性方程式の逆解法	15
5. プログラムの実装	17
6. 精度の評価	19
6. 1 ステップ反応度添加時の解の精度	20
6. 2 連続反応度添加時の精度	27
6. 3 計算時間の比較	33
7. まとめ	36
謝辞	37
参考文献	38
付録A アナログコンピューターの概要	40
付録B 溶液燃料体系における臨界事故評価への適用	43
付録C 原子炉リアルタイムシミュレーターへの適用	47
付録D 実機用反応度計の試作	48
付録E 炉型毎の即発中性子寿命	51

Contents

1.	Background and Objective	1
2.	Point Kinetics Equation	2
2.1	Derivation of Point Kinetics Equation	2
2.2	Reference solution for Point Kinetics Equation	3
2.2.1	Analytic solution for Point Kinetics Equation	3
2.2.1	Solution for Point Kinetics Equation with Linear Approximation	4
3.	Numerical Analysis for Point Kinetics Equation	7
3.1	Matrix Exponential Method	7
3.2	explicit Integration	9
3.3	Implicit Integration	9
3.4	θ Integration	9
3.5	Runge-Kutta Integration	10
3.6	Implicit Time Integration	11
3.7	Prompt Jump Approximation	11
3.8	SCM(Stiffness Confinement Method)	12
4.	Inverse Method for Point Kinetics Equation	15
5.	Program Implementation	17
6.	Estimation of Accuracy	19
6.1	Accuracy of Solution with Step Reactivity Insertion	20
6.2	Accuracy of Solution with Continuous Reactivity Insertion	27
6.3	Calculation Time	33
7.	Summary	36
	Acknowledgement	37
	Reference	38
	Appendix A Analog Computer	40
	Appendix B Application to Estimation for Critical Accident of Solution Fuel System	43
	Appendix C Application to Real Time Simulator for Reactor	47
	Appendix D Reactivity Meter for Actual Reactor	48
	Appendix E Life Time of Prompt Neutron for Each Type of Reactor	51

List of Tables

Table 6.1	解析に用いた動特性パラメーター	19
Table 6.2	各手法を用いた際の時間ステップ 1 ステップ当たりの計算時間	34
Table 6.3	Pade 法による時間ステップの変化に対する 1 ステップ当たりの計算時間	35
Table E.1	高速増殖炉システム候補概念の技術総括結果	52
Table E.2	炉型毎の即発中性子寿命	55

List of Figures

Fig. 6.1	反応度のステップ入力時の応答	20
Fig. 6.2	陽解法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)	21
Fig. 6.3	即発跳躍近似を併用した陽解法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)	22
Fig. 6.4	陰解法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)	23
Fig. 6.5	θ 法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)	24
Fig. 6.6	ルンゲクッタ法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)	25
Fig. 6.7	時間積分法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)	26
Fig. 6.8	Pade 法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)	27
Fig. 6.9	線形近似解と Pade 法の比較 (反応度のランプ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 1 \phi / \text{s}$)	28
Fig. 6.10	線形近似解と Pade 法の比較 (反応度の正弦波入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$ 、1Hz)	29
Fig. 6.11	陽解法の誤差 (反応度のランプ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 1 \phi / \text{s}$)	30
Fig. 6.12	即発跳躍近似を併用した陽解法の誤差 (反応度のランプ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 1 \phi / \text{s}$)	31
Fig. 6.13	陽解法の誤差 (反応度の正弦波入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$ 、1Hz)	32
Fig. 6.14	即発跳躍近似を併用した陽解法の誤差 (反応度の正弦波入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$ 、1Hz)	33
Fig. A.1	反転増幅回路	40
Fig. A.2	反転増幅回路の応用例	41
Fig. A.3	一点炉動特性方程式の回路図	42
Fig. B.1	熱伝達率への換算	43
Fig. B.2	TRACY ランプ給液運転 Run 61 の解析結果	46

Fig. C.1	TRACY 施設を模擬したリアルタイムシミュレーター	47
Fig. D.1	一般的な線形出力計の計測回路	48
Fig. D.2	反応度計のインターフェース	50
Fig. E.1	BWR Step-III 燃料のペレット内部の中性子束ピーキング	54
Fig. E.2	炉型によるスペクトルの違い	55

1. 背景及び目的

次世代炉心解析システム MARBLE 第 1 版¹⁾においては燃焼解析を含む静的な核特性の解析を目的として整備された。今後の MARBLE の過渡解析への対応のためには動特性機能を実装する必要がある。なお、動特性機能の必要性については CEA との共同研究²⁾においても確認されている。今回は一点炉動特性ソルバーの開発を目的とする。

一点炉動特性方程式は、反応が俊敏な即発中性子の保存式と変化が緩やかである遅発中性子先行核の保存式を連立させる特殊なものであり、**Stiffness problem** もしくは **Initial value problem** と呼ばれる問題³⁾が発生する。

この問題に対応するためには、即発中性子の変化に合わせ時間ステップを細かくとるなどの対応が必要である。これを避ける手法などとしては即発跳躍近似が提案されている。このように、一点炉動特性方程式の解法としては多くの手法が提案され適用されてきた経緯がある。

このような多くの手法が適用されていることに関しては、当時の解析手法に関する事情が関係していると思われる。一点炉動特性方程式がはじめて適用された当時はアナログコンピュータ⁴⁾による解法が用いられていた。アナログコンピュータではスケーリングと呼ばれる変数変換を行えば求められる解に影響を与えることが無く計算時間の調整が可能であること、方程式の離散化の必要が無いなど、デジタルコンピュータに勝る側面を有している。計算資源に乏しいデジタルコンピュータ導入期においては計算費及び計算精度がトレードオフの関係で選択する必要があったと思われ、これらの議論は現在のコンピュータ事情に合わせて検討し直す必要がある。

現在においても、この意味において議論が行われることが主流であるが、現在のコンピュータ技術の発達により、一点炉動特性方程式の解法においての計算費は問題とならなくなり、よりよい精度による現象の再現が望まれるようになってきている。本開発においては、一点炉動特性方程式の抽象化した連立一階微分方程式をよりよい精度で求めることを目標としているが、従来 of 計算費の節減を意識した手法なども含め理論の整理及び実装を行い、その精度に関しての比較検討を行う。

2. 一点炉動特性方程式

2. 1 一点炉動特性方程式の導出

一般的に動特性方程式は以下のように記述できる。

$$\frac{1}{v} \frac{d\phi}{dt} = (1 - \beta)\chi_p P\phi - L\phi + \sum_i \lambda_i \chi_{di} c_i + S \quad (2-1)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \beta_i P\phi - \lambda_i c_i \quad (2-2)$$

ここで、中性子束を振幅関数と形状関数の積に変数分離できるとすると、

$$\phi(E, r, t) = n(t)\varphi(E, r, t) \quad (2-3)$$

となる。ここで、形状関数の体系内における積分値は一定であり、過渡変化時の中性子束の変化は振幅関数の変化としてあらわれる。一般的に、形状関数の時間変化は緩やかなものである。式(1-1),(1-2)に代入し随伴中性子束を掛けエネルギー及び空間に関して積分すると、

$$\frac{dn}{dt} + En = \frac{(\rho - \bar{\beta})}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i \bar{c}_i + \bar{S} \quad (2-4)$$

$$\frac{d\bar{c}_i}{dt} = \frac{\bar{\beta}_i}{\Lambda} n - \lambda_i \bar{c}_i \quad (2-5)$$

ここで、式変形には、

$$\chi = (1 - \beta)\chi_p + \sum_i \beta_i \chi_{di} \quad (2-6)$$

の関係を用いている。また、それぞれの記号の定義は以下のようになる。

$$\rho = \frac{\langle \phi^\dagger (\chi P - L) \phi \rangle}{\langle \phi^\dagger \chi P \phi \rangle} \quad (2-7)$$

$$\bar{\beta}_i = \frac{\langle \phi^\dagger \beta_i \chi_{di} P \phi \rangle}{\langle \phi^\dagger \chi P \phi \rangle} \quad (2-8)$$

$$\bar{\beta} = \sum_i \bar{\beta}_i \quad (2-9)$$

$$\bar{c}_i = \frac{\langle \phi^\dagger c_i \chi_{di} \phi \rangle}{\langle \phi^\dagger \frac{1}{v} \phi \rangle} \quad (2-10)$$

$$\Lambda = \frac{\langle \phi^\dagger \frac{1}{v} \phi \rangle}{\langle \phi^\dagger P \phi \rangle} \quad (2-11)$$

$$\bar{S} = \frac{\langle \phi^\dagger S \rangle}{\langle \phi^\dagger \frac{1}{v} \phi \rangle} \quad (2-12)$$

$$E = \frac{\langle \phi^\dagger \frac{1}{v} \frac{d\phi}{dt} \rangle}{\langle \phi^\dagger \frac{1}{v} \phi \rangle} \quad (2-13)$$

ここで、形状関数が時間に対して変化しないと仮定すると、

$$\phi(E, r, t) = n(t)\varphi(E, r) \quad (2-14)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (2-15)$$

となり、 $E=0$ となる。最終的に一点炉動特性方程式は、一般的な記号で記述すると、

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i + s \quad (2-16)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \quad (2-17)$$

一点炉動特性方程式は式(2-15)のように形状関数が時間に対して変化しないと仮定している。そのため、出力分布が大きな変化を伴いながら出力が変化するような体系においては、式(2-13)に示した E が誤差として発生するため一点炉動特性方程式が適用できなくなる。また、動特性パラメータそのものも時間変化することとなり、時間変化に応じた動特性パラメータの準備が必要となる。

2. 2 一点炉動特性方程式の参照解

本来の目的である、数値解法による汎用ソルバーの開発について述べる前に、一点炉動特性方程式の参照解について述べる。特定の条件下においては、一点炉動特性方程式の参照解が得られ、数値解法による手法の検証に使用できる参照値が得られる。ここで示す参照解の算出は、検証用の参照値として用いられるのみではなく、一点炉動特性方程式の特性を検討する意味で用いられることも多い。

2. 2. 1 一点炉動特性方程式の解析解

反応度のステップ入力に関する問題についての厳密な解析解が得られることが知られている。⁵⁾ ここでは、ステップ応答に関する解析解を求める手法を示す。

解くべき動特性方程式は以下のように記述される。

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i + s \quad (2-18)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \quad (2-19)$$

これらの式をラプラス変換すると以下のようになる。

$$\omega \tilde{n} - n_0 = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} \tilde{n} + \sum_i \lambda_i \tilde{c}_i + \frac{s}{\omega} \quad (2-20)$$

$$\omega \tilde{c}_i - c_{i0} = \frac{\beta_i}{\Lambda} \tilde{n} - \lambda_i \tilde{c}_i \quad (2-21)$$

ここで、初期条件（定常状態を仮定）から、

$$c_{i0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i \Lambda} \quad (2-22)$$

の関係及び式(2-20),式(2-21)を用いて \tilde{c}_i を消去し \tilde{n} について整理すると以下のようになる。

$$\tilde{n} = \left[\frac{\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i}}{\Lambda \omega + \beta - \rho - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}} \right] n_0 + \frac{s}{\omega} \left[\frac{\Lambda}{\Lambda \omega + \beta - \rho - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}} \right] \quad (2-23)$$

ここで、特性方程式（逆時間方程式）

$$\Lambda \omega + \beta - \rho - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} = 0 \quad (2-24)$$

の解を特異点として以下のように整理できる。

$$\tilde{n} = \sum_j \frac{A_j}{\omega - \omega_j} n_0 + \sum_j \frac{B_j}{\omega(\omega - \omega_j)} s \quad (2-25)$$

ここで、 A_j 及び B_j は以下のようになる。

$$A_j = \left[\frac{\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{\omega_j + \lambda_i}}{\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{(\omega_j + \lambda_i)^2}} \right] \quad (2-26)$$

$$B_j = \left[\frac{\Lambda}{\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{(\omega_j + \lambda_i)^2}} \right] \quad (2-27)$$

式(2-25)を逆ラプラス変換することにより、以下のような解析解が求まる。

$$n(t) = n_0 \sum_j A_j \exp(\omega_j t) + s \sum_j \frac{B_j}{\omega_j} [\exp(\omega_j t) - 1] \quad (2-28)$$

式(2-24)の解に関しては、本開発ではニュートン法により解いている。

2. 2. 2 一点炉動特性方程式の線形近似解

反応度変化を入力とし炉心出力の変化を出力とした伝達関数を算出することにより、自由度の高い参照解を得ることができる。伝達関数の算出は以下のように行う。

ある定常状態を仮定し、反応度の変化が発生した際の出力変化及び遅発中性子先行核濃度の変化を以下のように表す。

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho \quad (2-29)$$

$$n = n_0 + \delta n \quad (2-30)$$

$$c_i = c_{i0} + \delta c_i \quad (2-31)$$

すると、一点炉動特性方程式は以下のように表すことができる。

$$\frac{dn_0}{dt} + \frac{d\delta n}{dt} = \frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} n_0 + \sum_i \lambda_i c_{i0} + s + \frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} \delta n + \frac{\delta \rho}{\Lambda} n_0 + \sum_i \lambda_i \delta c_i + \frac{\delta \rho \delta n}{\Lambda} \quad (2-32)$$

$$\frac{dc_{i0}}{dt} + \frac{d\delta c_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n_0 - \lambda_i c_{i0} + \frac{\beta_i}{\Lambda} \delta n - \lambda_i \delta c_i \quad (2-33)$$

式(2-32)に関しては、左辺第1項及び右辺第1項から第3項までは、定常状態におけるバランス方程式となるため、キャンセルアウトされる。式(2-33)の左辺第1項及び右辺第1項、第2項に関しても同様である。ここで、式(2-32)の右辺の最後の項に関しては、線形近似として無視することとする。結果として、以下のように整理できる。

$$\frac{d\delta n}{dt} = \frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} \delta n + \frac{\delta \rho}{\Lambda} n_0 + \sum_i \lambda_i \delta c_i \quad (2-34)$$

$$\frac{d\delta c_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} \delta n - \lambda_i \delta c_i \quad (2-35)$$

この2式を $\delta \rho_0 = \delta n_0 = \delta c_{i0} = 0$ の関係を用いてラプラス変換すると、

$$\omega \delta \tilde{n} = \frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} \delta \tilde{n} + \frac{\delta \tilde{\rho}}{\Lambda} n_0 + \sum_i \lambda_i \delta \tilde{c}_i \quad (2-36)$$

$$\omega \delta \tilde{c}_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} \delta \tilde{n} - \lambda_i \delta \tilde{c}_i \quad (2-37)$$

となる。ここで、式(2-36),(2-37)を $\delta \tilde{c}_i$ を消去するように整理すると、

$$\delta \tilde{n} = n_0 \left[\frac{1}{\Lambda \omega + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}} \right] \delta \tilde{\rho} \quad (2-38)$$

となる。ここで、伝達関数 $G(\omega)$ を導入すると以下のようなになる。

$$\delta \tilde{n} = n_0 G(\omega) \delta \tilde{\rho} \quad (2-39)$$

$$G(\omega) = \left[\frac{1}{\Lambda \omega + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}} \right] \quad (2-40)$$

この伝達関数は特性方程式

$$\Lambda \omega + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} = 0 \quad (2-41)$$

の解を用いて、

$$G(\omega) = \sum_j \frac{A_j}{\omega - \omega_j} \quad (2-42)$$

$$A_j = \left[\frac{1}{\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{(\omega_j + \lambda_i)^2}} \right] \quad (2-43)$$

と表すことができる。

ここで、反応度のランプ入力を考える。

$$\delta\rho(t) = at \quad (2-44)$$

ラプラス変換は、

$$\delta\tilde{\rho} = \frac{a}{\omega^2} \quad (2-45)$$

となるので、

$$\delta\tilde{n} = n_0 \sum_j \frac{aA_j}{\omega^2(\omega - \omega_j)} \quad (2-46)$$

逆ラプラス変換をすると、

$$\delta n = n_0 \sum_j aA_j \left[\frac{1}{\omega_j^2} (\exp(\omega_j t) - 1) - \frac{t}{\omega_j} \right] \quad (2-47)$$

次に、正弦波入力を考える。

$$\delta\rho(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2-48)$$

ラプラス変換は、

$$\delta\tilde{\rho} = \frac{a \frac{2\pi}{T}}{\omega^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \quad (2-49)$$

となるので、

$$\delta\tilde{n} = n_0 \sum_j \frac{a \frac{2\pi}{T} A_j}{(\omega_j^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2)(\omega - \omega_j)} \quad (2-50)$$

逆ラプラス変換をすると、

$$\delta n = n_0 \sum_j \frac{a \frac{2\pi}{T} A_j}{\omega_j^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \left[\exp(\omega_j t) - \frac{\omega_j}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \quad (2-51)$$

となる。

3. 一点炉動特性方程式の数値解法

本章においては、一点炉動特性方程式の解法に特化した手法を除いては連立一階微分方程式の一般的な解法として議論を行う。連立一階微分方程式を一般的な形式として、以下に示す形の方程式により与え、解法の導入を行う。

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + \vec{B} \quad (3-1)$$

3. 1 行列指数関数を用いた解法

ここでは、初めに以下のような同次方程式に対する解法を考える。

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} \quad (3-2)$$

この厳密解は行列指数関数を用いることにより以下のようにあらわすことができる。

$$\vec{X}(t_{n+1}) = \exp(\Delta t A) \vec{X}(t_n) \quad (3-3)$$

この行列指数関数の定義としては、以下のようなものである。

$$\exp(\Delta t A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta t A)^n \quad (3-4)$$

このように、一般的な指数関数のテーラー展開を用いて指数行列関数の定義としている。この行列指数関数の解析解については特定の条件下で求めることができる。その中の一つである行列の対角化を利用した方法について紹介する。行列指数関数の指数関数の中の行列が対角行列の場合に関しては、以下のような指数関数を対角成分に持つ行列への変換が可能である。

$$\exp\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \exp(a_{11}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \exp(a_{nn}) \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

この性質を用いれば、

$$\exp(\Delta t A) = P P^{-1} \exp(\Delta t A) P P^{-1} = P \Delta t \Gamma P^{-1} \quad (3-6)$$

とすることができる。ここで Γ は対角行列を表す。結果として、

$$\vec{X}(t_{n+1}) = P \Delta t \Gamma P^{-1} \vec{X}(t_n) \quad (3-7)$$

のように解ける。ここで、行列 P は行列 A の固有ベクトルをすべて求め行列に合成したものである。対角行列 Γ の対角成分には行列 A の固有値が並ぶ。ただし、必ずしも行列 A の対角化が可能であるとは限らないことと、対角化を行うために固有値問題を解く必要があることなどから、実用的な手法とは言えず他の数値解法が必要となる。

これまでの議論においては、式(3-2)に示されるような同次方程式に対する解法を議論してきたが、式(3-1)に示されるような非同次方程式に対する解法に関しては、以下のような応用が可能である。

今回導入した行列指数関数を用いれば通常非同次方程式と同様に、式(3-1)は次のように解ける。

$$\vec{X}(t_{n+1}) = -A^{-1}\vec{B} + \exp(\Delta t A) (\vec{X}(t_n) + A^{-1}\vec{B}) \quad (3-8)$$

ここで、

$$\vec{X}'(t) \equiv \vec{X}(t) + A^{-1}\vec{B} \quad (3-9)$$

とおけば、

$$\vec{X}'(t_{n+1}) = \exp(\Delta t A) \vec{X}'(t_n) \quad (3-10)$$

となり、同次方程式に対する解法がそのまま流用できる。ただし、行列 A が逆行列を持たない特異行列のときには他の手法を利用する必要がある。

数値解法としては、式(3-4)に示したテーラー展開の式を解くことになるが、有限次数で打ち切ることになる。また、次数を固定した際にはタイムステップを大きくとると大きな誤差が発生することは自明であるが、以下のように指数関数の特性を利用すれば以下のように書き換えることができる。

$$\exp(\Delta t A) = \left(\exp\left(\frac{\Delta t}{m} A\right) \right)^m \quad (3-11)$$

このような式変形により実効的なタイムステップが短くなり、精度向上へつながる。この手法は **scaling and squaring** 法と呼ばれる。

また、行列指数関数の異なる表現法に **Pade** 近似というものがある。**Pade** 近似では指数関数を次のように近似する。

$$\exp(x) \cong \frac{N_{pq}(x)}{D_{pq}(x)} \quad (3-12)$$

ここで、

$$N_{pq}(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} x^k \quad (3-13)$$

$$D_{pq}(x) = \sum_{k=0}^q \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} (-x)^k \quad (3-14)$$

とする。 $q=0$ の場合はテーラー展開となり、テーラー展開を包括する汎用的な表現法であるといえる。一般的な科学ライブラリにはこの **Pade** 近似と **scaling and squaring** 法を合わせた手法が用いられる。この場合 $p=q$ とされることが多い。本研究においては、**Scipy** ライブラリ⁶⁾において実装された本手法(`scipy.linalg.expm`)を利用する。詳細は5章で述べるが、**Scipy** は本開発で用いた **Python** 言語から使用出来る科学ライブラリである。これらの手法は、多くの計算費を必要とする半面、高い精度において解析解と一致することが期待できる。ただし、実際の精度については、展開次数、**scaling and squaring** による分割回数は使用する科学ライブラリの最適化によるところが大きいと、ユーザーによる確認が必要となる。

同様の手法として、同じ行列指数関数の解法としてのクリロフ部分空間法⁷⁾やベータマン方程式⁸⁾が挙げられるが、クリロフ部分空間法は解くべき問題の次数を効率的に圧縮する技術であり、結局のところ他の行列指数関数の解法を利用することになること（即発中性子1群、遅発中性子6群程度の計算では利点が無い）から実装を行わなかった。また、ベ-

タマン方程式に関しては、解析解が得られる手法であるため魅力的であるものの、大きな欠点である循環関係を扱えないという点が一点炉動特性方程式を解く目的に適さないことから、実装を行っていない。

3. 2 陽解法

この手法は最も簡単な積分法でありオイラー法とも呼ばれる。本手法及び、次に示す陰解法においては、一階微分を以下のような単純な差分法で近似する。

$$\dot{\vec{X}} \cong \frac{\vec{X}(t_{n+1}) - \vec{X}(t_n)}{\Delta t} \quad (3-15)$$

ただし、右辺の時制に関しては、現在のタイムステップである t_n を用いる。式(3-1)に適用すると以下ようになる。

$$\vec{X}(t_{n+1}) = \vec{X}(t_n) + \Delta t(A\vec{X}(t_n) + \vec{B}) \quad (3-16)$$

式(3-2)の同次方程式について考慮すると、厳密解の式(3-4)のテーラー展開表示と比較すると、本手法はテーラー展開近似の1次の項までの再現であることが分かる。そのため、誤差のオーダーは二次程度となることが分かる。また、Pade 近似においては、 $p=1$ 、 $q=0$ としたものと一致する。これらのことより、実装は簡単であり計算負荷が少ない半面、タイムステップを細かくとる必要がある。

3. 3 陰解法

陽解法とは違い式(3-1)における右辺の時制を現在のタイムステップである t_{n+1} の値とする。

$$\vec{X}(t_{n+1}) = [I - \Delta t A]^{-1} [\vec{X}(t_n) + \Delta t \vec{B}] \quad (3-17)$$

このように、本手法においては、逆行列の評価が必要となり陽解法よりは実装が複雑となる。一方で、陽解法よりは精度が高くタイムステップを大きくとることができることが知られている。また、同次方程式の場合、Pade 近似においては、 $p=0$ 、 $q=1$ としたものと一致するため、誤差のオーダーは2次程度であると考えられる。

3. 4 θ 法

本手法は陽解法と陰解法を合成したものである。 $0 \leq \theta \leq 1$ のパラメータを用い内挿を行う。ここでは、演算で得られるベクトル値全体を一つの内挿パラメータ θ で内挿することとする。

$$\vec{X}(t_{n+1}) - \vec{X}(t_n) = \Delta t [\theta(A\vec{X}(t_{n+1}) + \vec{B}) + (1 - \theta)(A\vec{X}(t_n) + \vec{B})] \quad (3-18)$$

この式からわかるように、 $\theta=0$ の場合は陽解法と一致し、 $\theta=1$ の時は陰解法と一致する。式(3-18)は整理すると、

$$\vec{X}(t_{n+1}) = [I - \theta \Delta t A]^{-1} \{ [I + (1 - \theta) \Delta t A] \vec{X}(t_n) + \Delta t \vec{B} \} \quad (3-19)$$

となる。特に、 $\theta=1/2$ のときクランク・ニコルソン法と呼ばれる。精度に関しては陰解法

よりも良いとされる。また、同次方程式の場合、Pade 近似においては、 $p=1, q=1$ としたものがクランク・ニコルソン法と一致するため、この場合に限っては誤差のオーダーは2次程度であると考えられる。

自明のことであるが、用いる θ 値によって解の精度は異なる。そのため、 θ 法に適した θ 値の最適化について検討する。ここでは、 θ 法を拡張し以下のようにあらわす。ここでは、同次方程式に対して検討する。

$$\vec{X}(n+1) - \vec{X}(n) = \Delta t [\theta \vec{X}(n+1) + (A - \theta) \vec{X}(n)] \quad (3-20)$$

ここで、内挿パラメータ θ は行列であり、連立微分方程式の各項に対して個別の内挿値を与えることができるものとする。 $\theta_{ij} = \theta_{ij} a_{ij}$ であり $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ とする。ここで、式(3-3)の解析解と比較すると、内挿行列 θ は、以下のようにあらわすことができる。

$$\theta = \frac{1}{\Delta t} I - A[\exp(\Delta t A) - I]^{-1} \quad (3-21)$$

係数行列 A が対角化可能な場合は、以下のように変形することができる。

$$\theta = \frac{1}{\Delta t} I - A[P \Delta t \Gamma P^{-1} - I]^{-1} \quad (3-22)$$

もし、このような内挿行列 θ を求めることができれば、 θ 法は解析解と同等の精度が得られると言える。ただし、本手法のようなアプローチを行うならば直接 Pade 近似と **scaling and squaring** 法を用いたほうが、計算費的には有利であると考えられるため、内挿パラメータの決定は、他の推定法及び、経験によって決定されるべきものと考えられる。

また、混同されやすい手法としては、半陰解法と呼ばれるものがあるが、これに関しては連立する個別の方程式に対し、陽解法と陰解法を使い分ける手法であり、本手法とは区別する必要がある。

3. 5 ルンゲクッタ法

ここでは、4次のルンゲクッタ法について説明する。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3-23)$$

とし、

$$k_1 = f(t_n, x_n) \quad (3-24)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right) \quad (3-25)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) \quad (3-26)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, x_n + \Delta t k_3) \quad (3-27)$$

最終的にこれらの値を用いて、

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3-28)$$

本手法は、一次の導関数を入れ子として4回用いることにより、4次程度の精度を得られる手法である。

3. 6 時間積分法

本手法は、一点炉動特性方程式に特化した解法であり、遅発中性子先行核について解析的に解く手法である。式(2-17)は解析的に解けるならば以下のようにあらわせる。

$$c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^t n(t') \exp(-\lambda_i(t-t')) dt' \quad (3-29)$$

タイムステップ毎の先行核濃度は、

$$c_i(t_{n+1}) = c_i(t_n) \exp(-\lambda_i \Delta t) + \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{t_n}^{t_{n+1}} n(t') \exp(-\lambda_i(t_{n+1}-t')) dt' \quad (3-30)$$

ここで、振幅関数 n が線形に変化すると仮定すると、

$$\begin{aligned} c_i(t_{n+1}) &= c_i(t_n) \exp(-\lambda_i \Delta t) \\ &+ \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} \left[\left(\frac{1 - \exp(-\lambda_i \Delta t)}{\lambda_i \Delta t} - \exp(-\lambda_i \Delta t) \right) n(t_n) \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{1 - \exp(-\lambda_i \Delta t)}{\lambda_i \Delta t} \right) n(t_{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (3-31)$$

となる。これを、(2-16)式に代入し陰解法として解くと以下ようになる。

$$\begin{aligned} n(t_{n+1}) &= \frac{\left(1 + \Delta t \sum_i \frac{\beta_i}{\Lambda} \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_i \Delta t)}{\lambda_i \Delta t} - \exp(-\lambda_i \Delta t) \right) \right) n(t_n) + \Delta t \sum_i \lambda_i c_i(t_n) \exp(-\lambda_i \Delta t) + s \Delta t}{\left(1 - \Delta t \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} - \Delta t \sum_i \frac{\beta_i}{\Lambda} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\lambda_i \Delta t)}{\lambda_i \Delta t} \right) \right)} \end{aligned} \quad (3-32)$$

3. 7 即発跳躍近似

これまでに紹介した手法に関しては、即発中性子の変化に合わせて比較的長時間ステップを小さくとらなければならない。一方で、遅発中性子先行核の時間変化は緩やかであり、詳細な時間ステップを必要としないが、それでも、時間ステップの決定は即発中性子の解法に合わせなければならない。このような **stiffness** に対応する最も簡便な対策としては即発跳躍近似があげられる。これは、式(2-16)の即発中性子の時間変化項を無視することにより行われる。このことは即発中性子の時間変化は俊敏であり、先行核濃度をソースとした定常状態に急速に漸近するものと理解できる。一方で、反応度として考慮すると以下のように考えられる。

$$\rho = \beta - \frac{\Lambda(\sum_i \lambda_i c_i + s)}{n} \quad (3-33)$$

この式から分かるように、即発跳躍近似は反応度が 1\$を超える範囲に関しては適用外であることが分かる。実装に関しては、陽解法、陰解法、 θ 法、ルンゲクッタ法などに関しては、先行核に関する方程式のみに積分法の適用を考えればよい。この際、先行核の方程式に振幅関数が現れるが、時間変化を無視しているため積分範囲内では定数として取り扱える。時間積分法に関しては、式(3-30)は以下のようなになる。

$$c_i(t_{n+1}) = c_i(t_n) \exp(-\lambda_i \Delta t) + \frac{\beta_i(1 - \exp(-\lambda_i \Delta t))n(t_n)}{\lambda_i \Lambda} \quad (3-34)$$

このように、先行核濃度を更新し、以下の関係を用いて振幅関数を評価する。

$$n(t_{n+1}) = \frac{\Lambda(\sum_i \lambda_i c_i(t_n) + s)}{\beta - \rho} \quad (3-35)$$

なお、このような変件事象の支配時間が特に小さな方程式のみを定常解で置き換える手法は燃焼方程式等にも用いられることがある。

3. 8 SCM(Stiffness Confinement Method)

これまでの手法は、主に1次から4次程度の冪関数による補間と同等の数値積分を行う手法であった。この SCM³⁾では、時間ステップ内を動特性方程式と同等の指数解により補間し数値積分することを行っている。そのため、中性子束の変化が俊敏である即発中性子に関しても、比較的大きな時間ステップを用いて解くことが可能である。SCMの解析手法については以下のとおりである。はじめに、先行核濃度に対して数値解析上の工夫を行う。

$$c_i(t) = \hat{c}_i(t) \exp\left(\int_{-\infty}^t u(t') dt'\right) \quad (3-36)$$

これは、原著においても本質的なものではないと言及されているが、補正された先行核濃度 $\hat{c}_i(t)$ の時間変化を緩やかにし、一次の差分法による解法に適した特性を得るための工夫である。そのために任意の関数 $u(t)$ を導入している。原著においては、動特性方程式において外部中性子源を想定していないが、本件においては汎用性を高めるために導入する。ただし、解法の性質上(3-36)と同様の補正が必要になる。

$$s(t) = \hat{s}(t) \exp\left(\int_{-\infty}^t u(t') dt'\right) \quad (3-37)$$

これらの補正によって先行核濃度の変化は緩やかになるが、それは変化項を任意の関数 $u(t)$ が吸収しているためである。また、のちに示すように、積分を進めるうえでは関数 $u(t)$ を評価する必要があるが、通常変化を想定しない外部中性子項を導入したことにより、先行核濃度に対しての関数 $u(t)$ の最適化が疎外される恐れがある。このため、数値解法の振る舞いによっては、この補正を廃止することも考慮して実装の検討を行う必要がある。また、本手法における重要な関数となる $w(t)$ を導入する。この関数を用いて振幅関数は以下のように

あらわすことができることを想定している。

$$n(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^t w(t') dt'\right) \quad (3-38)$$

この関係を用いると、式(2-16)は以下のように整理できる。

$$n(t) = \frac{\sum_i \lambda_i c_i(t) + s}{w(t) + \frac{(\beta - \rho)}{\Lambda}} \quad (3-39)$$

式(3-36),(3-37),(3-39)の関係を用いれば、式(2-17)は以下のように表すことができる。

$$\frac{d\hat{c}_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i(\sum_i \lambda_i \hat{c}_i(t) + s)}{\Lambda w(t) + \beta - \rho} - (u(t) + \lambda_i)\hat{c}_i(t) \quad (3-40)$$

また、振幅関数の評価に関しては、式(3-39)を用いずに以下の式を用いる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} n(t) + S(t) \quad (3-41)$$

ここで、 $S(t)$ は以下のように定義する。

$$S(t) = \left(\sum_i \lambda_i c_i(t) + s \right) \exp\left(\int_{-\infty}^t u(t') dt'\right) \quad (3-42)$$

また、 $w(t)$ 、 $u(t)$ の評価には以下の式を用いる。

$$w(t) = \frac{d}{dt} \ln(n(t)) \quad (3-43)$$

$$u(t) = \frac{d}{dt} \ln(S(t)) \quad (3-44)$$

これらを繰り返し解法を用いて解くが具体的な手法を以下に示す。

初期条件としては以下のようなものを考える。

$$u(0) = 0 \quad (3-45)$$

$$w(0) = \frac{\rho(0)}{\Lambda} \quad (3-46)$$

$$n(0) = n_0 \quad (3-47)$$

$$\hat{c}_i(0) = \frac{n_0 \beta_i}{\Lambda \lambda_i} \quad (3-48)$$

これらの条件を用い、最初の時間ステップにおいて式(3-40)を差分化（陽解法）し $\hat{c}_i(t)$ を更新する。

$$\hat{c}_i(t_n) = \hat{c}_i(t_{n-1}) + \Delta t \left(\frac{\beta_i(\sum_i \lambda_i \hat{c}_i(t_{n-1}) + s)}{\Lambda w(t_{n-1}) + \beta - \rho} - (u(t_{n-1}) + \lambda_i)\hat{c}_i(t_{n-1}) \right) \quad (3-49)$$

次に式(3-42)を用いてソース項を更新し、式(3-41)を解析的に解く。解析解は、

$$n(t) = \int_{-\infty}^t S(t') \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda}(t - t')\right) dt' \quad (3-50)$$

以下のように離散化する。

$$n(t_n) = n(t_{n-1}) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} \Delta t\right) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} S(t') \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} (t_n - t')\right) dt' \quad (3-51)$$

ここで、 $S(t')$ が指数関数形の変化をすると仮定すると、

$$n(t_n) = n(t_{n-1}) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} \Delta t\right) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} S(t_n) \exp(u(t_{n-1})(t' - t_{n-1})) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} (t_n - t')\right) dt' \quad (3-52)$$

$$n(t_n) = n(t_{n-1}) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} \Delta t\right) + \frac{\Lambda S(t_{n-1})}{\beta - \rho + u(t_{n-1})\Lambda} (\exp(u(t_{n-1})\Delta t) + \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda} \Delta t\right)) \quad (3-53)$$

ここで、 $w(t)$ を再評価する。

$$w(t_n) = \frac{d}{dt} \ln(n(t_n)) \cong \frac{\ln(n(t_n)/n(t_{n-1}))}{\Delta t} \quad (3-54)$$

次に、式(3-49)に立ち返り、繰り返し計算を行う。原著には明記されていないが、ソース項の更新後には同様に $u(t)$ を再評価する。

$$u(t_n) = \frac{d}{dt} \ln(S(t_n)) \cong \frac{\ln(S(t_n)/S(t_{n-1}))}{\Delta t} \quad (3-55)$$

この繰り返し計算は、 $w(t)$ 及び $u(t)$ が収束するまで行われる。また、式(3-49)及び式(3-52)、式(3-53)に示された関数 $w(t)$ 及び $u(t)$ は初期値として使われているために、前回の時間ステップのものとなっているが、更新後には最新のものを用いる。次の時間ステップに関しての関数 $w(t)$ 及び $u(t)$ の初期値は、原著によれば外挿して求めることとなっているが、単純な外挿では計算が発散する恐れがあるとの報告⁹⁾があり、緩和係数を用いて調整できるようにしておく必要がある。具体的には以下のようにする。

$$w(t_{n+1}) = w(t_n) + (w(t_n) - w(t_{n-1})) \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \theta \quad (3-56)$$

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + (u(t_n) - u(t_{n-1})) \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \theta \quad (3-57)$$

ただし、本開発においては、試作を行ったものの満足に収束する実装が行えなかったため、本モジュールには登録しないものとした。

4. 一点炉動特性方程式の逆解法

一点炉動特性方程式は入力された反応度に対しての出力を算出することに用いられる。これを反応度について解けば、任意の出力変化に対しての反応度変化を逆算することができる。これを逆解法と呼ぶ。用途としては、実機炉心の反応度管理に用いられる。本報告書の主要な目的は一点炉動特性方程式の解法であるが、密接に関連した技術であり利用価値も大きなものであることから合わせて実装を行った。以下に、具体的な解法を説明する。

一点炉動特性方程式は以下のように記述される。

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i + s \quad (4-1)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \quad (4-2)$$

式(4-1)を反応度について解けば、

$$\rho = \beta + \frac{\Lambda}{n} \frac{dn}{dt} - \frac{\Lambda \sum_i \lambda_i c_i}{n} - \frac{\Lambda s}{n} \quad (4-3)$$

また、式(4-2)は以下のように解ける。

$$c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^t n(t') \exp(-\lambda_i(t-t')) dt' \quad (4-4)$$

検出器から得られる出力の信号を用い式(4-4)により先行核濃度を算出し、その値と出力信号を用い式(4-3)により反応度をリアルタイムで評価することが可能となる。具体的な数値解法は以下のようになる。

$$\rho(t_n) = \beta + \Lambda \omega_n - \frac{\Lambda \sum_i \lambda_i c_i(t_n)}{n(t_n)} - \frac{\Lambda s}{n(t_n)} \quad (4-5)$$

ここで、 ω_n は以下のようになる。

$$\omega_n = \frac{1}{n(t_n)} \frac{dn}{dt} \Big|_{t_n} = \frac{d \ln(n)}{dt} \Big|_{t_n} = \frac{\ln(n(t_n)) - \ln(n(t_{n-1}))}{\Delta t} \quad (4-6)$$

式(4-4)に関しては、

$$c_i(t_n) = c_i(t_{n-1}) \exp(-\lambda_i \Delta t) + \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{t_{n-1}}^{t_n} n(t') \exp(-\lambda_i(t_n - t')) dt' \quad (4-7)$$

ここで、振幅関数 n が式(4-6)の関係に示されるように指数的に変化すると仮定すると以下のように変形できる。

$$c_i(t_n) = c_i(t_{n-1}) \exp(-\lambda_i \Delta t) + \frac{\beta_i}{\Lambda} \frac{\left[\frac{n(t_n)}{\omega_n} - \frac{n(t_{n-1})}{\omega_n} \exp(-\lambda_i \Delta t) \right]}{\left(1 + \frac{\lambda_i}{\omega_n} \right)} \quad (4-8)$$

この手法の利点としては、既に記載したようにリアルタイムで反応度が測定できる点である。反応度測定の古典的な手法にペリオド法というものがあるが、この手法では添加し

た反応度に対する安定ペリオドを評価する必要があるため、ペリオドを測定（ダブリングタイムを通して）するにはペリオドの安定を待つ必要がある。本手法ではこのような留意を必要としない。また、中性子源の影響を正確に予想できる場合には、中性子源の効果を反応度評価に加えることができる。このように、従来法の発展形として考えることもできるが、この逆解法の利点を生かせば反応度価値測定法の在り方が大きく変更できる。制御棒反応度価値測定に関しては、反応度測定法としてはペリオド法を用いる場合は、正の反応度を他の制御棒で相殺する置換法と併用されることが一般的である。しかし、逆解法を利用するならば制御棒は連続的に挿入引き抜きがなされていても問題は無い。このような測定を行うならば、制御棒の積分反応度曲線が連続的に短時間で得ることが出来る。実際に、このような反応度測定法は **Dynamic Rod Worth Measurement**¹⁰⁾ と呼ばれ、既に軽水炉の制御棒反応度価値測定法として実績がある。ただし、商用炉のような大きな体系では炉心を 1 点としてみなすことが不適切であり、2 章で議論した理由により 1 点炉ベースの評価では誤差が発生する。このような場合には、予め行った空間動特性計算により得られた補正係数を用いて反応度価値を補正する。また、研究炉のような小さな体系では、補正を行わずに十分な精度で反応度が評価できる¹¹⁾ ようである。なお、実機用反応度計の試作を付録 D に示してあるため、導入時の参考にされたい。

5. プログラムの実装

4章までに紹介した各手法に対する具体的な実装について説明する。基本的に本開発では、MARBLEのシステム記述言語と同じPythonで記述している。解析解を得るための逆時間方程式のニュートン法による解法など、計算コストのかかる部分はC++による高速化を図っている。なお、C++による実装部分もPythonモジュールとしてPythonより使用できるようにしており、通常のPythonモジュールと同様に扱える。また、解法の性質上、頻繁に手法を切り替える使い方が想定されないことと、ユーザーは自分が用いている解法の種類を熟知しているべきとの理由から、ファクトリーメソッド等を用いたインターフェースの統一化などは行っていない。以下に、具体的なクラス名と実装内容について示す。

○PointKineticsUtils モジュール：

・Parameter

動特性パラメーター格納クラス。各手法に動特性パラメーターを与える際には、このクラスを用いる。遅発中性子生成率、遅発中性子先行核の崩壊定数、即発中性子寿命（世帯時間）が格納されている。

・AnalyticSolution

反応度のステップ入力に対する解析解。

・LinearApproximationRamp

反応度ランプ入力に対する線形近似解。

・LinearApproximationSinusoidal

正弦波反応度入力に対する線形近似解。

・InverseMethod

逆解法。

○PointKinetics モジュール：

・ExplicitIntegration

陽解法による解。

・ExplicitIntegrationPJ

即発跳躍近似を併用した陽解法による解。

・ImplicitIntegration

陰解法による解。

・ImplicitIntegrationPJ

即発跳躍近似を併用した陰解法による解。

・ThetaIntegration

θ 法による解。ただし、全ての方程式に対し同一の内挿値を用いる。

- **ThetaIntegrationPJ**
即発跳躍近似を併用した θ 法による解。
- **RungeKuttaIntegration**
ルンゲクッタ法による解。
- **RungeKuttaIntegrationPJ**
即発跳躍近似を併用したルンゲクッタ法による解。
- **ImplicitTimeIntegration**
時間積分法による解。
- **ImplicitTimeIntegrationPJ**
即発跳躍近似を併用した時間積分法による解。
- **Pade**
指数行列関数の Pade 近似を用いた解。SciPy ライブラリの `scipy.linalg.expm` モジュールのものを使用。3 章で述べた通り、その精度は展開次数や `scaling and squaring` 法の適用の仕方などの適用に関する最適化に依存する。誤差の管理が適切に行われていれば事実上の解析解と考えることが出来る。そのため、この手法の精度等の特性はあくまでも SciPy で実装された Pade 近似のものと考えられるべきである。

なお、上記の積分におけるソルバー部は `Algebra` モジュールとして独立させ、汎用的な用途に利用できるように整備してある。演算に関しては NumPy¹²⁾ の行列演算を利用しているため高速に処理が出来る。以下に、モジュールに登録されている関数を紹介する。

○`Algebra` モジュール：

- `generate_coeff_diagonal_matrix`
係数行列が対角成分のみの場合に与えられたベクトルを対角成分に展開し行列を作成。
- `explicit_integration`
陽解法による積分。
- `implicit_integration`
陰解法による積分。
- `theta_integration`
 θ 法による積分
- `runge_kutta_integration`
ルンゲ・クッタ法による積分。
- `pade`
Pade 法による積分。Scipy モジュールのラッパーであるが、非同次問題（ソース項有り）に拡張したもの。

6. 精度の評価

5章で紹介したプログラムの精度の評価を行う。今回の開発において厳密な参照解として扱えるものとしては、**AnalyticSolution** クラスとして実装された反応度のステップ入力に対する解析解である。**Stiffness** を考慮する上で最も基本的な手法である。

LinearApproximationRamp 及び **LinearApproximationSinusoidal** は連続反応度添加の例として魅力的ではあるが、あくまでも線形近似解であるため解の妥当性を確認することは出来ても精度の評価には用いることができない。このような連続反応度添加の例に関しても解析解は存在するようであるが、遅発中性子先行核の群数が1群に限る場合や、部分的に近似を用いている、発明的もしくは技巧的な手法を用いており一般的に妥当であるとの判断が難しい等の問題があり、明確に解析解であることが分かる手法が存在しなかったため実装は行っていない。

以下に、具体的な精度評価について議論する。**Table 6.1**には本評価で使用した動特性パラメータを示す。この値は **Keepin** らの文献¹³⁾より算出した値である。記載されているデータとしては、遅発中性子先行核の半減期、遅発中性子生成率の相対値及び遅発中性子全体の生成率である。これらの値について、熱中性子による核分裂と高速中性子による核分裂によるものが示されているが、大きな差が見られないため、高速中性子による核分裂に対する値で代表させる。核分裂性核種に対する依存性については、遅発中性子生成率の相対的な小ささにより **MOX** 燃料炉心の安全性に異を唱える意見もある様に、遅発中性子生成率は **U** のものと **Pu** のものでは大きく異なる。このため、本解析では ²³⁵U のものと ²³⁹Pu のものを用いて評価を行った。また、遅発中性子生成率に関しては、式(2-8)に示すように炉内スペクトル及び遅発中性子スペクトルの効果を考慮するのが一般的であるが、数値解法の検証には大きな影響を与えないため、物性値として得られる遅発中性子生成率を用いるものとする。一方で、**Stiffness** に直接寄与する即発中性子寿命は炉心のスペクトルにより大きく変化する。そのため、熱中性子炉でも高速炉でも対応できるように 10⁻⁸s から 10⁻³s の間で変化させることとした。炉型毎の即発中性子寿命に関しては、付録 **E** を参照のこと。

また、**Python** では倍精度実数による演算が行われ、有効桁数は 16 桁程度である。

Table 6.1 解析に用いた動特性パラメータ

²³⁵ U			²³⁹ Pu		
Group No.	Decay Constant (s ⁻¹)	Yield	Group No.	Decay Constant (s ⁻¹)	Yield
1	1.27E-02	2.43E-04	1	1.29E-02	7.60E-05
2	3.17E-02	1.36E-03	2	3.11E-02	5.60E-04
3	1.16E-01	1.20E-03	3	1.30E-01	4.32E-04
4	3.11E-01	2.60E-03	4	3.27E-01	6.56E-04
5	1.40E+00	8.19E-04	5	1.33E+00	2.06E-04
6	3.87E+00	1.66E-04	6	3.65E+00	7.00E-05
		6.40E-03			2.00E-03

6. 1 ステップ反応度添加時の解の精度

初めに、反応度添加時の解の精度を確認する。この評価は `AnalyticSolution` クラスを用いたステップ反応度添加時の解析解である。添加反応度は $1\text{ }\rho$ 及び $10\text{ }\rho$ とし反応度添加より 1 s 経過した時点までの出力を評価している。結果を Fig.6.1 に示す。

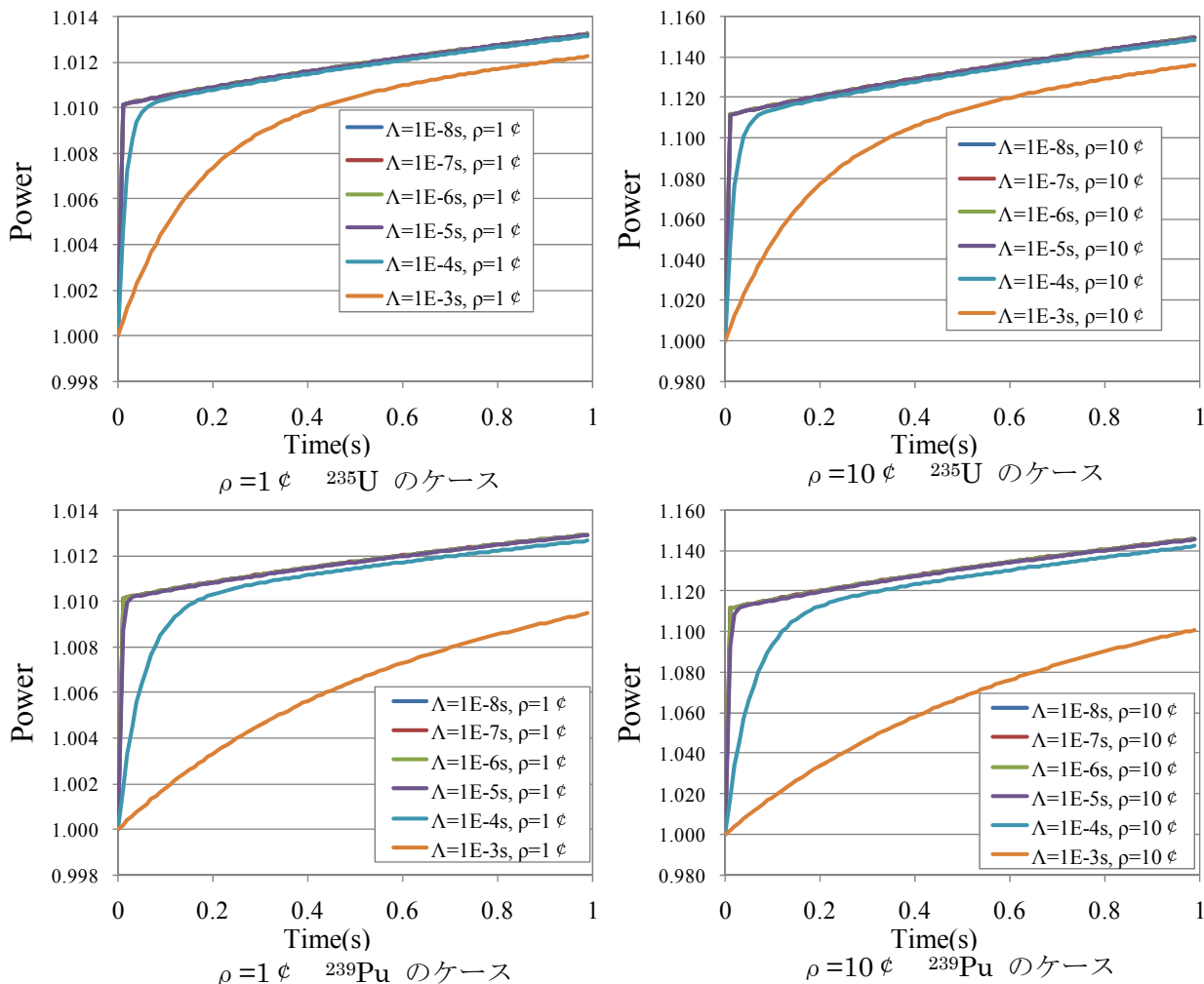
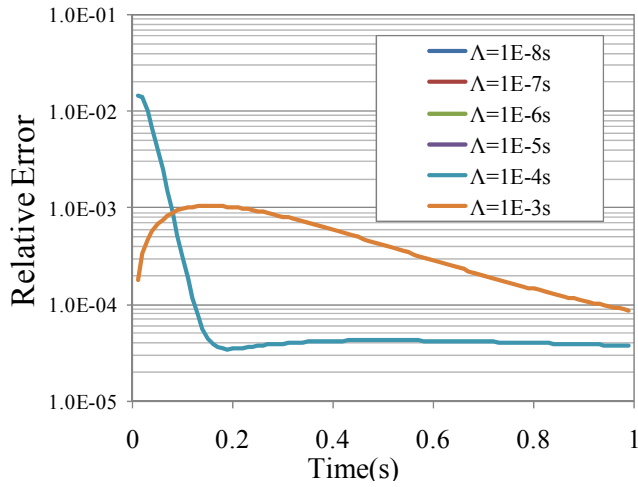


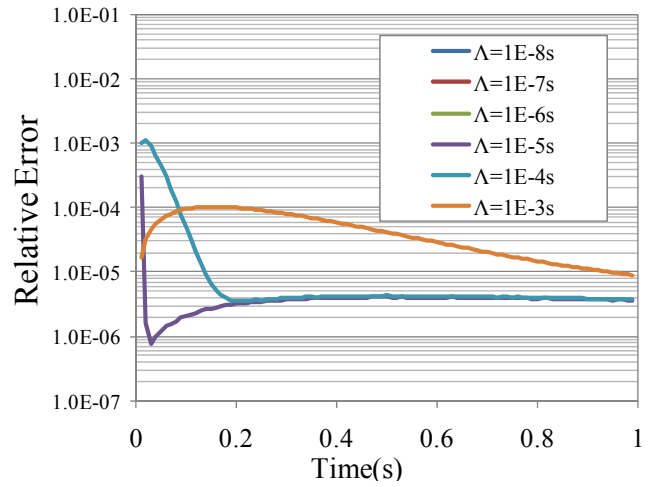
Fig. 6.1 反応度のステップ入力時の応答

添加反応度 $1\text{ }\rho$ 及び $10\text{ }\rho$ の例について示しているが、際立って異なる特性は見られないため、添加反応度 $10\text{ }\rho$ の例について検討する。即発中性子寿命 $1 \times 10^{-5}\text{ s}$ 以下のケースについてはほぼ同じ値を示し判別が出来ないが、それ以上の領域においては即発中性子寿命が大きいほど出力の変化が緩やかになる傾向がある。つまり、即発中性子寿命が短い炉型においては **Stiffness** の問題が顕著になる傾向が確認できた。即発中性子寿命が短い炉型とは核分裂により発生した中性子が減速の過程を経ずに核分裂を起こすスペクトルの硬い炉型である。また、 ^{235}U と ^{239}Pu の比較においては、 ^{239}Pu のほうが緩やかに変化することが分かる。これらのことを考慮すると、比較条件として添加反応度 $10\text{ }\rho$ の ^{235}U のケースについて選択すれば、**Stiffness** の問題による数値誤差の検討は十分に行えると言える。

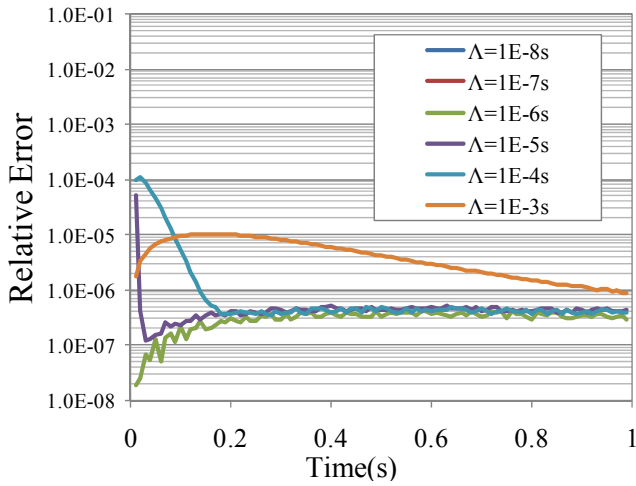
初めに陽解法の精度について検証する。時間ステップは $1 \times 10^{-2}\text{ s}$ から $1 \times 10^{-6}\text{ s}$ までとした。結果を Fig. 6.2 に示す。



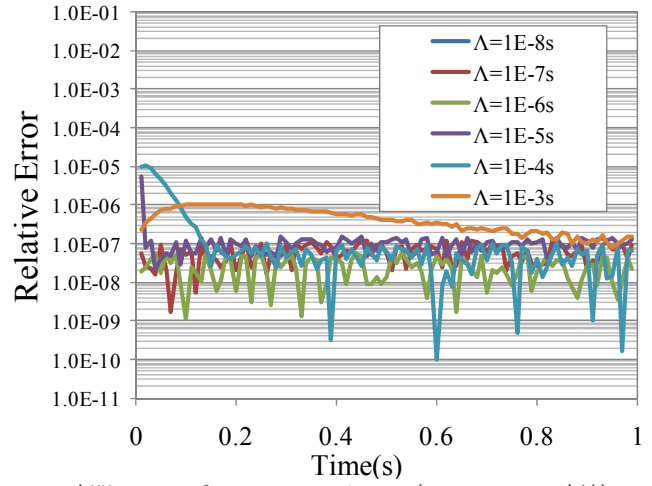
時間ステップ 1×10^{-2} s のケース ($\Lambda = 1E-5s$ 以下は破綻)



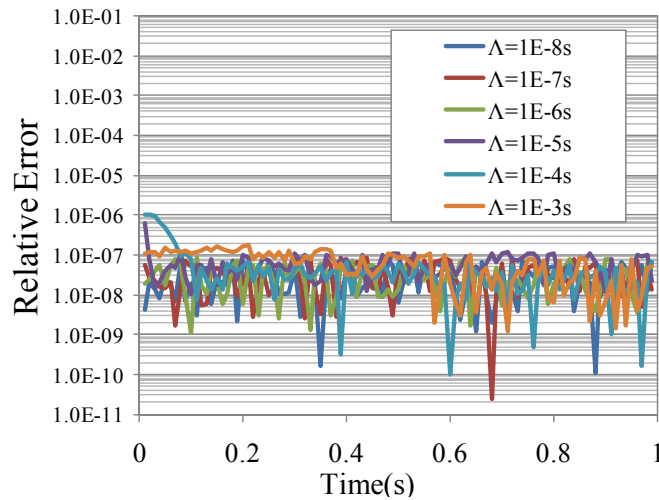
時間ステップ 1×10^{-3} s のケース ($\Lambda = 1E-6s$ 以下は破綻)



時間ステップ 1×10^{-4} s のケース ($\Lambda = 1E-7s$ 以下は破綻)



時間ステップ 1×10^{-5} s のケース ($\Lambda = 1E-8s$ は破綻)



時間ステップ 1×10^{-6} s のケース (全ケース計算に成功)

Fig. 6.2 陽解法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)

時間ステップ幅が小さいケースでは計算が破綻するケースが見られる。具体的には、値が正の無限大に近づき **inf** や **nan** が出力されている。即発中性子寿命が小さいケースほど細かい時間ステップ幅が必要となる。即発中性子寿命 $1 \times 10^{-8} \text{s}$ のケースを成功させるためには $1 \times 10^{-6} \text{s}$ のタイムステップが必要となった。今回のケースでは計算を成功させるためには、タイムステップを即発中性子寿命の 100 倍程度に設定すればよいことが経験的に確認できた。数値的安定性が即発中性子寿命が長いケースで良好であるのに対し、数値誤差は即発中性子寿命が短いケースのほうが良好である傾向が確認できる。これは、Fig. 6.1 に示したように即発中性子寿命の小さなケースが出力の変化が反応度添加時に集中し、その後はなだらかに変化し、そのために反応度添加時以降の誤差の発生が抑えられているものと推測される。なお、時間ステップを細かくすることにより誤差が小さくなる傾向があるが $1 \times 10^{-8} \text{s}$ 近辺で収束している。

次に、陽解法に即発跳躍近似を併用した場合の特性を Fig. 6.3 に示す。

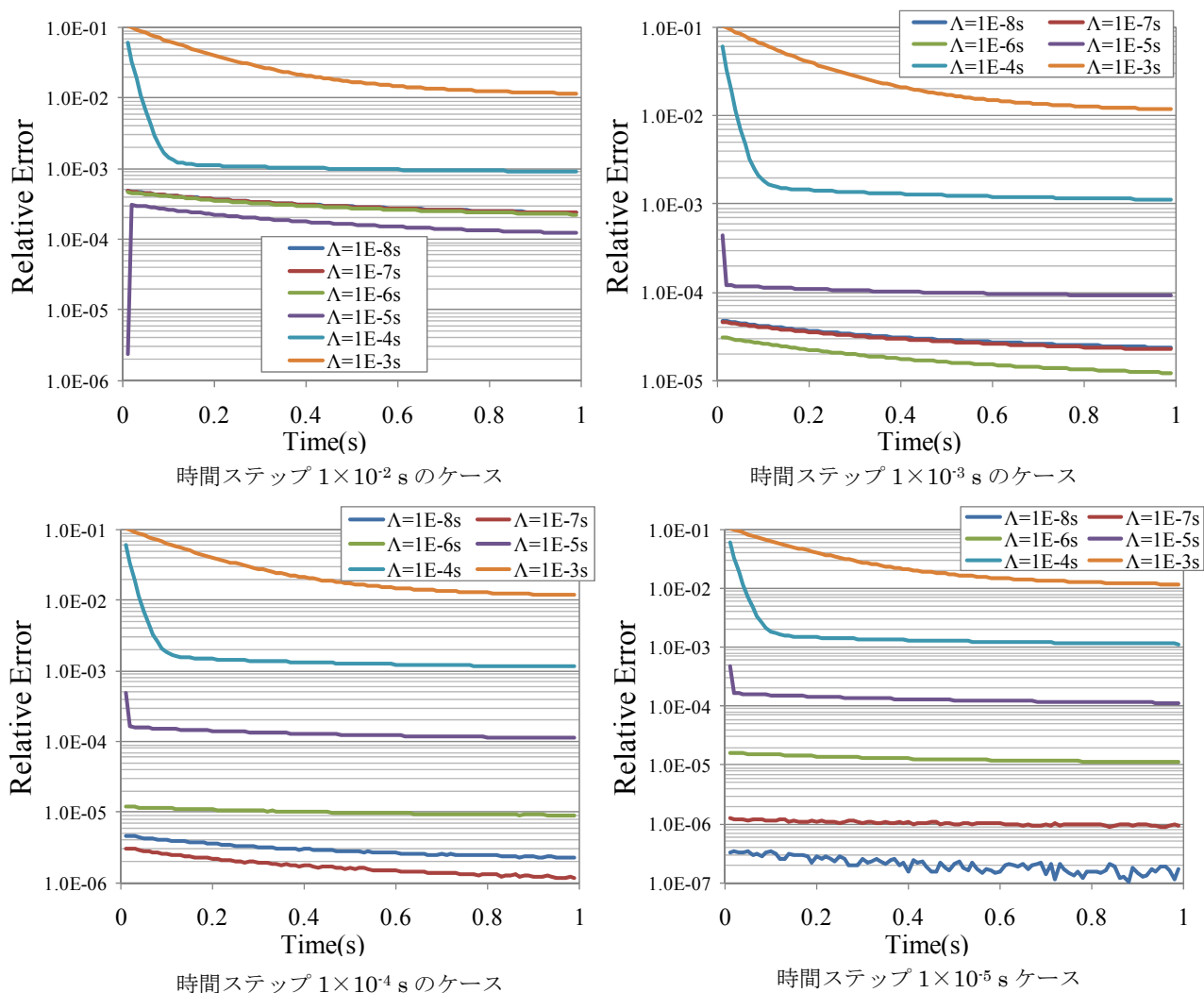


Fig. 6.3 即発跳躍近似を併用した陽解法による誤差
(反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)

時間ステップは $1 \times 10^{-2} \text{s}$ から $1 \times 10^{-5} \text{s}$ までとした。即発跳躍近似を用いると時間ステップは $1 \times 10^{-2} \text{s}$ のケースでも計算が破綻することない。ただし、即発中性子寿命が大きなケースについて比較的大きな誤差が見られる。即発中性子寿命が $1 \times 10^{-3} \text{s}$ のケースではタイムステップを $1 \times 10^{-5} \text{s}$ としても 1%オーダーの誤差が残っている。このことは、即発跳躍近似を用いない例と同じ現象として理解できるが、即発跳躍近似の原理を考えると明確に理解できる。即発跳躍近似では反応度添加後文字通り、出力が跳躍するように変化する。変化量は反応度添加量により以下のように決定される。

$$\frac{n}{n_0} = -\frac{\beta}{(\rho - \beta)} \quad (6-1)$$

即発跳躍近似の解がこのような不連続な変化をするのに対し実際の変化は連続的であり、その傾向は即発中性子寿命が大きなほど緩やかである。そのため、即発跳躍近似が原因で誤差が発生している。ステップ上の反応度添加を扱う問題において、十分に **Stiffness** による問題を解決できる時間ステップを用いた計算が出来る場合には、即発跳躍近似を用いないほうが精度のよい計算ができると言える。このことは、陽解法に限ったことではなく即発跳躍近似を用いた全ての解法について言えることである。

次に、陰解法について検証を行う。結果を Fig. 6.4 に示す。

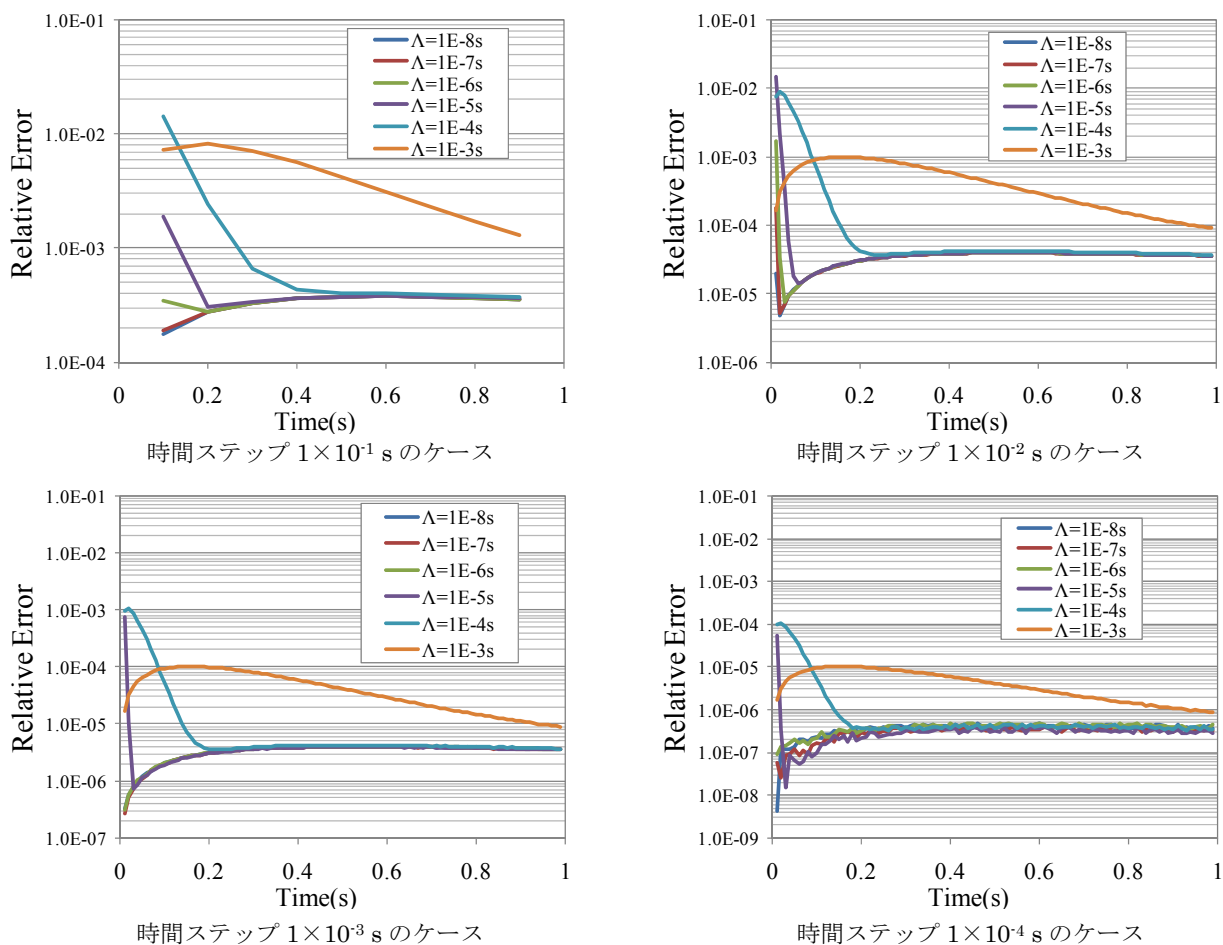


Fig. 6.4 陰解法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \text{¢}$)

ここでは、時間ステップは $1 \times 10^{-1} \text{s}$ から $1 \times 10^{-4} \text{s}$ までとした。陰解法では時間ステップを 0.1s と大きくとっても計算が破綻しない。精度に関しては、一般的に陽解法より良いとされるが、両手法に対するタイムステップ $1 \times 10^{-4} \text{s}$ のケースを比較するとほぼ同等の精度であることが分かる。3章で述べた通り、陽解法も陰解法も誤差が2次のオーダーである為同等の振る舞いをしているものと思われる。

次に θ 法について検証する。解析結果を Fig. 6.5 に示す。

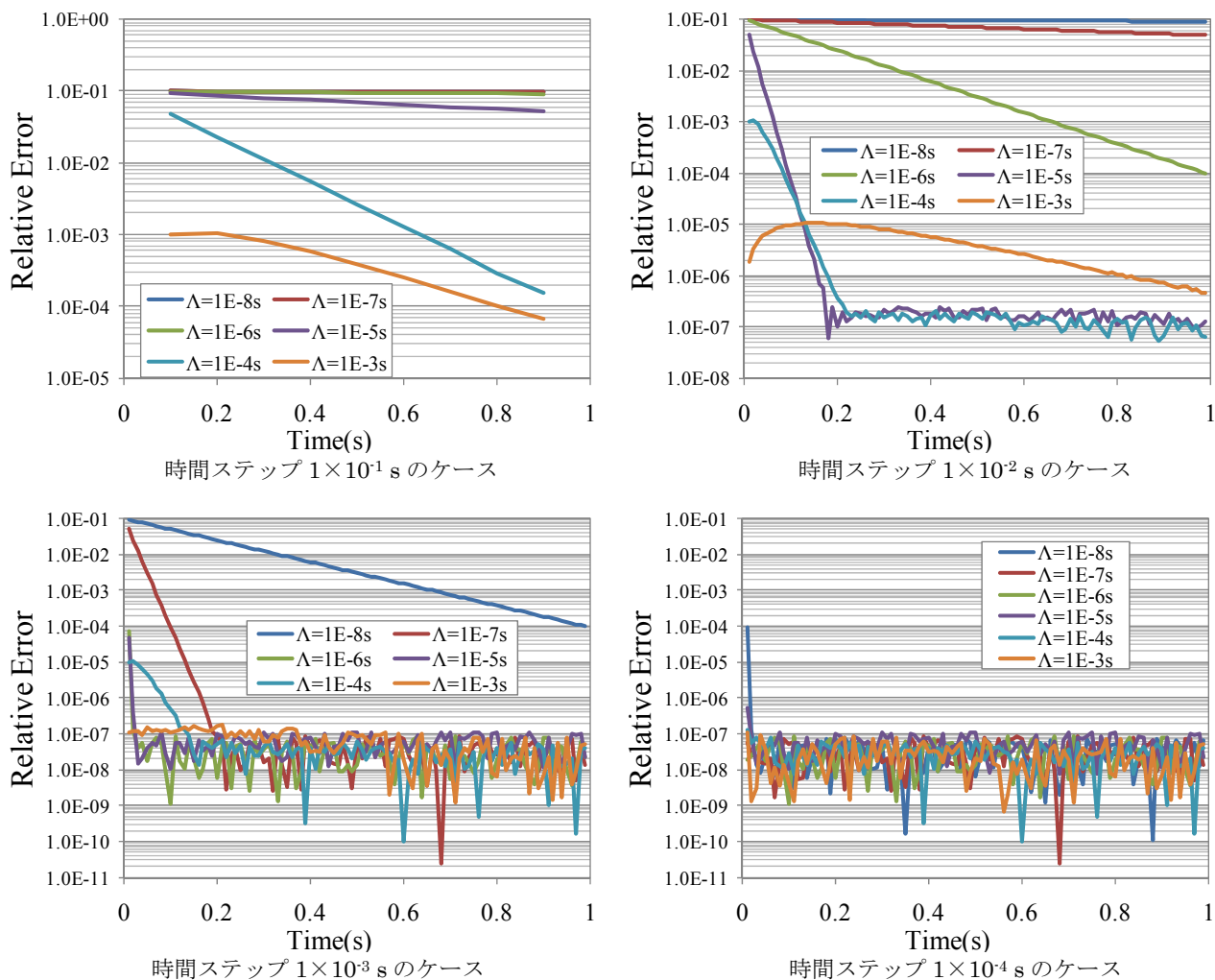


Fig. 6.5 θ 法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \text{ } \phi$)

ここでは、時間ステップは $1 \times 10^{-1} \text{s}$ から $1 \times 10^{-4} \text{s}$ までとした。内挿値 θ については 0.5 とした。陽解法の解と陰解法の解を半分ずつ合成した値となり、この内挿値を用いた際は特別にクランク・ニコルソン法と呼ばれるものである。数値的安定性に関しては、陰解法と同等で時間ステップを 0.1s と大きくとっても計算が破綻しない。しかし、精度に関しては、タイムステップ $1 \times 10^{-3} \text{s}$ 以上のケースについて、即発中性子寿命が小さなケースにおいて大きな誤差が見られる。これは、陽解法の性質に引かれた結果であると考えられる。このようなケースに対しては、むしろ陰解法のみを用いたほうが妥当な解が得られる。ただ

し、時間ステップ $1 \times 10^{-4} \text{s}$ のケースのように、妥当な精度が得られる場合には、陽解法や陰解法の結果と比較して若干良い精度が得られるようである。3章の導入において θ 値の設定自体では、解析解と同等の精度が得られる手法と紹介しているが、当然、選択する θ 値により得られる精度が変化してくるものと思われるが、経験を積んだ問題に適用する以外で個の内挿値の最適化を行う意義は少ないと思われる。少なくとも一点炉問題に関しては、 θ 値の検討を行う意義は瑣末である。

次に、ルンゲクッタ法に関して検証を行う。解析結果を Fig.6.6 に示す。

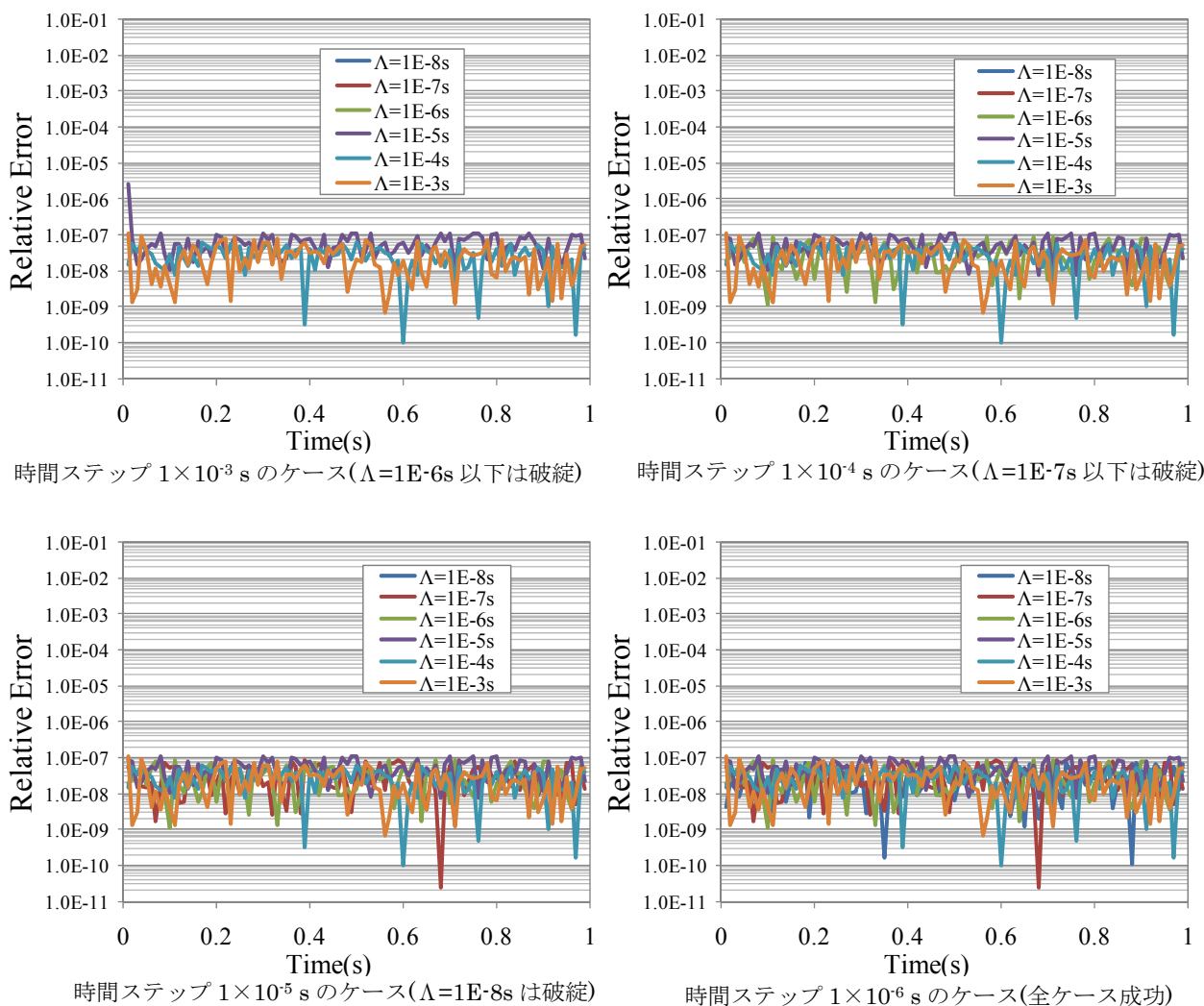


Fig. 6.6 ルンゲクッタ法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho=10 \phi$)

時間ステップは $1 \times 10^{-3} \text{s}$ から $1 \times 10^{-6} \text{s}$ までとした。数値的安定性としては、陽解法と同等に悪く、即発中性子寿命 $1 \times 10^{-8} \text{s}$ のケースを成功させるためには時間ステップを $1 \times 10^{-6} \text{s}$ まで細かくとる必要があった。4次のオーダーまで再現できるルンゲクッタ法であるが、その陽解法としての数値的安定性が低いという性質は次数を上げることによっても回避できていないことが示されている。

次に、時間積分法について検証する。結果を Fig. 6.7 に示す。

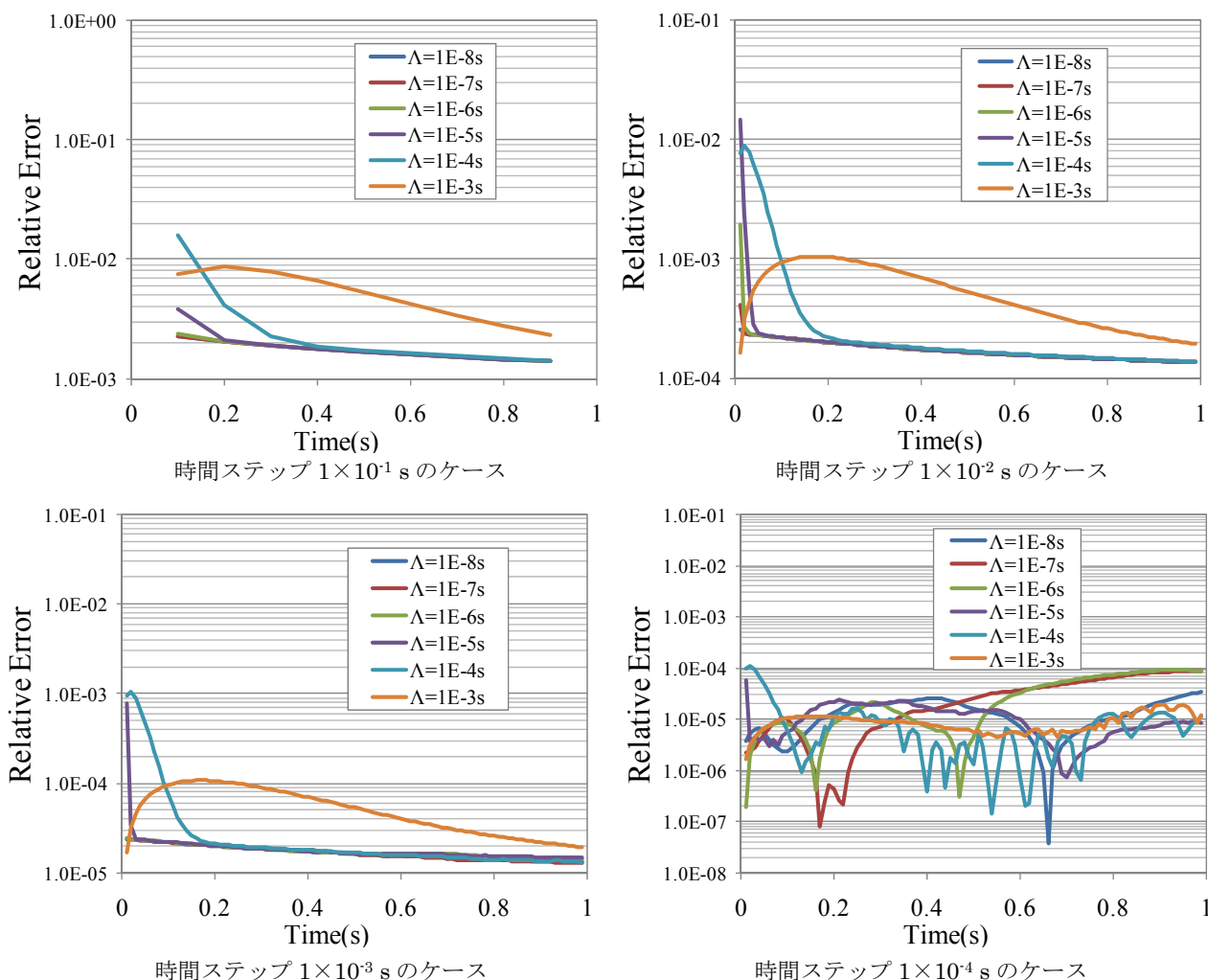


Fig. 6.7 時間積分法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$)

時間ステップは 1×10^{-1} s から 1×10^{-4} s までとした。陰解法の結果とほぼ同じ挙動を示している。このことは、遅発中性子先行核に関しては解析解で解き、即発中性子に関しては陰解法で解いているため、後者の性質が陽に現れた結果であると推測される。しかし、誤差に関しては、若干、本手法のほうが悪い結果となっている。この結果ならば、単純に陰解法を用いたほうがよいと思われる。この原因としては、遅発中性子先行核の解法について解析解と言いながらも、出力変化については線形に変化すると仮定しているため、この部分が stiffness の影響を受けているものと考えられる。

次に、Pade 法について検証する。結果は Fig. 6.8 に示すとおりである。時間ステップについては、0.1s、0.2s の例を示しているが、時間ステップを区切らず 10s 程度の計算を行っても 1×10^{-8} 程度の誤差であることを確認している。これは、指数行列関数を用いた手法自体が、解析解そのものの再現を行う趣旨で開発されていることや、scaling and squaring 法により実質的に、タイムステップが区切られていることに由来すると考えられる。3章

でも述べたように、この手法の精度は Pade 近似の打ち切り次数と scaling and squaring 法適用に関する最適化に左右される。本開発では SciPy のものを用いているが、一点炉動特性方程式を解く目的において、SciPy の供給する Pade 法を用いた手法は実質的に解析解を提供するものと言える。また、Pade 近似は陰解法も包括する手法であるため、高い数値的安定性を有していると思われる。

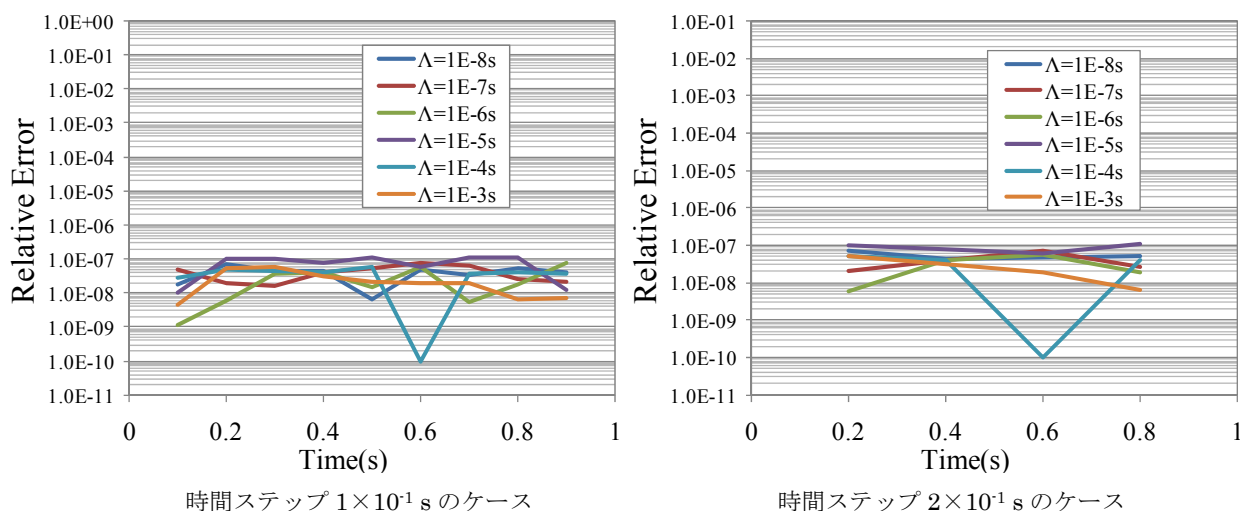


Fig. 6.8 Pade 法による誤差 (反応度のステップ入力時の応答、²³⁵U、 $\rho = 10\phi$)

6. 2 連続反応度添加時の精度

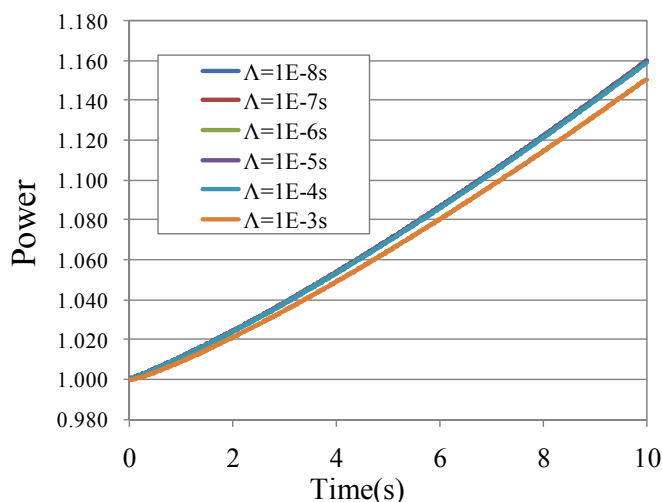
連続反応度添加時の精度に対しては反応度のステップ添加と異なり、以下に示す点の特性が重要になる。

- ・緩やかな反応度添加に対しての **Stiffness** の影響
- ・時間経過に対する丸め誤差の蓄積の影響

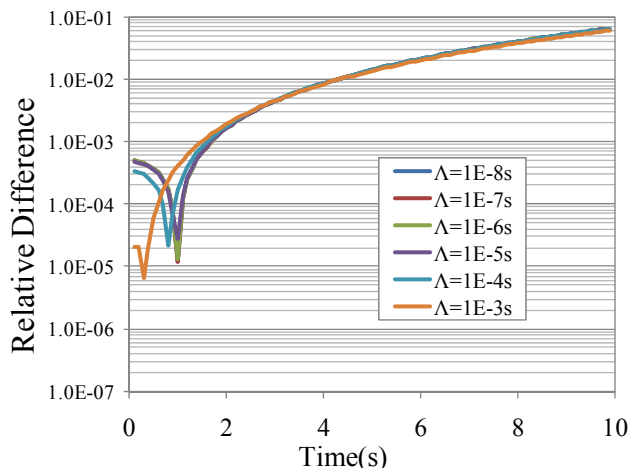
そこで、本節では連続反応度添加時の精度を検証するが、初めに参照解を決定しておく必要がある。6. 1 節において Pade 法がステップ応答において実質的な解析解を与える手法であることを示したが、当面はこの Pade 法を参照解として手法の比較を行っていく。

Pade 法の連続反応度添加時の精度の確認の為に、線形近似解との比較を行う。初めに反応度のランプ入力時の挙動について比較する。Fig. 6.9 には反応度を $1\phi/s$ でランプ上に添加した際の線形近似解の出力変化と Pade 法との差異の比較を行っている。初めに、出力変化であるが、ステップ応答と異なり急激な出力の変化が見られなく、**Stiffness** による影響は少ないものと思われる。Pade 法との相対的な差異についても調べている。なお、線形近似解が基準となっている。ここで、誤差ではなく差異という表現を用いているのは、線形近似解が近似であるため近似が成り立つ範囲以外では一致しなくて当然であるからである。時間ステップに関しては、0.1s のケースと 0.01s のケースで比較を行っている。これは、Pade 法では反応度は離散的にしか扱えないため、反応度添加法による誤差を考慮する為である。

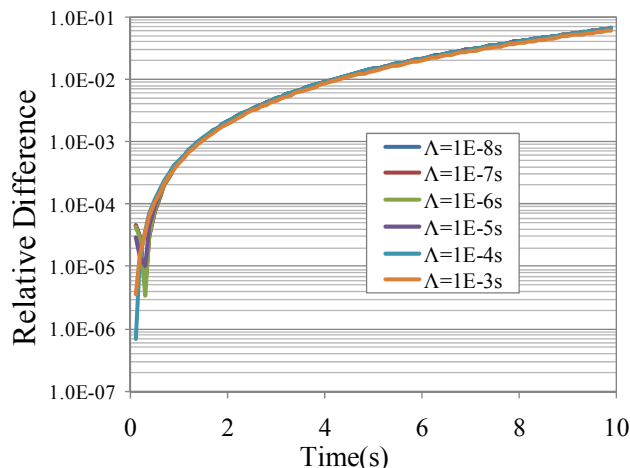
経過時間 4 s 程度までは 1%以内で一致しているため、解法としての妥当性は確認できる。しかし、それ以降は差異が大きくなり、10s 経過時点においては 1 割程度の違いが発生している。これは、線形近似を行う際に、出力変化量と反応度変化量の積の項を無視しているが、ランプ入力においては出力変化及び反応度変化が蓄積し続けるため、近似適用範囲を超えてしまっているためである。このことから、線形近似解は精度評価の用途において参照解として用いることは不適切であるといえ、Pade 法を参照解に用いたほうが適切であると考えられる。さらに、Pade 法を用いることにより、反応度添加法を比較対象と統一することもでき、純粋に積分法の比較が出来る。



ランプ入力時の線形近似解による出力変化



時間ステップ 1×10^{-1} s のケースの差異

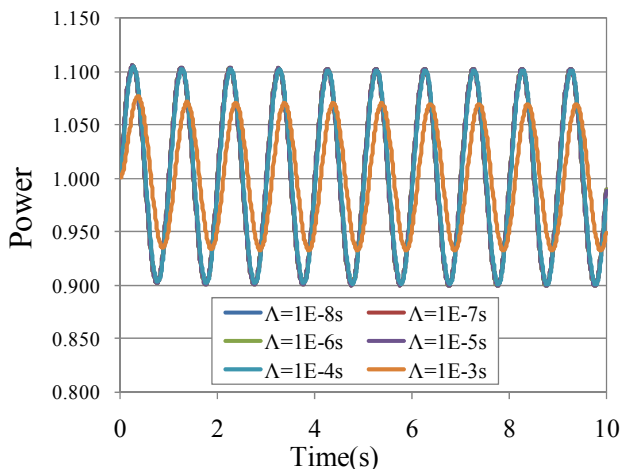


時間ステップ 1×10^{-2} s のケースの差異

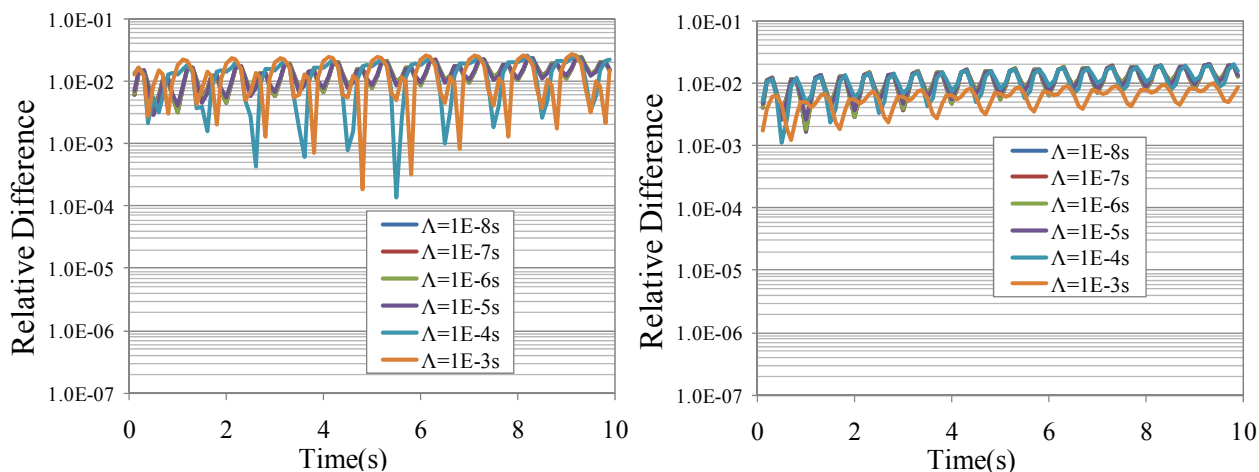
Fig. 6.9 線形近似解と Pade 法の比較 (反応度のランプ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 1 \text{ } \phi / \text{s}$)

次に、正弦波入力のケースについて考える。結果を Fig. 6.10 に示す。正弦波の周期は 1 s としている。正弦波入力では即発中性子寿命の違いにより、出力波形の振幅及び位相が変化しているが、このケースにおいても **Stiffness** が問題になるとと思われる急激な挙動は見られない。差異に関しては、時間ステップを 0.1s、0.01s と変化させても 1%程度の値が見られる。これは、線形近似により発生した誤差であると推測される。これらのことを考慮す

ると、正弦波入力に関しても参照解としては Pade 法を用いることが妥当であると言える。



正弦波入力時の線形近似解による出力変化



時間ステップ 1×10^{-1} s のケースの差異

時間ステップ 1×10^{-2} s のケースの差異

Fig. 6.10 線形近似解と Pade 法の比較 (反応度の正弦波入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$ 、1Hz)

次に、上述で参照解として決定された Pade 法によるランプ入力及び正弦波入力を用いて、他の手法の精度を検証する。初めに陽解法の精度について検証する。Fig. 6.11 には反応度のランプ入力問題を対象に陽解法の精度を評価したものである。時間ステップは 1.0×10^{-3} s から 1.0×10^{-6} s までとした。このケースでは、反応度が緩やかに添加されるランプ入力でありながら、ステップ入力と同様に、短い即発中性子寿命の体系において、長い時間ステップのケースが破綻している。その程度はステップ入力時と同様であり、時間ステップは即発中性子寿命の 100 倍程度に設定する必要がある。このことから、緩やかな反応度添加においても Stiffness は問題になることが分かる。なお、今回のケースは出力変化幅が短い
ため発生誤差が少ないことが考えられるが時間ステップ 1.0×10^{-5} s 及び 1.0×10^{-6} s

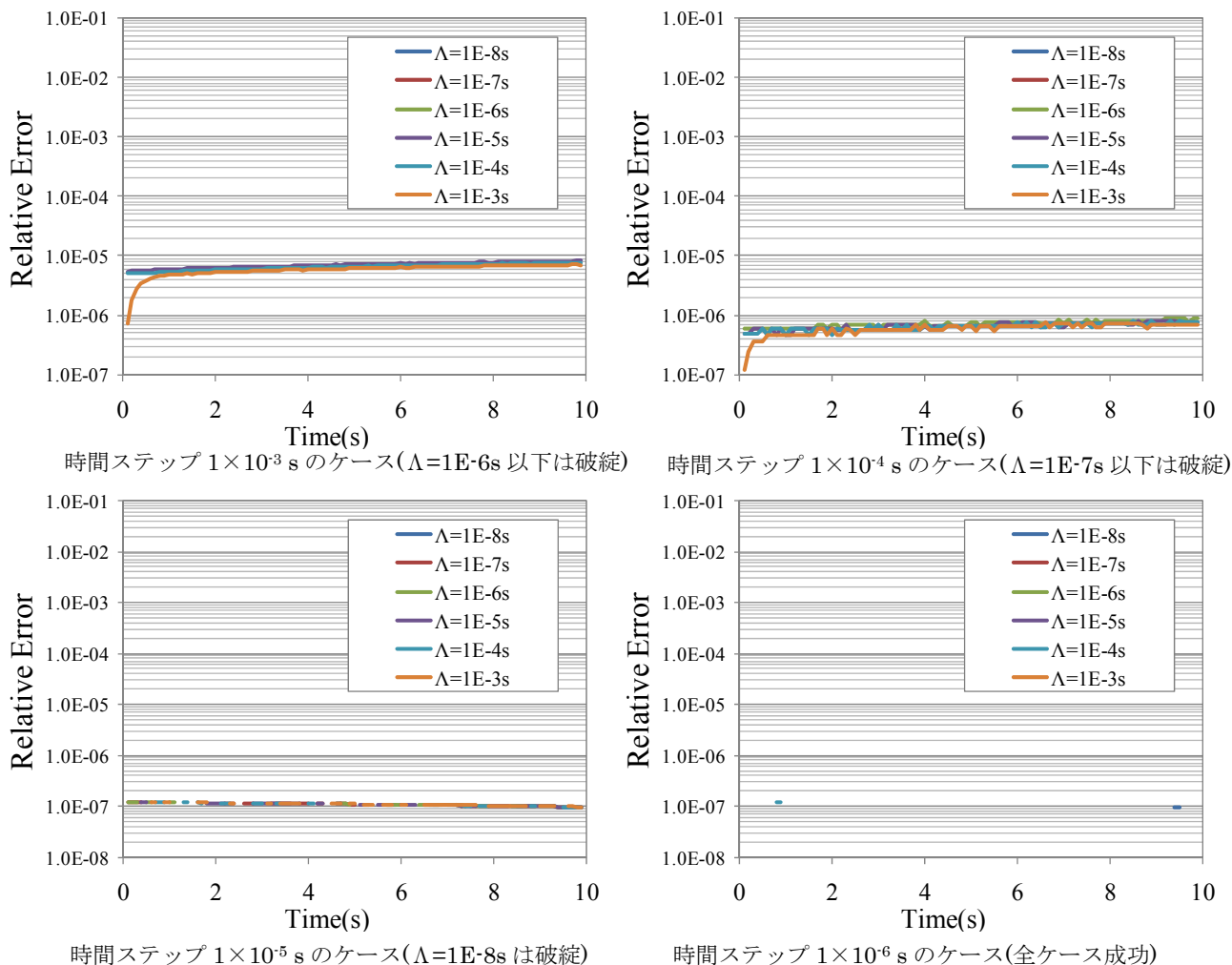


Fig. 6.11 陽解法の誤差 (反応度のランプ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho=1\phi/s$)

のケースについて完全一致する箇所が見られた。グラフ上では対数表示が出来ないため線が途切れているが、その部分は完全一致している場所である。

次に、即発跳躍近似を併用した陽解法の精度を検証する。結果は Fig.6.12 に示す。時間ステップは 1.0×10^{-1} s から 1.0×10^{-4} s までとした。本ケースにおいても即発跳躍近似を用いたことにより、正確な出力変化を追従できず誤差が発生している。時間ステップを細かくすることにより、この誤差は縮小していくが、即発中性子寿命が長い体系ほど大きな誤差を示す傾向が表れてくる。特に、即発中性子寿命 1×10^{-3} s のケースでは時間ステップを細かくしても誤差がほとんど収縮せず、時間ステップを変更したどのケースにおいても大きな値を示している。また、時間依存性に関してステップ反応度添加のケースでは時間が経過するにつれて誤差が縮小していたが、ランプ反応度入力に関しては時間が経過するにつれ誤差が拡大している。即発跳躍近似を用いた場合には、このような緩やか且つ連続的な反応度添加に対しても値が追従できず誤差が拡大し続ける傾向がある。即発跳躍近似を用いない場合では即発中性子寿命が大きいほうが数値的安定性がよく、即発跳躍近似を

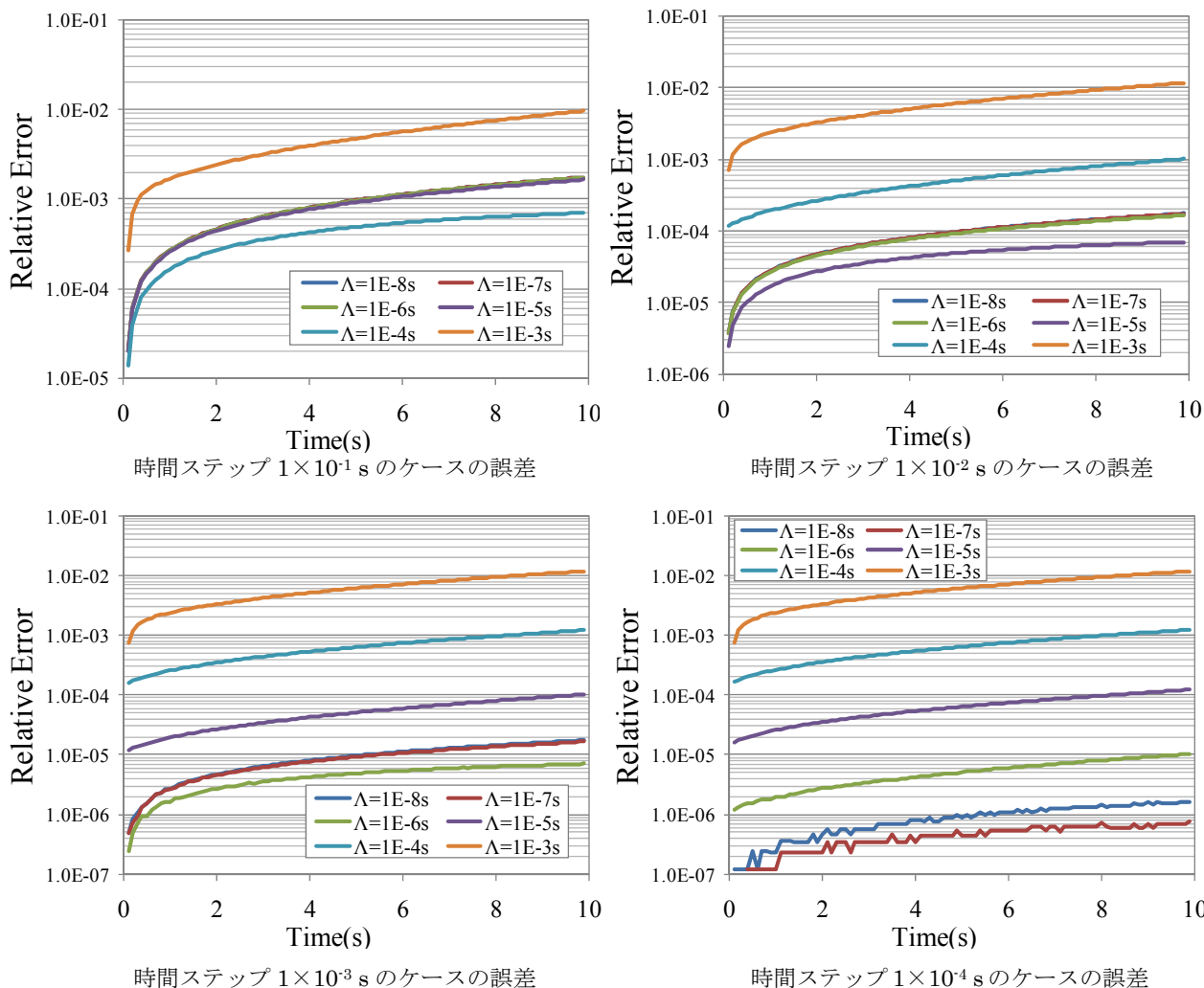


Fig. 6.12 即発跳躍近似を併用した陽解法の誤差

(反応度のランプ入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 1 \text{ } \$/\text{s}$)

用いた場合は、数値的安定性が問題にならず即発中性子寿命が小さいほうが精度がよいという対称の関係が存在する為、体系に合わせて適切な使い分けをすれば実用であると思われる。

次に、正弦波入力時の特性について比較する。Fig. 6.13 は陽解法による誤差評価の結果であり、時間ステップは $1 \times 10^{-3}\text{s}$ から $1 \times 10^{-6}\text{s}$ までとした。周波数 1Hz の正弦波入力でもステップ入力と同様に陽解法に対する Stiffness の特性により計算が破綻するケースが見られる。この場合でも、即発中性子寿命の 100 倍程度の時間ステップを取る必要があることが示されている。しかし、10s 間の計算に対しても誤差の蓄積と思われる挙動は確認できなかった。一方で、反応度のランプ入力の際には誤差が拡大する一方であったことを考慮すると、正負に反応度が振動するケースにおいては、誤差増加の方向も正負に振れるため誤差の蓄積が相殺されると思われる。また、ステップ応答の際は時間経過とともに誤差が縮小していくことを考えると、反応度添加が終了した際にはある程度は真値に復帰する方向

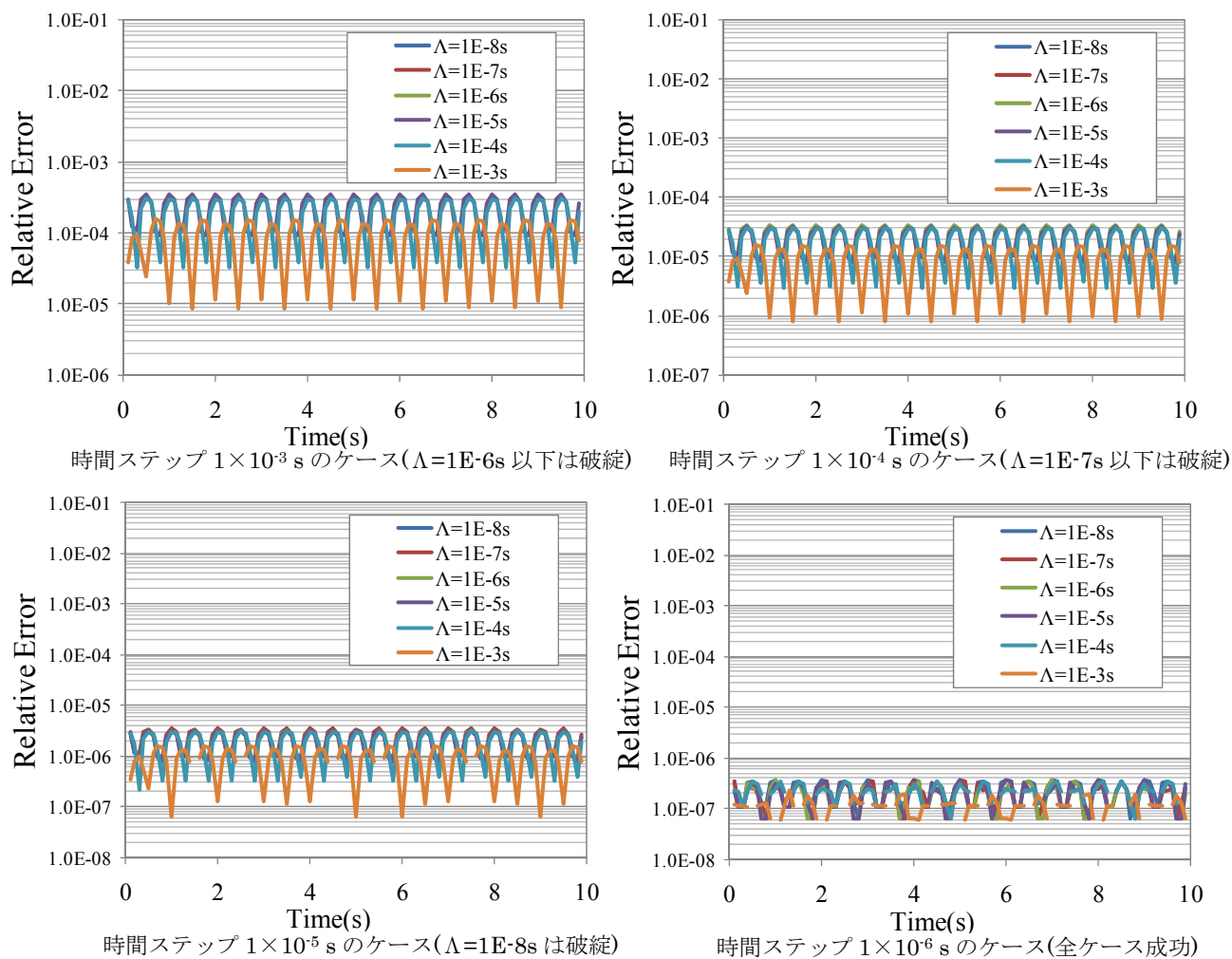


Fig. 6.13 陽解法の誤差 (反応度の正弦波入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \phi$ 、1Hz)

誤差が移行するものと考えられる。

次に、正弦波入力において即発跳躍近似を併用した陽解法の検証を行う。結果は Fig. 6.14 に示す。時間ステップは $1 \times 10^{-1}s$ から $1 \times 10^{-4}s$ までとした。本ケースにおいても即発跳躍近似を用いた場合には、時間ステップを 0.1 秒程度と大きな値としても高い数値的安定性が得られ、計算が破綻することが無い。しかし、即発中性子寿命が大きな体系においては発生誤差が大きく、その誤差は時間ステップを細かくしても縮小することはなく、ある一定の値に漸近する。また、誤差の蓄積に関しては、即発跳躍近似を用いたケースにおいても時間経過による誤差の拡大は確認できなかった。

本節では、前節のステップ反応度添加時のケースと対比させて緩やかで連続的な反応度添加のケースについて、陽解法及び即発跳躍近似を併用した陽解法について誤差の評価を行った。その結果、緩やかな反応度添加の際にも **Stiffness** の影響が顕著に表れるというステップ反応度添加時と同様の結果となった。また、連続的な反応度添加という条件下においても、最も原始的で数値安定性の劣る陽解法において、特別に問題になると思われる誤

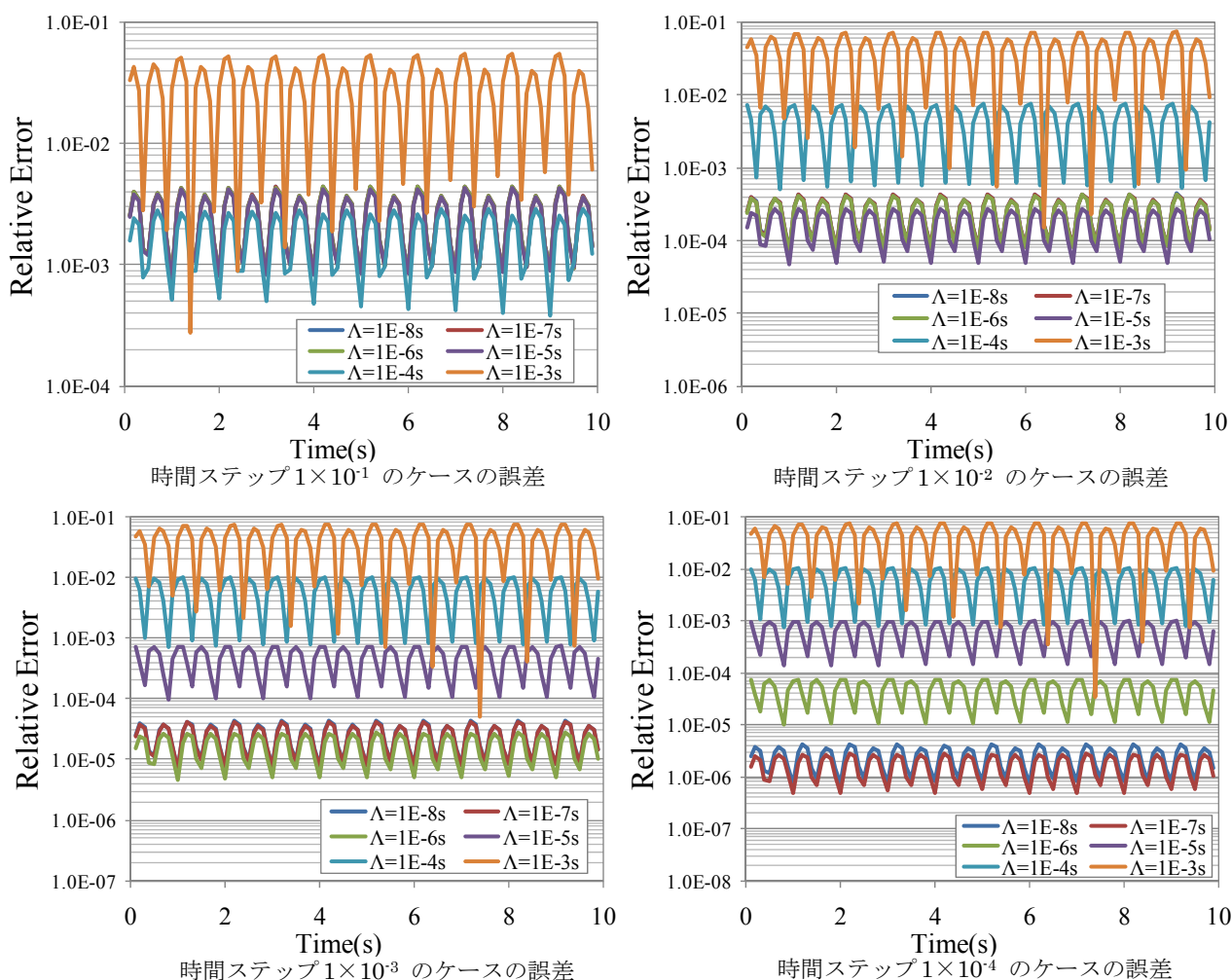


Fig. 6.14 即発跳躍近似を併用した陽解法の誤差
(反応度の正弦波入力時の応答、 ^{235}U 、 $\rho = 10 \text{ } \phi$ 、1Hz)

差の蓄積が確認できなかった。これらの特性は他の手法でも同様であるため結果の提示は、陽解法のみとする。

6. 3 計算時間の比較

今回実装を行った各手法の計算時間を比較する。条件としては、前節の計算例で使用した正弦波入力問題に対して、1秒間の計算を時間ステップ $1 \times 10^{-6}\text{s}$ として 100 万ステップの計算を行い、その測定時間を 1 ステップあたりに換算するものとした。反応度が連続的に変化する問題であるため、計算ステップ毎に最適化条件を評価する Pade 法などでは比較的大きなコストがかかる問題に設定されていると言える。この結果を Table 6.2 に示した。

この計算速度に関しては、本開発において Python を使用していることに起因して複雑な結果となっている。基本的に Python の実行速度は遅い。特に、配列のインデックスを変化させながらスライスを繰り返すような処理には弱い。このような処理に対しては、NumPy

という Python モジュールを利用すれば効果的である。NumPy は C 言語により実装されているため、NumPy を利用すれば C 言語と同等の実行速度を得ることが出来る。ただし、NumPy を利用しても配列のインデックスを変化させながらスweepするような操作には向いていない。本開発においては、NumPy の行列演算機能を利用して解析を行っているため、陰解法の逆行列を用いる部分などは処理の高速化が期待できる。

Table 6.2 各手法を用いた際の時間ステップ 1 ステップ当たりの計算時間

計算法	1ステップ当たりの計算時間 (s)
陽解法	7.09E-05
陽解法+即発跳躍近似	7.26E-05
陰解法	1.79E-04
陰解法+即発跳躍近似	1.78E-04
θ 法	2.94E-04
θ 法+即発跳躍近似	2.92E-04
ルンゲクッタ法	1.11E-04
ルンゲクッタ法+即発跳躍近似	5.31E-05
時間積分法	1.69E-04
時間積分法+即発跳躍近似	7.06E-05
Pade法	2.97E-04

このような事情を考慮して結果を検討する。初めに陽解法の即発跳躍近似を用いた場合と用いない場合の比較であるが、即発跳躍近似を用いた場合のほうが若干計算負荷が大きくなっている。通常、即発跳躍近似を用いる場合は解くべき微分方程式が一つ減ることにより、計算負荷は減少する。しかし、今回の実装では、即発中性子の方程式のみ別途に扱う即発跳躍近似を併用した手法が、全ての方程式を一括で NumPy の処理にかける即発跳躍近似を用いない手法と比較して計算負荷が増大したものである。本来の手法に必要な計算負荷が大きな陰解法、 θ 法、ルンゲクッタ法、時間積分法では即発跳躍近似を用いた場合のほうが計算負荷が少なく済むという結果が再現出来ている。

手法間の比較では当然のように、高級な手法を用いる Pade 法が最も計算負荷がかかることが分かるが、 θ 法とほぼ同程度である。また、Pade 法では *scaling and squaring* により、実質的に計算内部において時間ステップの細分化を行っているため、時間ステップの取り方により 1 ステップ当たりの計算時間が変化することも考えられる。この効果を考慮する為に、Table 6.3 には Pade 法の計算の際に時間ステップを 1×10^{-1} s から 1×10^{-4} s まで変化させた際の 1 ステップ当たりの計算時間を示した。時間ステップを短くしたほうが計算時間が減少する傾向は見られるが、その変化は小さくほとんど無視できる程度である。このような Pade 法の特性は、当然ながら SciPy による C 言語を用いた適切な実装によるところが大きいと思われる。

1 ステップ当たりの計算時間に関しては上記の通りであるが、前節までの検討の通り手

法の違いにより、満足できる精度が得られる時間ステップが異なる。陽解法に関しては具体的に、即発中性子寿命の 100 倍程度の時間ステップを刻む必要があるという指針が得られている。一方で、Pade 法はステップ入力のような過渡変化中における反応度変化が一切ないようなケースに対しては、時間ステップを一切切らなくても解析解と良い一致を示すことが示されており、純粹に反応度変化を反映させる目的のみに対して時間ステップの分割が必要であることが確認されている。このような事情を考慮すると Pade 法以外の手法では、Pade 法で必要な時間ステップの 100 倍以上必要なケースが一般的であると考えられる。このような状況では、Pade 法を用いたほうが計算コスト及び精度の両面において有利であると思われる。今回の検討は Python 及び C 言語が混じった特殊な環境におけるものであるが、他の環境においても現行の一点炉動特性方程式の解法としては同様の結論が得られると思われる。ただし、空間動特性問題や、明示的な FP 核種を扱うような遅発中性子先行核の多群化、それと同様な燃焼方程式等の巨大な問題では Pade 法を直接適用することが計算負荷の観点から不適切な場合が出てくるとと思われる。

Table 6.3 Pade 法による時間ステップの変化に対する 1 ステップ当たりの計算時間

時間ステップ (s)	1ステップ当たりの計算時間 (s)
1.0E-01	3.39E-04
1.0E-02	3.16E-04
1.0E-03	3.13E-04
1.0E-04	3.03E-04

7. まとめ

MARBLE において一点炉動特性問題を解くために **pointkinetics** ソルバーを開発しその精度を比較した。主要な開発項目は以下のとおりである。

- ・ 反応度のステップ入力に対する解析解
- ・ 反応度ランプ入力に対する線形近似解
- ・ 正弦波反応度入力に対する線形近似解
- ・ 逆解法
- ・ 陽解法による解
- ・ 即発跳躍近似を併用した陽解法による解
- ・ 陰解法による解
- ・ 即発跳躍近似を併用した陰解法による解
- ・ θ 法による解
- ・ 即発跳躍近似を併用した θ 法による解
- ・ ルンゲクッタ法による解
- ・ 即発跳躍近似を併用したルンゲクッタ法による解
- ・ 時間積分法による解
- ・ 即発跳躍近似を併用した時間積分法による解
- ・ 指数行列関数の解法を用いた解

(Pade 法+scaling and squaring 法、ただし Scipy ライブラリを使用)

また、各手法の精度の比較を行った。得られた主な知見は以下のとおりである。

- ・ **Stiffness** による影響により陽解法による計算は破綻しやすい。この程度は即発中性子寿命の小さな体系において顕著であり、時間ステップは即発中性子寿命の 100 倍程度の値にすべきである。なお、この問題は緩やかな反応度添加に対する問題でも同様である。
- ・ **Stiffness** を回避する手法として即発跳躍近似は非常に有効であるが、即発中性子寿命の大きな体系においては跳躍と近似し得ないことから、比較的大きな誤差が発生する。
- ・ **Pade 法 (Scipy ライブラリ)**による精度は高く、その解析手法と合わせて考えれば実質的な解析解とみなせる。
- ・ **MARBLE pointkinetics** ソルバーでの計算負荷の比較では **Pade 法**のものが大きいものの他の手法と同程度であった。必要な時間ステップ幅を考慮すると現行の一点炉動特性方程式の解法としては **Pade 法**を用いることが計算負荷、計算精度の両面に対して有利である。

結論としては **MARBLE pointkinetics** ソルバーを用いる際は **Pade 法**を用いるべきということであるが、その他の手法の精度評価から得られた知見は、今後の空間動特性問題への発展の際には有効な知見となると思われる。

謝辞

本開発を行うに当たり、著者がかつて過渡臨界実験装置 TRACY の運転管理業務を行っていた経験が少なからず資するものとなっております。当時、TRACY の運転長を務められており温かいご指導を頂いた現・安全統括部の塚本導雄氏、当時 TRACY 関連の研究についての議論にご参加頂いた安全試験管理部の小川和彦氏、同じく運転管理業務を行っていた当時、励ましのお言葉を頂いた京都大学の中島健教授にはこの場を借りて御礼申し上げます。

また、付録Eに示した炉型に関する紹介に関しては、次世代原子力システム研究開発部門、炉システム開発計画室の大久保努氏にご意見を伺っております。合わせて御礼申し上げます。

参考文献

- 1) 横山賢治, 巽雅洋, 平井康志他, 次世代炉心解析システム MARBLE の開発, JAEA-Data/Code 2010-030, 2010, 148p.
- 2) 久語輝彦氏、私信.
- 3) Chao, Y., Attard, A., A Resolution of the Stiffness Problem of Reactor Kinetics, Nucl Sci Eng, vol.90, 1985, pp.40-46.
- 4) 計測制御研究室, アナログ計算機の概要と計算法, JAERI 6006, 1961, 83p.
- 5) West, L., Lemley, E. C., Solutions to the Point Kinetics Equations for Step Reactivity, Trans Am Nucl Soc, vol.73, 1995, pp.74-75.
- 6) SciPy community, SciPy Reference Guide, <http://www.scipy.org>, 2011, 939p.
- 7) Yamamoto, A., et al., Numerical Solution of Stiff Burnup Equation with Short Half Lived Nuclides by the Krylov Subspace Method, J. Nucl. Sci. Technol., Vol. 44, No.2, 2007, pp.147-154.
- 8) Betaman, H., Proc. Cambridge Phil. Soc. 15., 1910, 423p.
- 9) 日本原子力学会, 炉物理夏期セミナーテキスト 第 37 回, 日本原子力学会, 2005, 156p.
- 10) Chao, Y. et al., Dynamic Rod Worth Measurement, Nucl Technol, vol.132(3), 2000, pp.403-412.
- 11) 石黒裕大, JRR-4 低濃縮ウランシリサイド燃料の炉心特性 - 初期炉心及び燃焼後 -, JAEA-Technology 2007-017, 2007, 91p.
- 12) NumPy community, NumPy User Guide, <http://www.scipy.org>, 2011, 89p.
- 13) Keepin, G. R. et al., Delayed Neutrons from Fissionable Isotopes of Uranium Plutonium and Thorium, J Nucl Energy, vol.6, 1957, pp.1-21.
- 14) 中島健, 山根祐一, 三好慶典, 溶液燃料体系の臨界事故解析コード : AGNES2, JAERI-Data/Code 2002-004, 2002, 42p.
- 15) 日本原子力研究所, 日本原子力研究所東海研究所 原子炉設置許可変更申請書 [STACY(定常臨界実験装置)施設及び TRACY(過渡臨界実験装置)施設の設置], 日本原子力研究所, 1987.
- 16) 日本機械学会, 伝熱工学資料 改訂第 4 版, 日本機械学会, 1986, 365p.
- 17) 日本機械学会, 気液二相流技術ハンドブック, コロナ社, 1989, 449p.
- 18) Nakajima, K., Yamane, Y., Ogawa, K. et al., Tracy Transient Experiment DataBook
3) Ramp Feed Experiment, JAERI-Data/Code 2002-007, 2002, 123p.
- 19) 外池幸太郎, 内山軍蔵, 一点炉動特性モデルを適用した臨界実験装置シミュレーター (CASIM), JAEA-Data/Code 2009-013, 2009, 51p.
- 20) エネルギー総合工学研究所, 次世代軽水炉等技術開発に係る中間評価報告書, 2010, 38p.

- 21) 経済産業省資源エネルギー庁, 原子力立国計画 日本の選択, 日本電気協会新聞部, 2006, 383p.
- 22) 日本原子力学会 編集委員会, 軽水炉プラントその半世紀の進化の歩み 高速炉の変遷と現状, 日本原子力学会, 2009, 176p.
- 23) 次世代原子力システム研究開発部門ほか, 高速増殖炉サイクルの実用化調査研究 フェーズ II 最終報告書, JAEA-Evaluation 2006-002, 2006, 191p.
- 24) 岩村公道, 大久保努, 秋江拓志ほか, 受動的安全性を具備した低減速軽水炉に関する技術開発, JAERI-Research 2004-008, 2004, 383p.
- 25) T. Okubo, S.Uchikawa, T.Okubo et al., Concept of Innovative Water Reactor for Flexible Fuel Cycle (FLWR), Nucl Eng Des, vol.236, 2006, pp.1599-1605.
- 26) 中野佳洋, 深谷裕司, 秋江拓志ほか, 高転換型革新的水冷却炉(HC-FLWR)炉心に関する研究, JAEA-Research 2009-061, 92p.
- 27) Okumura, K., Kugo, T., Kaneko, K., SRAC2006: A Comprehensive Neutronics Calculation Code System, JAEA-Data/Code 2007-004, 2007, 313p.
- 28) Fukaya, Y., Nakano, Y., Okubo, T. et al., Study on Characteristics of Void Reactivity Coefficients for High Conversion Type Core of FLWR for MA Recycling, J Nucl Sci Technol JP, vol.46, no.8, 2009, pp.819-830.
- 29) 大杉俊隆, 吉田弘幸, 大田丈夫, ガス冷却高速炉の非均質効果に関する検討, JAERI-M 7608, 110p.
- 30) 深谷裕司, 中野佳洋, 大久保努, 高転換型革新的水冷却炉(HC-FLWR)の使用済燃料特性の検討, JAEA-Research 2009-041, 86p.
- 31) 深谷裕司, 大久保努, 内川貞夫, 低減速軽水炉(RMWR)の使用済燃料特性の検討, JAEA-Research 2008-041, 98p.
- 32) FBR システムユニットほか, 高速増殖炉サイクルの実用化調査研究フェーズ II 技術検討書 - (1)原子炉プラントシステム -, JAEA-Research 2006-042, 2006, 36p.

付録 A アナログコンピューターの概要

原子力技術が実用化され始めた時点においては、現在ほどコンピューターが発達しておらず、電子回路の過渡現象を利用した演算を行うアナログコンピューターの利用が主流となっていた。ここでは、アナログコンピューターの概要及び原子力動特性問題への適用例を示す。アナログコンピューターはオペアンプから構成され、オペアンプの特性を知ることが重要となる。(オペアンプ自体がアナログコンピューターの基本素子として開発されたとのことである。) オペアンプは反転入力端子(-)、非反転入力端子(+)と出力端子の3つの端子をもつ差動増幅回路であり、両入力端子の電位差を増倍する素子である。一般的に理想的なオペアンプは以下の特性を持つものとされる。

- ・入力インピーダンスが無限大 (入力端子に電流が流れ込まない)
- ・出力インピーダンスがゼロ (出力電流が増えても電圧降下が発生しない)
- ・電圧利得が無限大

この特性より考えられるオペアンプ単体の動作としては、反転入力端子の電圧が非反転入力端子の電圧よりも高い場合は電圧が $-\infty\text{V}$ に振りきれ、その逆の場合は $+\infty\text{V}$ に振りきれることとなる。実際は、電源電圧を超えた範囲での電圧は出力されないため、規定の範囲内で負側、正側に振りきれることとなる。この特性だけでもコンパレータとして使用でき、電圧パルス型中性子検出器のプリアンプのディスクリミネーターとして使用できるが、負のフィードバックを掛けることにより、出力端子から有益な電圧値が得られ、演算の幅が増える。以下に、最も基本的な回路である反転増幅回路について説明する。

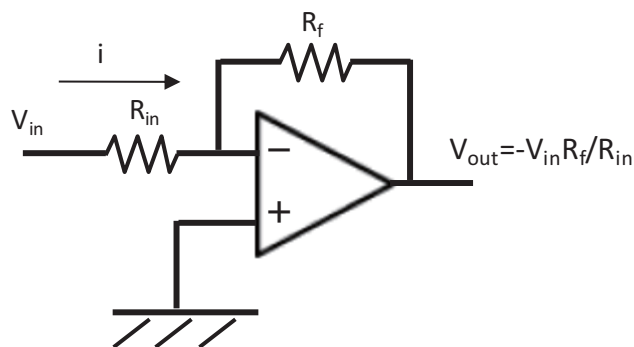


Fig. A.1 反転増幅回路

反転増幅回路は出力端子より電圧値が反転入力端子にフィードバックされている。これにより、出力値が振りきれることが無く有意な値に固定される。一方で非反転入力端子は接地されており、入力値としては 0V である。このときの反転入力端子も 0V となる。なぜなら、オペアンプの基本特性のひとつである「電圧利得が無限大」という条件があり、もし、両入力端子に電位差が発生した場合は値が振りきれってしまうからである。このように反転増幅回路は両入力端子の電位差が同一になるようなフィードバックが常にかかっている回路である。このように、非反転入力端子が接地している関係上、間接的に反転入力端

子が接地している状態を仮想接地と呼ぶ。入力電圧を V_{in} 非反転入力端子の電圧が $0V$ であることから、電流量はオームの法則により V_{in}/R_{in} となる。また、オペアンプの基本特性のひとつである「入力インピーダンスが無限大」という条件を考えると、この入力端子から流入した電流はオペアンプの IC 内に流入することが無く、出力端子へそのまま流出することが分かる。そのため帰還抵抗 R_f を通して $0V$ から更に電圧降下することになり、出力端子に表れる電位は $-V_{in}R_f/R_{in}$ となることが分かる。入力電圧から正負が反転することになるが、帰還抵抗 R_f の入力抵抗 R_{in} に対する比を用いた定数倍の演算が出来ることが分かる。

この反転増幅回路を応用すれば以下のような、微分、積分、対数演算が出来ることが分かる。

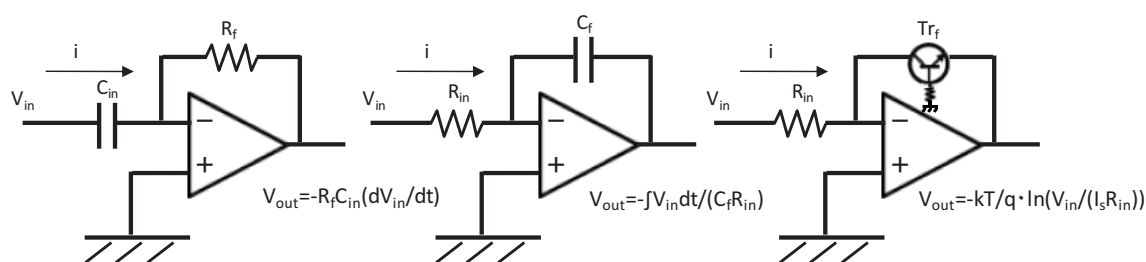


Fig. A.2 反転増幅回路の応用例

微分回路に関しては、コンデンサの電荷量が静電容量と電圧の積であらわすことが出来ること、電荷の時間微分が電流であることを考慮すれば算出できる。積分回路についても同様である。対数変換回路トランジスタのベース・エミッタ間電圧に対しコレクタ電流が指数関係にあることを利用したものである。 k はボルツマン定数、 T は温度、 q は電子の電荷、 I_s はトランジスタの飽和電流である。

簡単な使用例として、逆炉周期 ω の算出について考える。逆炉周期の定義と式変形は以下のようなになる。

$$\omega = \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = \frac{d \ln(n)}{dt} \tag{A-1}$$

逆炉周期を算出する際には、対数変換回路からの信号を微分回路に通すことにより求めることができる。実際の核計装でもこのような回路が設計されている。

ここで、本来の目的である動特性方程式の解法について説明する。解くべき方程式は簡略化し、中性子源無しの遅発中性子先行核 1 群のモデルとする。

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} n + \lambda c \tag{A-2}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n - \lambda c \tag{A-3}$$

この式のままで回路を構成してもよいが、一般的に電子回路ではノイズの乗りやすい微分回路は好まれない。そのため、積分形に変形して実装する。(文献 2) に紹介されたアナログコンピュータでは微分器そのものが装備されていない。) ここでは、分かりやすくする為、

具体的に積分形に式を変形してから回路の設計を行うものとする。ただし、実際のアナログコンピュータの設計には、実時間と計算時間の関係や出力電圧幅を調整する為スケールリングを行う。この作業は初等的な変数変換であるため説明は割愛する。以下に、結線を行う具体的な式を示す。

$$n = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} \int n dt + \lambda \int c dt \tag{A-4}$$

$$c = \frac{\beta}{\Lambda} \int n dt - \lambda \int c dt \tag{A-5}$$

数学的には反って扱いにくい形になっているが、アナログコンピュータを設計する際には、積分対象となる信号の出力を分岐させ積分器に通すだけで良いため、実装しやすい形となっている。Fig. A.3 に具体的な回路を示す。この回路はあくまでも式(A-4)、(A-5)をアナログコンピュータで実現する為の基礎知識を示すために作成したものであり、現実的な回路とは言えない。実際の素子の性能（抵抗値、静電容量）により適切な動特性パラメータの再現が難しい場合には、定数倍を行う部分に関しては複数のアンプを併用することも考えられる。また、同様の積分が複数存在するが、積分器は共有させたほうが回路の設計及びメンテナンス（積分器は電荷を放出させてリセットする必要がある）上は有利であるかもしれない。また、反応度に関しては、別途、フィードバック反応度算出の為の演算から決定した値、もしくはポテンショメーター（可変抵抗）などでユーザーがリアルタイムに入力した値を用いる場合がある。この際は、乗算器の導入が不可欠となる。より現実的な例を参照したい場合は文献 4)を参照されたい。

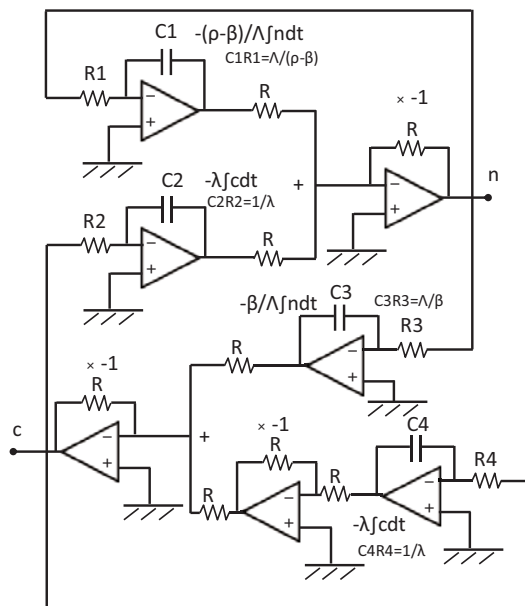


Fig. A.3 一点炉動特性方程式の回路図

付録 B 溶液燃料体系における臨界事故評価への適用

1 点炉動特性方程式の適用例の紹介として溶液燃料体系における臨界事故の評価への適用例を示す。溶液燃料体系における臨界事故としては、1999 年に我が国で発生した JCO ウラン加工工場の臨界事故が有名である。このような、事故の評価に対しては一般的に 1 点炉動特性方程式を用いた過渡評価が行われている。

ここでは、1 点炉動特性方程式の使用例を具体的に示すために、溶液燃料体系における臨界事故を評価する為のシステムを構築する。なお、本コードは AGNES コード¹⁴⁾のモデルを参考にしている。また、このような事故を研究する為に日本原子力研究開発機構では過渡臨界実験装置 TRACY により、即発超過臨界時の過渡運転が行われている。¹⁵⁾

このような事故時の挙動を支配する要因としては、温度フィードバックと放射性ガスによる発生ボイドによるフィードバックがある。これらの現象を再現し、反応度としてフィードバックさせる必要がある。

初めに、温度評価モデルについて説明する。体系としては、円筒形の容器に入れられた溶液燃料を想定する。無限円筒体系を考慮し径方向一次元熱伝達モデルを解く。領域は溶液燃料、燃料容器、2 領域とし、それぞれの領域をメッシュ分割する。第 1 領域、第 2 領域については、以下の関係式で表すことが出来る。ただし、各領域はさらにメッシュ分割される。

$$V_i(\rho C_p)_N \frac{dT_i}{dt} = \gamma_i P V_i + (hA)_{i-1}(T_{i-1} - T_i) - (hA)_i(T_i - T_{i+1}) \quad (B-1)$$

ここで、

- V_i : 領域体積(m³)
- ρ : 密度(kg/m³)
- C_p : 熱容量(J/kg・K)
- P : 炉出力(W)
- I : 空間メッシュ番号
- N : 領域番号
- T_i : メッシュ i の温度(K)
- γ_i : メッシュ i の出力割合 (-)
- $(hA)_i$: メッシュ i における熱伝達係数と伝熱面積の積(W/K)
- t : 時間 (s)

ここで、炉内の径方向出力分布はベッセル関数であらわすものとする。ただし、同一媒体間の伝熱は本来熱伝導によるものであるため、熱伝導度から熱伝達係数の換算を行う必要がある。この換算については、以下のような換算を行う。

Fig. B.1 のように無限平板の 2 領域に同一の勾配で分布する

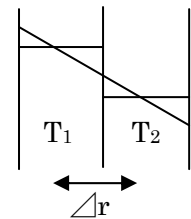


Fig.B.1 熱伝達率への換算

温度場を仮定し、それぞれの領域での平均温度を算出する。この平均温度を用いた際の熱伝導による熱流束と境界面における熱伝達を考慮した際の熱流束を一致させるためには以下の関係が必要になることが分かる。

$$h = \frac{k}{\Delta r} \quad (\text{B-2})$$

ここで、

k : 熱伝導率(W/m・K)

Δr : メッシュ長(m)

本解析では、この近似を用いる。

AGNES では水冷却を想定しているが、本開発では TRACY 体系を忠実に再現する意味で空冷としている。第 2 領域である燃料容器のバランス式の境界条件として外気温度を与えている。容器と外気間の熱伝達に関しては、円筒体系における自然対流熱伝達を考慮する。

熱伝達率の定義は一般的に以下のように示すことが出来る。

$$h = \frac{k\text{Nu}}{L} \quad (\text{B-3})$$

ここで、

Nu : ヌッセルト数(-)

L : 代表長さ(m)

ここで、この場合の代表長さは鉛直方向の高さが用いられるが、燃料液位の midpoint を用いるのが妥当であると思われる。鉛直に伝熱面を持つ場合の自然対流熱伝達に関するヌッセルト数は以下のように与えられる。¹⁶⁾

$$\text{Nu}_{\text{cylinder}} = \text{Nu}_{\text{plane}} \left(1 + 0.428 \left(\frac{L/r}{\text{Nu}_{\text{plane}}} \right)^{5/6} \right) \quad (\text{B-4})$$

$$\text{Nu}_{\text{plane}} = \left(\frac{\text{Pr}}{2.4 + 4.9\sqrt{\text{Pr}} + 5\text{Pr}} \right)^{1/4} (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/4} \quad (\text{B-5})$$

$$\text{Pr} = \frac{\eta C_p}{k} \quad (\text{B-6})$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (\text{B-7})$$

Nu_{plane} : 平板体系のヌッセルト数(-)

$\text{Nu}_{\text{cylinder}}$: 円筒体系のヌッセルト数(-)

Pr : プラントル数(-)

Gr : 円筒周りのグラスフォフ数(-)

η : 粘性係数(Pa・s)

ν : 動粘性係数(m²/s)

g : 重力加速度(m/s²)

- β : 体膨張係数(-)
 r : 燃料容器の半径(m)
 T_w : 伝熱面の温度(K)
 T_∞ : 室温(K)

また、空気の物性値を参照する際の代表温度として以下の温度を用いるとよいとされる。

$$T_r = T_w - 0.38(T_w - T_\infty) \quad (B-8)$$

なお、軸方向に分布する値が必要な場合は、余弦関数の形に分布させるものとする。

つぎに、放射線分解ガスの評価法について示す。ここでは、修正エネルギーモデル¹⁴⁾を用いるものとする。このモデルでは、放射線分解ガスの濃度が飽和濃度を上回った場合、反応度効果を持つガスボイドが形成されるものとする。このモデルでは、以下の事柄を仮定する。

- ・出力に比例して放射線分解ガスが生成される。
- ・この分解ガス濃度が飽和濃度を超えると、ボイドとして存在するようになる。
- ・ボイド体積の増加率は、出力と（飽和濃度を超えた）分解ガス濃度の積に比例する。
- ・ボイドは体系内を上昇し、系外へ消失する。径方向へのボイドの移動は考えない。

本解析では、燃料領域を二次元 R-Z 体系にメッシュ分割を行い、ボイド評価を行う。特定のメッシュ(i, j)におけるボイド率 F_{ij} のバランス式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = v\gamma_{ij}P \cdot (C_{ij} - C_0) \cdot \theta(C_{ij} - C_0) - v_{ij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial z} \quad (B-9)$$

ここで、

- F_{ij} : ボイド率 (-)
 C_{ij} : 分解ガスのモル濃度(mol/m³)
 P : 出力密度(W/m³)
 γ_{ij} : 出力割合 (-)
 v_{ij} : ボイド上昇速度(m/s)
 v : 変換定数(m⁶/J・mol) $v = a_0 + a_1F_{ij} + a_2F_{ij}^2$ で与える。
 C_0 : 分解ガスの飽和モル濃度 (mol/m³)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

とする。分解ガスのモル濃度のバランス方程式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} = G\gamma_{ij}P - \frac{C_{ij}}{F_{ij}} \cdot v_{ij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial z} - \frac{\partial C_{ij}}{\partial z} \quad (B-10)$$

ここで、

- G : 分解ガス生成率(mol/J)
 τ : 分解ガスの消滅時定数(s)

式(B-10)の第1項は生成項であり、第2項はボイドへの移動による分解ガスの消滅項、第3項は分解ガスの再結合等による消滅項である。

ボイドの上昇速度に関しては、ボイドの浮力と抗力のつり合いにより導出される以下の式を用いる。¹⁷⁾

$$v_{ij} = \left(\frac{8r_{ij}g}{3C_D} \right)^{0.5} \quad (B-11)$$

$$r_{ij} = \frac{2\sigma F_{ij}}{C_{ij}RT_{ij}} \quad (B-12)$$

ここで、

r_{ij} : 平均ボイド半径(m)

σ : 溶液の表面張力(N/m)

g : 重力加速度(m/s²)

C_D : 抗力係数、 $C_D = b_0 + b_2 \cdot F_{ij}^2 + b_4 \cdot F_{ij}^4$ で与える

R : 気体定数(J/mol・K)

T_{ij} : 温度(K)

とする。解法の手順としては、

- ・ 式(B-1)の伝熱方程式による温度の評価(Algebra.theta_integration)
- ・ 式(B-10)による分解ガス濃度の評価 (各計算点において解析的に評価)
- ・ 式(B-9)によるボイド率の評価(Algebra.theta_integration)
- ・ 温度・ボイド反応度フィードバックを考慮した1点炉動特性方程式による出力の評価(Algebra.pade) の順に行われる。

解法の選択としては、1点炉動特性方程式の解法としては、即発超過臨界の過酷な計算条件にも対応出来る Pade 法を利用した。その他の計算に関しては、AGNES ではクランク・ニコルソン法を用いているため、本解析においても同様の θ 法を用いている。また、ボイド評価に用いる空間差分スキームは風上差分とした。TRACY のランプ給液運転 Run 61¹⁸⁾ の過渡出力の解析結果を Fig. B.2 に示す。改良すべき点はあるものの比較的良く実験結果が再現できている。

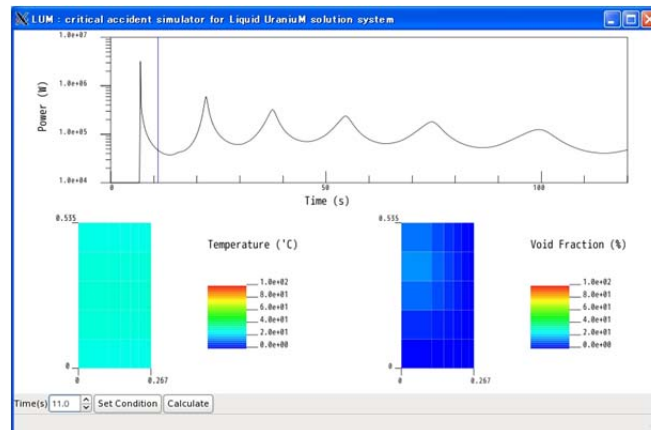


Fig. B.2 TRACY ランプ給液運転 Run 61 の解析結果

付録 C 原子炉リアルタイムシミュレーターへの適用

1点炉動特性方程式の適用例の2つ目として原子炉のリアルタイムシミュレーターを挙げる。ここでは、付録 B でも紹介した TRACY 施設を模擬したシミュレーターを紹介する。なお、本シミュレーターは MARBLE 用 GUI システム LIME を利用して開発を行った。

1点炉動特性方程式ソルバー自体は、本文内で紹介したソルバーを利用しているが、1点炉ソルバーを動かすためには、フィードバックを含めた反応度とソース強度を与える必要がある。フィードバックに関しては、温度フィードバックのみを考え付録 B で説明した熱伝達モデルを簡略化したモデルを実装している。また、反応度は給液、排液などの運転操作によっても変更を受ける。同様に、ソース強度は運転操作により変化する。

また、運転はインターロックを含むシーケンスに従い行われる。給液を行う際はポンプを作動させる必要があるが、吐出弁を開けなければポンプが作動しない。また、触針と呼ばれる液位センサーが作動している場合には吐出弁が開かない仕組みとなっている。また、出力勾配の増加により炉周期に関する警報が作動した場合には、吐出弁が自動的に閉まる構造になっている。また、運転手順に関しては、運転長の指示を模擬したメッセージ（起動オプションにより音声ガイドの併用も可能である。）が表示され、その指示に従うことにより、運転が可能となる。

逆増倍法による臨界量推定、ペリオド法による添加反応度の測定などが行え、実際の運転と同様の経験が可能となっている。このようなアプリケーションは現場組織でのニーズが多い。¹⁹⁾

模擬する物理現象自体は簡単であっても、GUI 及びリアルタイムとなると敷居が高くなるが、本サンプルを雛型とすれば同様のアプリケーションの開発が安価で出来る。なお、本開発に使用された開発環境は全てフリーソフトで構成されるため、無料で開発が行える。

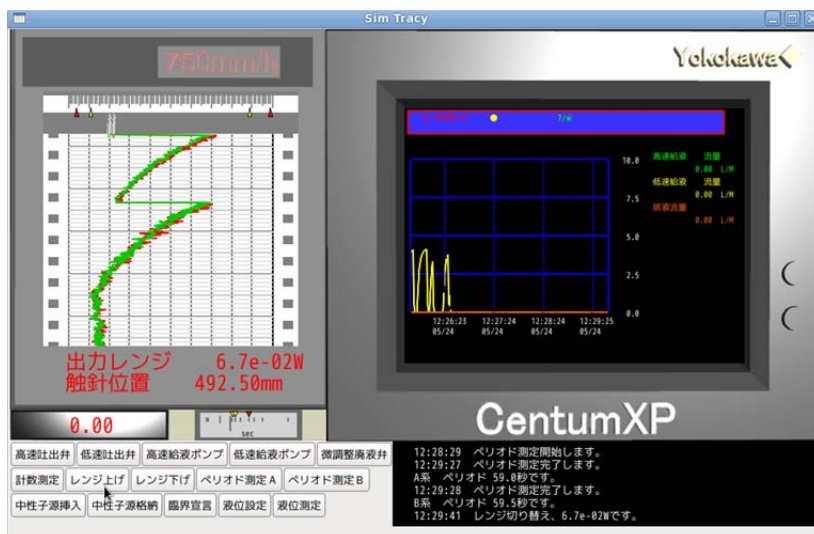


Fig. C.1 TRACY 施設を模擬したリアルタイムシミュレーター

付録 D 実機用反応度計の試作

古典的な手法としては出力変化時の反応度評価としては、ダブリングタイムを測定し、炉周期を求め逆時間方程式で反応度に換算するペリオド法が有名であるが、逆解法を用いる手法は、連続的に反応度を監視できるため有用である。ここでは、実機用反応度計を試作することにより具体的な適用に関する問題を検討する。

反応度計と言っても、今回作成した逆解法クラスを利用するだけであるが、実際の適用には、データの入出力に関して問題がある。なお、対象とする検出器信号としては、扱いが難しいと考えられるレンジ切り替えを含む線形信号とする。

初めに、線形出力計の仕組みを簡単に確認する。一般的な計測回路を Fig. D.1 に示す。

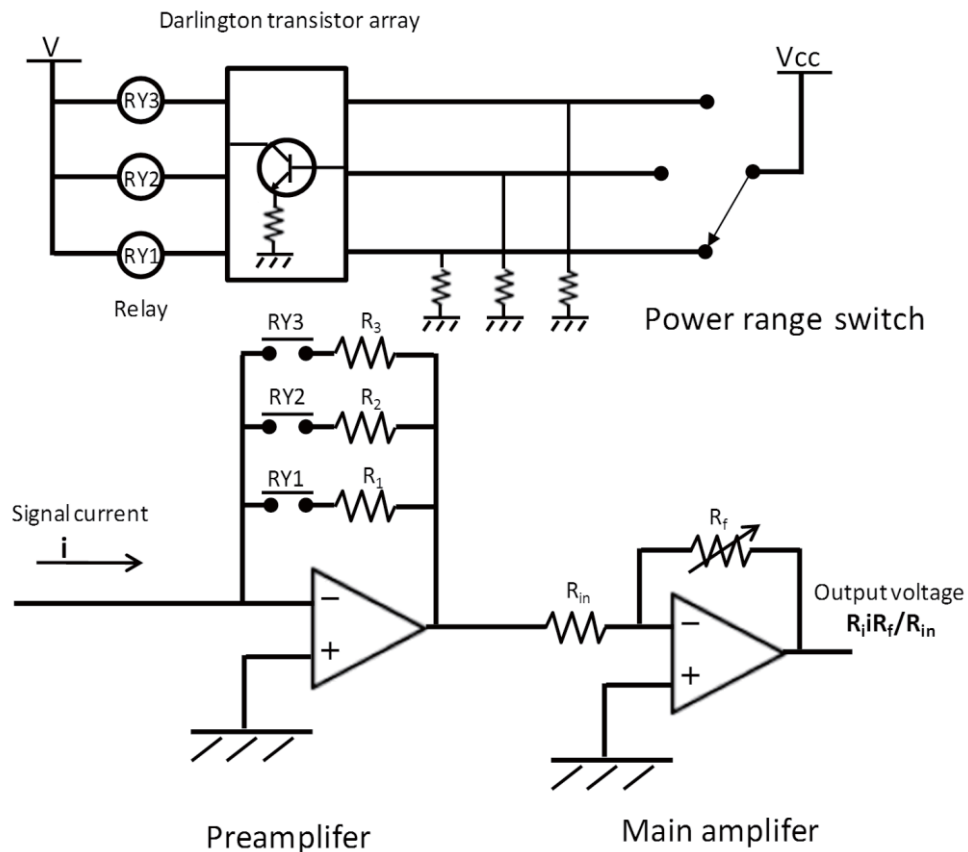


Fig. D.1 一般的な線形出力計の計測回路

基本的に、付録 A で説明した反転増幅回路で説明が出来る。検出器信号は電流源と考えられるが、プリアンプは反転増幅回路を利用した電流・電圧変換により、検出器信号を電圧信号に変換しメインアンプに受け渡す、この信号がメインアンプで微調整され最終的な電圧信号として表示メーター等に渡される。このプリアンプにおける電流・電圧変換に利用される帰還抵抗はレンジスイッチにより選択され、運転に適切な倍率に調整される。この帰還抵抗の選択は、レンジスイッチにより発生した信号と直結しておらず、リレーを介

して選択が行われる。

このように、線形出力計の信号としては、出力信号の他に選択レンジに関する信号が存在する。出力信号については、制御システムに取り込まれる形式になっていると思われる。一方で、レンジ選択信号は必ずしも必要とされない場合があり、制御システムへの受け渡しが行われていない例も想定される。しかし、上記のように、選択レンジに関する信号は TTL レベルのデジタル信号であるため、適当なバッファを介して信号を分岐すれば計装システム側へ影響を与えることが無く信号の取得が可能である。また、最近の制御システムは WindowsOS ベースのもの等、既存の OS を用いたものが主流であると思われる。適切な通信アプリケーションの設計を行えば、必要なデータの転送が比較的簡単に出来ると思われる。また、制御システムを構成しデータが保存されているコンピューターでは運転作業に直接使われると思われるため、データを別のコンピューターに転送しそのディスプレイに表示することが妥当であると思われる。通信手段としては、イーサネットケーブルを介したソケット通信により行うものとし、余分な結線を要せず便利である。

具体的な実装に関する留意点は以下のようなものが挙げられる。

- ・ソケット通信によるデータ転送
- ・GUI との接続

ソケット通信に関しては、Python の socket パッケージを使用することにより簡単に通信が行える。ソケット通信ではサーバー側がクライアントからの通信を待ち、クライアント側からデータの転送があれば受け取る。クライアント側はサーバー側の IP アドレスとポートを指定して通信を行う。転送するデータは文字列及びバイナリが可能であるが、データ形式の決定とその形式に則った再現をプログラム開発者が行うことは、煩雑であるだけでなく不具合発生の原因にも成りかねない。そこで、今回はオブジェクトをシリアライズしたものを転送し受信後デシリアライズを行うことによりオブジェクトを復元するものとした。転送データをクラスにより定義してもよいが、処理にかかる負荷と可読性を考え、単純に Python の list を受け渡すものとした。この list は出力信号、選択レンジ信号、時間ステップの情報を含むものとした。

GUI との接続に関しては、GUI インターフェースに受信データを反映させる必要がある。しかし、GUI のイベントドリブン機能及び受信待ちに関する無限ループの 2 つのループを同居させる必要がある。このために、マルチスレッドプログラミングを使用している。

Fig. D.2 に反応度計のインターフェースを示す。出力信号、選択レンジ信号、逆解法で求めた反応度の信号が表示されている。コンピューター特有の表現も出来るが、今回の試作のように、従来の計器と外見を統一することができ、運転員の視覚に違和感を与えることが無く情報を供給することができる。



Fig. D.2 反応度計のインターフェース

また、付録Aで説明したようなアナログコンピューターで回路を構成する場合には数学的に非常に簡単化される。ここでは、簡単化の為ソース無しの動特性方程式を対象とする。

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i \quad (D-1)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \quad (D-2)$$

簡単化の為に即発跳躍近似を併用するが式(D-1)より反応度は以下のように算出することが出来る。

$$\rho = \beta - \Lambda \frac{\sum_i \lambda_i c_i}{n} \quad (D-3)$$

後は遅発中性子先行核に関する積分を行えばよいが、式(D-2)を以下のように変形する。

$$c_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int n dt - \lambda_i \int c_i dt \quad (D-4)$$

積分に関しては、付録Aのアナログコンピューターによる一点炉動特性方程式の解法と同様に、積分対象となる信号を積分器に通すのみで良い。式(4-4)で示したようにデジタルコンピューターによるプログラミングでは指数関数が現れ、更にその離散化のための技術も必要になるが、アナログコンピューターでは物理現象の記述が簡潔であり、当然離散化の必要もない。(ただし、式(D-3)の演算においては乗算器の導入が必要になるが、現在は専用の IC を使用するのが一般的である。)しかし、ノイズ対策等のハードウェア特有の難点や、一度制作すると設計変更が難しい等の柔軟性を考えるとデジタルコンピューターによる処理のほうが有益であると思われる。

付録 E 炉型毎の即発中性子寿命

一点炉動特性方程式の数値的特性は即発中性子寿命に大きな影響を受ける。即発中性子寿命が **Stiffness** に大きく影響を与えることは、本文に述べられている通りである。本章では、実際に、炉型毎の即発中性子寿命を簡易的に評価する。また、炉型の選択根拠としての導入意義及び炉物理的特徴を合わせて記載する。さらに、炉型毎の炉物理特性を考慮し解析モデルについても検討する。

E. 1 比較対象炉型の選定

原子炉は用途によって多くの炉型が存在するが、本報告書では原子炉の最も重要な用途である商用発電に限り検討する。現行軽水炉(PWR,BWR)は UO_2 燃料を用いた炉心であり、現在、商用発電の用途で最も普及している炉型である。その延長として次世代軽水炉²⁰⁾の開発がすすめられているが、そのコンセプトとしては現行軽水炉の発展形として高燃焼度化などの改良がなされているが、基本的な炉心特性は現行軽水炉と大きく変わらない。そのため、これらの炉型を代表して **BWR(Step-III 燃料)**を対象とする。

MOX 燃料軽水炉 (プルサーマル) に関しては、資源論、U価格の高騰等が導入意義として示されることもあるが多い。導入実績としては、2009年12月2日には玄海原子力発電所3号機で日本初となるプルサーマルの営業運転が開始されている。本解析における **MOX 燃料軽水炉**としては **MOX-BWR(Step-III 燃料)**を対象とする。

プルトニウムの本格的な利用としては、原子力立国計画²¹⁾にも示されているように高速増殖炉を中心とした核燃料サイクルの構築が予定されている。高速増殖炉としては **Na 冷却炉**が主要な候補であり挙国一致体制のもと五者協議会を意思決定機関として **FaCT** プロジェクトが遂行されている²²⁾が、高速増殖炉サイクルの実用化調査研究のフェーズIIの最終的な総括²³⁾として導入意義を比較された他の炉型についても比較対象とする。特に、低減速軽水炉(水冷却炉)²⁴⁾は、軽水炉と高速炉の中間のスペクトルを持つ炉型であるため、本評価の目的である即発中性子寿命の比較には重要となる。これらの炉型の特徴として、高速増殖炉サイクルの実用化調査研究のフェーズIIの最終的な総括を **Table E.1** に紹介する。また、低減速軽水炉に関しては革新的水冷却炉概念²⁵⁾の一部である。革新的水冷却炉の概念では、軽水炉技術に立脚し継続的に安定したエネルギー供給を実現しながら核燃料サイクルを実現することを目的としている。初めに、現行軽水炉との技術的ギャップの少ない高転換型革新的水冷却炉²⁶⁾を経て増殖炉である低減速軽水炉に移行するシナリオである。本解析では、これらの増殖炉から **Na 冷却高速炉**、**ガス冷却高速炉**、**低減速軽水炉**を評価対象として選択する。また、高転換型革新的水冷却炉に関しては低減速軽水炉と現行軽水炉の中間の炉心特性を持つ炉型であることから、特有の炉物理的特性が確認できると思われるため合わせて評価する。

Table E.1 高速増殖炉システム候補概念の技術総括結果(文献 23)より引用)

炉型	ナトリウム冷却炉	ヘリウムガス冷却炉	鉛ビスマス冷却炉	水冷却炉
設計要求への適合可能性	すべての設計要求に対して、高いレベルで適合する可能性がある。金属燃料を採用した場合にはさらなる炉心性能の向上が見込める。	すべての設計要求に対して適合する可能性があり、高温熱源としての魅力を有する。	すべての設計要求に対して適合する可能性がある。	資源有効利用性及び環境負荷低減性に制約がある。上記以外の設計要求に対しては、適合する可能性がある。
技術的実現性	開発課題が明確であり、また代替技術を準備することができることから、高い確度で実現性を見通すことが可能	実現性を見通すためには、概念成立性にかかわる課題を解決することが必要		実現性を見通すための課題が炉心燃料関連に限定
(国際的視点)	国際協力を期待することが可能 GIFでの活動が活発で、国際標準の概念へ発展していく可能性がある。また、共同開発による革新技術のブレークスルー、開発分担による効率的開発が期待できる。	国際協力を期待することが可能 GIFでの活動により、国際標準の概念へ発展していく可能性がある。また、概念成立性にかかわる課題が解決されれば、技術的実現性をより向上させることができる。	国際協力を期待することが困難 GIFでの活動において開発を主導する国が無く、概念成立性にかかわる課題をブレークスルーできる可能性が低い。	国際協力を期待することが困難 GIFでの候補概念に取り上げられていないため、現状では基礎的な研究協力内容に限定される。

E. 2 即発中性子寿命の評価

E. 2. 1 解析手法

本解析では、SRAC²⁷⁾-CITATION の動特性パラメーター評価機能を利用して即発中性子寿命を評価する。CITATION は中性子拡散方程式を解く炉心解析コードであるが、反射条件を用い無限体系として扱う。CITATION に供給する断面積は、SRAC の衝突確率法モジュールである PIJ により評価する。衝突確率法によるセル計算は、炉型により均質、非均質（単ピンセルもしくは集合体セル）の計算により行うものとする。なお、計算負荷に対する配慮は不要なため、縮約を行わず詳細群(107 群)にて解析を行うものとする。なお、一点炉動特性方程式で用いられるべきパラメーターは平均中性子世代時間であり、厳密には即発中性子寿命ではない。即発中性子寿命を増倍率で割ったものが平均中性子世代時間とする定義が存在する。しかし、今回はあえて即発中性子寿命を用いることとする。これは、無限体系では増倍率が 1 より大きく異なることがあり、このような状況では即発中性子寿命を用いたほうが妥当な値を示すためである。

E. 2. 2 空間自己遮蔽効果とセル計算モデル

E. 2. 1 節で述べた通り、衝突確率法によるセル計算モデルは炉型により異なる。当然、集合体計算を行えばどの炉型に対しても妥当な結果を得られるが、計算負荷を小さくするために妥当な結果を得られる簡易モデルを使用することが通例となっている。一般的に、高速炉では燃料・被覆管・冷却材を含むすべての組成を平均化した一点炉モデルであ

る均質セル計算を用いることが出来るが、軽水炉ではこのような均質モデルでは妥当な結果が得られないため、最低限でも単ピンセルによる計算が必要となる。さらに、可燃性毒物を含む集合体の評価には、詳細な集合体計算が必須となる。このように、異なるセルモデルの適用が必要となる理由としては空間自己遮蔽効果の違いが挙げられる。高速炉では空間自己遮蔽効果が顕著ではないため、均質化が可能となる。ちなみに、主に軽水炉評価の為に発展してきた SRAC コードでは、衝突確率法モジュール PIJ に均質体系を評価する枠組が存在しない。そのため、均質体系を評価する為には反射条件をもつセルの全メッシュに対して同一の組成を割り当てる必要がある。これは軽水炉設計の文化において非均質効果という概念自体が無いためである。

ここでは、空間自己遮蔽効果の具体的な特性を検討する為に、酸化燃料ペレット内における各エネルギー群の中性子束ピーキングを評価する。解析対象としては、BWR Step-III 燃料体系を模擬した単ピンセルとし、 UO_2 燃料（濃縮度 3.8wt%）、MOX 燃料（Pu 富化度 3.8wt%）、未燃焼時を対象にした。評価には SRAC の衝突確率法モジュール PIJ を用いた。結果を Fig. E.1 に示す。ペレットを径方向に 10 分割し、エネルギー群毎のピーキングを示している。縦軸には中性子のエネルギーを示している。空間自己遮蔽効果はペレット表面における中性子の吸収反応により、内部の中性子束強度が低下する現象を示すが、0.01eV 以下の低エネルギー領域で空間自己遮蔽が顕著に発生している。このため、スペクトルの硬い炉型においては、空間自己遮蔽効果が顕著ではなく均質セルの適用が可能となる。また、MOX 燃料では 1eV 付近と比較的エネルギーの高い領域で顕著な自己遮蔽効果が観測できる。これは ^{241}Pu がこのエネルギー位置に大きな共鳴吸収ピークを持つためである。スペクトルの硬い軽水炉である高転換型革新的水冷却炉でも、この 1eV の共鳴吸収ピークがボイド反応度特性に大きな影響を与えることが知られており²⁸⁾、空間自己遮蔽効果も顕著であると推測できる。この傾向は低減速軽水炉でも同様であると考えられる。さらに、低減速軽水炉の評価では、集合体内部のボイド率が高いのに対し、集合体外周部（チャンネルボックス間）のボイド率が低いという特徴があり、集合体セル計算が推奨されている。また、ガス冷却高速炉においては非均質効果が無視できる程度²⁹⁾であることが知られており、均質セルによる評価が可能である。

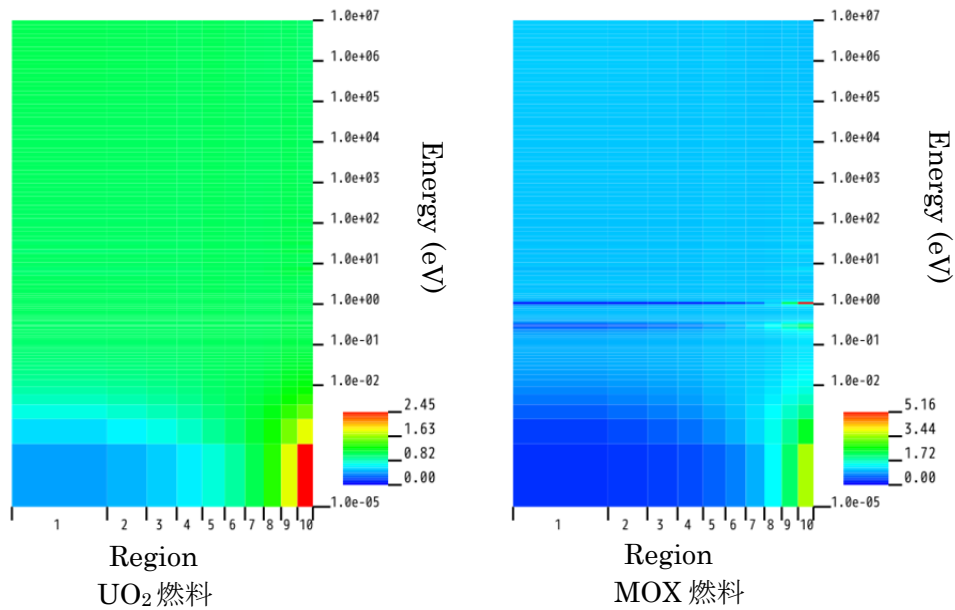


Fig. E.1 BWR Step-III 燃料のペレット内部の中性子束ピーキング

E. 2. 3 炉型毎の解析条件

E. 2. 2 節で述べた事情を考慮し炉型毎に以下のような条件にて解析を行った。

• BWR

Step-III 燃料集合体、UO₂ 燃料 (U 濃縮度 3.8wt%)、BOL 時、単ピンセルモデル

• MOX-BWR

Step-III 燃料集合体、MOX 燃料 (Puf 濃縮度 3.8wt%)、BOL 時、単ピンセルモデル

• 高転換型革新的水冷却炉

MOX 燃料部中央 (Puf 濃縮度 11.0wt%)、BOL 時、集合体セル、
「高転換型革新的水冷却炉(FLWR)の使用済燃料特性の検討」³⁰⁾に用いた計算モデル。

• 低減速軽水炉

下部 MOX 燃料部 (Puf 濃縮度 18.0wt%)、BOL 時、集合体セル、
「低減速軽水炉(RMWR)の使用済燃料特性の検討」³¹⁾に用いた計算モデル。

• Na 冷却高速炉

MOX 燃料部 (Puf 濃縮度 12.0wt%)、BOL 時、均質セルモデル、
高速増殖炉サイクルの実用化調査研究のフェーズ II³²⁾で示された大型 MOX 燃料
高内部転換型炉心 (平衡期炉心) の内側炉心と外側炉心の平均組成を使用。

• ガス冷却高速炉

MOX 燃料部 (Puf 濃縮度 8.8wt%)、BOL 時、均質セルモデル
文献 29)に示されたピン型燃料の 1000MWe ガス冷却炉の燃料組成(Core1)を使用。

E. 2. 4 解析結果

解析結果は Table E.2 のようになった。単純に考えれば、散乱反応（減速）の頻度が少なく、吸収反応（核分裂反応及び捕獲反応）の頻度が高い炉型のほうが即発中性子寿命が小さい。このことを同一減速材の炉型間で比較すれば、明らかに減速材密度が少なくスペクトルの硬い炉型の方が即発中性子寿命が小さいと言える。実際に、ほぼ同じ炉心構成で減速材密度の程度の異なる高転換型革新的水冷却炉と低減速軽水炉の比較では、スペクトルの硬い低減速軽水炉の即発中性子寿命のほうが小さい結果となっている。

しかし、減速材（冷却材）の異なる炉型間では、必ずしもこの関係は成り立っていない。Fig. E.2 に示すように、Na 冷却高速炉(FBR)よりも低減速軽水炉(RMWR)の炉内スペクトルは Na 冷却高速炉のほうが硬いが、即発中性子寿命に関しては低減速軽水炉のほうが小さいという結果となっている。これは、Na 冷却高速炉の冷却材による散乱現象は Na の非弾性散乱が主であり減速の程度が小さいのに対し、低減速軽水炉の冷却材による散乱は水素による弾性散乱が主要であり、急激なエネルギーの低下による吸収断面積の増加により低減速軽水炉の即発中性子寿命が小さくなるものと考えられる。

Table E.2 炉型毎の即発中性子寿命

炉型	即発中性子寿命(s)
BWR	2.05E-05
MOX-BWR	7.71E-06
高転換型革新的水冷却炉	4.63E-07
低減速軽水炉	2.75E-07
ガス冷却炉高速炉	6.50E-07
Na冷却高速炉	3.84E-07

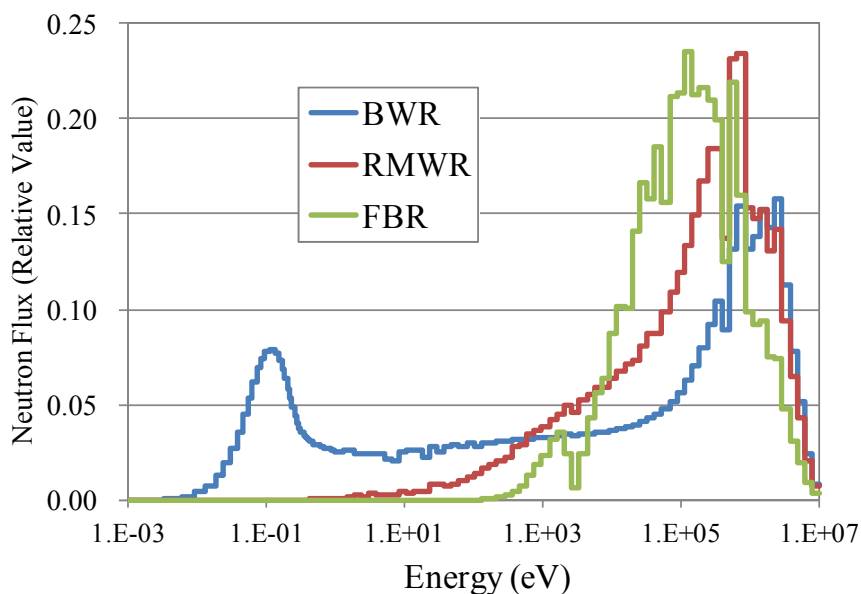


Fig. E.2 炉型によるスペクトルの違い

This is a blank page.

国際単位系 (SI)

表1. SI基本単位

基本量	SI基本単位	
	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質の量	モル	mol
光度	カンデラ	cd

表2. 基本単位を用いて表されるSI組立単位の例

組立量	SI基本単位	
	名称	記号
面積	平方メートル	m ²
体積	立法メートル	m ³
速度	メートル毎秒	m/s
加速度	メートル毎秒毎秒	m/s ²
波数	毎メートル	m ⁻¹
密度, 質量密度	キログラム毎立方メートル	kg/m ³
面積密度	キログラム毎平方メートル	kg/m ²
比体積	立方メートル毎キログラム	m ³ /kg
電流密度	アンペア毎平方メートル	A/m ²
磁界の強さ	アンペア毎メートル	A/m
量濃度 ^(a) , 濃度	モル毎立方メートル	mol/m ³
質量濃度	キログラム毎立方メートル	kg/m ³
輝度	カンデラ毎平方メートル	cd/m ²
屈折率 ^(b)	(数字の)	1
比透磁率 ^(b)	(数字の)	1

(a) 量濃度 (amount concentration) は臨床化学の分野では物質濃度 (substance concentration) ともよばれる。
 (b) これらは無次元量あるいは次元1をもつ量であるが、そのことを表す単位記号である数字の1は通常は表記しない。

表3. 固有の名称と記号で表されるSI組立単位

組立量	SI組立単位			
	名称	記号	他のSI単位による表し方	SI基本単位による表し方
平面角	ラジアン ^(b)	rad	1 ^(b)	m/m
立体角	ステラジアン ^(b)	sr ^(c)	1 ^(b)	m ² /m ²
周波数	ヘルツ ^(d)	Hz		s ⁻¹
力	ニュートン	N		m kg s ⁻²
圧力, 応力	パスカル	Pa	N/m ²	m ⁻¹ kg s ⁻²
エネルギー, 仕事, 熱量	ジュール	J	N m	m ² kg s ⁻²
仕事率, 工率, 放射束	ワット	W	J/s	m ² kg s ⁻³
電荷, 電気量	クーロン	C		s A
電位差 (電圧), 起電力	ボルト	V	W/A	m ² kg s ⁻³ A ⁻¹
静電容量	ファラド	F	C/V	m ² kg ⁻¹ s ⁴ A ²
電気抵抗	オーム	Ω	V/A	m ² kg s ⁻³ A ⁻²
コンダクタンス	ジーメン	S	A/V	m ² kg ⁻¹ s ³ A ²
磁束	ウェーバ	Wb	Vs	m ² kg s ⁻² A ⁻¹
磁束密度	テスラ	T	Wb/m ²	kg s ⁻² A ⁻¹
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A	m ² kg s ⁻² A ⁻²
セルシウス温度	セルシウス度 ^(e)	°C		K
光照射度	ルーメン	lm	cd sr ^(c)	cd
放射線量	グレイ	Gy	J/kg	m ² s ⁻²
放射性核種の放射能 ^(f)	ベクレル ^(d)	Bq		s ⁻¹
吸収線量, 比エネルギー分与, カーマ	グレイ	Gy	J/kg	m ² s ⁻²
線量当量, 周辺線量当量, 方向性線量当量, 個人線量当量	シーベルト ^(g)	Sv	J/kg	m ² s ⁻²
酸素活性化	カタール	kat		s ⁻¹ mol

(a) SI接頭語は固有の名称と記号を持つ組立単位と組み合わせても使用できる。しかし接頭語を付した単位はもはやコヒーレントではない。
 (b) ラジアンとステラジアンは数字の1に対する単位の特別な名称で、量についての情報をつたえるために使われる。実際には、使用する時には記号rad及びsrが用いられるが、習慣として組立単位としての記号である数字の1は明示されない。
 (c) 測光学ではステラジアンという名称と記号srを単位の表し方の中に、そのまま維持している。
 (d) ヘルツは周期現象についてのみ、ベクレルは放射性核種の統計的過程についてのみ使用される。
 (e) セルシウス度はケルビンの特別な名称で、セルシウス温度を表すために使用される。セルシウス度とケルビンの単位の間には1:1の関係がある。したがって、温度差や温度間隔を表す数値はどちらの単位で表しても同じである。
 (f) 放射性核種の放射能 (activity referred to a radionuclide) は、しばしば誤った用語で"radioactivity"と記される。
 (g) 単位シーベルト (PV.2002.70,205) についてはCIPM勧告2 (CI-2002) を参照。

表4. 単位の中に固有の名称と記号を含むSI組立単位の例

組立量	SI組立単位		
	名称	記号	SI基本単位による表し方
粘力のモーメント	パスカル秒	Pa s	m ⁻¹ kg s ⁻¹
表面張力	ニュートンメートル	N m	m ² kg s ⁻²
角速度	ニュートン毎メートル	N/m	kg s ⁻²
角加速度	ラジアン毎秒	rad/s	m m ⁻¹ s ⁻¹ = s ⁻¹
熱流密度, 放射照度	ラジアン毎秒毎秒	rad/s ²	m m ⁻¹ s ⁻² = s ⁻²
熱容量, エントロピー	ワット毎平方メートル	W/m ²	kg s ⁻³
比熱容量, 比エントロピー	ジュール毎ケルビン	J/K	m ² kg s ⁻² K ⁻¹
比エネルギー	ジュール毎キログラム毎ケルビン	J/(kg K)	m ² s ⁻² K ⁻¹
熱伝導率	ジュール毎キログラム	J/kg	m ² s ⁻²
体積エネルギー	ワット毎メートル毎ケルビン	W/(m K)	m kg s ⁻³ K ⁻¹
電界の強さ	ジュール毎立方メートル	J/m ³	m ⁻¹ kg s ⁻²
電荷密度	ジュール毎立方メートル	J/m ³	m kg s ⁻³ A ⁻¹
電表面電荷	クーロン毎立方メートル	C/m ³	m ⁻³ s A
電束密度, 電気変位	クーロン毎平方メートル	C/m ²	m ⁻² s A
誘電率	クーロン毎平方メートル	C/m ²	m ⁻² s A
透磁率	ファラド毎メートル	F/m	m ³ kg ⁻¹ s ⁴ A ²
モルエネルギー	ヘンリー毎メートル	H/m	m kg s ⁻² A ⁻²
モルエントロピー, モル熱容量	ジュール毎モル	J/mol	m ² kg s ⁻² mol ⁻¹
照射線量 (X線及びγ線)	ジュール毎モル毎ケルビン	J/(mol K)	m ² kg s ⁻² K ⁻¹ mol ⁻¹
吸収線量率	クーロン毎キログラム	C/kg	kg ⁻¹ s A
放射線強度	グレイ毎秒	Gy/s	m ² s ⁻³
放射輝度	ワット毎ステラジアン	W/sr	m ⁴ m ⁻² kg s ⁻³ = m ² kg s ⁻³
酵素活性濃度	ワット毎平方メートル毎ステラジアン	W/(m ² sr)	m ² m ⁻² kg s ⁻³ = kg s ⁻³
	カタール毎立方メートル	kat/m ³	m ³ s ⁻¹ mol

表5. SI接頭語

乗数	接頭語	記号	乗数	接頭語	記号
10 ²⁴	ヨタ	Y	10 ¹	デシ	d
10 ²¹	ゼタ	Z	10 ⁻²	センチ	c
10 ¹⁸	エクサ	E	10 ⁻³	ミリ	m
10 ¹⁵	ペタ	P	10 ⁻⁶	マイクロ	μ
10 ¹²	テラ	T	10 ⁻⁹	ナノ	n
10 ⁹	ギガ	G	10 ⁻¹²	ピコ	p
10 ⁶	メガ	M	10 ⁻¹⁵	フェムト	f
10 ³	キロ	k	10 ⁻¹⁸	アト	a
10 ²	ヘクト	h	10 ⁻²¹	ゼプト	z
10 ¹	デカ	da	10 ⁻²⁴	ヨクト	y

表6. SIに属さないが、SIと併用される単位

名称	記号	SI単位による値
分	min	1 min=60s
時	h	1 h=60 min=3600 s
日	d	1 d=24 h=86 400 s
度	°	1°=(π/180) rad
分	'	1'=(1/60)°=(π/10800) rad
秒	"	1"=(1/60)'=(π/648000) rad
ヘクタール	ha	1 ha=1 hm ² =10 ⁴ m ²
リットル	L, l	1 L=1 dm ³ =10 ⁻³ m ³
トン	t	1 t=10 ³ kg

表7. SIに属さないが、SIと併用される単位で、SI単位で表される数値が実験的に得られるもの

名称	記号	SI単位で表される数値
電子ボルト	eV	1 eV=1.602 176 53(14)×10 ⁻¹⁹ J
ダルトン	Da	1 Da=1.660 538 86(28)×10 ⁻²⁷ kg
統一原子質量単位	u	1 u=1 Da
天文単位	ua	1 ua=1.495 978 706 91(6)×10 ¹¹ m

表8. SIに属さないが、SIと併用されるその他の単位

名称	記号	SI単位で表される数値
バール	bar	1 bar=0.1 MPa=100 kPa=10 ⁵ Pa
水銀柱ミリメートル	mmHg	1 mmHg=133.322 Pa
オングストローム	Å	1 Å=0.1 nm=100 pm=10 ⁻¹⁰ m
海里	M	1 M=1852 m
バイン	b	1 b=100 fm ² =(10 ¹² cm) ² =10 ⁻²⁸ m ²
ノット	kn	1 kn=(1852/3600) m/s
ネーパ	Np	SI単位との数値的関係は、 対数量の定義に依存。
ベレル	B	
デジベル	dB	

表9. 固有の名称をもつCGS組立単位

名称	記号	SI単位で表される数値
エル	erg	1 erg=10 ⁻⁷ J
ダイン	dyn	1 dyn=10 ⁻⁵ N
ポアズ	P	1 P=1 dyn s cm ⁻² =0.1 Pa s
ストークス	St	1 St=1 cm ² s ⁻¹ =10 ⁻⁴ m ² s ⁻¹
スチルブ	sb	1 sb=1 cd cm ⁻² =10 ⁴ cd m ⁻²
フオト	ph	1 ph=1 cd sr cm ⁻² 10 ⁴ lx
ガリ	Gal	1 Gal=1 cm s ⁻² =10 ⁻² ms ⁻²
マクスウェル	Mx	1 Mx=1 G cm ² =10 ⁻⁸ Wb
ガウス	G	1 G=1 Mx cm ⁻² =10 ⁻⁴ T
エルステッド ^(c)	Oe	1 Oe _e =(10 ³ /4π) A m ⁻¹

(c) 3元系のCGS単位系とSIでは直接比較できないため、等号「△」は対応関係を示すものである。

表10. SIに属さないその他の単位の例

名称	記号	SI単位で表される数値
キュリー	Ci	1 Ci=3.7×10 ¹⁰ Bq
レントゲン	R	1 R=2.58×10 ⁻⁴ C/kg
ラド	rad	1 rad=1 cGy=10 ⁻² Gy
レム	rem	1 rem=1 cSv=10 ⁻² Sv
ガンマ	γ	1 γ=1 nT=10 ⁻⁹ T
フェルミ	f	1 フェルミ=1 fm=10 ⁻¹⁵ m
メートル系カラット		1メートル系カラット=200 mg=2×10 ⁻⁴ kg
トル	Torr	1 Torr=(101 325/760) Pa
標準大気圧	atm	1 atm=101 325 Pa
カロリ	cal	1 cal=4.1858 J (「15°C」カロリ), 4.1868 J (「IT」カロリ), 4.184 J (「熱化学」カロリ)
マイクロン	μ	1 μ=1 μm=10 ⁻⁶ m

