

高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発 (3)

—Hybrid型 k - ε/k_θ - ε_θ モデルの導入と妥当性確認—

Development of Computer Program for Detailed Thermal-Hydraulic
Analysis in a Fast Reactor Fuel Assembly (3)

- Implementation and Validation of Hybrid-type k - ε/k_θ - ε_θ Model -

菊地 紀宏 今井 康友 吉川 龍志 田中 正暁
大島 宏之

Norihiro KIKUCHI, Yasutomo IMAI, Ryuji YOSHIKAWA, Masaaki TANAKA
and Hiroyuki OHSHIMA

大洗原子力工学研究所
高速炉研究開発部

Fast Reactor Research and Development Department
Oarai Nuclear Engineering Institute

March 2026

Japan Atomic Energy Agency

日本原子力研究開発機構

JAEA-Data/Code

本レポートは国立研究開発法人日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。本レポートはクリエイティブ・コモンズ 表示 4.0 国際 ライセンスの下に提供されています。本レポートの成果（データを含む）に著作権が発生しない場合でも、同ライセンスと同様の条件で利用してください。（<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ja>）
なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ウェブサイト（<https://www.jaea.go.jp>）より発信されています。本レポートに関しては下記までお問合せください。

国立研究開発法人日本原子力研究開発機構 研究開発推進部 科学技術情報課
〒 319-1112 茨城県那珂郡東海村大字村松 4 番地 49
E-mail: ird-support@jaea.go.jp

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.en>).

Even if the results of this report (including data) are not copyrighted, they must be used under the same terms and conditions as CC-BY.

For inquiries regarding this report, please contact Library, Institutional Repository and INIS Section, Research and Development Promotion Department, Japan Atomic Energy Agency.

4-49 Muramatsu, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1112, Japan

E-mail: ird-support@jaea.go.jp

高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発 (3)

—Hybrid 型 $k\text{-}\epsilon/k_0\text{-}\epsilon_0$ モデルの導入と妥当性確認—

日本原子力研究開発機構 大洗原子力工学研究所 高速炉研究開発部

菊地 紀宏、今井 康友*、吉川 龍志、田中 正暁、大島 宏之+

(2025 年 11 月 27 日受理)

ナトリウム冷却高速炉（高速炉）の炉心設計では、定格運転時（高流量条件）から、崩壊熱除去運転時（低流量条件）までの広範囲にわたる運転条件において、炉心の構成要素である燃料集合体が健全であることを確認する必要がある。そこで、燃料集合体内の流速及び温度分布等を詳細に評価するため、複雑形状を詳細に模擬できる有限要素法を用いた燃料集合体内詳細熱流動解析コード SPIRAL の整備を進めてきた。前報までに、等温条件での燃料集合体内流動に対する解析機能と速度場乱流モデルを導入した。その後、燃料集合体内の温度分布を評価するために必要な乱流熱伝達（温度場乱流）モデルを組み込み、主に高流量条件における試験解析を通じて妥当性確認を実施してきた。燃料集合体内の熱流動は、運転条件によって層流から乱流まで幅広く変化し、また、燃料集合体内の局所的な Re 数は燃料要素にらせん状に巻かれているワイヤスペーサ等の影響によって幅広い値を示す。このため、これまでに整備してきた標準型や低 Re 数型 $k\text{-}\epsilon/k_0\text{-}\epsilon_0$ モデルでは、層流－乱流間の遷移領域における熱流動現象の再現が難しいことが示されていた。そこで、これらの遷移領域を含む幅広い Re 数範囲での熱流動場を再現するため、標準型 $k\text{-}\epsilon/k_0\text{-}\epsilon_0$ モデルに低 Re 数型 $k\text{-}\epsilon/k_0\text{-}\epsilon_0$ モデルの長所を組み合わせた Hybrid 型 $k\text{-}\epsilon/k_0\text{-}\epsilon_0$ モデルを整備することとした。本報では、基礎方程式、Hybrid 型 $k\text{-}\epsilon/k_0\text{-}\epsilon_0$ モデルを含む各種乱流モデルから導かれる構成方程式、それらの有限要素法による定式化とその数値計算上での取り扱い及び有限要素法に特化した境界条件の取り扱いについて記述するとともに、圧力損失及び温度分布の予測に関する Hybrid 型 $k\text{-}\epsilon/k_0\text{-}\epsilon_0$ モデルの妥当性確認として実施した解析結果を報告する。

大洗原子力工学研究所：〒311-1393 茨城県東茨城郡大洗町成田町 4002 番地

+ エネルギー研究開発領域

* エヌデーデー

**Development of Computer Program for Detailed Thermal-Hydraulic
Analysis in a Fast Reactor Fuel Assembly (3)
- Implementation and Validation of Hybrid-type $k\text{-}\varepsilon/k_\theta\text{-}\varepsilon_\theta$ Model -**

Norihiro KIKUCHI, Yasutomo IMAI*, Ryuji YOSHIKAWA, Masaaki TANAKA and Hiroyuki OHSHIMA⁺

Fast Reactor Research and Development Department
Oarai Nuclear Engineering Institute
Japan Atomic Energy Agency
Oarai-machi, Higashiibaraki-gun, Ibaraki-ken

(Received November 27, 2025)

In a core design of sodium-cooled fast reactors (SFRs), it is necessary to confirm the integrity of fuel assemblies (FAs) in the core over a wide range of operating conditions. To evaluate the velocity and temperature distributions within the FAs in detail, we have been developing a detailed FA thermal-hydraulic analysis code named SPIRAL. In our previous works, we implemented numerical methods for fluid mechanics at isothermal conditions and turbulence models. Subsequently, we implemented turbulent heat transfer models for the evaluation of temperature distribution within the FAs, and validated them through experimental analyses mainly under high flow rate conditions. The thermal-hydraulics within the FAs varies depending on the operating conditions. Furthermore, the local Reynolds (Re) number within the FAs varies widely due to the influence of wire spacers spirally wound around the fuel rod. For this reason, it has been shown that standard and low Re number $k\text{-}\varepsilon/k_\theta\text{-}\varepsilon_\theta$ models have difficulty reproducing the thermal-hydraulics in the laminar-turbulent transition region. Therefore, to reproduce the thermal-hydraulics over a wide Re number range, we developed a hybrid $k\text{-}\varepsilon/k_\theta\text{-}\varepsilon_\theta$ model that combines the standard $k\text{-}\varepsilon/k_\theta\text{-}\varepsilon_\theta$ model with the advantages of the low Re number $k\text{-}\varepsilon/k_\theta\text{-}\varepsilon_\theta$ model. This paper describes the governing equations, constitutive equations derived from various turbulence models, their formularizations by the finite element method, their numerical treatment, and the treatment of boundary conditions. We also report the results of analyses conducted to validate the hybrid $k\text{-}\varepsilon/k_\theta\text{-}\varepsilon_\theta$ model for predicting pressure drop and temperature distribution.

Keywords: Fast Reactor, Fuel Assembly, Numerical Analysis, Finite Element Method, Turbulence Model

⁺ Nuclear Energy Research and Development Domain

* NDD Corporation

目次

1. 緒言	1
2. 基礎方程式と乱流モデル	3
2.1 基礎方程式	3
2.2 乱流モデル	3
2.2.1 k - ε/k_θ - ε_θ モデル	4
2.2.2 応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデル (RSM/TFM)	10
2.2.3 代数応力モデル／代数熱流束モデル (ASM/AFM)	14
2.2.4 壁近傍領域のモデル化	16
3. 数値計算法	23
3.1 時間積分法	23
3.2 重み付き残差方程式	24
3.3 有限要素方程式	25
3.4 風上化法 (SUPG 法)	28
3.5 散逸項対角化法 (ε -lumping 法)	29
3.6 マルチタイムステップ法	31
3.7 種々の制約条件	33
3.7.1 温度に関する局所有界性	33
3.7.2 乱流量に関する補正処理	33
4. 境界条件	39
4.1 基本境界条件 (ディリクレ型境界条件)	39
4.1.1 流速の基本境界条件	39
4.1.2 圧力の基本境界条件	39
4.1.3 温度の基本境界条件	39
4.1.4 乱流量の基本境界条件	40
4.2 自然境界条件 (ノイマン型境界条件)	40
4.2.1 流速の自然境界条件	40
4.2.2 圧力の自然境界条件	40
4.2.3 温度の自然境界条件	41
4.2.4 乱流量の自然境界条件	41
4.3 周期境界条件	42
4.3.1 流速の周期境界条件	43
4.3.2 圧力の周期境界条件	43

4.3.3	温度の周期境界条件	44
4.3.4	乱流量の周期境界条件	44
4.4	粘性項及び拡散項の厳密な境界条件	44
4.4.1	流入流出境界条件	44
4.4.2	対称境界条件	46
4.4.3	壁境界条件	46
5.	検証及び妥当性確認解析	48
5.1	検証解析	49
5.1.1	二次元スカラー輸送解析	49
5.1.2	強制キャビティフロー解析	49
5.1.3	サーマルキャビティフロー解析	50
5.2	基本的妥当性確認	52
5.2.1	層流ステップフロー解析	52
5.2.2	乱流ステップフロー解析	53
5.2.3	平行平板間乱流熱伝達解析	54
5.3	妥当性確認	56
5.3.1	4本ロッドバンドル試験解析	56
5.3.2	実規模スケール集合体解析	58
5.3.3	ナトリウム試験集合体解析 (PLANDTL 試験解析)	60
6.	結言	106
	参考文献	107
	付録1 内挿関数とガウス積分点	116
	付録2 代数応力熱流束方程式の解法	124
	付録3 物性値	128

Contents

1. Introduction	1
2. Governing equations and Turbulence models	3
2.1 Governing equations	3
2.2 Turbulence models	3
2.2.1 k - ε/k_0 - ε_0 model	4
2.2.2 Reynolds Stress Model / Turbulence Heat Flux Model (RSM/TFM)	10
2.2.3 Algebraic Stress Model / Algebraic Heat Flux Model (ASM/AFM)	14
2.2.4 Near-wall modeling	16
3. Numerical analysis method	23
3.1 Time integration method	23
3.2 Weighted residual equations	24
3.3 Finite element equations	25
3.4 Streamline Upwind Petrov–Galerkin Method (SUPG Method)	28
3.5 ε -lumping method	29
3.6 Multiple time step method	31
3.7 Various constraint conditions	33
3.7.1 Local boundedness of temperature	33
3.7.2 Correction of turbulence quantities	33
4. Boundary condition	39
4.1 Essential boundary condition (Dirichlet boundary condition)	39
4.1.1 Essential boundary condition of velocity	39
4.1.2 Essential boundary condition of pressure	39
4.1.3 Essential boundary condition of temperature	39
4.1.4 Essential boundary condition of turbulence quantities	40
4.2 Natural boundary condition (Neumann boundary condition)	40
4.2.1 Natural boundary condition of velocity	40
4.2.2 Natural boundary condition of pressure	40
4.2.3 Natural boundary condition of temperature	41
4.2.4 Natural boundary condition of turbulence quantities	41
4.3 Periodic boundary condition	42
4.3.1 Periodic boundary condition of velocity	43
4.3.2 Periodic boundary condition of pressure	43

4.3.3	Periodic boundary condition of temperature	44
4.3.4	Periodic boundary condition of turbulence quantities	44
4.4	Exact boundary condition of viscosity term and diffusion term	44
4.4.1	Inlet and outlet boundary condition	44
4.4.2	Symmetric boundary condition	46
4.4.3	Wall boundary condition	46
5.	Verification and validation analyses	48
5.1	Verification	49
5.1.1	Two-dimensional scalar transport analysis	49
5.1.2	Analysis of forced cavity problem	49
5.1.3	Analysis of thermal cavity problem	50
5.2	Fundamental validation	52
5.2.1	Analysis of laminar flow over a backward facing step	52
5.2.2	Analysis of turbulence flow over a backward facing step	53
5.2.3	Analysis of turbulent heat transfer in parallel-plate channel flow	54
5.3	Validation	56
5.3.1	Analysis of 4 rod bundle test	56
5.3.2	Full-scale fuel assembly analysis	58
5.3.3	Fuel assembly analysis of sodium test loop (PLANDTL test)	60
6.	Conclusion	106
	References	107
	Appendix 1 Interpolation functions and Gaussian integration points	116
	Appendix 2 Solution of algebraic stress and heat flux equations	124
	Appendix 3 Physical properties	128

1. 緒言

ナトリウム冷却高速炉（高速炉）の炉心設計では、定格運転時（高流量条件）から、崩壊熱除去運転時（低流量条件）までの広範囲にわたる様々な運転条件において、炉心の構成要素である燃料集合体が健全であることを確認する必要がある。そのため、高速炉の燃料集合体の特徴である燃料要素にらせん状に巻かれているワイヤスペーサの存在により複雑化する燃料集合体内の熱流動現象を解明し、様々な運転条件下での各評価指標（各部の圧力損失、燃料最高温度、燃料被覆管肉厚中心温度、燃料集合体内冷却材最高温度など）を評価することが必要となる。燃料集合体内の熱流動特性を把握するためには、設計が確定していれば、水やナトリウム等を作動流体とした実規模模擬（モックアップ）試験等を実施して各種指標を計測することができるが、設計検討段階のため燃料集合体の形状が未確定である場合、その都度、形状を変えて実験を実施することは、時間的にも、経済的にも負担が大きく、現実的ではない。

日本原子力研究開発機構（以下、「原子力機構」という。）では、燃料集合体内の複雑な熱流動現象を詳細に予測可能な燃料集合体内詳細熱流動解析コード SPIRAL¹⁾²⁾の整備を進めてきた。これまでに等温場条件での層流域及び乱流域の燃料集合体内流動に対する解析モデルを整備し、その妥当性を確認した²⁾。また、燃料集合体内の温度分布を評価するために乱流熱伝達（温度場乱流）モデルを組み込み、主に高流量条件における試験解析を通じて妥当性確認を実施してきた。なお、MPI（Message Passing Interface）法による並列化が為されており、クラスタ計算機等による並列計算が可能となっている³⁾。燃料集合体内の熱流動現象は、運転条件によって層流域から乱流域まで幅広く変化し、燃料集合体内の局所的な Re 数はワイヤスペーサ等の影響によって空間的に幅広い値を示す。これまでに SPIRAL に組み込み適用してきた標準型及び低 Re 数型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルを用いて、低 Re 数条件を解析する場合、より詳細な解析メッシュが要求されることから、計算負荷の観点から、層流-乱流間の遷移領域における熱流動現象の再現性を確保することが難しいという課題があった。そこで、SPIRAL により、遷移領域を含む幅広い Re 数範囲における熱流動現象を再現可能となるよう、標準型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルに低 Re 数型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルの長所を組み合わせた Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルを整備した。

なお、燃料集合体の設計検討においては、計算負荷が軽く取り回しの良い、サブチャンネル解析コード（原子力機構では ASFRE⁴⁾が整備されている）が多用される。これは、1つのサブチャンネル（燃料要素あるいはラップ管壁に囲まれる流路単位）を単位として要素分割を行い、主に既往の実験データから経験的に抽出される伝熱流動相関式や、それに付随する各種のモデルパラメータといった経験値を用いて燃料集合体内の熱流動特性を把握するものである。この場合、サブチャンネル解析での予測精度は、対象とする燃料集合体体系での解析条件と相関式等の適用範囲に注意が必要であり、評価対象となる燃料集合体の条件が適用範囲外となる場合は、相関式等の外挿性を十分に確認する必要がある。また、1つのサブチャンネルを単位とするため、燃料集合体内の解像度には制限がある。そこで、SPIRAL をサブチャンネル解析の妥当性を確認するためのリファレンスデータを提供するツールとして用いることで、従来の実験から導出された各種相関式

の評価精度を確認できる上、さらに広範な条件に対応できる外挿性の高い相関式を導出することも可能となり、それらの結果を設計に用いるサブチャンネル解析コードに反映させ、解析の信頼性と予測精度を向上させることが可能となる。また、燃料集合体内の熱流動現象を幅広い範囲で予測することができれば、様々な制約のある実験に換えて、SPIRALによる詳細熱流動解析を数値実験的に利用することで、設計検討段階における燃料集合体形状が未確定の場合であっても、必要な体系での熱流動場の情報を取得することができ、数々のモックアップ試験等の大規模実験の実施に比べ、時間的にも経済的にも負担を軽減することができる。

本報告書の構成として、第2章では、SPIRALで解かれる基礎方程式、Hybrid型 $k\text{-}\varepsilon/k_0\text{-}\varepsilon_0$ モデルを含む各種乱流モデルから導かれる構成方程式を記載し、第3章では、それらの有限要素法による定式化とその数値計算上での取り扱いに関して記載する。また、第4章では、有限要素法に特化した境界条件の取り扱いに関して記載し、第5章では、検証及び妥当性確認 (V&V: Verification & Validation) の一環として実施した解析結果について記載する。

2. 基礎方程式と乱流モデル

SPIRAL の基礎方程式として、非圧縮性粘性流体の伝熱流動現象を記述する連続の式、Navier-Stokes 方程式、熱伝導方程式を採用する。また、乱流現象を模擬する乱流モデルとしては、RANS 系の各種 $k\text{-}\varepsilon/k_0\text{-}\varepsilon_0$ モデル、代数応力熱流束モデル、応力熱流束方程式モデルを利用できる。

2.1 基礎方程式

非圧縮性粘性流体の伝熱流動現象を記述する連続の式(式(2.1))、Navier-Stokes 方程式(式(2.2))及び熱伝導方程式(式(2.3))を基礎方程式とする。なお、本報では、特に断りがない限り、添え字に関してはアインシュタインの総和規約に従うものとする。

(1) 連続の式

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \dots (2.1)$$

(2) Navier-Stokes 方程式

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho R_{ij}) + \rho g_i \quad \dots (2.2)$$

(3) 熱伝導方程式

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho c_p u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \rho c_p R_{j\theta}) + Q \quad \dots (2.3)$$

乱流モデルを利用しない層流解析では、レイノルズ応力 $R_{ij}=0$ 、乱流熱流束 $R_{i\theta}=0$ となる。また、乱流解析では、流速 u_i 、圧力 P 、温度 θ はいずれもレイノルズ平均した値となる。

2.2 乱流モデル

SPIRAL では、乱流解析において、今回整備した Hybrid 型 $k\text{-}\varepsilon$ モデルを含めレイノルズ平均の概念を利用した RANS 系の乱流モデルを採用している。利用できる乱流モデルは、以下に示すとおりである。

(1) 流速場乱流モデル

- ・標準型、RNG 型、低 Re 数型及び Hybrid 型 $k\text{-}\varepsilon$ モデル (2.2.1 項参照)
- ・標準型及び低 Re 数型応力方程式モデル (RSM) (2.2.2 項参照)
- ・標準型及び低 Re 数型代数応力モデル (ASM) (2.2.3 項参照)

(2) 温度場乱流モデル

- ・標準型、低 Re 数型及び Hybrid 型 $k_0\text{-}\varepsilon_0$ モデル (2.2.1 項参照)
- ・標準型及び低 Re 数型乱流熱流束方程式モデル (TFM) (2.2.2 項参照)
- ・標準型及び低 Re 数型代数熱流束モデル (AFM) (2.2.3 項参照)

2.2.1 k-ε/k_θ-ε_θ モデル

k-ε/k_θ-ε_θ モデルは、古くから利用されている時間平均型の乱流モデルである。比較的低い計算コストで、比較的精度良く乱流の特性を再現できる長所があるため、工学的にも様々な分野で適用されている。

k-ε/k_θ-ε_θ モデルでは、勾配拡散の線形近似に基づいたブジネスク渦粘性性及び渦拡散モデルによって、レイノルズ応力 R_{ij} 、乱流熱流束 $R_{iθ}$ を次式でモデル化する。

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots (2.4)$$

$$R_{iθ} = -\alpha_t \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad \dots (2.5)$$

乱流動粘性係数 ν_t 、乱流拡散係数 α_t は、乱流エネルギー k とその散逸率 ε 及び温度バリエーション k_θ とその散逸率 ε_θ によって、次式でモデル化する。

$$\nu_t = C_\mu f_\mu f_{MMK} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \dots (2.6)$$

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda f_{MMK} k \tau_m = C_\lambda f_\lambda k \tau_f^l \tau_t^m = C_\lambda f_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} (2R)^m \quad \dots (2.7)$$

$$R \equiv \frac{\tau_t}{\tau_f} = \frac{k_\theta / 2\varepsilon_\theta}{k / \varepsilon} \quad \dots (2.7.a)$$

モデル定数 C_μ 、 C_λ 、モデル関数 f_μ 、 f_λ 及び乱流特性時間スケール比 R に掛かる乗数 m に関しては、各モデルの詳細で解説する。また、 f_{MMK} は、流速の歪成分が顕著となる衝突流に対する補正関数であり、本項の最後で解説する。

k 、 ε 、 k_θ 、 ε_θ は、それぞれの輸送方程式から求められる。

(1) 乱流エネルギー輸送方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = Diff(k) + P_k + G_k - \varepsilon \quad \dots (2.8)$$

(2) 乱流エネルギー散逸率輸送方程式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = Diff(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} P_k + C_{\varepsilon 3} f_{\varepsilon 3} G_k - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad \dots (2.9)$$

(3) 温度バリエーション輸送方程式

$$\frac{\partial k_\theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} = Diff(k_\theta) + P_\theta - 2\varepsilon_\theta \quad \dots (2.10)$$

(4) 温度バリエーション散逸率輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} = & Diff(\varepsilon_\theta) + \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} (C_{P1} f_{P1} \frac{P_\theta}{2} - C_{D1} f_{D1} \varepsilon_\theta) \\ & + \frac{\varepsilon_\theta}{k} (C_{P2} f_{P2} P_k - C_{D2} f_{D2} \varepsilon) \end{aligned} \quad \dots (2.11)$$

1) 拡散項

$$Diff(k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma(k)} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad \dots (2.11.a)$$

$$Diff(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma(\varepsilon)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad \dots (2.11.b)$$

$$Diff(k_\theta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma(k_\theta)} \right) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} \right] \quad \dots (2.11.c)$$

$$Diff(\varepsilon_\theta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma(\varepsilon_\theta)} \right) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} \right] \quad \dots (2.11.d)$$

2) 生成項

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad \dots (2.11.e)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots (2.11.f)$$

$$P_\theta = -2R_{j\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = 2\alpha_t Q_j Q_j \quad \dots (2.11.g)$$

$$Q_j = \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad \dots (2.11.h)$$

3) 浮力生成項

$$G_k = -g_j \beta R_{j\theta} \quad \dots (2.11.i)$$

モデル定数 C_* とモデル関数 f_* は、それぞれのモデルによって異なる。なお、「*」は式 (2.8) から式 (2.11) における下付き文字を示す。

以下では、SPIRAL に組み込まれている標準型、RNG 型、低 Re 数型及び Hybrid 型モデルに関して述べる。

(1) 標準型 k-ε/k_θ-ε_θ モデル

最も基礎的な Launder-Spalding による標準型 k-ε モデル⁵⁾及び Jones-Musonge による標準型 k_θ-ε_θ モデル⁶⁾では、モデル定数値は以下に示すとおりとなる。

$$\begin{aligned}
 & C_{\mu} = 0.09, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92, \\
 & C_{\varepsilon 3} = \begin{cases} C_{\varepsilon 1} (G_k \geq 0) \\ 0 (G_k \leq 0) \end{cases}, \\
 & \sigma(k) = 1.0, \sigma(\varepsilon) = 1.3, \\
 & f_{\mu} = f_{\varepsilon 1} = f_{\varepsilon 2} = f_{\varepsilon 3} = 1, \\
 & C_{\lambda} = 0.1, m = \frac{1}{2}, C_{P1} = 1.9, C_{P2} = 1.4^*, \\
 & C_{D1} = 2.0, C_{D2} = 0.9, \\
 & \sigma(k_{\theta}) = 1.0^*, \sigma(\varepsilon_{\theta}) = 1.0^*, \\
 & f_{\lambda} = f_{P1} = f_{P2} = f_{D1} = f_{D2} = 1
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

なお、*のモデル定数値は、SPIRAL におけるデフォルト値と異なる。ε_θ 輸送方程式のモデル定数 C_{P2}に関して、Jones-Musonge の提唱した値は C_{P2}=1.4 であるが、Nagano らは C_{P2}=1.4 では定応力層、定熱流束層の関係式を満たさないと指摘しており、数値解析から最適化した値として C_{P2}=0.64 を提唱している⁷⁾。また、Nagano らのモデルに続く、安倍らのモデル⁹⁾では C_{P2}=0.6、島田のモデル¹⁰⁾では C_{P2}=0.77 と近い値が採用されている。そのため、SPIRAL では、5.6 節で述べる妥当性確認解析の結果から適正值と認められた C_{P2}=0.7 をデフォルト値として採用した。また、数値計算安定化のため、k_θ-ε_θ 輸送方程式の乱流プラントル数を σ(k_θ)=σ(ε_θ)=1.6 とした。すなわち、SPIRAL におけるデフォルトのモデル定数値は以下に示すとおりとなる。

$$C_{P2} = 0.7, \sigma(k_{\theta}) = 1.6, \sigma(\varepsilon_{\theta}) = 1.6 \tag{2.13}$$

(2) RNG 型 k-ε モデル

RNG 型 k-ε モデル¹¹⁾では、乱流の統計理論的な研究に基づいた繰り込み群理論 (Renormalization Group) からモデル定数値を定める。繰り込み群理論では、摂動展開近似から変動の高波数成分が低波数成分に繰り込まれ、結果として得られるモデルは、レイノルズ応力を時間平均量で近似する渦粘性モデルに対応している。

RNG 型 k-ε モデルのモデル定数値は、以下に示すとおりである。

$$\begin{aligned}
 C_\mu &= 0.085, \\
 C_{\varepsilon 1} &= 1.42 - \frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3}, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.68, \quad C_{\varepsilon 3} = \begin{cases} C_{\varepsilon 1} (G_k \geq 0) \\ 0 \quad (G_k \leq 0) \end{cases}, \\
 \sigma(k) &= 0.72, \quad \sigma(\varepsilon) = 0.72, \\
 f_\mu &= f_{\varepsilon 1} = f_{\varepsilon 2} = f_{\varepsilon 3} = 1, \\
 \eta &= \sqrt{C_\mu^{-1} \frac{P_k}{\varepsilon}} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \frac{k}{\varepsilon}, \\
 \eta_0 &= 4.377, \\
 \beta &= 0.012, \\
 S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

式 (2.14) のモデル定数値は、 β を除けばすべて理論的に求められた値であり、標準型 $k-\varepsilon$ モデルに近い値となる。

(3) 低 Re 数型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデル (Abe-Nagano-Kondoh モデル)

標準型及び RNG 型 $k-\varepsilon$ モデルでは、乱流諸量の壁境界条件として後述する壁関数を適用するため、適用範囲が限られている。数値計算の予測精度を向上させるためには、壁近傍領域を壁減衰関数によって詳細にモデル化する低 Re 数型モデルが有用である。

SPIRAL では、低 Re 数型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルとして、Abe-Nagano-Kondoh モデル (ANK モデル)⁸⁾⁹⁾ を採用した。ANK モデルでは、コルモゴロフの流速スケール u_ε による無次元壁座標 y^* によって壁漸近挙動をモデル化するため、剥離及び再付着を伴う流れを高精度で予測できる長所がある。また、ANK モデルのもう一点の優れた特徴として、乱流拡散係数を求めるための混合乱流特性時間スケール τ_m を、流速場と温度場の乱流特性時間スケールの調和平均から求めることが挙げられる。すなわち、ANK モデルでは、式 (2.7) は次式に書き換えられる。

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda f_{MMK} k \tau_m = C_\lambda f_\lambda f_{MMK} k \frac{2}{1/\tau_f + C_m/\tau_t} = C_\lambda f_\lambda f_{MMK} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{2R}{C_m + R} \tag{2.15}$$

ANK モデルの定数値と関数式は、以下に示すとおりである。

$$\begin{aligned}
 & C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.5, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.9, \\
 & C_{\varepsilon_3} = \begin{cases} C_{\varepsilon_1} (G_k \geq 0) \\ 0 \quad (G_k \leq 0) \end{cases}, \\
 & \sigma(k) = 1.4, \quad \sigma(\varepsilon) = 1.4, \\
 & f_\mu = \left[1 + \frac{5}{R_t^{3/4}} \exp\left(-\frac{R_t^2}{200^2}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{14}\right) \right]^2, \\
 & f_{\varepsilon_2} = \left[1 - 0.3 \exp\left(-\frac{R_t^2}{6.5^2}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{3.1}\right) \right]^2, \\
 & f_{\varepsilon_1} = f_{\varepsilon_3} = 1, \\
 & C_\lambda = 0.1, \quad C_m = 0.5, \quad C_{p_1} = 1.9, \quad C_{p_2} = 0.6, \\
 & C_{D_1} = 2.0, \quad C_{D_2} = 0.9, \\
 & \sigma(k_\theta) = 1.6, \quad \sigma(\varepsilon_\theta) = 1.6, \\
 & f_\lambda = \left[1 + \frac{3}{R_t^{3/4}} \frac{\sqrt{2R}}{Pr} \frac{C_m + R}{2R} \exp\left(-\frac{R_t^2}{200^2}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{14}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{Pr} y^*}{14}\right) \right], \\
 & f_{p_1} = [1 - \exp(-y^*)]^2, \quad f_{p_2} = 1, \\
 & f_{D_1} = [1 - \exp(-y^*)]^2, \quad f_{D_2} = \frac{C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} - 1}{C_{D_2}} [1 - \exp(-y^*/5.7)]^2, \\
 & u_\varepsilon = (v\varepsilon)^{1/4}, \quad y^* = \frac{u_\varepsilon y}{\nu}, \\
 & R_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}, \quad R = \frac{k_\theta/2\varepsilon_\theta}{k/\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

(4) Hybrid 型 k-ε/k_θ-ε_θ モデル

標準型 k-ε/k_θ-ε_θ モデルは、十分に発達した乱流を対象とした高 Re 数型モデルであるため、壁の減衰効果及び粘性効果が顕著となる低 Re 数領域の流れに適用した場合、一般に精度の良い解は得られない。一方、低 Re 数型 k-ε/k_θ-ε_θ モデルは、壁減衰関数の導入によって低 Re 数領域から高 Re 数領域まで種々な流れに幅広く適用できる長所があるが、壁近傍領域における計算格子の詳細化に伴い、計算コストも大幅に増大するため、大規模解析への適用が容易ではない。そのため、SPIRAL では両者の長所を組み合わせた Hybrid 型 k-ε/k_θ-ε_θ モデルを整備し、燃料集合体等の大規模複雑解析にて推奨モデルとした。

Hybrid 型 $k\text{-}\varepsilon/k_0\text{-}\varepsilon_0$ モデルの基本的な計算概念は高 Re 数型モデルをベースとしており、壁隣接セルとその外側の外層セルに分けてモデル化する。

外層セルでは、 $k\text{-}\varepsilon/k_0\text{-}\varepsilon_0$ 輸送方程式を解き、ブジネスク渦粘性及び渦拡散モデルから乱流動粘性係数 ν_t 、乱流拡散係数 α_t を求めるが、その際、 ν_t 、 α_t の算出式等に対して低 Re 数型モデルの壁減衰関数を導入して、局所的な低 Re 数領域での精度低下を解消する。一方、壁隣接セルでは、高 Re 数型モデルと同様に壁関数を適用して $k\text{-}\varepsilon/k_0\text{-}\varepsilon_0$ の壁境界条件を付与する。壁面摩擦速度 u_τ 、壁面からの距離 y 、動粘性係数 ν から定義される、壁面からの無次元距離 ($y^+ = u_\tau y / \nu$) に関して、一般的な対数則に基づいた壁モデルでは適用範囲が $30 \leq y^+ \leq 200$ に限定されるため、局所的に再層流化するような低 Re 数領域では精度低下の要因となるが、SPIRAL では、低 Re 数効果を考慮した壁モデルを採用しているため、 $30 \leq y^+$ の領域に適用しても極端な精度低下は発生しない。なお、モデル定数と壁減衰関数としては、ANK モデルの式 (2.16) を採用する。

以上のように構築した Hybrid 型 $k\text{-}\varepsilon/k_0\text{-}\varepsilon_0$ モデルでは、高 Re 数型モデルと同等の要素解像度、同等の計算コストで、低 Re 数型モデルと同様に層流-乱流間の遷移特性を再現できる長所がある。

その他、補正モデルに関して以下に示す。

(1) MMK モデル (衝突流補正モデル)

$k\text{-}\varepsilon$ モデルは、流速の歪成分が顕著となる衝突流に適用すると、衝突領域において乱流エネルギー k の生成が過剰となり、結果的に乱流動粘性係数 ν_t の過大評価によって予測精度が低下する欠点がある。MMK (Mochida-Murakami-Kondo) モデル¹²⁾は、その欠点を改良したモデルであり、 ν_t 、 α_t の算出式に対して次の補正関数を乗じて、乱流エネルギー k の過剰生成を抑制する。

$$f_{MMK} = \frac{\Omega}{S} \quad (\Omega \leq S), \quad f_{MMK} = 1 \quad (\Omega \geq S), \quad \dots (2.17)$$

$$S = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad \dots (2.17.a)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad \dots (2.17.b)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots (2.17.c)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots (2.17.d)$$

SPIRAL では、乱流モデル定数値の指定ファイルで、MMK 補正の項目を ON、OFF として、MMK モデルの利用有無を選択できる。

(2) Viollet モデル

Viollet によるモデル¹³⁾に準拠し、 ε 輸送方程式の浮力生成項に関して、そのモデル定数 $C_{\varepsilon 3}$ を G_k の正負に応じて値を切り替える。SPIRAL では、すべての乱流モデルにおいて Viollet モデルが採用されている。

2.2.2 応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデル (RSM/TFM)

k - ε/k_θ - ε_θ モデルは、比較的低い計算コストで比較的精度良く乱流の特性を再現できる長所がある。しかし、一方では、勾配拡散の線形近似に基づいたブジネスク渦粘性／渦拡散モデルによって、レイノルズ応力 R_{ij} 、乱流熱流束 $R_{i\theta}$ を次式でモデル化しているため、乱流の等方性しか再現できない短所もある。それゆえ、燃料集合体領域等の旋回流、剥離流、再付着流が生じて、乱流の非等方性が顕著となる複雑な流動では、必ずしも精度の良い結果が得られるとは限らない。乱流の非等方性まで良好に再現するためには、本項で述べる応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデルが有用である。

応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデルは、レイノルズ応力 R_{ij} 、乱流熱流束 $R_{i\theta}$ をその輸送方程式から求めるモデルである。 R_{ij} 、 $R_{i\theta}$ の輸送方程式は、次式で表される。

(1) レイノルズ応力輸送方程式

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + u_j \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} = Diff(R_{ij}) + P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad \dots (2.18)$$

(2) 乱流エネルギー散逸率輸送方程式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = Diff(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k + C_{\varepsilon 3} G_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad \dots (2.19)$$

(3) 乱流熱流束輸送方程式

$$\frac{\partial R_{i\theta}}{\partial t} + u_j \frac{\partial R_{i\theta}}{\partial x_j} = Diff(R_{i\theta}) + P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad \dots (2.20)$$

(4) 温度バリエーション輸送方程式

$$\frac{\partial k_\theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} = Diff(k_\theta) + P_\theta - 2\varepsilon_\theta \quad \dots (2.21)$$

1) 拡散項

$$Diff(R_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(v\delta_{kl} + C_s(R_{ij}) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl}) \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.21.a)$$

$$Diff(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(v\delta_{kl} + C_s(\varepsilon) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.21.b)$$

$$Diff(R_{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\nu + \alpha}{2} \delta_{kl} + C_s(R_{i\theta}) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl} \right) \frac{\partial R_{i\theta}}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.21.c)$$

$$Diff(k_\theta) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\alpha \delta_{kl} + C_s(k_\theta) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl} \right) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.21.d)$$

2) 生成項

$$P_{ij} = -R_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad P_k = -R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} P_{jj} \quad \dots (2.21.e)$$

$$P_{i\theta} = P_{i\theta 1} + P_{i\theta 2}, \quad P_{i\theta 1} = -R_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad P_{i\theta 2} = -R_{j\theta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \dots (2.21.f)$$

$$P_\theta = -2R_{j\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad \dots (2.21.g)$$

3) 浮力生成項

$$G_{ij} = -g_i \beta R_{j\theta} - g_j \beta R_{i\theta} \quad \dots (2.21.h)$$

$$G_k = -g_j \beta R_{j\theta} = \frac{1}{2} G_{jj} \quad \dots (2.21.i)$$

$$G_{i\theta} = -g_i \beta k_\theta \quad \dots (2.21.j)$$

4) 压力歪相關項及び压力温度勾配相關項

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij1} + \Phi_{ij2} + \Phi_{ij3} + \Phi_{ijw1} + \Phi_{ijw2} \quad \dots (2.21.k)$$

$$\Phi_{i\theta} = \Phi_{i\theta 1} + \Phi_{i\theta 2} + \Phi_{i\theta 3} + \Phi_{i\theta w} \quad \dots (2.21.l)$$

4.1) Slow 項

$$\Phi_{ij1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \quad \dots (2.21.m)$$

$$\Phi_{i\theta 1} = -C_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{i\theta} \quad \dots (2.21.n)$$

4.2) Rapid 項

$$\Phi_{ij2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \quad \dots (2.21.o)$$

$$\Phi_{i\theta 2} = -C_{\theta 2} P_{i\theta 2} \quad \dots (2.21.p)$$

4.3) Buoyant Rapid 項

$$\Phi_{ij3} = -C_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \quad \dots (2.21.q)$$

$$\Phi_{i\theta 3} = -C_{\theta 3} G_{i\theta} \quad \dots (2.21.r)$$

4.4) Wall Reflection 項

$$\Phi_{ijw1} = C'_1 \frac{\varepsilon}{k} (R_{kl} n_k^w n_l^w \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ik} n_k^w n_j^w - \frac{3}{2} R_{jk} n_k^w n_i^w) f_w \quad \dots (2.21.s)$$

$$\Phi_{ijw2} = C'_2 (\Phi_{kl2} n_k^w n_l^w \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik2} n_k^w n_j^w - \frac{3}{2} \Phi_{jk2} n_k^w n_i^w) f_w \quad \dots (2.21.t)$$

$$\Phi_{i\theta w} = C'_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{k\theta} n_k^w n_i^w f_w \quad \dots (2.21.u)$$

$$f_w = \frac{k^{3/2}}{C_l \varepsilon} \frac{1}{y_n^w} \quad \dots (2.21.v)$$

5) 散逸項

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad \dots (2.21.w)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = 0 \quad \dots (2.21.x)$$

$$\varepsilon_{\theta} = C_{\eta} \frac{k_{\theta}}{k} \varepsilon \quad \dots (2.21.y)$$

各項のモデル化に関して、拡散項は Daly-Harlow モデル¹⁴⁾、圧力歪相関項及び圧力温度勾配相関項の Slow 項は Rotta モデル¹⁵⁾、Rapid 項は IP (Isotropization of Production) モデル¹⁶⁾、Wall Reflection 項は Shir モデル¹⁷⁾と Gibson-Launder モデル¹⁸⁾が適用されている。

なお、Wall Reflection 項に現れる n_i 、 y_n は、壁法線方向成分と壁法線方向距離であり、上付き添え字の w は壁の番号である。流路に複数の壁 $w1, w2, \dots$ が存在する場合、Wall Reflection 項はそれらのすべてに関して総和を取る。

応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデルとして、SPIRAL では高 Re 数型の Launder-Reece-Rodi モデル¹⁹⁾と低 Re 数型の Shima-Launder モデル²⁰⁾を利用できる。それぞれのモデル定数は、以下に示すとおりである。

(1) Launder-Reece-Rodi モデル

最も基礎的な Launder-Reece-Rodi による応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデルでは、モデル定数値は以下に示すとおりとなる。

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 1.8, \quad C_2 = 0.6, \quad C_3 = C_2, \\
 C'_1 &= 0.5, \quad C'_2 = 0.3, \quad C_s(R_{ij}) = 0.22, \\
 C_{\varepsilon 1} &= 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_{\varepsilon 3} = \begin{cases} C_{\varepsilon 1} (G_k \geq 0) \\ 0 \quad (G_k \leq 0) \end{cases}, \\
 C_s(\varepsilon) &= 0.18, \quad C_l = 2.5, \\
 C_{\theta 1} &= 2.9, \quad C_{\theta 2} = 0.4, \quad C_{\theta 3} = 0.4, \\
 C'_{\theta 1} &= 0.25, \quad C_s(R_{i\theta}) = 0.15, \\
 C_\eta &= 0.62, \quad C_s(k_\theta) = 0.22
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

(2) Shima-Launder モデル

Shima-Launder モデルは、低 Re 数型モデルとしては比較的広範な検証実績を持つモデルであり、圧力勾配を伴う境界層での乱流挙動を再現できる等、Launder-Reece-Rodi モデルの欠点を修正したモデルである。そのモデル定数値は以下に示すとおりである。

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 1 + 2.58 A A_2^{1/4} \left[1 - \exp\{-(0.0067 R_l)^2\} \right], \\
 C_2 &= 0.75 A^{1/2}, \quad C_3 = C_2, \\
 C'_1 &= -\frac{2}{3} C_1 + 1.67, \quad C'_2 = \frac{1}{C_2} \max\left[\frac{2}{3}(C_2 - 1) + 0.5, 0\right], \\
 C_s(R_{ij}) &= 0.22, \\
 C_{\varepsilon 1} &= C'_{\varepsilon 1} + \phi_1 + \phi_2, \\
 C_{\varepsilon 2} &= C'_{\varepsilon 2} \left[1 - \frac{\nu}{2k\varepsilon} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 \right], \quad C_{\varepsilon 3} = \begin{cases} C_{\varepsilon 1} (G_k \geq 0) \\ 0 \quad (G_k \leq 0) \end{cases}, \\
 C_s(\varepsilon) &= 0.18, \quad C_l = 2.5, \quad C'_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C'_{\varepsilon 2} = 1.92, \\
 \phi_1 &= 1.5 A (P_k / \varepsilon - 1), \quad \phi_2 = 0.35 (1 - 0.3 A_2) \exp\{-(0.002 R_l)^2\}, \\
 a_{ij} &= \frac{R_{ij}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \\
 A_2 &= a_{ij} a_{ji}, \quad A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}, \quad A = 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3), \\
 R_l &= \frac{k^2}{\nu \varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

$R_{i\theta}$ 輸送方程式、 k_θ 輸送方程式のモデル定数値に関しては、SPIRAL では Launder-Reece-Rodi モデルと同値を採用している。

応力方程式モデルでは、3次元解析において、 R_{xx} 、 R_{xy} 、 R_{xz} 、 R_{yy} 、 R_{yz} 、 R_{zz} 、 ε に関する輸送方程式を解かなければならない。一方、2次元解析では、スパン方向 z に関する剪断応力成分 R_{xz} 、 R_{yz} はゼロとなるため、その輸送方程式を解く必要はないが、垂直応力成分 R_{zz} は圧力歪相関項の影響でゼロとはならない。従って、 R_{zz} をその輸送方程式から求める必要があるが、 $2k = R_{xx} + R_{yy} + R_{zz}$ の関係を利用すれば、 R_{xx} と R_{yy} の輸送方程式は必ず解かれるため、 R_{zz} の代わりに k の輸送方程式を解いても数学的には等価である。そのため、SPIRAL では、2次元解析において、 R_{xx} 、 R_{xy} 、 R_{yy} 、 ε に加え、取り扱いの容易な k の輸送方程式も同時に解いて、3次元解析との矛盾が生じないようにしている。 k の輸送方程式は k - ε モデルと同型であるが、拡散項に対して Daly-Harlow モデルが適用されている。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = Diff(k) + P_k + G_k - \varepsilon \quad \dots (2.25)$$

$$Diff(k) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(v\delta_{kl} + C_s(k) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl}) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.25.a)$$

$$C_s(k) = C_s(R_{ij}) = 0.22 \quad \dots (2.25.b)$$

2.2.3 代数応力モデル／代数熱流束モデル (ASM/AFM)

代数応力モデル／代数熱流束モデルは、応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデルの近似的な代数式によって、レイノルズ応力 R_{ij} 、乱流熱流束 $R_{i\theta}$ を求めるモデルである。代表的な Rodi モデル²¹⁾では、 R_{ij} 、 $R_{i\theta}$ の輸送方程式における時間項、移流項、拡散項の総和が k 、 k_θ の輸送方程式における時間項、移流項、拡散項の総和に比例すると仮定して、次式でモデル化する。

$$\frac{1}{k} \left[\frac{Dk}{Dt} - Diff(k) \right] = \frac{1}{R_{ij}} \left[\frac{DR_{ij}}{Dt} - Diff(R_{ij}) \right] \quad \dots (2.26)$$

$$\frac{1}{2k} \left[\frac{Dk}{Dt} - Diff(k) \right] + \frac{1}{2k_\theta} \left[\frac{Dk_\theta}{Dt} - Diff(k_\theta) \right] = \frac{1}{R_{i\theta}} \left[\frac{DR_{i\theta}}{Dt} - Diff(R_{i\theta}) \right] \quad \dots (2.27)$$

ただし、 $D/Dt = \partial/\partial t + u_j(\partial/\partial x_j)$ である。式 (2.26)、式 (2.27) に k 、 R_{ij} 、 k_θ 、 $R_{i\theta}$ の輸送方程式を代入すれば、次の代数方程式が得られる。

$$R_{ij} = k \frac{P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}}{P_k + G_k - \varepsilon} \quad \dots (2.28)$$

$$R_{i\theta} = \frac{P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Phi_{i\theta}}{(P_k + G_k - \varepsilon)/2k + (P_\theta - 2\varepsilon_\theta)/2k_\theta} \quad \dots (2.29)$$

k 、 ε 、 k_θ 、 ε_θ は、それぞれの輸送方程式から求められる。ここで、代数応力方程式（式（2.28））、代数熱流束方程式（式（2.29））は、 R_{ij} 、 $R_{i\theta}$ に関する非線形連立方程式となるため、LU 分解法等の直接解法で解を求めるのは不可能であり、反復的な計算解法によって解く必要がある。その解法に関しては、巻末の付録 2 に示すとおりである。

拡散項に対して、輸送方程式は k - ε / k_θ - ε_θ モデルと同型であるが、Daly-Harlow モデルが適用されている。

(1) 乱流エネルギー輸送方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = Diff(k) + P_k + G_k - \varepsilon \quad \dots (2.30)$$

(2) 乱流エネルギー散逸率輸送方程式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = Diff(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k + C_{\varepsilon 3} G_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad \dots (2.31)$$

(3) 温度バリエーション輸送方程式

$$\frac{\partial k_\theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} = Diff(k_\theta) + P_\theta - 2\varepsilon_\theta \quad \dots (2.32)$$

(4) 温度バリエーション散逸率輸送方程式

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} = Diff(\varepsilon_\theta) + \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} (C_{P1} \frac{P_\theta}{2} - C_{D1} \varepsilon_\theta) + \frac{\varepsilon_\theta}{k} (C_{P2} P_k - C_{D2} \varepsilon) \quad \dots (2.33)$$

1) 拡散項

$$Diff(k) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(v\delta_{kl} + C_s(k) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl}) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.33.a)$$

$$Diff(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(v\delta_{kl} + C_s(\varepsilon) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.33.b)$$

$$Diff(k_\theta) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\alpha\delta_{kl} + C_s(k_\theta) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl}) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.33.c)$$

$$Diff(\varepsilon_\theta) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\alpha\delta_{kl} + C_s(\varepsilon_\theta) \frac{k}{\varepsilon} R_{kl}) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_l} \right] \quad \dots (2.33.d)$$

2) 生成項

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \dots (2.33.e)$$

$$P_\theta = -2R_{j\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad \dots (2.33.f)$$

3) 浮力生成項

$$G_k = -g_j \beta R_{j\theta} \quad \dots (2.33.g)$$

モデル定数値は、以下に示すとおりである。なお、式 (2.28) の代数応力方程式、式 (2.29) の代数熱流束方程式に現れるモデル定数に関しては、Launder-Reece-Rodi モデルと同値であるため省略する。

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon 1} &= 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \\ C_{\varepsilon 3} &= \begin{cases} C_{\varepsilon 1} (G_k \geq 0) \\ 0 \quad (G_k \leq 0) \end{cases}, \\ C_{P1} &= 1.9, \quad C_{P2} = 0.7, \quad C_{D1} = 2.0, \quad C_{D2} = 0.9, \\ C_s(k) &= 0.22, \quad C_s(\varepsilon) = 0.18, \\ C_s(k_\theta) &= 0.22, \quad C_s(\varepsilon_\theta) = 0.22 \end{aligned} \quad \dots (2.34)$$

2.2.4 壁近傍領域のモデル化

壁近傍領域のモデル化は、高 Re 数型か低 Re 数型の乱流モデルによって大きく異なる。高 Re 数型モデルでは、十分に発達した乱流を想定して、壁関数から求められる乱流諸量を壁境界条件として設定する。一方、低 Re 数型モデルでは、壁境界において厳密に成立する関係式から乱流諸量の壁境界条件を設定する。

なお、本項では、 x 、 y 、 z をそれぞれ主流方向、壁法線方向、スパン方向とし、 θ 、 δ をそれぞれ温度、温度境界層の厚さを表す。また、上付き添え字の $()^+$ は、壁物理量 u_τ 、 θ_τ 、 v によって無次元化した値であることを示し、下付き添え字の w は、壁節点での値を表している。

(1) 高 Re 数型乱流モデルの壁境界条件

高 Re 数型モデルでは、壁近傍領域における流速と温度の分布が壁関数に従うと仮定して、摩擦流速 u_τ と摩擦温度 θ_τ を求め、それらの値から乱流諸量の壁境界条件を設定する。壁関数としては、一般的な対数則を改良した、Reichardt の式²²⁾、Kader の式²³⁾を採用する。図 2.1 及び図 2.2 に、流速分布及び温度分布について、直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation: DNS) と壁関数の比較を示す。図 2.1、図 2.2 に示すとおり、Reichardt の式、Kader の式は、広範な y^+ 、 Pr に対して適用が可能である。

1) Reichardt の式

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) \right] \quad \dots (2.35)$$

2) Kader の式

$$\theta^+ = Pr y^+ \exp(-\Gamma) + \left[2.12 \ln \frac{2.5(1+y^+)(2-y^+/\delta^+)}{1+4(1-y^+/\delta^+)^2} + C_\theta \right] \exp\left(-\frac{1}{\Gamma}\right) \quad \dots (2.36)$$

$$\Gamma = \frac{(Pr y^+)^4}{1+5Pr^3 y^+} \times 10^{-2} \quad \dots (2.36.a)$$

$$C_\theta = (3.85 Pr^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln Pr \quad \dots (2.36.b)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad \dots (2.36.c)$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad \dots (2.36.d)$$

$$\theta^+ = \frac{\theta_w - \theta}{\theta_\tau} \quad \dots (2.36.e)$$

高 Re 数の流れを想定すると、壁近傍領域においては、壁法線方向の剪断応力と熱流束は、それぞれ一定であると近似できる。すなわち、次式が得られる。

$$\tau_w = u_\tau^2 = (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \therefore \nu_t = \frac{u_\tau^2}{\partial u / \partial y} - \nu \quad \dots (2.37)$$

$$q_w = u_\tau \theta_\tau = (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \therefore \alpha_t = \frac{u_\tau \theta_\tau}{\partial \theta / \partial y} - \alpha \quad \dots (2.38)$$

次に、壁近傍領域における流速と温度の勾配を求める。流速勾配に関しては、図 2.3 に示すとおり、Reichardt の式の微分から容易に得ることができる。温度勾配に関しても、同様にして Kader の式を微分することは可能であるが、図 2.4 に示すとおり、温度場が層流から乱流に遷移する遷移領域において不自然な振動を有する温度勾配となる。そのため、式 (2.37)、式 (2.38) の関係を利用して、次式で計算される近似的な温度勾配を採用する。

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{1 + \kappa y^+} + 7.8 \left[\frac{1}{11} \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{1}{11} \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) + \frac{y^+}{33} \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) \right] \quad \dots (2.39)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial y^+} = \frac{q_w^+}{\alpha^+ + \alpha_t^+} = \left[\frac{1}{Pr} + \frac{\nu_t^+}{Pr_t} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \left\{ \frac{1}{\partial u^+ / \partial y^+} - 1 \right\} \right]^{-1} \quad \dots (2.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial u^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \quad \dots (2.41)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial \theta^+} \frac{\partial \theta^+}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial y} = \frac{u_\tau \theta_\tau}{\nu} \frac{\partial \theta^+}{\partial y^+} \quad \dots (2.42)$$

なお、式 (2.40) に現れる乱流プラントル数 Pr_t に関して、SPIRAL では流体のプラントル数依存性を考慮するため、次の Myong-Kasagi の式²⁴⁾から Pr_t を求める。

3) Myong-Kasagi の式

$$Pr_t = 0.75 + \frac{1.63}{\ln(1 + Pr/0.0015)} \quad \dots (2.43)$$

流速と温度の分布が壁関数に従う領域においては、乱流エネルギーと温度バリエーションに関して、それぞれの生成項と散逸項が等しくなる、局所平衡の仮定が成立する。

$$P_k = \varepsilon \quad \dots (2.44)$$

$$P_\theta = 2\varepsilon_\theta \quad \dots (2.45)$$

流速と温度に関して、主流方向とスパン方向の勾配をゼロと近似すれば、乱流エネルギーと温度バリエーションの生成項は、以下に示すとおりである。

$$P_k = -R_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \frac{u_\tau^4}{\nu_t} [f(\nu_t)]^2, \quad \therefore f(\nu_t) \equiv \frac{\nu_t}{\nu + \nu_t} \quad \dots (2.46)$$

$$P_\theta = -2R_{y\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2\alpha_t \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = 2 \frac{u_\tau^2 \theta_\tau^2}{\alpha_t} [f(\alpha_t)]^2, \quad \therefore f(\alpha_t) \equiv \frac{\alpha_t}{\alpha + \alpha_t} \quad \dots (2.47)$$

また、ブジネスク渦粘性性及び渦拡散モデルから、乱流動粘性係数、乱流拡散係数及び乱流プラントル数は、次式で表される。

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \dots (2.48)$$

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} f(R), \quad f(R) = f_\tau (2R)^m, \quad R = \frac{\tau_t}{\tau_f} = \frac{k_\theta/2\varepsilon_\theta}{k/\varepsilon} \quad \dots (2.49)$$

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} = \frac{C_\mu f_\mu}{C_\lambda f_\lambda} f(R)^{-1}, \quad f(R) = \frac{C_\mu f_\mu}{C_\lambda f_\lambda} Pr_t^{-1}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt[m]{f_\tau^{-1} f(R)} \quad \dots (2.50)$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_\lambda = 0.1, \quad m = \frac{1}{2} \quad \dots (2.50.a)$$

壁減衰関数 f_μ 、 f_λ としては様々な関数が提唱されているが、 y^+ の関数として整理されているため取り扱いが容易な NTT モデル^{25) 26)} の壁減衰関数を採用する。

$$f_\mu = \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right]^2 \left[1 + \frac{4.1}{R_t^{3/4}} \right] \quad \dots (2.51)$$

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \approx \frac{\nu_t}{C_\mu \nu} \quad \dots (2.51.a)$$

$$f_\lambda = \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right]^2 \left[1 + \frac{4.1}{R_h^{3/4}} \right] \quad \dots (2.52)$$

$$R_h = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} f(R) \approx \frac{\alpha_t}{C_\lambda \nu} \quad \dots (2.52.a)$$

また、 f_τ は流体の Pr 数依存性を考慮するために導入された関数であり、既述した ANK モデル、SN モデルのモデル関数を参考にしている。

$$f_\tau = \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right] \left/ \left[1 - \exp\left(-\frac{(1 + \sqrt{Pr})y^+}{26}\right) \right] \right. \quad \dots (2.53)$$

局所平衡の仮定の式 (2.44)、式 (2.45)、ブジネスクの渦粘性及び渦拡散モデルの式 (2.48)、式 (2.49)、式 (2.50) から、乱流諸量の壁境界条件は、次式で求められる。

$$k = \sqrt{\frac{\nu_t \varepsilon}{C_\mu f_\mu}} = \sqrt{\frac{\nu_t P_k}{C_\mu f_\mu}} = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu f_\mu}} f(\nu_t) \quad \dots (2.54)$$

$$\varepsilon = P_k = \frac{u_\tau^4}{\nu_t} [f(\nu_t)]^2 \quad \dots (2.55)$$

$$k_\theta = k \frac{2\varepsilon_\theta}{\varepsilon} R = \frac{1}{2} k \frac{P_\theta}{P_k} \sqrt{f_\tau^{-1} f(R)} = k \frac{\theta_\tau^2}{u_\tau^2} Pr_t \sqrt{\frac{C_\mu f_\mu}{C_\lambda f_\lambda} f_\tau^{-1} Pr_t^{-1}} \frac{[f(\alpha_t)]^2}{[f(\nu_t)]^2} \quad \dots (2.56)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} P_\theta = \frac{u_\tau^2 \theta_\tau^2}{\alpha_t} [f(\alpha_t)]^2 = \varepsilon \frac{\theta_\tau^2}{u_\tau^2} Pr_t \frac{[f(\alpha_t)]^2}{[f(\nu_t)]^2} \quad \dots (2.57)$$

実際の計算順序としては、壁から第一節点までの距離 Δy と同節点における流速の壁平行成分 u_x 及び壁との温度差 $\Delta\theta$ から、壁関数である Reichardt の式、Kader の式によって摩擦流速 u_τ 、摩擦温度 θ_τ を算出する。摩擦流速 u_τ から壁無次元座標 y^+ が求められ、 y^+ から乱流動粘性係数 ν_t 、乱流拡散係数 α_t 、壁減衰関数 f_* 等が求められるため、 k 、 ε 、 k_θ 、 ε_θ の壁境界条件も算出できる。壁隣接要素においては、乱流諸量の分布は一定と仮定しているため、算出された壁境界条件値は壁節点と壁からの第一節点に設定される。また、壁隣接要素では、壁法線方向の剪断応力と熱流束は一定 ($\tau_w = u_\tau^2$ 、 $q_w = u_\tau \theta_\tau$) としている。

(2) 低 Re 数型乱流モデルの壁境界条件

低 Re 数型モデルでは、壁境界で厳密に成立する次式によって、乱流諸量の壁境界条件を設定

する。

$$k = 0, \quad \varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad \dots (2.58)$$

$$k_\theta = 0, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = \alpha \left(\frac{\partial \sqrt{k_\theta}}{\partial y} \right)^2 \quad \dots (2.59)$$

式 (2.58)、式 (2.59) の数値計算上の取り扱いとして、 k 、 k_θ に対して線形近似を適用すると、 ε 、 ε_θ の壁境界条件値が無限大となる不都合が発生する。そのため、SPIRAL では、壁境界条件を設定する際には、 \sqrt{k} 、 $\sqrt{k_\theta}$ に対して線形近似を適用している。すなわち、以下に示すとおりである。

$$k_w = 0, \quad \varepsilon_w = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 = 2\nu \frac{k_v}{\Delta y^2} \quad \dots (2.60)$$

$$k_{\theta w} = 0, \quad \varepsilon_{\theta w} = \alpha \left(\frac{\partial \sqrt{k_\theta}}{\partial y} \right)^2 = \alpha \frac{k_{\theta v}}{\Delta y^2} \quad \dots (2.61)$$

なお、下付き添え字の w 、 v は、それぞれ壁節点、壁からの第一節点での値を表している。

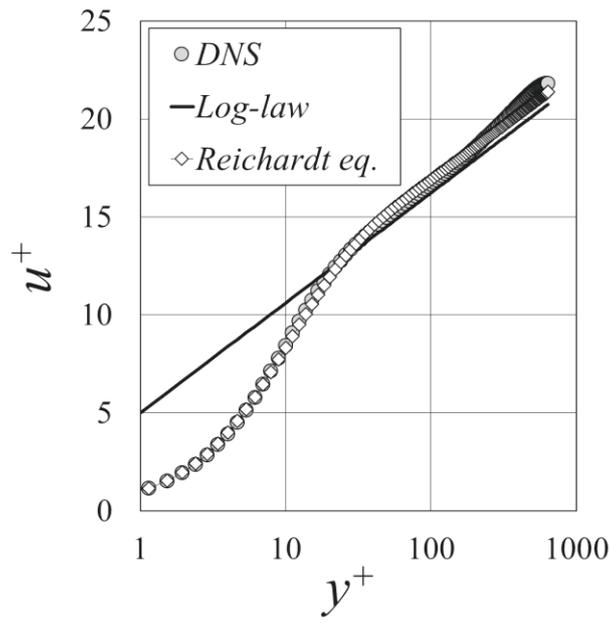


図 2.1 流速分布 (DNS, 対数則, Reichardt の式)

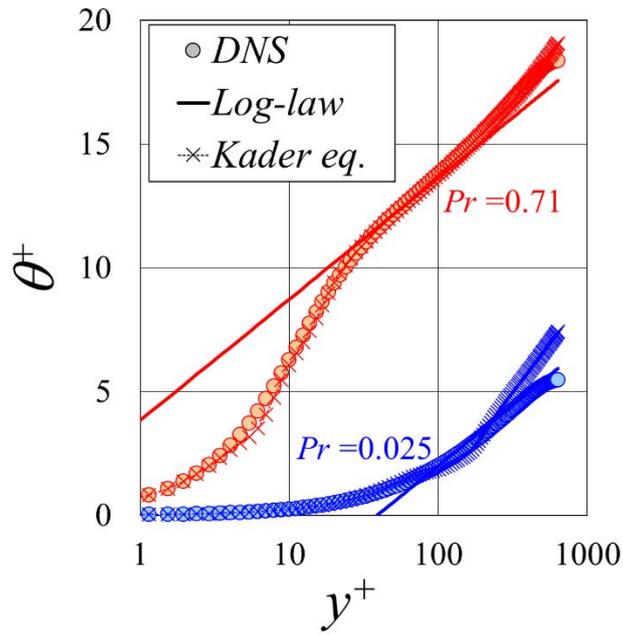


図 2.2 温度分布 (DNS, 対数則, Kader の式)

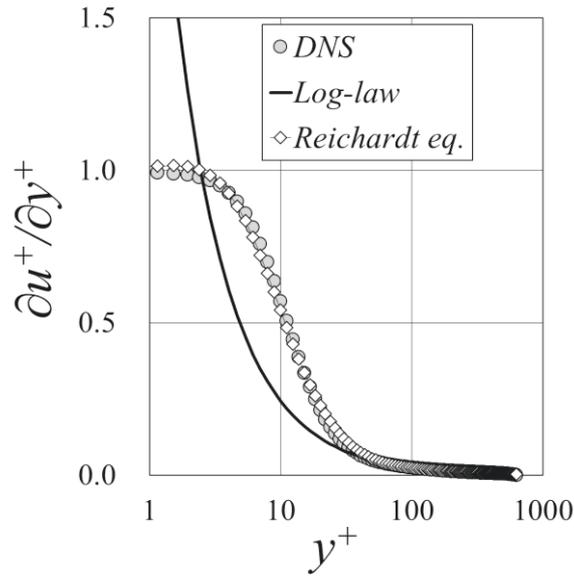
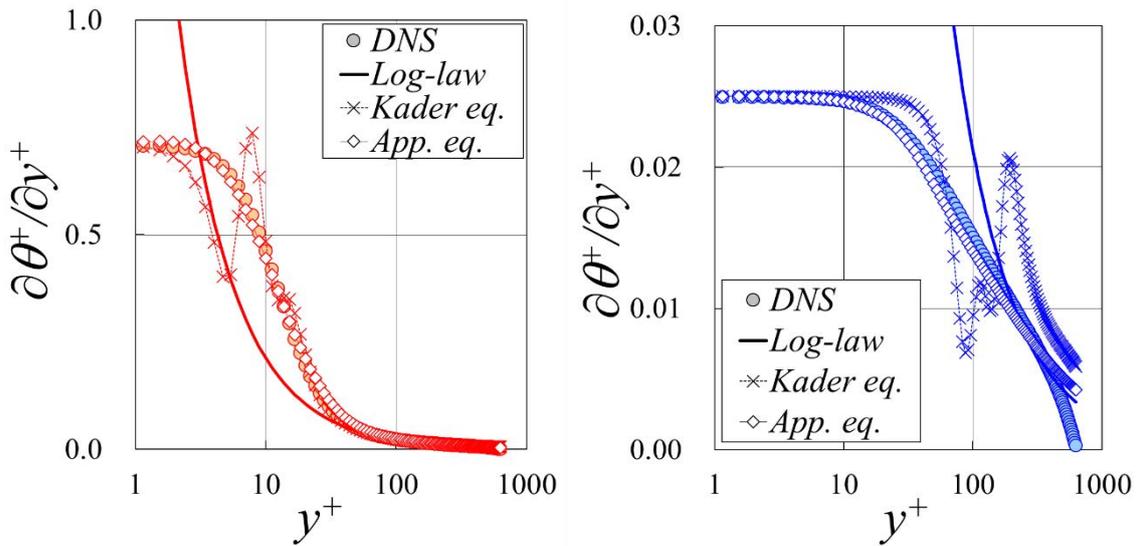


図 2.3 流速勾配分布 (DNS, 対数則, Reichardt の式)



(a) $Pr = 0.71$

(b) $Pr = 0.025$

図 2.4 温度勾配分布 (DNS, 対数則, Kader の式, 近似式)

$$App. eq. : \frac{\partial \theta^+}{\partial y^+} = \frac{q_w^+}{\alpha^+ + \alpha_t^+} = \left[\frac{1}{Pr} + \frac{v_t^+}{Pr_t} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \left\{ \frac{1}{\partial u^+ / \partial y^+} - 1 \right\} \right]^{-1}$$

$$Pr_t = 0.75 + \frac{1.63}{\ln(1 + Pr/0.0015)} \quad (Myong-Kasagi)$$

3. 数値計算法

SPIRAL では、時間積分法として、流速を陽的に、圧力を陰的に取り扱う半陰解法を採用しており、その他の物理量に関してはすべて陽的に取り扱う完全陽解法を採用している。また、空間的な離散化法としては、Galerkin 有限要素法を採用しており、数値安定性の向上のため、移流項の離散化には風上化有限要素法である SUPG 法 (Streamline upwind Petrov-Galerkin 法)²⁸⁾を、乱流解析時には散逸項を対角化する ϵ -lumping 法を利用できる。なお、巻末の付録 1 に解析要素の内挿関数及び数値積分に用いられるガウス積分点を、付録 3 にデフォルトとして実装されている物性値関数式をそれぞれ示す。

3.1 時間積分法

基礎方程式の時間積分法として、式 (2.2) の Navier-Stokes 方程式に関しては、流速を陽的、圧力を陰的に離散化する半陰解法を採用する。また、式 (2.3) の熱伝導方程式と乱流諸量の輸送方程式に関しては、Euler の完全陽解法を適用する。物性値に関しては、すべて陽的に取り扱う。したがって、以下に示すとおりである。

(1) Navier-Stokes 方程式

$$\rho^n \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \rho^n u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} = -\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \rho^n R_{ij}^n) + \rho^n g_i^n \quad \dots (3.1)$$

(2) 熱伝導方程式

$$\rho^n c_p^n \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} + \rho^n c_p^n u_j^n \frac{\partial \theta^n}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda^n \frac{\partial \theta^n}{\partial x_j} - \rho^n c_p^n R_{j\theta}^n) + Q^n \quad \dots (3.2)$$

(3) 乱流量輸送方程式

$$\frac{\chi^{n+1} - \chi^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{\partial \chi^n}{\partial x_j} = D_\chi^n + P_\chi^n + \Phi_\chi^n - E_\chi^n \quad \dots (3.3)$$

新しい時刻ステップ ($n+1$) における流速と圧力を求めるため、Ramaswamy の流速修正法²⁷⁾を採用する。流速修正法では、非圧縮性の条件を満足しない近似流速 u'_i を求め、その近似流速から二段階の時間差分によって圧力と流速を予測する。

近似流速 u'_i は、式 (3.1) の圧力勾配項をゼロとおいて定義する。

$$\rho^n \frac{u'_i - u_i^n}{\Delta t} + \rho^n u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \rho^n R_{ij}^n) + \rho^n g_i^n \quad \dots (3.4)$$

式 (3.1) と式 (3.4) の差分を取れば、新しい時刻の流速は、以下のとおりである。

$$\rho^n \frac{u_i^{n+1} - u'_i}{\Delta t} = -\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} \quad \dots (3.5)$$

式 (3.5) の発散 (divergence) から、圧力に関するポアソン方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} = \rho^n \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}, \quad \because \rho^n \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_j} = 0 \quad \dots (3.6)$$

3.2 重み付き残差方程式

本節では、前節で得られた時間積分方程式に対して、重み付き残差法を適用して、重み付き残差方程式を求める方法について記述する。

流速 u_i 、圧力 P 、温度 θ 、乱流量 χ の重み関数をそれぞれ u_i^* 、 P^* 、 θ^* 、 χ^* とする。前節の時間積分方程式にそれぞれ重み関数を乗じて領域積分すれば、次の重み付き残差方程式が得られる。なお、次式では下付き添え字 i に関して総和を取らない。

(1) 近似流速方程式

$$\begin{aligned} \int_V u_i^* \rho^n u'_i dV &= \int_V u_i^* \rho^n u_i^n dV - \Delta t \int_V u_i^* \rho^n u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} dV \\ &+ \Delta t \int_V u_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \rho^n R_{ij}^n) dV + \Delta t \int_V u_i^* \rho^n g_i^n dV \end{aligned} \quad \dots (3.7)$$

(2) 圧力ポアソン方程式

$$\int_V P^* \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} dV = \frac{1}{\Delta t} \int_V P^* \rho^n \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} dV \quad \dots (3.8)$$

(3) 修正流速方程式

$$\int_V u_i^* \rho^n u_i^{n+1} dV = \int_V u_i^* \rho^n u_i^n dV - \Delta t \int_V u_i^* \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} dV \quad \dots (3.9)$$

(4) 温度方程式

$$\begin{aligned} \int_V \theta^* \rho^n c_p^n \theta^{n+1} dV &= \int_V \theta^* \rho^n c_p^n \theta^n dV - \Delta t \int_V \theta^* \rho^n c_p^n u_j^n \frac{\partial \theta^n}{\partial x_j} dV \\ &+ \Delta t \int_V \theta^* \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda^n \frac{\partial \theta^n}{\partial x_j} - \rho^n c_p^n R_{j\theta}^n) dV + \Delta t \int_V \theta^* Q^n dV \end{aligned} \quad \dots (3.10)$$

(5) 乱流量方程式

$$\begin{aligned} \int_V \chi^* \chi^{n+1} dV &= \int_V \chi^* \chi^n dV - \Delta t \int_V \chi^* u_j^n \frac{\partial \chi^n}{\partial x_j} dV \\ &+ \Delta t \int_V \chi^* D_\chi^n dV + \Delta t \int_V \chi^* P_\chi^n dV + \Delta t \int_V \chi^* \Phi_\chi^n dV - \Delta t \int_V \chi^* E_\chi^n dV \end{aligned} \quad \dots (3.11)$$

各方程式の粘性項及び拡散項、圧力方程式の二階微分項に対しては、次のグリーンの定理を適用する。

$$\int_V u_i^* \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} dV = \int_S u_i^* \tau_{ij}^n n_j dS - \int_V \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \tau_{ij}^n dV, \quad \tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho R_{ij} \quad \dots (3.12)$$

$$\int_V P^* \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} dV = \int_S P^* \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS - \int_V \frac{\partial P^*}{\partial x_j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} dV \quad \dots (3.13)$$

$$\int_V \theta^* \frac{\partial q_j^n}{\partial x_j} dV = \int_S \theta^* q_j^n n_j dS - \int_V \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j} q_j^n dV, \quad q_j = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \rho c_p R_{j\theta} \quad \dots (3.14)$$

$$\int_V \chi^* \frac{\partial \omega_j^n}{\partial x_j} dV = \int_S \chi^* \omega_j^n n_j dS - \int_V \frac{\partial \chi^*}{\partial x_j} \omega_j^n dV \quad \dots (3.15)$$

$$\omega_j = \left(\gamma + \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x_j}, \quad (\text{等方性モデル}) \quad \dots (3.15.a)$$

$$\omega_j = \left(\gamma \delta_{jk} + C_s \frac{k}{\varepsilon} R_{jk} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x_k}, \quad (\text{非等方性モデル}) \quad \dots (3.15.b)$$

$$\gamma = \begin{cases} \nu & (\chi = k, \varepsilon, R_{ij}) \\ \alpha & (\chi = k_\theta, \varepsilon_\theta) \\ (\nu + \alpha)/2 & (\chi = R_{i\theta}) \end{cases} \quad \dots (3.15.c)$$

3.3 有限要素方程式

Galerkin 有限要素法を適用して有限要素方程式を求める場合、Galerkin 有限要素法では、各方程式の重み関数として、物理量を内挿する内挿関数 φ を利用する。流速 u_i 、圧力 P 、温度 θ 、乱流量 χ 及びそれぞれの重み関数 u_i^* 、 P^* 、 θ^* 、 χ^* は、節点 α の内挿関数と節点値の積和として次式で表される。

$$u_i = \varphi_\alpha u_{i\alpha} \quad \dots (3.16.a)$$

$$u_i^* = \varphi_\alpha u_{i\alpha}^* \quad \dots (3.16.b)$$

$$P = \varphi_\alpha P_\alpha \quad \dots (3.16.c)$$

$$P^* = \varphi_\alpha P_\alpha^* \quad \dots (3.16.d)$$

$$\theta = \varphi_\alpha \theta_\alpha \quad \dots (3.16.e)$$

$$\theta^* = \varphi_\alpha \theta_\alpha^* \quad \dots (3.16.f)$$

$$\chi = \varphi_\alpha \chi_\alpha \quad \dots (3.16.g)$$

$$\chi^* = \varphi_\alpha \chi_\alpha^* \quad \dots (3.16.h)$$

前節の重み付き残差方程式に式 (3.16) を代入すれば、次式が得られる。

(1) 近似流速方程式

$$\bar{R}_{\alpha\beta}^n \mathbf{u}'_{i\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta}^n \mathbf{u}_{i\beta}^n - \Delta t C_{i\alpha}^n + \Delta t D_{i\alpha}^n + \Delta t \Sigma_{i\alpha}^n + \Delta t G_{i\alpha}^n \quad \dots (3.17)$$

(2) 圧力ポアソン方程式

$$S_{\alpha\beta} \mathbf{P}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} K_{j\alpha\beta} \mathbf{u}'_{j\beta} + \Omega_{\alpha}^{n+1} \quad \dots (3.18)$$

(3) 修正流速方程式

$$\bar{R}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_{i\beta}^{n+1} = \bar{R}_{\alpha\beta} \mathbf{u}'_{i\beta} - \Delta t L_{i\alpha\beta} \mathbf{P}^{n+1} \quad \dots (3.19)$$

(4) 温度方程式

$$\bar{H}_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^{n+1} = \bar{H}_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^n - \Delta t C_{\theta\alpha}^n + \Delta t D_{\theta\alpha}^n + \Delta t \Sigma_{\theta\alpha}^n + \Delta t Q_{\theta\alpha}^n \quad \dots (3.20)$$

(5) 乱流量方程式

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \chi_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} \chi_{\beta}^n - \Delta t C_{\chi\alpha}^n + \Delta t D_{\chi\alpha}^n + \Delta t \Sigma_{\chi\alpha}^n + \Delta t P_{\chi\alpha}^n + \Delta t \Phi_{\chi\alpha}^n - \Delta t E_{\chi\alpha}^n \quad \dots (3.21)$$

1) 係数行列

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \sum_{\beta} R_{\alpha\beta} & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad \dots (3.22.a)$$

$$R_{\alpha\beta} = \int_V \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} \rho dV \quad \dots (3.22.b)$$

$$\bar{H}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \sum_{\beta} H_{\alpha\beta} & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad \dots (3.22.c)$$

$$H_{\alpha\beta} = \int_V \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} \rho c_p dV \quad \dots (3.22.d)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \sum_{\beta} M_{\alpha\beta} & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad \dots (3.22.e)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_V \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} dV \quad \dots (3.22.f)$$

$$K_{i\alpha\beta} = \int_V \varphi_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_i} \rho dV \quad \dots (3.22.g)$$

$$L_{i\alpha\beta} = \int_V \varphi_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_i} dV \quad \dots (3.22.h)$$

$$S_{\alpha\beta} = \int_V \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_j} dV \quad \dots (3.22.i)$$

2) 移流項

$$C_{i\alpha} = \int_V \psi_{i\alpha} \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad \dots (3.22.j)$$

$$C_{\theta\alpha} = \int_V \psi_{\theta\alpha} \rho c_p u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dV \quad \dots (3.22.k)$$

$$C_{\chi\alpha} = \int_V \psi_{\chi\alpha} u_j \frac{\partial \chi}{\partial x_j} dV \quad \dots (3.22.l)$$

3) 粘性項及び拡散項

$$D_{i\alpha} = - \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho R_{ij} \right) dV \quad \dots (3.22.m)$$

$$D_{\theta\alpha} = - \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \rho c_p R_{j\theta} \right) dV \quad \dots (3.22.o)$$

$$D_{\chi\alpha} = - \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} \left[\left(\gamma + \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right] dV, \quad (\text{等方性モデル}) \quad \dots (3.22.p)$$

$$D_{\chi\alpha} = - \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} \left[\left(\gamma \delta_{kl} + C_s \frac{k}{\varepsilon} R_{kl} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right] dV, \quad (\text{非等方性モデル}) \quad \dots (3.22.q)$$

4) 境界積分項

$$\Sigma_{i\alpha} = \int_S \varphi_\alpha \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho R_{ij} \right) n_j dS \quad \dots (3.22.r)$$

$$\Omega_\alpha = \int_S \varphi_\alpha \frac{\partial P}{\partial x_j} n_j dS \quad \dots (3.22.s)$$

$$\Sigma_{\theta\alpha} = \int_S \varphi_\alpha \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \rho c_p R_{j\theta} \right) n_j dS \quad \dots (3.22.t)$$

$$\Sigma_{\chi\alpha} = \int_S \varphi_\alpha \left[\left(\gamma + \frac{\gamma_t}{\sigma_s} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right] n_j dS, \quad (\text{等方性モデル}) \quad \dots (3.22.u)$$

$$\Sigma_{\chi\alpha} = \int_S \varphi_\alpha \left[\left(\gamma \delta_{kl} + C_s \frac{k}{\varepsilon} R_{kl} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right] n_j dS, \quad (\text{非等方性モデル}) \quad \dots (3.22.v)$$

5) 外力項及び発熱項

$$G_{i\alpha} = \int_V \varphi_\alpha \rho g_i dV \quad \dots (3.22.w)$$

$$Q_{\theta\alpha} = \int_V \varphi_\alpha Q dV \quad \dots (3.22.x)$$

6) 生成項

$$P_{\chi\alpha} = \int_V \varphi_\alpha P_\chi dV \quad \dots (3.22.y)$$

7) 圧力歪相関項及び圧力温度勾配相関項

$$\Phi_{\chi\alpha} = \int_V \varphi_\alpha \Phi_\chi dV \quad \dots (3.22.z)$$

8) 散逸項

$$E_{\chi\alpha} = \int_V \varphi_\alpha E_\chi dV \quad \dots (3.22.aa)$$

なお、計算の高速化のため、質量行列 $R_{\alpha\beta}$ 、 $H_{\alpha\beta}$ 、 $M_{\alpha\beta}$ は対角化を行い、物性値、モデル定数 C^* とモデル関数 f^* は要素内で一定と近似する。

また、移流項の重み関数 ψ_α は、中心差分に相当する Bubnov-Galerkin 法²⁹⁾では $\psi_\alpha = \varphi_\alpha$ となるが、風上差分に相当する Petrov-Galerkin 法では風上化距離 Δs によって次式で定義される。詳しくは、次の 3.4 節の風上化法 (SUPG 法) で述べる。

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha + \Delta s \times n_j \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}, \quad n_j = \frac{u_{j\alpha}}{|u_\alpha|} \quad \dots (3.23)$$

なお、式 (3.23) では、下付き添え字 α に関して総和を取らない。

3.4 風上化法 (SUPG 法)

有限差分法による高 Re 数及び高 Pe 数の解析では、移流項を中心差分で離散化すると、数値的に不安定となることが知られており、計算安定化のために移流項を風上側で評価する風上差分が利用される。

有限要素法においても、数値安定性に関して同様の特性があり、中心差分に相当する Bubnov-Galerkin 法では、数値的に不安定となることが多いため、その対策として、風上差分に相当する Petrov-Galerkin 法が提唱されている。Petrov-Galerkin 法にも様々な計算法が提唱されているが、本節では、SPIRAL で採用されている BTD 法 (Balancing Tensor Diffusivity 法)³⁰⁾及び Brooks & Hughes による SUPG 法²⁸⁾に関して述べる。

有限要素法では、基礎方程式を定式化する際に重み関数を乗じるが、その重み関数を風上側にシフトすることによって Skew 型の風上差分と同様の効果を得ることができる。すなわち、着目する節点を α 、同節点の風上化ベクトルを $\tilde{u}_{j\alpha}$ 、風上化距離を Δs とすると、風上化重み関数 ψ_α は、以下のとおりである。

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha + \Delta s \times n_j \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} \quad \dots (3.24.a)$$

$$n_j = \frac{\tilde{u}_{j\alpha}}{|\tilde{u}_\alpha|} \quad \dots (3.24.b)$$

風上化距離 Δs の定義は、BTD 法か SUPG 法かによって異なる。まず、BTD 法では、Euler 陽解法では時刻 $n\Delta t$ で評価される移流項を時刻 $(n+1/2)\Delta t$ で評価する。時刻 $\Delta t/2$ での流体の進行距離は、 $|\tilde{u}_j|\Delta t/2$ であるため、次式で表される。

(1) BTD 法

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha + \frac{|\tilde{u}_\alpha|\Delta t}{2} \frac{\tilde{u}_{j\alpha}}{|\tilde{u}_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} = \varphi_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \tilde{u}_{j\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} \quad \dots (3.25)$$

Brooks & Hughes による SUPG 法では、風上化距離 Δs をセル間距離 Δh の 1/2 とする。また、風上化最適化関数として、セルペクレ数 $Pe_{\gamma cell}$ に応じた Langevin 関数を乗じるため、差分法の部分風上差分に相当する。

(2) SUPG 法 (Brooks & Hughes)

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha + \frac{\Delta h}{2} f(Pe_{\gamma cell}) \frac{\tilde{u}_{j\alpha}}{|\tilde{u}_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}, \quad \dots (3.26)$$

$$f(Pe_{\gamma cell}) = \coth \frac{Pe_{\gamma cell}}{2} - \frac{2}{Pe_{\gamma cell}} \quad \dots (3.26.a)$$

$$Pe_{\gamma cell} = \frac{|\tilde{u}_\alpha|\Delta h}{\gamma} \quad \dots (3.26.b)$$

なお、風上化ベクトル $\tilde{u}_{j\alpha}$ としては、節点 α の流速 $u_{j\alpha}$ またはその周辺の要素で重み付け平均した流速 $\bar{u}_{j\alpha}$ を利用する。経験的には、節点 α の流速 $u_{j\alpha}$ で風上化すると、不自然な物理量のピークを伴った解が得られる場合があり、重み付け平均した流速 $\bar{u}_{j\alpha}$ で風上化すると、それが解消される場合がある。有限要素法では、節点 α の物理量はその周辺の要素の領域積分から求められるため、風上化に際しても、周辺の要素で重み付け平均した流速 $\bar{u}_{j\alpha}$ を利用するのが自然であると推論される。

$$\tilde{u}_{j\alpha} = u_{j\alpha} \quad \text{or} \quad \tilde{u}_{j\alpha} = \bar{u}_{j\alpha} = \frac{M_{\alpha\beta}}{\bar{M}} u_{j\beta}, \quad \dots (3.27)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_V \varphi_\alpha \varphi_\beta dV \quad \dots (3.27.a)$$

$$\bar{M} = \sum_\beta M_{\alpha\beta} \quad \dots (3.27.b)$$

3.5 散逸項対角化法 (ϵ -lumping 法)

燃料集合体のような管内壁乱流では、散逸率 ϵ の分布は、壁近傍の粘性底層から遷移領域に掛けて高い値となるが、その外側の対数領域で急激に減少して低い値となる傾向がある。Kawamura らの DNS 解³¹⁾ ($Re_\tau=1020$, $Re_{bulk}=41441$) を例示すると、粘性底層近傍の $y^+=5\sim 10$ では $\epsilon^+ \approx 0.15$ と

なるが、対数領域の $y^+=50, 100, 200$ ではそれぞれ $\varepsilon^+\approx 0.05, 0.02, 0.01$ と急激に減少して、外層領域では $1/10$ 未満の値となる。

そのため、壁近傍領域の要素分割が適切ではない場合、対数領域で急激に減少する ε の分布特性を考慮できず、散逸項を過大評価して乱流エネルギーが不自然な分布となる場合がある。すなわち、上述した例では、壁第一節点が $y_1^+=10$ ($\varepsilon_1^+=0.15$)、壁第二節点が $y_2^+=200$ ($\varepsilon_2^+=0.01$) とすると、 y_1^+ から y_2^+ までの区間は一次の内挿関数による線形近似が適用されるため、例えば概ね両者の中間に位置する $y^+=100$ では $\varepsilon^+\approx(\varepsilon_1^++\varepsilon_2^+)/2\approx 0.08$ となる。それゆえ、散逸率の節点値が正しくても、線形で近似される要素内の分布形状が実際とは異なるため、結果的に散逸項を過大評価することになる。

したがって、壁近傍領域の要素分割に際しては、要素解像度を詳細にする、あるいは、適切な隣接メッシュ比の要素を配置すべきであるが、燃料集合体のような複雑形状では、種々の制約から必ずしもその条件を満たす適切な要素を配置できない場合がある。そのような状況では、次の散逸項対角化法 (ε -lumping 法) を利用すると、散逸項の過大評価を回避できる。 ε -lumping 法では、散逸項の係数行列を対角化する。

式 (2.8) の乱流エネルギー輸送方程式の散逸項 $E_k=\varepsilon$ に対して Galerkin 法及び ε -lumping 法により離散化する。

(1) Galerkin 法

$$E_{k\alpha} = \int_V \varphi_\alpha \varepsilon dV = M_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \quad M_{\alpha\beta} = \int_V \varphi_\alpha \varphi_\beta dV, \quad \because \varepsilon = \varphi_\beta \varepsilon_\beta \quad \dots (3.28)$$

Galerkin 法では、節点 α の散逸項 $E_{k\alpha}$ を評価する際、その周辺の要素における ε の分布を内挿関数と節点値の積和 $\varepsilon=\varphi_\beta \cdot \varepsilon_\beta$ によって考慮する。従って、節点 α での値 ε_α のみならず、それに隣接する節点での値 ε_{neigh} が散逸項 $E_{k\alpha}$ の評価に関係する。

一方、 ε -lumping 法では、節点 α の散逸項 $E_{k\alpha}$ を評価する際、 ε_{neigh} を考慮せず、 ε_α のみで評価する。すなわち、周辺の要素では ε が一定値 ($\varepsilon=\varepsilon_\alpha$) であると仮定する。したがって、次式で表される。

(2) ε -lumping 法

$$E_{k\alpha} = \int_V \varphi_\alpha dV \times \varepsilon_\alpha = \bar{M}_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \quad \dots (3.29)$$

$$\because \bar{M}_{\alpha\beta} = \sum_\beta M_{\alpha\beta} \quad (\alpha = \beta), \quad \bar{M}_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad \dots (3.29.a)$$

なお、(3.29) 式では、下付き添え字 α に関しては総和を取らない。

ε -lumping 法の長所として、 ε が急激に変化して ε_α と ε_{neigh} が極端に異なる場合でも、散逸項を適正なレベルで評価することができる。なお、散逸項のみ対角化するのは、Galerkin 法の数学的理論からは外れるが、 ε_α は節点 α における乱流エネルギー k_α の散逸を意味しており、最終的に k_α も対角化して解くため、物理的には妥当である。

表 3.5-1 に、 $k, \varepsilon, k_\theta, \varepsilon_\theta$ の各輸送方程式に関して、Galerkin 法と ε -lumping 法による散逸項の離

散化式を示す。 ε 、 ε_θ の輸送方程式では、散逸項に乱流特性時間スケール τ_f 、 τ_t 等の逆数が掛かるが、それらに関しては生成項とのバランスを考慮して対角化しない。

3.6 マルチタイムステップ法

ナトリウム等の低プラントル数流体の解析では、流速場の Δt 値はクーラン数に、温度場の Δt 値は拡散数に制限され、結果的に両者の取り得る Δt 値がオーダー的に異なり、熱伝導のよいナトリウムの解析では、温度場による Δt 値が計算負荷を左右することがある。また、流体領域と構造材領域が存在する解析では、両者の時間スケールが異なるため、単一の Δt 値による準定常解析では、定常解を得るまでに長大な時間を要する場合がある。そのような条件の解析では、本節のマルチタイムステップ法を利用すると、非定常計算の時間進行を高速化できる。

マルチタイムステップ法は、基礎方程式を時間積分して得られる式(3.1)、式(3.2)、式(3.3)に対して、それぞれ異なる Δt 値を適用する数値計算法である。

SPIRALによる燃料集合体解析では、代表的な要素分割は、燃料ピンの周方向に対して50~100分割、燃料ピンの径方向に対して10~20分割、軸方向に対してワイヤスペーサの巻きピッチに対して50~100分割となる。他方、燃料集合体の代表的な仕様値のオーダーは、燃料ピン周長は0.01 m、流路幅は 10^{-4} ~ 10^{-3} m、ワイヤスペーサの巻きピッチは 10^{-1} mとなる。したがって、代表的な要素幅のオーダーは、燃料ピンの周方向 10^{-4} m、径方向 10^{-5} ~ 10^{-4} m、軸方向 10^{-3} mとなる。また、定格条件の燃料集合体では、主流方向流速は 10^0 ~ 10^1 m/s、水平方向流速は 10^{-1} ~ 10^0 m/sのオーダーとなる。作動流体をナトリウム(動粘性係数 $\nu \approx 3.0 \times 10^{-7}$ m²/s、熱拡散係数 $\alpha \approx 6.5 \times 10^{-5}$ m²/s)として、クーラン数 $c < 1$ 、拡散数 $d < 1/2$ によって制限される Δt 値のオーダーを算出すると、表3.6-1のようにまとめられる。流速場の Δt 値はクーラン数に、温度場の Δt 値は拡散数に制限される。また、流速場の Δt 値に対して、温度場の Δt 値は1/10程度とする必要がある。

SPIRALにおいて、半陰解法で離散化される流速場の計算には、圧力ポアソン方程式の反復計算が必要となるため、多大の計算時間を要する。しかし、完全陽解法で離散化される温度場の計算は、反復計算を必要とせず、比較的短時間で終了する。そのため、流速場と温度場に対して異なる Δt 値を適用するマルチタイムステップ法を利用し、流速場と温度場の Δt 値をそれぞれ $\Delta t_f (=10^{-5}$ s)、 $\Delta t_t (=10^{-6}$ s)とした上で、流速場1回に対して温度場 $\Delta t_f/\Delta t_t (=10)$ 回の割合で計算を実行すれば、両者の時間的な連成を齟齬させることなく、時間進行の計算を高速化できる。

SPIRALでマルチタイムステップ法を利用する場合、基準となる Δt 値に加えて、流速場と温度場に対する加速係数 A_f 、 A_t 、それぞれの非定常計算を実行する頻度 N_f 、 N_t を指定する。流速場と温度場に対する Δt 値は、それぞれ次式で算出される。

$$\Delta t_f = A_f N_f \Delta t \quad \dots (3.34)$$

$$\Delta t_t = A_t N_t \Delta t \quad \dots (3.35)$$

- Δt : 基準となる Δt 値[s]
- Δt_f : 流速場に対する Δt 値[s]
- Δt_t : 温度場に対する Δt 値[s]
- A_f : 流速場に対する Δt 値の加速係数[-]
- A_t : 温度場に対する Δt 値の加速係数[-]
- N_f : 流速場の非定常計算を実行する頻度[-] ($N_f \geq 1$)
- N_t : 温度場の非定常計算を実行する頻度[-] ($N_t \geq 1$)

したがって、 $\Delta t_f=10^{-5}$ s、 $\Delta t_t=10^{-6}$ s とした上で、流速場 1 回に対して温度場 $\Delta t_f/\Delta t_t$ (=10) 回の割合で計算を実行する場合、 $\Delta t=10^{-6}$ s、 $A_f=1.0$ 、 $A_t=1.0$ 、 $N_f=10$ 、 $N_t=1$ と指定する。

また、流体領域と構造材領域が混在する伝熱流動現象の解析では、構造材温度が変化すると、流体温度も変化することになるが、一般に構造材の熱容量は流体の熱容量に比べて数倍以上となるため、その時間的な温度変化率は流体領域に比べて緩慢である。そのため、非定常の過程を重要としない準定常解析では、構造材領域の属する節点の Δt 値を大きくして、同領域の温度変化率を加速させると、定常解を得るまでの時間を短縮できる。

温度等のスカラー量輸送方程式は、それぞれの節点で独立に解かれるため、すべての節点で輸送方程式が定常となった場合、すなわち、スカラー量 θ の時間変化 $\partial\theta/\partial t = \Delta\theta/\Delta t = 0$ となった場合、各節点の Δt 値が均一でも、不均一でも、得られる結果は同等となる。そのため、SPIRAL では、クーラン数と拡散数の上限値を指定して、各節点の Δt 値を細かく設定することも可能である。すなわち、クーラン数と拡散数の上限値を c_n 、 d_n とすると、流速場と温度場に対する節点 α の Δt 値は、それぞれ次式で算出される。

$$\Delta t_{fa} = \min(\Delta t_{fn}, \Delta t_{ca}, \Delta t_{va}), \quad \dots (3.36)$$

$$\Delta t_{ta} = \min(\Delta t_{tn}, \Delta t_{ca}, \Delta t_{da}), \quad \dots (3.37)$$

$$c_n = \frac{|u_\alpha| \Delta t_{ca}}{\Delta h_\alpha}, \quad d_n = \frac{v \Delta t_{va}}{\Delta h_\alpha^2}, \quad d_n = \frac{\alpha \Delta t_{da}}{\Delta h_\alpha^2} \quad \dots (3.37.a)$$

- Δt_{fa} : 流速場に対する節点 α の Δt 値[s]
- Δt_{ta} : 温度場に対する節点 α の Δt 値[s]
- Δt_{fn} : 流速場に対する最大 Δt 値[s] ($\Delta t_{fn} = A_f N_f \Delta t$)
- Δt_{tn} : 温度場に対する最大 Δt 値[s] ($\Delta t_{tn} = A_t N_t \Delta t$)
- Δt_{ca} : クーラン数に制限される節点 α の Δt 値[s]
- Δt_{va} : 流速場の拡散数に制限される節点 α の Δt 値[s]
- Δt_{da} : 温度場の拡散数に制限される節点 α の Δt 値[s]
- $|u_\alpha|$: 節点 α の絶対流速[m/s]
- Δh_α : 節点 α の最小要素幅[m]

3.7 種々の制約条件

方程式系の離散化スキームによっては、数値振動の影響によって非物理的な物理量の分布が得られる場合がある。本節では、温度の数値振動を避けるための局所有界性を考慮した補正処理と、乱流解析の数値不安定性を避けるための補正処理に関して述べる。

3.7.1 温度に関する局所有界性

任意の節点 α の温度を θ_α とし、それに隣接する各節点の温度を θ_{neigh} とする。節点 α における温度のソース項がゼロであるとすれば、温度の局所有界性から次式が成立する。

$$\min[\theta_{neigh}] \leq \theta_\alpha \leq \max[\theta_{neigh}] \quad \dots (3.38)$$

したがって、式 (3.20) の温度方程式から求められる新しい時刻ステップ ($n+1$) の温度に対して、前時刻ステップ n の温度分布から求められる温度の上限値及び下限値を制約条件として課すことによって、温度のオーバーシュート及びアンダーシュートを回避できる。なお、発熱流束条件を与えられた境界に属する節点または発熱密度条件を与えられた要素に属する節点においては、局所有界性は考慮しない。

3.7.2 乱流量に関する補正処理

SPIRAL での乱流解析においては、数値誤差の影響によって k 、 ε 、 k_θ 、 ε_θ 等の乱流量が非物理的な負値となる場合がある。また、乱流特性時間スケール τ_f 、 τ_t が極端な値になると、数値不安定となる場合がある。そのため、乱流諸量に関してそれぞれ基準を設定して、補正を実行する。

(1) k の補正法

節点 α における k 値が非物理的な負値となった場合は、それに隣接する各節点の k 値 k_{neigh} の最小値を設定する。

$$k_\alpha = \min(k_{neigh}), \quad (\text{if } k_\alpha < 0) \quad \dots (3.39)$$

(2) ε の補正法

ε 値に関しては、数値安定性を維持するため、流速場の乱流特性時間スケール $\tau_f = k/\varepsilon$ が極端な値にならないように補正基準を設定する。

まず、 $\tau_f \ll 1$ 、すなわち、 $\varepsilon \gg k$ となると、式 (2.9) の ε 輸送方程式の生成項 P_ε 、拡散項 D_ε 、散逸項 E_ε が $(1/\tau_f)$ に比例するため、それらの項の収支が ε の時間変化に過剰な影響を与えて数値不安定に陥り易い。そのため、 ε 値を補正して数値不安定を回避するが、本法では式 (2.8) の k 輸送方程式から補正基準を設定する。式 (2.8) の最も極端なケースとして、移流項 C_k 、拡散項 D_k 、生成項 P_k がいずれもゼロと仮定すると、 $\partial k / \partial t = -\varepsilon$ が得られ、Euler 陽解法で離散化して、 $k^{n+1} = k^n - \varepsilon^n \Delta t$ が得られる。さらに、 $k^{n+1} \geq 0$ の制約を考慮して得られる条件 $\varepsilon \leq k/\Delta t$ を ε の上限値として設定する。

次に、 $\tau_f \gg 1$ 、すなわち、 $\varepsilon \ll k$ となると、式 (2.6) のブジネスク渦粘性モデルから乱流動粘性係数 $\nu_t = C_\mu f_\mu f_{MMK} k \tau_f$ が増大するため、過度の拡散によって運動量保存式または k - ε 輸送方程式が数値不安定に陥り易い。そのため、拡散安定条件 $d = \nu_t \Delta t / \Delta h^2 \leq 1/2$ を考慮して得られる条件 $\varepsilon \geq 2C_\mu k^2 \Delta t / \Delta h^2$ を ε の下限値として設定する。ただし、計算簡略化のため、 $f_\mu = f_{MMK} = 1$ とした。また、セル間距離 Δh に関して、節点 α の Δh_α はそれに隣接する節点までの距離 Δh_{neigh} の最大値 $\max[\Delta h_{neigh}]$ と定義する。

補正後の ε 値としては、補正する節点 α における乱流特性時間スケール $\tau_{f\alpha} = k_\alpha / \varepsilon_\alpha$ が周辺領域と同等となるような値を設定する。また、補正後の ε 値が補正基準となる上限値から下限値の範囲にない場合は、その上限値または下限値を補正後の ε 値として再設定する。

$$\varepsilon_\alpha = \min(\max(\varepsilon_{\text{mod}}, \varepsilon_{\text{min}}), \varepsilon_{\text{max}}), \quad (\text{if } \varepsilon_\alpha < \varepsilon_{\text{min}} \text{ or } \varepsilon_{\text{max}} < \varepsilon_\alpha) \quad \dots (3.40)$$

$$\varepsilon_{\text{mod}} = k_\alpha \frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{\bar{k}_\alpha} \quad (\because \tau_{f\alpha} = \bar{\tau}_f, \quad \frac{\varepsilon_\alpha}{k_\alpha} = \frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{\bar{k}_\alpha}) \quad \dots (3.40.a)$$

$$\varepsilon_{\text{min}} = 2C_\mu k_\alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta h_\alpha^2} \quad \dots (3.40.b)$$

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{k_\alpha}{\Delta t} \quad \dots (3.40.c)$$

$$\bar{k}_\alpha = \frac{M_{\alpha\beta}}{\bar{M}} k_\beta \quad \dots (3.40.d)$$

$$\bar{\varepsilon}_\alpha = \frac{M_{\alpha\beta}}{\bar{M}} \varepsilon_\beta \quad \dots (3.40.e)$$

$$\bar{M} = \sum_\beta M_{\alpha\beta} \quad \dots (3.40.f)$$

なお、式 (3.40) では、下付き添え字 α に関して総和を取らない。 β に関しては総和を取る。

(3) k_θ の補正法

節点 α における k_θ 値が非物理的な負値となった場合は、それに隣接する各節点の k_θ 値 $k_{\theta neigh}$ の最小値を設定する。

$$k_{\theta\alpha} = \min(k_{\theta neigh}), \quad (\text{if } k_{\theta\alpha} < 0) \quad \dots (3.41)$$

(4) ε_θ の補正法

ε_θ 値に関しては、温度場の乱流特性時間スケール $\tau_t = k_\theta / \varepsilon_\theta$ を指標として、 ε 値と同様の手順から補正基準を設定する。すなわち、 $\tau_t \ll 1$ による数値不安定性を避けるため、式 (2.10) の k_θ 輸送方程式に散逸項以外をゼロとする仮定を適用して得られる条件 $\varepsilon_\theta \leq k_\theta / 2\Delta t$ を ε_θ の上限値として設定する。また、 $\tau_t \gg 1$ による数値不安定性を避けるため、式 (2.7) のブジネスク渦拡散モデ

ルを拡散安定条件 $d = \alpha_t \Delta t / \Delta h^2 \leq 1/2$ に代入して得られる条件 $\varepsilon_\theta \geq 2C_\lambda k_\alpha k_{\theta\alpha} \Delta t / \Delta h^2$ を ε_θ の下限値として設定する。ただし、計算簡略化のため、 $f_\lambda = f_{MMK} = 1$ 、 $m = 1$ とした。

補正後の ε_θ 値に関しても、温度場の乱流特性時間スケール $\tau_t = k_\theta / \varepsilon_\theta$ を指標として、 ε 値と同様の手順から設定する。また、補正後の ε_θ 値が補正基準となる上限値から下限値の範囲にない場合は、その上限値または下限値を補正後の ε_θ 値として再設定する。

$$\varepsilon_{\theta\alpha} = \min(\max(\varepsilon_{\theta\text{mod}}, \varepsilon_{\theta\text{min}}), \varepsilon_{\theta\text{max}}), \quad (\text{if } \varepsilon_{\theta\alpha} < \varepsilon_{\theta\text{min}} \text{ or } \varepsilon_{\theta\text{max}} < \varepsilon_{\theta\alpha}) \quad \dots (3.42)$$

$$\varepsilon_{\theta\text{mod}} = k_{\theta\alpha} \frac{\bar{\varepsilon}_{\theta\alpha}}{\bar{k}_{\theta\alpha}} \quad (\because \tau_{t\alpha} = \bar{\tau}_t, \quad \frac{\varepsilon_{\theta\alpha}}{k_{\theta\alpha}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\theta\alpha}}{\bar{k}_{\theta\alpha}}) \quad \dots (3.42.a)$$

$$\varepsilon_{\theta\text{min}} = 2C_\lambda k_\alpha k_{\theta\alpha} \frac{\Delta t}{\Delta h_\alpha^2} \quad \dots (3.42.b)$$

$$\varepsilon_{\theta\text{max}} = \frac{k_{\theta\alpha}}{2\Delta t} \quad \dots (3.42.c)$$

$$\bar{k}_{\theta\alpha} = \frac{M_{\alpha\beta}}{\bar{M}} k_{\theta\beta} \quad \dots (3.42.d)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta\alpha} = \frac{M_{\alpha\beta}}{\bar{M}} \varepsilon_{\theta\beta} \quad \dots (3.42.e)$$

$$\bar{M} = \sum_{\beta} M_{\alpha\beta} \quad \dots (3.42.f)$$

なお、式 (3.42) では、下付き添え字 α に関して総和を取らない。 β に関しては総和を取る。

(5) R_{ij} の補正法

R_{ij} 値に関して、対角成分 R_{xx} 、 R_{yy} 、 R_{zz} が非物理的な負値となった場合は、ゼロを設定する。

$$R_{xx\alpha} = 0, \quad (\text{if } R_{xx\alpha} < 0), \quad \dots (3.43.a)$$

$$R_{yy\alpha} = 0, \quad (\text{if } R_{yy\alpha} < 0), \quad \dots (3.43.b)$$

$$R_{zz\alpha} = 0, \quad (\text{if } R_{zz\alpha} < 0) \quad \dots (3.43.c)$$

非対角成分 R_{xy} 、 R_{xz} 、 R_{yz} に関しては、その定義から $-(R_{xx}R_{yy})^{1/2} \leq R_{xy} \leq (R_{xx}R_{yy})^{1/2}$ 等の制約条件が成立するが、式 (3.43) の補正から対角成分がゼロになると、関連する非対角成分もゼロになるため、数値不安定に陥り易い。そのため、制約条件を緩和した次式を補正基準として設定する。

$$R_{xy\alpha} = \min(\max(R_{xy\alpha}, R_{ij\text{min}}), R_{ij\text{max}}), \quad \dots (3.44.a)$$

$$R_{xz\alpha} = \min(\max(R_{xz\alpha}, R_{ij\text{min}}), R_{ij\text{max}}), \quad \dots (3.44.b)$$

$$R_{yz\alpha} = \min(\max(R_{yz\alpha}, R_{ij\min}), R_{ij\max}), \quad \dots (3.44.c)$$

$$R_{ij\min} = -k_{\alpha} \quad \dots (3.44.d)$$

$$R_{ij\max} = k_{\alpha} \quad \dots (3.44.e)$$

(6) $R_{i\theta}$ の補正法

$R_{x\theta}$ 、 $R_{y\theta}$ 、 $R_{z\theta}$ に関しても、 R_{ij} の非対角成分と同様の手順から補正基準を設定する。なお、次式では、下付き添え字 α に関して総和を取らない。

$$R_{x\theta\alpha} = \min(\max(R_{x\theta\alpha}, R_{i\theta\min}), R_{i\theta\max}), \quad \dots (3.45.a)$$

$$R_{y\theta\alpha} = \min(\max(R_{y\theta\alpha}, R_{i\theta\min}), R_{i\theta\max}), \quad \dots (3.45.b)$$

$$R_{z\theta\alpha} = \min(\max(R_{z\theta\alpha}, R_{i\theta\min}), R_{i\theta\max}), \quad \dots (3.45.c)$$

$$R_{i\theta\min} = -\sqrt{k_{\alpha} k_{\theta\alpha}} \quad \dots (3.45.d)$$

$$R_{i\theta\max} = \sqrt{k_{\alpha} k_{\theta\alpha}} \quad \dots (3.45.e)$$

以上で述べた乱流量の補正処理を表 3.7.2-1 にまとめて示す。

表 3.5-1 散逸項の離散化式

1) Galerkin 法		2) ϵ -lumping 法	
$E_{k\alpha} = \int_V \varphi_\alpha \epsilon dV$... (3.30.a)	$E_{k\alpha} = \int_V \varphi_\alpha dV \times \epsilon_\alpha$... (3.30.b)
$E_{\alpha\alpha} = \int_V \varphi_\alpha C_{\epsilon 2} f_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{k} \epsilon dV$... (3.31.a)	$E_{\alpha\alpha} = \int_V \varphi_\alpha C_{\epsilon 2} f_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{k} dV \times \epsilon_\alpha$... (3.31.b)
$E_{k_{\theta\alpha}} = \int_V \varphi_\alpha (2\epsilon_\theta) dV$... (3.32.a)	$E_{k_{\theta\alpha}} = \int_V \varphi_\alpha dV \times 2\epsilon_{\theta\alpha}$... (3.32.b)
$E_{\epsilon_{\theta\alpha}} = \int_V \varphi_\alpha C_{D1} f_{D1} \frac{\epsilon_\theta}{k_\theta} \epsilon_\theta dV$ $+ \int_V \varphi_\alpha C_{D2} f_{D2} \frac{\epsilon_\theta}{k} \epsilon dV$... (3.33.a)	$E_{\epsilon_{\theta\alpha}} = \int_V \varphi_\alpha C_{D1} f_{D1} \frac{\epsilon_\theta}{k_\theta} dV \times \epsilon_{\theta\alpha}$ $+ \int_V \varphi_\alpha C_{D2} f_{D2} \frac{\epsilon_\theta}{k} dV \times \epsilon_\alpha$... (3.33.b)

表 3.6-1 クーラン数及び拡散数によって制限される Δt 値のオーダー

		燃料ピン周方向	燃料ピン径方向	燃料ピン軸方向
代表要素幅[m]	Δx_i	10^{-4} m	$10^{-5} \sim 10^{-4}$ m	10^{-3} m
代表流速[m/s]	u_i	$10^{-1} \sim 10^0$ m/s	$10^{-1} \sim 10^0$ m/s	$10^0 \sim 10^1$ m/s
クーラン数 c に制限 される Δt 値[s]	Δt_c	$10^{-4} \sim 10^{-3}$ s	$10^{-5} \sim 10^{-3}$ s	$10^{-4} \sim 10^{-3}$ s
流速場の拡散数 d_v に 制限される Δt 値[s]	Δt_v	10^{-2} s	10^{-4} s	10^0 s
温度場の拡散数 d_α に 制限される Δt 値[s]	Δt_α	10^{-4} s	10^{-6} s	10^{-2} s

$$c = \frac{u_{i-ref} \Delta t_c}{\Delta x_i}, \quad d_v = \frac{v \Delta t_v}{\Delta x_i^2}, \quad d_\alpha = \frac{\alpha \Delta t_\alpha}{\Delta x_i^2}$$

表 3.7.2-1 乱流量に関する補正処理

乱流量	補正後の値	補正の基準	備考
乱流エネルギー k	$k_a = k_{\text{mod}}$	$k_a < 0$	$k_{\text{mod}} = \min(k_{\text{neigh}})$
乱流エネルギー散逸率 ε	$\varepsilon_a = \min(\max(\varepsilon_{\text{mod}}, \varepsilon_{\text{min}}), \varepsilon_{\text{max}})$	$\varepsilon_a < \varepsilon_{\text{min}}$ or $\varepsilon_{\text{max}} < \varepsilon_a$	$\varepsilon_{\text{mod}} = k_a \frac{\bar{\varepsilon}_a}{k_a}, \varepsilon_{\text{min}} = 2C_\mu k_a^2 \frac{\Delta t}{\Delta h_a^2}, \varepsilon_{\text{max}} = \frac{k_a}{\Delta t}$
温度バリエアンス k_θ	$k_{\theta a} = k_{\theta \text{mod}}$	$k_{\theta a} < 0$	$k_{\theta \text{mod}} = \min(k_{\theta \text{neigh}})$
温度バリエアンス散逸率 ε_θ	$\varepsilon_{\theta a} = \min(\max(\varepsilon_{\theta \text{mod}}, \varepsilon_{\theta \text{min}}), \varepsilon_{\theta \text{max}})$	$\varepsilon_{\theta a} < \varepsilon_{\theta \text{min}}$ or $\varepsilon_{\theta \text{max}} < \varepsilon_{\theta a}$	$\varepsilon_{\theta \text{mod}} = k_{\theta a} \frac{\bar{\varepsilon}_{\theta a}}{k_{\theta a}}, \varepsilon_{\theta \text{min}} = 2C_\lambda k_a k_{\theta a} \frac{\Delta t}{\Delta h_a^2}, \varepsilon_{\theta \text{max}} = \frac{k_{\theta a}}{2\Delta t}$
レイノルズ応力 R_{ij} 対角成分 ($i=j$)	$R_{ij a} = 0$	$R_{ij a} < 0$	
レイノルズ応力 R_{ij} 非対角成分 ($i \neq j$)	$R_{ij a} = \min(\max(R_{ij a}, R_{ij \text{min}}), R_{ij \text{max}})$	$R_{ij a} < R_{ij \text{min}}$ or $R_{ij \text{max}} < R_{ij a}$	$R_{ij \text{min}} = -k_a, R_{ij \text{max}} = k_a$
乱流熱流束 $R_{i\theta}$	$R_{i\theta a} = \min(\max(R_{i\theta a}, R_{i\theta \text{min}}), R_{i\theta \text{max}})$	$R_{i\theta a} < R_{i\theta \text{min}}$ or $R_{i\theta \text{max}} < R_{i\theta a}$	$R_{i\theta \text{min}} = -\sqrt{k_a k_{\theta a}}, R_{i\theta \text{max}} = \sqrt{k_a k_{\theta a}}$

$$\bar{k}_a = \frac{M_{a\beta}}{M} k_\beta, \quad \bar{\varepsilon}_a = \frac{M_{a\beta}}{M} \varepsilon_\beta, \quad \bar{k}_{\theta a} = \frac{M_{a\beta}}{M} k_{\theta\beta}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta a} = \frac{M_{a\beta}}{M} \varepsilon_{\theta\beta}, \quad \bar{M} = \sum_\beta M_{a\beta}$$

a, β : 節点番号、*neigh*: 節点 a に隣接する節点

4. 境界条件

有限要素法では、境界条件の種類として、ディリクレ型の基本境界条件とノイマン型の自然境界条件の2種類がある。基本境界条件は、境界上の節点に対して直接的に物理量の値を与える境界条件であり、自然境界条件は、領域の境界に対して物理量の勾配を与える境界条件である。また、SPIRALでは、同形状の断面が周期的に現れる領域の解析において、周期境界条件を利用できる。さらに、流入流出境界、対称境界等では、境界条件をより厳密に取り扱うため、SPIRALの独自の処理が工夫されている。

4.1 基本境界条件（ディリクレ型境界条件）

有限要素法における基本境界条件とは、境界上の節点に対して直接的に物理量の値を与えるディリクレ型の境界条件である。

4.1.1 流速の基本境界条件

流速の基本境界条件は、式(3.19)の修正流速方程式から新しい時刻ステップ($n+1$)の流速を求めた後、境界条件を与える節点の流速を指定された境界条件値に更新することで反映される。記号「 \leftarrow 」を右辺から左辺への代入と定義する。また、下付き添え字 γ は基本境界条件を与える接点を表す。

$$u_{i\gamma}^{n+1} \leftarrow u_{i(bc)}^{n+1} \quad \dots (4.1)$$

座標軸に対して平行でも垂直でもない境界に対しては、局所座標系の流速を η_i とし、境界の法線方向 \mathbf{n} とそれに直交する接線方向 \mathbf{t}, \mathbf{s} からなる局所座標系の流速に当該節点の流速を変換した上で境界条件値を設定する。

$$\eta_{i\gamma}^{n+1} = J_{ij} u_{j\gamma}^{n+1}, \quad \eta_{i\gamma}^{n+1} \leftarrow \eta_{i(bc)}^{n+1}, \quad u_{i\gamma}^{n+1} = J_{ij}^{-1} \eta_{j\gamma}^{n+1} \quad \dots (4.2)$$

4.1.2 圧力の基本境界条件

圧力の基本境界条件は、圧力方程式 $S_{\alpha\beta} P_{\beta}^{n+1} = R_{\alpha}$ に対して、式(3.18)の圧力ポアソン方程式の係数行列と右辺値を操作することによって、同方程式の解が境界条件を満たすように設定する。

$$S_{\gamma\beta} \leftarrow \begin{cases} 1 & (\gamma = \beta) \\ 0 & (\gamma \neq \beta) \end{cases}, \quad R_{\gamma} \leftarrow P_{(bc)}^{n+1} \quad \dots (4.3)$$

4.1.3 温度の基本境界条件

温度 θ の基本境界条件は、式(3.20)の温度方程式から新しい時刻ステップ($n+1$)の温度を求

めた後、境界条件を与える節点の温度を指定された境界条件値に更新することで反映される。

$$\theta_{\gamma}^{n+1} \leftarrow \theta_{(bc)}^{n+1} \quad \dots (4.4)$$

4.1.4 乱流量の基本境界条件

乱流量 χ の基本境界条件も、温度と同様にして取り扱うことができる。

$$\chi_{\gamma}^{n+1} \leftarrow \chi_{(bc)}^{n+1} \quad \dots (4.5)$$

なお、応力方程式モデル／乱流熱流束方程式モデルにおいて、レイノルズ応力 R_{ij} ／乱流熱流束 $R_{i\theta}$ の基本境界条件を与える場合は、流速と同様の座標変換が必要となる。

$$\Xi_{ij\gamma}^{n+1} = J_{im} R_{mn\gamma}^{n+1} J_{jn} \quad \dots (4.6.a)$$

$$\Xi_{ij\gamma}^{n+1} \leftarrow \Xi_{ij(bc)}^{n+1} \quad \dots (4.6.b)$$

$$R_{ij\gamma}^{n+1} = J_{im}^{-1} \Xi_{mn\gamma}^{n+1} J_{jn}^{-1} \quad \dots (4.6.c)$$

$$\Xi_{i\theta\gamma}^{n+1} = J_{ij} R_{j\theta\gamma}^{n+1} \quad \dots (4.7.a)$$

$$\Xi_{i\theta\gamma}^{n+1} \leftarrow \Xi_{i\theta(bc)}^{n+1} \quad \dots (4.7.b)$$

$$R_{i\theta\gamma}^{n+1} = J_{ij}^{-1} \Xi_{j\theta\gamma}^{n+1} \quad \dots (4.7.c)$$

4.2 自然境界条件（ノイマン型境界条件）

有限要素法における自然境界条件とは、領域の境界に対して物理量の勾配、すなわち、応力、圧力勾配、熱流束等を与えるノイマン型の境界条件である。自然境界条件を与えない場合、境界における物理量の勾配にはゼロが与えられる。

4.2.1 流速の自然境界条件

流速の自然境界条件は、式 (3.17) の近似流速方程式に現れる応力の境界積分項 $\Sigma_{i\alpha}$ に対して、指定された境界条件値を被積分関数に代入する。

$$\Sigma_{i\alpha}^n = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho R_{ij} \right)^n n_j dS \leftarrow \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \tau_{ij(bc)}^n n_j dS \quad \dots (4.8)$$

4.2.2 圧力の自然境界条件

圧力の自然境界条件は、式 (3.18) の圧力ポアソン方程式に現れる圧力勾配の境界積分項 Ω_{α} に対して、指定された境界条件値を被積分関数に代入する。

$$\Omega_{\alpha}^{n+1} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \leftarrow \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} P_{,n(bc)}^{n+1} dS \quad \dots (4.9)$$

なお、詳しくは本節の最後に述べるが、圧力勾配の境界積分項は、修正流速の境界積分項に変換すると取り扱いが容易となる。

4.2.3 温度の自然境界条件

温度の自然境界条件は、式 (3.20) の温度方程式に現れる熱流束の境界積分項 $\Sigma_{\theta\alpha}$ に対して、指定された境界条件値を被積分関数に代入する。

$$\Sigma_{\theta\alpha}^n = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \rho c_p R_{j\theta} \right)^n n_j dS \leftarrow \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} q_{n(bc)}^n dS \quad \dots (4.10)$$

4.2.4 乱流量の自然境界条件

乱流量の自然境界条件は、式 (3.21) の乱流量方程式に現れる乱流量の勾配の境界積分項 $\Sigma_{\chi\alpha}$ に対して、指定された境界条件値を被積分関数に代入する。

$$\Sigma_{\chi\alpha}^n = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \chi_{,j}^n n_j dS \leftarrow \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \chi_{,n(bc)}^n dS \quad \dots (4.11)$$

圧力の自然境界条件に関して、数値計算上での正確な取り扱いを期するためには、要素間境界を除くすべての境界上での圧力勾配を境界条件として与えなければならない。現実的には、すべての境界上での圧力勾配を事前に定めることは困難であるため、通常では、近似的に $\partial p / \partial n = 0$ とする境界条件を設定する。しかしながら、実現象の上では、壁境界等の境界上での圧力勾配はゼロとはならず、したがって、質量保存条件を満たすための圧力ポアソン方程式に誤差が混入することとなる。

そのため、以下では、それらの境界条件を正確に取り扱うため、圧力勾配型の境界条件項を流速積分型の境界条件項に変換する計算法に関して述べる。

有限要素法によって離散化された圧力ポアソン方程式を以下に再掲する。

$$S_{\alpha\beta} P_{\beta}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \int_V \varphi_{\alpha} \rho \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} dV + \int_S \varphi_{\alpha} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \dots (4.12)$$

右辺第一項の近似流速に関する発散 (divergence) 項に対して、グリーンの定理を適用すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 S_{\alpha\beta}P_{\beta}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \int_V \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_j} \rho u'_j dV - \frac{1}{\Delta t} \int_S \varphi_{\alpha} \rho u'_j n_j dS + \int_S \varphi_{\alpha} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \int_V \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_j} \rho u'_j dV - \frac{1}{\Delta t} \int_S \varphi_{\alpha} (\rho u'_j - \Delta t \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j}) n_j dS
 \end{aligned} \quad \dots (4.13)$$

右辺第二項の境界積分項は、修正流速方程式から次式に書き換えられる。

$$S_{\alpha\beta}P_{\beta}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_V \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_j} \rho u'_j dV - \frac{1}{\Delta t} \int_S \varphi_{\alpha} \rho u_j^{n+1} n_j dS \quad \dots (4.14)$$

式 (3.18) に倣い、圧力ポアソン方程式を行列表示すれば、以下のように記述される。

$$S_{\alpha\beta}P_{\beta}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} K_{j\beta\alpha} u'_{j\beta} + \frac{1}{\Delta t} \Pi_{\alpha}^{n+1} \quad \dots (4.15)$$

$$K_{i\beta\alpha} = \int_V \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_i} \varphi_{\alpha} \rho dV \quad \dots (4.15.a)$$

$$\Pi_{\alpha} = \int_S \varphi_{\alpha} \rho u_j n_j dS \quad \dots (4.15.b)$$

式 (4.15) の境界積分項は、境界法線方向の流速の積分であり、したがって、解析領域に対する流入流出を意味している。そのため、壁境界では必然的にゼロとなり、結局は、出入口境界でのみ計算すれば良いこととなる。

なお、式上で求められる流速は、新しい時刻ステップ ($n+1$) における未知の流速であるが、定常計算においては、または、過渡計算においても Δt が微小であるとすれば、 $\Pi_{\alpha}^{n+1} = \Pi_{\alpha}^n$ との近似が成立するため、前時刻ステップ n における既知の流速の積分で代用できる。

圧力勾配型の境界条件との比較では、壁境界における境界積分が必要ないため、流速積分型の境界条件が有利である。また、出入口境界においても、微分量であるため定義が難しい圧力勾配ではなく、取り扱いの容易な流速が被積分関数であるので、やはり流速積分型の境界条件が有利である。

4.3 周期境界条件

燃料集合体のように同形状の断面が周期的に現れる領域の解析では、計算コストを低減させるため、周期境界条件を利用できる。

SPiRAL では、周期境界条件は陽的に取り扱われる。すなわち、周期境界条件を与える境界面を $\Gamma(bc)$ 、それに対応する同形状の周期的な境界面を $\Gamma(org)$ として、 $\Gamma(bc)$ 、 $\Gamma(org)$ 上の対応する節点をそれぞれ $\gamma(bc)$ 、 $\gamma(org)$ とすると、任意の物理量 X に関する周期境界条件は、次式で表される。

$$X_{\gamma(bc)}^{n+1} \leftarrow X_{\gamma(org)}^n \quad \dots (4.16)$$

式 (4.16) は、 $\gamma(org)$ における境界値の時間的な変化が急激である場合、数値不安定に陥り易いデメリットがある。そのため、緩和係数 α を導入して、 $\gamma(bc)$ と $\gamma(org)$ の物理量の値を重み付き平均することで数値安定性を向上させる。すなわち、式 (4.16) は次式に書き換えられる。

$$X_{\gamma(bc)}^{n+1} \leftarrow (1-\alpha)X_{\gamma(bc)}^n + \alpha X_{\gamma(org)}^n \quad \dots (4.17)$$

緩和係数 α の値はユーザが設定するが、効果のある設定範囲は $0 < \alpha \leq 1$ である。SPIRAL による準定常解析では、定常解を得るまでに最低でも 10^3 オーダーの計算ステップは必要となるため、かなり小さい値 ($\alpha=0.1\sim 0.01$ またはそれ以下) を設定しても問題はない。

次に、周期境界条件の取り扱いに際して、各物理量特有の処理に関して述べる。周期境界条件を利用する場合でも、流入境界において流速、温度、乱流量の、流出境界において圧力の境界条件を与えるのが最も基本的な設定である。また、境界条件値を設定する際に参照される境界面 $\Gamma(org)$ としては、境界条件の影響で数値的に不安定な流入流出境界ではなく、それらの影響を余り受けない内部境界を設定するのが望ましい。なお、本節における添え字(mod)は補正された物理量を示す。

4.3.1 流速の周期境界条件

流速の周期境界条件を与える場合は、 $\Gamma(bc)$ の通過流量を厳密に一定値に維持するため、 $\Gamma(bc)$ 、 $\Gamma(org)$ の通過流量比率 $F_{\Gamma(bc)}/F_{\Gamma(org)}$ によって流速の境界値を補正する。すなわち、境界の法線方向を \mathbf{n} とすれば、次式で表される。

$$u_{iy(bc)}^{n+1} \leftarrow (1-\alpha)u_{iy(bc)}^n + \alpha u_{iy(mod)}^n \quad \dots (4.18)$$

$$u_{iy(mod)}^n = \frac{F_{\Gamma(bc)}}{F_{\Gamma(org)}} u_{iy(org)}^n \quad \dots (4.18.a)$$

$$F_{\Gamma(bc)} = \int_{\Gamma(bc)} u_j^n n_j dS \quad \dots (4.18.b)$$

$$F_{\Gamma(org)} = \int_{\Gamma(org)} u_j^n n_j dS \quad \dots (4.18.c)$$

4.3.2 圧力の周期境界条件

圧力の周期境界条件を与える場合は、 $\Gamma(bc)$ 、 $\Gamma(org)$ の平均圧力の差 $P_{\Gamma(bc)}-P_{\Gamma(org)}$ を考慮して、次式で周期境界条件を与える。

$$P_{\gamma(bc)}^{n+1} \leftarrow (1-\alpha)P_{\gamma(bc)}^n + \alpha P_{\gamma(mod)}^n \quad \dots (4.19)$$

$$P_{\gamma(mod)}^n = P_{\gamma(org)}^n + (P_{\Gamma(bc)} - P_{\Gamma(org)}) \quad \dots (4.19.a)$$

$$P_{\Gamma(bc)} = \int_{\Gamma(bc)} PdS \quad \dots (4.19.b)$$

$$P_{\Gamma(org)} = \int_{\Gamma(org)} PdS \quad \dots (4.19.c)$$

4.3.3 温度の周期境界条件

温度の周期境界条件を与える場合も、 $\Gamma(bc)$ 、 $\Gamma(org)$ の平均温度の差 $\theta_{\Gamma(bc)} - \theta_{\Gamma(org)}$ を考慮して、次式で周期境界条件を与える。

$$\theta_{\gamma(bc)}^{n+1} \leftarrow (1-\alpha)\theta_{\gamma(bc)}^n + \alpha\theta_{\gamma(mod)}^n \quad \dots (4.20)$$

$$\theta_{\gamma(mod)}^n = \theta_{\gamma(org)}^n + (\theta_{\Gamma(bc)} - \theta_{\Gamma(org)}) \quad \dots (4.20.a)$$

$$\theta_{\Gamma(bc)} = \int_{\Gamma(bc)} \theta dS \quad \dots (4.20.b)$$

$$\theta_{\Gamma(org)} = \int_{\Gamma(org)} \theta dS \quad \dots (4.20.c)$$

4.3.4 乱流量の周期境界条件

乱流量 χ の周期境界条件を与える場合は、式 (4.17) をそのまま流用する。

$$\chi_{\gamma(bc)}^{n+1} \leftarrow (1-\alpha)\chi_{\gamma(bc)}^n + \alpha\chi_{\gamma(org)}^n \quad \dots (4.21)$$

4.4 粘性項及び拡散項の厳密な境界条件

有限要素法では、4.2節で述べたとおり、自然境界条件を与えない境界では物理量の勾配にゼロが与えられる。勾配をゼロとする境界条件は、自由流出境界等では物理的に妥当であり、煩雑な手続きをせずに妥当な境界条件が設定できるのは有限要素法のメリットのひとつである。しかしながら、境界条件をより厳密に取り扱うためには、物理量の勾配だけではなく、勾配の勾配である二階微分項にも注意を払う必要がある。本節では、それらの境界条件の取り扱いに関して述べる。

4.4.1 流入流出境界条件

境界 Γ の法線方向を \mathbf{n} 、接線方向を \mathbf{t} とする。最も分かり易い例として、自由流出境界を想定すれば、境界法線方向に対する流速の勾配はゼロとなり、さらに、応力の勾配もゼロとなる。すなわち、次式で表される。

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{nn}}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{tt}}{\partial x_n} = 0 \quad \dots (4.22)$$

一方、境界 Γ 上にある節点 α において、Navier-Stokes 方程式の粘性項を有限要素法で離散化すると、式 (3.17) から引用して、次式が得られる。

$$\begin{aligned} D_{n\alpha} &= \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{nn}}{\partial x_n} dV + \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial x_t} dV \\ &= -\int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} \tau_{nn} dV - \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_t} \tau_{nt} dV + \int_\Gamma \varphi_\alpha \tau_{nn} dS \end{aligned} \quad \dots (4.23.a)$$

$$\begin{aligned} D_{t\alpha} &= \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{tn}}{\partial x_n} dV + \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{tt}}{\partial x_t} dV \\ &= -\int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} \tau_{tn} dV - \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_t} \tau_{tt} dV + \int_\Gamma \varphi_\alpha \tau_{tn} dS \end{aligned} \quad \dots (4.23.b)$$

境界 Γ に対して自然境界条件を与えない場合、式 (4.23) の右辺第三項はゼロとなり、したがって、境界上での応力 τ_{nn} 、 τ_{tn} にゼロを与えるのと等しい。しかし、式 (4.22) によれば、ゼロを与えるべきは応力 τ_{nn} 、 τ_{tn} ではなく、境界法線方向に対する応力の勾配 $(\partial \tau_{nn}/\partial x_n)$ 、 $(\partial \tau_{tn}/\partial x_n)$ である。そこで、 $\partial \tau_{nn}/\partial x_n=0$ 、 $\partial \tau_{tn}/\partial x_n=0$ を仮定すると、式 (4.23) は、次式に書き換えられる筈である。

$$D_{n\alpha} = \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{nn}}{\partial x_n} dV + \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial x_t} dV = -\int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_t} \tau_{nt} dV \quad \dots (4.24.a)$$

$$D_{t\alpha} = \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{tn}}{\partial x_n} dV + \int_V \varphi_\alpha \frac{\partial \tau_{tt}}{\partial x_t} dV = -\int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_t} \tau_{tt} dV \quad \dots (4.24.b)$$

従って、式 (4.23) と式 (4.24) の比較から、応力の境界積分項 Σ_{ny} 、 Σ_{ty} に対しては、結果的に次の境界条件値を与えるのと等しい。

$$\Sigma_{n\alpha} = \int_\Gamma \varphi_\alpha \tau_{nn} dS \leftarrow \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} \tau_{nn} dV \quad \dots (4.25.a)$$

$$\Sigma_{t\alpha} = \int_\Gamma \varphi_\alpha \tau_{tn} dS \leftarrow \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} \tau_{tn} dV \quad \dots (4.25.b)$$

自由流出境界では、温度に関しても、熱流束 q_n の勾配をゼロとする境界条件を与えるのが適切である。また、乱流量に関しても、同様の取り扱いをする。なお、 χ_n は乱流量勾配を示す。

$$\Sigma_{\theta\alpha} = \int_\Gamma \varphi_\alpha q_n dS \leftarrow \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} q_n dV \quad \dots (4.26)$$

$$\Sigma_{\chi\alpha} = \int_\Gamma \varphi_\alpha \chi_n dS \leftarrow \int_V \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n} \chi_n dV \quad \dots (4.27)$$

式 (4.25)、式 (4.26)、式 (4.27) の境界条件値は、流況によって時々刻々変化するため、数値

解析を実行する前に適切な値を設定することは困難である。そのため、SPIRAL では、ユーザはそれらの境界条件を与える境界を指定するだけで良く、境界条件値の設定は SPIRAL が数値解析の実行中に自動で処理するようになっている。なお、式 (4.25)、式 (4.26)、式 (4.27) の境界条件は、流出境界の他に流入境界に対しても適用が可能である。

4.4.2 対称境界条件

次に、対称境界における適切な境界条件の取り扱いを検討する。境界 Γ 上での境界法線方向座標を $x_n=0$ とすると、境界 Γ の両側における物理量の分布には、次の関係が成立する。

$$u_n(-x_n, x_t) = -u_n(x_n, x_t) \quad \dots (4.28.a)$$

$$u_t(-x_n, x_t) = u_t(x_n, x_t) \quad \dots (4.28.b)$$

$$\theta(-x_n, x_t) = \theta(x_n, x_t) \quad \dots (4.28.c)$$

$$\chi(-x_n, x_t) = \chi(x_n, x_t) \quad \dots (4.28.d)$$

すなわち、境界法線方向流速 u_n のみは奇関数分布となり、その他はすべて偶関数分布となる。従って、それぞれの x_n 方向微分から得られる応力、熱流束等の分布は、次式で表される。

$$\tau_{nn}(-x_n, x_t) = \tau_{nn}(x_n, x_t) \quad \dots (4.29.a)$$

$$\tau_{in}(-x_n, x_t) = -\tau_{in}(x_n, x_t) \quad \dots (4.29.b)$$

$$q_n(-x_n, x_t) = -q_n(x_n, x_t) \quad \dots (4.29.c)$$

$$\chi_{,n}(-x_n, x_t) = -\chi_{,n}(x_n, x_t) \quad \dots (4.29.d)$$

式 (4.29) から対称境界に対する境界条件として、次式が得られる。

$$\Sigma_{n\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \tau_{nn} dS \leftarrow \int_V \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_n} \tau_{nn} dV \quad \dots (4.30.a)$$

$$\Sigma_{i\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \tau_{in} dS \leftarrow 0 \quad \dots (4.30.b)$$

$$\Sigma_{\theta\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} q_n dS \leftarrow 0 \quad \dots (4.31)$$

$$\Sigma_{\chi\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \chi_{,n} dS \leftarrow 0 \quad \dots (4.32)$$

4.4.3 壁境界条件

最後に、壁境界における適切な境界条件の取り扱いを検討する。流速に対して仮想セルの概念

を適用して、温度と乱流量に対して流体側と構造材側で値が変わらないと仮定すれば、境界 $\Gamma(x_n=0)$ の両側における物理量の分布は、次式で表される。

$$u_n(-x_n, x_t) = -u_n(x_n, x_t) \quad \dots (4.33.a)$$

$$u_t(-x_n, x_t) = -u_t(x_n, x_t) \quad \dots (4.33.b)$$

$$\theta(-x_n, x_t) = \theta(x_n, x_t) \quad \dots (4.33.c)$$

$$\chi(-x_n, x_t) = \chi(x_n, x_t) \quad \dots (4.33.d)$$

従って、それぞれの x_n 方向微分から得られる応力、熱流束等の分布は、次式で表される。

$$\tau_{nn}(-x_n, x_t) = \tau_{nn}(x_n, x_t) \quad \dots (4.34.a)$$

$$\tau_{tn}(-x_n, x_t) = \tau_{tn}(x_n, x_t) \quad \dots (4.34.b)$$

$$q_n(-x_n, x_t) = -q_n(x_n, x_t) \quad \dots (4.34.c)$$

$$\chi_{,n}(-x_n, x_t) = -\chi_{,n}(x_n, x_t) \quad \dots (4.34.d)$$

式 (4.34) から壁境界に対する境界条件として、次式が得られる。

$$\Sigma_{n\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \tau_{nn} dS \leftarrow \int_V \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_n} \tau_{nn} dV \quad \dots (4.35.a)$$

$$\Sigma_{t\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \tau_{tn} dS \leftarrow \int_V \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_n} \tau_{tn} dV \quad \dots (4.35.b)$$

$$\Sigma_{\theta\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} q_n dS \leftarrow 0 \quad \dots (4.36)$$

$$\Sigma_{\chi\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \chi_{,n} dS \leftarrow 0 \quad \dots (4.37)$$

式 (4.35)、式 (4.36)、式 (4.37) が壁境界に対する境界条件であるが、壁境界においては、流速に対しては Non-Slip 条件としてゼロ値が与えられ、また、乱流量に対しては 2.2.4 項の壁境界条件が与えられる。そのため、実質的には壁近傍の圧力分布に若干影響する程度である。また、温度に関しても、結局は断熱条件を与えているだけである。なお、式 (4.10) の温度の自然境界条件が与えられた壁境界では、当然ながら、断熱条件ではなく熱流束境界条件が適用される。

5. 検証及び妥当性確認解析

SPIRAL では、燃料の健全性評価を開発の主目的としており、そのためには燃料被覆管の最高温度を予測することが必要となる。そのため、SPIRAL の検証及び妥当性確認解析の選定に際しては、表 5-1 に示すとおり、まず被覆管最高温度の評価に関係する種々の燃料集合体内熱流動特性を考慮して、さらに、挙げられた熱流動特性に対して影響を及ぼす物理的な要因を抽出した上で、それぞれの影響因子に対する検証及び妥当性確認解析を設定した。

Verification & Validation (V&V) の規格基準³²⁾によれば、解析コードの V&V は、数学モデル（支配方程式）を離散化して計算した結果が正しいことを確認する検証（Verification）と、実現象に対する概念モデルの妥当性を確認する妥当性確認（Fundamental validation 及び Validation）に分類できる。本研究では下記項目の(1), (2), (3)を検証（Code verification）、(4), (5), (6)を基本的妥当性確認（Fundamental validation）と位置付けており、それらの解析では良好な解析結果が得られている。また、妥当性確認（Validation）と位置付けている(7), (8), (9)でも、概ね良い精度の解析結果が得られているが、試験条件あるいは測定項目によっては、試験と解析が必ずしも良好に一致しない結果もある。それらに関しては、解析モデルに起因する誤差の他に、試験計測に起因する誤差も考慮する必要があるため、以後、さらに多くの試験の再現解析を実施して妥当性確認の実績を積み上げることで解析コードの信頼性を高める必要がある。

【検証（Verification）】（5.1 節参照）

- (1) 二次元スカラー輸送解析（5.1.1 項参照）
- (2) 強制キャビティーフロー解析（5.1.2 項参照）
- (3) サーマルキャビティーフロー解析（5.1.3 項参照）

【基本的妥当性確認（Fundamental validation）】（5.2 節参照）

- (4) 層流ステップフロー解析（5.2.1 項参照）
- (5) 乱流ステップフロー解析（5.2.2 項参照）
- (6) 平行平板間乱流熱伝達解析（5.2.3 項参照）

【妥当性確認（Validation）】（5.3 節参照）

- (7) 4 本ロッドバンドル試験解析（5.3.1 項参照）
- (8) 実規模スケール集合体解析（5.3.2 項参照）
- (9) ナトリウム試験集合体解析（PLANDTL 試験解析）（5.3.3 項参照）

5.1 検証解析

5.1.1 二次元スカラー輸送解析

本解析では、熱伝導方程式の検証に加えて、同方程式における移流項の風上化法に関して、その予測特性の把握を目的としている。

二次元スカラー輸送解析では、領域全域の流速が既知であり、移流と拡散のみによって熱が輸送される。そのため、熱伝導方程式の離散化法の検証としては最適である。本解析では、移流項の風上化法として Bubnov-Galerkin 法（中心差分に相当）、BTD 法または Brooks & Hughes の SUPG 法（Skew 型部分風上差分に相当）による解析を実施して、それぞれ Schonauer による基準解³³⁾との比較を実施した。

(1) 解析条件

解析領域： $2L \times L$ 、 $L=1$ （2次元解析）

要素分割：20 分割×10 分割

流速条件： $u=2y(1-x^2)$ 、 $v=-2x(1-y^2)$ 、全節点で固定

温度条件： $\theta=1+\tanh[\omega(2x+1)]$ （入口境界）、 $\theta=1-\tanh\omega \approx 0$ （周辺境界）、 $\omega=10$

ペクレ数： $Pe \equiv u_{mean}L/\alpha=10, 10^6$

風上化法：Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または SUPG 法（Brooks & Hughes）

図 5.1.1-1 に解析条件を示す。解析領域は $2L \times L$ の矩形領域であり、要素分割は 20×10 均等分割とした。境界条件は、流速に関しては領域全域において $u=2y(1-x^2)$ 、 $v=-2x(1-y^2)$ として、温度に関しては入口境界において $\theta=1+\tanh[\omega(2x+1)]$ 、周辺境界において $\theta=0$ とした。ペクレ数は $Pe=10, 10^6$ であり、風上化法として Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または Brooks & Hughes による SUPG 法を用いて解析を実施した。

(2) 解析結果

図 5.1.1-2、図 5.1.1-3 に $Pe=10, 10^6$ の条件における出口境界の温度分布を示す。解析の結果は、移流よりも拡散が支配的となる低 Pe 数条件 ($Pe=10$) では、数値拡散の影響はほとんど現れず、各離散化法の結果は極めて良く一致している。一方、拡散よりも移流が支配的となる高 Pe 数条件 ($Pe=10^6$) では、特に SUPG 法の結果において数値拡散の影響は顕著であり、局所的に ($x=0.3, 0.7$ において) オーバーシュート及びアンダーシュートが発生しているが、輸送スカラー量の局所有界性を考慮することによって解消されている。

5.1.2 強制キャビティフロー解析

本解析では、流動解析機能の検証に加えて、Navier-Stokes 方程式における移流項の風上化法に関して、その予測特性の把握を目的としている。なお、比較の対象として、Ghia による解析解³⁴⁾

を採用した。

(1) 解析条件

解析領域： $L \times L$ 、 $L=1$ （2次元解析）

要素分割：20分割 \times 20分割、40分割 \times 40分割

流速条件： $u=u_w=1$ 、 $v=0$ （移動壁境界）、 $u=v=0$ （固定壁境界）

レイノルズ数： $Re=u_w L/\nu=10^2, 10^3$

風上化法：Bubnov-Galerkin法、BTD法またはSUPG法（Brooks & Hughes）

図 5.1.2-1 に解析条件を示す。解析領域は $L \times L$ の矩形領域であり、要素分割は 20×20 均等分割または 40×40 均等分割とした。境界条件は、解析領域の天井面を移動壁として水平方向流速 $u=1$ を与え、他の境界は固定壁として $u=v=0$ を与えた。なお、移動壁と固定壁の双方の境界に属する節点では、固定壁の条件を優先させている。レイノルズ数は $Re=10^2, 10^3$ であり、風上化法として Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または Brooks & Hughes による SUPG 法を用いて解析を実施した。

なお、本解析では、非構造格子による解析機能の検証として、四角錐要素（Pyramid 要素）、三角錐要素（Tetra 要素）による解析もそれぞれ実施した。

(2) 解析結果

図 5.1.2-2 及び図 5.1.2-3 に $Re=10^2, 10^3$ の条件における水平方向及び鉛直方向中心線上の流速分布を示す。 $Re=10^2$ の条件では、各離散化法の結果は極めて良く一致しており、Ghia の解析解とも良好な一致を示している。一方、 $Re=10^3$ の条件では、Bubnov-Galerkin 法及び BTD 法の結果に比べて、SUPG 法の結果は数値拡散の影響によって循環流速を過小に評価する傾向が現れている。また、要素分割を詳細にすることによって、各離散化法とも予測精度が向上していることが確認できる。

図 5.1.2-4 に Hexa、Pyramid 及び Tetra 要素による $Re=10^3$ の条件における水平方向及び鉛直方向中心線上の流速分布を示す。非構造格子による計算では、Pyramid 及び Tetra 要素の結果は、構造格子である Hexa 要素の結果と概ね良く一致しており、したがって、それらの格子による解析機能に不具合はないものと推論できる。

5.1.3 サーマルキャビティフロー解析

本解析では、流動と伝熱が相互に作用する自然対流現象における評価精度の確認を目的としている。

サーマルキャビティフローでは、流体の温度差に起因する浮力の発生によって、流速場と温度場が相互に変化するため、流動伝熱連成解析の検証としては最適であると思われる。本解析で

は、基礎方程式の離散化法に Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または Brooks & Hughes による SUPG 法を用いて、それぞれ基準解との比較を実施した。なお、比較の対象として、Vahl Davis の解析解³⁵⁾を採用した。

(1) 解析条件

解析領域： $L \times L$ (2次元解析)

要素分割：20 分割 \times 20 分割、40 分割 \times 40 分割

流速条件： $u=v=0$ (すべての壁境界)

温度条件： $\theta=\theta_1$ (高温壁境界)、 $\theta=\theta_2$ (低温壁境界)、 $d\theta/dn=0$ (断熱壁境界)

プラントル数： $Pr=\nu/\alpha=0.71$

レイリー数： $Ra=\beta g(\theta_1-\theta_2)L^3/\nu\alpha=10^3, 10^6$

風上化法： $\text{Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または SUPG 法 (Brooks \& Hughes)}$

図 5.1.3-1 に解析条件を示す。解析領域は $L \times L$ の矩形領域であり、要素分割は 20×20 均等分割または 40×40 均等分割とした。境界条件は、高温壁において $\theta=\theta_1$ 、低温壁において $\theta=\theta_2$ として、断熱壁では $d\theta/dn=0$ とした。また、すべての壁に対して流速の Non-Slip 条件を適用した。プラントル数は $Pr=0.71$ 、レイリー数は $Ra=10^3, 10^6$ であり、Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または Brooks & Hughes による SUPG 法を用いて解析を実施した。

比較を行う評価項目は、次式で定義される無次元数である。

無次元座標： $X=x/L, Y=y/L$

無次元流速： $U=uL/a, V=vL/a$

無次元温度： $\Theta=(\theta-\theta_1)/(\theta_1-\theta_2)$

ヌセルト数： $Nu=\Theta_{(X=\Delta X)}/\Delta X, \Delta X=1/20, 1/40$

(2) 解析結果

図 5.1.3-2 及び図 5.1.3-3 に $Ra=10^3, 10^6$ における水平方向最大無次元流速 U_{max} 、鉛直方向最大無次元流速 V_{max} 並びに最大、最小及び平均 Nu 数 (Nu_{max} 、 Nu_{min} 及び Nu_{mean}) を示す。浮力の発生によって、高温壁 ($X=0.0$) で温められた流体は上昇し、低温壁 ($X=1.0$) で冷やされた冷却は下降することにより、時計回りの流れが生じる。SPIRAL の結果は、低 Ra 数条件では基準解と良好に一致しているが、高 Ra 数条件では必ずしも予測精度が良くない。その理由としては、要素解像度が十分でないため、図 5.1.3-3(a)に示したように、高 Ra 数条件では高温壁及び低温壁の近傍で急激に変化する流速の分布を必ずしも良好に再現できないことが挙げられる。実際、図 5.1.3-4 に示すとおり、 $Ra=10^6$ 条件では要素分割を 20×20 分割から 40×40 分割にすると、予測精度がかなり改善される結果となる。

Bubnov-Galerkin 法、BTD 法及び SUPG 法の比較では、前項の強制キャビティフローに比べ

て明確な差は現れていない。鉛直方向最大流速 v_{max} から定義した Re 数 ($Re=v_{max}L/\nu=V_{max}/Pr$) で評価すると、 $Ra=10^3$ では $Re=5$ 、 $Ra=10^6$ では $Re=350$ 程度であり、自然対流現象では移流項の影響が相対的に低いため、各離散化法の結果に顕著な差が現れなかったものと推測される。

5.2 基本的妥当性確認

5.2.1 層流ステップフロー解析

本解析では、工学的に重要となる流れに頻出する剥離及び再付着を伴う流れの再現性を確認することを目的としている。

ステップフローでは、流路が拡大するステップ部の下流領域において、主流から剥離する再循環流が形成される。本解析では、種々の Re 数条件における主流の再付着点位置及びステップ下流領域における流速分布の評価を実施した。なお、比較の対象としては、Denham らによる実験結果³⁶⁾を採用した。

(1) 解析条件

解析領域：流路長 $h \times$ 流路幅 $2h$ (ステップ上流側)

流路長 $16h \times$ 流路幅 $3h$ (ステップ下流側)、 $h=1$

要素分割：1 分割 \times 16 分割 (ステップ上流側)

16 分割 \times 24 分割 (ステップ下流側)

境界条件： $u=u_{in}(y)$, $v=0$ (入口境界)、 $P=0$ (出口境界)、 $u=v=0$ (壁境界)

レイノルズ数： $Re=u_{in}h/\nu=73, 125, 191, 229$

風上化法：Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または SUPG 法 (Brooks & Hughes)

図 5.2.1-1 に解析条件を示す。解析領域は、ステップ幅 h に対して、入口幅 $2h$ 、出口幅 $3h$ 、ステップ上流側流路長 h 、ステップ下流側流路長 $16h$ の領域であり、要素分割は、 $(\Delta x, \Delta y) = (h, h/8)$ の要素による均等分割とした。境界条件は、入口境界では図 5.2.1-1 に示す流速分布を与えて、出口境界では圧力を一定とした。また、壁境界に対しては Non-Slip 条件を適用した。レイノルズ数は $Re=73, 125, 191, 229$ であり、風上化法としては Bubnov-Galerkin 法、BTD 法または Brooks & Hughes による SUPG 法を用いて解析を実施した。

(2) 解析結果

図 5.2.1-2 に各 Re 数条件における主流の再付着点位置と $Re=229$ の条件における流速の分布を示す。なお、 $Re \geq 125$ の条件では、Bubnov-Galerkin 法及び BTD 法による計算は数値振動が発生して収束解が得られなかったため、SUPG 法の結果のみを示している。従って、計算安定性に関しては、SUPG 法が最良であると結論できる。

主流の再付着点位置に関しては、実験結果との整合性は必ずしも高くないが、併せて示した

有限差分法コード AQUA^{37),38)}とは同程度の値が予測されており、本解析で利用した要素の解像度では、ある程度の予測精度の劣化は見込まれると思われる。また、 $Re=229$ の条件における流速分布の比較では、実験と解析は概ね一致しており、剥離及び再付着を伴う流れに対する SPIRAL の再現性は良好であると結論できる。

5.2.2 乱流ステップフロー解析

本解析では、流速場乱流モデルの基本的な妥当性確認に加えて、各種乱流モデルによる予測特性の把握を目的としている。

乱流ステップフローでは、ステップ後方領域において、主流から剥離した再循環流が形成されるが、本解析では、ステップ後方領域における流速の分布、乱流諸量の挙動に関して実験との比較を実施した。なお、比較の対象としては、Kasagi らの実験³⁹⁾を採用した。

(1) 解析条件

解析領域：流路長 $4h$ ×流路幅 $2h$ (ステップ上流側)

流路長 $25h$ ×流路幅 $3h$ (ステップ下流側)、 $h=0.041$ m

要素分割：4~32 分割×16~32 分割 (ステップ上流側)

25~200 分割×24~48 分割 (ステップ下流側)

境界条件： $u=u_{in}(y)$, $v=v_{in}(y) \approx 0$, $k=k_{in}(y)$, $\varepsilon=\varepsilon_{in}(y)$ (入口境界)

$P=0$ (出口境界)、 $u=v=0$, wall function (壁境界)

レイノルズ数： $Re=uc h/\nu=5540$ 、 $uc=0.1297$ m/s、 $\nu=10^{-6}$ m²/s

乱流モデル：標準型、Hybrid 型もしくは RNG 型 k- ε モデル、または代数応力モデル

風上化法：SUPG 法 (Brooks & Hughes)

図 5.2.2-1 に解析条件を示す。解析領域は、ステップ幅 h に対して、入口幅 $2h$ 、出口幅 $3h$ 、ステップ前方距離 $4h$ 、ステップ後方距離 $25h$ の領域であり、要素分割は、 $\Delta x=h/2$ 、 $\Delta y=h/16$ の要素による均等分割とした。なお、 y 方向の要素幅 Δy を u_c 、 ν から無次元壁座標に換算すると、 $\Delta y=h/8$ では $\Delta y^+=50$ 、 $\Delta y=h/16$ では $\Delta y^+=25$ 程度となる。境界条件は、入口境界では流速、乱流エネルギーを実験と一致させ、出口境界では圧力を一定とした。また、壁境界に対しては Non-Slip 条件を課した上で壁関数を適用した。レイノルズ数は $Re=5540$ であり、各種乱流モデルによる解析を実施した。

(2) 解析結果

表 5.2.2-1 に各条件における主流の再付着点位置を示す。主流の再付着点位置は、実験が $x_r=6.51h$ であるのに対して、標準型 k- ε モデルでは $x_r=5.0h \sim 5.8h$ 程度、Hybrid 型 k- ε モデルでは $x_r=5.4h \sim 6.2h$ 程度、RNG 型 k- ε モデルでは $x_r=6.5h \sim 7.2h$ 程度、代数応力モデル (非平衡壁関数)

では $x_r=5.7h\sim 6.5h$ 程度である。また、図 5.2.2-2 に、代表して $\Delta x=h/2$ 、 $\Delta y=h/2$ で要素分割したケースの解析結果から、流速 u, v と乱流エネルギー k の分布を示す。

各モデルの結果を比較すると、標準型 $k-\varepsilon$ モデルの結果は、再循環領域において k をやや過大に評価しており、また、 $x=2h\sim 3h$ における剥離流の $-y$ 方向の流速を過大に評価しているため、再付着点位置が最も上流側に現れている。対して、RNG 型 $k-\varepsilon$ モデルの結果は、再循環領域において k を過小に評価しており、再付着点位置は最も下流側に現れている。また、Hybrid 型 $k-\varepsilon$ モデルの結果は、標準型 $k-\varepsilon$ モデルの結果と比べて顕著な差はないが、再循環領域における流速分布の予測精度が僅かに向上しているため、最付着点位置に若干の改善効果が現れている。一方、代数応力モデルの結果は、 k の予測精度が最も高く、流速分布の再現性も良好である。代数応力モデルは、 R_{ij} の非等方性が考慮されているため k の生成を正確に計算できる長所があり、結果として、乱流エネルギーや流速に関しても高精度な予測が可能となっている。

5.2.3 平行平板間乱流熱伝達解析

本解析では、流速場乱流モデルの基本的な妥当性確認に加えて、種々の Pr 数流体に対する温度場乱流モデルの適用性を確認することを目的としている。

平行平板間乱流熱伝達では、主流が完全に発達した領域において、Navier-Stokes 方程式の移流項はゼロとなり、熱伝導方程式の移流項は一定値となる。そのため、レイノルズ応力、乱流熱流束を含む粘性項及び拡散項の妥当性確認としては最適である。

(1) 解析条件

解析領域：流路長 20δ ×流路幅 δ

要素分割：20 均等分割×8 不均等分割

出入口境界：周期境界条件

壁境界：Non-Slip 条件、一様加熱流束条件、壁関数 (Reichardt eq., Kader eq.)

流路中心境界：Free-Slip 条件

レイノルズ数： $Re_{bulk}=u_{mean}(2\delta)/\nu=5731, 24428$ 、 $Re_\tau=u_\tau\delta/\nu=180, 640$

プラントル数： $Pr=\nu/a=0.71, 0.025$

乱流モデル：標準型、Hybrid 型または低 Re 数型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデル
代数応力/熱流束モデル (ASM/AFM)

風上化法：SUPG 法 (Brooks & Hughes)

図 5.2.3-1 に解析条件を示す。解析領域は流路長 20δ ×流路幅 δ の矩形領域であり、要素分割は等間隔 20 分割×不等間隔 8 分割とした。壁隣接要素幅は $\Delta y=\delta/16$ であり、無次元壁座標に換算すると $\Delta y^+=Re_\tau/16=10\sim 40$ となる。境界条件に関しては、出入口境界は周期境界条件、流路中心境界は Free-Slip 条件、壁境界は Non-Slip 条件を課した上で壁関数を適用した。加熱条件は、壁

境界に対して一様熱流束条件を与えることで模擬している。レイノルズ数は $Re_{bulk}=5731, 24428$ 、 $Re_{\tau}=180, 640$ 、プラントル数は $Pr=0.71, 0.025$ であり、標準型または Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_{\theta}-\varepsilon_{\theta}$ モデル、代数応力/熱流束モデルによる解析を実施した。また、参考までに、 20×40 分割した詳細要素で低 Re 数型 $k-\varepsilon/k_{\theta}-\varepsilon_{\theta}$ モデルによる解析も実施した。

(2) 解析結果

図 5.2.3-2 に $Re_{bulk}=5731, 24428$ の各条件における流速、温度及び乱流諸量の分布を示す。比較の対象として、Abe らによる DNS の計算結果⁴⁰⁾を併せて示した。なお、すべての物理量は壁乱流パラメータ $u_{\tau}, \theta_{\tau}, v$ によって無次元化されている。

各乱流モデルの結果は、図 5.2.3-2 (a)に示す乱流条件となる $Re_{bulk}=24428$ では(1)~(3)の流速と温度の分布が DNS 解と良好に一致しているが、図 5.2.3-2 (b)に示す遷移条件に近い $Re_{bulk}=5731$ では高 Re 数型モデルの結果に関して DNS 解とは異なる傾向となる。すなわち、 Re 数が低下すると、低 Re 数型及び Hybrid 型モデルでは流速と温度の分布が層流化して勾配が急峻となるのに対して、高 Re 数型モデルではそのような傾向は現れず、依然として平滑な乱流的な分布のままである。

図 5.2.3-3 には、解析結果から算出した圧力損失係数 λ と熱伝達係数 Nu の分布を各種相関式と併せて示す。図 5.2.3-3 では、層流から乱流への遷移現象を詳細に分析するため、追加で実施した $Re_{bulk}=Re_{Dh}/2=250, 500, 1000, 2318, 14147, 41441$ の結果も併記している。 λ と Nu の算出式は、以下に示すとおりである。

$$\lambda \equiv -\frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{D_h}{\rho u_{mean}^2 / 2} = \frac{32 Re_{\tau}^2}{Re_{bulk}^2} \quad \dots (5.1)$$

$$Nu \equiv \frac{h D_h}{\lambda} = \frac{4 Re_{\tau} Pr}{\theta_{mean}^+ - \theta_{wall}^+} \quad \dots (5.2)$$

λ : 圧力損失係数

Nu : 熱伝達係数

$-\Delta P/\Delta x$: 主流方向圧力勾配

D_h : 水力等価直径、 $D_h=4\delta$

h : 熱伝達率、 $h=q''/(\theta_{wall}-\theta_{mean})$ 、 $q''=\rho c_p u_{\tau} \theta_{\tau}$

θ_{mean} : 流体平均温度

θ_{wall} : 壁温度

圧力損失係数と熱伝達係数に関して、低 Re 数型及び Hybrid 型モデルでは層流から乱流への遷移特性を良好に再現できているが、高 Re 数型モデルでは Re 数の低下に伴い過大評価の傾向が顕著となる。低 Re 数条件では、壁隣接メッシュのみならず、外層セルとして取り扱われる壁

第二メッシュ以降も壁減衰効果が無視できない低 Re 数領域 ($y^+ \leq 200$) に存在しており、そのため、壁減衰補正のない高 Re 数型モデルでは予測精度が低下したものと推察される。

図 5.2.3-4 には、標準型 $k_0\text{-}\epsilon_0$ モデル (Jnoes-Musongge モデル) のモデル定数 C_{P2} の適正値を検討するため、 $C_{P2}=1.4, 0.8, 0.7, 0.6$ とした条件での結果を示す。なお、 C_{P2} は温度場に関連するモデル定数であるため、流速と流速場の乱流量に対しては影響しない。各条件の結果に関して、 $C_{P2}=1.4$ の結果のみは温度場の乱流量を明らかに過小評価しており、その影響で DNS 解と比べてかなり急峻な温度分布が予測されている。それ以外の $C_{P2}=0.8, 0.7, 0.6$ の結果は大差ないが、 $Pr=0.71$ の条件で熱伝達係数 Nu の予測精度が最も良いのは $C_{P2}=0.7$ であり、 $Pr=0.025$ の条件でも顕著な精度低下は生じていないため、SPIRAL では $C_{P2}=0.7$ を適正値と認め、デフォルト値として採用している。

	<u>$Pr=0.71$</u>	<u>$Pr=0.025$</u>
DNS ;	$Nu=110.78,$	$Nu=15.78$
$C_{P2}=0.6$;	$Nu=113.81,$	$Nu=17.55$
$C_{P2}=0.7$;	$Nu=111.44,$	$Nu=16.92$
$C_{P2}=0.8$;	$Nu=108.92,$	$Nu=16.40$
$C_{P2}=1.4$;	$Nu= 93.56,$	$Nu=14.68$

なお、定常に到達するまでの所要計算時間は、高 Re 数型モデルの 293 秒、低 Re 数型モデルの 5,666 秒に対して、Hybrid 型モデルでは 303 秒であり、高 Re 数型モデルと同等の計算負荷となる。低 Re 数型モデルでは、要素数の増加に加え、移流拡散安定条件の制約から時間刻み Δt も細かく分割しなければならないため、計算負荷は大幅に増大する。

5.3 妥当性確認

5.3.1 4本ロッドバンドル試験解析

本解析は、燃料ピン本数が少なく、ワイヤも存在しない基礎的な形状の集合体における SPIRAL の予測特性の確認を目的としている。

燃料集合体での流動特性は、原子炉の運転条件によって層流から乱流まで幅広く遷移する。また、狭隘流路と広幅流路が共存するため、局所的なレイノルズ数も幅広く分布する。従って、燃料集合体の評価に際しては、それらの遷移特性を高精度で予測することが重要である。本解析では、基準条件である $Re=87300$ から $Re=500$ までの範囲でパラメータ解析を実行して、層流-乱流間の遷移特性を評価した。

(1) 解析条件

解析領域：4本ロッドバンドル試験集合体 (1/4 セクタモデル)

要素分割：ロッド周方向 96 分割、径方向流路間 18 分割
 出入口境界：周期境界条件
 壁境界：Non-Slip 条件、壁関数 (Reichardt eq.)
 流路中心境界：Free-Slip 条件
 レイノルズ数： $Re = u_{mean} D_h / \nu = 87300$ 、 $u_{mean} = 25.64$ m/s、 $D_h = 52.55$ mm
 乱流モデル：標準型もしくは Hybrid 型 k- ϵ モデルまたは代数応力モデル
 風上化法：SUPG 法 (Brooks & Hughes)
 散逸項離散化：Galerkin 法、散逸項対角化法 (ϵ -lumping 法)

図 5.3.1-1 に解析条件を示す。解析対象は 1977 年に Karlsruhe で実施された K. Rehme による風洞試験⁴⁾である。試験装置は長方形のダクトに横並びで配列された 4 本のロッドから構成されており、ロッド径 $D = 157.5$ mm に対して配列ピッチ $P/D = 1.071$ 、 $W/D = 1.072$ である。解析に際しては、計算コスト低減のため、形状の対象性を考慮して 1/4 セクタモデルを採用した。要素分割はロッドの周方向 96 分割、径方向流路間 18 分割、軸方向 16 分割とした。壁隣接要素幅は $\Delta y = 1.0$ mm であり、流路平均流速 25.64 m/s から無次元壁座標に換算すると $\Delta y^+ = 100$ 程度となる。境界条件に関しては、出入口境界は周期境界条件、流路中心境界は Free-Slip 条件、壁境界は Non-Slip 条件を課した上で壁関数を適用した。作動流体は空気であり、基準条件の流路平均流速 $u_{mean} = 25.64$ m/s、等価直径 $D_h = 52.55$ mm から計算されるレイノルズ数は $Re = 87300$ となる。乱流モデルとしては、標準型もしくは Hybrid 型 k- ϵ モデル、または代数応力モデルを採用した。また、散逸項の離散化法としては、基本的な Galerkin 法と 3.5 節で述べた散逸項対角化法 (ϵ -lumping 法) の双方による解析を実施した。

(2) 解析結果

図 5.3.1-2 に水平断面上／流路中心線上における軸方向流速 u/u_{ref} の分布を示す。また、図 5.3.1-3 にロッド及びダクト壁上における壁剪断応力 τ_w/τ_{w-max} の分布を示す。なお、解析結果の評価に際しては、試験計測値 $u_{ref} = 27.74$ m/s、 $\tau_{w-max} \approx 2.32$ N で無次元化している。

軸方向流速に関して、等方性乱流モデルである標準型及び Hybrid 型 k- ϵ モデルでは、急峻な流速分布が予測されているが、非等方性乱流モデルである代数応力モデルでは、二次流れの影響によって流速分布が平坦化している。ピーク流速 u_{max}/u_{ref} の値を比較しても、標準型及び Hybrid 型 k- ϵ モデルでは 1.25~1.30 程度であるが、代数応力モデルでは 1.20 程度であり、試験結果 1.14~1.15 に近い値が予測されている。壁剪断応力の評価に関しても、k- ϵ モデル系では流路狭隘部で過小に、流路広幅部で過大に評価する傾向が得られているが、代数応力モデルではその傾向が改善されており、試験結果に近い分布が得られている。また、離散化法の評価では、Galerkin 法に比べて ϵ -lumping 法は、狭隘流路における流速を過小に評価して、相対的にピーク流速を過大に評価する傾向があるが、その差は 3%未満であり、顕著な差は現れていない。

図 5.3.1-4 には、基準条件である $Re=87300$ と追加で実施した $Re=500, 1000, 2500, 5000, 7500, 10000, 25000, 50000$ の解析結果から算出した圧力損失係数の分布を示す。比較の対象として、円管層流式 $\lambda=64/Re$ 、Blasius の式 $\lambda=0.3164/Re^{1/4}$ 及び Rehme による次の試験相関式を併せて示した。

1) Rehme 試験相関式

$$\text{層流条件} : \lambda = \frac{58.3}{Re} \quad \dots (5.3)$$

$$\text{乱流条件} : \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 1.02(2.5 \ln Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} + 5.5) - 5.64 \quad \dots (5.4)$$

各モデルの結果を比較すると、高 Re 数型モデルである標準型 $k-\varepsilon$ モデル及び代数応力モデルの結果では、 Re 数の低下に伴い、圧力損失の過大評価の傾向が顕著となる。対して、低 Re 数効果を考慮した Hybrid 型 $k-\varepsilon$ モデルでは、層流-乱流間の遷移現象を良好に再現できており、試験相関式との整合性も高い。したがって、様々な Re 条件が想定される燃料集合体の解析評価に際しては、Hybrid 型 $k-\varepsilon$ モデルが最適であると結論できる。

5.3.2 実規模スケール集合体解析

本解析では、実規模スケールの燃料集合体における流動現象に関して、SPIRAL の予測特性を確認することを目的としている。

解析対象は、実規模スケールの 127 本ピン、169 本ピン及び 271 本ピン集合体試験⁴²⁾であり、それぞれ層流条件から乱流条件まで幅広いレイノルズ数での圧力損失値が計測されている。SPIRAL による解析では、前項までの結果から層流-乱流間の遷移特性を良好に再現できる Hybrid 型 $k-\varepsilon$ 乱流モデルを採用して、試験計測値との比較を実施した。

(1) 解析条件

解析領域 : 127 本ピン、169 本ピン及び 271 本ピン燃料集合体

要素分割 : 燃料ピン周方向 48 分割、径方向流路間 10 分割

出入口境界 : 周期境界条件

壁境界 : Non-Slip 条件、壁関数 (Reichardt eq.)

レイノルズ数 : $Re \equiv w_{mean} D_h / \nu = 200 \sim 83000$

乱流モデル : Hybrid 型 $k-\varepsilon$ モデル

風上化法 : SUPG 法 (Brooks & Hughes)

散逸項離散化 : 散逸項対角化法 (ε -lumping 法)

図 5.3.2-1 に解析条件を示す。解析の対象は、実規模スケールの「常陽」型 127 本ピン集合体、「もんじゅ」型 169 本ピン集合体及び大型バンドル 271 本ピン集合体である。要素分割は、燃

料ピンの周方向 48 分割、径方向流路間 10 分割、軸方向 16 分割とした。また、計算精度を向上させるため、壁に隣接する要素の幅は一律で $\Delta y = 50 \mu\text{m}$ としており、本解析で設定したレイノルズ数条件 $Re = 200 \sim 83,000$ から無次元壁座標に換算すると $\Delta y^+ = 2 \sim 90$ 程度となる。ワイヤピッチあたりの要素数は、127 本ピン集合体で 1,792,420 要素、169 本ピン集合体で 2,347,149 要素、271 本ピン集合体で 3,711,652 要素であり、水平断面あたりに換算すると、それぞれ 36,580 要素、47,901 要素、75,748 要素となる。境界条件は、出入口境界を周期境界条件として、壁境界は Non-Slip 条件を課した上で壁関数を適用した。乱流モデルとしては、前項までの結果から層流-乱流間の遷移特性を良好に再現できる Hybrid 型 $k-\epsilon$ モデルを採用した。また、散逸項の離散化法としては、燃料集合体解析に適性のある散逸項対角化法 (ϵ -lumping 法) を採用した。

(2) 解析結果

図 5.3.2-2、図 5.3.2-3、図 5.3.2-4 に各集合体条件の解析結果から求めた圧力損失係数 λ とその予測誤差 $Error(\lambda)$ を示す。比較の対象として、試験計測された圧力損失 ΔP から算出した圧力損失係数及び燃料集合体圧力損失相関式である Cheng-Todreas 相関式⁴³⁾から算出した圧力損失係数を併せて示した。

1) Cheng-Todreas 相関式 (Simplified)

$$\lambda_L = \frac{1}{Re} \left(-974.6 + 1612.0(P/D) - 598.5(P/D)^2 \right) \times (H/D)^{0.06 - 0.085(P/D)} \quad \dots (5.5)$$

$$\lambda_T = \frac{1}{Re^{0.18}} \left(0.8063 - 0.9022 \log(H/D) + 0.3526 [\log(H/D)]^2 \right) \times (P/D)^{9.7} (H/D)^{1.78 - 2.0(P/D)} \quad \dots (5.6)$$

$$\lambda_R = \lambda_L (1 - \Psi)^{1/3} + \lambda_T \Psi^{1/3} \quad \dots (5.7)$$

$$\Psi = \min\left(\max\left(\frac{\log Re - \log Re_L}{\log Re_T - \log Re_L}, 0\right), 1\right) \quad \dots (5.7.a)$$

$$\log(Re_L/300) = 1.7(P/D - 1.0) \quad \dots (5.7.b)$$

$$\log(Re_T/10000) = 0.7(P/D - 1.0) \quad \dots (5.7.c)$$

「常陽」型 127 本ピン集合体及び「もんじゅ」型 169 本ピン集合体の解析結果は、試験計測値及び Cheng-Todreas 相関式の分布傾向と一致しており、特に $Re \geq 20000$ の乱流条件では、約 5% 以内の誤差で試験計測値及び相関式と良好に一致している。層流と乱流の遷移域となる $2000 \leq Re \leq 10000$ の条件では、10%以上の誤差が生じているが、その理由としては、当該 Re 数条件では流路内に層流領域と乱流領域が混在しており、 Re 数のみならず、流路形状にも依存する遷移現象を正確に再現するのは難しいものと推測される。

また、大型バンドル 271 本ピン集合体の結果に関しては、Cheng-Todreas 相関式とは良好に一

致している。試験計測値との比較では、各 Re 数条件において 20~30%の誤差が生じているが、同試験では Cheng-Todreas 相関式、Rehme 相関式、Novendstern 相関式等の燃料集合体相関式と比較して、いずれも圧力損失が 10~20%程度の過小評価となる試験結果が得られており、SPIRAL の計算結果の妥当性を否定するものではないと思われる。

5.3.3 ナトリウム試験集合体解析 (PLANDTL 試験解析)

本解析では、前項までに確認した燃料集合体内の流動場に対する SPIRAL の予測特性に加えて、温度場の予測特性に関しても確認することを目的としている。

解析対象は、ワイヤスペーサ型 37 本ピン模擬燃料集合体ナトリウム試験⁴⁴⁾であり、試験では、模擬燃料集合体の発熱上端部において集合体全域の温度分布が計測されている。本解析では、乱流モデルとして Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルを採用して、試験計測温度との比較を実施した。

(1) 解析条件

解析領域：ナトリウム試験体 (37 本ピン模擬燃料集合体)

要素分割：燃料ピン周方向 48 分割、径方向流路間 10 分割、軸方向 192 分割

流入流速条件：出入口周期境界条件、 $w_{mean}=4.94$ m/s; inlet

流入温度条件：温度一定条件、 $T_{in}=397$ °C

壁境界条件：Non-Slip 条件、壁関数 (Reichardt eq., Kader eq.)

発熱条件：被覆管内表面熱流束条件

レイノルズ数： $Re=w_{mean}D_h/\nu=51800$; inlet ~ 64800; outlet、 $D_h=3.40$ mm

プラントル数： $Pr=\nu/a=0.0046$

乱流モデル：Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデル

風上化法：SUPG 法 (Brooks & Hughes)

散逸項離散化：散逸項対角化法 (ε -lumping 法)

図 5.3.3-1 に解析条件を示す。解析の対象は、1993 年に実施された 37 本ピン模擬燃料集合体ナトリウム試験である。解析領域は、模擬燃料ピンの軸方向に対して発熱部長 930 mm を含むワイヤ 4 巻きピッチ 1,228 mm を対象とした。構造材領域に関しては被覆管領域とワイヤ領域のみを模擬して、燃料ペレットに相当するヒーター領域は模擬しなかった。要素分割は、流体領域では模擬燃料ピンの周方向 48 分割、径方向流路間 10 分割、軸方向 192 分割として、構造材領域では被覆管径方向 2 分割、ワイヤ径方向 4 分割とした。また、計算精度を向上させるため、壁に隣接する流体要素の幅は一律で $\Delta y=50$ μm としており、模擬燃料集合体平均流入流速 $w_{mean}=4.94$ m/s から無次元壁座標に換算すると $\Delta y^+=50$ 程度となる。境界条件は、流動場では出入口境界を周期境界条件として、壁境界に対しては Non-Slip 条件を課した上で壁関数を適用

した。また、温度場では流入境界の温度を一定の $T_{in}=397^{\circ}\text{C}$ として、模擬燃料ピンの発熱 $Q=735$ kW は、被覆管内壁に対して軸方向分布を有する熱流束条件を与えて模擬した。表 5.3.3-1 に示すとおり、模擬燃料集合体下端及び上端におけるレイノルズ数は $Re=51,800\sim 64,800$ 程度となる。乱流モデルとしては、Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルを採用した。また、散逸項の離散化法としては、前項と同様に燃料集合体解析に適性のある散逸項対角化法 (ε -lumping 法) を採用した。

(2) 解析結果

図 5.3.3-2 に水平断面 $Z=925.5$ mm における流速、温度、乱流諸量の分布を示す。また、図 5.3.3-3 に同断面におけるサブチャンネル平均軸方向流速 w_{subch} 、ギャップ平均横方向流速 u_{gap} 、サブチャンネル平均流体温度 T_{subch} の分布を示す。ギャップ平均流速 u_{gap} は、模擬燃料ピンの軸方向に対してワイヤ巻きピッチの 1/12 長の平均 (すなわち、 $Z=925.5$ mm \pm 12.8 mm の平均) であり、同一サブチャンネル層内のギャップではワイヤ巻き方向を、隣接サブチャンネル層間のギャップでは内側から外側へと向かう方向を正とした。

基本的な流動パターンとして、サブチャンネル平均流速 w_{subch} に関しては、ワイヤの存在するサブチャンネルで低流速となり、ワイヤの存在しないサブチャンネルで高流速となる物理的に妥当な傾向が現れている。模擬燃料集合体全体の評価では、ワイヤ位相 ($\theta=150^{\circ}$) の後流側 ($\theta=60\sim 120^{\circ}$) で相対的に高流速となる傾向があり、 w_{subch} の最大値も $\theta=60\sim 120^{\circ}$ に位置する最外周サブチャンネルで予測されている。一方、ギャップ平均流速 u_{gap} に関しては、 w_{subch} とは正反対に $\theta=240\sim 300^{\circ}$ に位置する最外周ギャップで最大流速が予測されている。内側ギャップの流速分布は 3 パターンに分類され、ワイヤ巻き付け方向の下側ギャップとその反対側の上側ギャップ及びワイヤに対面する対面側ギャップでそれぞれ特徴的な分布傾向となる。ワイヤによって形成される横流れは、後述する理由から模擬燃料ピンに沿って旋回せず、対面側ギャップへと流出する。対面側ギャップから隣接サブチャンネルへと流入した横流れは、上側ギャップと下側ギャップに分岐するが、下側ギャップでは、ワイヤによって形成される横流れと干渉して、結果的に u_{gap} はゼロレベルとなる。対して、上側ギャップでは、特に支障となる要因もなく、分岐した横流れがそのままワイヤに追従する旋回流となり通過する。以上のクロスフロー特性から、流体運動量は模擬燃料集合体内でワイヤ位相の後流側へと輸送され、既述した $\theta=60\sim 120^{\circ}$ 側で軸方向高流速となる理由であると推測される。

模擬燃料集合体内温度分布の特徴としては、最外周サブチャンネルとその内側のサブチャンネル間で急峻な温度分布が形成されており、その影響によって図 5.3.3-2 (d) に示した温度揺らぎ T' も当該位置で高いピークが予測されている。図 5.3.3-4 に試験計測温度との比較結果を示す。全体的な傾向として、試験に比べて解析では模擬燃料集合体の中心側で高温、ラップ管側で低温となる傾向があり、被覆管最高温度を評価する上では保守側の結果が得られている。その要因として、従来の解析でも同様の傾向が得られていたが、解析では模擬燃料集合体の中心側の

流量を過小に、ラップ管側の流量を過大に評価している可能性がある。また、最外周の模擬燃料ピンでは、試験と解析で最大 $\pm 30^{\circ}\text{C}$ の温度差が生じているが、最外周の模擬燃料ピンは周辺の温度勾配が急峻であり、模擬燃料ピンの周上で最大 60°C 強の温度差が生じているケースもあるため、模擬燃料ピン及びワイヤ位相の変位等で温度計測位置が少し変わるだけで、計測される温度が大きく変わるものと予想される。

図 5.3.3-5 に解析結果から算出した模擬燃料集合体の圧力損失係数 λ の分布を示す。比較の対象として、Cheng-Todreas 相関式を併せて示した。また、圧力損失係数は次式で算出した。

$$\lambda = -\frac{\Delta P}{\Delta Z} \frac{D_h}{\rho w_{mean}^2 / 2} = -\frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{Z_{k+1} - Z_{k-1}} \frac{D_h}{\rho w_{mean}^2 / 2} \quad \dots (5.8)$$

λ : 模擬燃料集合体の圧力損失係数[-]

ρ : 流体密度 $[\text{kg}/\text{m}^3]$

w_{mean} : 模擬燃料集合体の平均流速 $[\text{m}/\text{s}]$

D_h : 模擬燃料集合体の等価直径 $[\text{m}]$

P_k : 軸方向断面 k の断面平均圧力 $[\text{Pa}]$

Z_k : 軸方向断面 k の軸方向座標 $[\text{m}]$

SPIRAL の結果は、ワイヤ位相に応じて λ 値の 10%程度 ($\lambda \approx 0.002 \sim 0.003$) の振動を有するものの、ワイヤ位相の影響を除去した 1/6 ワイヤピッチ平均の結果では、概ね一定の値を示しており、Cheng-Todreas 相関式とも良好に一致する結果が得られている。参考までに、 λ 値が極大となるのはワイヤが模擬燃料ピン間の最も狭いギャップ部に位置する時、 λ 値が極小となるのはワイヤが 3 本の模擬燃料ピンで形成されるサブチャンネルの中心側に位置する時である。

表 5-1 SPIRAL の V&V 指針

重要な現象	考慮すべき要因	重要度	V&V 問題
広範な Re 数 ↓ 強制循環～自然対流 (定格運転～崩壊熱除去)	壁乱流挙動 (定格運転時)	MH	円管流、矩形ダクト流れ ロッドバンドル集合体試験
	圧力損失特性 (層流-乱流遷移特性)	MH	円管流、実機集合体試験 他多数
	浮力効果 (崩壊熱除去時)	MH	サーマルキャビティ流れ 温度成層化試験
周辺流れ効果	狭隘／広幅流路の流量配分	M	偏心二重円管流れ ロッドバンドル集合体試験
伝熱効果 (温度分布形成)	流体-構造材間の熱伝達	H	平行平板間乱流熱伝達 ロッドバンドル集合体試験
	乱流熱拡散	H	平行平板間乱流熱伝達 平行三噴流試験
	構造材 3 次元熱伝導	H	燃料ピン内温度分布 (解析解あり)
構造材変形	狭隘／広幅流路の流量配分	M	(周辺流れ効果と同じ)
	構造材接触効果 (接触熱抵抗)	L	—
ナトリウム流	低 Pr 数流体の乱流熱拡散	H	平行平板間乱流熱伝達 平行三噴流試験
ワイヤスペーサ効果	旋回流	M	液中渦基礎試験
	局所的な淀み流・剥離流	M	バックステップ流れ
	構造材接触効果 (接触熱抵抗)	L	(構造材変形と同じ)

H: High

M: Moderate

L: Low

表 5.2.2-1 乱流ステップフロー解析：主流の再付着点位置

		$\Delta x=h$	$\Delta x=h/2$	$\Delta x=h/4$	$\Delta x=h/8$
標準型 k-ε モデル	$\Delta y=h/8$	5.30h	5.13h	5.05h	5.00h
	$\Delta y=h/16$	5.77h	<u>5.58h</u>	5.49h	5.45h
Hybrid 型 k-ε モデル	$\Delta y=h/8$	5.56h	5.43h	5.44h	5.40h
	$\Delta y=h/16$	6.19h	<u>6.01h</u>	5.94h	5.91h
MMK 型 k-ε モデル	$\Delta y=h/8$	5.39h	5.21h	5.18h	—
	$\Delta y=h/16$	5.86h	<u>5.66h</u>	—	—
RNG 型 k-ε モデル	$\Delta y=h/8$	7.12h	6.80h	6.74h	6.60h
	$\Delta y=h/16$	7.17h	<u>6.74h</u>	6.54h	6.46h
代数応力モデル	$\Delta y=h/8$	6.15h	5.75h	5.64h	5.59h
	$\Delta y=h/16$	6.34h	<u>5.96h</u>	5.86h	5.84h
代数応力モデル (非平衡壁関数)	$\Delta y=h/8$	6.29h	5.90h	5.81h	5.74h
	$\Delta y=h/16$	6.51h	<u>6.24h</u>	6.14h	6.15h

※ 実験の再付着点位置は 6.51h

表 5.3.3-1 模擬燃料集合体下端及び上端におけるレイノルズ数

	流体平均温度 T_{mean} [°C]	流体密度 ρ [kg/m ³]	粘性係数 μ [Pa-s]	平均流速 w_{mean} [m/s]	レイノルズ数 Re [-]
模擬燃料集合体下端	397.0	857	0.278×10^{-3}	4.94	51,800
模擬燃料集合体上端	544.4	821	0.213×10^{-3}	5.16	64,800

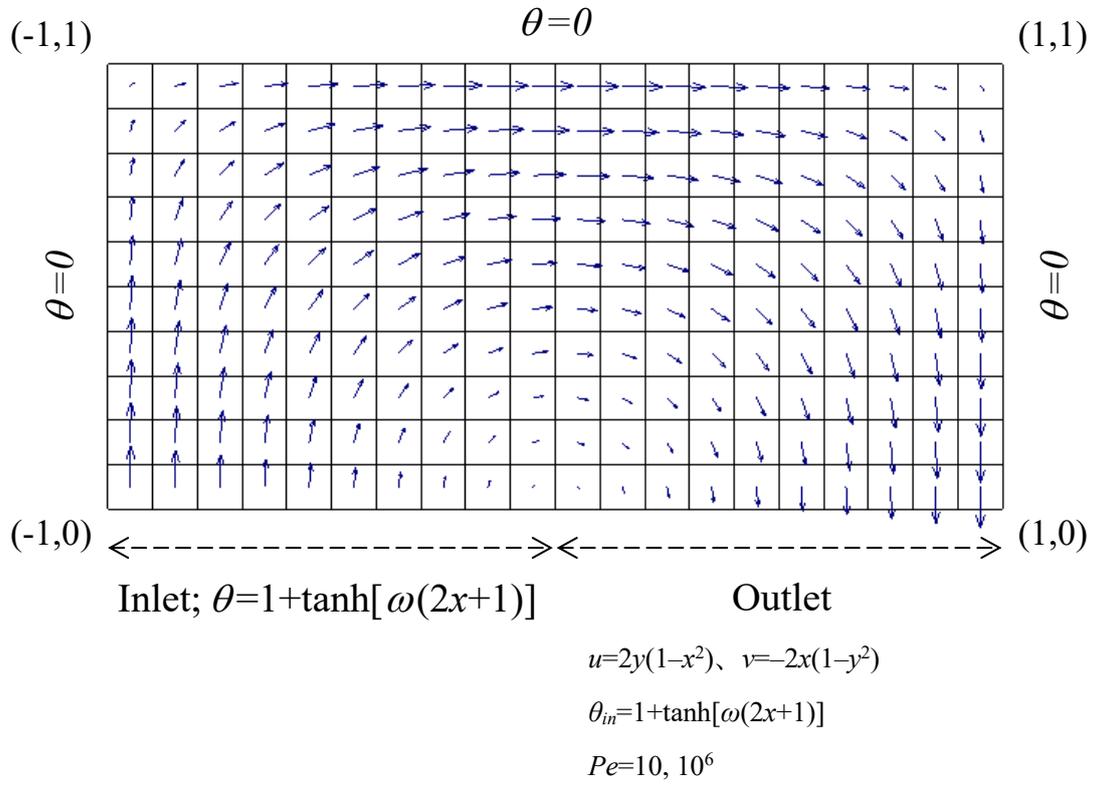
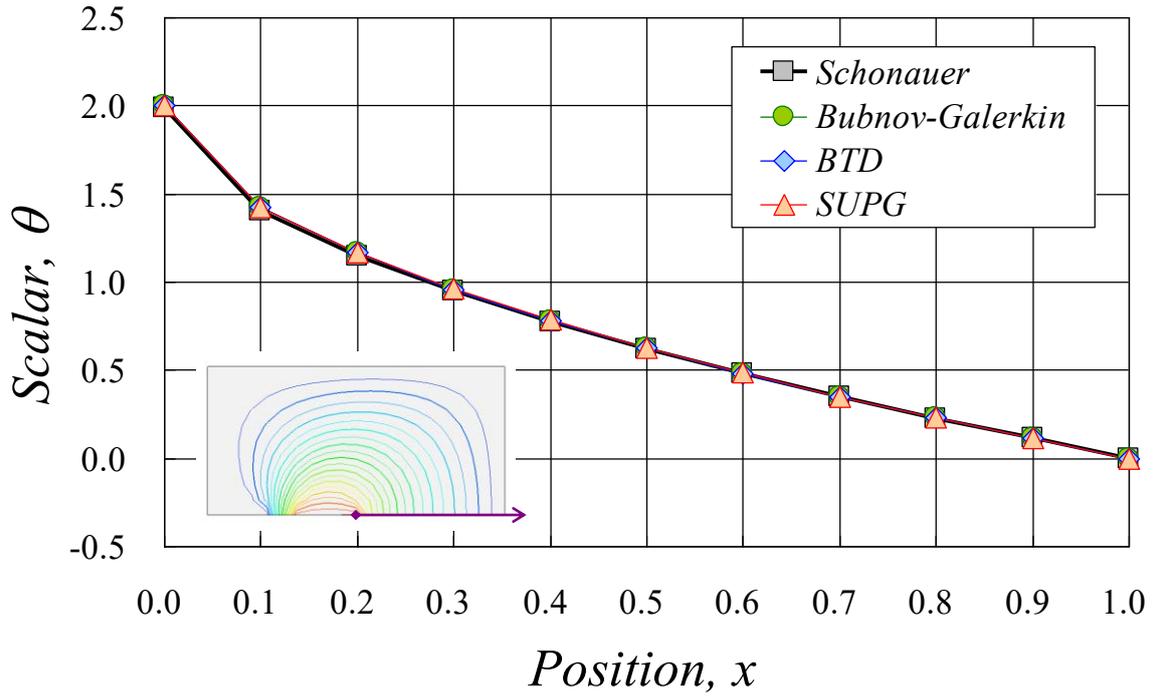


図 5.1.1-1 二次元スカラー輸送解析：解析条件

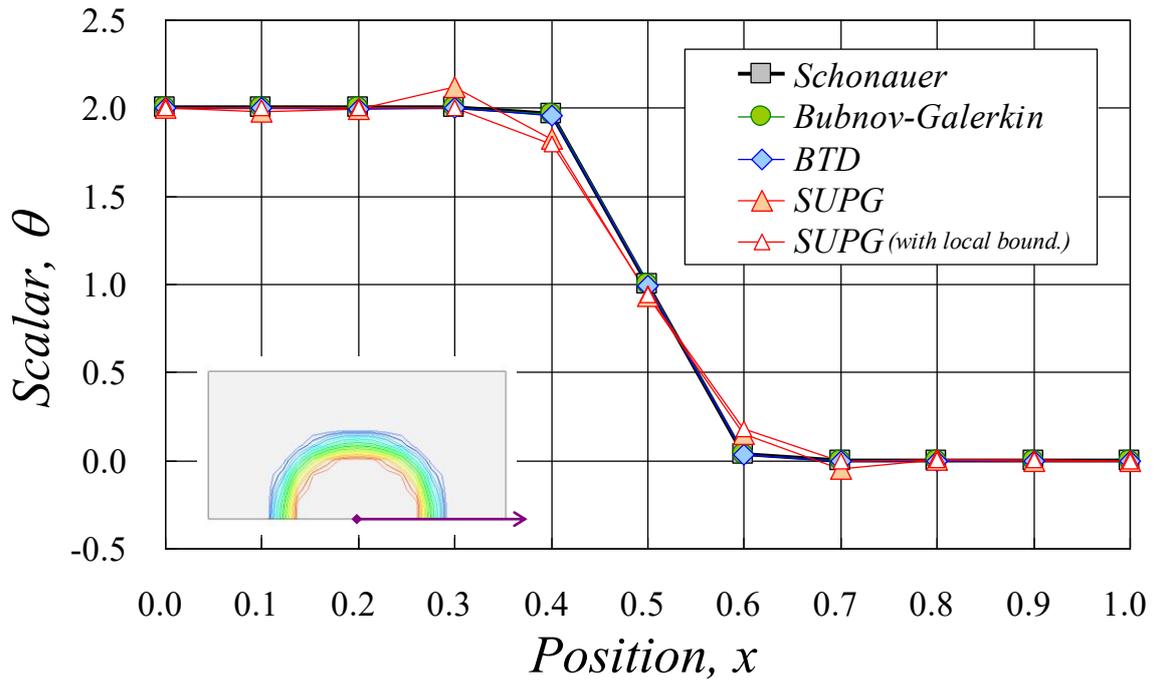


(a) 出口での温度分布

x	<i>Schonauer</i>	<i>SPIRAL</i>		
		Bubnov-Galerkin	BTD	SUPG
0.0	1.989	2.000	2.000	2.000
0.1	1.402	1.425	1.425	1.427
0.2	1.146	1.165	1.165	1.168
0.3	0.946	0.958	0.958	0.960
0.4	0.775	0.782	0.782	0.784
0.5	0.621	0.626	0.626	0.627
0.6	0.480	0.483	0.483	0.484
0.7	0.349	0.352	0.352	0.352
0.8	0.227	0.229	0.229	0.229
0.9	0.111	0.112	0.112	0.112
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000

(b) 各位置での値

図 5.1.1-2 二次元スカラー輸送解析：解析結果 ($Pe=10$)



(a) 出口での温度分布

x	<i>Schonauer</i>	<i>SPIRAL</i>		
		Bubnov-Galerkin	BTD	SUPG
0.0	2.000	2.000	2.000	2.000 (2.000)
0.1	2.000	2.000	2.006	1.978 (2.000)
0.2	2.000	2.000	1.998	1.993 (2.000)
0.3	1.999	1.999	2.004	2.122 (2.000)
0.4	1.964	1.964	1.958	1.826 (1.801)
0.5	1.000	1.000	0.993	0.938 (0.944)
0.6	0.036	0.036	0.037	0.152 (0.183)
0.7	0.001	0.001	-0.001	-0.046 (0.000)
0.8	0.000	0.000	0.000	0.004 (0.003)
0.9	0.000	0.000	0.000	0.001 (0.001)
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000 (0.000)

※ SUPG 法の括弧内の値は局所有界性を考慮した結果

(b) 各位置での値

図 5.1.1-3 二次元スカラー輸送解析：解析結果 ($Pe=10^6$)

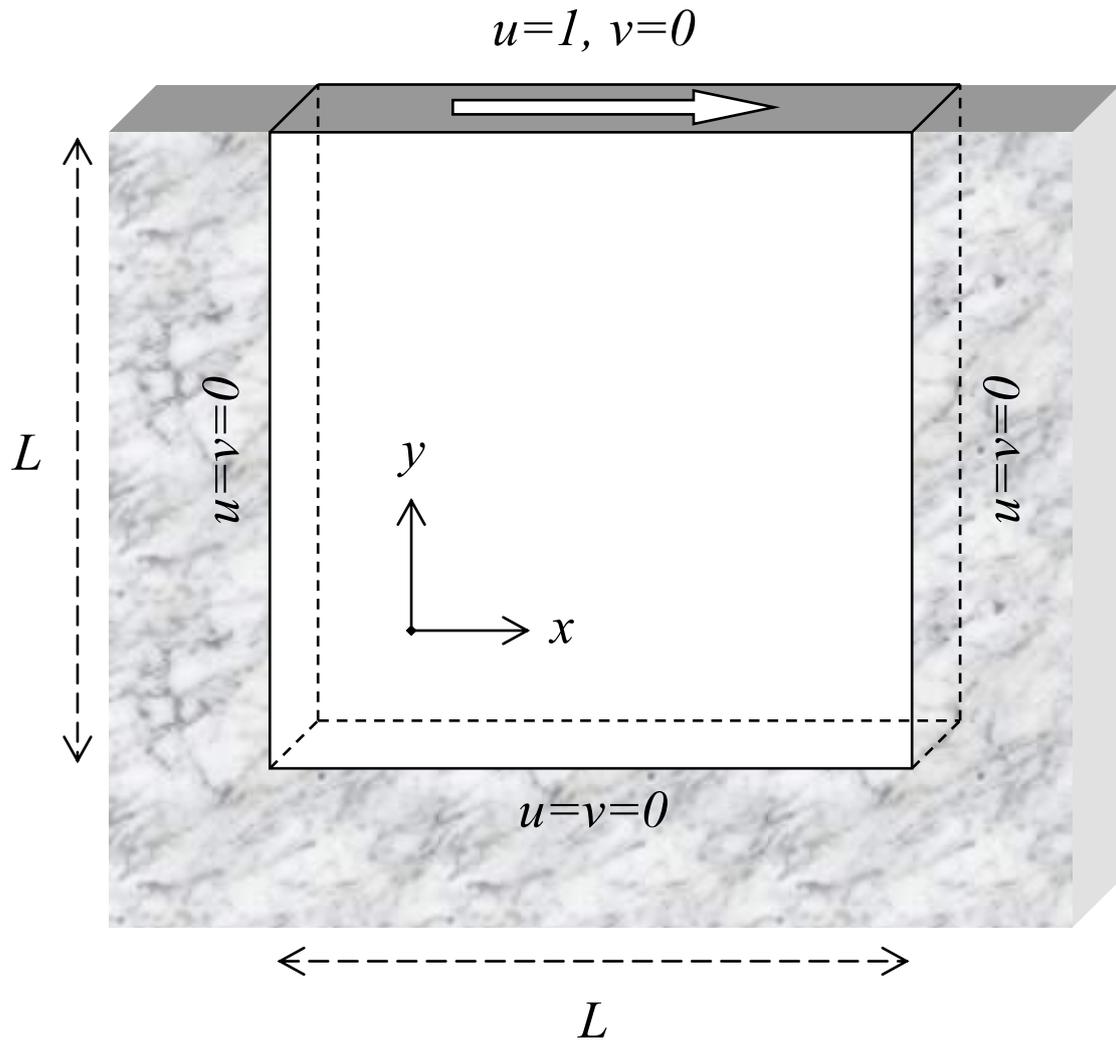


図 5.1.2-1 強制キャビティフロー解析：解析条件

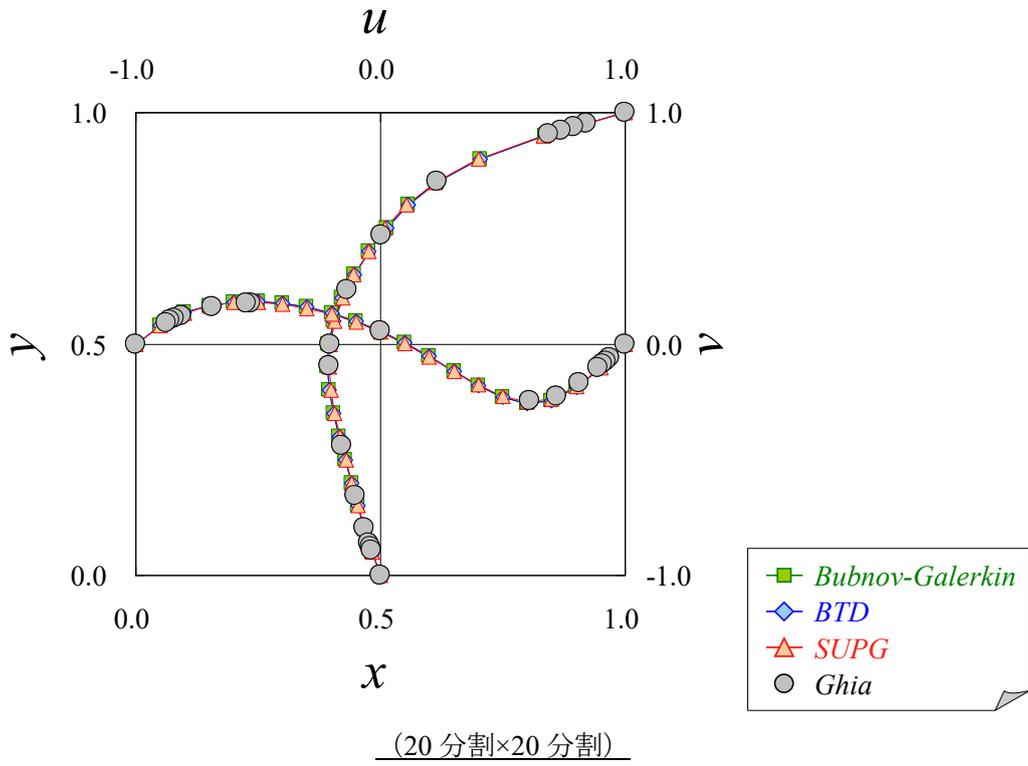
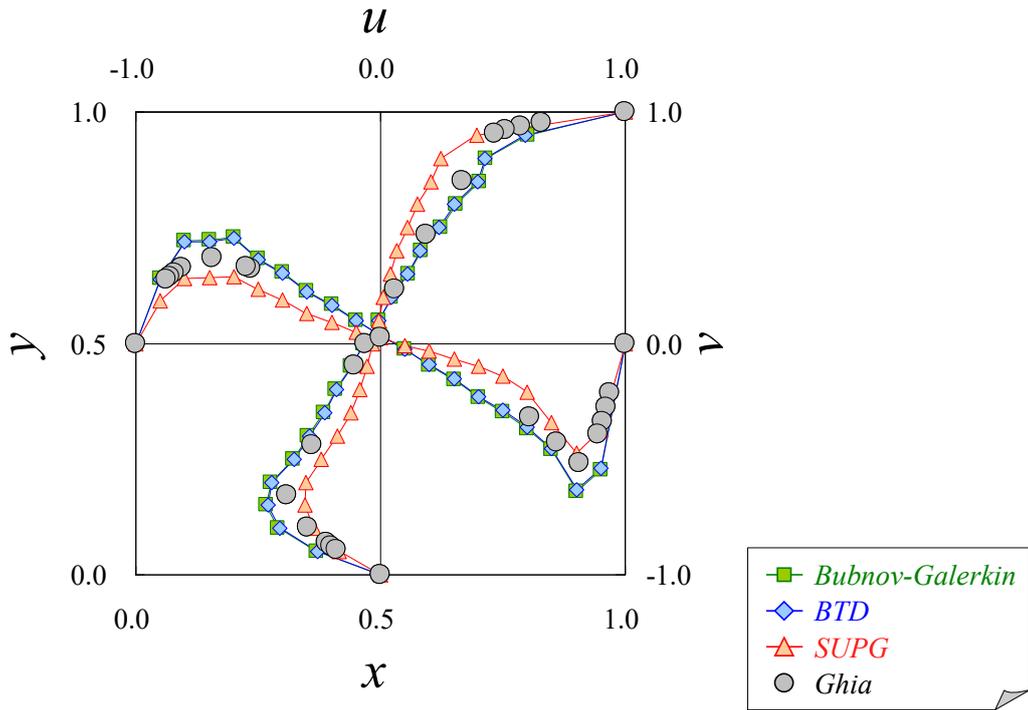
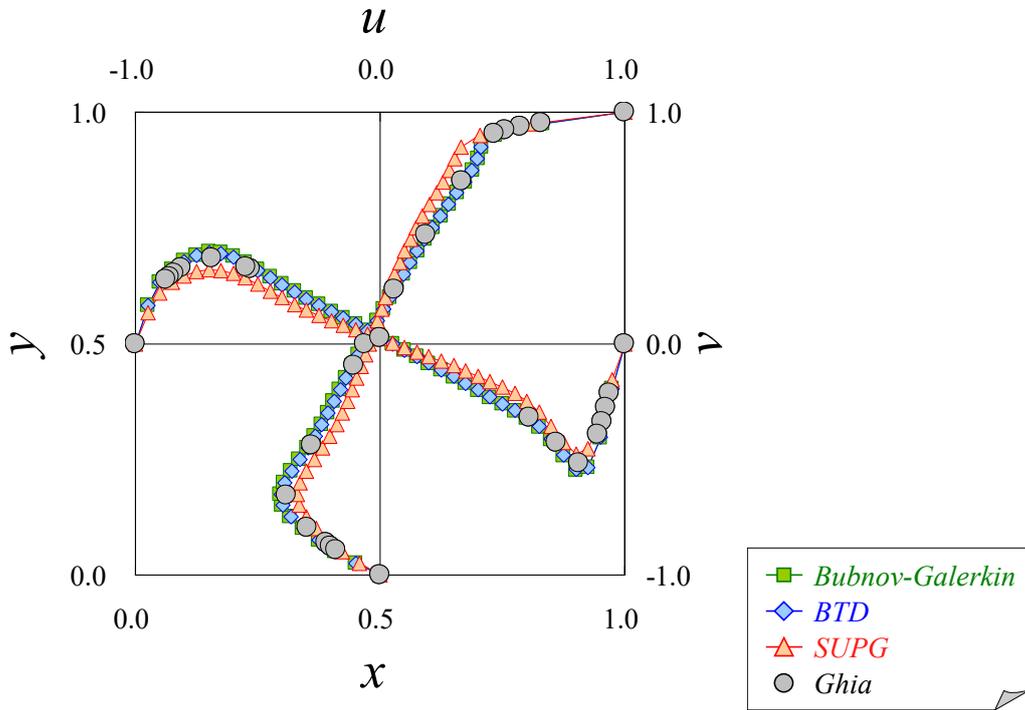


図 5.1.2-2 強制キャビティフロー解析：解析結果（流速分布； $Re=10^2$ ）

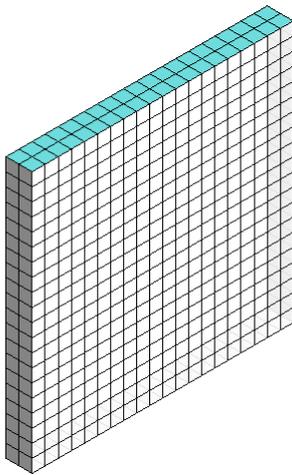
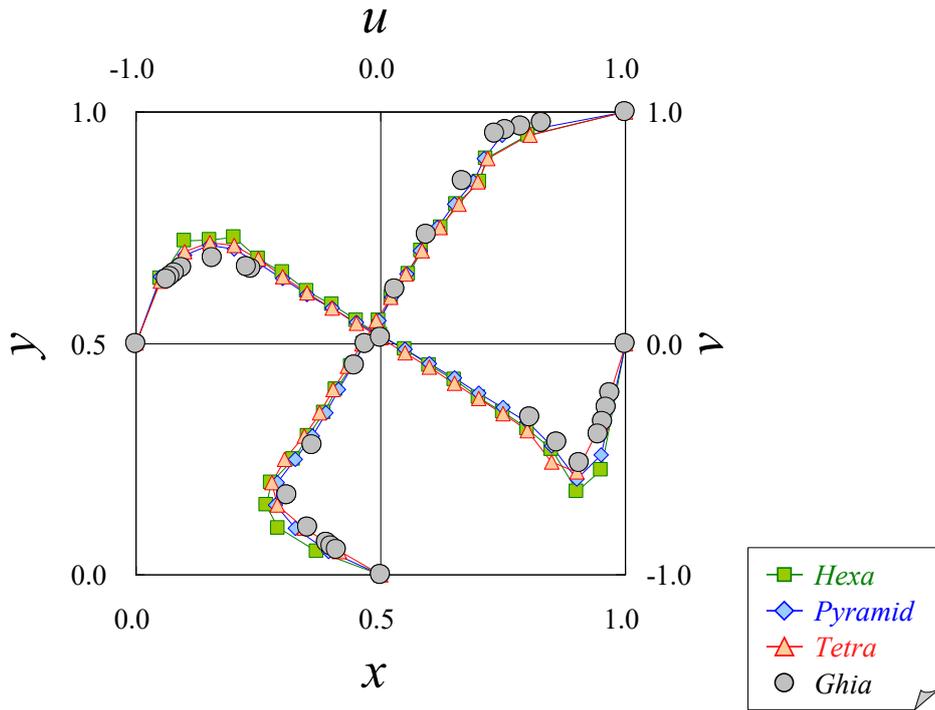


(a) 20 分割×20 分割



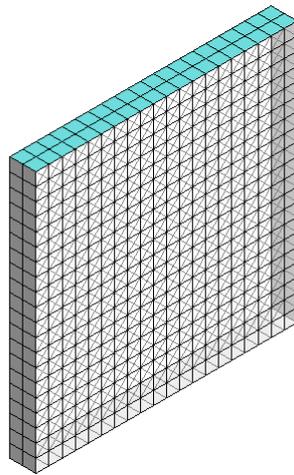
(b) 40 分割×40 分割

図 5.1.2-3 強制キャビティフロー解析：解析結果（流速分布； $Re=10^3$ ）



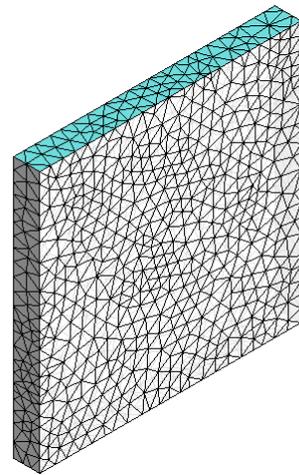
節点数 : 882
要素数 : 400

(a) 8 節点 Hexa 要素



節点数 : 1,282
要素数 : 2,400

(b) 5 節点 Pyramid 要素



節点数 : 1,803
要素数 : 7,117

(c) 4 節点 Tetra 要素

図 5.1.2-4 強制キャビティフロー解析：各要素による解析結果（流速分布； $Re=10^3$ ）

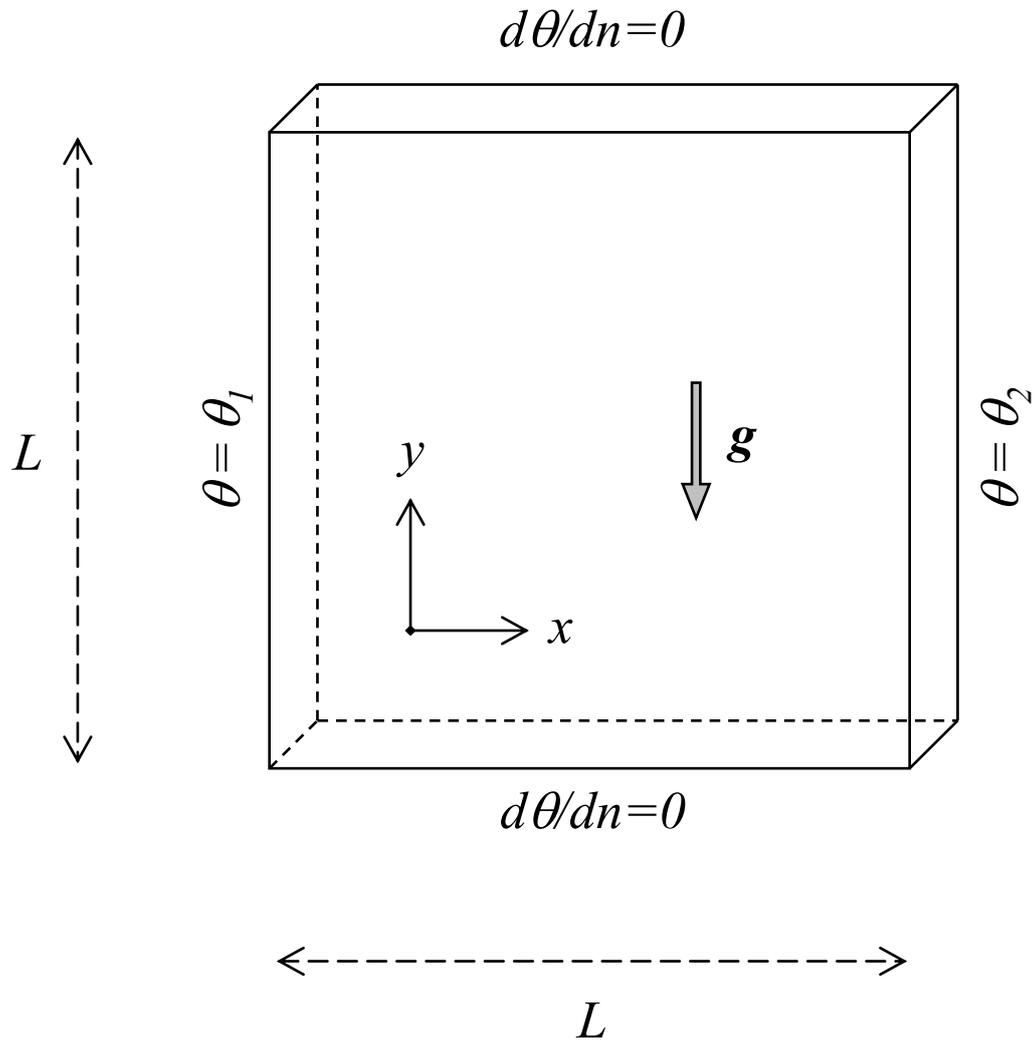
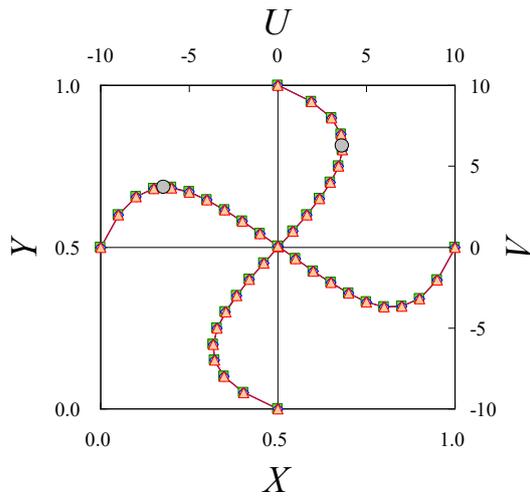
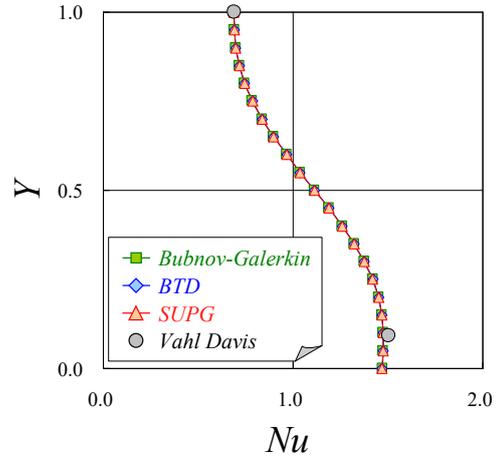


図 5.1.3-1 サーマルキャビティフロー解析：解析条件



(a) XY 中心線上の流速分布

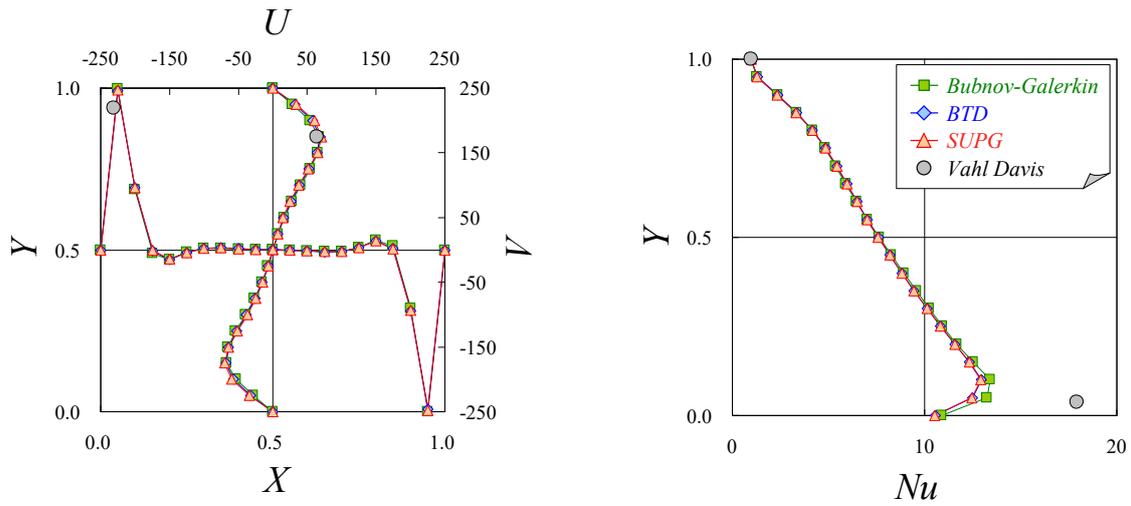


(b) 高温壁側の Nu 数分布

	<i>Vahl Davis</i>	<i>SPIRAL</i>		
		Bubnov-Galerkin	BTM	SUPG
U_{max}	3.649	3.653	3.652	3.650
Y	0.813	0.800	0.800	0.800
V_{max}	3.697	3.676	3.675	3.673
X	0.178	0.200	0.200	0.200
Nu_{max}	1.505	1.476	1.476	1.476
Y	0.092	0.100	0.100	0.100
Nu_{min}	0.692	0.688	0.688	0.688
Y	1.000	1.000	1.000	1.000
Nu_{mean}	1.117	1.100	1.100	1.100

(c) 各評価結果とその位置

図 5.1.3-2 サーマルキャビティフロー解析：解析結果 ($Ra=10^3$, 20 分割×20 分割)



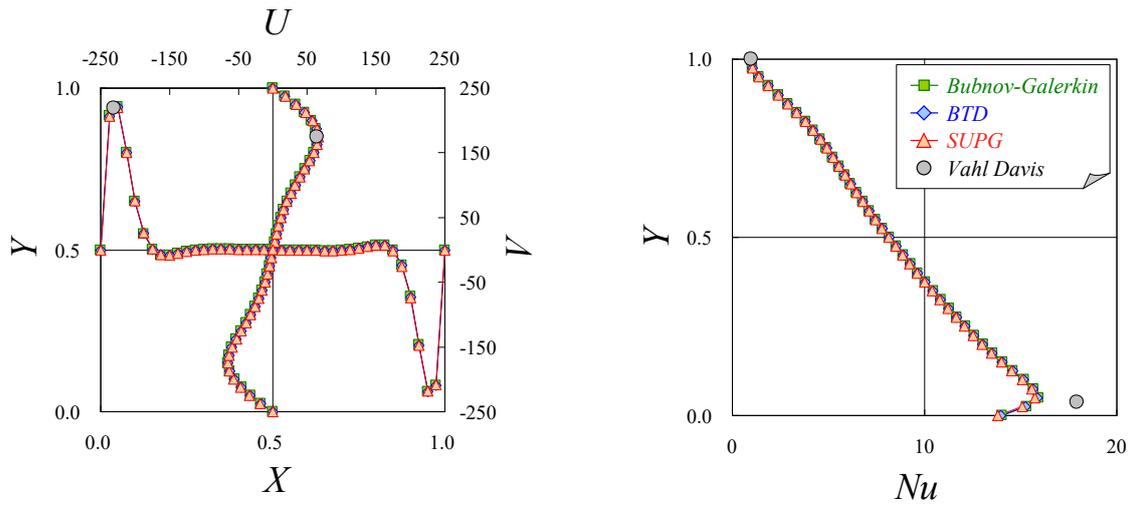
(a) XY 中心線上の流速分布

(b) 高温壁側の Nu 数分布

	<i>Vahl Davis</i>	<i>SPIRAL</i>		
		Bubnov-Galerkin	BTD	SUPG
U_{max}	64.63	67.47	69.11	70.80
Y	0.850	0.850	0.850	0.850
V_{max}	219.36	249.42	246.06	247.35
X	0.0379	0.050	0.050	0.050
Nu_{max}	17.925	13.398	12.946	12.932
Y	0.0378	0.100	0.100	0.100
Nu_{min}	0.989	0.974	0.988	0.982
Y	1.000	1.000	1.000	1.000
Nu_{mean}	8.80	7.648	7.548	7.544

(c) 各評価結果とその位置

図 5.1.3-3 サーマルキャビティフロー解析：解析結果 ($Ra=10^6$, 20 分割×20 分割)



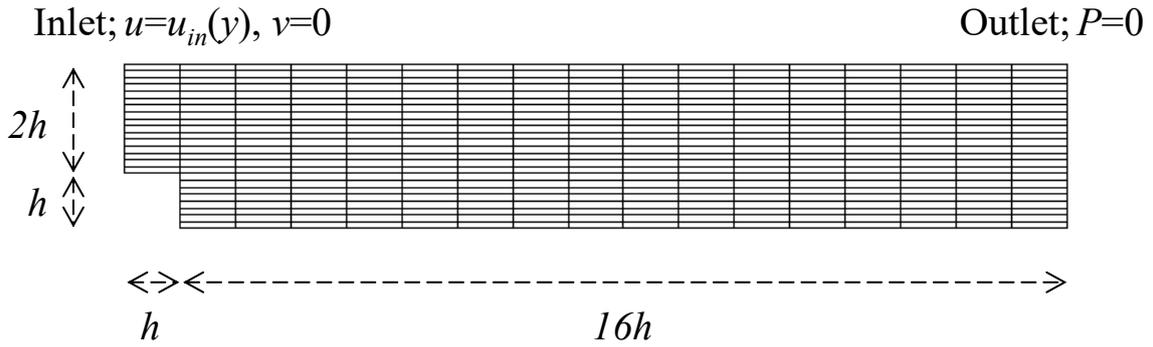
(a) XY 中心線上の流速分布

(b) 高温壁側の Nu 数分布

	<i>Vahl Davis</i>	<i>SPIRAL</i>		
		Bubnov-Galerkin	BTD	SUPG
U_{max}	64.63	65.52	65.67	66.02
Z	0.850	0.850	0.850	0.850
W_{max}	219.36	220.72	220.59	219.76
X	0.0379	0.05	0.05	0.05
Nu_{max}	17.925	15.923	15.875	15.739
Z	0.0378	0.100	0.100	0.100
Nu_{min}	0.989	0.968	0.972	0.976
Z	1.000	1.000	1.000	1.000
Nu_{mean}	8.80	8.423	8.414	8.387

(c) 各評価結果とその位置

図 5.1.3-4 サーマルキャビティフロー解析：解析結果 ($Ra=10^6$, 40 分割×40 分割)



(a) 要素分割

y/h	$Re=73$	$Re=125$	$Re=191$	$Re=229$
0.000	0.0	0.0	0.0	0.0
0.125	28.4	49.0	76.0	101.0
0.250	49.8	88.0	146.6	187.7
0.375	69.0	123.7	200.6	253.7
0.500	84.7	149.2	237.1	294.7
0.625	96.3	164.1	256.7	311.0
0.750	104.3	174.1	268.7	315.5
0.875	108.4	179.9	272.3	315.6
1.000	109.9	180.1	269.6	311.8
1.125	108.1	176.3	263.6	304.8
1.250	102.8	170.3	254.2	296.3
1.375	94.3	161.3	238.4	278.6
1.500	81.5	143.6	212.0	255.4
1.625	64.4	117.5	177.1	214.7
1.750	44.2	82.5	124.0	150.3
1.875	22.5	42.2	59.3	71.7
2.000	0.0	0.0	0.0	0.0

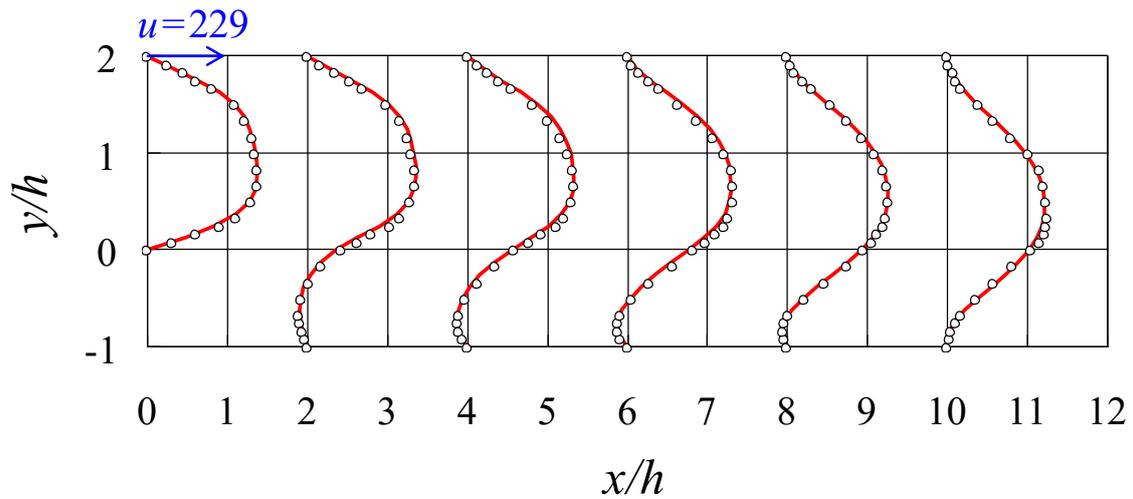
(b) 流入流速分布

図 5.2.1-1 層流ステップフロー解析：解析条件

Re	$Exp.$	<i>SPIRAL</i>			<i>AQUA</i>
		Bubnov-Galerkin	BTD	SUPG	QUICK
$Re=73$	4.01	5.10	5.09	5.13	5.40
$Re=125$	6.84	—	—	7.07	7.45
$Re=191$	8.60	—	—	9.01	9.34
$Re=229$	9.94	—	—	9.50	9.74

※ $Re \geq 125$ の条件では、SUPG 法以外は数値振動の発生により収束せず

(a) 主流の再付着点位置 ($Re=73, 125, 191, 229$)



— *SPIRAL* ○ *Exp.*

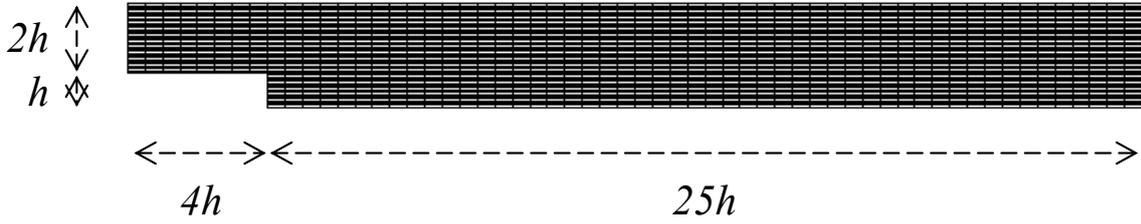
(b) $x/h=0, 2, 4, 6, 8, 10$ における流速分布の比較 ($Re=229$)

図 5.2.1-2 層流ステップフロー解析：解析結果

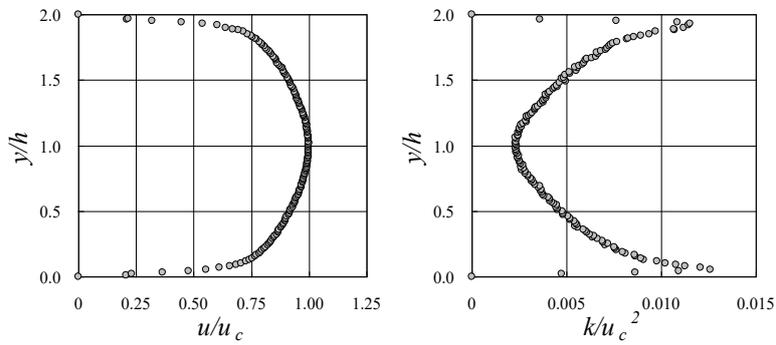
Inlet;

$$u = u_{in}(y), v = v_{in}(y) \cong 0, k = k_{in}(y), \varepsilon = \varepsilon_{in}(y)$$

Outlet; $P=0$



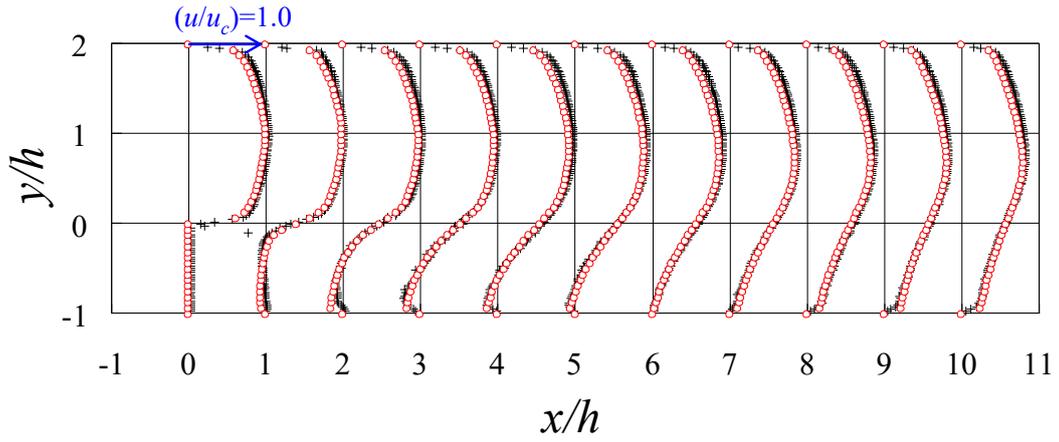
(a) 要素分割



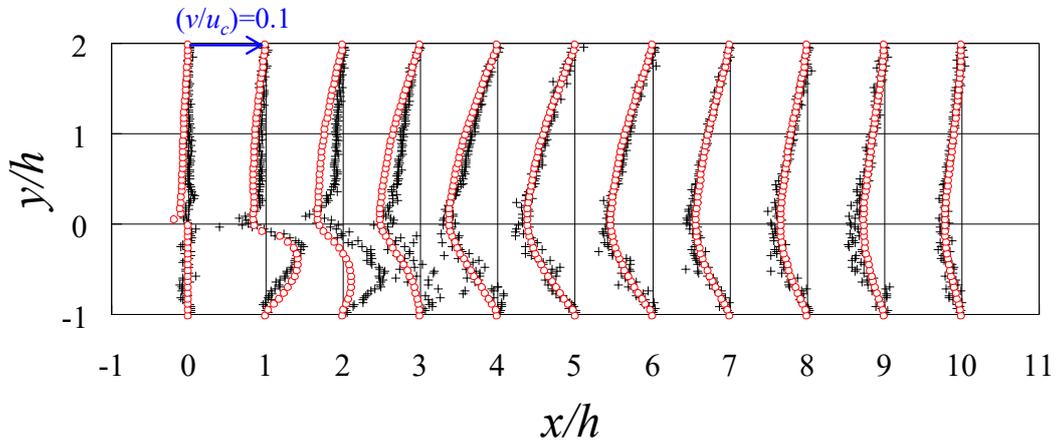
※ 散逸率 ε は $\varepsilon_{in}(y) = C_\mu^{3/4} k_{in}(y)^{3/2} / 0.09h$ から算出

(b) 流入流速／乱流エネルギー分布

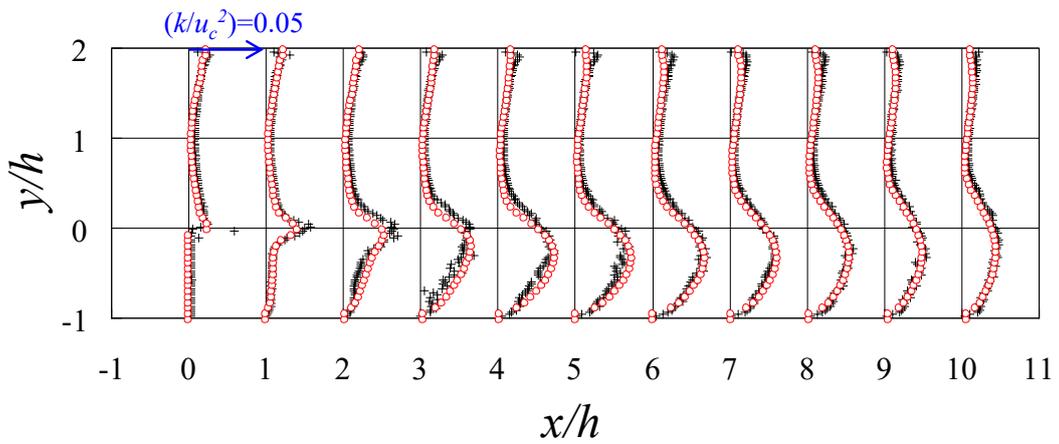
図 5.2.2-1 乱流ステップフロー解析：解析条件



(1) 流速 (u/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



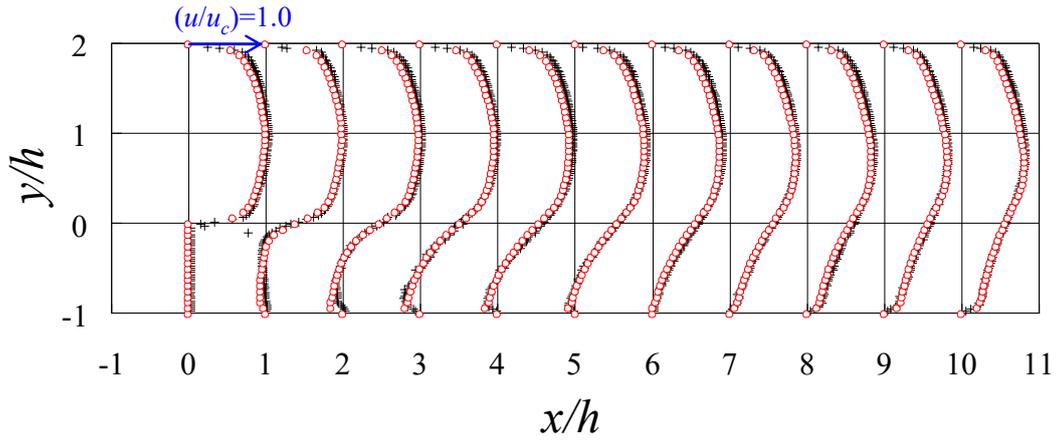
(2) 流速 (v/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



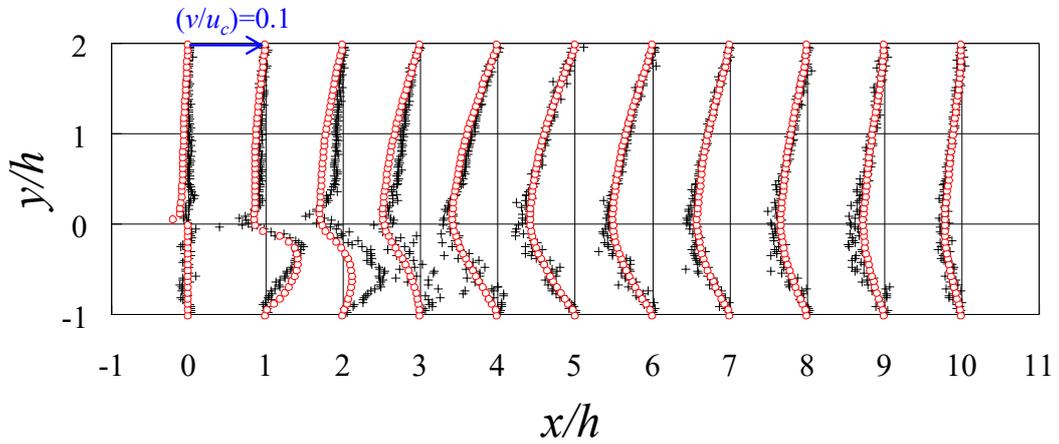
(3) 乱流エネルギー (k/u_c^2) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)

(再付着点位置 $5.58h$)

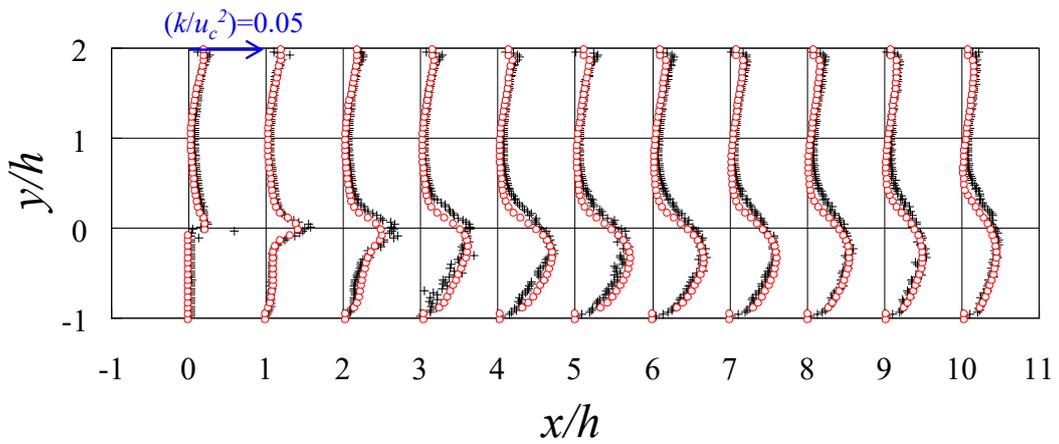
図 5.2.2-2 (a) 乱流ステップフロー解析：標準型 k-ε モデルによる解析結果



(1) 流速 (u/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



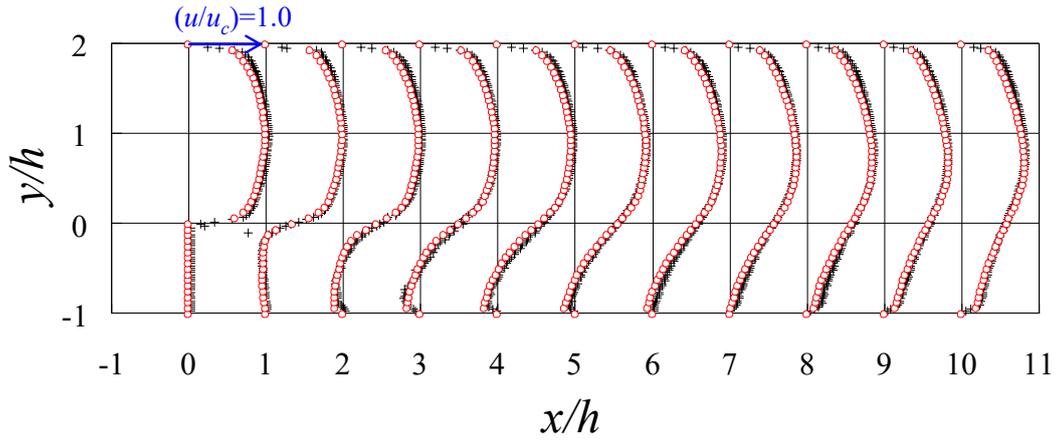
(2) 流速 (v/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



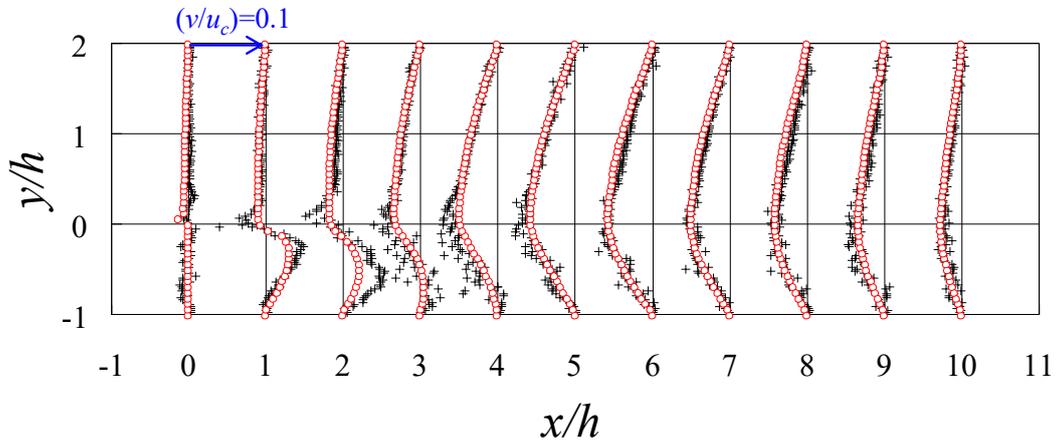
(3) 乱流エネルギー (k/u_c^2) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)

(再付着点位置 $6.01h$)

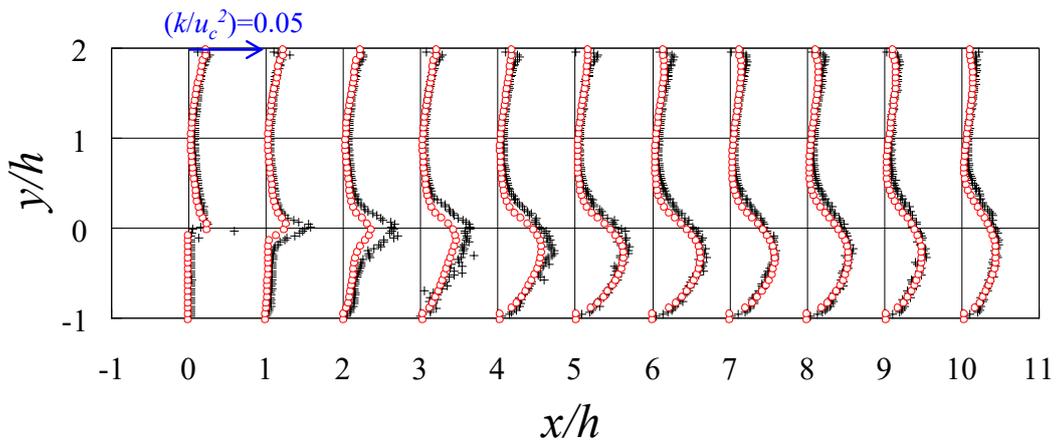
図 5.2.2-2 (b) 乱流ステップフロー解析 : Hybrid 型 k-ε モデルによる解析結果



(1) 流速 (u/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



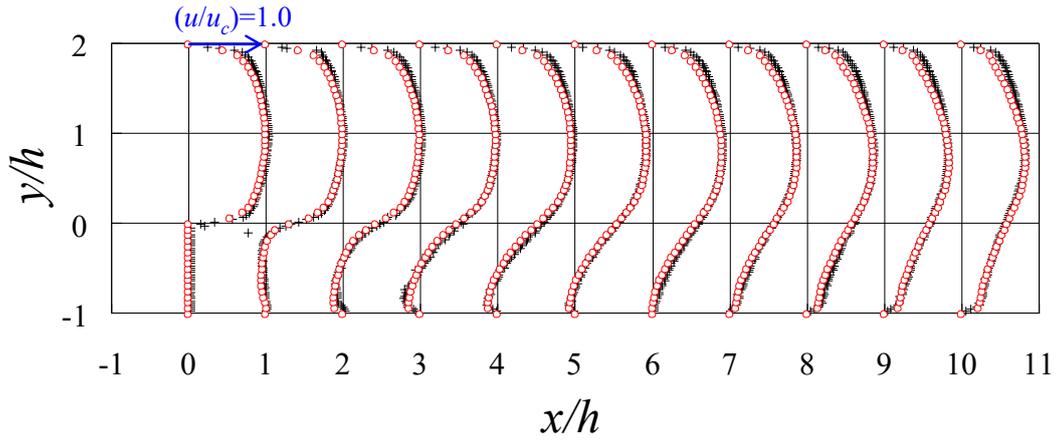
(2) 流速 (v/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



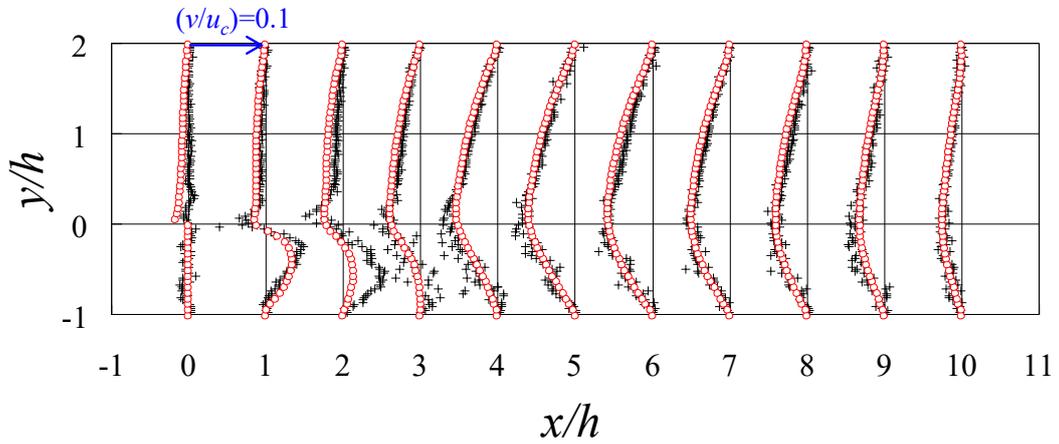
(3) 乱流エネルギー (k/u_c^2) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)

(再付着点位置 6.74h)

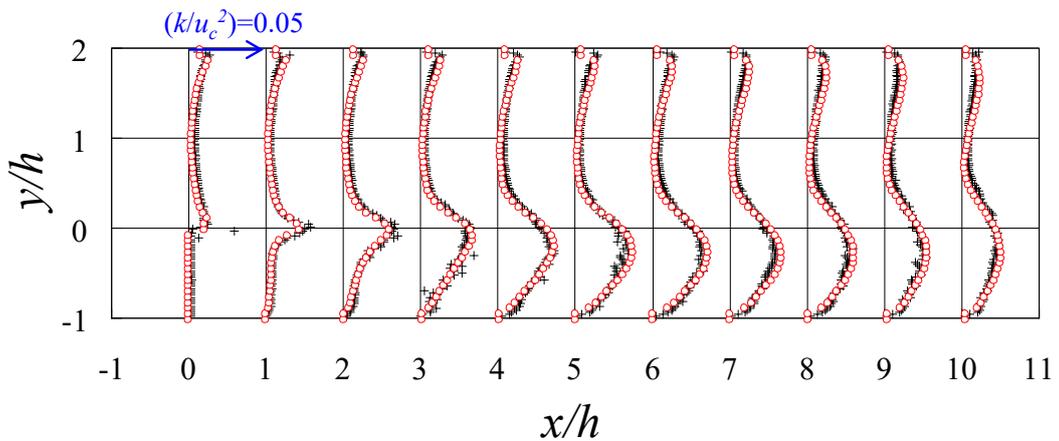
図 5.2.2-2 (c) 乱流ステップフロー解析 : RNG 型 k-ε モデルによる解析結果



(1) 流速 (u/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



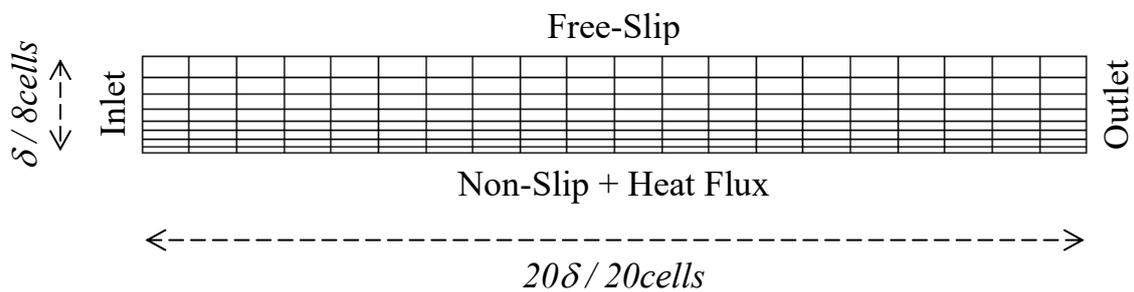
(2) 流速 (v/u_c) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)



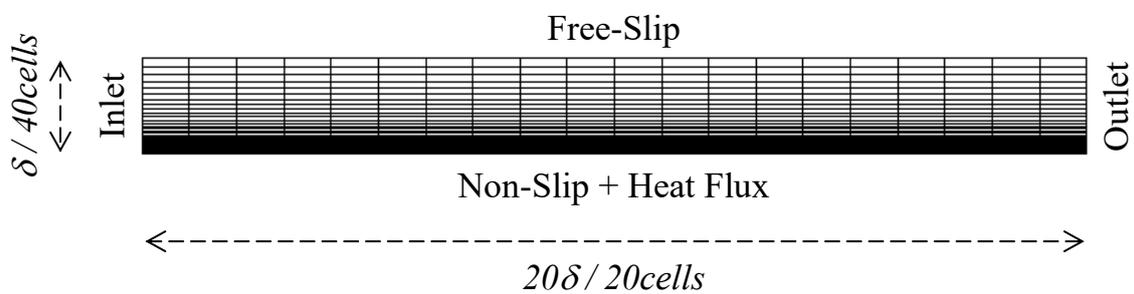
(3) 乱流エネルギー (k/u_c^2) の分布 (○ SPIRAL + Exp.)

(再付着点位置 $5.96h$)

図 5.2.2-2 (d) 乱流ステップフロー解析：代数応力モデルによる解析結果

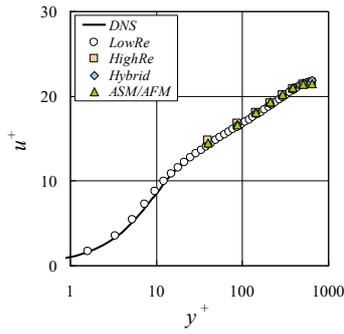


(a) 要素分割

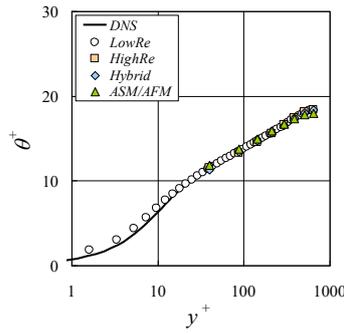


(b) 要素分割 (低 Re 数型モデル用)

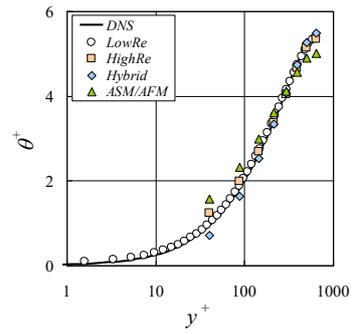
図 5.2.3-1 平行平板間乱流熱伝達解析：解析条件



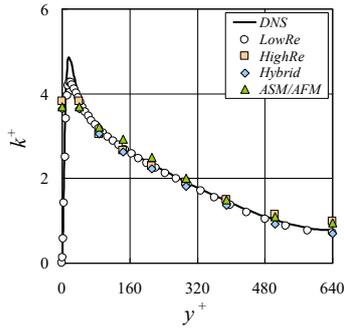
(1) 流速 u^+



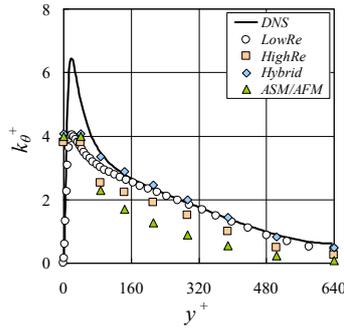
(2) 温度 θ^+ , $Pr = 0.71$



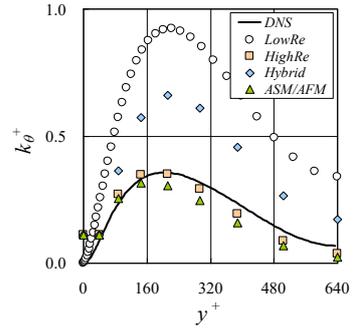
(3) 温度 θ^+ , $Pr = 0.025$



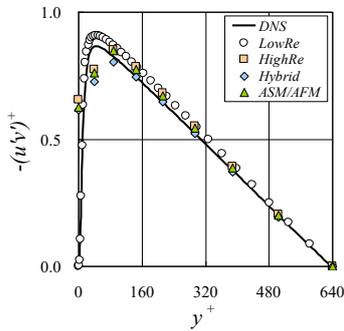
(4) 乱流エネルギー k^+



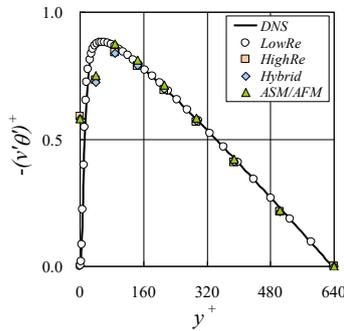
(5) 温度バリエンス k_{θ}^+ , $Pr = 0.71$



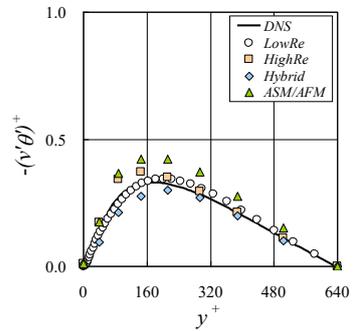
(6) 温度バリエンス k_{θ}^+ , $Pr = 0.025$



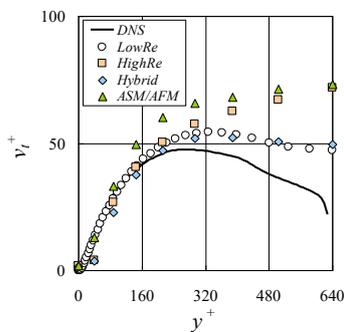
(7) レイノルズ応力 $-(u'v')^+$



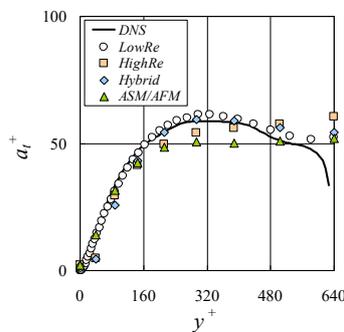
(8) 乱流熱流束 $-(v'\theta)^+$, $Pr = 0.71$



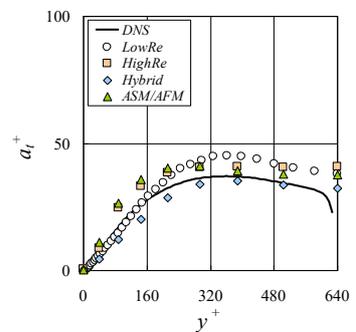
(9) 乱流熱流束 $-(v'\theta)^+$, $Pr = 0.025$



(10) 乱流動粘性係数 ν_t^+

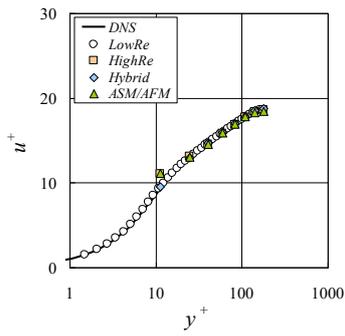


(11) 乱流拡散係数 α_t^+ , $Pr = 0.71$

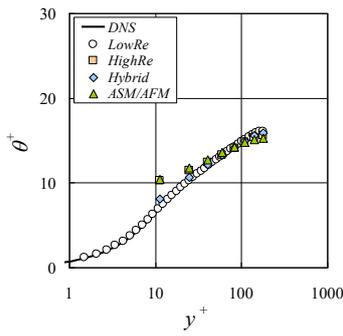


(12) 乱流拡散係数 α_t^+ , $Pr = 0.025$

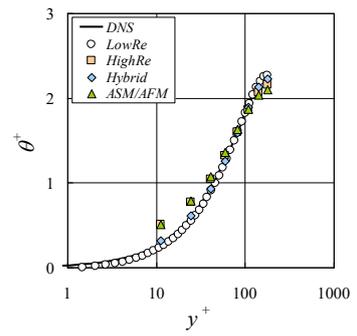
図 5.2.3-2 (a) 平行平板間乱流熱伝達解析：解析結果 ($Re_{bulk}=24428, Re_{\tau}=640$)



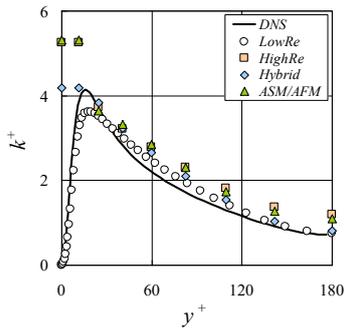
(1) 流速 u^+



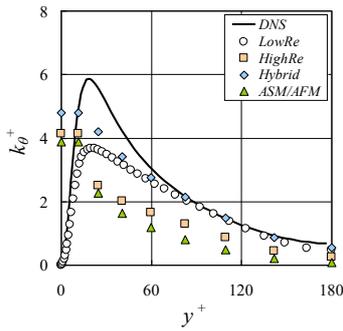
(2) 温度 θ^+ , $Pr = 0.71$



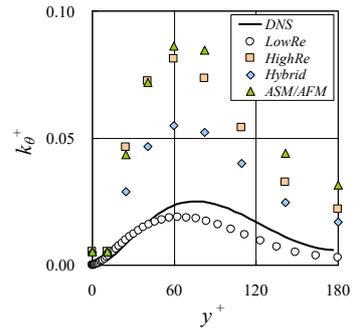
(3) 温度 θ^+ , $Pr = 0.025$



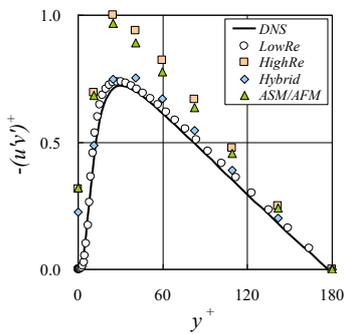
(4) 乱流エネルギー k^+



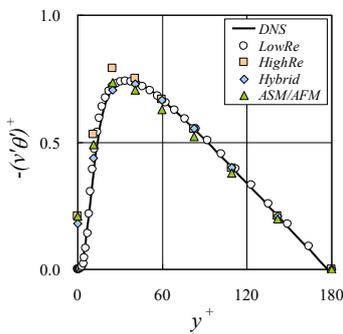
(5) 温度バリエンス k_{θ^+} , $Pr = 0.71$



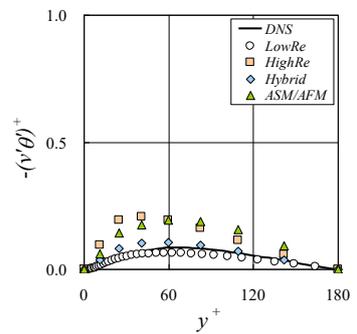
(6) 温度バリエンス k_{θ^+} , $Pr = 0.025$



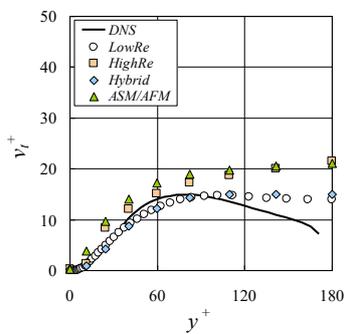
(7) レイノルズ応力 $-(u'v')^+$



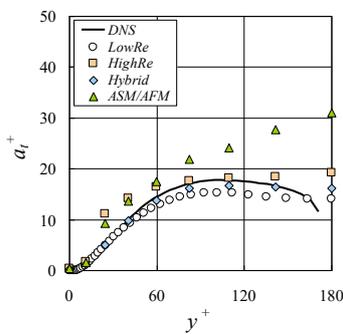
(8) 乱流熱流束 $-(v'\theta')^+$, $Pr = 0.71$



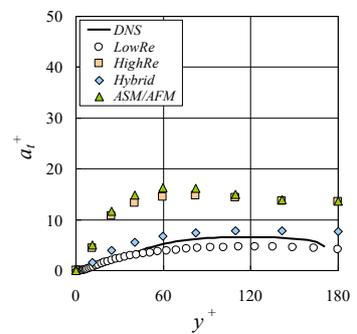
(9) 乱流熱流束 $-(v'\theta')^+$, $Pr = 0.025$



(10) 乱流動粘性係数 ν_t^+

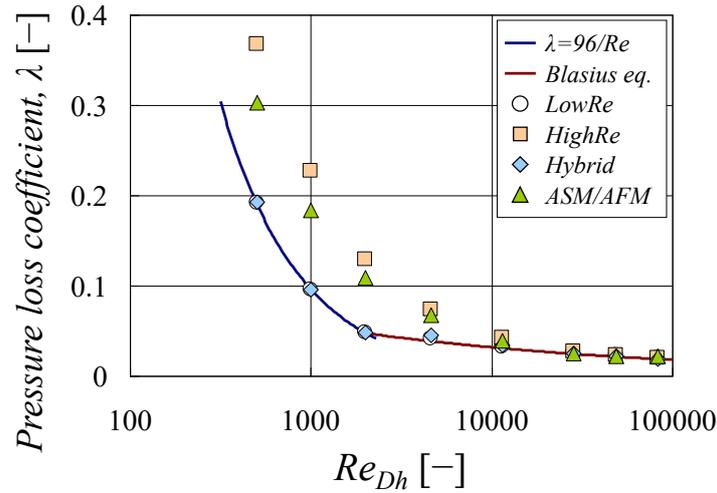


(11) 乱流拡散係数 α_t^+ , $Pr = 0.71$



(12) 乱流拡散係数 α_t^+ , $Pr = 0.025$

図 5.2.3-2 (b) 平行平板間乱流熱伝達解析：解析結果 ($Re_{bulk}=5731, Re_{\tau}=180$)

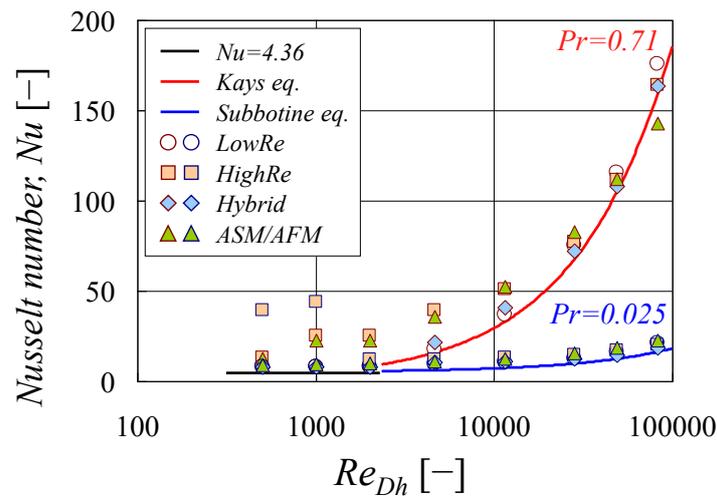


層流圧力損失相関式： $\lambda=96/Re_{Dh}$

Blasius の式： $\lambda=0.3164/Re_{Dh}^{1/4}$

$Re_{Dh}=2Re_{bulk}$

(a) 圧力損失係数 λ



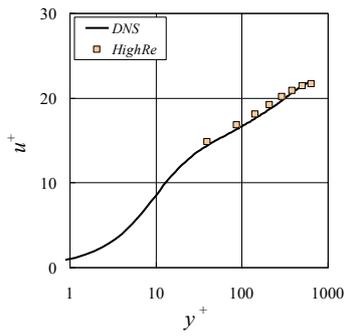
層流熱伝達相関式： $Nu=4.36$

Kays の式： $Nu=0.022Re_{Dh}^{0.8}Pr^{0.5}$ ($0.5 < Pr \leq 1.0, 10^4 \leq Re \leq 10^6$)

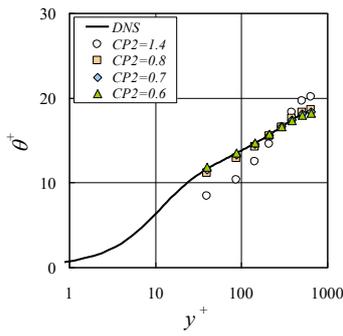
Subbotine の式： $Nu=5+0.025Pe_{Dh}^{0.8}, Pe_{Dh}=Re_{Dh}Pr$ (液体金属乱流)

(b) 熱伝達係数 Nu

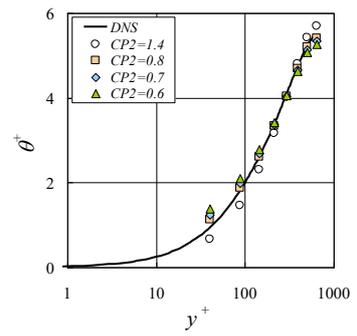
図 5.2.3-3 平行平板間乱流熱伝達解析：圧力損失係数 λ と熱伝達係数 Nu の分布



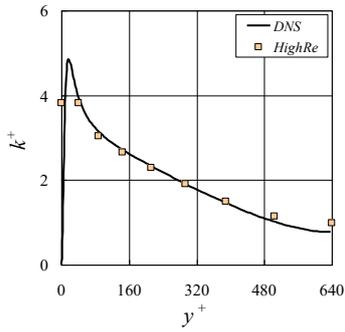
(a) 流速 u^+



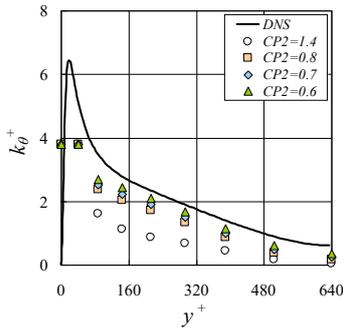
(b) 温度 θ^+ , $Pr = 0.71$



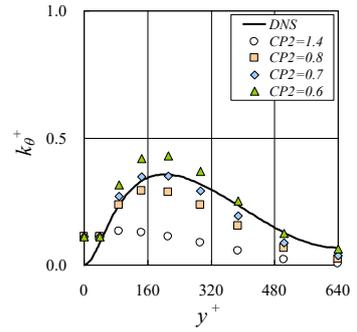
(c) 温度 θ^+ , $Pr = 0.025$



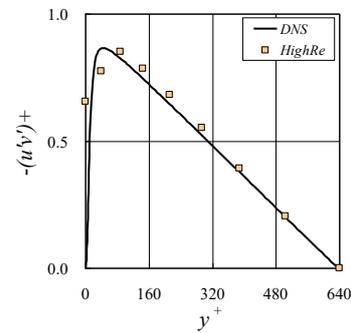
(d) 乱流エネルギー k^+



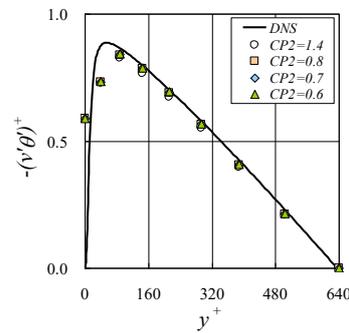
(e) 温度バリエンス k_{θ}^+ , $Pr = 0.71$



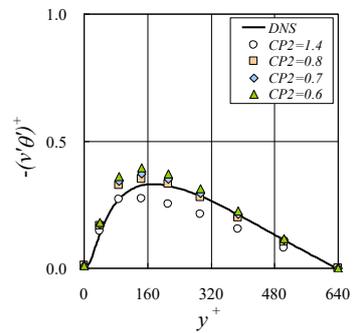
(f) 温度バリエンス k_{θ}^+ , $Pr = 0.025$



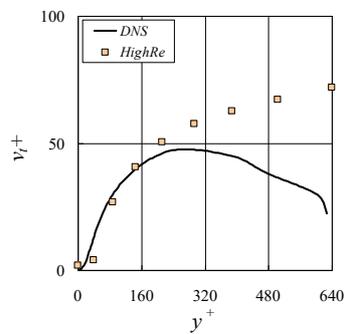
(g) レイノルズ応力 $-(u'v')^+$



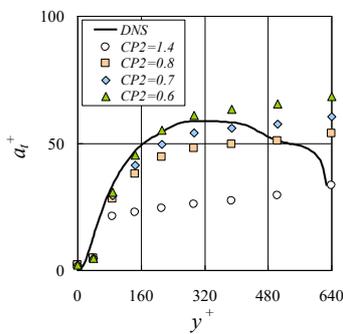
(h) 乱流熱流束 $-(v'\theta')^+$, $Pr = 0.71$



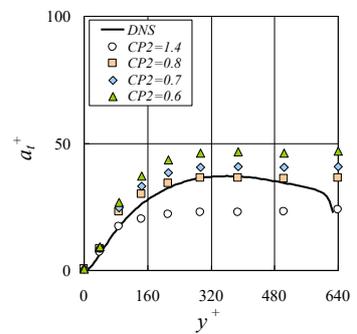
(i) 乱流熱流束 $-(v'\theta')^+$, $Pr = 0.025$



(j) 乱流動粘性係数 ν_t^+

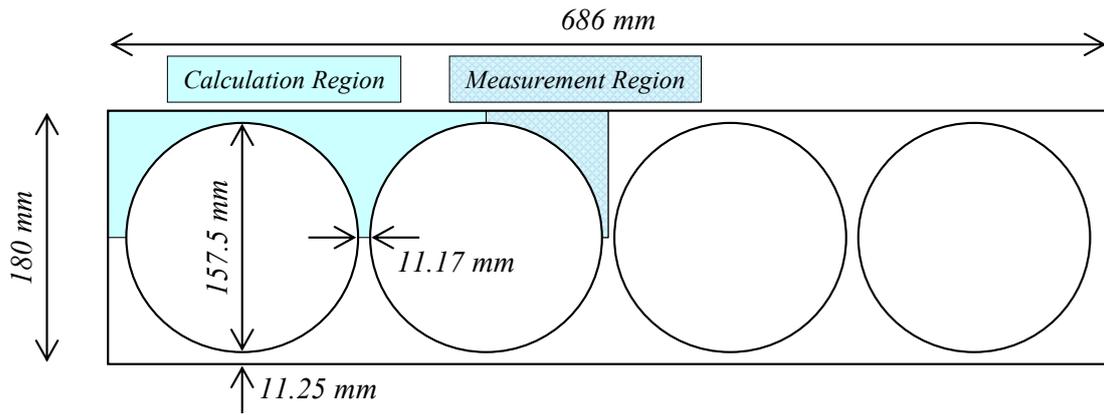


(k) 乱流拡散係数 a_t^+ , $Pr = 0.71$

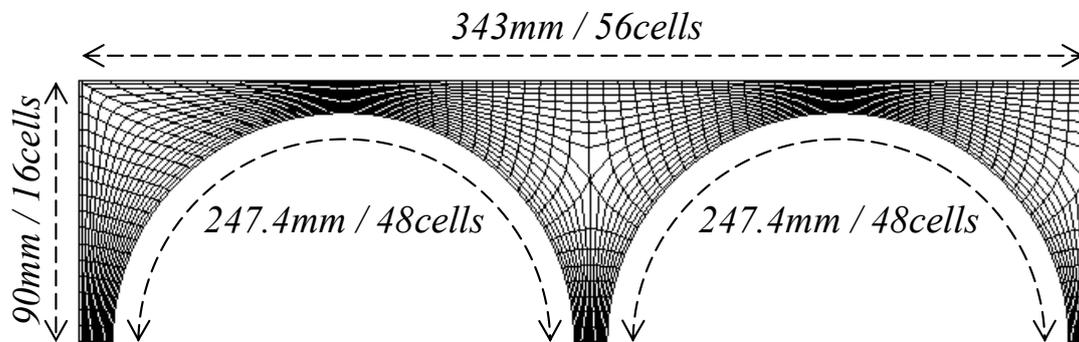


(l) 乱流拡散係数 a_t^+ , $Pr = 0.025$

図 5.2.3-4 平行平板間乱流熱伝達解析：解析結果 ($Re_{bulk}=24428, Re_{\tau}=640$)



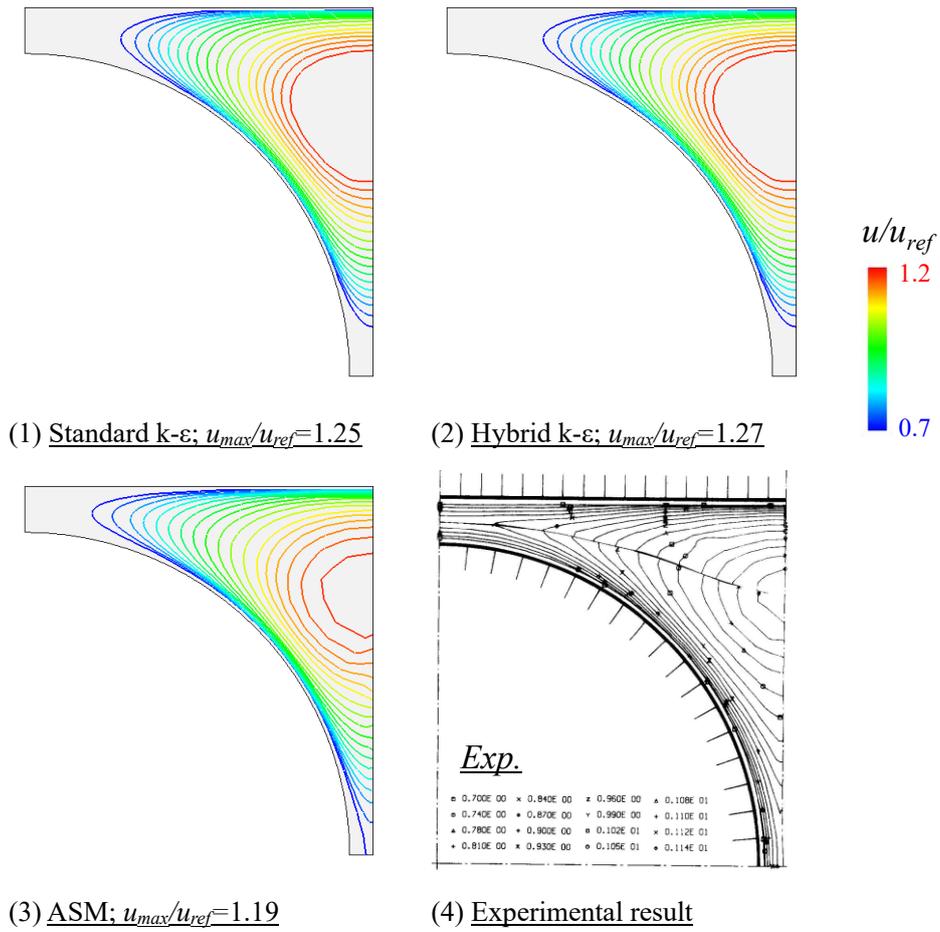
(a) 解析領域



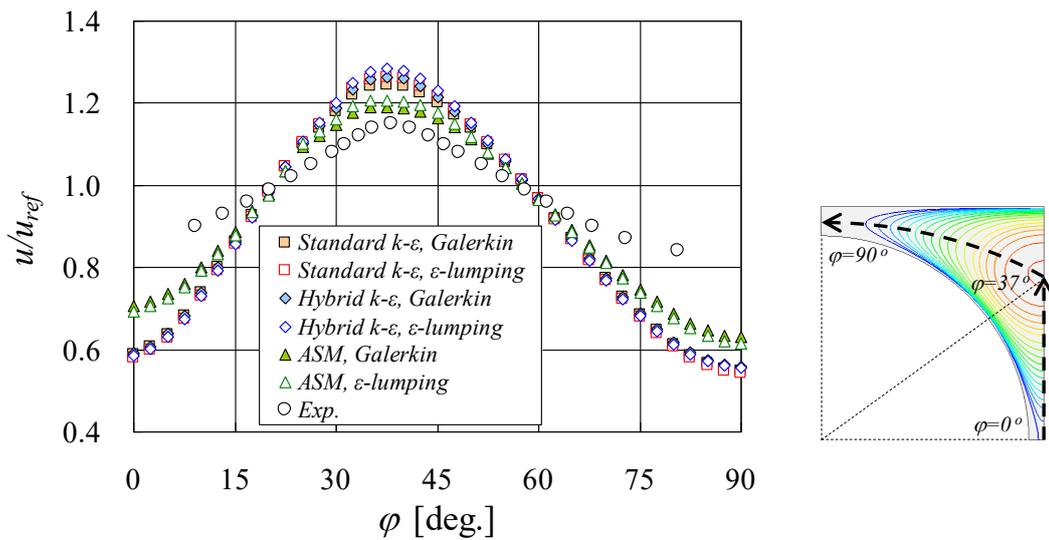
ロッド周方向 96 分割、径方向流路間 18 分割、要素数 1512 / 断面

(b) 要素分割

図 5.3.1-1 4 本ロッドバンドル試験解析：解析条件

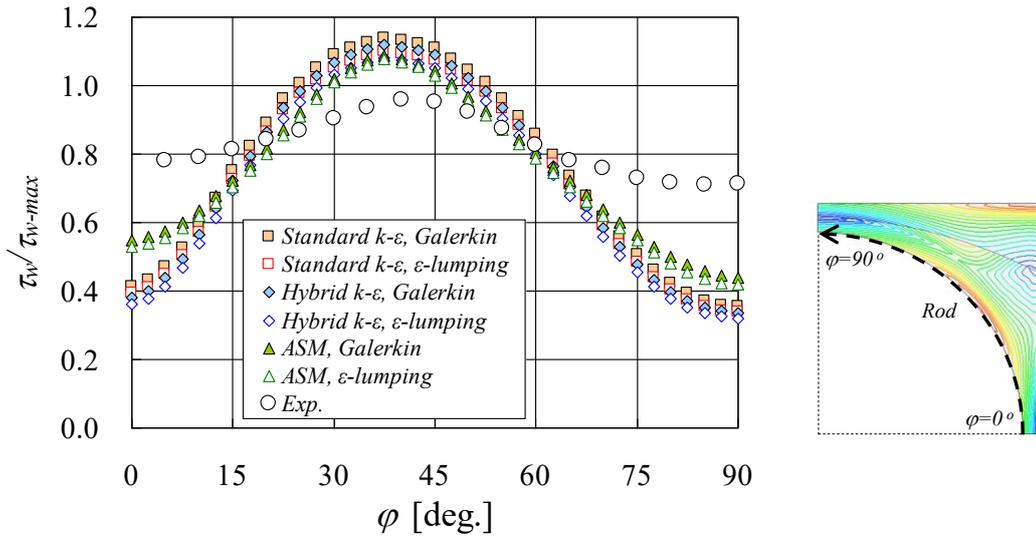


(a) 水平断面上における軸方向流速の分布

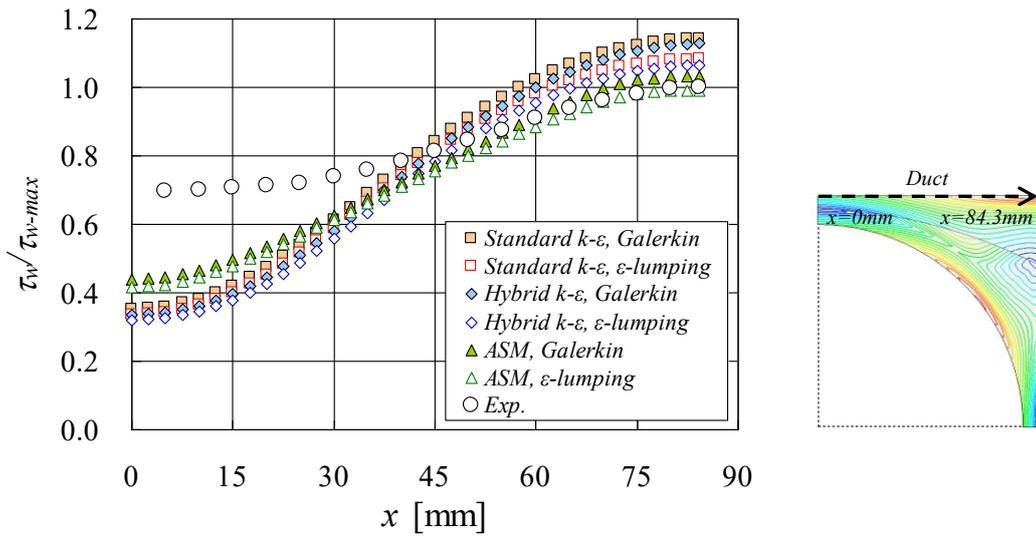


(b) 流路中心線上における軸方向流速の分布

図 5.3.1-2 4 本ロッドバンドル試験解析：軸方向流速 u/u_{ref} の分布 ($u_{ref}=27.74$ m/s)

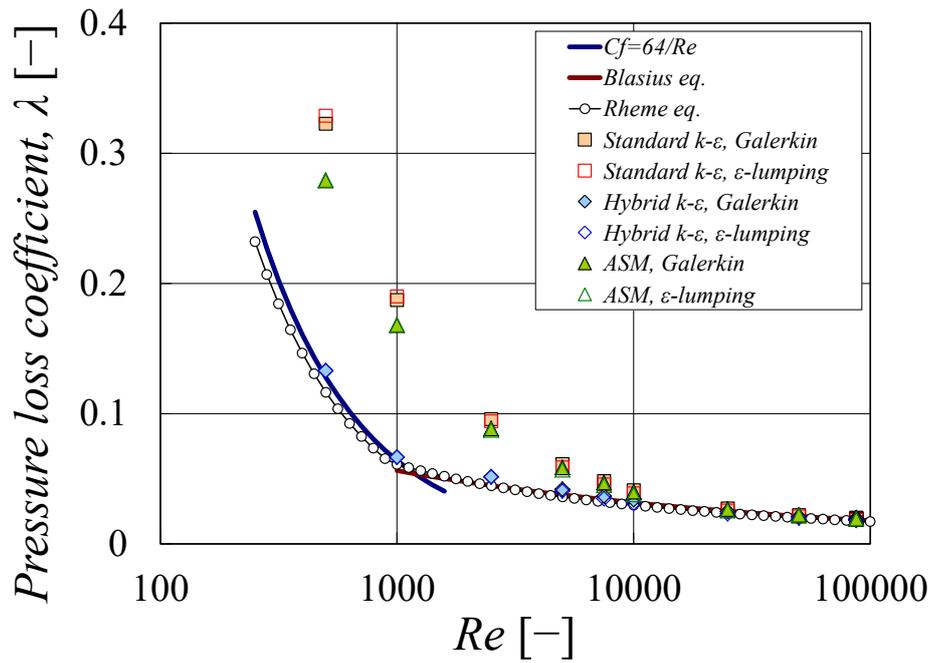


(a) ロッド壁上における壁剪断応力の分布



(b) ダクト壁上における壁剪断応力の分布

図 5.3.1-3 4本ロッドバンドル試験解析：壁剪断応力 τ_w / τ_{w-max} の分布 ($\tau_{w-max}=1.75 \text{ N}$)



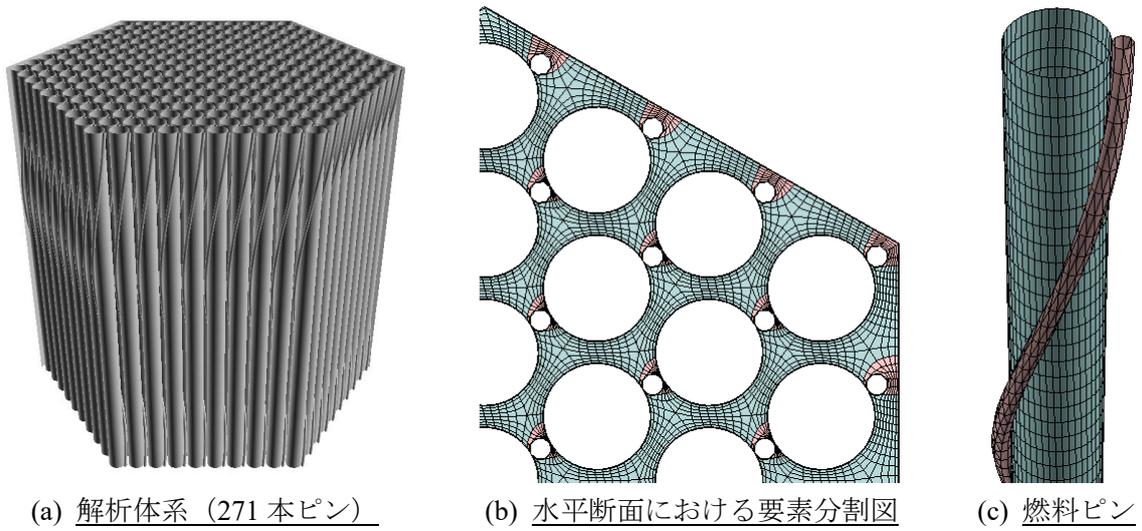
円管層流式 : $\lambda = 64/Re$

Blasius の式 : $\lambda = 0.3164/Re^{1/4}$

Rheme の式 (層流) : $\lambda = 58.3/Re$

Rheme の式 (乱流) : $\sqrt{8/\lambda} = 1.02(2.5 \ln Re \sqrt{\lambda/8} + 5.5) - 5.64$

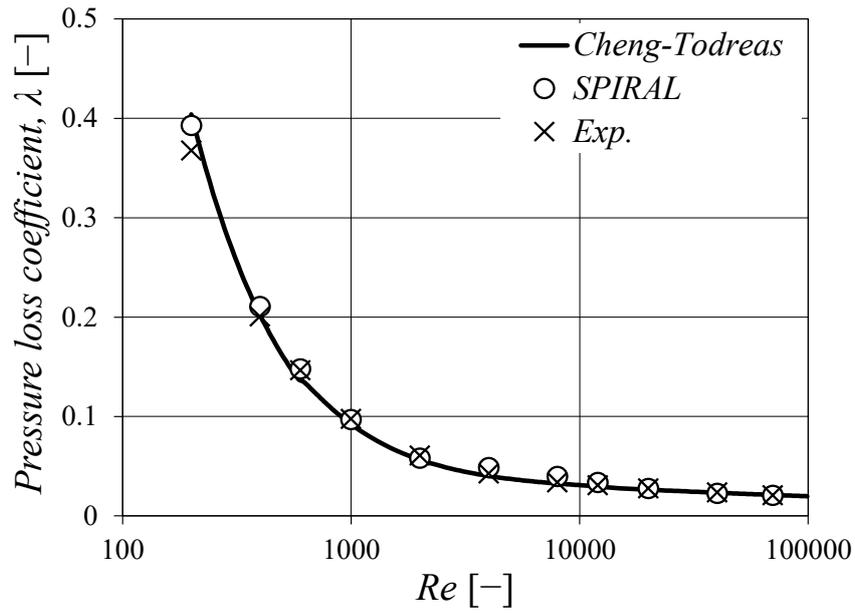
図 5.3.1-4 4 本ロッドバンドル試験解析：圧力損失係数 λ の分布



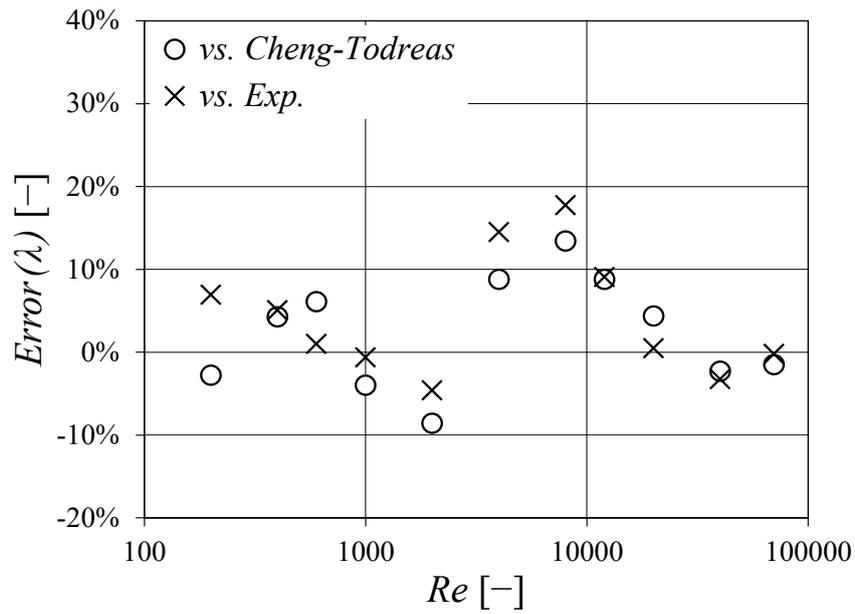
	127 本ピン	169 本ピン	271 本ピン
燃料ピン本数 :	127 pin	169 pin	271 pin
燃料ピン配列ピッチ :	6.47 mm	7.87 mm	9.00 mm
燃料ピン径 :	5.50 mm	6.50 mm	7.50 mm
ワイヤ径 :	0.90 mm	1.32 mm	1.40 mm
ワイヤ巻き付けピッチ :	209.0 mm	307.0 mm	165.0 mm
ラップ管対面間距離 :	74.7 mm	104.6 mm	150.8 mm
濡れぶち長さ :	2,812 mm	4,514 mm	8,100 mm
流路面積 :	1,734 mm ²	3,636 mm ²	7,303 mm ²
等価直径 :	2.47 mm	3.22 mm	3.61 mm
<i>P/D</i> :	1.18	1.21	1.20
<i>W/D</i> :	1.18	1.21	1.20
<i>H/D</i> :	38.00	47.23	22.00
要素総数/ワイヤピッチ :	1,792,420	2,347,149	3,711,652
要素総数/水平断面 :	36,580	47,901	75,748

(d) 主な仕様と要素総数

図 5.3.2-1 実規模スケール集合体解析 : 解析条件



(a) 圧力損失係数の分布

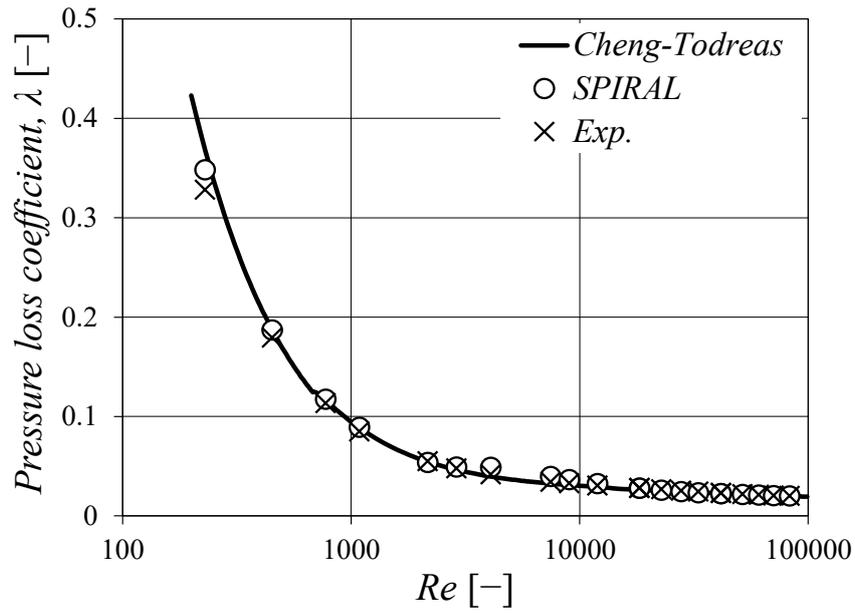


$$Error(\lambda) = \lambda_{(SPIRAL)} / \lambda_{(0)} - 1, \quad \lambda_{(0)} ; \lambda_{(Exp.)}, \lambda_{(Correlation)}$$

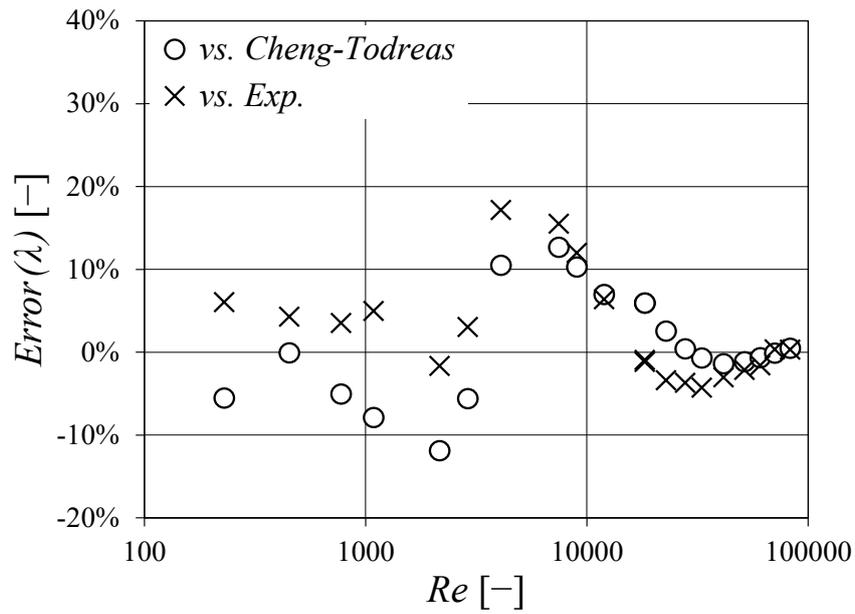
(b) 圧力損失係数誤差の分布

($P/D=1.18, H/D=38.00$)

図 5.3.2-2 実規模スケール集合体解析：「常陽」型 127 本ピン集合体解析結果



(a) 圧力損失係数の分布

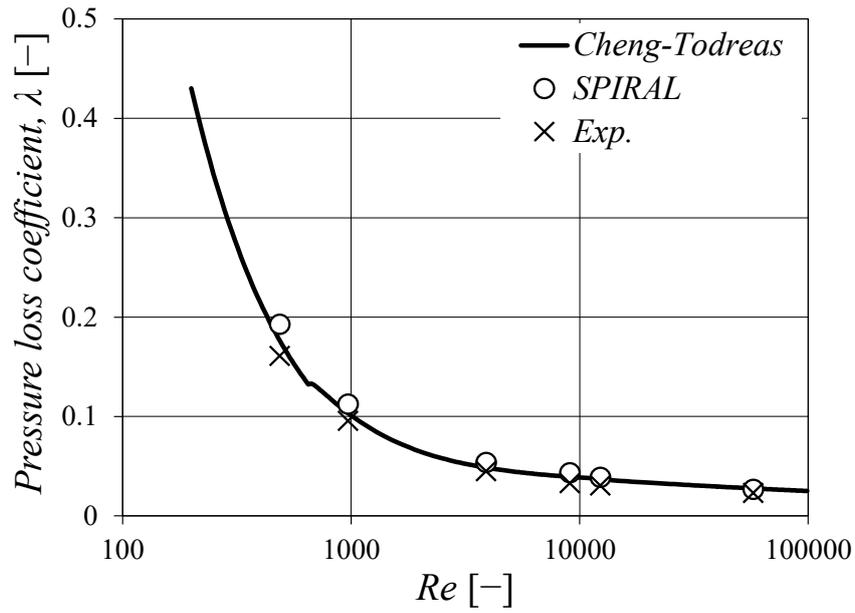


$$Error(\lambda) = \lambda_{(SPIRAL)} / \lambda_{(0)} - 1, \quad \lambda_{(0)}; \lambda_{(Exp.)}, \lambda_{(Correlation)}$$

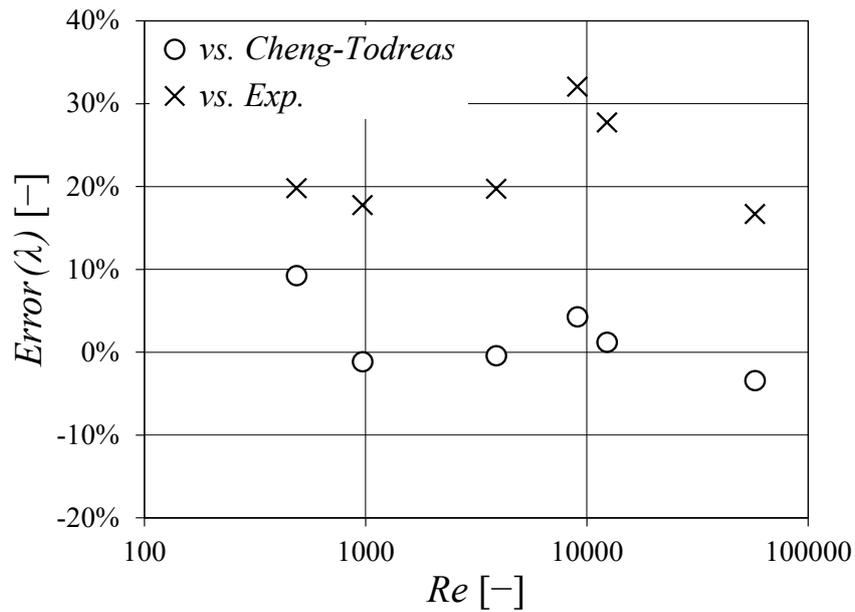
(b) 圧力損失係数誤差の分布

($P/D=1.21, H/D=47.23$)

図 5.3.2-3 実規模スケール集合体解析：「もんじゅ」型 169 本ピン集合体解析結果



(a) 圧力損失係数の分布

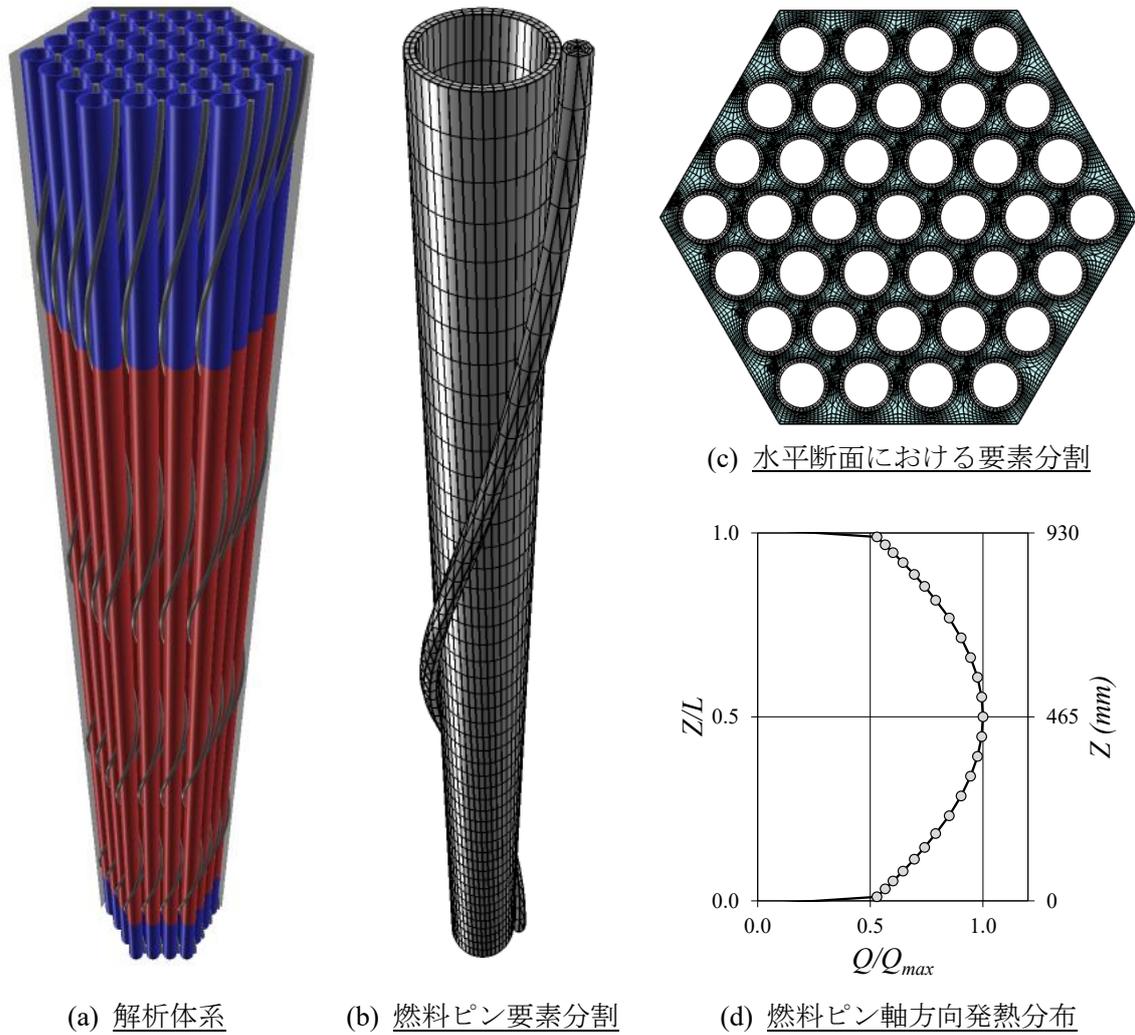


$$Error(\lambda) = \lambda_{(SPIRAL)} / \lambda_{(0)} - 1, \quad \lambda_{(0)} ; \lambda_{(Exp.)}, \lambda_{(Correlation)}$$

(b) 圧力損失係数誤差の分布

($P/D=1.20, H/D=22.00$)

図 5.3.2-4 実規模スケール集合体解析：大型バンドル 271 本ピン集合体解析結果



<u>集合体仕様</u>		<u>要素分割 (流体領域)</u>	
燃料ピン本数	: 37 pin	燃料ピン周方向	: 48 分割
燃料ピン配列ピッチ	: 7.87 mm	燃料ピン径方向	: 流路間 10 分割
燃料ピン径	: 6.50 mm	燃料ピン軸方向	: 160 分割
ワイヤ巻き付けピッチ	: 307.0 mm	<u>要素分割 (構造材領域)</u>	
ワイヤ径	: 1.32 mm	被覆管径方向	: 2 分割
ラップ管対面間距離	: 50.4 mm	ワイヤ径方向	: 4 分割
軸方向発熱部長	: 930.0 mm	<u>総計</u>	
<u>試験条件</u>		節点総数	: 2,567,306
冷却材流量	: 273 l/min	要素総数	: 2,779,520
冷却材下端温度	: 397 °C		(fluid: 1,914,560 + solid: 864,960)
集合体総発熱量	: 735 kW		

図 5.3.3-1 PLANDTL 試験解析：解析条件

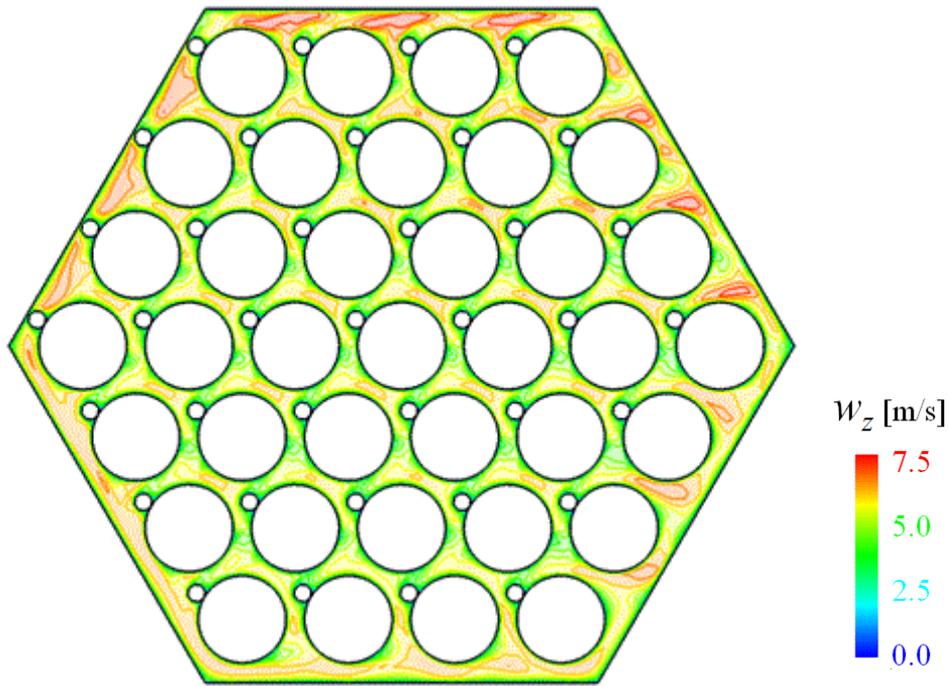


図 5.3.3-2 (a) PLANDTL 試験解析：軸方向流速 w_z の分布

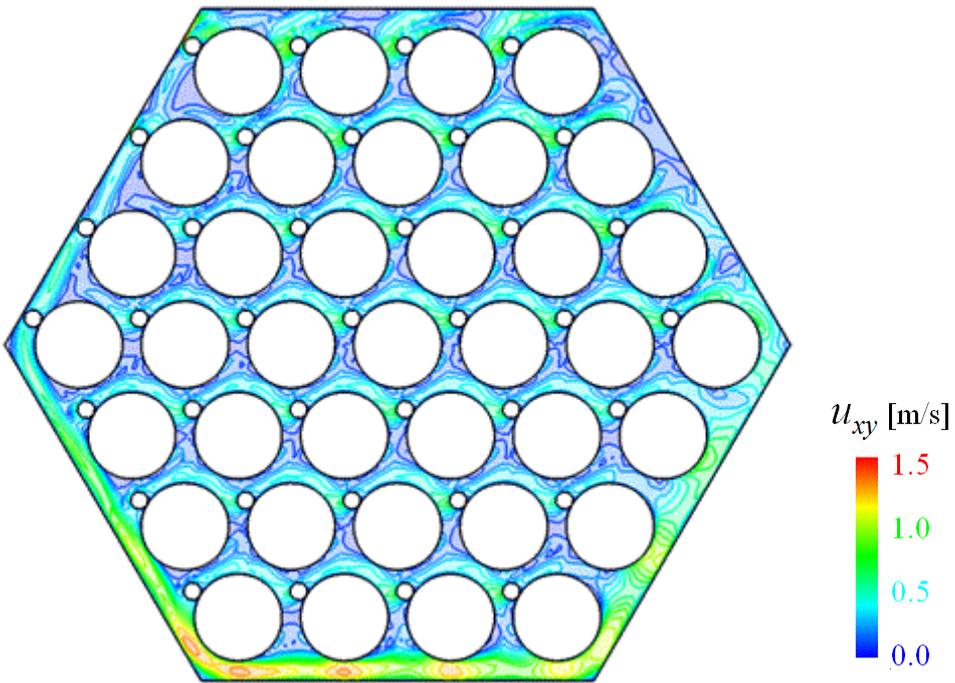


図 5.3.3-2 (b) PLANDTL 試験解析：横方向流速 u_{xy} の分布

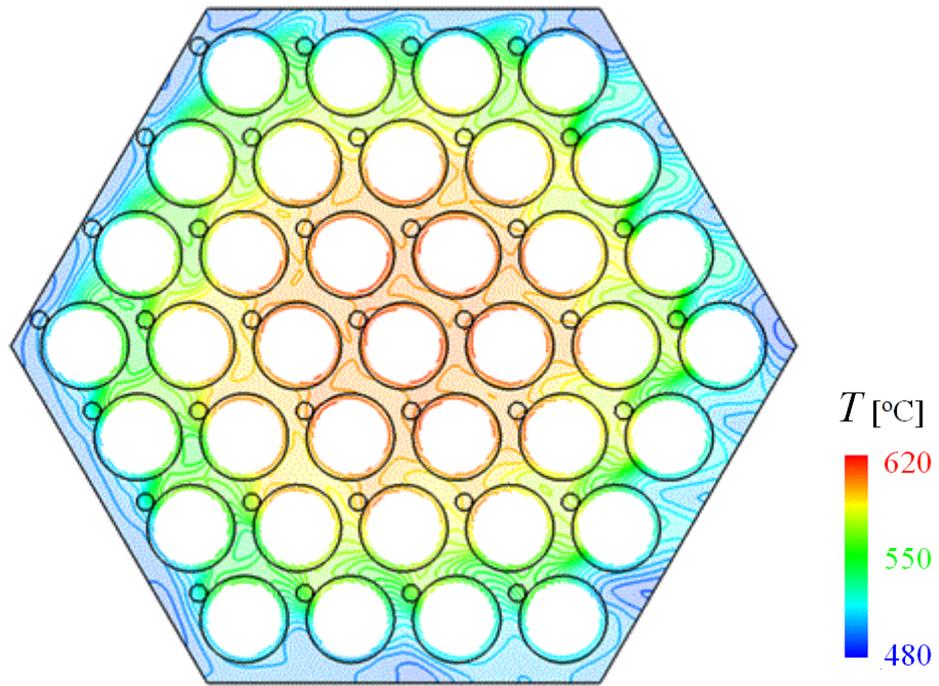


図 5.3.3-2 (c) PLANDTL 試験解析：時間平均温度 T の分布

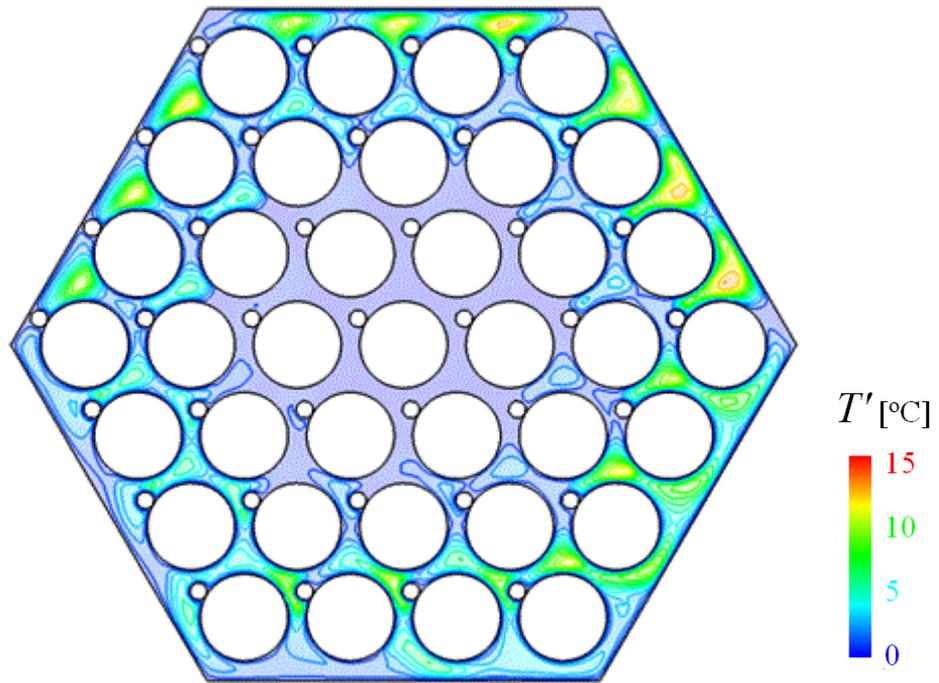


図 5.3.3-2 (d) PLANDTL 試験解析：温度揺らぎ T' の分布

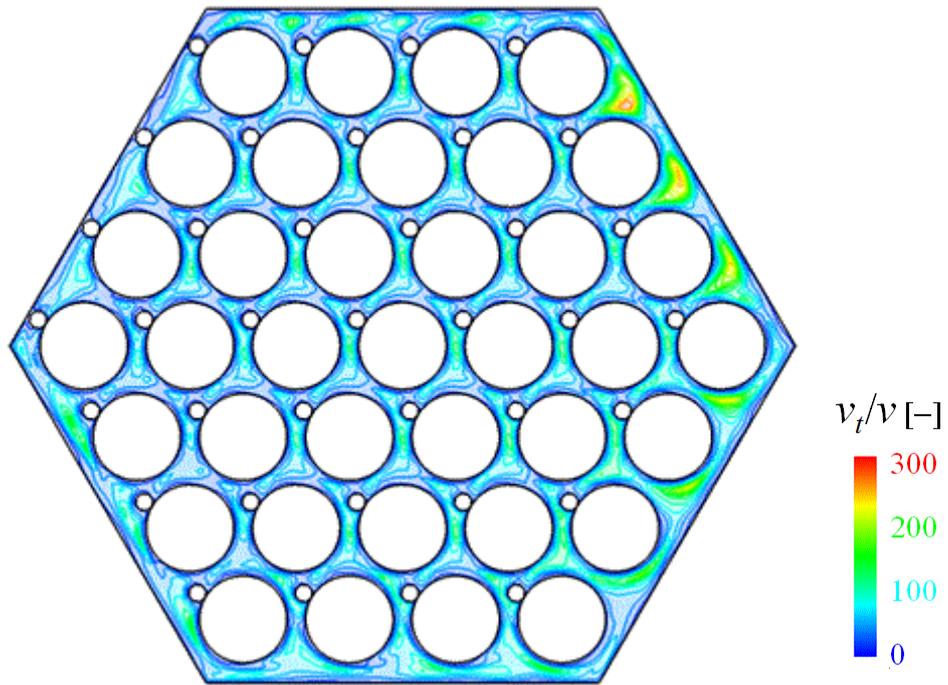


図 5.3.3-2 (e) PLANDTL 試験解析：乱流動粘性係数 ν_t/ν の分布

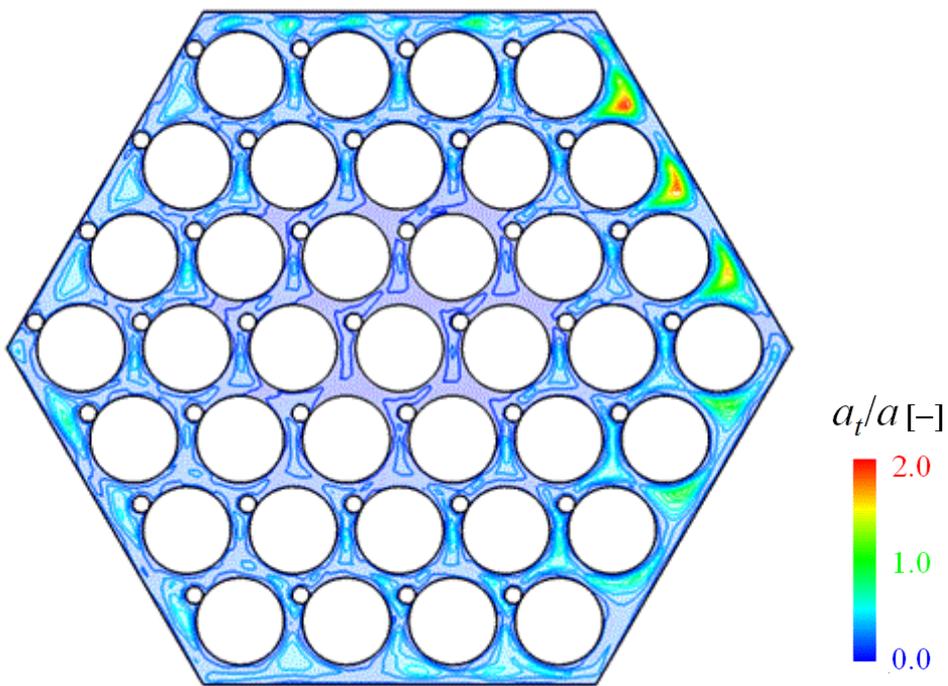
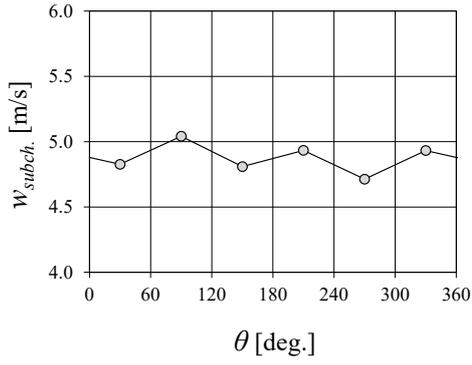
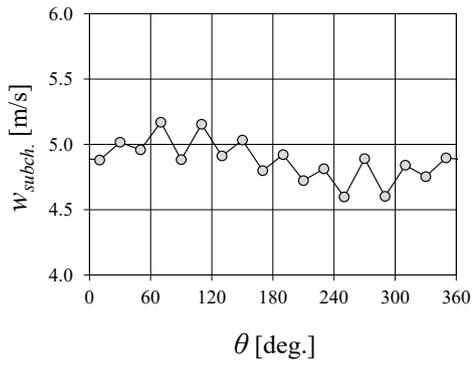
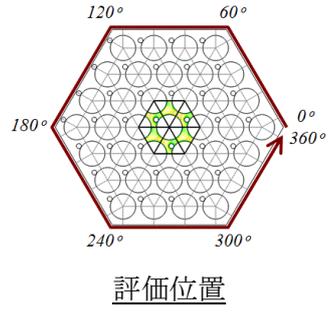


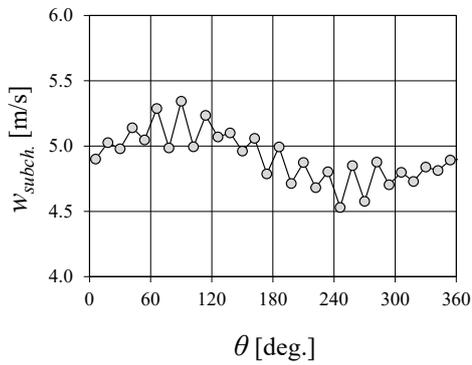
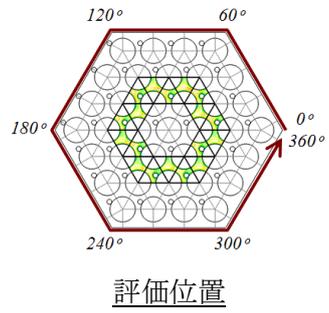
図 5.3.3-2 (f) PLANDTL 試験解析：乱流拡散係数 a_t/a の分布



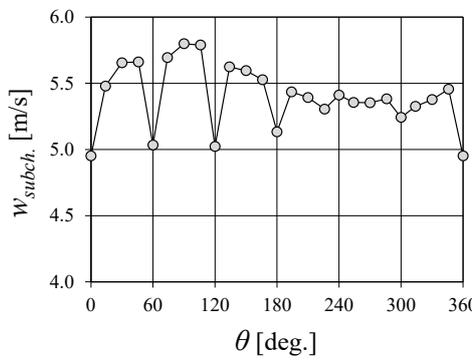
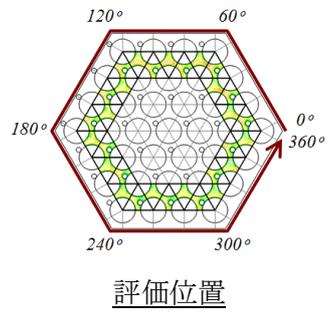
(a) 第1サブチャンネル層



(b) 第2サブチャンネル層



(c) 第3サブチャンネル層



(d) 第4サブチャンネル層

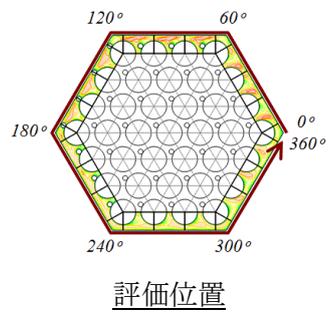
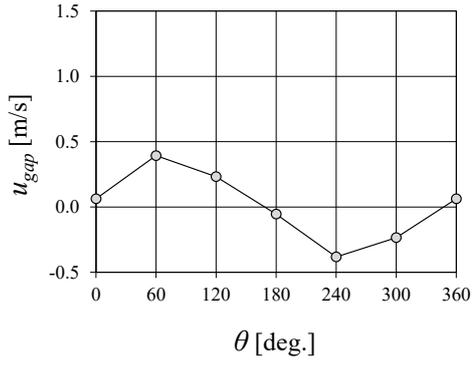
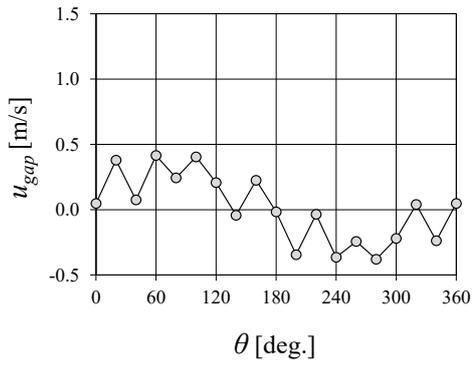
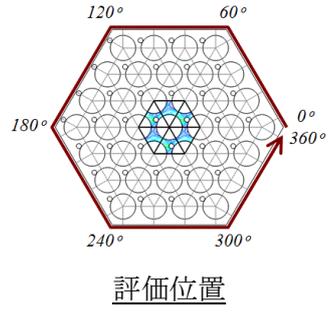


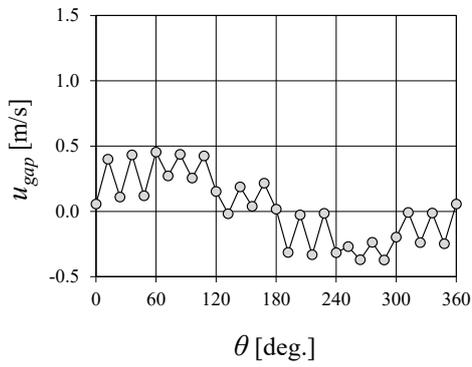
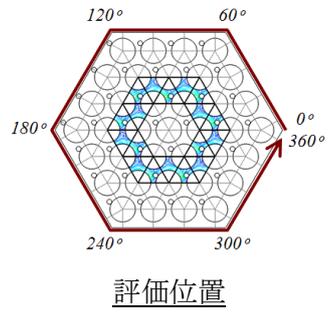
図 5.3.3-3 (a) PLANDTL 試験解析：サブチャンネル平均軸方向流速 w_{subch} の分布



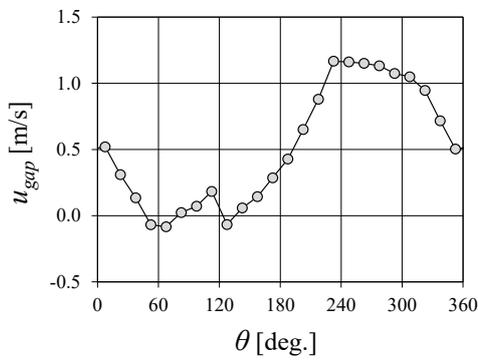
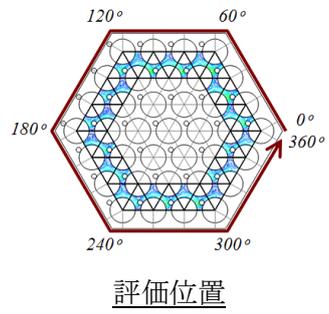
(a) 第1サブチャンネル層



(b) 第2サブチャンネル層



(c) 第3サブチャンネル層



(d) 第4サブチャンネル層

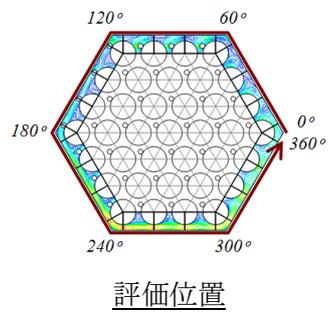
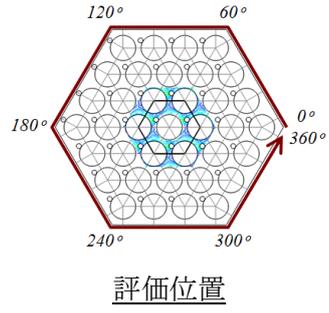
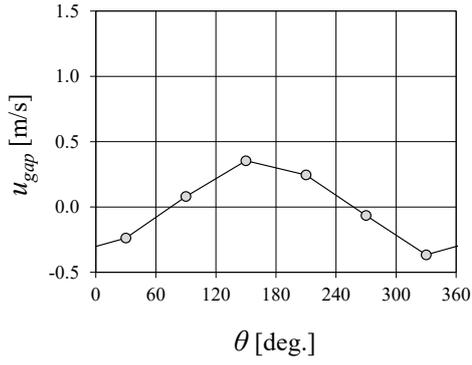
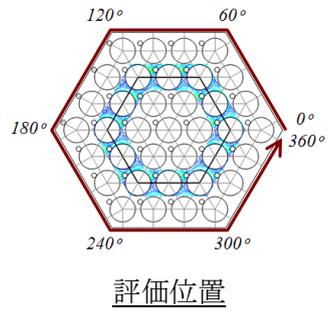
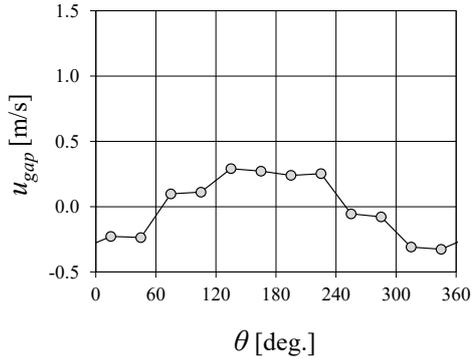


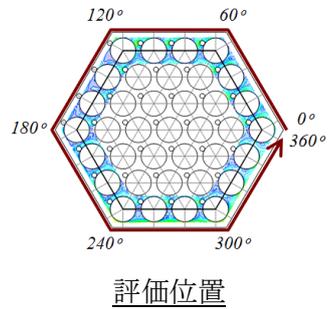
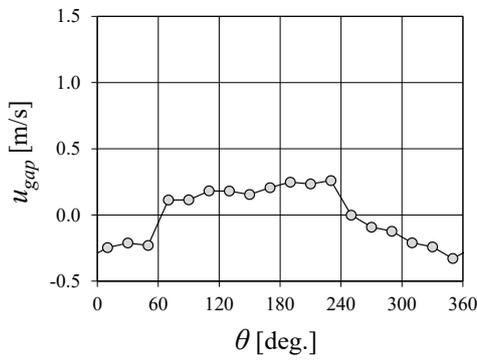
図 5.3.3-3 (b) PLANDTL 試験解析：ギャップ平均横方向流速 u_{gap} の分布



(a) 第1-第2サブチャンネル層間

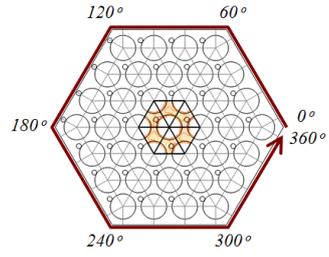
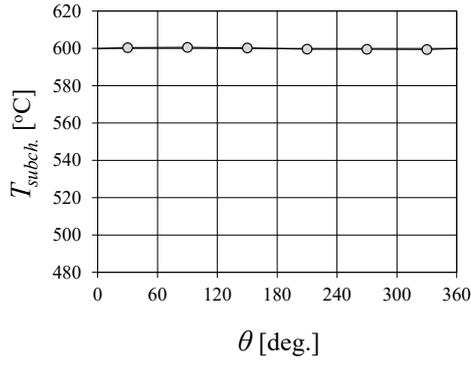


(b) 第2-第3サブチャンネル層間



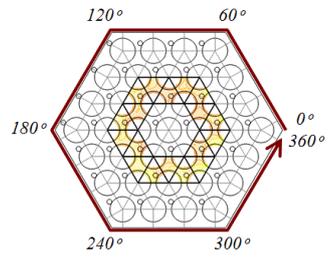
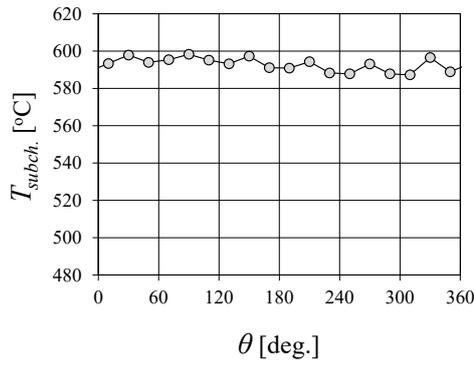
(c) 第3-第4サブチャンネル層間

図 5.3.3-3 (c) PLANDTL 試験解析：ギャップ平均横方向流速 u_{gap} の分布



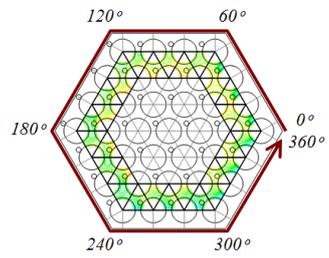
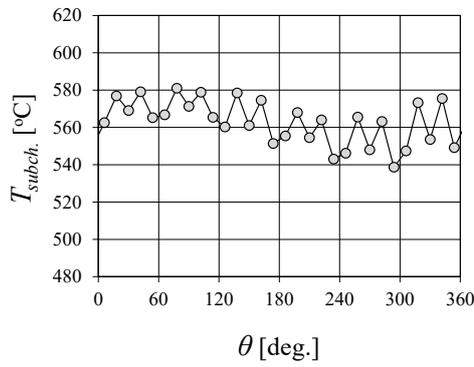
評価位置

(a) 第1サブチャンネル層



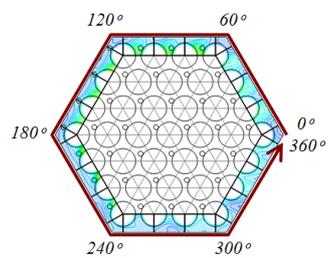
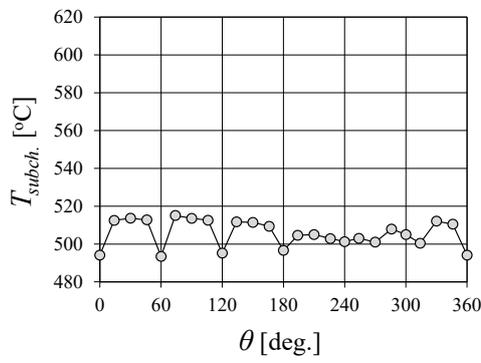
評価位置

(b) 第2サブチャンネル層



評価位置

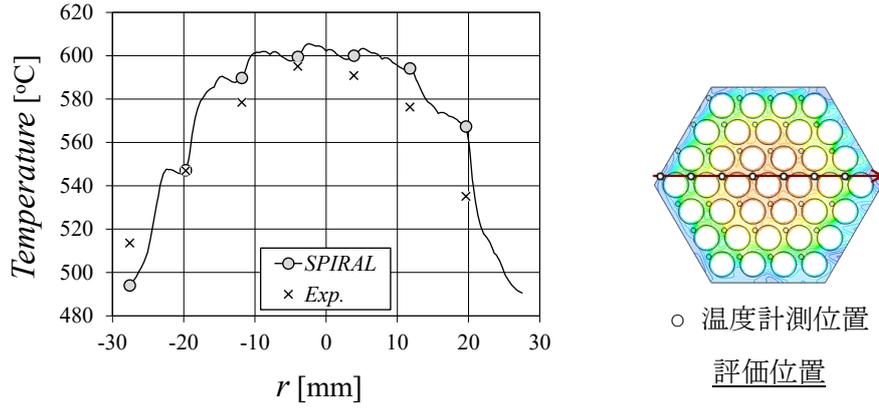
(c) 第3サブチャンネル層



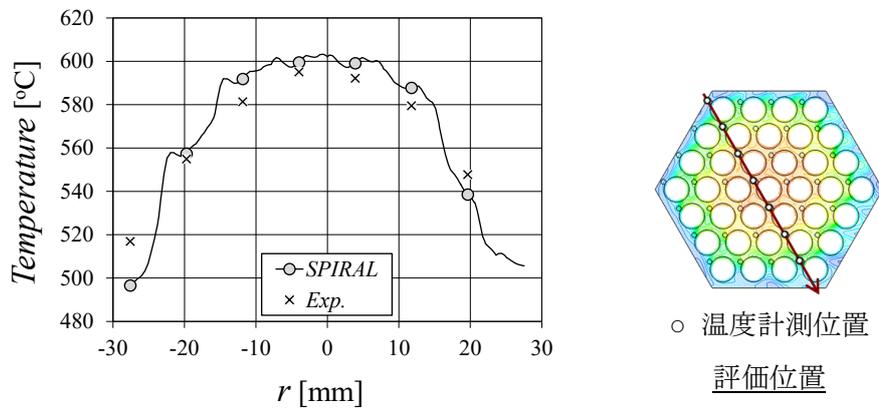
評価位置

(d) 第4サブチャンネル層

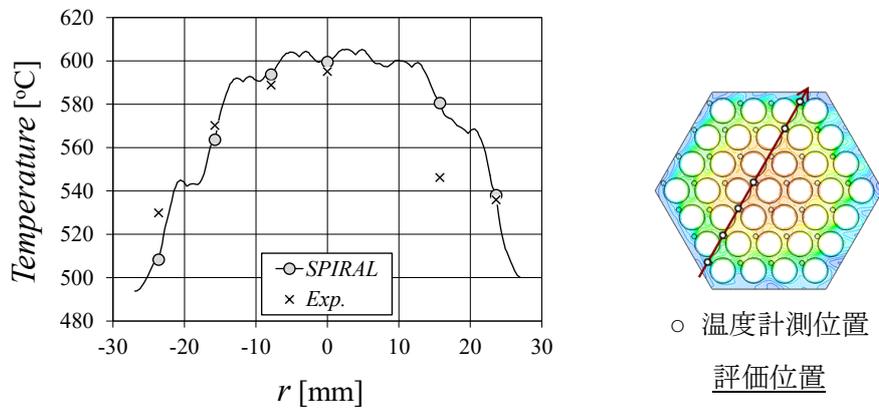
図 5.3.3-3 (d) PLANDTL 試験解析：サブチャンネル平均流体温度 T_{subch} の分布



(a) 比較位置 (1)

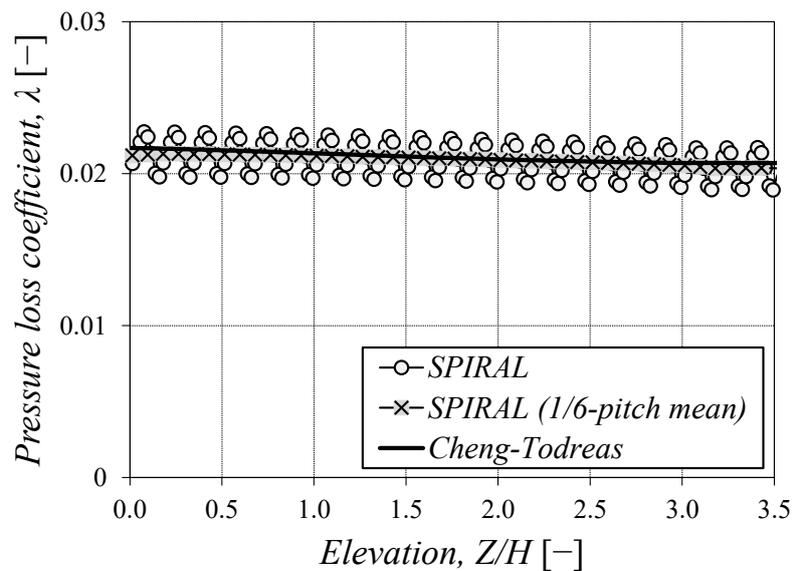


(b) 比較位置 (2)



(c) 比較位置 (3)

図 5.3.3-4 PLANDTL 試験解析：試験計測温度との比較



SPIRAL (1/6-pitch mean) : $\lambda = 0.0212$ (inlet) ~ 0.0204 (outlet)

Cheng-Todreas : $\lambda = 0.0217$ (inlet) ~ 0.0207 (outlet)

図 5.3.3-5 PLANDTL 試験解析 : 圧力損失係数 λ の比較

6. 結言

熱流動現象を詳細に予測し、合理的な安全設計評価に寄与するために、燃料集合体内の複雑形状を模擬できる有限要素法を用いた燃料集合体内詳細熱流動解析コード SPIRAL の整備を進めてきた。燃料集合体内の熱流動は、高速炉の運転条件によって層流から乱流まで幅広く遷移し、ワイヤの影響によって局所的な Re 数は空間的に幅広く分布する。そこで、層流-乱流間の遷移領域を含む幅広い Re 数範囲における熱流動場を再現するため、標準型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルに低 Re 数型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルの長所を組み合わせた Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ 乱流モデルを整備した。本報では、SPIRAL の基礎方程式、Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルを含む各種乱流モデルから導かれる構成方程式、それらの有限要素法による定式化とその数値計算上での取り扱い及び有限要素法に特化した境界条件の取り扱いについて記述するとともに、圧力損失及び温度分布の予測に関する Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルの妥当性確認として実施した解析の結果をまとめた。妥当性確認解析を通じて、乱流モデルとして Hybrid 型 $k-\varepsilon/k_0-\varepsilon_0$ モデルを採用した SPIRAL によって、燃料集合体内の熱流動現象を詳細に予測できる見通しを得た。

今後、V&V の規格基準に基づき、燃料集合体内熱流動に関する現象の重要度を確認し、妥当性確認解析の計画を見直すとともに、妥当性確認解析を拡充することで SPIRAL の信頼性向上を図る予定である。

参考文献

- 1) 大島宏之, 今井康友, 高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発(1), JNC TN9400 2001-064, 2001, 90p.
- 2) 大島宏之, 今井康友, 高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発(2)ー乱流モデルの導入ー, JNC TN9400 2003-045, 2003, 74p.
- 3) 出口明, 大島宏之, 燃料集合体詳細熱流動解析コード SPIRAL の並列化, JNC TN9400 2003-88, 2003, 81p.
- 4) Kikuchi, N., Imai, Y., Yoshikawa, R., Doda, N., and Tanaka, M., Investigation on Applicability of Subchannel Analysis Code ASFRE to Thermal-Hydraulics Analysis in Fuel Assembly With Inner Duct Structure of Sodium Cooled Fast Reactor, ASME J. Nucl. Eng. Radiat. Sci., 9(3), 2023, p. 031401.
- 5) Launder, B. E. and Spalding, D. B., The numerical computation of turbulent flows, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol.3, 1974, pp.269-289.
- 6) Jones, W. P. and Musonge, P., Modeling of scalar transport in homogeneous turbulent flows, Proceedings of 4th Symposium on Turbulent Shear Flows, Karlsruhe, West Germany, 1983, pp. 17.18-17.24.
- 7) Nagano, Y. and Hishida, M., Production and dissipation of turbulent velocity and temperature fluctuations in fully developed pipe flow, Ithaca, New York, USA, Proceedings of 5th Symposium on Turbulent Shear Flows, 1985, pp.14.19-14.24.
- 8) 安倍賢一, 長野靖尚, 近藤継男, はく離・再付着を伴う乱流場への適用を考慮した $k-\varepsilon$ モデル, 日本機械学会論文集 B 編, 58 (554), 1992, pp.3003-3010.
- 9) 安倍賢一, 長野靖尚, 近藤継男, はく離・再付着を伴う乱流熱伝達を解析するための温度場 2 方程式モデル, 日本機械学会論文集 B 編, 60 (573), 1994, pp.1743-1750.
- 10) 島田昌也, 長野靖尚, 種々の Pr 数流体の乱流直接シミュレーションに基づく温度場 2 方程式モデルの構築, 日本機械学会論文集 B 編, 61 (584), 1995, pp.1462-1469.
- 11) Yakhot, V. and Smith, L. M., The renormalization group, the ε -expansion and derivation of turbulence models, J. Sci. Comp., vol.7, 1992, pp.35-61.
- 12) Murakami, S., Mochida, A., Kondo, K., Ishida, Y. and Tsuchiya, M., Development of new $k-\varepsilon$ model for flow and pressure fields around bluff body, CWE96, Colorado, USA, 1996.
- 13) Viollet, P. L., The modeling of Turbulent Recirculating Flows for the Purpose Reactor Thermal-Hydraulic Analysis, Nucl. Eng. Design, vol.99, 1987, pp.365-377.
- 14) Daly, B. J. and Harlow, F. H., Transport equations of turbulence, Phys. Fluids, vol.13, 1970, pp.2634-2649.
- 15) Rotta, J. C., Statistische theorie nichthomogener turbulenz, Zeitschr Phys., vol.129, 1951, pp.547-572.
- 16) Naot, D., Shavit, A. and Wolfshtein, M., Interactions between components of the turbulent velocity

- correlation tensor, Israel J. Tech., vol.8, 1970, pp.259-269.
- 17) Shir, C. C., A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flow in the idealized planetary boundary layer, J. Atmos. Sci., vol.30, 1973, pp.1327-1339.
 - 18) Gibson, M. M. and Launder, B. E., Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech., vol.86, 1978, pp.491-511.
 - 19) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W., Progress in the development of Reynolds stress turbulence closure, J. Fluid Mech., vol.68, 1975, pp.537-566.
 - 20) Launder, B. E. and Shima, N., Second-moment closure for the near-wall sublayer – Development and application, AIAA J., vol.27, 1989, pp.1319-1325.
 - 21) Rodi, W., A new algebraic relation for the calculating the Reynolds stresses, ZAMM, vol.56, 1976, pp.219-221.
 - 22) Hinze, J. O., Turbulence (2nd edition), Mc Graw-Hill, 1975.
 - 23) Kader, B. A., Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.24, 1981, pp.1541-1544.
 - 24) Myong, H. K., Kasagi, N. and Hirata, M., Numerical prediction of turbulent pipe flow heat transfer for various Prandtl number fluids with the improved k- ϵ turbulence model, JSME Int. J. , Ser. II, vol.32, 1989, pp.613-622.
 - 25) 長野靖尚, 田川正人, 新美幹夫, k- ϵ 乱流モデルの改良 : 壁・自由乱流の漸近挙動と逆圧力こ
う配の影響, 日本機械学会論文集 B 編, 55 (512), 1989, pp.1008-1015.
 - 26) 長野靖尚, 田川正人, 辻俊博, 壁乱流の漸近挙動を考慮した温度場 2 方程式乱流モデル, 日本
機械学会論文集 B 編, 56 (530), 1990, pp.3087-3093.
 - 27) Ramaswamy, B. and Kawahara, M., Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for the
Analysis of Free Surface Fluid Flows, Proceedings of Int. Conf. Comp. Mech., Tokyo, 1986.
 - 28) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection
dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comp. Meth.
Appl. Mech. Eng., vol.32, 1982, pp.199-295.
 - 29) Mikhlin, S. G., Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon, Oxford, 1964.
 - 30) Gresho, P., Chen, M., Lee, R. and Upson, C., A modified finite element method for solving the time
dependant incompressible Navier-Stokes equation. Part- I. Theory, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol.4, 1984,
pp.557-598.
 - 31) Abe, H., Kawamura, H. and Matsuo, Y., Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to
 $Re_{\tau}=1020$ with $Pr=0.025$ and 0.71 , Int. J. Heat and Fluid Flow, vol. 25, 2004, pp.404-419.
 - 32) American Society of Mechanical Engineers, ASME V&V 20 Standard for Verification and Validation in
Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer, ASME, New York, ASME V&V 20-2009, 2009, 88p.

- 33) Shounauer, W., Raith, K. and Glotz, G., The self adaptive of nonlinear 2-D boundary value problems in a rectangular domain, Proceedings of Int. Conf. Num. Meth. Lam. Turb. Flow, Venice, 1981.
- 34) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, J. Comput. Phys., vol.48, no.3, 1982, pp.387-411.
- 35) de Vahl Davis, G., Natural convection of air in a square cavity: A benchmark numerical solution, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol.3, 1983, pp.227-264.
- 36) Denham, M. K. and Patrick, M. A., Laminar Flow over a Downstream-Facing Step in a Two-Dimensional Flow Channel, Trans. Instn. Chem. Engrs., vol.52(4), 1974, pp.361-367.
- 37) Maekawa, I., Numerical Diffusion in Single-Phase Multi-Dimensional Thermal-Hydraulic Analysis, Nucl. Eng. Design, vol.120, 1990, pp.323-339.
- 38) 村松 壽晴, ニノ方壽, 単相多次元熱流動解析コード AQUA -利用手引書-, PNC TN9460 91-006, 1991, 52p.
- 39) Kasagi, N. and Matsunaga, A., Three-dimensional particle tracking velocimetry measurement of turbulent statistic and energy budget in a backward-facing step flow, Int. J. Heat and Fluid Flow, vol.16, 1995, pp.477-485.
- 40) Abe, H. and Kawamura, H., A study of turbulence thermal structure in a channel flow through DNS up to $Re_\tau = 640$ with $Pr = 0.025$ and 0.71 , Proc. of 9th European Turbulence Conference, 2002, pp.399-402.
- 41) Rehme, K., The Structure of Turbulent Flow through a Wall Subchannel of a Rod Bundle, Nucl. Eng. Design, vol.45, 1978, pp.311-323.
- 42) 成田均, 大島宏之, サブチャンネル解析コード ASFER-IIIの整備ー燃料ピン伝熱モデルおよび圧力損失モデルの検証解析ー, PNC TN9410 97-104, 1997, 75p.
- 43) Cheng, S. and Todreas, N. E., Hydrodynamic models and correlations for bare and wire- wrapped hexagonal rod bundles, Nucl. Eng. Design, vol.92, 1986, pp.227-251.
- 44) 早船浩樹, 岡野豊明, FBR 燃料集合体内ナトリウム沸騰試験・解析, 日本原子力学会 1993 年春の年会予稿集, 京都, 1993, D15, p.187.

記号表

A_f	: 流速場に対する Δt 値の加速係数[-]
A_t	: 温度場に対する Δt 値の加速係数[-]
c_p	: 比熱[J/kg°C]
D_χ	: 乱流量 χ の拡散項
E_χ	: 乱流量 χ の散逸項
g_i	: 重力加速度[m/s ²]
Δh	: セル間距離[m]
Δh_α	: 節点 α の最小要素幅[m]
J_{ij}	: 座標変換行列
k	: 乱流エネルギー[m ² /s ²]
k_θ	: 温度バリエーション[K ²]
n	: 計算時刻ステップ ($t=n\Delta t$)
N_f	: 流速場の非定常計算を実行する頻度[-] ($N_f \geq 1$)
N_t	: 温度場の非定常計算を実行する頻度[-] ($N_t \geq 1$)
Nu	: ヌセルト数[-]
P	: 圧力[Pa]
$P_{(bc)}$: 圧力の境界条件値[Pa]
$P_{,n(bc)}$: 圧力勾配の境界条件値[Pa/m]
P_χ	: 乱流量 χ の生成項
Pe	: ペクレ数[-]
Pr	: プラントル数[-] ($Pr=v/\alpha$)
Q	: 発熱[W]
$q_{n(bc)}$: 熱流束の境界条件値[W/m ²]
R	: 乱流特性時間スケール比[-] ($R = \tau_t/\tau_f$)
Re	: レイノルズ数[-]
R_{ij}	: レイノルズ応力[Pa=kg/(m s ²)]
$R_{i\theta}$: 乱流熱流束[m/s°C]
Δs	: 風上化距離[m]
t	: 計算時刻[s]
Δt	: 計算時刻の刻み幅[s]
Δt_c	: クーラン数に制限される Δt 値[s]
Δt_v	: 流速場の拡散数に制限される Δt 値[s]

- Δt_α : 温度場の拡散数に制限される Δt 値[s]
 Δt_f : 流速場に対する Δt 値[s]
 Δt_t : 温度場に対する Δt 値[s]
 $\Delta t_{f\alpha}$: 流速場に対する節点 α の Δt 値[s]
 $\Delta t_{t\alpha}$: 温度場に対する節点 α の Δt 値[s]
 Δt_{fn} : 流速場に対する最大 Δt 値[s] ($\Delta t_{fn}=A_f N_f \Delta t$)
 Δt_{tn} : 温度場に対する最大 Δt 値[s] ($\Delta t_{tn}=A_t N_t \Delta t$)
 $\Delta t_{c\alpha}$: クーラン数に制限される節点 α の Δt 値[s]
 $\Delta t_{v\alpha}$: 流速場の拡散数に制限される節点 α の Δt 値[s]
 $\Delta t_{d\alpha}$: 温度場の拡散数に制限される節点 α の Δt 値[s]
 u_i : 流速[m/s] ($u_1=u, u_2=v, u_3=w$)
 $u_{i(bc)}$: 流速の境界条件値[m/s]
 u_{i-ref} : 代表流速[m]
 u_τ : 摩擦流速[m/s]
 u^+ : 壁無次元流速[-]
 $|u_\alpha|$: 節点 α の絶対流速[m/s]
 x_i : 座標[m] ($x_1=x, x_2=y, x_3=z$)
 Δx_i : 代表要素幅[m]
 y^+ : 壁無次元座標[-]
- α : 熱拡散係数[m²/s]
 α_t : 乱流拡散係数[m²/s]
 γ : 基本境界条件を与える節点
 $\gamma(bc)$: $\Gamma(bc)$ 上の任意の節点
 $\gamma(org)$: $\Gamma(org)$ 上の $\gamma(bc)$ に対応する節点
 $\Gamma(bc)$: 周期境界条件を与える境界面
 $\Gamma(org)$: $\Gamma(bc)$ に対応する同形状の周期的な境界面
 Γ : 自然境界条件を与える境界面
 δ^+ : 温度境界層の無次元厚さ[-] ($\delta^+=u_\tau \delta/\nu$ 、SPIRAL では $\delta^+=1000$ に設定)
 ε : 乱流エネルギーの散逸率[m²/s³]
 ε_θ : 温度バリエーションの散逸率[K²/s]
 $\eta_{i(bc)}$: 局所座標系における流速の境界条件値[m/s]
 θ : 温度[°C]
 θ_w : 壁温度[°C]

- θ_τ : 摩擦温度[°C]
 $\theta_{(bc)}$: 温度の境界条件値[°C]
 θ^+ : 壁無次元温度[-]
 κ : カルマン定数[-] ($\kappa=0.41$)
 λ : 熱伝導率[W/m°C]
 μ : 粘性係数[Pa·s]
 ν : 動粘性係数[m²/s]
 ν_t : 乱流動粘性係数 (渦動粘性係数) [m²/s]
 $\Xi_{ij(bc)}$: 局所座標系におけるレイノルズ応力の境界条件値[Pa]
 $\Xi_{i\theta(bc)}$: 局所座標系における乱流熱流束の境界条件値[W/m²]
 ρ : 密度[kg/m³]
 τ_f : 流速場乱流特性時間スケール[s] ($\tau_f = k/\varepsilon$)
 τ_t : 温度場乱流特性時間スケール[s] ($\tau_t = k_\theta/2\varepsilon_\theta$)
 τ_m : 混合乱流特性時間スケール[s] ($\tau_m = \tau_f^l \tau_t^m, l+m = 1$)
 $\tau_{ij(bc)}$: 応力の境界条件値[Pa]
 χ : 任意の乱流量 ($\chi=R_{ij}, k, \varepsilon, R_{i\theta}, k_\theta, \varepsilon_\theta$)
 $\chi_{(bc)}$: 乱流量の境界条件値
 $\chi_{,n(bc)}$: 乱流量勾配の境界条件値
 X : 任意の物理量
 Φ_χ : 乱流量 χ の圧力歪相関項または圧力温度勾配相関項 ($\chi=R_{ij}, R_{i\theta}$ のみ)

表リスト

表 3.5-1 散逸項の離散化式	37
表 3.6-1 クーラン数及び拡散数によって制限される Δt 値のオーダー	37
表 3.7.2-1 乱流量に関する補正処理	38
表 5-1 SPIRAL の V&V 指針	63
表 5.2.2-1 乱流ステップフロー解析：主流の再付着点位置	64
表 5.3.3-1 模擬燃料集合体下端及び上端におけるレイノルズ数	64

図リスト

図 2.1 流速分布 (DNS, 対数則, Reichardt の式)	21
図 2.2 温度分布 (DNS, 対数則, Kader の式)	21
図 2.3 流速勾配分布 (DNS, 対数則, Reichardt の式)	22
図 2.4 温度勾配分布 (DNS, 対数則, Kader の式, 近似式)	22
図 5.1.1-1 二次元スカラー輸送解析: 解析条件	65
図 5.1.1-2 二次元スカラー輸送解析: 解析結果 ($Pe=10$)	66
図 5.1.1-3 二次元スカラー輸送解析: 解析結果 ($Pe=10^6$)	67
図 5.1.2-1 強制キャビティフロー解析: 解析条件	68
図 5.1.2-2 強制キャビティフロー解析: 解析結果 (流速分布; $Re=10^2$)	69
図 5.1.2-3 強制キャビティフロー解析: 解析結果 (流速分布; $Re=10^3$)	70
図 5.1.2-4 強制キャビティフロー解析: 各要素による解析結果 (流速分布; $Re=10^3$)	71
図 5.1.3-1 サーマルキャビティフロー解析: 解析条件	72
図 5.1.3-2 サーマルキャビティフロー解析: 解析結果 ($Ra=10^3$, 20 分割×20 分割)	73
図 5.1.3-3 サーマルキャビティフロー解析: 解析結果 ($Ra=10^6$, 20 分割×20 分割)	74
図 5.1.3-4 サーマルキャビティフロー解析: 解析結果 ($Ra=10^6$, 40 分割×40 分割)	75
図 5.2.1-1 層流ステップフロー解析: 解析条件	76
図 5.2.1-2 層流ステップフロー解析: 解析結果	77
図 5.2.2-1 乱流ステップフロー解析: 解析条件	78
図 5.2.2-2 (a) 乱流ステップフロー解析: 標準型 k-ε モデルによる解析結果	79
図 5.2.2-2 (b) 乱流ステップフロー解析: Hybrid 型 k-ε モデルによる解析結果	80
図 5.2.2-2 (c) 乱流ステップフロー解析: RNG 型 k-ε モデルによる解析結果	81
図 5.2.2-2 (d) 乱流ステップフロー解析: 代数応力モデルによる解析結果	82
図 5.2.3-1 平行平板間乱流熱伝達解析: 解析条件	83
図 5.2.3-2 (a) 平行平板間乱流熱伝達解析: 解析結果 ($Re_{bulk}=24428$, $Re_{\tau}=640$)	84
図 5.2.3-2 (b) 平行平板間乱流熱伝達解析: 解析結果 ($Re_{bulk}=5731$, $Re_{\tau}=180$)	85
図 5.2.3-3 平行平板間乱流熱伝達解析: 圧力損失係数 λ と熱伝達係数 Nu の分布	86
図 5.2.3-4 平行平板間乱流熱伝達解析: 解析結果 ($Re_{bulk}=24428$, $Re_{\tau}=640$)	87
図 5.3.1-1 4 本ロッドバンドル試験解析: 解析条件	88
図 5.3.1-2 4 本ロッドバンドル試験解析: 軸方向流速 u/u_{ref} の分布 ($u_{ref}=27.74$ m/s)	89
図 5.3.1-3 4 本ロッドバンドル試験解析: 壁剪断応力 τ_w/τ_{w-max} の分布 ($\tau_{w-max}=1.75$ N)	90
図 5.3.1-4 4 本ロッドバンドル試験解析: 圧力損失係数 λ の分布	91

図 5.3.2-1 実規模スケール集合体解析：解析条件	92
図 5.3.2-2 実規模スケール集合体解析：「常陽」型 127 本ピン集合体解析結果	93
図 5.3.2-3 実規模スケール集合体解析：「もんじゅ」型 169 本ピン集合体解析結果	94
図 5.3.2-4 実規模スケール集合体解析：大型バンドル 271 本ピン集合体解析結果	95
図 5.3.3-1 PLANDTL 試験解析：解析条件	96
図 5.3.3-2 (a) PLANDTL 試験解析：軸方向流速 w_z の分布	97
図 5.3.3-2 (b) PLANDTL 試験解析：横方向流速 u_{xy} の分布	97
図 5.3.3-2 (c) PLANDTL 試験解析：時間平均温度 T の分布	98
図 5.3.3-2 (d) PLANDTL 試験解析：温度揺らぎ T' の分布	98
図 5.3.3-2 (e) PLANDTL 試験解析：乱流動粘性係数 ν/ν の分布	99
図 5.3.3-2 (f) PLANDTL 試験解析：乱流拡散係数 a/a の分布	99
図 5.3.3-3 (a) PLANDTL 試験解析：サブチャンネル平均軸方向流速 w_{subch} の分布	100
図 5.3.3-3 (b) PLANDTL 試験解析：ギャップ平均横方向流速 u_{gap} の分布	101
図 5.3.3-3 (c) PLANDTL 試験解析：ギャップ平均横方向流速 u_{gap} の分布	102
図 5.3.3-3 (d) PLANDTL 試験解析：サブチャンネル平均流体温度 T_{subch} の分布	103
図 5.3.3-4 PLANDTL 試験解析：試験計測温度との比較	104
図 5.3.3-5 PLANDTL 試験解析：圧力損失係数 λ の比較	105

付録1 内挿関数とガウス積分点

SPIRALによる解析では、一次元要素が1種類、二次元要素が2種類、三次元要素が4種類の計7種類の解析要素を利用できる。本録では、それぞれ要素種類の内挿関数を数値積分に用いられるガウス積分点と併せて示す。

A1.1 2節点線形要素

2節点線形要素における節点 P_α の局所座標 ξ_α と内挿関数 φ_α は、局所座標系 ξ によって次式で定義される。

(1) 節点座標

$$P_1; \xi_1 = -1 \quad \dots \text{(A1.1.a)}$$

$$P_2; \xi_2 = +1 \quad \dots \text{(A1.1.b)}$$

(2) 内挿関数

$$\varphi_1(\xi) = (1/2)(1-\xi) \quad \dots \text{(A1.1.c)}$$

$$\varphi_2(\xi) = (1/2)(1+\xi) \quad \dots \text{(A1.1.d)}$$

有限要素法による数値計算では要素内部での領域積分が必要となる。線形要素内における代数多項式 $f(\xi)$ の積分値は、ガウス積分点での式値 $f(\xi=\xi_i)$ と重み係数 w_i の積和として次式で算出できる。

$$\int f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m w_i f(\xi_i) \quad \dots \text{(A1.1.e)}$$

線形要素におけるガウス積分点 Γ_i の座標 ξ_i と重み係数 w_i は、以下に示すとおりである。 n 次のガウス積分点では、 $(2n-1)$ 次の代数多項式まで厳密積分が可能である。

(3) ガウス積分点

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=m=1$	$\Gamma_1; \xi_1 = 0$	$w_1 = \mu_1 = 2.0$
$n=m=2$	$\Gamma_1; \xi_1 = \gamma_1 = -\sqrt{3}/3,$ $\Gamma_2; \xi_2 = \gamma_2 = +\sqrt{3}/3$	$w_1 = \mu_1 = 1.0,$ $w_2 = \mu_2 = 1.0$
$n=m=3$	$\Gamma_1; \xi_1 = \gamma_1 = -\sqrt{15}/5,$ $\Gamma_2; \xi_2 = \gamma_2 = 0,$ $\Gamma_3; \xi_3 = \gamma_3 = +\sqrt{15}/5$	$w_1 = \mu_1 = 5/9,$ $w_2 = \mu_2 = 8/9,$ $w_3 = \mu_3 = 5/9$

※ n は積分点次数、 m は積分点点数

A1.2 3 節点三角形要素

3 節点三角形要素における節点 P_α の局所座標と内挿関数は、三角形の面積座標 (L_1, L_2, L_3) によって定義される。面積座標 L_α は、三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を $S_0=S(P_1P_2P_3)$ と表記すると、任意の点 P_h において $L_1=S(P_hP_2P_3)/S_0$ 、 $L_2=S(P_1P_hP_3)/S_0$ 、 $L_3=S(P_1P_2P_h)/S_0$ となる座標関数である。したがって、対応する節点上で $L_\alpha=1$ 、その他の節点上で $L_\alpha=0$ となり、要素内では常に $L_1+L_2+L_3=1$ の関係が成立するため、そのまま内挿関数として利用できる。また、後者の性質から面積座標 (L_1, L_2, L_3) と局所座標 (ξ, η) の関係は、 $L_1=\xi$ 、 $L_2=\eta$ 、 $L_3=1-\xi-\eta$ となる。

(1) 節点座標

$$P_1(L_1, L_2, L_3) = (1, 0, 0) \quad \therefore P_1(\xi_1, \eta_1) = (1, 0) \quad \dots (A1.2.a)$$

$$P_2(L_1, L_2, L_3) = (0, 1, 0) \quad \therefore P_2(\xi_2, \eta_2) = (0, 1) \quad \dots (A1.2.b)$$

$$P_3(L_1, L_2, L_3) = (0, 0, 1) \quad \therefore P_3(\xi_3, \eta_3) = (0, 0) \quad \dots (A1.2.c)$$

(2) 内挿関数

$$\varphi_1(\xi, \eta) = L_1 = \xi \quad \dots (A1.2.d)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = L_2 = \eta \quad \dots (A1.2.e)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = L_3 = 1 - \xi - \eta \quad \dots (A1.2.f)$$

線形要素と同様にして、三角形要素内における代数多項式 $f(L_1, L_2, L_3)=f(\xi, \eta)$ の積分値は、ガウス積分点を用いて次式で算出できる。

$$\int_V f(L_1, L_2, L_3) dV = \int_V f(\xi, \eta) dV = \sum_{i=1}^m w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad \dots (A1.2.g)$$

三角形要素のガウス積分点は、以下に示すとおりである。なお、3 次または 4 次のガウス積分点が必要な場合には、5 次のガウス積分点で代用できる。

(3) ガウス積分点

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=1, m=1$	$\Gamma_1(L_1, L_2, L_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$	$w_1 = \lambda_1 = 1/2$
$n=2, m=3$	$\Gamma_1(L_1, L_2, L_3) = (2/3, 1/6, 1/6),$ $\Gamma_2(L_1, L_2, L_3) = (1/6, 2/3, 1/6),$ $\Gamma_3(L_1, L_2, L_3) = (1/6, 1/6, 2/3)$	$w_1 = \lambda_1 = 1/6,$ $w_2 = \lambda_2 = 1/6,$ $w_3 = \lambda_3 = 1/6$

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=5, m=7$	$\Gamma_1(L_1, L_2, L_3) = (1/3, 1/3, 1/3),$	$w_1 = 9/80,$
	$\Gamma_2(L_1, L_2, L_3) = (\alpha_1, \beta_1, \beta_1),$	$w_2 = \lambda_1,$
	$\Gamma_3(L_1, L_2, L_3) = (\beta_1, \alpha_1, \beta_1),$	$w_3 = \lambda_1,$
	$\Gamma_4(L_1, L_2, L_3) = (\beta_1, \beta_1, \alpha_1),$	$w_4 = \lambda_1,$
	$\Gamma_5(L_1, L_2, L_3) = (\alpha_2, \beta_2, \beta_2),$	$w_5 = \lambda_2,$
	$\Gamma_6(L_1, L_2, L_3) = (\beta_2, \alpha_2, \beta_2),$	$w_6 = \lambda_2,$
	$\Gamma_7(L_1, L_2, L_3) = (\beta_2, \beta_2, \alpha_2),$	$w_7 = \lambda_2,$
	$\alpha_1 = (9-2\sqrt{15})/21, \beta_1 = (6+\sqrt{15})/21,$	$\lambda_1 = (155+\sqrt{15})/2400,$
	$\alpha_2 = (9+2\sqrt{15})/21, \beta_1 = (6-\sqrt{15})/21$	$\lambda_2 = (155-\sqrt{15})/2400$

※ n は積分点次数、 m は積分点点数

A1.3 4 節点四角形要素

4 節点四角形要素における節点 P_a の局所座標と内挿関数は、2 節点線形要素の内挿関数の積として次式で定義される。

(1) 節点座標

$$P_1(\xi_1, \eta_1) = (-1, -1) \quad \dots (A1.3.a)$$

$$P_2(\xi_2, \eta_2) = (+1, -1) \quad \dots (A1.3.b)$$

$$P_3(\xi_3, \eta_3) = (+1, +1) \quad \dots (A1.3.c)$$

$$P_4(\xi_4, \eta_4) = (-1, +1) \quad \dots (A1.3.d)$$

(2) 内挿関数

$$\varphi_1(\xi, \eta) = (1/4)(1-\xi)(1-\eta) \quad \dots (A1.3.e)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = (1/4)(1+\xi)(1-\eta) \quad \dots (A1.3.f)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = (1/4)(1+\xi)(1+\eta) \quad \dots (A1.3.g)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta) = (1/4)(1-\xi)(1+\eta) \quad \dots (A1.3.h)$$

四角形要素内における代数多項式 $f(\xi, \eta)$ の積分値に関しても、同様にして線形要素のガウス積分点を組み合わせた次式から算出できる。

$$\int_V f(\xi, \eta) dV = \iint f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_j} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad \dots (A1.3.i)$$

(3) ガウス積分点

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=1, m=1$	$\Gamma_1(\xi_1, \eta_1) = (0, 0)$	$w_1 = \mu_1\mu_1 = 4.0$
$n=2,$ $m=2 \times 2=4$	$\Gamma_m(\xi_m, \eta_m) = (\gamma_i, \gamma_j),$ $i=1 \sim 2, j=1 \sim 2, \therefore m=1 \sim 4,$ $(\gamma_1, \gamma_2) = (-\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3)$	$w_m = \mu_i\mu_j = 1.0,$ $\therefore \mu_1 = \mu_2 = 1.0$
$n=3,$ $m=3 \times 3=9$	$\Gamma_m(\xi_m, \eta_m) = (\gamma_i, \gamma_j),$ $i=1 \sim 3, j=1 \sim 3, \therefore m=1 \sim 9,$ $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (-\sqrt{15}/5, 0, +\sqrt{15}/5)$	$w_m = \mu_i\mu_j = 1.0,$ $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (5/9, 8/9, 5/9)$

※ n は積分点次数、 m は積分点点数

A1.4 4 節点四面体要素

4 節点四面体要素における節点 P_α の局所座標と内挿関数は、四面体の体積座標 (L_1, L_2, L_3, L_4) によって定義される。体積座標 L_α は、四面体 $P_1P_2P_3P_4$ の面積を $V_0=V(P_1P_2P_3P_4)$ と表記すると、任意の点 P_h において $L_1=V(P_hP_2P_3P_4)/V_0, L_2=V(P_1P_hP_3P_4)/V_0, L_3=V(P_1P_2P_hP_4)/V_0, L_4=V(P_1P_2P_3P_h)/V_0$ となる座標関数である。したがって、要素内では常に $L_1+L_2+L_3+L_4=1$ となり、体積座標 (L_1, L_2, L_3, L_4) と局所座標 (ξ, η, ζ) の関係は、 $L_1=\xi, L_2=\eta, L_3=\zeta, L_4=1-\xi-\eta-\zeta$ となる。

(1) 節点座標

$$P_1(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1, 0, 0, 0) \quad \therefore P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (1, 0, 0) \quad \dots (A1.4.a)$$

$$P_2(L_1, L_2, L_3, L_4) = (0, 1, 0, 0) \quad \therefore P_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = (0, 1, 0) \quad \dots (A1.4.b)$$

$$P_3(L_1, L_2, L_3, L_4) = (0, 0, 1, 0) \quad \therefore P_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) = (0, 0, 1) \quad \dots (A1.4.c)$$

$$P_4(L_1, L_2, L_3, L_4) = (0, 0, 0, 1) \quad \therefore P_4(\xi_4, \eta_4, \zeta_4) = (0, 0, 0) \quad \dots (A1.4.d)$$

(2) 内挿関数

$$\varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = L_1 = \xi \quad \dots (A1.4.e)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta, \zeta) = L_2 = \eta \quad \dots (A1.4.f)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta, \zeta) = L_3 = \zeta \quad \dots (A1.4.g)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta, \zeta) = L_4 = 1-\xi-\eta-\zeta \quad \dots (A1.4.h)$$

四面体要素内における代数多項式 $f(L_1, L_2, L_3, L_4)=f(\xi, \eta, \zeta)$ の積分値は、ガウス積分点を用いて次式で算出できる。

$$\int_V f(L_1, L_2, L_3, L_4) dV = \iiint f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^m w_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad \dots (A1.4.i)$$

(3) ガウス積分点

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=1, m=1$	$\Gamma_1(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$	$w_1 = 1/6$
$n=3, m=5$	$\Gamma_1(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4),$ $\Gamma_2(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1/2, 1/4, 1/4, 1/4),$ $\Gamma_3(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1/4, 1/2, 1/4, 1/4),$ $\Gamma_4(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1/4, 1/4, 1/2, 1/4),$ $\Gamma_5(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/2)$	$w_1 = -2/15,$ $w_2 = 3/40,$ $w_3 = 3/40,$ $w_4 = 3/40,$ $w_5 = 3/40$

※ n は積分点次数、 m は積分点点数

A1.5 5 節点五面体要素（四角錐要素）

5 節点五面体要素における節点 P_a の局所座標と内挿関数は、局所座標系 (ξ, η, ζ) によって次式で定義される。

(1) 節点座標

$$P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (-1, -1, -1) \quad \dots \text{(A1.5.a)}$$

$$P_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = (+1, -1, -1) \quad \dots \text{(A1.5.b)}$$

$$P_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) = (+1, +1, -1) \quad \dots \text{(A1.5.c)}$$

$$P_4(\xi_4, \eta_4, \zeta_4) = (-1, +1, -1) \quad \dots \text{(A1.5.d)}$$

$$P_5(\xi_5, \eta_5, \zeta_5) = (+0, +0, +1) \quad \dots \text{(A1.5.e)}$$

(2) 内挿関数

$$\varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.5.f)}$$

$$\varphi_2(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.5.g)}$$

$$\varphi_3(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.5.h)}$$

$$\varphi_4(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.5.i)}$$

$$\varphi_5(\xi, \eta, \zeta) = (1/2)(1+\zeta) \quad \dots \text{(A1.5.j)}$$

四角錐要素内における代数多項式 $f(\xi, \eta, \zeta)$ の積分値は、線形要素のガウス積分点を (ξ, η, ζ) の各方向に組み合わせた次式から算出できる。

$$\int_V f(\xi, \eta, \zeta) dV = \iiint f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{m_k} w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad \dots \text{(A1.5.k)}$$

(3) ガウス積分点

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=1, m=1$	$\Gamma_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (0, 0, 0)$	$w_1 = \mu_1\mu_1\mu_1 = 8.0$
$n=2,$ $m=2 \times 2 \times 2=8$	$\Gamma_m(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) = (\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k),$ $i=1 \sim 2, j=1 \sim 2, k=1 \sim 2, m=1 \sim 8,$ $(\gamma_1, \gamma_2) = (-\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3)$	$w_m = \mu_i\mu_j\mu_k = 1.0,$ $\because \mu_1 = \mu_2 = 1.0$
$n=3,$ $m=3 \times 3 \times 3=27$	$\Gamma_m(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) = (\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k),$ $i=1 \sim 3, j=1 \sim 3, k=1 \sim 3, m=1 \sim 27,$ $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (-\sqrt{15}/5, 0, +\sqrt{15}/5)$	$w_m = \mu_i\mu_j\mu_k,$ $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (5/9, 8/9, 5/9)$

※ n は積分点次数、 m は積分点点数

A1.6 6 節点五面体要素（三角柱要素）

6 節点五面体要素における節点 P_α の局所座標と内挿関数は、2 節点線形要素と 3 節点三角形要素のそれぞれの内挿関数の積として次式で定義される。

(1) 節点座標

$$P_1(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1, 0, 0, -1) \quad \therefore P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (1, 0, -1) \quad \dots (A1.6.a)$$

$$P_2(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (0, 1, 0, -1) \quad \therefore P_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = (0, 1, -1) \quad \dots (A1.6.b)$$

$$P_3(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (0, 0, 1, -1) \quad \therefore P_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) = (0, 0, -1) \quad \dots (A1.6.c)$$

$$P_4(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1, 0, 0, +1) \quad \therefore P_4(\xi_4, \eta_4, \zeta_4) = (1, 0, +1) \quad \dots (A1.6.d)$$

$$P_5(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (0, 1, 0, +1) \quad \therefore P_5(\xi_5, \eta_5, \zeta_5) = (0, 1, +1) \quad \dots (A1.6.e)$$

$$P_6(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (0, 0, 1, +1) \quad \therefore P_6(\xi_6, \eta_6, \zeta_6) = (0, 0, +1) \quad \dots (A1.6.f)$$

(2) 内挿関数

$$\varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = (1/2)(1-\zeta)L_1 = (1/2)\xi(1-\zeta) \quad \dots (A1.6.g)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta, \zeta) = (1/2)(1-\zeta)L_2 = (1/2)\eta(1-\zeta) \quad \dots (A1.6.h)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta, \zeta) = (1/2)(1-\zeta)L_3 = (1/2)(1-\xi-\eta)(1-\zeta) \quad \dots (A1.6.i)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta, \zeta) = (1/2)(1+\zeta)L_1 = (1/2)\xi(1+\zeta) \quad \dots (A1.6.j)$$

$$\varphi_5(\xi, \eta, \zeta) = (1/2)(1+\zeta)L_2 = (1/2)\eta(1+\zeta) \quad \dots (A1.6.k)$$

$$\varphi_6(\xi, \eta, \zeta) = (1/2)(1+\zeta)L_3 = (1/2)(1-\xi-\eta)(1+\zeta) \quad \dots (A1.6.l)$$

ガウス積分点に関しても、同様にして線形要素と三角形要素のそれぞれのガウス積分点を組み合わせ求めてられる。

$$\int_V f(\xi, \eta, \zeta) dV = \sum_{i=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{m_k} \lambda_i \mu_k f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \quad \dots (A1.6.m)$$

(3) ガウス積分点

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=1, m=1$	$\Gamma_1(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$	$w_1 = \lambda_1\mu_1 = 1.0$
$n=2,$ $m=3 \times 2=6$	$\Gamma_1(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (2/3, 1/6, 1/6, \gamma_1),$ $\Gamma_2(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1/6, 2/3, 1/6, \gamma_1),$ $\Gamma_3(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1/6, 1/6, 2/3, \gamma_1),$ $\Gamma_4(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (2/3, 1/6, 1/6, \gamma_2),$ $\Gamma_5(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1/6, 2/3, 1/6, \gamma_2),$ $\Gamma_6(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1/6, 1/6, 2/3, \gamma_2),$ $(\gamma_1, \gamma_2) = (-\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3)$	$w_1 = \lambda_1\mu_1 = 1/6,$ $w_2 = \lambda_2\mu_1 = 1/6,$ $w_3 = \lambda_3\mu_1 = 1/6,$ $w_4 = \lambda_1\mu_2 = 1/6,$ $w_5 = \lambda_2\mu_2 = 1/6,$ $w_6 = \lambda_3\mu_2 = 1/6,$ $\because \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1/6, \mu_1=\mu_2=1.0$
$n=3,$ $m=7 \times 3=21$	$\Gamma_{1k}(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (1/3, 1/3, 1/3, \gamma_k),$ $\Gamma_{2k}(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \gamma_k),$ $\Gamma_{3k}(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (\beta_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_k),$ $\Gamma_{4k}(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (\beta_1, \beta_1, \alpha_1, \gamma_k),$ $\Gamma_{5k}(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (\alpha_2, \beta_2, \beta_2, \gamma_k),$ $\Gamma_{6k}(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (\beta_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_k),$ $\Gamma_{7k}(L_1, L_2, L_3, \zeta) = (\beta_2, \beta_2, \alpha_2, \gamma_k),$ $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (-\sqrt{15}/5, 0, +\sqrt{15}/5),$ $\alpha_1 = (9-2\sqrt{15})/21, \beta_1 = (6+\sqrt{15})/21,$ $\alpha_2 = (9+2\sqrt{15})/21, \beta_1 = (6-\sqrt{15})/21$	$w_{1k} = 9/80\mu_k,$ $w_{2k} = \lambda_1\mu_k,$ $w_{3k} = \lambda_1\mu_k,$ $w_{4k} = \lambda_1\mu_k,$ $w_{5k} = \lambda_2\mu_k,$ $w_{6k} = \lambda_2\mu_k,$ $w_{7k} = \lambda_2\mu_k,$ $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (5/9, 8/9, 5/9),$ $\lambda_1 = (155+\sqrt{15})/2400,$ $\lambda_2 = (155-\sqrt{15})/2400$

※ n は積分点次数、 m は積分点点数

A1.7 8 節点六面体要素

8 節点六面体要素における節点 P_a の局所座標と内挿関数は、2 節点線形要素の内挿関数の 3 乗積として次式で定義される。

(1) 節点座標

$$P_1(\zeta_1, \eta_1, \zeta_1) = (-1, -1, -1) \quad \dots \text{(A1.7.a)}$$

$$P_2(\zeta_2, \eta_2, \zeta_2) = (+1, -1, -1) \quad \dots \text{(A1.7.b)}$$

$$P_3(\zeta_3, \eta_3, \zeta_3) = (+1, +1, -1) \quad \dots \text{(A1.7.c)}$$

$$P_4(\zeta_4, \eta_4, \zeta_4) = (-1, +1, -1) \quad \dots \text{(A1.7.d)}$$

$$P_5(\zeta_5, \eta_5, \zeta_5) = (-1, -1, +1) \quad \dots \text{(A1.7.e)}$$

$$P_6(\zeta_6, \eta_6, \zeta_6) = (+1, -1, +1) \quad \dots \text{(A1.7.f)}$$

$$P_7(\zeta_7, \eta_7, \zeta_7) = (+1, +1, +1) \quad \dots \text{(A1.7.g)}$$

$$P_8(\xi_8, \eta_8, \zeta_8) = (-1, +1, +1) \quad \dots \text{(A1.7.h)}$$

(2) 内挿関数

$$\varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.i)}$$

$$\varphi_2(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.j)}$$

$$\varphi_3(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.k)}$$

$$\varphi_4(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.l)}$$

$$\varphi_5(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.m)}$$

$$\varphi_6(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.n)}$$

$$\varphi_7(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.o)}$$

$$\varphi_8(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \quad \dots \text{(A1.7.p)}$$

ガウス積分点に関しても、同様にして線形要素のガウス積分点を (ξ, η, ζ) の各方向に組み合わせさせて求められる。

$$\int_V f(\xi, \eta, \zeta) dV = \iiint f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{m_k} w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad \dots \text{(A.1.7.q)}$$

(3) ガウス積分点

積分点次数	積分点座標	重み係数
$n=1, m=1$	$\Gamma_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (0, 0, 0)$	$w_1 = \mu_1 \mu_1 \mu_1 = 8.0,$
$n=2,$ $m=2 \times 2 \times 2=8$	$\Gamma_m(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) = (\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k),$ $i=1 \sim 2, j=1 \sim 2, k=1 \sim 2, m=1 \sim 8,$ $(\gamma_1, \gamma_2) = (-\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3)$	$w_m = \mu_i \mu_j \mu_k = 1.0,$ $\because \mu_1 = \mu_2 = 1.0$
$n=3,$ $m=3 \times 3 \times 3=27$	$\Gamma_m(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) = (\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k),$ $i=1 \sim 3, j=1 \sim 3, k=1 \sim 3, m=1 \sim 27,$ $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (-\sqrt{15}/5, 0, +\sqrt{15}/5)$	$w_m = \mu_i \mu_j \mu_k,$ $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (5/9, 8/9, 5/9)$

※ n は積分点次数、 m は積分点点数

付録2 代数応力熱流束方程式の解法

本文 2.2.3 節で述べたとおり、代数応力モデル／代数熱流束モデルでは、代数応力熱流束方程式を解いてレイノルズ応力 R_{ij} 、乱流熱流束 $R_{i\theta}$ を求める。代数応力熱流束方程式は、 R_{ij} 、 $R_{i\theta}$ に関する非線形連立方程式となるため、LU 分解法等の直接解法で解を求めるのは不可能であり、反復的な計算解法によって解く必要がある。本録では、その計算解法を示す。本文 2.2.3 節で示した代数応力熱流束方程式を以下に再掲する。

(1) 代数応力熱流束方程式

$$R_{ij} = k \frac{P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}}{P_k + G_k - \varepsilon} \quad \dots (A2.1)$$

$$R_{i\theta} = \frac{P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Phi_{i\theta}}{(P_k + G_k - \varepsilon)/2k + (P_\theta - 2\varepsilon_\theta)/2k_\theta} \quad \dots (A2.2)$$

1) 生成項

$$P_{ij} = -R_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \dots (A2.2.a)$$

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} P_{jj} \quad \dots (A2.2.b)$$

$$P_{i\theta} = P_{i\theta 1} + P_{i\theta 2} \quad \dots (A2.2.c)$$

$$P_{i\theta 1} = -R_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad \dots (A2.2.d)$$

$$P_{i\theta 2} = -R_{j\theta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \dots (A2.2.e)$$

$$P_\theta = -2R_{j\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad \dots (A2.2.f)$$

2) 浮力生成項

$$G_{ij} = -g_i \beta R_{j\theta} - g_j \beta R_{i\theta} \quad \dots (A2.2.g)$$

$$G_k = -g_j \beta R_{j\theta} = \frac{1}{2} G_{jj} \quad \dots (A2.2.h)$$

$$G_{i\theta} = -g_i \beta k_\theta \quad \dots (A2.2.i)$$

3) 压力歪相關項及び压力温度勾配相關項

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij1} + \Phi_{ij2} + \Phi_{ij3} + \Phi_{ijw1} + \Phi_{ijw2} \quad \dots (A2.2.j)$$

$$\Phi_{i\theta} = \Phi_{i\theta1} + \Phi_{i\theta2} + \Phi_{i\theta3} + \Phi_{i\theta w} \quad \dots (A2.2.k)$$

3.1) Slow 項

$$\Phi_{ij1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} (R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) \quad \dots (A2.2.l)$$

$$\Phi_{i\theta1} = -C_{\theta1} \frac{\varepsilon}{k} R_{i\theta} \quad \dots (A2.2.m)$$

3.2) Rapid 項

$$\Phi_{ij2} = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) \quad \dots (A2.2.n)$$

$$\Phi_{i\theta2} = -C_{\theta2} P_{i\theta2} \quad \dots (A2.2.o)$$

3.3) Buoyant Rapid 項

$$\Phi_{ij3} = -C_3 (G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij}) \quad \dots (A2.2.p)$$

$$\Phi_{i\theta3} = -C_{\theta3} G_{i\theta} \quad \dots (A2.2.q)$$

3.4) Wall Reflection 項

$$\Phi_{ijw1} = C'_1 \frac{\varepsilon}{k} (R_{kl} n_k^w n_l^w \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ik} n_k^w n_j^w - \frac{3}{2} R_{jk} n_k^w n_i^w) f_w \quad \dots (A2.2.r)$$

$$\Phi_{ijw2} = C'_2 (\Phi_{kl2} n_k^w n_l^w \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik2} n_k^w n_j^w - \frac{3}{2} \Phi_{jk2} n_k^w n_i^w) f_w \quad \dots (A2.2.s)$$

$$\Phi_{i\theta w} = C'_{\theta1} \frac{\varepsilon}{k} R_{k\theta} n_k^w n_i^w f_w \quad \dots (A2.2.t)$$

$$f_w = \frac{k^{3/2}}{C_l \varepsilon} \frac{1}{y_n^w} \quad \dots (A2.2.u)$$

4) 散逸項

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad \dots (A2.2.v)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = 0 \quad \dots (A2.2.w)$$

$$\varepsilon_{\theta} = C_{\eta} \frac{k_{\theta}}{k} \varepsilon \quad \dots (A2.2.x)$$

SPIRAL では、式 (A2.1)、式 (A2.2) の代数応力熱流束方程式の解法として、最も単純な反復計算解法である逐次代入法を採用する。少なくとも本問題に限っては、より高度な反復計算解法である Newton-Raphson 法では、逆行列の計算が必要となり、却って計算負荷が増大する上、反復計算の過程での緩和係数が効果的に作用せず、数値不安定にも陥り易いデメリットがある。

式 (A2.1)、(A2.2) に逐次代入法を適用する際は、反復計算の収束性を高めるため、取り扱いが容易な Slow 項に関しては、第一項を左辺に移項して反復計算に対しては陰的に取り扱い、第二項は散逸項とまとめて処理する。すなわち、以下に示すとおりである。

$$R_{ij} = k \frac{P_{ij} + G_{ij} + (\Phi_{ij2} + \Phi_{ij3} + \Phi_{ijw1} + \Phi_{ijw2}) - (1 - C_1)\epsilon_{ij}}{P_k + G_k - (1 - C_1)\epsilon} \quad \dots (A2.3)$$

$$R_{i\theta} = \frac{P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Phi_{i\theta2} + \Phi_{i\theta3} + \Phi_{i\theta w}}{(P_k + G_k - \epsilon)/2k + (P_\theta - 2\epsilon_\theta)/2k_\theta + C_{\theta 1}(\epsilon/k)} \quad \dots (A2.4)$$

数値安定性を向上させるため、反復計算の過程において緩和係数 α を導入する。すなわち、反復計算回数を m とすると、次式で表される。

$$R_{ij}^{m+1} = (1 - \alpha)R_{ij}^m + \alpha f(R_{ij}^m) \quad \dots (A2.5)$$

$$f(R_{ij}) = k \frac{P_{ij} + G_{ij} + (\Phi_{ij2} + \Phi_{ij3} + \Phi_{ijw1} + \Phi_{ijw2}) - (1 - C_1)\epsilon_{ij}}{P_k + G_k - (1 - C_1)\epsilon} \quad \dots (A2.5.a)$$

$$R_{i\theta}^{m+1} = (1 - \alpha)R_{i\theta}^m + \alpha f(R_{i\theta}^m) \quad \dots (A2.6)$$

$$f(R_{i\theta}) = \frac{P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Phi_{i\theta2} + \Phi_{i\theta3} + \Phi_{i\theta w}}{(P_k + G_k - \epsilon)/2k + (P_\theta - 2\epsilon_\theta)/2k_\theta + C_{\theta 1}(\epsilon/k)} \quad \dots (A2.6.a)$$

緩和係数 α 、最大反復計算回数 m_{max} の値としては、燃料集合体解析等への適用テストから最適と認められた $\alpha=0.7$ 、 $m_{max}=100$ を採用する。反復計算が収束しない場合は、 $\alpha=0.07$ ($m_{max}=1000$)、 $\alpha=0.007$ ($m_{max}=10000$) と徐々に緩和係数を下げて反復計算を再試行して、最終的には収束の有無に拘らず、 $\alpha=0.007$ 、 $m=10000$ で得られた値を代数応力熱流束方程式の解とする。参考までに、適用テストの結果によれば、 $\alpha=0.007$ 、 $m_{max}=10000$ の条件で収束しない割合は 10^{-7} オーダーである。

また、同じく数値安定性を向上させるため、反復計算の過程において次の制約条件を与える。まず、 R_{ij} 、 $R_{i\theta}$ に関して、その物理的な意味を考慮して次式で補正する。

$$0 \leq R_{xx} \leq 2k \quad \dots (A2.7.a)$$

$$0 \leq R_{yy} \leq 2k \quad \dots (A2.7.b)$$

$$0 \leq R_{zz} \leq 2k \quad \dots (A2.7.c)$$

$$|R_{xy}| \leq \sqrt{R_{xx}R_{yy}} \quad \dots \text{(A2.7.d)}$$

$$|R_{xz}| \leq \sqrt{R_{xx}R_{zz}} \quad \dots \text{(A2.7.e)}$$

$$|R_{yz}| \leq \sqrt{R_{yy}R_{zz}} \quad \dots \text{(A2.7.f)}$$

$$|R_{x\theta}| \leq \sqrt{R_{xx}k_\theta} \quad \dots \text{(A2.7.g)}$$

$$|R_{y\theta}| \leq \sqrt{R_{yy}k_\theta} \quad \dots \text{(A2.7.h)}$$

$$|R_{z\theta}| \leq \sqrt{R_{zz}k_\theta} \quad \dots \text{(A2.7.i)}$$

Wall Reflection 項に現れる壁反射係数 f_w に関しては、 k, ε 値によっては $f_w > 1$ となる場合があるが、物理的に取り得る範囲を考慮して次式で補正する。

$$0 \leq f_w \leq 1 \quad \dots \text{(A2.8)}$$

反復計算の初期値に関しては、適用テストの結果では、反復計算の初期値と数値安定性の間に明確な関連性が認められなかったため、次式を採用する。

$$R_{ij}^{(0)} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad \dots \text{(A2.9.a)}$$

$$R_{i\theta}^{(0)} = 0 \quad \dots \text{(A2.9.b)}$$

また、反復計算の収束判定条件としては、無次元化した $R_{ij}, R_{i\theta}$ の残差がすべて 10^{-5} 未満となった時点で収束と判定する。

$$\max \left| \frac{\Delta R_{ij}}{k} \right| < 10^{-5} \quad \dots \text{(A2.10)}$$

$$R_{ij}^{m+1} = R_{ij}^m + \alpha \Delta R_{ij} \quad \dots \text{(A2.10.a)}$$

$$\max \left| \frac{\Delta R_{i\theta}}{\sqrt{k k_\theta}} \right| < 10^{-5} \quad \dots \text{(A2.11)}$$

$$R_{i\theta}^{m+1} = R_{i\theta}^m + \alpha \Delta R_{i\theta} \quad \dots \text{(A2.11.a)}$$

付録3 物性値

SPIRAL では、利用頻度が高い数種の物質に関して、密度、比熱等の各種物性値を温度の4次多項式で近似した物性値関数が実装されている。該当する物質は、流体ではナトリウム、水、空気、構造材ではステンレス鋼 SUS316 である。本録では、それらの物性値関数式を示す。なお、それ以外の物性値を利用する場合は、ユーザが独自で物性値の関数式または定数値を入力する必要がある。

SPIRAL では、密度 ρ 、比熱 c_P 、粘性係数 μ 、熱伝導率 λ は、温度 θ の4次多項式として、次式で近似される。

物質	物性値関数式	単位
密度	$\rho(\theta) = \rho_0 + \rho_1\theta + \rho_2\theta^2 + \rho_3\theta^3 + \rho_4\theta^4$	[kg/m ³]
比熱	$c_P(\theta) = c_{P0} + c_{P1}\theta + c_{P2}\theta^2 + c_{P3}\theta^3 + c_{P4}\theta^4$	[J/kg°C]
粘性係数	$\mu(\theta) = \mu_0 + \mu_1\theta + \mu_2\theta^2 + \mu_3\theta^3 + \mu_4\theta^4$	[Pa·s]
熱伝導率	$\lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1\theta + \lambda_2\theta^2 + \lambda_3\theta^3 + \lambda_4\theta^4$	[W/m°C]

温度 θ [°C]

A3.1 ナトリウムの物性値関数

図 A3.1 にナトリウム物性における密度 ρ 、比熱 c_P 、粘性係数 μ 、熱伝導率 λ の関数式を示す A3.1)。密度 ρ 、比熱 c_P 、熱伝導率 λ に関しては、燃料集合体サブチャンネル解析コード ASFRE⁴⁾と同一の関数式を採用した。ただし、温度の単位が SPIRAL では[°C]、ASFRE では[K]と異なるため、代数多項式の各項の係数も異なる。また、粘性係数 μ に関しては、対数関数で記述された ASFRE の関数式を代数多項式で近似した関数式である。なお、物性値関数の適用範囲は、100 °C ≤ θ ≤ 1500 °C である。

A3.2 水の物性値関数

図 A3.2 に水物性における密度 ρ 、比熱 c_P 、粘性係数 μ 、熱伝導率 λ の関数式を示す A3.2)。物性値関数の適用範囲は、0 °C ≤ θ ≤ 100 °C である。

A3.3 空気の物性値関数

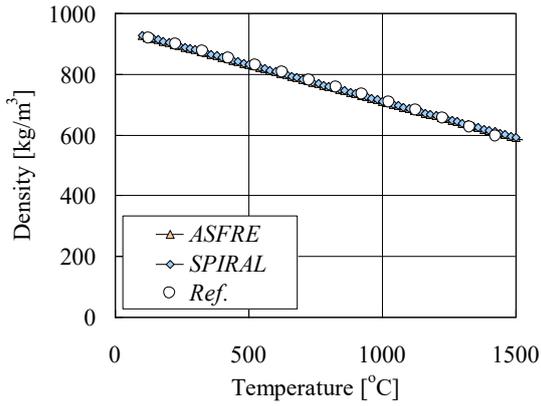
図 A3.3 に空気物性における密度 ρ 、比熱 c_P 、粘性係数 μ 、熱伝導率 λ の関数式を示す A3.2)。物性値関数の適用範囲は、-100 °C ≤ θ ≤ 1000 °C である。

A3.4 ステンレス鋼 SUS316 の物性値関数

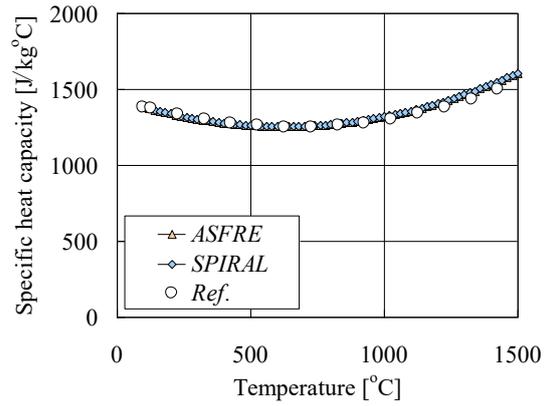
図 A2.4 にステンレス鋼 SUS316 物性における密度 ρ 、比熱 c_p 、熱伝導率 λ の関数式を示す^{A3.3)}。SUS316 物性に関しては、燃料集合体サブチャンネル解析コード ASFRE と同等の関数式を採用した。物性値関数の適用範囲は、厳密には計測データの存在する $25\text{ }^\circ\text{C} \leq \theta \leq 800\text{ }^\circ\text{C}$ となるが、SUS316 の融点である約 $1400\text{ }^\circ\text{C}$ までであれば、概ね線形に変化して極端な値にはならない関数式である。

A3. 参考文献

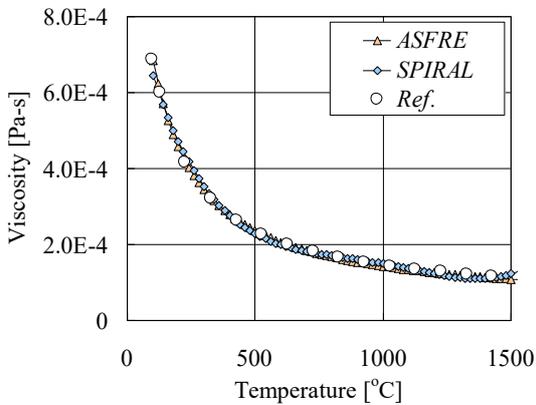
- A3.1) J. K. Fink, L. Leibowitz, Thermodynamics and transport properties of sodium liquid and vapor, 1995.
- A3.2) 日本機械学会, 伝熱工学資料 改訂第 5 版, 2009, 332p.
- A3.3) ASME, 2013 ASME Boiler & Pressure Vessel Code, 2013 Edition, II MATERIALS, Part D, Properties (Metric).



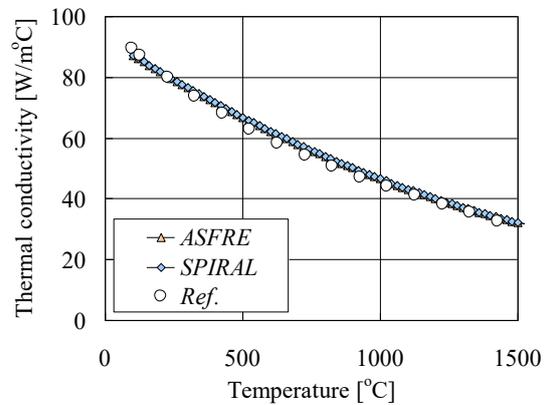
(a) 密度 ρ [kg/m³]



(b) 比熱 c_P [J/kg°C]



(c) 粘性係数 μ [Pa·s]



(d) 熱伝導率 λ [W/m°C]

	密度 ρ [kg/m ³]	比熱 c_P [J/kg°C]	粘性係数 μ [Pa·s]	熱伝導率 λ [W/m°C]
θ^0	$\rho_0 = 950.04525$	$c_{P0} = 1437.071$	$\mu_0 = 8.857605 \times 10^{-4}$	$\lambda_0 = 92.95714$
θ^1	$\rho_1 = -0.2297503$	$c_{P1} = -0.5806916$	$\mu_1 = -2.822324 \times 10^{-6}$	$\lambda_1 = -0.05809199$
θ^2	$\rho_2 = -1.460450 \times 10^{-5}$	$c_{P2} = 4.628380 \times 10^{-4}$	$\mu_2 = 4.324250 \times 10^{-9}$	$\lambda_2 = 1.172800 \times 10^{-5}$
θ^3	$\rho_3 = 5.637690 \times 10^{-9}$	$c_{P3} = 0$	$\mu_3 = -3.006906 \times 10^{-12}$	$\lambda_3 = 0$
θ^4	$\rho_4 = 0$	$c_{P4} = 0$	$\mu_4 = 7.681707 \times 10^{-16}$	$\lambda_4 = 0$

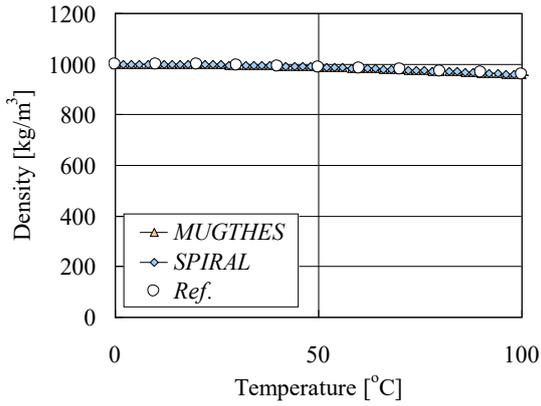
$$\rho(\theta) = \rho_0 + \rho_1\theta + \rho_2\theta^2 + \rho_3\theta^3 + \rho_4\theta^4$$

$$c_P(\theta) = c_{P0} + c_{P1}\theta + c_{P2}\theta^2 + c_{P3}\theta^3 + c_{P4}\theta^4$$

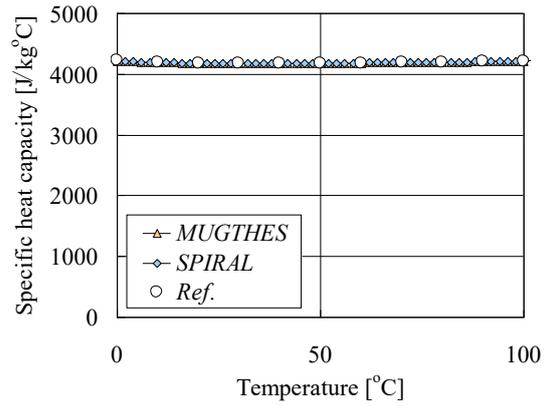
$$\mu(\theta) = \mu_0 + \mu_1\theta + \mu_2\theta^2 + \mu_3\theta^3 + \mu_4\theta^4$$

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1\theta + \lambda_2\theta^2 + \lambda_3\theta^3 + \lambda_4\theta^4$$

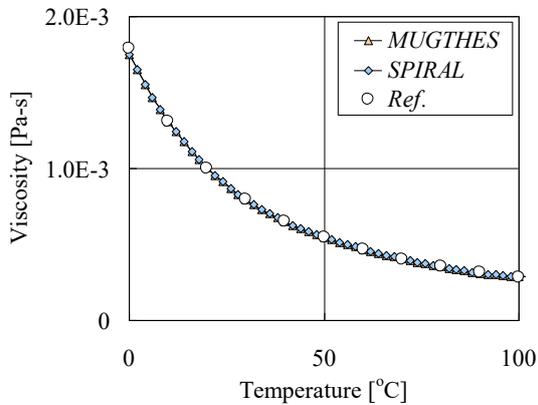
図 A3.1 ナトリウムの物性値関数



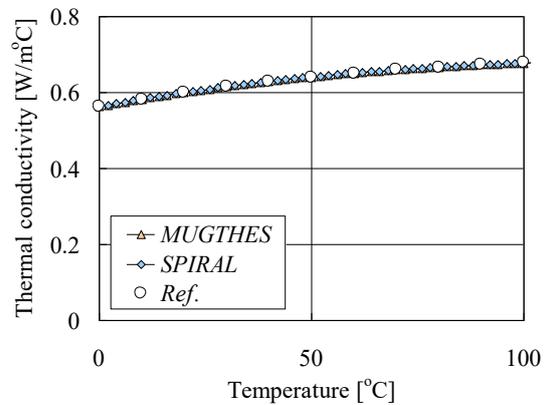
(a) 密度 ρ [kg/m³]



(b) 比熱 c_P [J/kg°C]



(c) 粘性係数 μ [Pa·s]



(d) 熱伝導率 λ [W/m°C]

	密度 ρ [kg/m ³]	比熱 c_P [J/kg°C]	粘性係数 μ [Pa·s]	熱伝導率 λ [W/m°C]
θ^0	$\rho_0 = 999.9246$	$c_{P0} = 4214.733$	$\mu_0 = 1.748482 \times 10^{-3}$	$\lambda_0 = 0.5620942$
θ^1	$\rho_1 = 0.05135313$	$c_{P1} = -2.809429$	$\mu_1 = -5.155684 \times 10^{-5}$	$\lambda_1 = 2.117955 \times 10^{-3}$
θ^2	$\rho_2 = -0.007467425$	$c_{P2} = 0.07324663$	$\mu_2 = 8.610428 \times 10^{-7}$	$\lambda_2 = -1.305377 \times 10^{-5}$
θ^3	$\rho_3 = 3.952235 \times 10^{-5}$	$c_{P3} = -7.670921 \times 10^{-4}$	$\mu_3 = -7.503585 \times 10^{-9}$	$\lambda_3 = 4.703564 \times 10^{-8}$
θ^4	$\rho_4 = -1.181527 \times 10^{-7}$	$c_{P4} = 3.175991 \times 10^{-6}$	$\mu_4 = 2.589452 \times 10^{-11}$	$\lambda_4 = -1.296620 \times 10^{-10}$

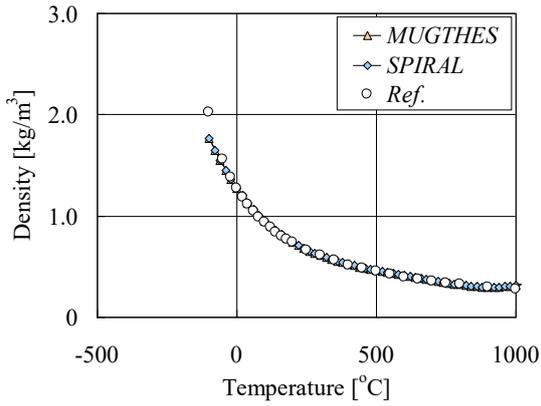
$$\rho(\theta) = \rho_0 + \rho_1\theta + \rho_2\theta^2 + \rho_3\theta^3 + \rho_4\theta^4$$

$$c_P(\theta) = c_{P0} + c_{P1}\theta + c_{P2}\theta^2 + c_{P3}\theta^3 + c_{P4}\theta^4$$

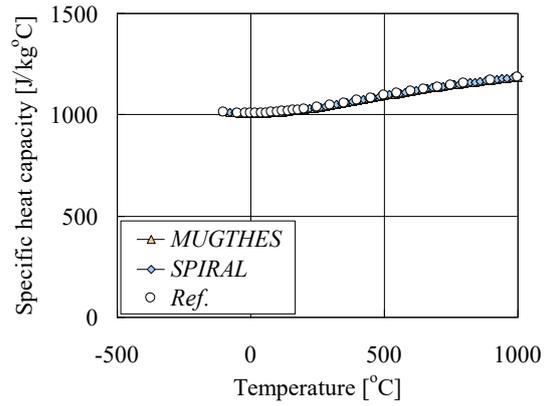
$$\mu(\theta) = \mu_0 + \mu_1\theta + \mu_2\theta^2 + \mu_3\theta^3 + \mu_4\theta^4$$

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1\theta + \lambda_2\theta^2 + \lambda_3\theta^3 + \lambda_4\theta^4$$

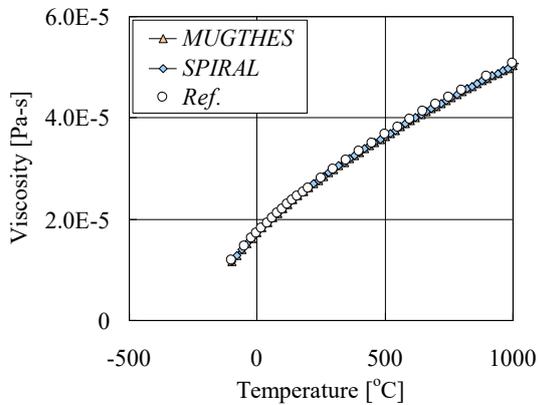
図 A3.2 水の物性値関数



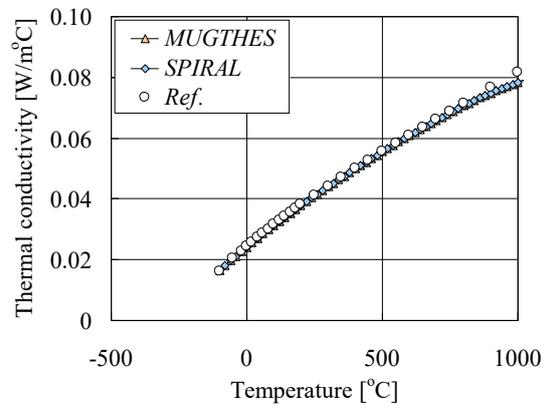
(a) 密度 ρ [kg/m³]



(b) 比熱 c_P [J/kg°C]



(c) 粘性係数 μ [Pa·s]



(d) 熱伝導率 λ [W/m°C]

	密度 ρ [kg/m ³]	比熱 c_P [J/kg°C]	粘性係数 μ [Pa·s]	熱伝導率 λ [W/m°C]
θ^0	$\rho_0 = 1.276391$	$c_{P0} = 1007.173$	$\mu_0 = 1.729958 \times 10^{-5}$	$\lambda_0 = 0.02416566$
θ^1	$\rho_1 = -3.988196 \times 10^{-3}$	$c_{P1} = -0.01725848$	$\mu_1 = 5.197716 \times 10^{-8}$	$\lambda_1 = 7.420165 \times 10^{-5}$
θ^2	$\rho_2 = 8.173002 \times 10^{-6}$	$c_{P2} = 6.934236 \times 10^{-4}$	$\mu_2 = -4.484567 \times 10^{-11}$	$\lambda_2 = -3.646825 \times 10^{-8}$
θ^3	$\rho_3 = -8.662415 \times 10^{-9}$	$c_{P3} = -7.616289 \times 10^{-7}$	$\mu_3 = 4.293171 \times 10^{-14}$	$\lambda_3 = 3.667486 \times 10^{-11}$
θ^4	$\rho_4 = 3.515332 \times 10^{-12}$	$c_{P4} = 2.637769 \times 10^{-10}$	$\mu_4 = -1.712188 \times 10^{-17}$	$\lambda_4 = -2.029100 \times 10^{-14}$

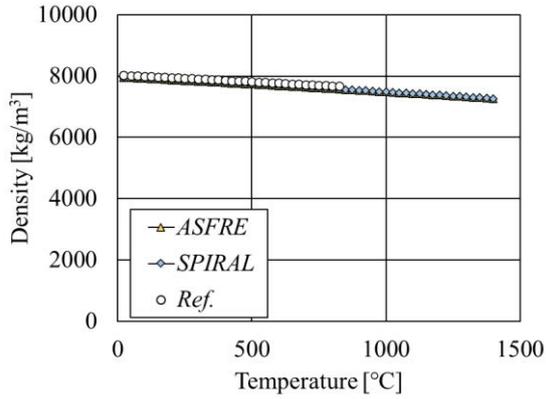
$$\rho(\theta) = \rho_0 + \rho_1\theta + \rho_2\theta^2 + \rho_3\theta^3 + \rho_4\theta^4$$

$$c_P(\theta) = c_{P0} + c_{P1}\theta + c_{P2}\theta^2 + c_{P3}\theta^3 + c_{P4}\theta^4$$

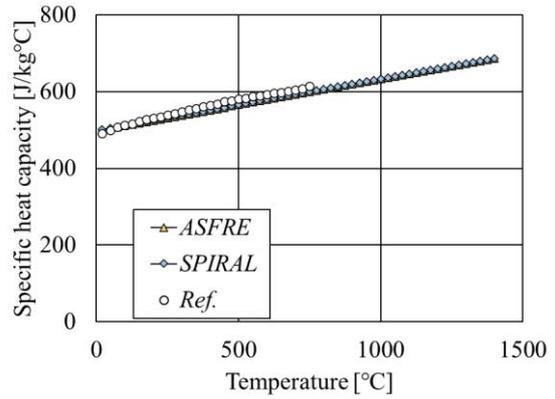
$$\mu(\theta) = \mu_0 + \mu_1\theta + \mu_2\theta^2 + \mu_3\theta^3 + \mu_4\theta^4$$

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1\theta + \lambda_2\theta^2 + \lambda_3\theta^3 + \lambda_4\theta^4$$

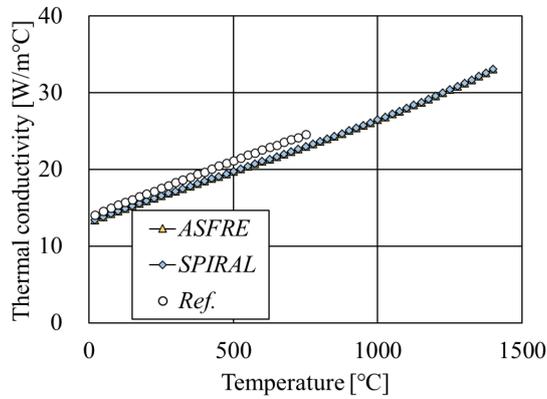
図 A3.3 空気の物性値関数



(a) 密度 ρ [kg/m³]



(b) 比熱 c_p [J/kg°C]



(c) 熱伝導率 λ [W/m°C]

	密度 ρ [kg/m ³]	比熱 c_p [J/kg°C]	熱伝導率 λ [W/m°C]
θ^0	$\rho_0 = 7966.126$	$c_{p0} = 498.6021$	$\lambda_0 = 13.15588$
θ^1	$\rho_1 = -0.4421729$	$c_{p1} = 0.134$	$\lambda_1 = 0.01416456$
θ^2	$\rho_2 = -3.894 \times 10^{-5}$	$c_{p2} = 0$	$\lambda_2 = -3.013431 \times 10^{-6}$
θ^3	$\rho_3 = 0$	$c_{p3} = 0$	$\lambda_3 = 2.184220 \times 10^{-9}$
θ^4	$\rho_4 = 0$	$c_{p4} = 0$	$\lambda_4 = 0$

$$\rho(\theta) = \rho_0 + \rho_1\theta + \rho_2\theta^2 + \rho_3\theta^3 + \rho_4\theta^4$$

$$c_p(\theta) = c_{p0} + c_{p1}\theta + c_{p2}\theta^2 + c_{p3}\theta^3 + c_{p4}\theta^4$$

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1\theta + \lambda_2\theta^2 + \lambda_3\theta^3 + \lambda_4\theta^4$$

図 A3.4 ステンレス鋼 SUS316 の物性値関数

This is a blank page.

