

熱過渡荷重スクリーニング評価のための
非定常熱応力線図の開発

Development of Thermal Transient Stress Charts
for Screening Evaluation of Thermal Loads

古橋 一郎* 笠原 直人 柴本 宏
Ichiro FURUHASHI*, Naoto KASAHARA and Hiroshi SHIBAMOTO

次世代原子力システム研究開発部門
構造信頼性工学グループ
Structural Mechanics Research Group
Advanced Nuclear System Research and Development Directorate

本レポートは日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。

本レポートの入手並びに著作権利用に関するお問い合わせは、下記あてにお問い合わせ下さい。

なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ホームページ (<http://www.jaea.go.jp/index.shtml>)
より発信されています。このほか財団法人原子力弘済会資料センター*では実費による複写頒布を行っ
ております。

〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根2番地4

日本原子力研究開発機構 研究技術情報部 研究技術情報課

電話029-282-6387, Fax 029-282-5920

* 〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根2番地4 日本原子力研究開発機構内

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency

Inquiries about availability and/or copyright of this report should be addressed to

Intellectual Resources Section, Intellectual Resources Department,

Japan Atomic Energy Agency

2-4 Shirakata Shirane, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195 Japan

Tel +81-29-282-6387, Fax +81-29-282-5901

熱過渡荷重スクリーニング評価のための 非定常熱応力線図の開発

日本原子力研究開発機構

次世代原子力システム研究開発部門 F B R 信頼性技術ユニット

古橋 一郎、笠原 直人、柴本 宏

(2006年2月3日 受理)

高速炉機器の構造設計で必要となる熱過渡荷重のスクリーニング評価等に活用すべく、非定常熱過渡応力の簡易評価法に関する研究を実施し、下記の成果を得た。

- ・ 両面で熱伝達を受ける平板の非定常時の熱伝導および熱応力の理論解に基づき、評価線図を作成した。片面熱伝達に対する従来の工学線図と比較して、適用範囲が大幅に拡張された。
- ・ 流体温度がステップ変化あるいは線形変化した場合の非定常時の温度および熱応力の線図を作成した。任意時点の表面温度、板厚平均温度、表面応力、曲げ応力およびピーク応力を線図から求めることができる。
- ・ 定常温度で規格化した無次元温度 および背面温度固定の定常熱応力で規格化した無次元熱応力を導入した。これにより線図の読み取り精度が向上した。
- ・ 流体温度がステップ変化あるいはランプ変化した場合の熱応力最大値および最大応力発生時点を求める線図を作成した。過渡的な極大値が熱応力最大値となる領域あるいは定常値が最大値となる領域が示された。ステップ変化による熱応力最大値は背面温度固定の定常熱応力の2倍を超えないことが示された。熱応力最大値とその時点を線図から直接読み取れるようになった。ランプ変化/ステップ変化の熱応力低減率が線図から直接読み取れるようになった。
- ・ 非定常時の温度および熱応力の簡便な Green 関数を作成した。熱応力評価において実用上無視し得る短時間の背面温度を除き、温度および熱応力を最大誤差 1.4% の範囲で予測できる簡便な Green 関数が得られた。

これらの成果は、高速炉機器構造の熱過渡荷重および評価部位のスクリーニング、熱過渡応力評価法の開発改良、実構造の感度解析、設計評価および熱応力メカニズムの考察などに役立てることができる。

大洗研究開発センター駐在：〒311-1393 茨城県東茨城郡大洗町成田 4002

* (株) CRC ソリューションズ
派遣職員

Development of Thermal Transient Stress Charts for Screening Evaluation of Thermal Loads

Ichiro FURUHASHI*, Naoto KASAHARA and Hiroshi SHIBAMOTO

FBR Systems Reliability Research Unit
Advanced Nuclear System Research and Development Directorate
Japan Atomic Energy Agency
Oarai-machi, Higashiibaraki-gun, Ibaraki-ken

(Received February 3, 2006)

Thermal transient stress charts were developed for screening evaluation of thermal loads in structural design works of fast reactor components. Summary of obtained results are as follows.

- 1 Thermal stress was theoretically analyzed on the plate subjected to thermal transient on both surfaces. Based on these results, the design charts were proposed for evaluation of thermal transient stress. Compared with conventional design charts for the plate under single surface heat transfer, their applicable area is further extended.
- 2 Developed design charts can predict temperature and stresses responses to step or ramp change of fluid temperature. Utilizing these charts, surface temperature, average temperature in thickness, surface stress, bending stress and peak stress at arbitrary time can be obtained.
- 3 Non-dimensional temperature normalized by steady-state temperature, and non-dimensional stress normalized by steady-state stress under fixed back surface temperature were introduced. Reading errors can be reduced by introduction of and compared with the conventional ones.
- 4 Design charts were also proposed on the maximum thermal stresses and their arising times. Differences were clarified between the case that the maximum stresses correspond to early stage extreme stress and the case that steady-state stresses become the maximum. It was revealed that the maximum thermal stresses never exceed 2 times of steady-state stress under the fixed back surface temperature. The maximum stresses and their arising times under step change conditions are directly predicted from the design charts. Stress reduction factors of ramp change conditions from step ones are also evaluated from the charts.
- 5 Green functions of transient temperature and thermal stresses were developed. Temperature and thermal stresses can be predicted within 1.4% error, except short time back surface temperature in early stage of thermal transient, which can be neglected in practical design use.

These charts will contribute to the screening evaluation of thermal loads with their locations, and will be employed for sensitive analyses for design and understanding of thermal stress mechanisms.

Keywords : Thermal Stress, Plate, Green Function, Screening
FBR Design Analysis, Design Chart

* CRC Solutions Co. Ltd.
Dispatched Staff

目 次

1 . はじめに	1
2 . 非定常熱応力線図の開発	3
2.1 非定常熱伝導および非定常熱応力の方程式	3
2.2 背面温度が固定される場合	8
2.3 背面が断熱される場合	2 3
2.4 両面が熱伝達の場合	3 1
2.5 流体温度がステップ変化する場合の熱応力最大値	6 1
2.6 流体温度が線形変化する場合の温度および熱応力	6 7
2.7 ランプ温度変化による熱応力最大値	9 9
2.8 温度および熱応力の Green 関数簡易式	1 3 5
2.9 線図、数表および簡易式の利用方法	1 4 3
3 . まとめ	1 4 8
参考文献	1 4 9
付録	
A1 誤差関数	1 5 0
A2 流体温度ステップ変化による熱応力最大値とその時点	1 5 5
A3 変数分離形の 2 項近似式の固有値と各係数	1 6 4

Contents

1. Introduction	1
2. Development of thermal transient stress charts	3
2.1 Unsteady heat conduction equations and thermal stress equations	3
2.2 Specified back surface temperature	8
2.3 Adiabatic back surface	23
2.4 Heat transfer at both surfaces	31
2.5 Maximum thermal stress for step change of fluid temperature	61
2.6 Unsteady temperature and stress for linear change of fluid temperature	67
2.7 Maximum thermal stress for ramp change of fluid temperature	99
2.8 Simple approximations for Green-functions of temperature and stress	135
2.9 Applications of the charts, the tables and the simple approximations	143
3. Summary	148
References	149
Appendixes	
A1. The error function and the related functions	150
A2. The maximum thermal stress and the related time point for the step change of fluid temperature	155
A3. The eigen-values and the coefficients of 2-term approximation for the separated variable type equations	164

表リスト

Table.1.1 従来の工学線図との比較

Table.2.8.1 温度 Green 関数簡易式の誤差 1%となる F 値

Table.2.8.2 温度および応力の Green 関数簡易式の最大誤差 (U₂ 詳細式)

Table.2.8.3 温度および応力の Green 関数簡易式の最大誤差 (U₂ 統一簡易式)

Table.A1 誤差関数表

Table.A2.1(1) ステップ変化による基準面の熱応力最大時点 F(t_{1max})

Table.A2.1(2) ステップ変化による基準面の熱応力最大値 - t_{1max}

Table.A2.2(1) ステップ変化による背面の熱応力最大時点 F(t_{2max})

Table.A2.2(2) ステップ変化による背面の熱応力最大値 t_{2max}

Table.A2.3(1) ステップ変化による熱曲げ応力最大時点 F(t_{bmax})

Table.A2.3(2) ステップ変化による熱曲げ応力最大値 t_{bmax}

Table.A2.4(1) ステップ変化による基準面の熱ピーク応力最大時点 F(t_{pmax})

Table.A2.4(2) ステップ変化による基準面の熱ピーク応力最大値 - t_{pmax}

Table.A3.1 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0、0.01)

Table.A3.2 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.015、0.02)

Table.A3.3 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.03、0.05)

Table.A3.4 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.07、0.1)

Table.A3.5 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.15、0.2)

Table.A3.6 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.3、0.5)

Table.A3.7 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.7、1)

Table.A3.8 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 1.5、2)

Table.A3.9 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 3、5)

Table.A3.10 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 7、10)

Table.A3.11 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 15、20)

Table.A3.12 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 30、50)

Table.A3.13 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ = 70、100)

Table.A3.14 2 項近似式の固有値と係数 (B₂ =)

図リスト

- Fig.2.1.1 熱伝達を受ける平板の解析モデル
- Fig.2.2.1(1) 基準面の温度 U_1 ($B_2 =$)
- Fig.2.2.1(2) 板厚平均温度 U_m ($B_2 =$)
- Fig.2.2.1(3) 熱曲げ応力 S_b ($B_2 =$)
- Fig.2.2.1(4) 基準面の熱応力 S_1 ($B_2 =$)
- Fig.2.2.1(5) 背面の熱応力 S_2 ($B_2 =$)
- Fig.2.2.1(6) 基準面の熱ピーク応力 S_p ($B_2 =$)
- Fig.2.2.2(1) 基準面の温度 ${}_1$ ($B_2 =$)
- Fig.2.2.2(2) 板厚平均温度 $_m$ ($B_2 =$)
- Fig.2.2.2(3) 熱曲げ応力 $_b$ ($B_2 =$)
- Fig.2.2.2(4) 基準面の熱応力 $_1$ ($B_2 =$)
- Fig.2.2.2(5) 背面の熱応力 $_2$ ($B_2 =$)
- Fig.2.2.2(6) 基準面の熱ピーク応力 $_p$ ($B_2 =$)
- Fig.2.3.1(1) 基準面の温度 $_1$ ($B_2 = 0$)
- Fig.2.3.1(2) 背面の温度 $_2$ ($B_2 = 0$)
- Fig.2.3.1(3) 板厚平均温度 $_m$ ($B_2 = 0$)
- Fig.2.3.1(4) 熱曲げ応力 $_b$ ($B_2 = 0$)
- Fig.2.3.1(5) 基準面の熱応力 $_1$ ($B_2 = 0$)
- Fig.2.3.1(6) 背面の熱応力 $_2$ ($B_2 = 0$)
- Fig.2.3.1(7) 基準面の熱ピーク応力 $_p$ ($B_2 = 0$)
- Fig.2.4.1(1) 基準面の温度 $_1$ ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.4.1(2) 背面の温度 $_2$ ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.4.1(3) 板厚平均温度 $_m$ ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.4.1(4) 熱曲げ応力 $_b$ ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.4.1(5) 基準面の熱応力 $_1$ ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.4.1(6) 背面の熱応力 $_2$ ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.4.2(1) 基準面の温度 $_1$ ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.4.2(2) 背面の温度 $_2$ ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.4.2(3) 板厚平均温度 $_m$ ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.4.2(4) 熱曲げ応力 $_b$ ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.4.2(5) 基準面の熱応力 $_1$ ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.4.2(6) 背面の熱応力 $_2$ ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.4.3(1) 基準面の温度 $_1$ ($B_2 = 0.5B_1$)

- Fig.2.4.3(2) 背面の温度 t_2 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.4.3(3) 板厚平均温度 t_m ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.4.3(4) 熱曲げ応力 σ_b ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.4.3(5) 基準面の熱応力 σ_1 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.4.3(6) 背面の熱応力 σ_2 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.4.4(1) 基準面の温度 t_1 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.4.4(2) 背面の温度 t_2 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.4.4(3) 板厚平均温度 t_m ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.4.4(4) 熱曲げ応力 σ_b ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.4.4(5) 基準面の熱応力 σ_1 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.4.4(6) 背面の熱応力 σ_2 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.4.4(7) 基準面の熱ピーク応力 σ_p ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.4.5(1) 基準面の温度 t_1 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.4.5(2) 背面の温度 t_2 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.4.5(3) 板厚平均温度 t_m ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.4.5(4) 熱曲げ応力 σ_b ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.4.5(5) 基準面の熱応力 σ_1 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.4.5(6) 背面の熱応力 σ_2 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.4.6(1) 基準面の温度 t_1 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.4.6(2) 背面の温度 t_2 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.4.6(3) 板厚平均温度 t_m ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.4.6(4) 熱曲げ応力 σ_b ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.4.6(5) 基準面の熱応力 σ_1 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.4.6(6) 背面の熱応力 σ_2 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.4.7(1) 基準面の温度 t_1 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.4.7(2) 背面の温度 t_2 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.4.7(3) 板厚平均温度 t_m ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.4.7(4) 熱曲げ応力 σ_b ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.4.7(5) 基準面の熱応力 σ_1 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.4.7(6) 背面の熱応力 σ_2 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.5.1(1) 基準面の熱応力 σ_1 が最大となる時点
- Fig.2.5.1(2) 基準面の熱応力 σ_1 の最大値
- Fig.2.5.2(1) 背面の熱応力 σ_2 が最大となる時点
- Fig.2.5.2(2) 背面の熱応力 σ_2 の最大値
- Fig.2.5.3(1) 熱曲げ応力 σ_b が最大となる時点
- Fig.2.5.3(2) 熱曲げ応力 σ_b の最大値

- Fig.2.5.4(1) 基準面の熱ピーク応力 σ_p が最大となる時点
- Fig.2.5.4(2) 基準面の熱ピーク応力 σ_p の最大値
- Fig.2.6.1(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0$)
- Fig.2.6.1(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0$)
- Fig.2.6.1(3) 板厚平均温度 T_m (線形温度変化、 $B_2 = 0$)
- Fig.2.6.1(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = 0$)
- Fig.2.6.1(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0$)
- Fig.2.6.1(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0$)
- Fig.2.6.1(7) 基準面の熱ピーク応力 σ_p (線形温度変化、 $B_2 = 0$)
- Fig.2.6.2(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.6.2(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.6.2(3) 板厚平均温度 T_m (線形温度変化、 $B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.6.2(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.6.2(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.6.2(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.6.3(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.6.3(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.6.3(3) 板厚平均温度 T_m (線形温度変化、 $B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.6.3(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.6.3(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.6.3(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.6.4(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.6.4(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.6.4(3) 板厚平均温度 T_m (線形温度変化、 $B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.6.4(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.6.4(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.6.4(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.6.5(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2 = B_1$)
- Fig.2.6.5(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2 = B_1$)
- Fig.2.6.5(3) 板厚平均温度 T_m (線形温度変化、 $B_2 = B_1$)
- Fig.2.6.5(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = B_1$)
- Fig.2.6.5(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = B_1$)
- Fig.2.6.5(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = B_1$)
- Fig.2.6.5(7) 基準面の熱ピーク応力 σ_p (線形温度変化、 $B_2 = B_1$)
- Fig.2.6.6(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.6.6(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2 = 2B_1$)

- Fig.2.6.6(3) 板厚平均温度 t_m (線形温度変化、 $B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.6.6(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.6.6(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.6.6(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.6.7(1) 基準面の温度 t_1 (線形温度変化、 $B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.6.7(2) 背面の温度 t_2 (線形温度変化、 $B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.6.7(3) 板厚平均温度 t_m (線形温度変化、 $B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.6.7(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.6.7(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.6.7(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.6.8(1) 基準面の温度 t_1 (線形温度変化、 $B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.6.8(2) 背面の温度 t_2 (線形温度変化、 $B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.6.8(3) 板厚平均温度 t_m (線形温度変化、 $B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.6.8(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.6.8(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.6.8(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.6.9(1) 基準面の温度 t_1 (線形温度変化、 $B_2 =$)
- Fig.2.6.9(3) 板厚平均温度 t_m (線形温度変化、 $B_2 =$)
- Fig.2.6.9(4) 熱曲げ応力 σ_b (線形温度変化、 $B_2 =$)
- Fig.2.6.9(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2 =$)
- Fig.2.6.9(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2 =$)
- Fig.2.6.9(7) 基準面の熱ピーク応力 σ_p (線形温度変化、 $B_2 =$)
- Fig.2.7.1 ランプ温度変化
- Fig.2.7.2(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.2(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.2(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.2(2b) 背面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.2(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.2(3b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.2(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.2(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = 0$)
- Fig.2.7.3(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.7.3(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.7.3(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.7.3(2b) 背面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.7.3(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = 0.1B_1$)

- Fig.2.7.3(3b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.7.3(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.7.3(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = 0.1B_1$)
- Fig.2.7.4(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.4(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.4(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.4(2b) 背面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.4(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.4(3b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.4(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.4(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = 0.2B_1$)
- Fig.2.7.5(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.7.5(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.7.5(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.7.5(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.7.5(3b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.7.5(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.7.5(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = 0.5B_1$)
- Fig.2.7.6(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.7.6(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.7.6(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.7.6(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.7.6(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.7.6(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = B_1$)
- Fig.2.7.7(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.7.7(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.7.7(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.7.7(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.7.7(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.7.7(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = 2B_1$)
- Fig.2.7.8(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.7.8(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.7.8(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.7.8(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.7.8(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = 5B_1$)
- Fig.2.7.8(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = 5B_1$)

- Fig.2.7.9(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.7.9(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.7.9(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.7.9(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.7.9(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.7.9(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = 10B_1$)
- Fig.2.7.10(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = \quad$)
- Fig.2.7.10(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2 = \quad$)
- Fig.2.7.10(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 = \quad$)
- Fig.2.7.10(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 = \quad$)
- Fig.2.7.10(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 = \quad$)
- Fig.2.7.10(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 = \quad$)

記号

以下の記号および添字を使用する。

L ; 平板の板厚 (m)

X ; 基準面からの深さ (m)

x ; 無次元深さ $x = X / L$

ρ ; 密度 (g / m³)

c ; 比熱 (J / g K)

k ; 熱伝導率 (W / m K)

a ; 温度伝導率 (m² / sec) $a = k / (\rho c)$

E ; ヤング率 (M P a)

ν ; ポアソン比

α ; 線膨張係数 (/)

t ; 時間 (sec)

F ; 無次元時間 (Fourier 数) $F = a t / L^2$

T_f ; 流体の温度 ()

T ; 平板の温度 () $T = T(X, t)$

U ; 平板の無次元温度 $U = U(x, F) = T(X, t) / T_f$

U₀ ; 平板の無次元温度 $U_0 = T(X, t) / T(X, 0) = U(x, F) / U(x, 0)$

h ; 熱伝達係数 (W / m² K)

B ; ビオ数 $B = h L / k$

σ ; 平板の熱応力 (M P a)

N₁ ; 熱応力基準値 1 $N_1 = E \alpha T_f / (1 - \nu)$

N₂ ; 熱応力基準値 2 $N_2 = [B_1 / (1 + B_1)] E \alpha T_f / (1 - \nu)$

S ; 平板の無次元熱応力 $S = \sigma / N_1 = B_1 / (1 + B_1)$

S₀ ; 平板の無次元熱応力 $S_0 = \sigma / N_2 = (1 + B_1) S / B_1$

添字 1、2、m、b、p ; 1(熱伝達面、X=0)、2(背面、X=L)、m(板厚平均値)、b(曲げ成分)、p(ピーク成分)

1. はじめに

実用化戦略調査研究において有望とされているナトリウム冷却型実用高速炉の設計研究では、信頼性を維持しつつ経済性を向上させるため、もんじゅ、実証炉からさらに進んだプラント設計として、コンパクトで簡素な原子炉構造、短縮した主配管、一次系循環ポンプを組み込んだ中間熱交換器の採用及びループ数の削減が検討されている。これらにより、出力に対する冷却材の熱容量が減少し、高流速化することから、熱過渡荷重が厳しくなる傾向にある。

高速炉の系統機器の多くは、管および容器など板構造で構成される。これらの板構造は、片面が冷却材に接し他面が断熱状態、両面とも冷却材に接した状態、あるいは他面が雰囲気ガスに接した状態等で用いられる。冷却材の温度が変化すると冷却材に接する表面から温度変化が進行して板厚方向温度差が生じ、曲げ変形が拘束されると(曲げ+ピーク)型の応力が生じる。また全体の平均温度が変化し、全体伸びが拘束されると膜応力が生じる。さらに隣接部位との間に板厚差あるいは熱伝達係数の差などがあると板厚平均温度の差が生じ、変形の連続を維持するために応力が生じる。前述のとおり、実用高速炉では熱過渡荷重が厳しめになることから、熱応力が高めになりがちである。

高速炉機器の構造設計においては、設計想定する熱過渡荷重の種類が多く、評価部位も複数ある。これらの全てに対して詳細解析を行うのは現実的でなく、設計コスト低減等の観点から評価対象とする熱過渡荷重、部位のスクリーニングが望まれている。

こうしたことから、高速炉機器構造の熱過渡荷重、部位のスクリーニングに活用すべく、本研究において平板の非定常熱伝導および非定常熱応力の理論解を求め、簡易評価が可能な工学線図を作成した。[\[1\]](#) 本工学線図を用いることにより、解析評価を行わずに、簡易計算により応力評価を行うことができる。

なお、理論解あるいは線図による熱応力の簡易評価法に関しては、従来、多数の板構造の非定常熱伝導の理論解の導き方が提案されている[\[2\]](#)。また特に片面で流体と熱伝達にあり他面が断熱される場合について、多数の工学線図が作成され広範な領域で利用されている[\[3\]\[4\]\[5\]](#)。

本研究では、従来の工学線図よりも一般的な条件である両面で熱伝達にある場合に対し、流体温度が変化した時の板の温度変化および曲げ変形が拘束された時の熱応力について理論解析および線図化を行った。これにより従来の理論解および工学線図の適用範囲を大幅に拡張した。

本工学線図は、定常温度で規格化した無次元温度 および背面温度固定の定常熱応力で規格化した無次元熱応力を導入し作成した。この無次元化表示により、工学線図の読み取り精度が向上した。

従来の工学線図と本報告の適用範囲を比較して Table.1.1 に示す。

また、流体温度がステップ変化した場合の板の温度および熱応力の時間応答は Green 関数の一種であり、応用価値が高い[2][6]。Green 関数を用いると流体温度が任意に時間変化した場合の応答を簡便に予測評価できる。Green 関数は、熱応力の予測評価体系の基本データベースとして利用価値が高く、応用事例が報告されている[1][7]。本研究では使い易い Green 関数簡易式も提示した。

Table.1.1 従来の工学線図との比較

線図 適用範囲	Heisler 線図 [3]	McNeill-Brock 線図[4]	BS5500 G.4 線図[5]	本報告
表面境界条件	片面熱伝達	片面熱伝達	片面熱伝達	両面熱伝達
ステップ変化				
線形変化				
ランプ変化		計算可能		
任意位置温度				
表面温度			計算可能	
板厚平均温度				
表面応力				
曲げ応力				
ピーク応力				
ステップ変化 の最大熱応力		計算可能		
ランプ変化 の最大熱応力		計算可能		
簡易式				
特徴、補足	任意位置の温度評価。円柱および球も含む。教科書によく掲載される。	ASME Code の管の応力評価式に適している。よく利用される。	容器とノズルの接続部の熱応力評価用の応力係数表が付属している。	適用範囲が大幅に拡大。新無次元化で読み取り精度が向上。

2 . 非定常熱応力線図の開発

2 . 1 非定常熱伝導および非定常熱応力の方程式

表面が流体と熱伝達にある平板の解析モデルを Fig.2.1.1 に示す。厚さを L とする。基準面 $X=0$ は流体 1 と熱伝達にあり、背面 $X=L$ は流体 2 と熱伝達にあるとする。初期温度は 0 とする。流体 1 と基準面との熱伝達係数を h_1 とする ($0 < h_1$)、時間 $t=0$ で流体 1 の温度が 0 から T_f にステップ変化し、以後 T_f を維持するものとする。流体 2 と背面の熱伝達係数を h_2 とする ($0 < h_2$)、流体 2 の温度は 0 を維持するものとする。平板の端面は断熱状態にあり、曲げ変形が拘束されているとする。任意位置 X および任意時間 t の平板の温度 $T(X,t)$ は以下の連立方程式の解で与えられる。

$$\text{熱伝導方程式} \quad \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (2.1.1)$$

$$\text{初期条件} \quad t = 0 \quad T(X,0) = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\text{境界条件 1} \quad X = 0 \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial X} = h_1 (T - T_f) \quad (2.1.3)$$

$$\text{境界条件 2} \quad X = L \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial X} = h_2 (0 - T) \quad (2.1.4)$$

無次元位置変数 x 、無次元時間変数 (Fourier 数) F 、無次元熱伝達係数 (Bio 数) B_1, B_2 および無次元温度 U を次式で定義する。

$$x = \frac{X}{L} \quad (2.1.5)$$

$$F = \frac{\lambda t}{\rho C L^2} \quad (2.1.6)$$

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, \quad B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda} \quad (2.1.7)$$

$$U = \frac{T}{T_f} \quad (2.1.8)$$

(2.1.5) ~ (2.1.8) 式を (2.1.1) ~ (2.1.4) 式に代入すると、無次元化された連立方程式が以下のように得られる。

$$\text{熱伝導方程式} \quad \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.1.9)$$

$$\text{初期条件} \quad F = 0 \quad U(x,0) = 0 \quad (2.1.10)$$

$$\text{境界条件 1} \quad x = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = B_1(U - 1) \quad (2.1.11)$$

$$\text{境界条件 2} \quad x = 1 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -B_2 U \quad (2.1.12)$$

非定常温度分布による非定常熱応力は次式で与えられる。

$$\sigma(X,t) = \frac{E\alpha}{1-\nu} \{T_m(t) - T(X,t)\} = \sigma_{N1} \{U_m(F) - U(x,F)\} \quad (2.1.13)$$

$$U_m(F) = \frac{T_m(t)}{T_f} = \frac{1}{T_f L} \int_0^L T(X,t) dX = \int_0^1 U(x,F) dx \quad (2.1.14)$$

ここに板厚平均温度を T_m とし、その無次元値を U_m とした。 σ_{N1} は次式で定義する熱応力基準値 1 とした。(基準面の熱伝達係数に依存した熱応力基準値 2 は次の 2.2 節で定義する。)

$$\sigma_{N1} = \frac{E\alpha T_f}{1-\nu} \quad (2.1.15)$$

基準面 $x = 0$ の熱応力は次式で与えられる。

$$\sigma_1(t) = \sigma(0,t) = \sigma_{N1} \{U_m(F) - U(0,F)\} = \sigma_{N1} S_1(F) \quad (2.1.16)$$

$$S_1(F) = U_m(F) - U_1(F) \quad (2.1.17)$$

$$U_1(F) = \frac{T(0,t)}{T_f} = U(0,F) \quad (2.1.18)$$

ここに基準面の無次元温度を U_1 とし、無次元熱応力を S_1 とした。背面 $x = 1$ の熱応力は次式で与えられる。

$$\sigma_2(t) = \sigma(L,t) = \sigma_{N1} \{U_m(F) - U(1,F)\} = \sigma_{N1} S_2(F) \quad (2.1.19)$$

$$S_2(F) = U_m(F) - U_2(F) \quad (2.1.20)$$

$$U_2(F) = \frac{T(L,t)}{T_f} = U(1,F) \quad (2.1.21)$$

ここに背面の無次元温度を U_2 とし、無次元熱応力を S_2 とした。端部の反力曲げモーメント M と釣り合う熱曲げ応力は次式で与えられる。

$$\sigma_b(t) = \frac{6M}{L^2} = \frac{6}{L^2} \int_0^L \sigma(X,t) \left(X - \frac{L}{2} \right) dX = \sigma_{N1} S_b(F) \quad (2.1.22)$$

$$S_b(F) = -U_b(F) \quad (2.1.23)$$

$$U_b(F) = \frac{T_b(t)}{T_f} = \frac{6}{L^2 T_f} \int_0^L T(X,t) \left(X - \frac{L}{2} \right) dX = 6 \int_0^1 U(x,F) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \quad (2.1.24)$$

ここに温度曲げ成分を T_b とし、その無次元値を U_b とした。無次元曲げ応力を S_b とした〔補足2参照〕。基準面の熱ピーク応力（非線形成分）は次式で与えられる。

$$\sigma_p(t) = \sigma_1(t) - (-\sigma_b(t)) = \sigma_{N1} S_p(F) \quad (2.1.25)$$

$$S_p(F) = U_m(F) - U_1(F) - U_b(F) \quad (2.1.26)$$

ここに基準面の無次元熱ピーク応力を S_p とした。

〔補足1〕背面の熱ピーク応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{p,2}(t) = \sigma_2(t) - \sigma_b(t) = \sigma_{N1} S_{p,2}(F) \quad (2.1.27)$$

$$S_{p,2}(F) = U_m(F) - U_2(F) + U_b(F) \quad (2.1.28)$$

ここに背面の無次元熱ピーク応力を $S_{p,2}$ とした。以後背面の熱ピーク応力についての数式記述および線図を省略する。必要な場合は(2.1.27)および(2.1.28)式を用いて求めればよい。

〔補足2〕 $T(X,t)$ と板厚平均値および板厚中心に関する一次モーメントが等しくなる直線温度分布 $T_{EQ}(X,t)$ を次式で定義したことに等しい。

$$\begin{aligned} T_{EQ}(X,t) &= T_m(t) + T_b(t)\left(2\frac{X}{L} - 1\right) \\ U_{EQ}(x,F) &= U_m(F) + U_b(F)(2x - 1) \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

また (X,t) と曲げモーメントが等しくなる直線応力分布 $S_{EQ}(X,t)$ を次式で定義したことに等しい。

$$\begin{aligned} S_{EQ}(X,t) &= S_b(t)\left(2\frac{X}{L} - 1\right) \\ S_{EQ}(x,F) &= S_b(F)(2x - 1) \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

すなわち S_b および S_b 値は曲げ応力の表面値を表わす。基準面 $x = 0$ で $-S_b$ とし、背面 $x = 1$ で $+S_b$ とした。

〔補足3〕本報告では端部で曲げが拘束される場合のみを記述した。端部が自由で拘束なしの場合は、熱ピーク応力 S_p のみが生ずることになる。また端部が完全拘束される場合は膜応力 $S_m = -U_m$ が付加されることになる。

〔補足4〕本報告では基準面側の流体1温度が変化し、背面側の流体2温度が0を維持した場合に限定して数学的記述および線図を与える。基準面および背面は便宜上の呼称であり、逆の場合についても本報告の数学的記述および線図が利用できる。基準面側の流体1温度が0を維持し、背面側の流体2温度が変化した場合の解は、本報告の解において B_1 と B_2 を入れ替えたもので与えられる。得られた解において表面値の入れ替え(添え字1と2の交換)および曲げ成分の符号反転を行えばよい。このようにして逆の場合の解を求めることができる。基準面側の流体1温度と背面側の流体2温度が同時に変化する場合の解は、一方のみが単独で変化する場合の解をそれぞれ別個に求め、両者を加算すればよい。

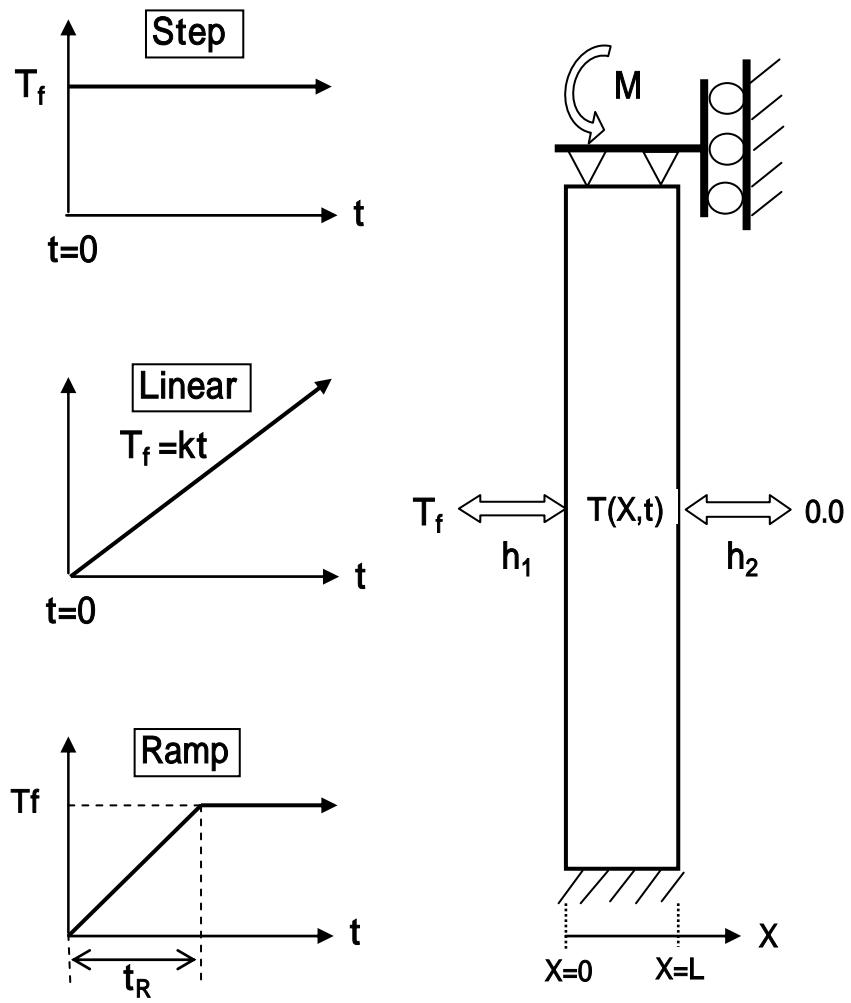


Fig.2.1.1 熱伝達を受ける平板の解析モデル

2.2 背面温度が固定される場合

基準面の熱伝達係数が $0 < B_1$ で、背面の熱伝達係数が $B_2 =$ の場合とする。背面の境界条件 2 は温度規定条件 $U(1,F)=0$ に等しくなり、無次元の非定常温度方程式は次式で与えられる。

$$\text{熱伝導方程式} \quad \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.2.1)$$

$$\text{初期条件} \quad F = 0 \quad U(x,0) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\text{境界条件 1} \quad x = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = B_1[U(0,F) - 1] \quad (2.2.3)$$

$$\text{境界条件 2} \quad x = 1 \quad U(1,F) = 0 \quad (2.2.4)$$

(1) ラプラス変換法による解

(2.2.1) ~ (2.2.4)式をラプラス変換 ($F \rightarrow s$ 、 $U \rightarrow u$) すると次式を得る[2][6][8]。

$$su(x,s) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.2.5)$$

$$x = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = B_1 \left(u(0,s) - \frac{1}{s} \right) \quad (2.2.6)$$

$$x = 1 \quad u(1,s) = 0 \quad (2.2.7)$$

これらの式を解くと次式が得られる。

$$\begin{aligned} u(x,s) &= \frac{B_1[e^{-x\sqrt{s}} - e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s[(B_1 + \sqrt{s}) - (B_1 - \sqrt{s})e(-2\sqrt{s})]} = \frac{B_1[e^{-x\sqrt{s}} - e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s(B_1 + \sqrt{s}) \left[1 - \frac{B_1 - \sqrt{s}}{B_1 + \sqrt{s}} e(-2\sqrt{s}) \right]} \\ &= \frac{B_1[e^{-x\sqrt{s}} - e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s(B_1 + \sqrt{s})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_1 - \sqrt{s}}{B_1 + \sqrt{s}} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$u_1(s) = u(0,s) = \frac{B_1[1 - e(-2\sqrt{s})]}{s(B_1 + \sqrt{s})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_1 - \sqrt{s}}{B_1 + \sqrt{s}} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \quad (2.2.9)$$

$$u_2(s) = u(1,s) = 0$$

$$u_m(s) = \int_0^1 u(x,s) dx = \frac{B_1[1-2e(-\sqrt{s})+e(-2\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1+\sqrt{s})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_1-\sqrt{s}}{B_1+\sqrt{s}} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \quad (2.2.10)$$

$$u_b(s) = 6 \int_0^1 u(x,s) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\ = \left[\frac{-3B_1[1+2e(-\sqrt{s})+e(-2\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1+\sqrt{s})} + \frac{6B_1[1-e(-2\sqrt{s})]}{s^2(B_1+\sqrt{s})} \right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_1-\sqrt{s}}{B_1+\sqrt{s}} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \quad (2.2.11)$$

(2.2.8) ~ (2.2.11)式の級数部は $s \rightarrow 0$ ($F \rightarrow 0$) で 0 となり、 F が十分小さい短時間側では無視できる。級数部を除いてラプラス逆変換すると次式が得られる。

$$U(x,F) \approx \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}}\right) - e(B_1x+B_1^2F)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}}+B_1\sqrt{F}\right) \\ - \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}}\right) + e\{B_1(2-x)+B_1^2F\}\operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}}+B_1\sqrt{F}\right) \quad (2.2.12)$$

$$U_1(F) = U(0,F) \approx 1 - e(B_1^2F)\operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F}) \\ - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + e(2B_1+B_1^2F)\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}+B_1\sqrt{F}\right) \quad (2.2.13)$$

$$U_2(F) = U(1,F) = 0$$

$$U_m(F) \approx 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} \left\{ 1 - e(B_1^2F)\operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F}) \right\} \\ - 4\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) + 2\frac{1+B_1}{B_1}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 2\frac{e(B_1+B_1^2F)}{B_1}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}+B_1\sqrt{F}\right) \\ + 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) - \frac{1+2B_1}{B_1}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + \frac{e(2B_1+B_1^2F)}{B_1}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}+B_1\sqrt{F}\right) \quad (2.2.14)$$

$$\begin{aligned}
 U_b(F) \approx & 6F - 6 \frac{B_1 + 2}{B_1} \sqrt{\frac{F}{\pi}} + 3 \frac{B_1 + 2}{B_1^2} \left\{ 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \right\} \\
 & - 12 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) + 6 \frac{1+B_1}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 6 \frac{e(B_1+B_1^2 F)}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - 6 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) + 3 \frac{1+2B_1}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - 3 \frac{e(2B_1+B_1^2 F)}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & + 6 \frac{e(2B_1+B_1^2 F)}{B_1^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) + 12 \frac{\sqrt{F}}{B_1} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - 24F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right)
 \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

ここに $\operatorname{erfc}(x)$ は補誤差関数であり、 $\operatorname{ierfc}(x)$ は $\operatorname{erfc}(x)$ の積分であり、 $i^2 \operatorname{erfc}(x)$ は $\operatorname{ierfc}(x)$ の積分である。これら熱伝導問題で良く使用される誤差関数を付録 A1 に示した。(2.2.12) ~ (2.2.15) 式は $0.01 \leq B_1 \leq 100$ に対して $F=0.2$ で誤差 0.2% 以下であり、 $F > 0$ で限りなく厳密解に近づく。

(2) 短時間側の簡易式

背面の境界条件 2 (2.2.4) 式を $[x \rightarrow \infty \text{ で } U(x, F) = 0]$ に変更すると、半無限固体 ($0 \leq x < \infty$) の解が以下のように得られる。

$$u(x, s) = \frac{B_1 e(-x\sqrt{s})}{s(B_1 + \sqrt{s})} \tag{2.2.16}$$

$$U(x, F) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}}\right) - e(B_1 x + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \tag{2.2.17}$$

これから (2.2.12) 式の 1 行目は半無限固体の解であり、2 行目以下は、背面の境界条件 $[U(1, F) = 0]$ を満たすための追加項となっていることが分かる。半無限固体の解 (2.2.17) 式は、背面相当位置の $U(1, F) = 0$ となる短時間では、平板の解に限りなく漸近する。平板の短時間側の簡易式として次式が得られる。

$$U_1(F) = U(0, F) \approx 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}), U_2(F) = U(1, F) \approx 0 \tag{2.2.18}$$

$$U_m(F) \approx 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} \left\{ 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \right\} = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{U_1(F)}{B_1} \tag{2.2.19}$$

$$\begin{aligned}
 U_b(F) &\approx 6F - 6\frac{B_1+2}{B_1}\sqrt{\frac{F}{\pi}} + 3\frac{B_1+2}{B_1^2}\{1 - e(B_1^2 F)\operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F})\} \\
 &= 6F - \frac{3(B_1+2)}{B_1}U_m(F)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.20}$$

(2.2.18) ~ (2.2.20)式は $B_1 =$ に対しても適用でき、 $0.01 < B_1 < 1$ に対して $F=0.08$ で誤差 1%以下であり、 $1 < B_1$ に対して $F = 0.06$ で誤差 1%以下であり、 $F \rightarrow 0$ で厳密解に近づく。短時間側の簡易式として適している(2.8節)。短時間領域では、流体温度ステップ変化に対する表面温度 U_1 は(2.2.18)式で与えられ、 U_m 、 U_b および無次元熱応力はすべて U_1 を用いて計算評価できる。さらに $B_1 \leq F \leq 0.2$ での U_1 は付録 A1 の(A1.11)式を用いた以下の近似式が誤差 3%以下で使用できる。

$$U_1(F) \approx 1 - e(B_1^2 F)\operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F}) \approx 1 - (1 + B_1^2 F) \left(1 - \frac{2B_1\sqrt{F}}{\sqrt{\pi}} \right) \approx 2B_1\sqrt{\frac{F}{\pi}} - B_1^2 F
 \tag{2.2.21}$$

(2.2.21)式を(2.2.19)式および(2.2.20)式に代入すると次式が得られる。

$$U_m(F) \approx 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{U_1(F)}{B_1} \approx B_1 F
 \tag{2.2.22}$$

$$U_b(F) \approx 6F - \frac{3(B_1+2)}{B_1}U_m(F) \approx -3B_1 F
 \tag{2.2.23}$$

(2.2.22)式および(2.2.23)式では、差分計算により相対誤差が大きくなるので、適用可能な F の上限値は U_1 に比べて小さくなるが、短時間特性を簡便に現す簡易式として有効である。

(3) 変数分離法による解および長時間側の簡易式

変数分離形の解として次式を仮定する[2]。

$$\begin{aligned}
 U(x, F) &= a_1 + a_2 x - \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(p_n x) + d_n \sin(p_n x)\} e(-p_n^2 F) \\
 a_1 &= \frac{B_1}{1+B_1}, \quad a_2 = -a_1 = \frac{-B_1}{1+B_1}
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

(a)式は熱伝導(2.2.1)式を満たしている。 a_1+a_2x は定常温度分布を表し、境界条件(2.2.3)および(2.2.4)式を満たすように定めた。(a)式を境界条件(2.2.3)式に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n - \frac{p_n}{B_1} d_n \right\} e(-p_n^2 F) = 0 \rightarrow c_n = \frac{p_n d_n}{B_1} \quad (b)$$

(a)および(b)式を境界条件(2.2.4)式に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left[\frac{p_n}{B_1} \cos(p_n) + \sin(p_n) \right] e(-p_n^2 F) = 0 \rightarrow p_n \cot(p_n) + B_1 = 0 \quad (c)$$

(c)式は固有値 p_n を定める固有値方程式である。正の固有値を値の小さい順に採用すると p_n の範囲は $(n - 1/2) < p_n < n$ となる(等号は $B_1 =$ の時)、(a),(b)および(c)式を初期条件(2.2.2)式に代入すると次式を得る。

$$\frac{B_1(1-x)}{1+B_1} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left[\frac{p_n}{B_1} \cos(p_n x) + \sin(p_n x) \right] \quad (d)$$

(d)式の両辺に $p_n \cos(p_n x) / B_1 + \sin(p_n x)$ を乗じて $x=0$ から $x=1$ まで積分すると次式を得る。

$$d_n = \frac{2B_1^2}{p_n(p_n^2 + B_1 + B_1^2)} \quad (e)$$

以上で(2.2.1) ~ (2.2.4)式を全て満たす変数分離形の解が得られた。整理して以下に書き直す。

$$\begin{aligned}
 U(x, F) &= a_1 + a_2 x - \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(p_n x) + d_n \sin(p_n x)\} e(-p_n^2 F) \\
 a_1 &= \frac{B_1}{1+B_1}, \quad a_2 = -a_1 = \frac{-B_1}{1+B_1} \\
 \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi &< p_n \leq n\pi, \quad p_n \cot(p_n) + B_1 = 0 \\
 d_n &= \frac{2B_1^2}{p_n(p_n^2 + B_1 + B_1^2)}, \quad c_n = \frac{p_n d_n}{B_1} = \frac{2B_1}{p_n^2 + B_1 + B_1^2}
 \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

$U_1(F)$ 、 $U_2(F)$ 、 $U_m(F)$ および $U_b(F)$ は次式で与えられる。

$$U_1(F) = U(0, F) = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e(-p_n^2 F) \tag{2.2.25}$$

$$U_2(F) = U(1, F) = a_1 + a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(p_n) + d_n \sin(p_n)] e(-p_n^2 F) = 0$$

$$U_m(F) = \int_0^1 U(x, F) dx = a_1 + \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{\sin(p_n)}{p_n} + d_n \frac{1 - \cos(p_n)}{p_n} \right] e(-p_n^2 F) \tag{2.2.26}$$

$$\begin{aligned}
 U_b(F) &= 6 \int_0^1 U(x, F) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{a_2}{2} - \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} \left[3 \frac{c_n \sin(p_n) - d_n \{1 + \cos(p_n)\}}{p_n} + 6 \frac{c_n \{\cos(p_n) - 1\} + d_n \sin(p_n)}{p_n^2} \right] e(-p_n^2 F) \\
 &= \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[3 \frac{c_n \sin(p_n) - d_n \{1 + \cos(p_n)\}}{p_n} - 6 \frac{c_n}{p_n^2} \right] e(-p_n^2 F)
 \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

(2.2.25) ~ (2.2.27)式の級数部は t で 0 に減衰し、 n が大きいほど減衰が早いことが分かる。 $n = 1$ 項のみ採る近似式は $0.01 B_1$ および $F=0.2$ で誤差 1% 以下であり、 F 大で限りなく厳密解に近づく。時定数を $\tau = 1/P_1^2$ として〔定常値 - 定数 $\times \exp(-F/\tau)$ 〕と記述でき、長時間側の簡易式として適している（詳細は 2.8 節および付録 A3 参照）。

(4) U および S 線図

0.01 $B_1 = 100$ および $B_1 = 1$ に対して U_1 、 U_m 、 $S_b (= -U_b)$ 、 S_1 、 S_2 および S_p を計算した結果を Fig.2.2.1(1) ~ (6) に示す。各値は定常値に収束するが、熱伝達係数 B_1

が大きいほど定常値に達するのが早い。 $B_1 = 100$ では $F=0.6$ 、 $B_1=0.01$ では $F=2.0$ でほぼ定常値に達する。本節における U および S 線図の利用手順は以下のようになる。

熱伝達係数 h_1 および時間 t に対応する無次元数 B_1 および F を算出する。

$$h_1 \rightarrow B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, \quad t \rightarrow F = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}$$

パラメータ B_1 および横軸 F に対する U および S を線図から読み取る。

$$B_1, F \rightarrow U_j(F) (j=1,2,m), S_k(F) (k=1,2,b,p)$$

U および S から温度 T および応力 を算出する。

$$U_j(F) \rightarrow T_j(t) = T_f U_j(F) \quad (j=1,2,m)$$

$$S_k(F) \rightarrow \sigma_k(t) = \frac{E \alpha T_f}{1-\nu} S_k(F) \quad (k=1,2,b,p)$$

文献[2][3][4][5]には背面断熱条件(2 . 3 節の $B_2 = 0.0$ の場合) に対する同様の線図が掲載され、よく利用されている。

(5) および 線図

無次元値 U および S では熱伝達係数依存性が直接反映されている。熱伝達係数依存性が大きく、特に $B_1 = 0.1$ では最大値が小さく読み取り相対誤差が大きい。簡易線図としては読み取り精度および B_1 に関する補間精度が悪いという欠点がある。この欠点を改善する第一の方法は B_1 の範囲に応じて最大値スケールを変えた複数の図を用意することが考えられるが、図数が増えて好ましくない。第二の方法は B_1 依存性の概略傾向が包含された基準値を用いて規格化することが考えられる。規格化された無次元量の B_1 変化に対する変動を鈍感にし、最大値を均一化することで、読み取り相対精度および補間精度を向上させる。そこで F での定常温度分布および定常熱応力に着目し、以下の無次元規格化 2 を導入することにする。(2.2.24)式の a_1+a_2x は F での定常温度分布 $U(x,)$ を表す。定常温度への到達度を表す無次元温度 を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\phi_1(F) &= \frac{T(0,t)}{T(0,\infty)} = \frac{U_1(F)}{U_1(\infty)} = \frac{U_1(F)}{a_1} \\ \phi_2(F) &= \frac{T(L,t)}{T(L,\infty)} = \frac{U_2(F)}{U_2(\infty)} = \frac{U_2(F)}{a_1 + a_2} \\ \phi_m(F) &= \frac{T_m(t)}{T_m(\infty)} = \frac{U_m(F)}{U_m(\infty)} = \frac{U_m(F)}{a_1 + a_2/2}\end{aligned}\tag{2.2.28}$$

本ケースのように背面温度が 0.0 に規定される場合は $B_2 = 0 / 0$ となるが、この場合は $B_2 = 1$ とする。また本ケースの定常熱応力は $-S_1(\infty) = S_2(\infty) = S_b(\infty) = -a_2/2 = 0.5B_1 / (1 + B_1)$ の曲げ応力状態となり B_1 にのみ依存する。背面断熱条件($B_2 = 0$)では $S_b(\infty) = 0$ となり、背面熱伝達条件($0 < B_2$ 有限)では $S_b(\infty)$ が B_1 だけでなく B_2 にも依存するが、背面温度が変化して背面の熱的境界条件の効果が顕著に表れるのは $F = 0.1$ 以降であり、 $F = 0.1$ までに基準面の応力は最大値の 0.5 ~ 1.0 倍に達する。さらに基準面の最大応力は本ケースの定常熱応力の 1 ~ 2 倍となる。これらを考慮し、基準面の熱的境界条件 B_1 にのみ依存する熱応力基準値 σ_{N2} として、本ケースの定常熱応力の 2 倍である次式の σ_{N2} を採用することにする。

$$\sigma_{N2} = 2\sigma_b(B_2 = \infty, t = \infty) = \frac{B_1}{1 + B_1} \frac{E\alpha T_f}{1 - \nu} = \frac{B_1}{1 + B_1} \sigma_{N1}\tag{2.2.29}$$

これを用いて無次元熱応力 β_k を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\beta_k(F) &= \frac{\sigma_k(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1 + B_1)S_k(F)}{B_1} \quad (\text{for } k = 1, 2, b, p) \\ \sigma_k(t) &= \sigma_{N2}\beta_k(F) = \frac{B_1}{1 + B_1} \frac{E\alpha T_f}{1 - \nu} \beta_k(F)\end{aligned}\tag{2.2.30}$$

0.01 $B_1 = 100$ および $B_1 = 1$ に対して β_1 、 β_m 、 β_b 、 β_1 、 β_2 および β_p を計算した結果を Fig.2.2.2(1) ~ (6)に示す。本節における β_k および β_k 線図の利用手順は以下のようになる。

熱伝達係数 h_1 および時間 t に対応する無次元数 B_1 および F を算出する。

$$h_1 \rightarrow B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, \quad t \rightarrow F = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}$$

パラメータ B_1 および横軸 F に対する β_k および β_k を線図から読み取る。

$$B_1, F \rightarrow \phi_i(F) (i=1,2,m), \beta_j(F) (j=1,2,b,p)$$

および から温度 T および応力 を算出する。

$$\phi_1(F) \rightarrow T_1(t) = a_1 T_f \phi_1(F)$$

$$\phi_2(F) \rightarrow T_2(t) = (a_1 + a_2) T_f \phi_2(F)$$

$$\phi_m(F) \rightarrow T_m(t) = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) T_f \phi_m(F)$$

$$\beta_k(F) \rightarrow \sigma_k(t) = \frac{B_1}{1+B_1} \frac{E\alpha T_f}{1-\nu} \beta_k(F) \quad (k=1,2,b,p)$$

および 線図の利点および本ケースの計算結果の特徴は以下のとおりである。

温度 は変動範囲 0.0 1.0 となる。応力 | | は変動範囲 0.0 0.5 ~ 1.0 となる。これにより、特に $B_1 = 1$ での読み取り精度および B_1 に関する補間精度が格段に向上される。

曲げ応力 σ_b は単調増加し、最大値（定常値）0.5 に達する。 B_1 が大きいほど定常値に達するのが早い。ほぼ定常値に達する時間は $B_1 = 100$ で $F = 0.2$ 、 $B_1 = 0.01$ で $F = 2.0$ である。

$B_1 > 2$ の場合、基準面の熱応力 (σ_1) は短時間で最大値（極大値）となり、以後減少し定常値 0.5 に達する。極大値に占めるピーク応力の割合はおよそ 0.5 ~ 1.0 であり、 B_1 が大きいほどピーク応力の割合が大きい。極大値に達する時間は B_1 が大きいほど早くなる。熱応力の最大値は定常値の 2 倍を超えない。

$B_1 = 2$ の場合、基準面の熱応力 (σ_1) は単調増加し最大値（定常値）0.5 に達する。定常値に達する時間は B_1 が小さいほど遅くなる。

背面の熱応力 σ_2 は単調増加し最大値（定常値）0.5 に達する。定常値に達する時間は B_1 が大きいほど早くなる。

基準面の熱ピーク応力 (σ_p) は短時間で最大値に達し、以後減少し定常値 0 に達する。最大値および定常値に達する時間は、 B_1 が大きいほど早くなる。

熱応力の最大値は背面温度が 0 に固定された場合の定常熱応力の 2 倍を超えない。これは背面が断熱あるいは熱伝達の場合でも常に成立する。

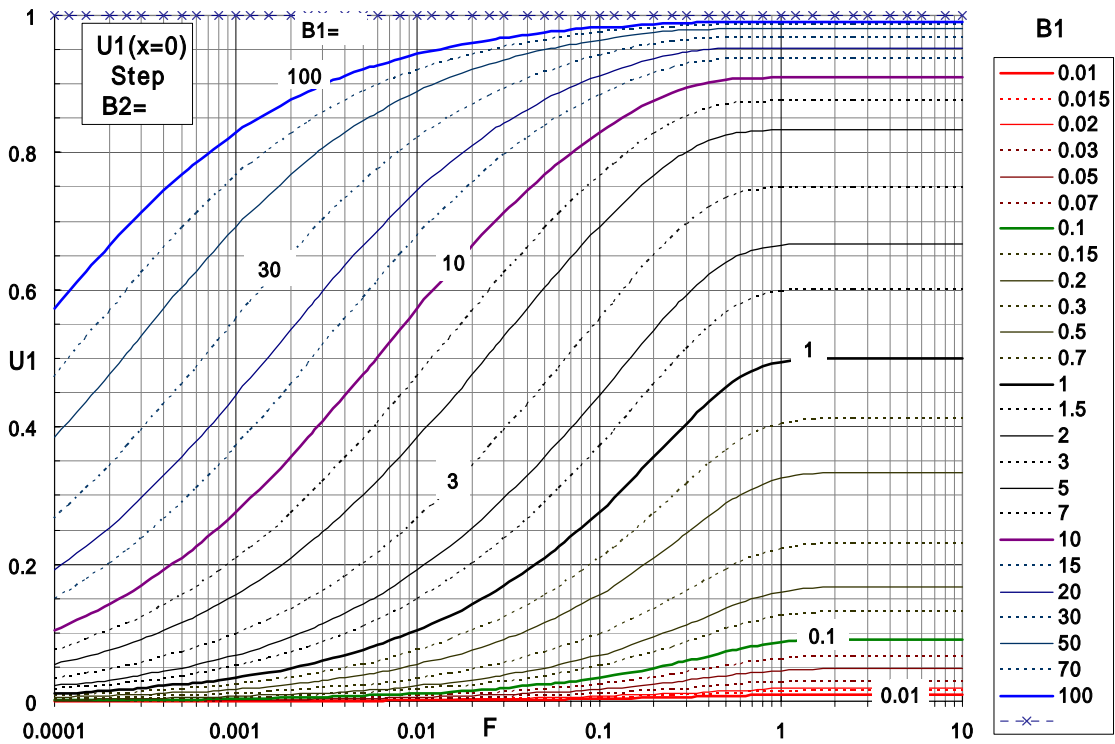


Fig.2.2.1(1) 基準面の温度 U_1 ($B_2 =$)

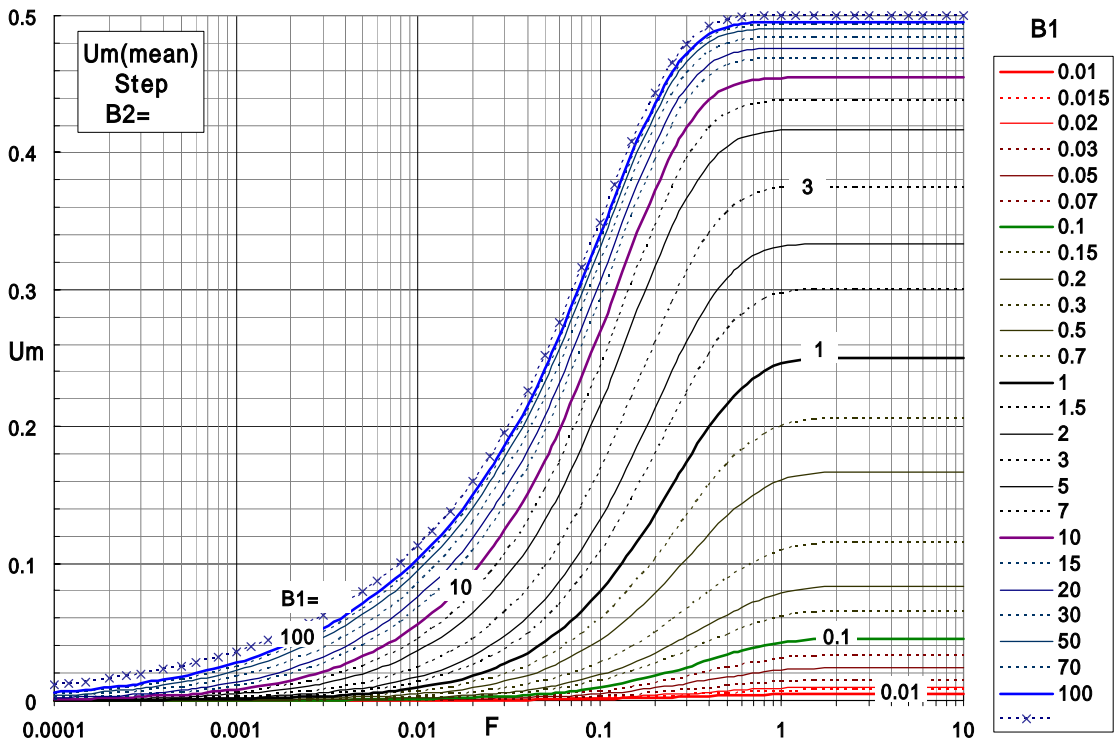


Fig.2.2.1(2) 板厚平均温度 U_m ($B_2 =$)

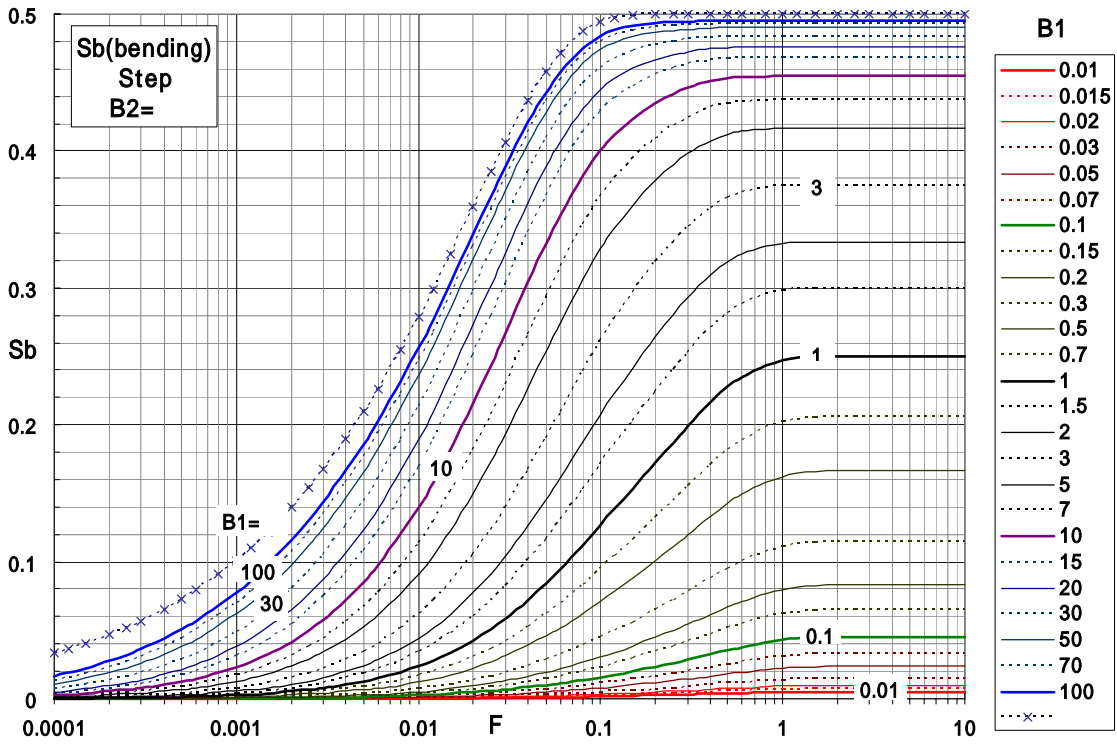


Fig.2.2.1(3) 熱曲げ応力 S_b ($B_2 =$)

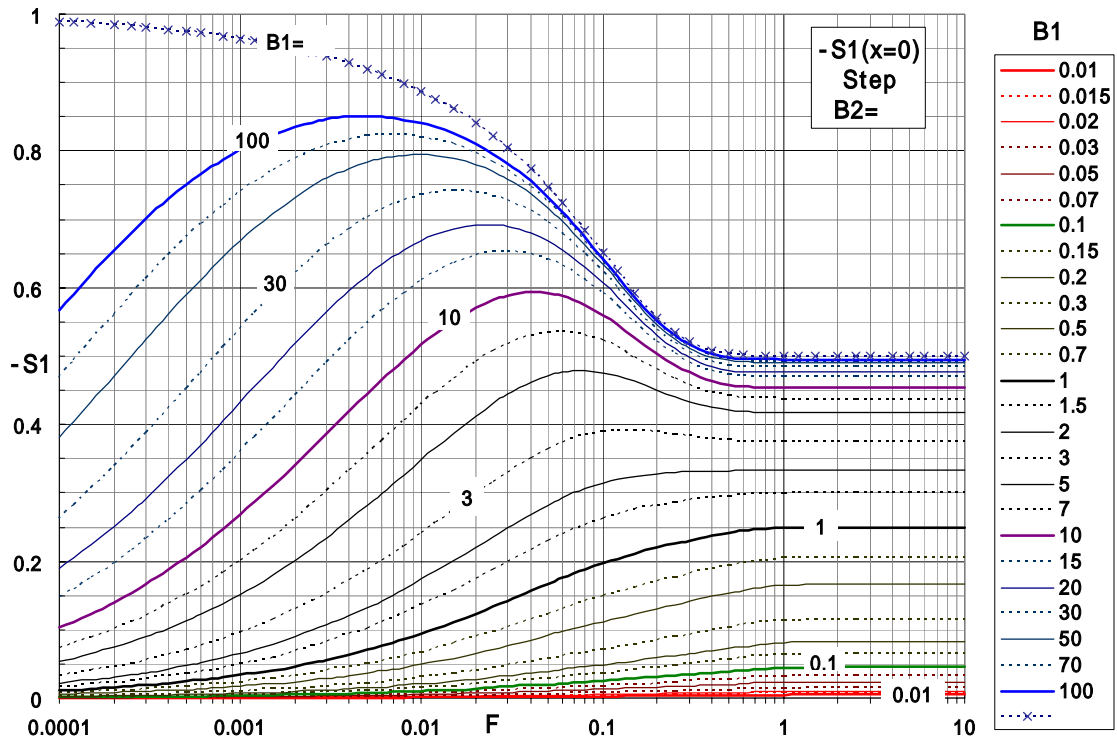


Fig.2.2.1(4) 基準面の熱応力 S_1 ($B_2 =$)

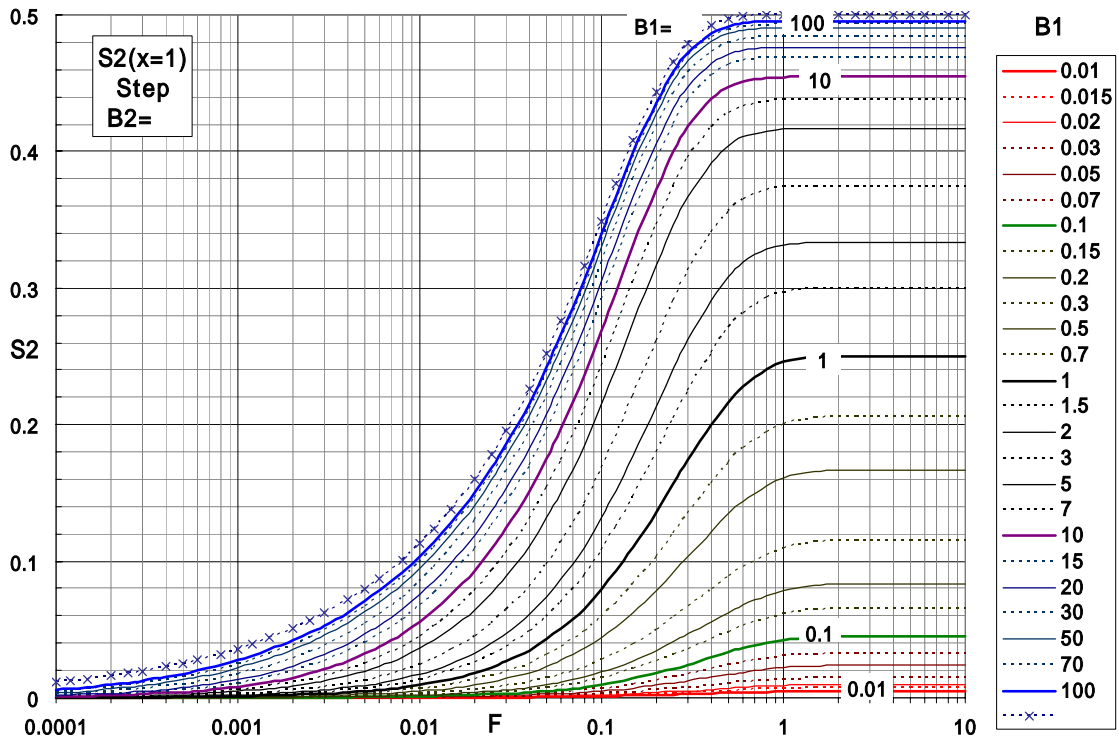


Fig.2.2.1(5) 背面の熱応力 S_2 ($B_2 =$)

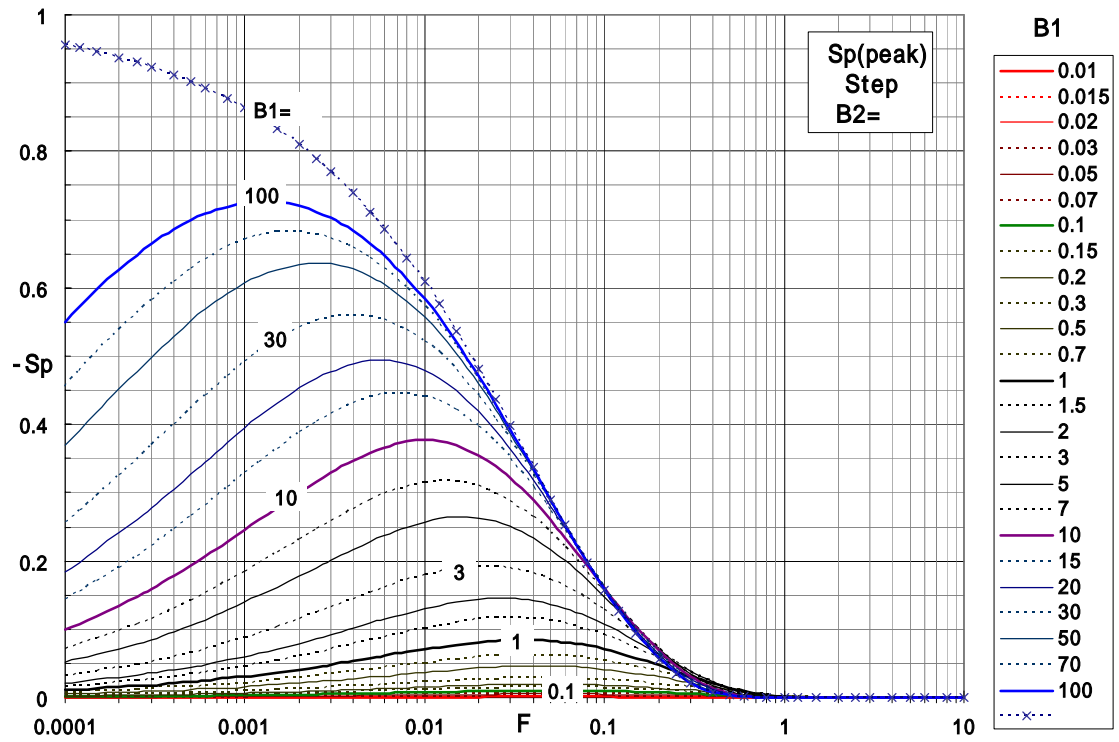


Fig.2.2.1(6) 基準面の熱ピーク応力 S_p ($B_2 =$)

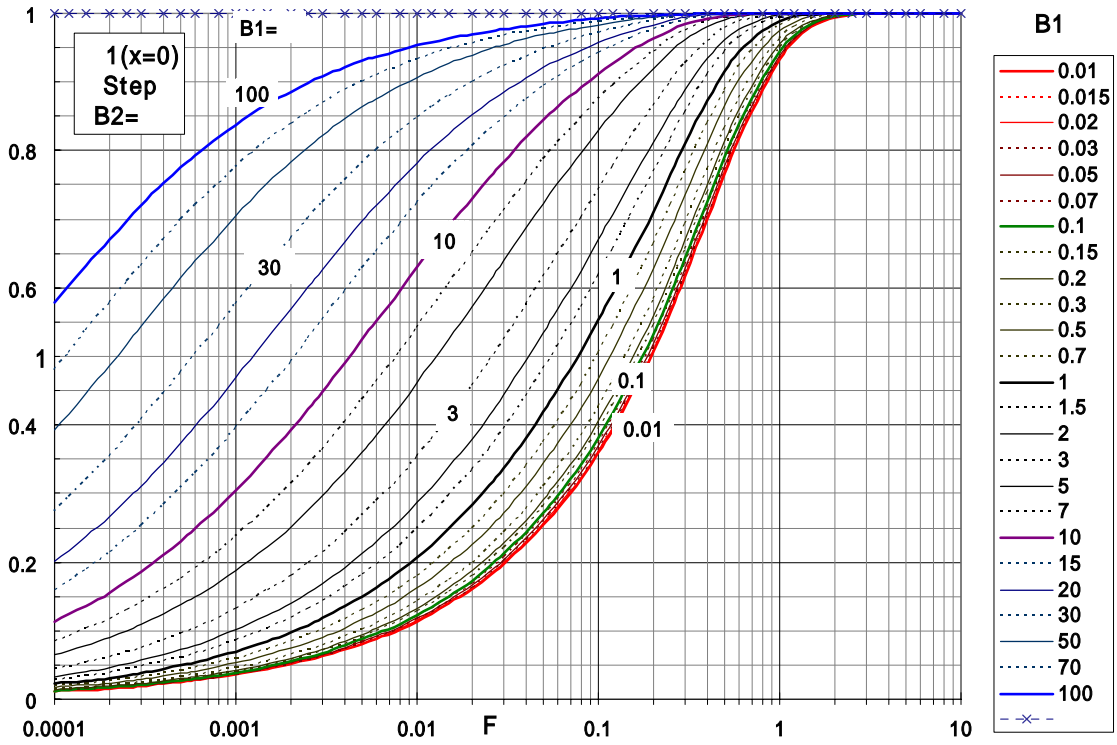


Fig.2.2.2(1) 基準面の温度 $1(x=0)$ ($B_2 =$)

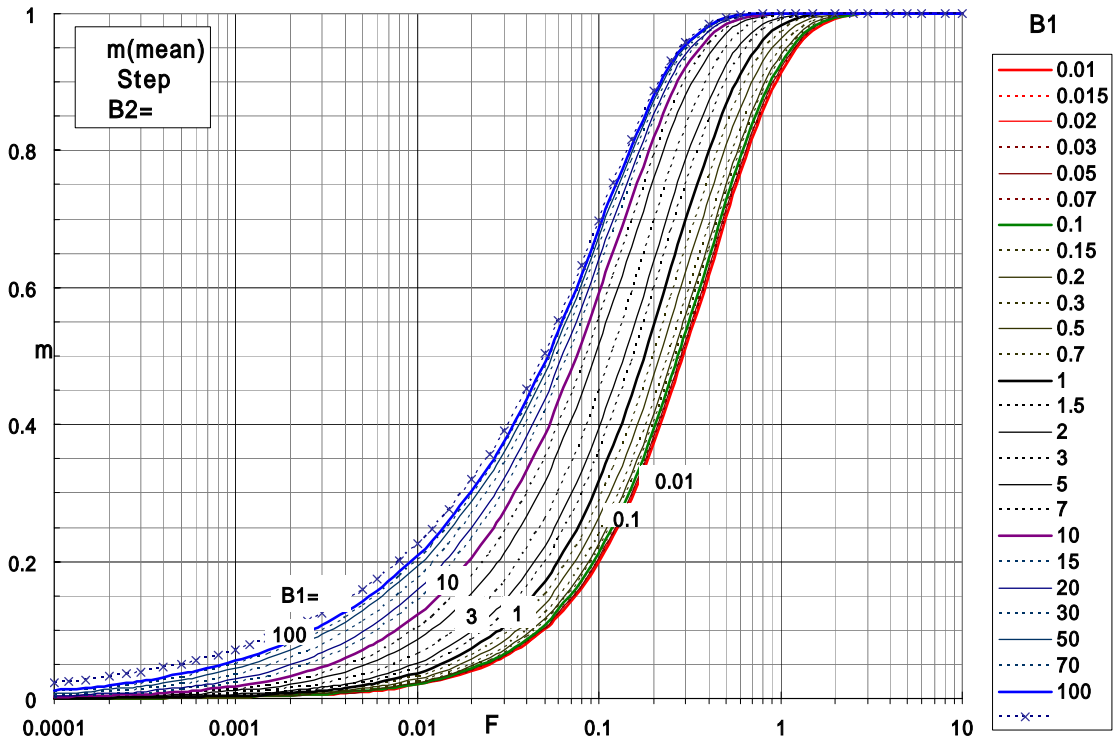


Fig.2.2.2(2) 板厚平均温度 m ($B_2 =$)

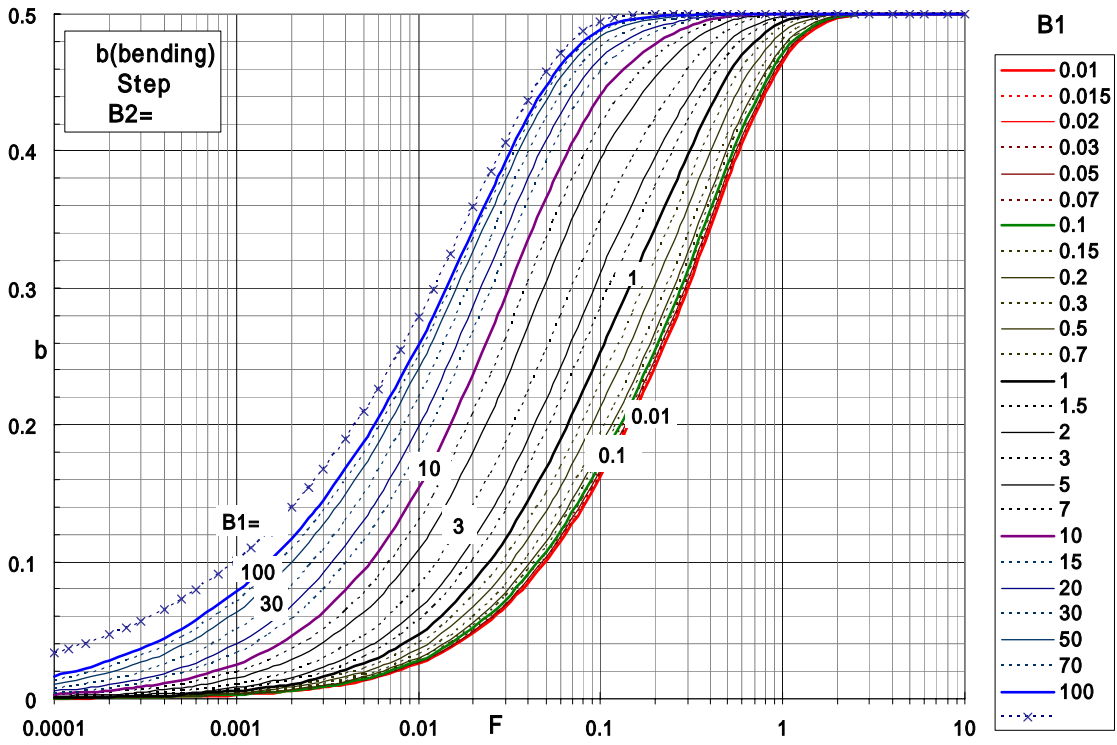


Fig.2.2.2(3) 熱曲げ応力 b ($B_2 =$)

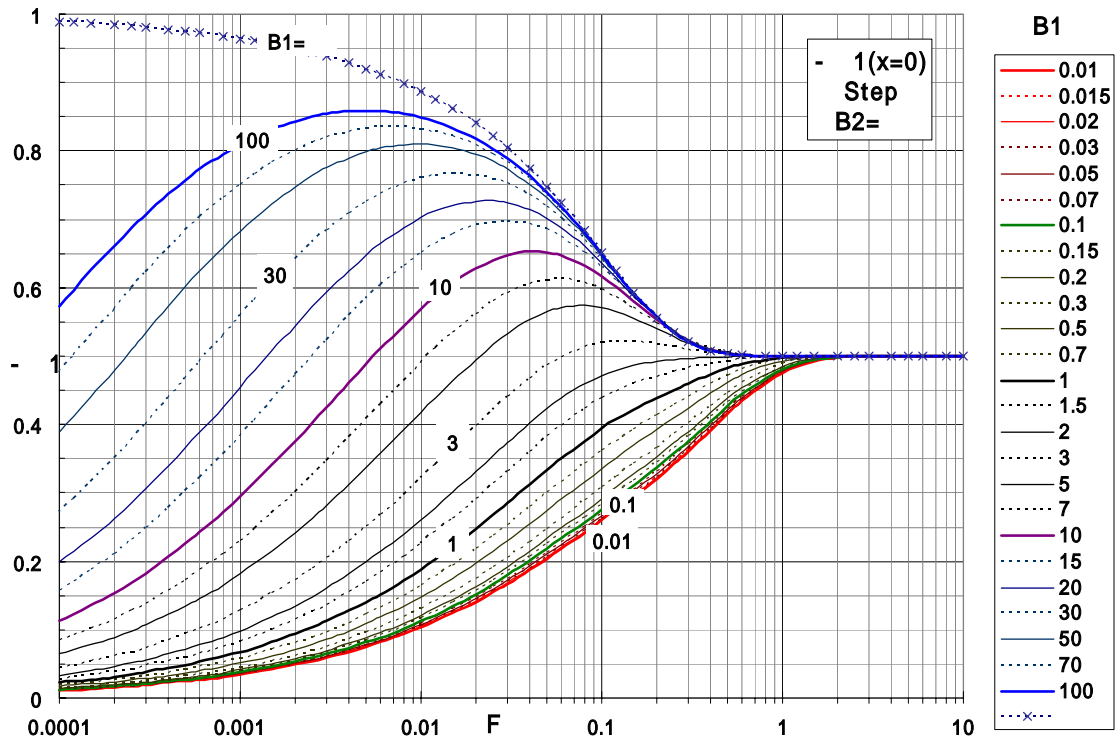


Fig.2.2.2(4) 基準面の熱応力 σ_1 ($B_2 =$)

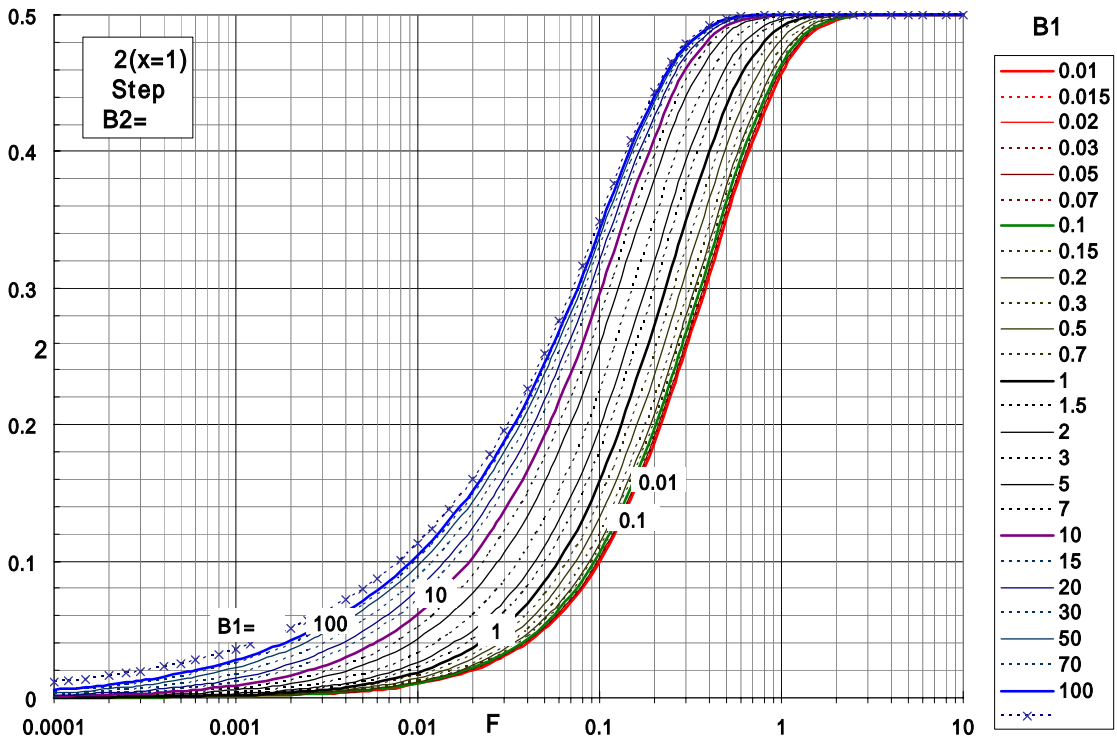


Fig.2.2.2(5) 背面の熱応力 2 ($B_2 =$)

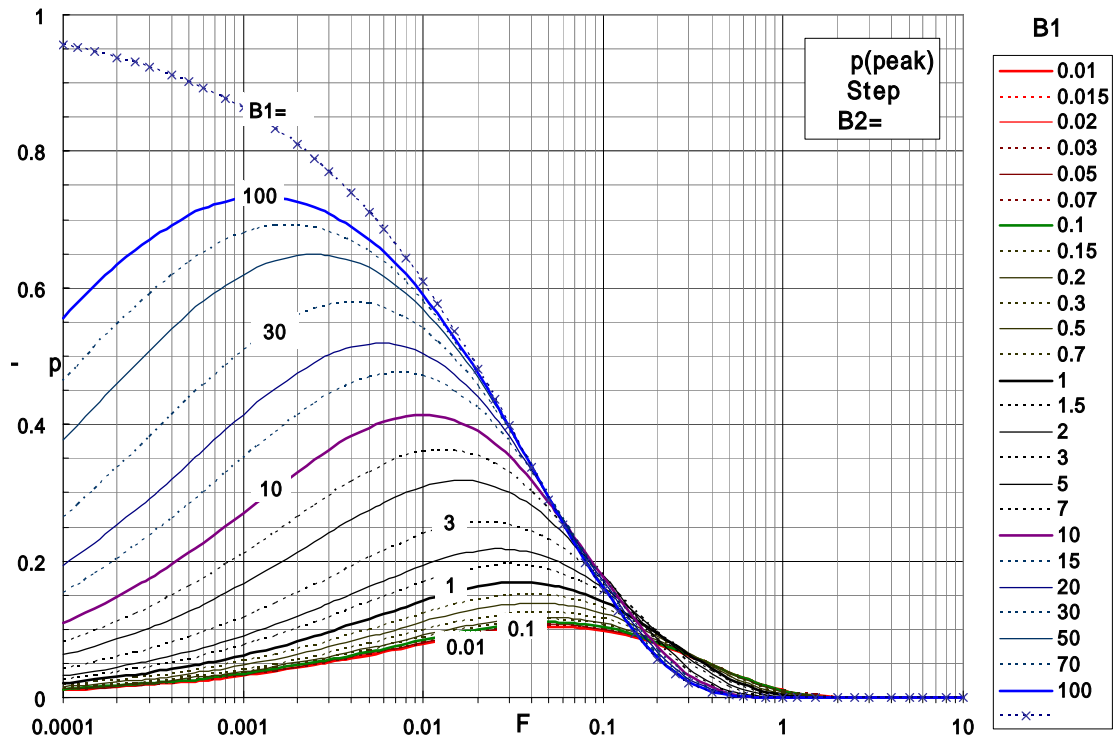


Fig.2.2.2(6) 基準面の熱ピーク応力 p ($B_2 =$)

2.3 背面が断熱される場合

基準面の熱伝達係数が $0 < B_1$ で、背面の熱伝達係数が $B_2 = 0$ の場合とする。背面の境界条件 2 は断熱条件に等しくなり、無次元の非定常温度方程式は次式で与えられる。

$$\text{熱伝導} \quad \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{2.3.1}$$

$$\text{初期条件} \quad F = 0 \quad U(x, 0) = 0 \tag{2.3.2}$$

$$\text{境界条件 1} \quad x = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = B_1 [U(0, F) - 1] \tag{2.3.3}$$

$$\text{境界条件 2} \quad x = 1 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{2.3.4}$$

これらの式をラプラス変換 ($F \rightarrow s$ 、 $U \rightarrow u$) すると次式を得る。

$$su(x, s) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.3.5}$$

$$x = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = B_1 \left(u(0, s) - \frac{1}{s} \right) \tag{2.3.6}$$

$$x = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.3.7}$$

これらの式を解くと次式が得られる。

$$\begin{aligned} u(x, s) &= \frac{B_1 [e^{-x\sqrt{s}} + e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s[(B_1 + \sqrt{s}) + (B_1 - \sqrt{s})e(-2\sqrt{s})]} = \frac{B_1 [e^{-x\sqrt{s}} + e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s(B_1 + \sqrt{s}) \left[1 + \frac{B_1 - \sqrt{s}}{B_1 + \sqrt{s}} e(-2\sqrt{s}) \right]} \\ &= \frac{B_1 [e^{-x\sqrt{s}} + e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s(B_1 + \sqrt{s})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{B_1 - \sqrt{s}}{B_1 + \sqrt{s}} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

$$u_m(s) = \int_0^1 u(x, s) dx = \frac{B_1 [1 - e(-2\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{B_1 - \sqrt{s}}{B_1 + \sqrt{s}} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \tag{2.3.9}$$

$$u_b(s) = 6 \int_0^1 u(x,s) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{-3B_1[1-e(-2\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1+\sqrt{s})} + \frac{6B_1[1-2e(-\sqrt{s})+e(-2\sqrt{s})]}{s^2(B_1+\sqrt{s})} \right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{B_1-\sqrt{s}}{B_1+\sqrt{s}} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \quad (2.3.10)$$

(2.3.8) ~ (2.3.10)式の級数部は $s \rightarrow 0$ ($F \rightarrow 0$) で限りなく 0 に近づく。級数部を省略してラプラス逆変換すると次式が得られる。

$$U(x,F) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}}\right) - e(B_1x + B_1^2F) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right)$$

$$+ \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}}\right) - e\{B_1(2-x) + B_1^2F\} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right) \quad (2.3.11)$$

$$U_1(F) = U(0,F) = 1 - e(B_1^2F) \operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F})$$

$$+ \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - e(2B_1 + B_1^2F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right) \quad (2.3.12)$$

$$U_2(F) = U(1,F) = 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 2e(B_1 + B_1^2F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right) \quad (2.3.13)$$

$$U_m(F) = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} \left[1 - e(B_1^2F) \operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F}) \right]$$

$$- 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) + \frac{1+2B_1}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - \frac{e(2B_1+B_1^2F)}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right) \quad (2.3.14)$$

$$U_b(F) = 6F - \frac{6(B_1+2)}{B_1} \sqrt{\frac{F}{\pi}} + \frac{3(B_1+2)}{B_1^2} \left[1 - e(B_1^2F) \operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F}) \right]$$

$$+ 6\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) - 3\frac{1+2B_1}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + 3\frac{e(2B_1+B_1^2F)}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right)$$

$$- \frac{12}{B_1^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - e(B_1+B_1^2F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right) \right] + \frac{24\sqrt{F}}{B_1} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 48F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right)$$

$$+ \frac{6}{B_1^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - e(2B_1+B_1^2F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right) \right] - \frac{12\sqrt{F}}{B_1} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + 24F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \quad (2.3.15)$$

(2.3.11) ~ (2.3.15)式は $0.01 \leq B_1 \leq 100$ に対して $F=0.2$ で誤差 1%以下であり、 $F \rightarrow 0$ で限りなく厳密解に近づく。 U_1, U_m および U_b のラプラス変換において分子が定数と

なる項のみを逆変換したものは、前節の半無限固体の解を用いた漸近解(2.2.18) ~ (2.2.20)式となる。(2.2.18) ~ (2.2.20)式は $B_1 = 1$ も含めて適用でき、 $B_1 > 1$ に対して $F=0.1$ で誤差 1%以下であり、 $1 < B_1$ に対して $F = 0.08$ で誤差 1%以下であり、 $F \rightarrow 0$ で厳密解に近づく。背面の境界条件の差が無視できる短時間領域で(2.2.18) ~ (2.2.20)式に漸近するのは当然である。長時間側 (F 大)で収束性の良い変数分離形の解を求めることにする。変数分離形の解として次式を仮定する。

$$U(x, F) = a_1 + a_2 x - \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(p_n x) + d_n \sin(p_n x)\} e^{-p_n^2 F} \quad (a)$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0$$

(a)式は熱伝導(2.3.1)式を満たしている。 $a_1 + a_2 x$ は定常温度分布を表し、境界条件(2.3.3)および(2.3.4)式を満たすように定めた。(a)式を境界条件(2.3.3)式に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_1 c_n - p_n d_n) e^{-p_n^2 F} = 0 \rightarrow c_n = \frac{p_n d_n}{B_1} \quad (b)$$

(a)および(b)式を境界条件(2.3.4)式に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n d_n \left[\frac{p_n}{B_1} \sin(p_n) - \cos(p_n) \right] e^{-p_n^2 F} = 0 \rightarrow p_n \tan(p_n) = B_1 \quad (c)$$

(c)式は固有値 p_n を定める固有値方程式である。正の固有値を値の小さい順に採用する。 p_n の範囲は $(n - 1/2) \pi < p_n < n \pi$ となる (等号は $B_1 = 1$ の時)。 (a), (b) および(c)式を初期条件(2.3.2)式に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left[\frac{p_n}{B_1} \cos(p_n x) + \sin(p_n x) \right] = 1 \quad (d)$$

(d)式の両辺に $p_n \cos(p_n x) / B_1 + \sin(p_n x)$ を乗じて $x=0$ から $x=1$ まで積分すると次式を得る。

$$d_n = \frac{2B_1^2}{p_n(p_n^2 + B_1 + B_1^2)} \quad (e)$$

以上で(2.3.1)～(2.3.4)式を全て満たす変数分離形の解が得られた。整理して以下に書き直す。

$$\begin{aligned}
 U(x, F) &= a_1 + a_2 x - \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(p_n x) + d_n \sin(p_n x)\} e(-p_n^2 F) \\
 a_1 &= 1 \quad , \quad a_2 = 0 \\
 (n-1)\pi &< p_n \leq \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad , \quad p_n \tan(p_n) = B_1 \\
 d_n &= \frac{2B_1^2}{p_n(p_n^2 + B_1 + B_1^2)} \quad , \quad c_n = \frac{p_n d_n}{B_1} = \frac{2B_1}{p_n^2 + B_1 + B_1^2}
 \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

$U_1(F)$ 、 $U_2(F)$ 、 $U_m(F)$ および $U_b(F)$ は次式で与えられる。

$$U_1(F) = U(0, F) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e(-p_n^2 F) \tag{2.3.17}$$

$$U_2(F) = U(1, F) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(p_n) + d_n \sin(p_n)] e(-p_n^2 F)$$

$$\begin{aligned}
 U_m(F) &= \int_0^1 U(x, F) dx = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{\sin(p_n)}{p_n} + d_n \frac{1 - \cos(p_n)}{p_n} \right] e(-p_n^2 F) \\
 &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p_n} e(-p_n^2 F)
 \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

$$\begin{aligned}
 U_b(F) &= 6 \int_0^1 U(x, F) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[3 \frac{c_n \sin(p_n) - d_n \{1 + \cos(p_n)\}}{p_n} + 6 \frac{c_n \{\cos(p_n) - 1\} + d_n \sin(p_n)}{p_n^2} \right] e(-p_n^2 F) \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[- \frac{3d_n}{p_n} + 6 \frac{c_n \{\cos(p_n) - 1\} + d_n \sin(p_n)}{p_n^2} \right] e(-p_n^2 F)
 \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

(2.3.16)～(2.3.19)式で $n = 1$ 項のみ採る近似式は $0.01 \leq B_1 \leq 100$ および $F=0.4$ で誤差 2%以下であり、 $B_1 =$ に対しては $F=0.2$ で U_b が最大誤差 2.2%であり、 F 大で限りなく厳密解に近づく。長時間側の簡易式として適している(2.8節)。 $0.01 \leq B_1 \leq 100$ および $B_1 =$ に対して $1、2、m、b、1、2$ および p を計算した結果を Fig.2.3.1(1)～(7)に示す。

基準面の熱応力 (σ_1) は短時間で極大値に達し、以後減少し 0 となる。 B_1 が大きいほど極大値に達するのが早く、極大値も大きくなり ($B_1 = 1$ で 1)、極大値に占めるピーク成分が大きくなる。 $B_1 = 0.1$ では極大値はほぼ一定の 0.33 となり、ピーク成分は小さくなる。

曲げ応力 σ_b は、基準面 (σ_1) の極大時点より少し遅れて、極大値に達し、以後減少し 0 となる。 B_1 が大きいほど極大値に達するのが早く、極大値も大きくなる ($B_1 = 1$ で 0.48)、 $B_1 = 0.1$ では極大値はほぼ一定の 0.25 となる。

背面の熱応力 σ_2 は、さらに少し遅れて、極大値に達し、以後減少し 0 となる。 B_1 が大きいほど極大値に達するのが早く、極大値も大きくなる ($B_1 = 1$ で 0.31)、 $B_1 = 0.1$ では極大値はほぼ一定の 0.17 となる。

基準面の熱ピーク応力 (σ_p) は最も早く極大値に達し、以後減少し定常値 0 に達する。 B_1 が大きいほど極大値に達するのが早く、極大値も大きくなる ($B_1 = 1$ 、 $B_1 = 0.1$ で 0.11)。

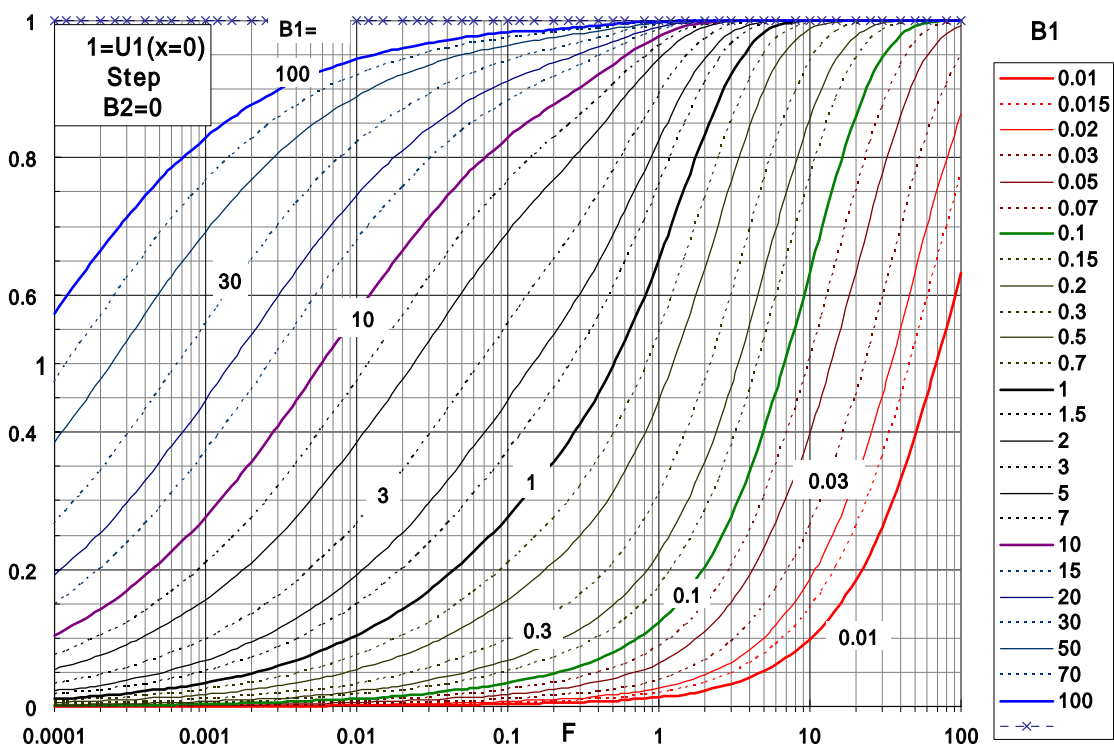


Fig.2.3.1(1) 基準面の温度 σ_1 ($B_2 = 0$)

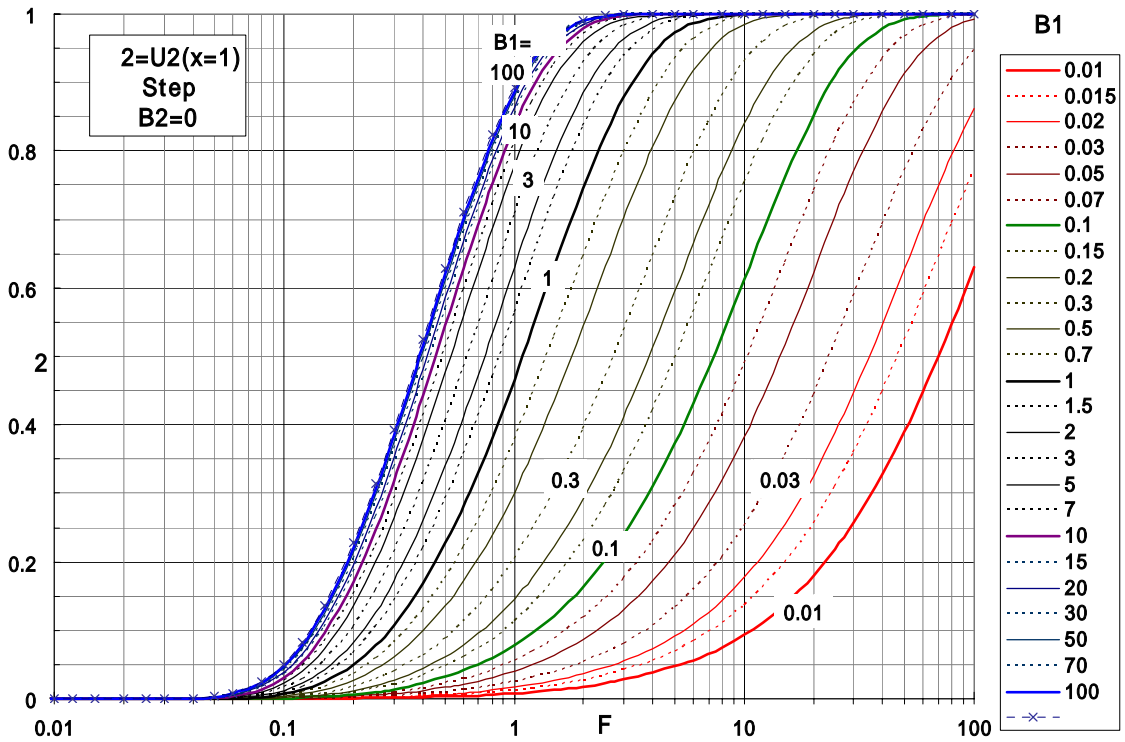


Fig.2.3.1(2) 背面の温度 U_2 ($B_2 = 0$)

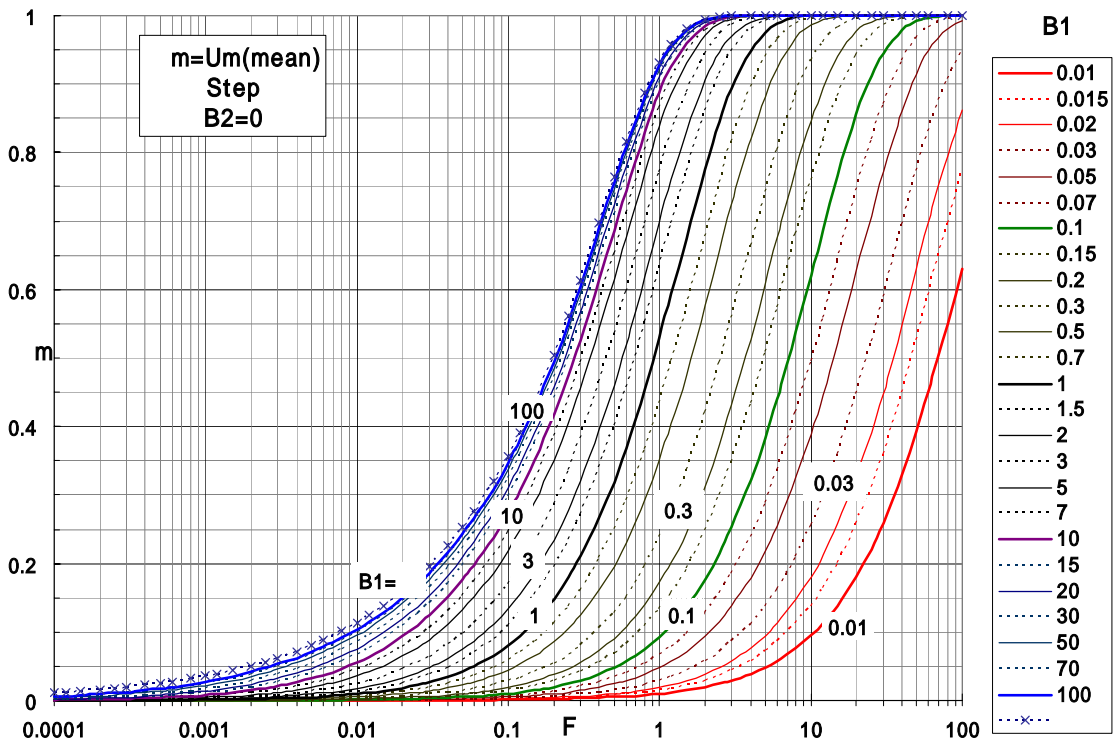


Fig.2.3.1(3) 板厚平均温度 m ($B_2 = 0$)

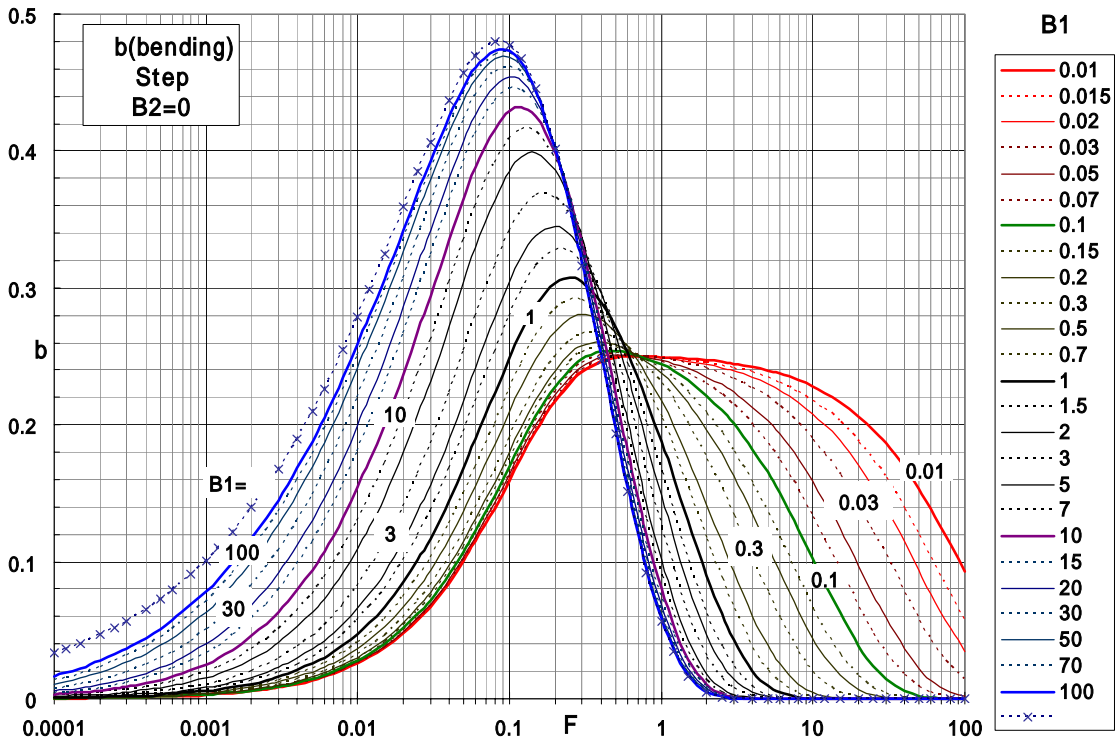


Fig.2.3.1(4) 熱曲げ応力 b ($B_2 = 0$)

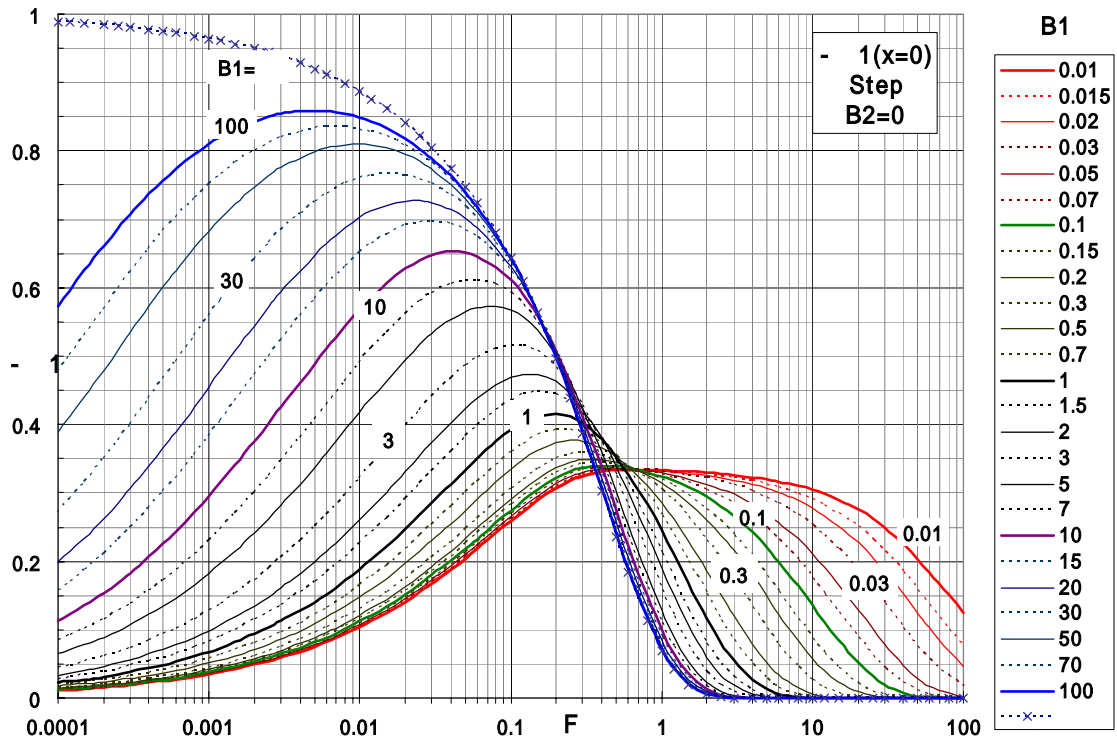


Fig.2.3.1(5) 基準面の熱応力 1 ($B_2 = 0$)

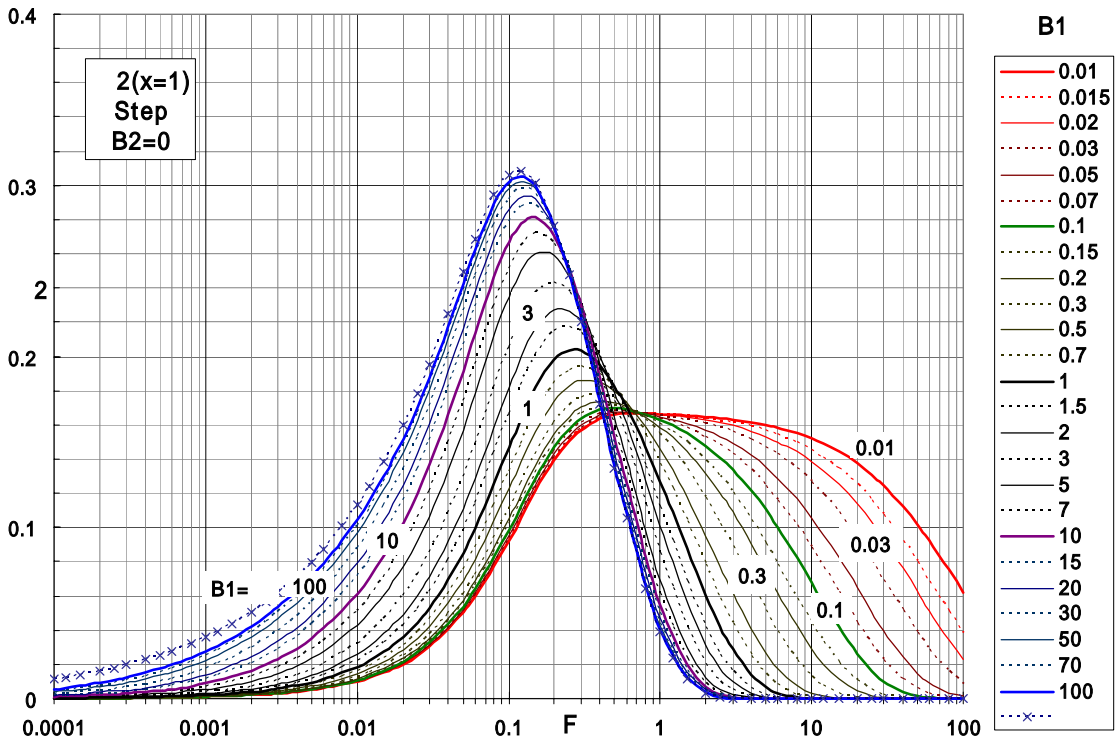


Fig.2.3.1(6) 背面の熱応力 q_2 ($B_2=0$)

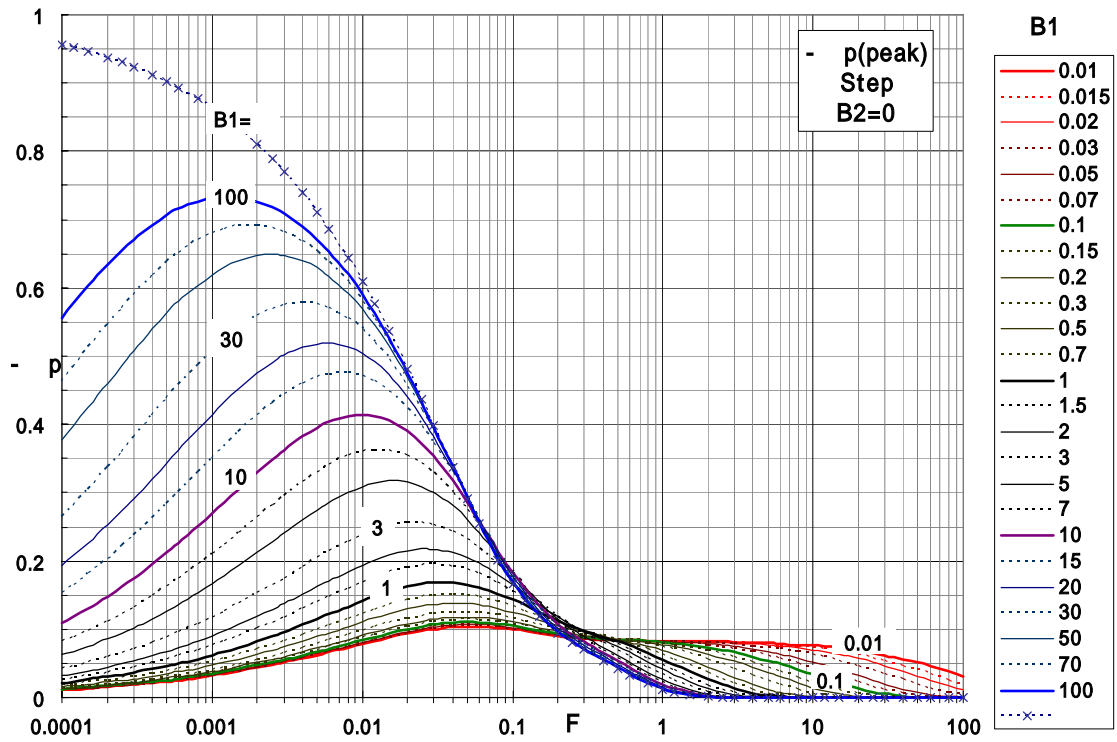


Fig.2.3.1(7) 基準面の熱ピーク応力 σ_p ($B_2=0$)

2.4 両面が熱伝達の場合

基準面の熱伝達係数が $0 < B_1$ で、背面の熱伝達係数が $0 < B_2$ の場合とする。

$$\text{熱伝導} \quad \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.4.1)$$

$$\text{初期条件} \quad F = 0 \quad U(x,0) = 0 \quad (2.4.2)$$

$$\text{境界条件 1} \quad x = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = B_1 \{U(0, F) - 1\} \quad (2.4.3)$$

$$\text{境界条件 2} \quad x = 1 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = B_2 \{0 - U(1, F)\} \quad (2.4.4)$$

これらの式をラプラス変換 ($F \rightarrow s$ 、 $U \rightarrow u$) すると次式を得る。

$$su(x, s) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4.5)$$

$$x = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = B_1 \left(u(0, s) - \frac{1}{s} \right) \quad (2.4.6)$$

$$x = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -B_2 u(1, s) \quad (2.4.7)$$

これらの式を解くと $u(x,s)$ 解が得られる。

$$\begin{aligned} u(x, s) &= \frac{B_1 [(B_2 + \sqrt{s})e(-x\sqrt{s}) - (B_2 - \sqrt{s})e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s[(B_1 + \sqrt{s})(B_2 + \sqrt{s}) - (B_1 - \sqrt{s})(B_2 - \sqrt{s})e(-2\sqrt{s})]} \\ &= \frac{B_1 [(B_2 + \sqrt{s})e(-x\sqrt{s}) - (B_2 - \sqrt{s})e\{-(2-x)\sqrt{s}\}]}{s(B_1 + \sqrt{s})(B_2 + \sqrt{s}) \left[1 - \frac{(B_1 - \sqrt{s})(B_2 - \sqrt{s})}{(B_1 + \sqrt{s})(B_2 + \sqrt{s})} e(-2\sqrt{s}) \right]} \\ &= \left[\frac{B_1 e(-x\sqrt{s})}{s(B_1 + \sqrt{s})} - \frac{B_1 (B_2 - \sqrt{s}) e\{-(2-x)\sqrt{s}\}}{s(B_1 + \sqrt{s})(B_2 + \sqrt{s})} \right] \times \\ &\quad \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(B_1 - \sqrt{s})(B_2 - \sqrt{s})}{(B_1 + \sqrt{s})(B_2 + \sqrt{s})} \right\}^n e(-2n\sqrt{s}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

短時間領域 ($s \rightarrow \infty$ 、 $F \rightarrow 0$) では級数部 0 となり、以下のようなになる。

$$u(x, s) = \frac{B_1 e(-x\sqrt{s})}{s(B_1 + \sqrt{s})} - \frac{B_1 e\{-(2-x)\sqrt{s}\}}{s(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{2B_1 e\{-(2-x)\sqrt{s}\}}{\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})^2} \quad (B_2 = B_1)$$

$$u(x, s) = \frac{B_1 e(-x\sqrt{s})}{s(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{(B_1 + B_2)B_1 e\{-(2-x)\sqrt{s}\}}{(B_1 - B_2)s(B_1 + \sqrt{s})} \quad (2.4.9)$$

$$- \frac{2B_1 B_2 e\{-(2-x)\sqrt{s}\}}{(B_1 - B_2)s(B_2 + \sqrt{s})} \quad (B_2 \neq B_1)$$

$$u_m(s) = \frac{B_1[1 - 2e(-\sqrt{s}) + e(-2\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{2B_1[e(-\sqrt{s}) - e(-2\sqrt{s})]}{s(B_1 + \sqrt{s})^2} \quad (B_2 = B_1)$$

$$u_m(s) = \frac{B_1[1 - e(-\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{(B_1 + B_2)B_1[e(-\sqrt{s}) - e(-2\sqrt{s})]}{(B_1 - B_2)s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} \quad (2.4.10)$$

$$- \frac{2B_1 B_2[e(-\sqrt{s}) - e(-2\sqrt{s})]}{(B_1 - B_2)s\sqrt{s}(B_2 + \sqrt{s})} \quad (B_2 \neq B_1)$$

$$u_b(s) = \frac{-3B_1[1 + 2e(-\sqrt{s}) + e(-2\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{6B_1[e(-\sqrt{s}) + e(-2\sqrt{s})]}{s(B_1 + \sqrt{s})^2}$$

$$+ \frac{6B_1[1 - e(-2\sqrt{s})]}{s^2(B_1 + \sqrt{s})} - \frac{12B_1[e(-\sqrt{s}) - e(-2\sqrt{s})]}{s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})^2} \quad (B_2 = B_1)$$

$$u_b(s) = -\frac{3B_1}{s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{6B_1 B_2 e(-\sqrt{s})}{(B_1 - B_2)s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{3B_1(B_1 + B_2)e(-2\sqrt{s})}{(B_1 - B_2)s\sqrt{s}(B_1 + \sqrt{s})} \quad (2.4.11)$$

$$+ \frac{6B_1}{s^2(B_1 + \sqrt{s})} - \frac{12B_1 B_2 e(-\sqrt{s})}{(B_1 - B_2)s^2(B_1 + \sqrt{s})} + \frac{6B_1(B_1 + B_2)e(-2\sqrt{s})}{(B_1 - B_2)s^2(B_1 + \sqrt{s})}$$

$$- \frac{6B_1 B_2[e(-\sqrt{s}) + e(-2\sqrt{s})]}{(B_1 - B_2)s\sqrt{s}(B_2 + \sqrt{s})} + \frac{12B_1 B_2[e(-\sqrt{s}) - e(-2\sqrt{s})]}{(B_1 - B_2)s^2(B_2 + \sqrt{s})} \quad (B_2 \neq B_1)$$

これらの式をラプラス逆変換すると次式が得られる。

$$U(x, F) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}}\right) - e(B_1 x + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right)$$

$$- \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}}\right) + e\{B_1(2-x) + B_1^2 F\} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) + 4B_1 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-(2-x)^2}{4F}\right) \quad (2.4.12a)$$

$$- 2\{B_1(2-x) + 2B_1^2 F\} e\{B_1(2-x) + B_1^2 F\} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 = B_1)$$

$$\begin{aligned}
 U(x, F) = & \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}}\right) - e(B_1 x + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}}\right) \\
 & - \frac{B_1 + B_2}{B_1 - B_2} e\{B_1(2-x) + B_1^2 F\} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{2B_1}{B_1 - B_2} e\{B_2(2-x) + B_2^2 F\} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 \neq B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.12b}$$

$$\begin{aligned}
 U_1(F) = U(0, F) = & 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \\
 & + e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) + 4B_1 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) \\
 & - 4(B_1 + B_1^2 F) e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 = B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.13a}$$

$$\begin{aligned}
 U_1(F) = U(0, F) = & 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \\
 & - \frac{B_1 + B_2}{B_1 - B_2} e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{2B_1}{B_1 - B_2} e(2B_2 + B_2^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 \neq B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.13b}$$

$$\begin{aligned}
 U_2(F) = U(1, F) = & 4B_1 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) \\
 & - 2(B_1 + 2B_1^2 F) e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 = B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.14a}$$

$$\begin{aligned}
 U_2(F) = U(1, F) = & -\frac{2B_1}{B_1 - B_2} e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{2B_1}{B_1 - B_2} e(B_2 + B_2^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 \neq B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.14b}$$

$$\begin{aligned}
 U_m(F) = & 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} \left\{ 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \right\} - 8\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) + 6\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) \\
 & + \frac{2(2+B_1)}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - \frac{2(2-B_1-2B_1^2 F)}{B_1} e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - \frac{3+2B_1}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + \frac{3-4B_1-4B_1^2 F}{B_1} e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 = B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.15a}$$

$$\begin{aligned}
 U_m(F) = & 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} \left\{ 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \right\} - 4\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) + 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) \\
 & + \frac{2(B_1 + B_2 + B_1 B_2)}{B_1 B_2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - \frac{2B_1 + B_2 + 2B_1 B_2}{B_1 B_2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \\
 & + \frac{2B_2}{(B_1 - B_2)B_1} e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - \frac{B_1 + B_2}{(B_1 - B_2)B_1} e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - \frac{2B_1}{(B_1 - B_2)B_2} e(B_2 + B_2^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{2B_1}{(B_1 - B_2)B_2} e(2B_2 + B_2^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 \neq B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.15b}$$

$$\begin{aligned}
 U_b(F) = & 6F - \frac{6(B_1 + 2)}{B_1} \sqrt{\frac{F}{\pi}} + \frac{3(B_1 + 2)}{B_1^2} \left\{ 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \right\} \\
 & - 24\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) + \frac{6(2 + B_1)}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 18\sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) + \frac{3(3 + 2B_1)}{B_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \\
 & - \frac{6(2 - B_1 - 2B_1^2 F)}{B_1} e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - \frac{3(3 - 4B_1 - 4B_1^2 F)}{B_1} e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{6}{B_1^2} e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - \frac{6}{B_1^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - 2B_1 \sqrt{F} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + 4B_1^2 F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \right] \\
 & - \frac{48}{B_1} \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) + \frac{12(2 + B_1)}{B_1^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \\
 & - \frac{12(2 - B_1 - 2B_1^2 F)}{B_1^2} e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{48}{B_1} \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) - \frac{24(1 + B_1)}{B_1^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \\
 & - \frac{24(1 - B_1 - B_1^2 F)}{B_1^2} e(2B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 = B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.16a}$$

$$\begin{aligned}
 U_b(F) = & 6F - \frac{6(B_1+2)}{B_1} \sqrt{\frac{F}{\pi}} + \frac{3(B_1+2)}{B_1^2} \left[1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \right] \\
 & - 12 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) - 6 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{F}\right) + \frac{6(B_1+B_2+B_1 B_2)}{B_1 B_2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \\
 & - \left\{ \frac{6B_1(1+2B_2)}{(B_1-B_2)B_2} - \frac{3(B_1+B_2)(1+2B_1)}{(B_1-B_2)B_1} \right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \\
 & - \frac{6B_2(2+B_1)}{(B_1-B_2)B_1^2} e(B_1+B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - \frac{3(B_1+B_2)(2-B_1)}{(B_1-B_2)B_1^2} e(2B_1+B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \\
 & - \frac{12B_2}{(B_1-B_2)B_1^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 2B_1 \sqrt{F} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) + 4B_1^2 F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \right] \\
 & + \frac{6(B_1+B_2)}{(B_1-B_2)B_1^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - 2B_1 \sqrt{F} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + 4B_1^2 F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \right] \\
 & - \frac{6B_1(2+B_2)}{(B_1-B_2)B_2^2} e(B_2+B_2^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{6B_1(2-B_2)}{(B_1-B_2)B_2^2} e(2B_2+B_2^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \\
 & + \frac{12B_1}{(B_1-B_2)B_2^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 2B_2 \sqrt{F} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) + 4B_2^2 F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \right] \\
 & - \frac{12B_1}{(B_1-B_2)B_2^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) - 2B_2 \sqrt{F} \operatorname{ierfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) + 4B_2^2 F i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \right] \quad (B_2 \neq B_1)
 \end{aligned} \tag{2.4.16b}$$

短時間領域 ($F \rightarrow 0$) で収束性の良い誤差関数形の解が得られた。(2.4.13a) ~ (2.4.16a)式は $0.01 \leq B_1 \leq 100$ および $0.01 \leq B_2 \leq 100$ に対して、 $F=0.4$ で誤差 2%以下であり、 $F \rightarrow 0$ で限りなく厳密解に近づく。 U_1, U_m および U_b のラプラス変換において分子が定数となる項のみを逆変換したものは 2 . 2 節の半無限固体の解を用いた漸近解(2.2.18) ~ (2.2.20)式に一致し、 $B_1=1$ も含めて適用できる。背面の境界条件の差が無視できる短時間領域で(2.2.18) ~ (2.2.20)式に漸近するのは当然である。(2.4.13) ~ (2.4.16)式は項数が多すぎて実用的なメリットはない。実用的には(2.2.18) ~ (2.2.20)式を使用するのが良い(2 . 8 節)。長時間側 ($F \rightarrow \infty$) で収束性の良い変数分離形の解を求めることにする。変数分離形の解として次式を仮定する。

$$U(x, F) = a_1 + a_2 x - \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(p_n x) + d_n \sin(p_n x)\} e(-p_n^2 F) \quad (a)$$

$$a_1 = \frac{B_1 + B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}, \quad a_2 = \frac{-B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}$$

(a)式は熱伝導(2.4.1)式を満たしている。 $a_1 + a_2 x$ は定常温度分布を表し境界条件(2.4.3)および(2.4.4)式を満たすように定めた。(a)式を境界条件(2.4.3)式に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_1 c_n - p_n d_n) e(-p_n^2 F) = 0 \rightarrow d_n = \frac{B_1 c_n}{p_n} \quad (b)$$

(a)および(b)式を境界条件(2.4.4)式に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[(B_1 + B_2) \cos(p_n) + \left(\frac{B_1 B_2}{p_n} - p_n \right) \sin(p_n) \right] e(-p_n^2 F) = 0 \quad (c)$$

$$\rightarrow \left(p_n - \frac{B_1 B_2}{p_n} \right) \tan(p_n) = B_1 + B_2$$

(c)式は固有値 p_n を定める固有値方程式である。正の固有値を値の小さい順に採用すると p_n の範囲は $(n - 1) < p_n < n$ となる。(a),(b)および(c)式を初期条件(2.4.2)式に代入すると次式を得る。

$$\frac{B_1(1 + B_2 - B_2 x)}{B_1 + B_2 + B_1 B_2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\cos(p_n x) + \frac{B_1}{p_n} \sin(p_n x) \right] \quad (d)$$

(d)式の両辺に $\cos(p_n x) + B_1 \sin(p_n x) / p_n$ を乗じて $x=0$ から $x=1$ まで積分すると次式を得る。

$$c_n = \frac{2B_1}{p_n^2 + B_1 + B_1^2 + B_2 \left\{ \cos(p_n) + \left(\frac{B_1}{p_n} \right) \sin(p_n) \right\}^2} \quad (e)$$

以上で(2.4.1)～(2.4.4)式を全て満たす変数分離形の解が得られた。整理して以下に書き直す。

$$\begin{aligned}
 U(x, F) &= a_1 + a_2 x - \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(p_n x) + d_n \sin(p_n x)\} e(-p_n^2 F) \\
 a_1 &= \frac{B_1 + B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}, \quad a_2 = \frac{-B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2} \\
 (n-1)\pi < p_n < n\pi, \quad \left(p_n - \frac{B_1 B_2}{p_n}\right) \tan(p_n) &= B_1 + B_2 \\
 c_n &= \frac{2B_1}{p_n^2 + B_1 + B_1^2 + B_2 \left\{ \cos(p_n) + \left(\frac{B_1}{p_n}\right) \sin(p_n) \right\}^2}, \quad d_n = \frac{B_1 c_n}{p_n}
 \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

(2.4.17)式で $B_1 = 1$ とすると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 U(x, F) &= a_1 + a_2 x - \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(p_n x) + d_n \sin(p_n x)\} e(-p_n^2 F) \\
 a_1 &= 1, \quad a_2 = \frac{-B_2}{1 + B_2} \\
 \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < p_n < n\pi, \quad p_n \cot(p_n) + B_2 &= 0 \\
 d_n &= \frac{2p_n}{p_n^2 + B_2 \sin^2(p_n)}, \quad c_n = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

(2.4.18)式は $B_1 = 1$ の解である。 $U_1(F)$ 、 $U_2(F)$ 、 $U_m(F)$ および $U_b(F)$ は次式で与えられる。

$$U_1(F) = U(0, F) = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e(-p_n^2 F) \tag{2.4.19}$$

$$U_2(F) = U(1, F) = a_1 + a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(p_n) + d_n \sin(p_n)] e(-p_n^2 F) \tag{2.4.20}$$

$$U_m(F) = \int_0^1 U(x, F) dx = a_1 + \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{\sin(p_n)}{p_n} + d_n \frac{1 - \cos(p_n)}{p_n} \right] e(-p_n^2 F) \tag{2.4.21}$$

$$\begin{aligned}
 U_b(F) &= 6 \int_0^1 U(x, F) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{a_2}{2} - \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} \left[3 \frac{c_n \sin(p_n) - d_n \{1 + \cos(p_n)\}}{p_n} + 6 \frac{c_n \{\cos(p_n) - 1\} + d_n \sin(p_n)}{p_n^2} \right] e(-p_n^2 F)
 \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

(2.4.19) ~ (2.4.22)式で $n = 1$ 項のみ採った近似式は $0.01 < B_1 < 1$ および $0.01 < B_2 < 100$ に対して

$F=0.5$ で誤差 1%以下であり、 $1 < B_1$ および $0.01 < B_2 < 100$ に対して $F=0.4$ で誤差 1%以下であり、 F が大で限りなく厳密解に近づく。

変数分離形の級数解で $n = 1$ 項のみ採った近似式は $F = 0.5$ で誤差 1%以下となり、長時間側の簡易式として適している (2.8 節)。

$B_2 = 0.1B_1$ の場合の θ_1 、 θ_2 、 m 、 b 、 θ_1 および θ_2 の計算結果を Fig.2.4.1(1) ~ (6)に示す。
 $B_2 = 0.2B_1$ の場合の計算結果を Fig.2.4.2(1) ~ (6)に示す。 $B_2 = 0.5B_1$ の場合の計算結果を Fig.2.4.3(1) ~ (6)に示す。 $B_2 = B_1$ の場合の θ_1 、 θ_2 、 m 、 b 、 θ_1 、 θ_2 および p の計算結果を Fig.2.4.4(1) ~ (7)に示す。 $B_2 = 2B_1$ の場合の θ_1 、 θ_2 、 m 、 b 、 θ_1 および θ_2 の計算結果を Fig.2.4.5(1) ~ (6)に示す。 $B_2 = 5B_1$ の場合の計算結果を Fig.2.4.6(1) ~ (6)に示す。 $B_2 = 10B_1$ の場合の計算結果を Fig.2.4.7(1) ~ (6)に示す。基準面の熱ピーク応力は短時間の極大値 (最大値) に達するまでは B_2 に依存しない。最大値から定常値 0 に減衰する早さが B_2 に依存するが、依存度合は小さい。以上の理由で $B_2 = B_1$ 以外は p の図を省略した。必要ならば 2.2 節 ($B_2 =$) の Fig.2.2.2(6)および 2.3 節 ($B_2 = 0$) の Fig.2.3.1(7)を用いて B_2 に関して補間するとよい。

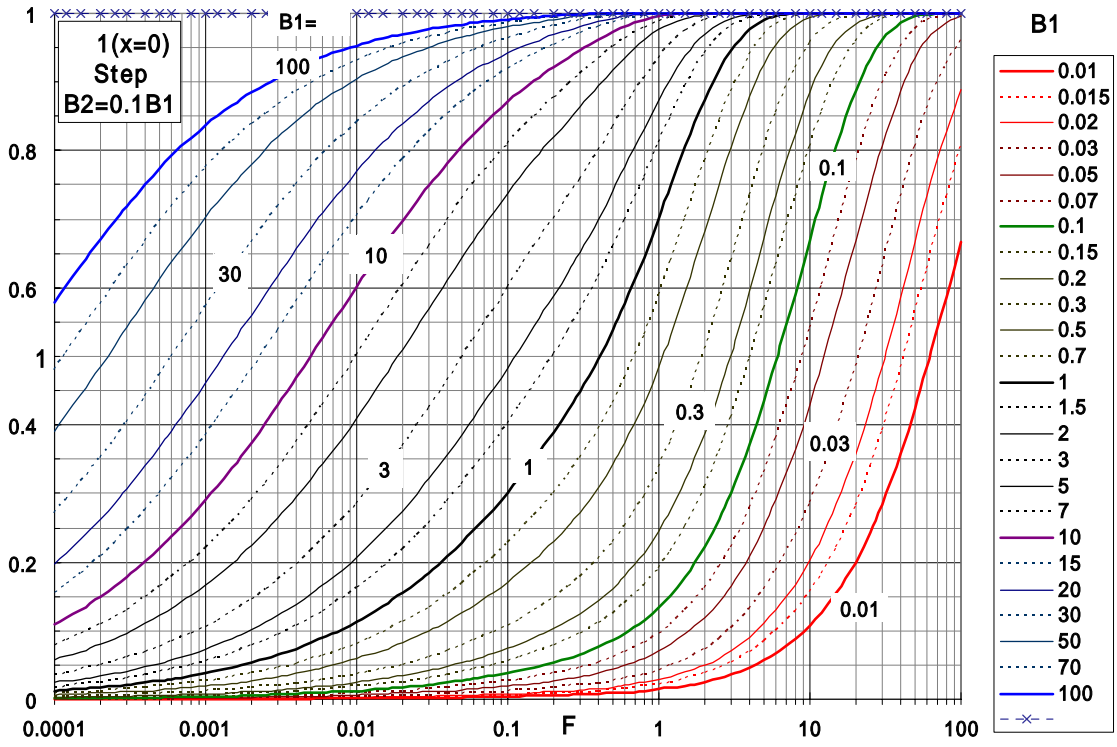


Fig.2.4.1(1) 基準面の温度 T_1 ($B_2=0.1B_1$)

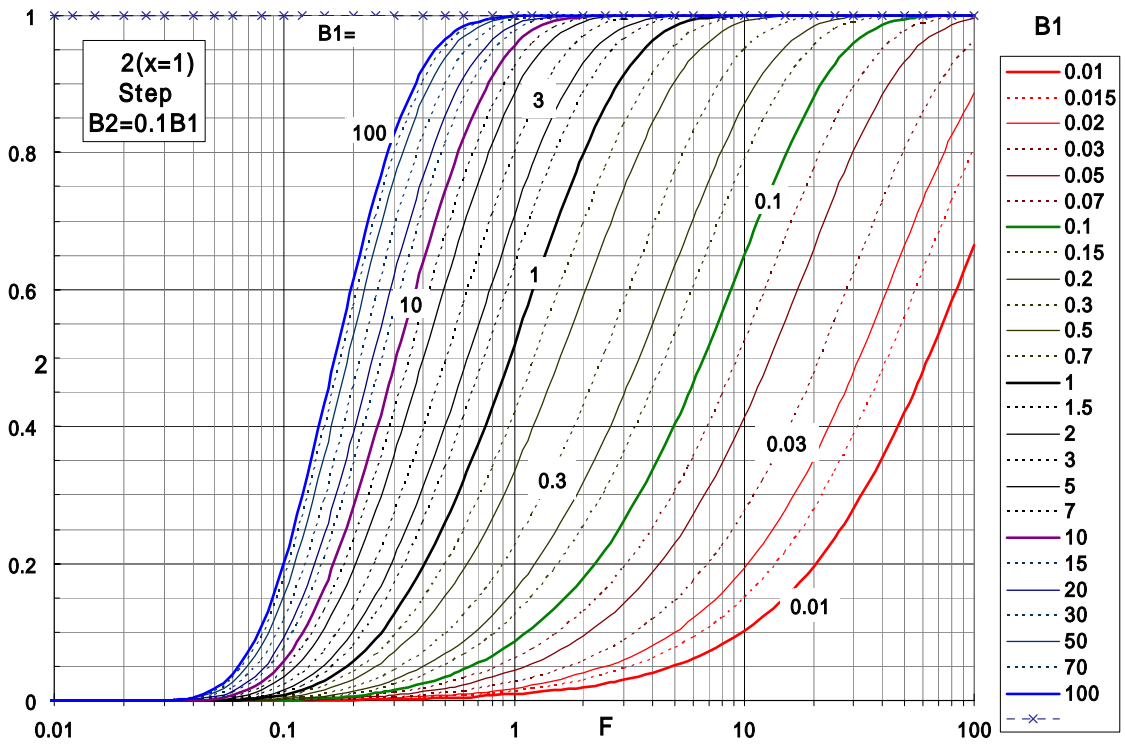


Fig.2.4.1(2) 背面の温度 T_2 ($B_2=0.1B_1$)

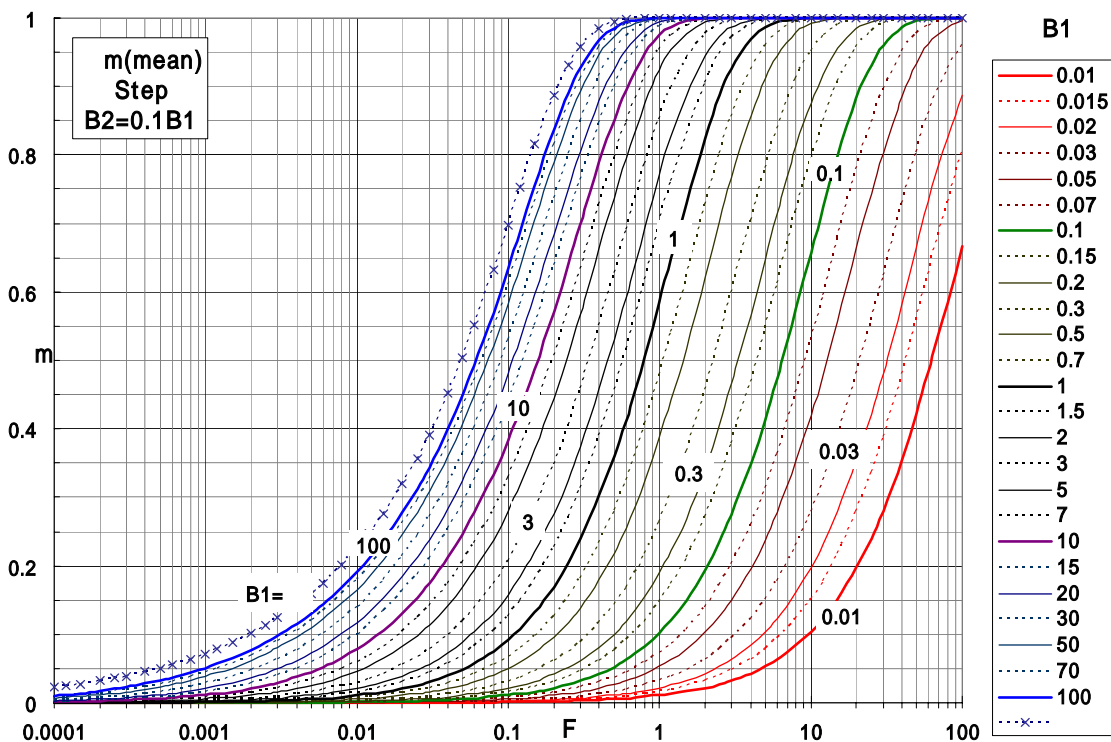


Fig.2.4.1(3) 板厚平均温度 m ($B_2=0.1B_1$)

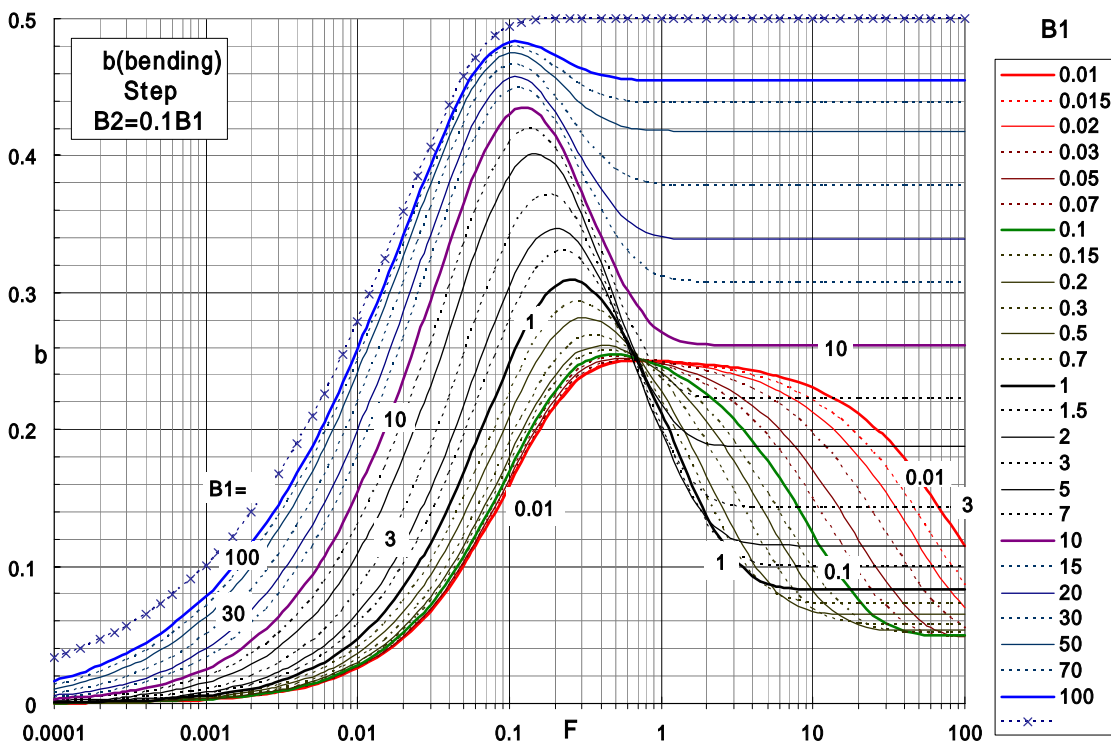


Fig.2.4.1(4) 熱曲げ応力 b ($B_2=0.1B_1$)

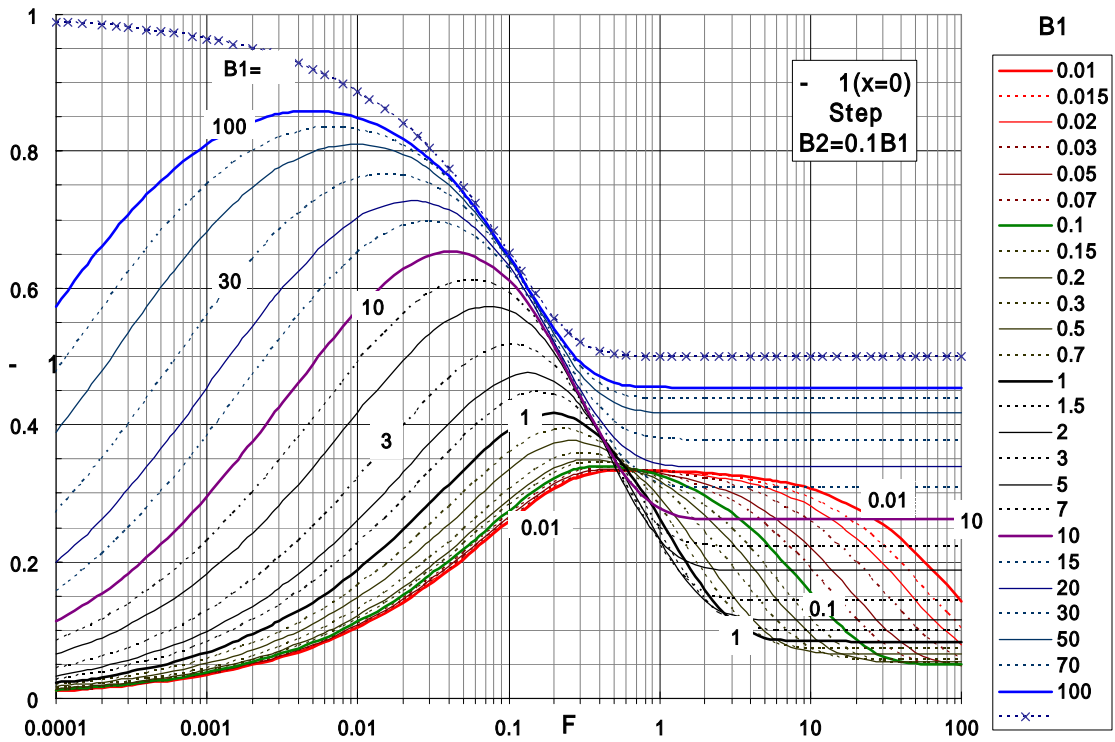


Fig.2.4.1(5) 基準面の熱応力 1 ($B_2=0.1B_1$)

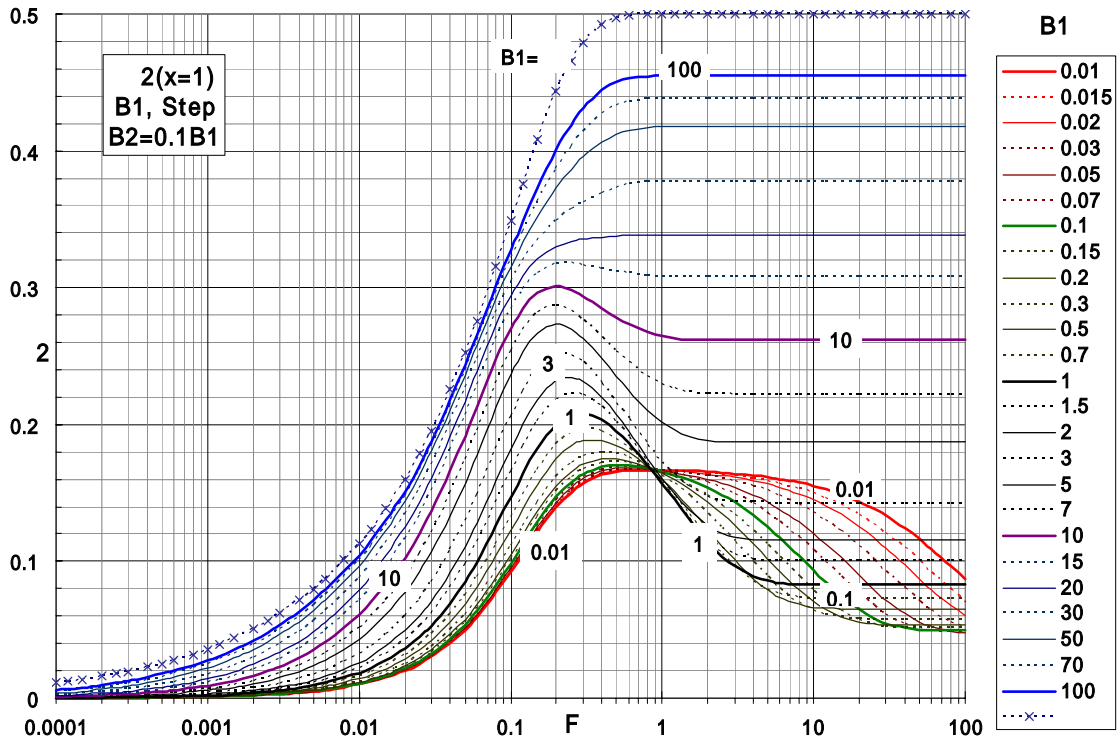


Fig.2.4.1(6) 背面の熱応力 2 ($B_2=0.1B_1$)

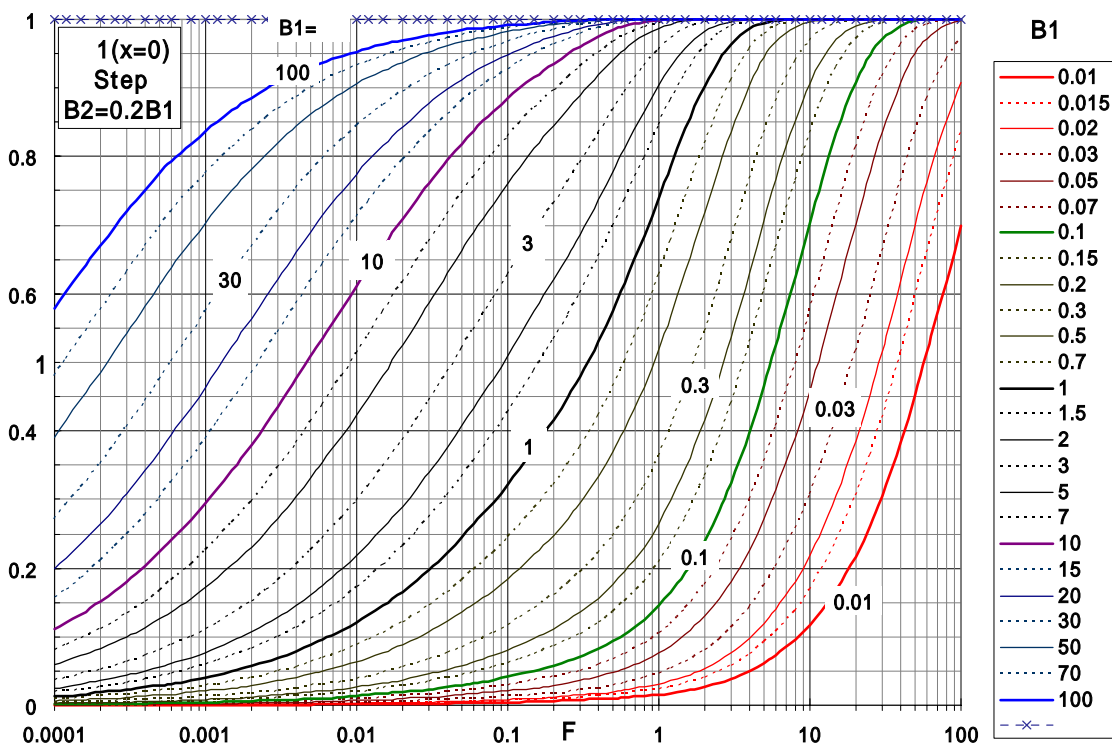


Fig.2.4.2(1) 基準面の温度 T_1 ($B_2=0.2B_1$)

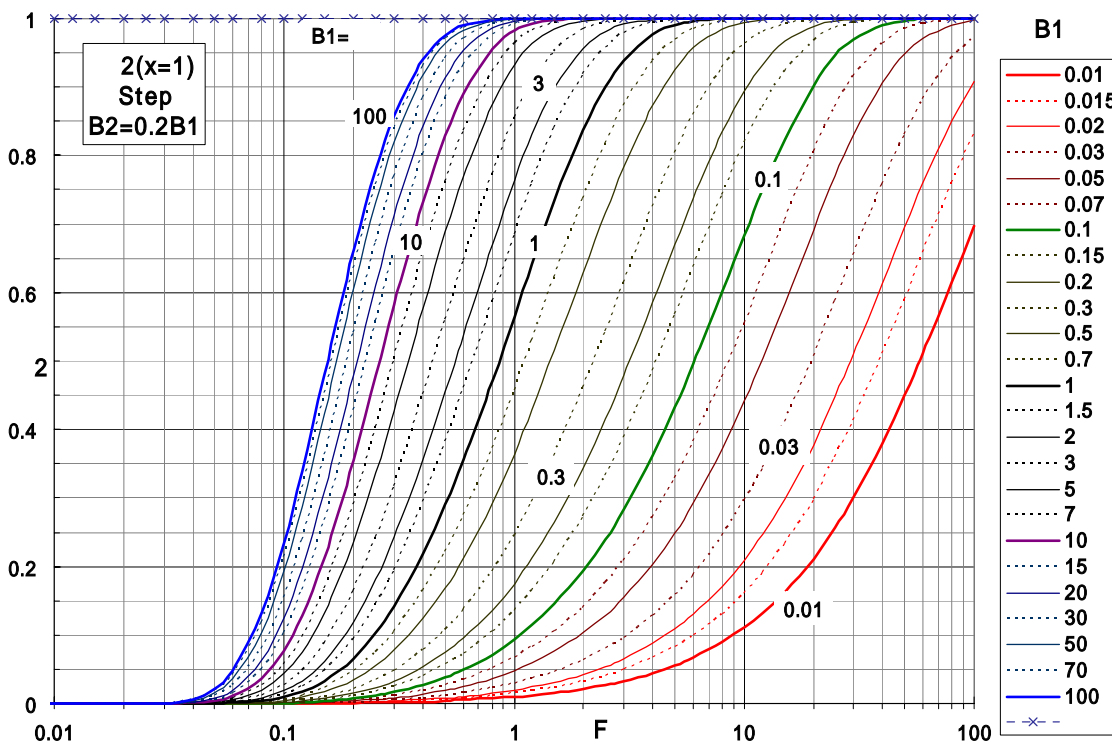


Fig.2.4.2(2) 背面の温度 T_2 ($B_2=0.2B_1$)

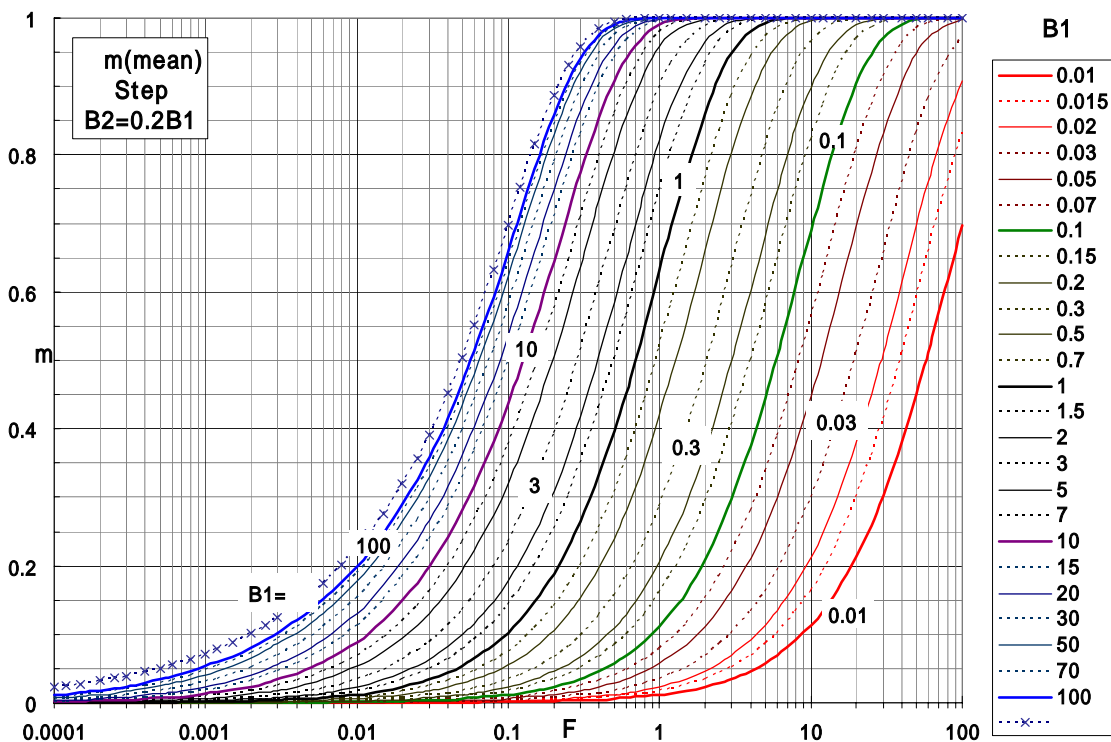


Fig.2.4.2(3) 板厚平均温度 m ($B_2=0.2B_1$)

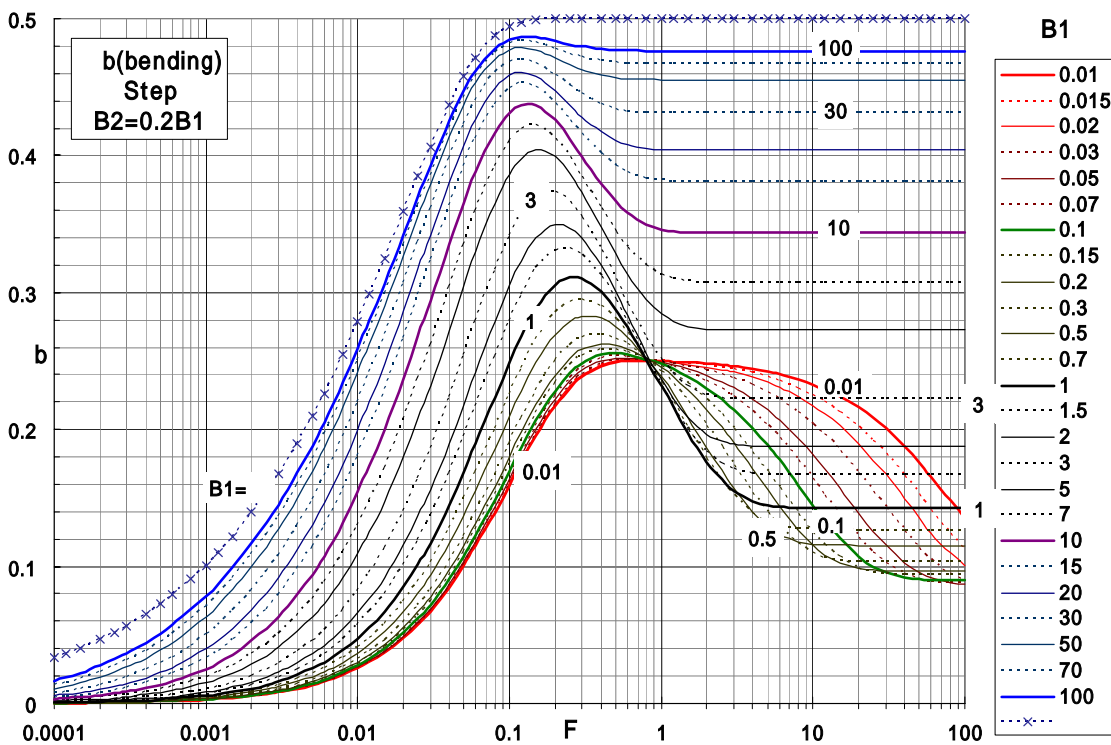


Fig.2.4.2(4) 熱曲げ応力 b ($B_2=0.2B_1$)

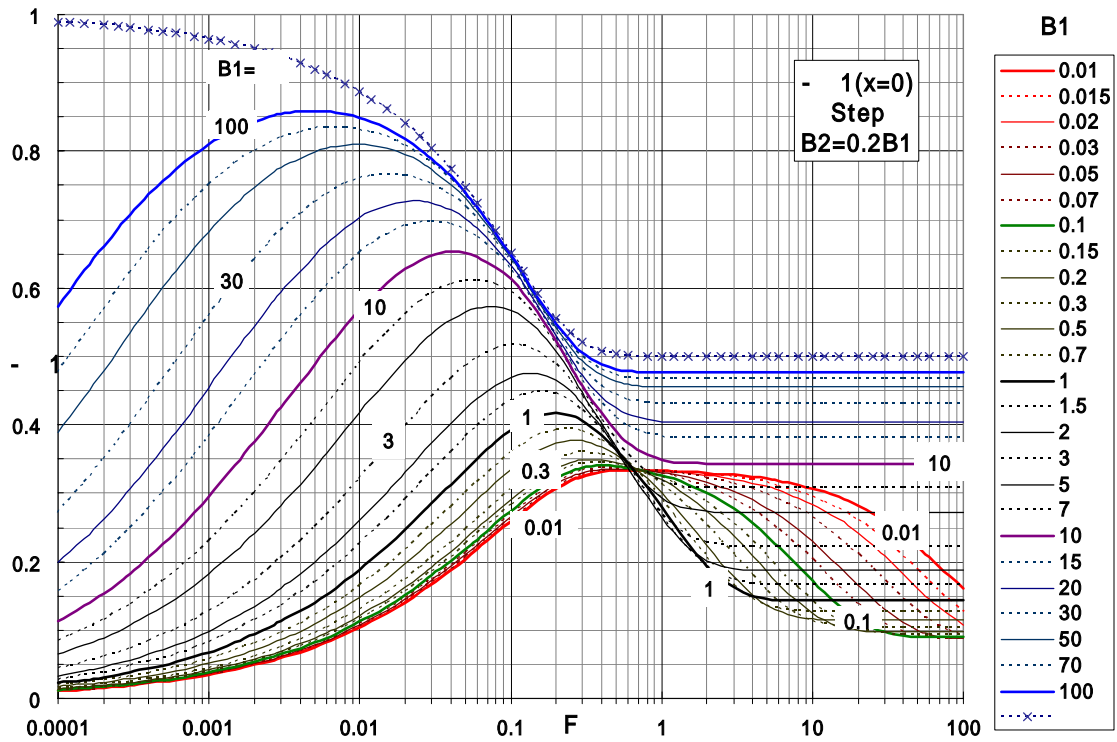


Fig.2.4.2(5) 基準面の熱応力 σ_1 ($B_2=0.2B_1$)

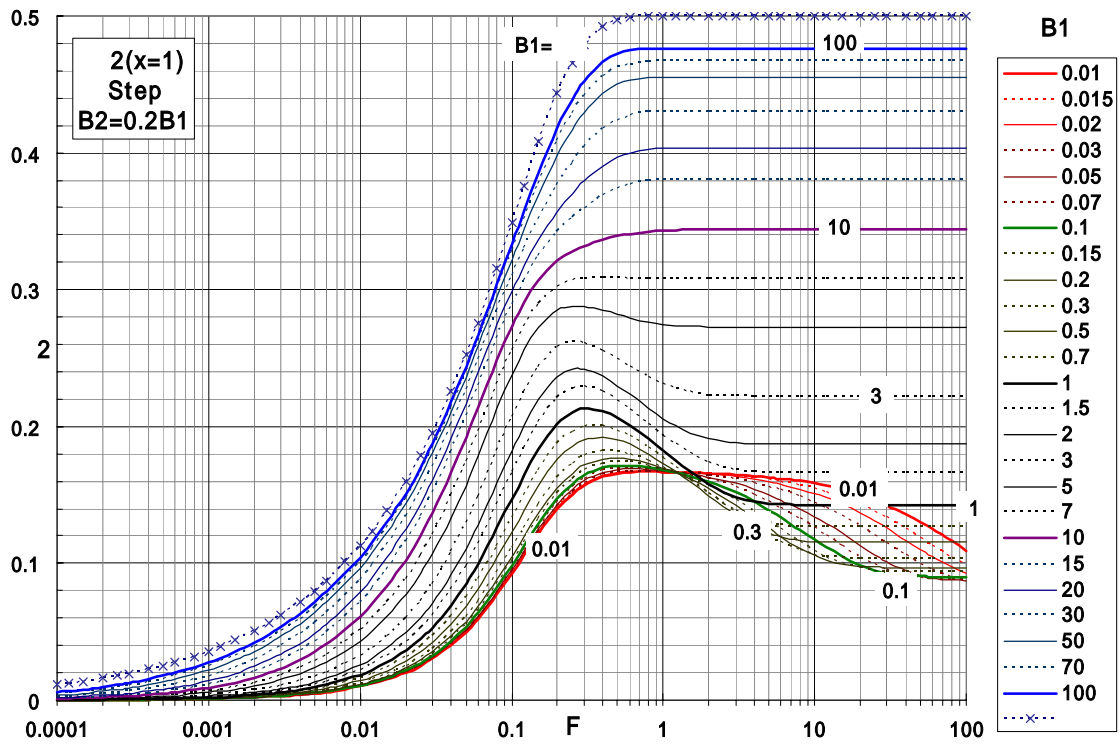


Fig.2.4.2(6) 背面の熱応力 σ_2 ($B_2=0.2B_1$)

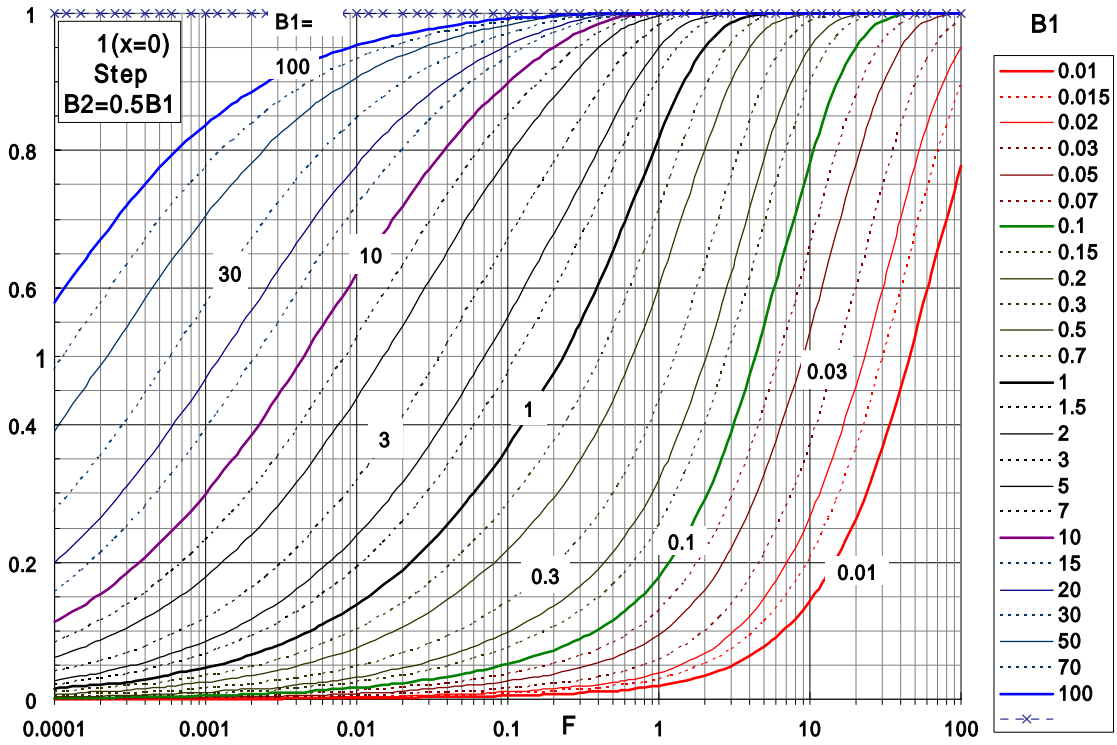


Fig.2.4.3(1) 基準面の温度 T_1 ($B_2=0.5B_1$)

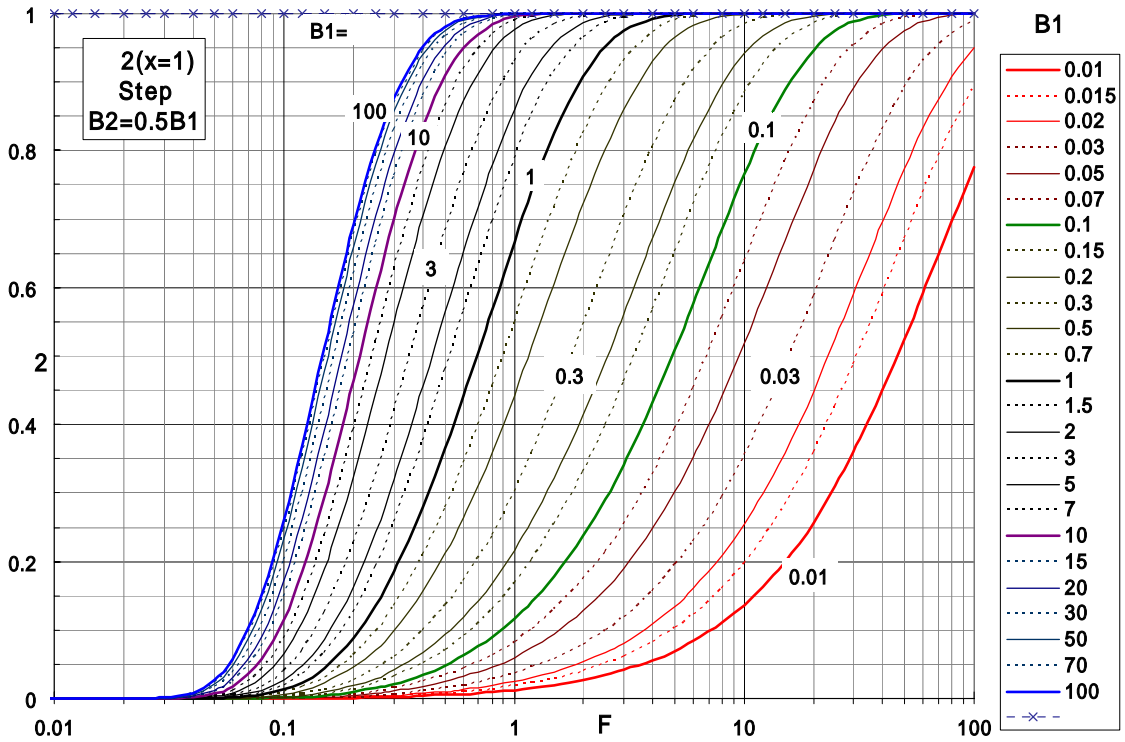


Fig.2.4.3(2) 背面の温度 T_2 ($B_2=0.5B_1$)

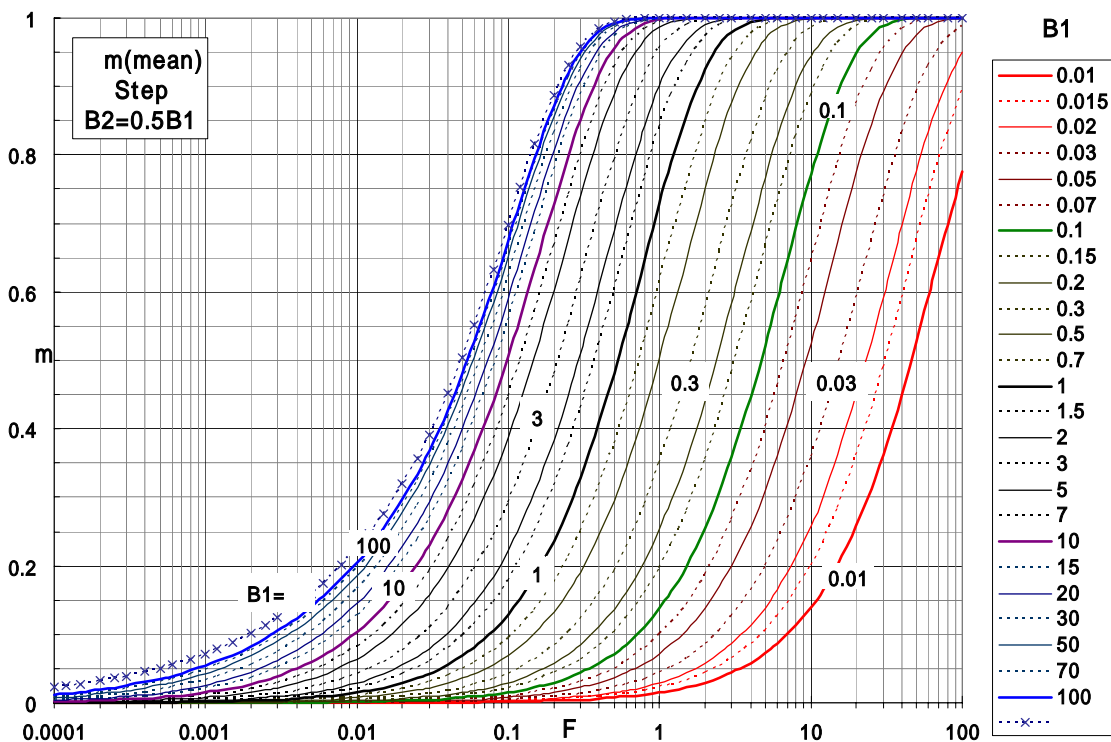


Fig.2.4.3(3) 板厚平均温度 m ($B_2=0.5B_1$)

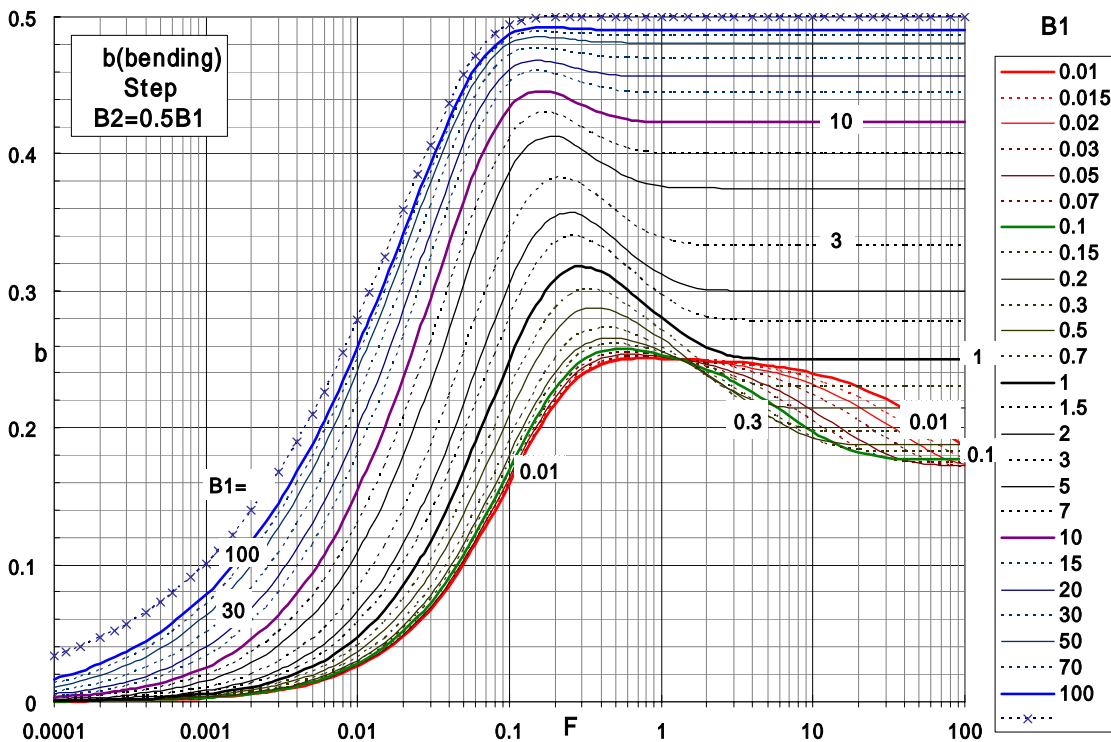


Fig.2.4.3(4) 熱曲げ応力 b ($B_2=0.5B_1$)

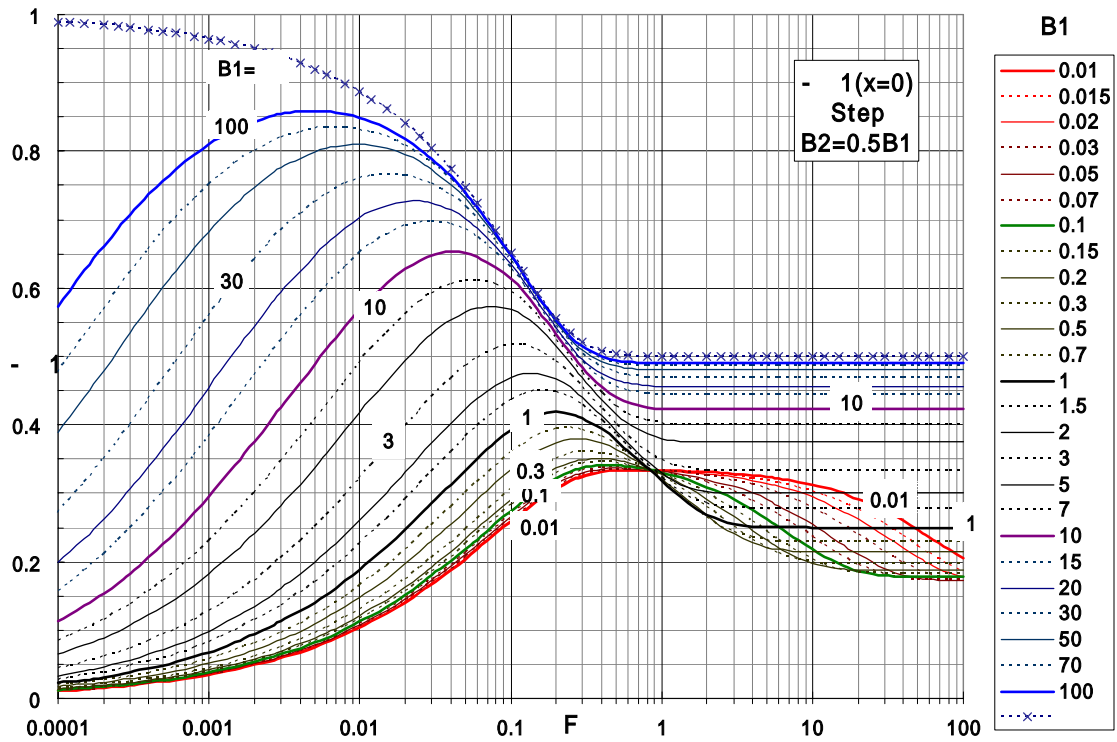


Fig.2.4.3(5) 基準面の熱応力 1 ($B_2=0.5B_1$)

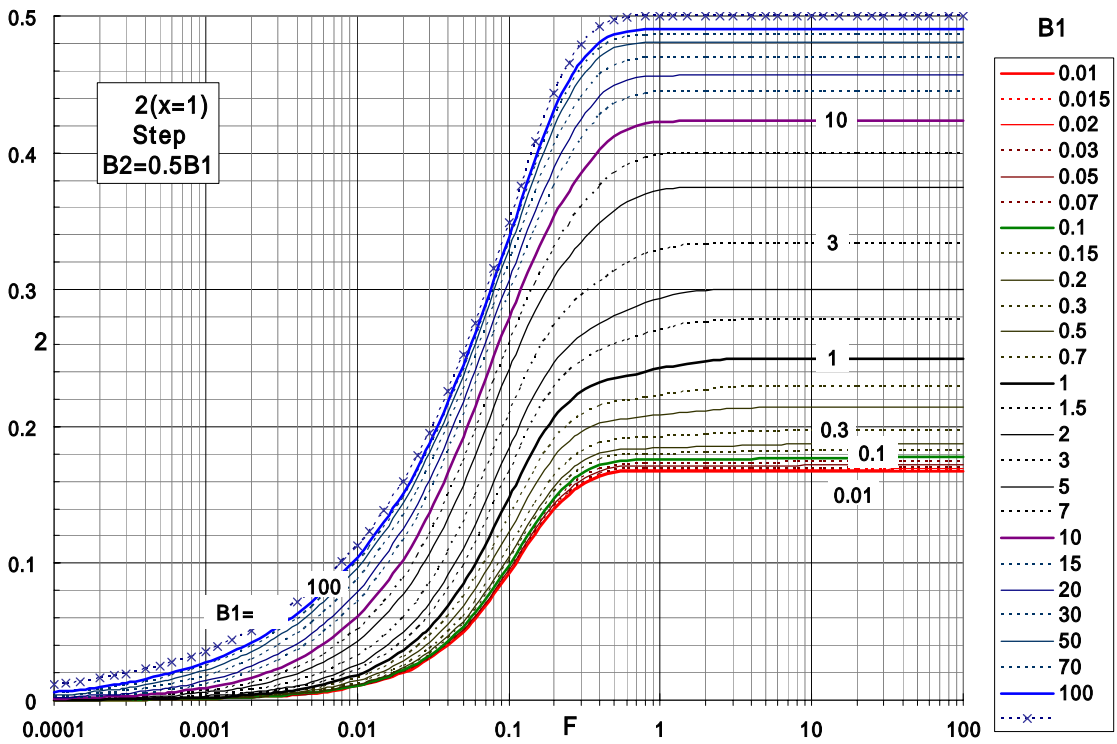


Fig.2.4.3(6) 背面の熱応力 2 ($B_2=0.5B_1$)

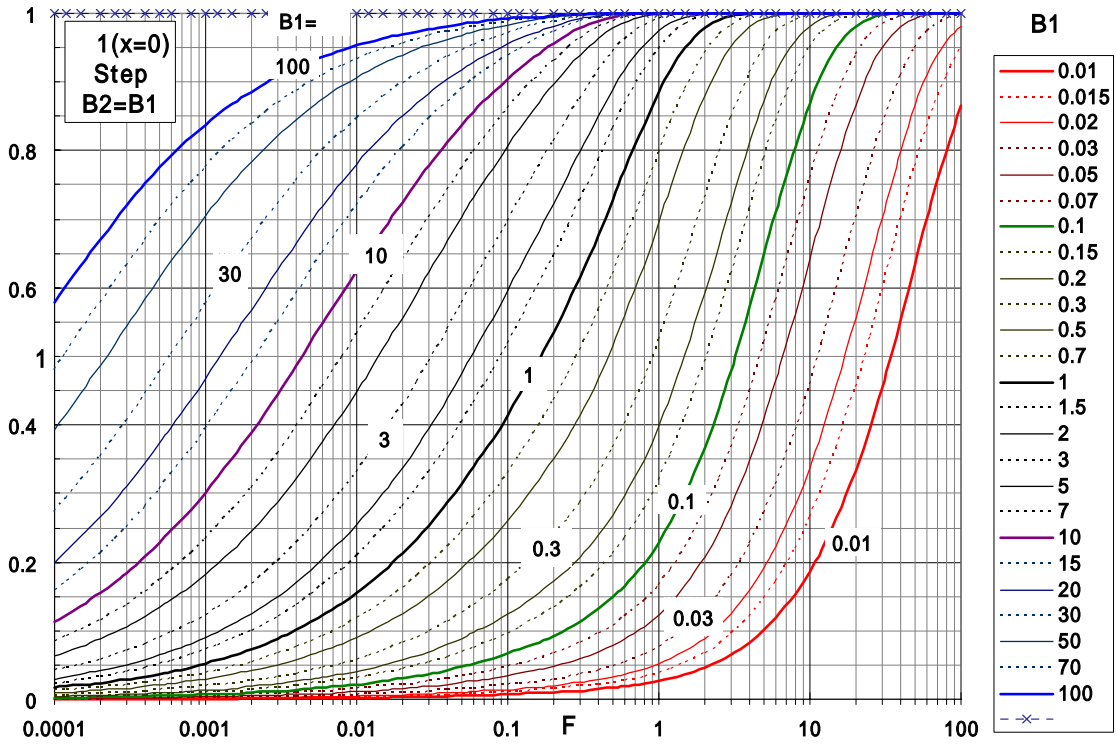


Fig.2.4.4(1) 基準面の温度 T_1 ($B_2=B_1$)

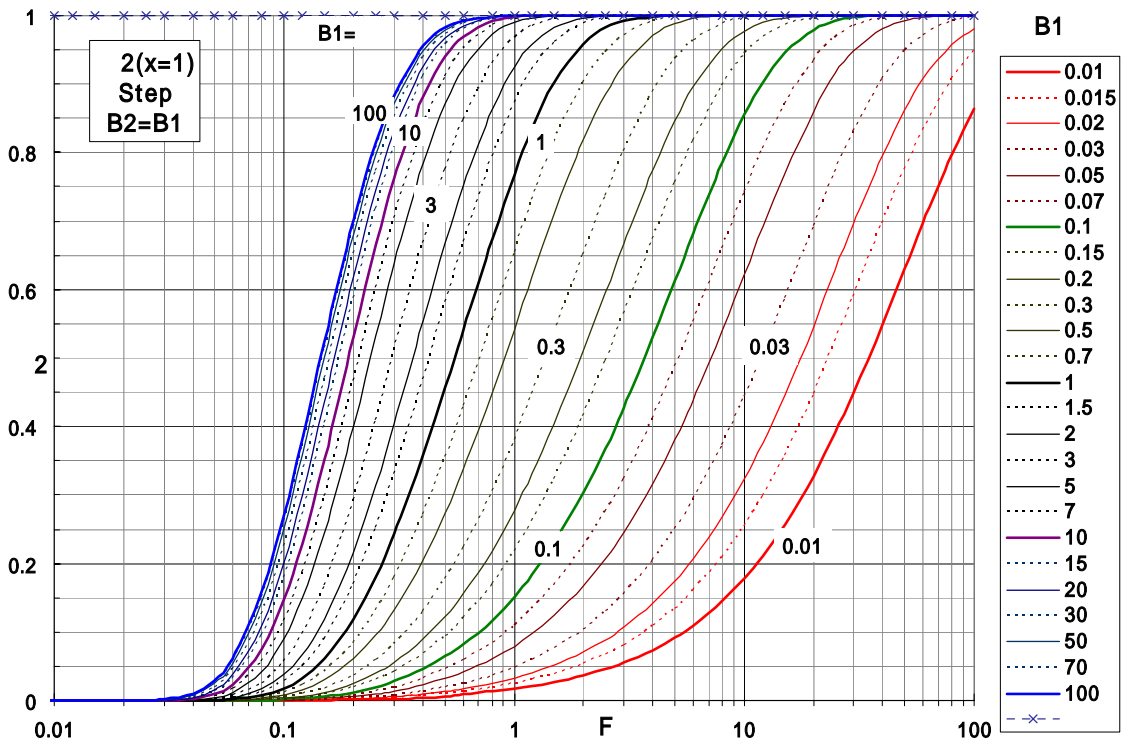


Fig.2.4.4(2) 背面の温度 T_2 ($B_2=B_1$)

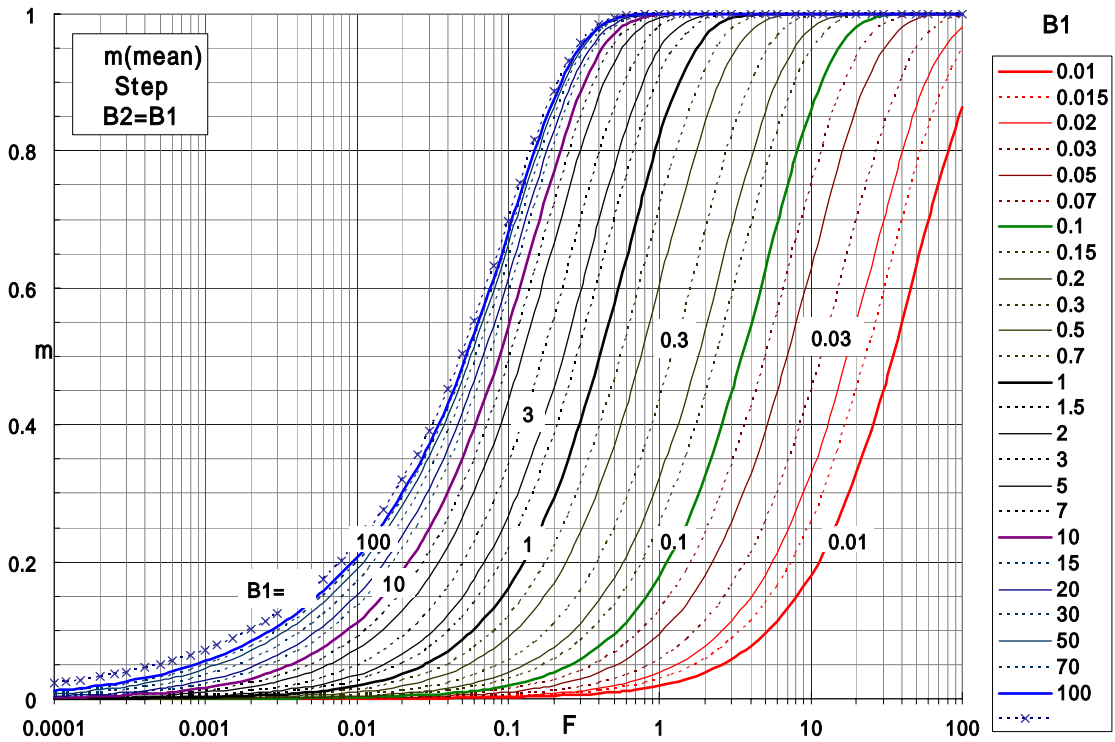


Fig.2.4.4(3) 板厚平均温度 $m (B_2=B_1)$

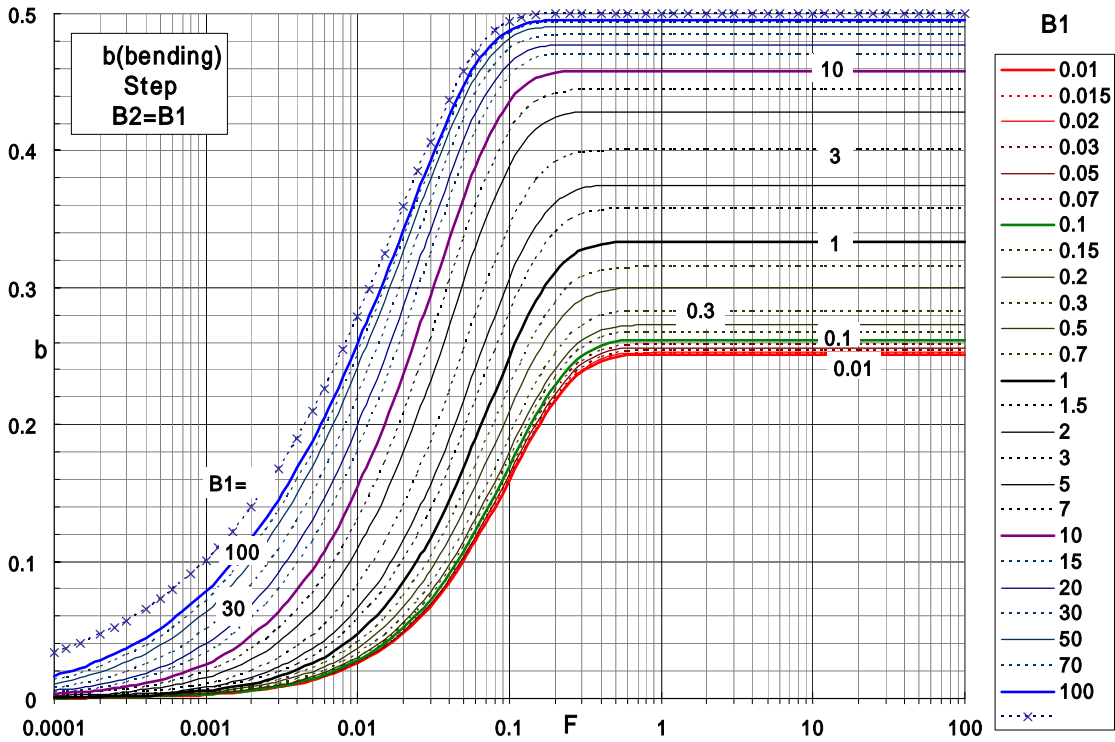


Fig.2.4.4(4) 熱曲げ応力 $b (B_2=B_1)$

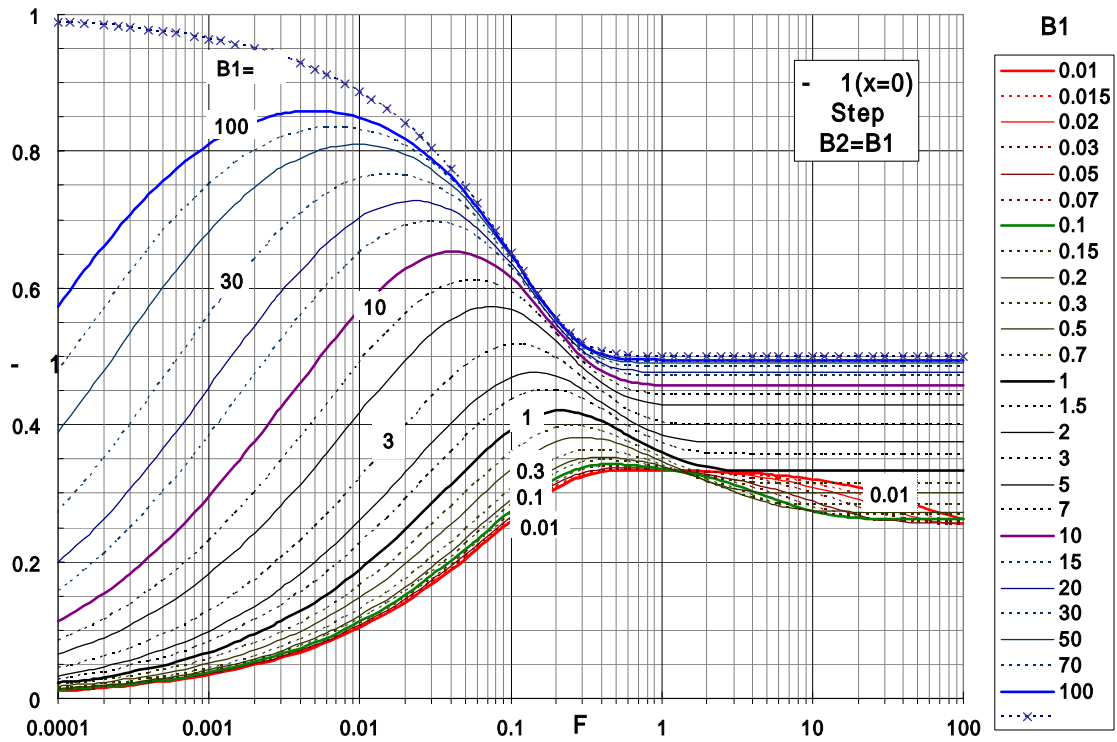


Fig.2.4.4(5) 基準面の熱応力 1 ($B_2=B_1$)

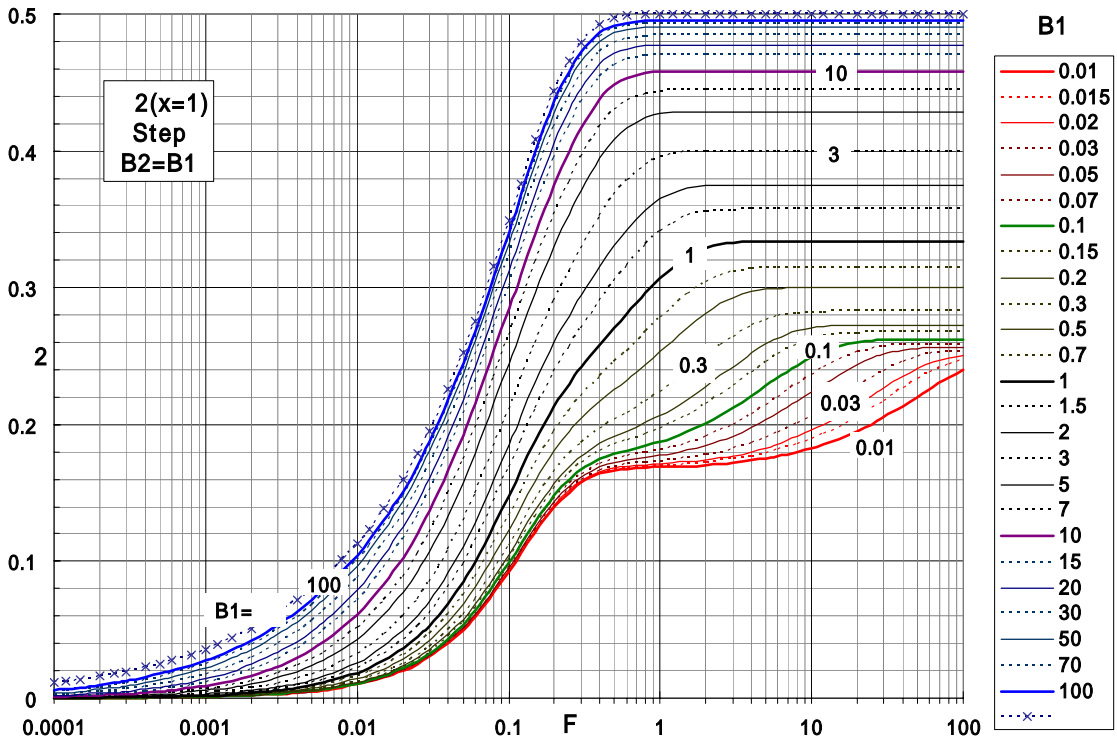


Fig.2.4.4(6) 背面の熱応力 2 ($B_2=B_1$)

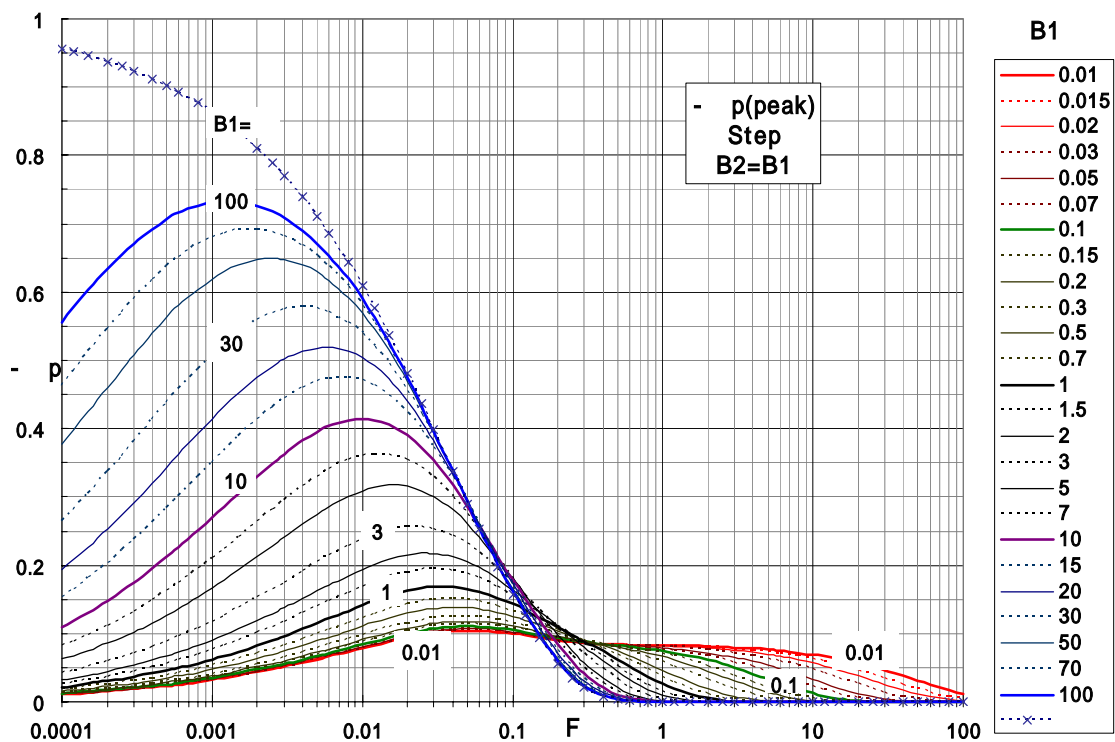


Fig.2.4.4(7) 基準面の熱ピーク応力 $p (B_2=B_1)$

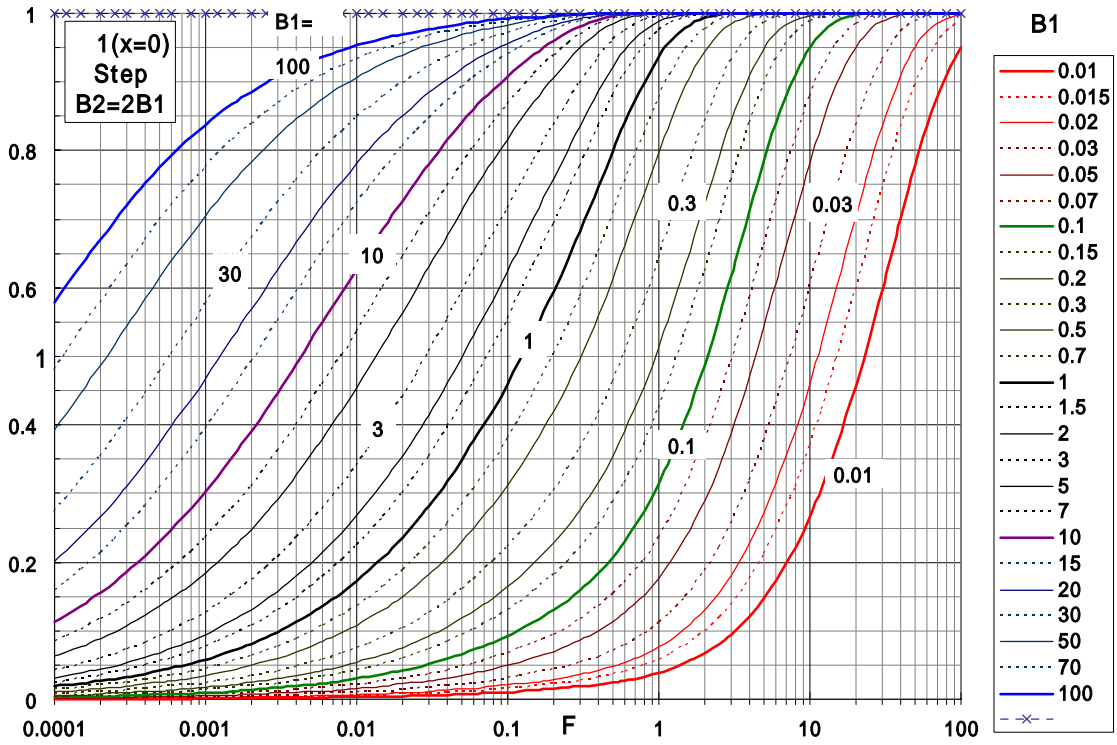


Fig.2.4.5(1) 基準面の温度 T_1 ($B_2=2B_1$)

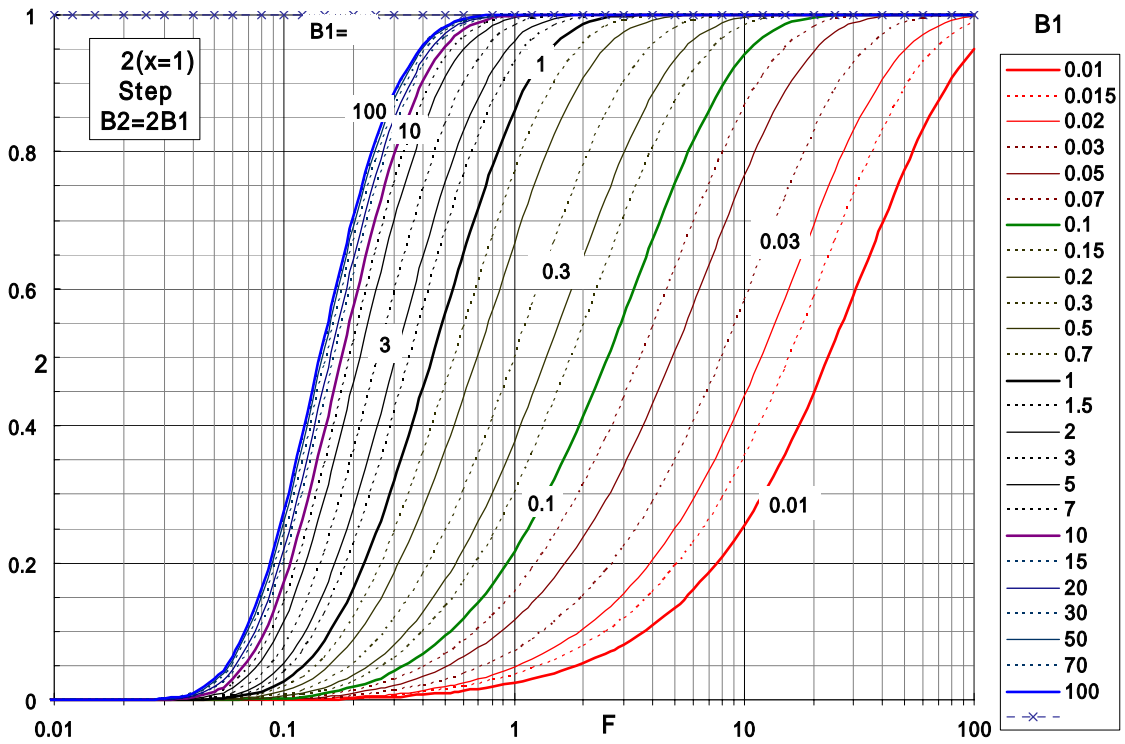


Fig.2.4.5(2) 背面の温度 T_2 ($B_2=2B_1$)

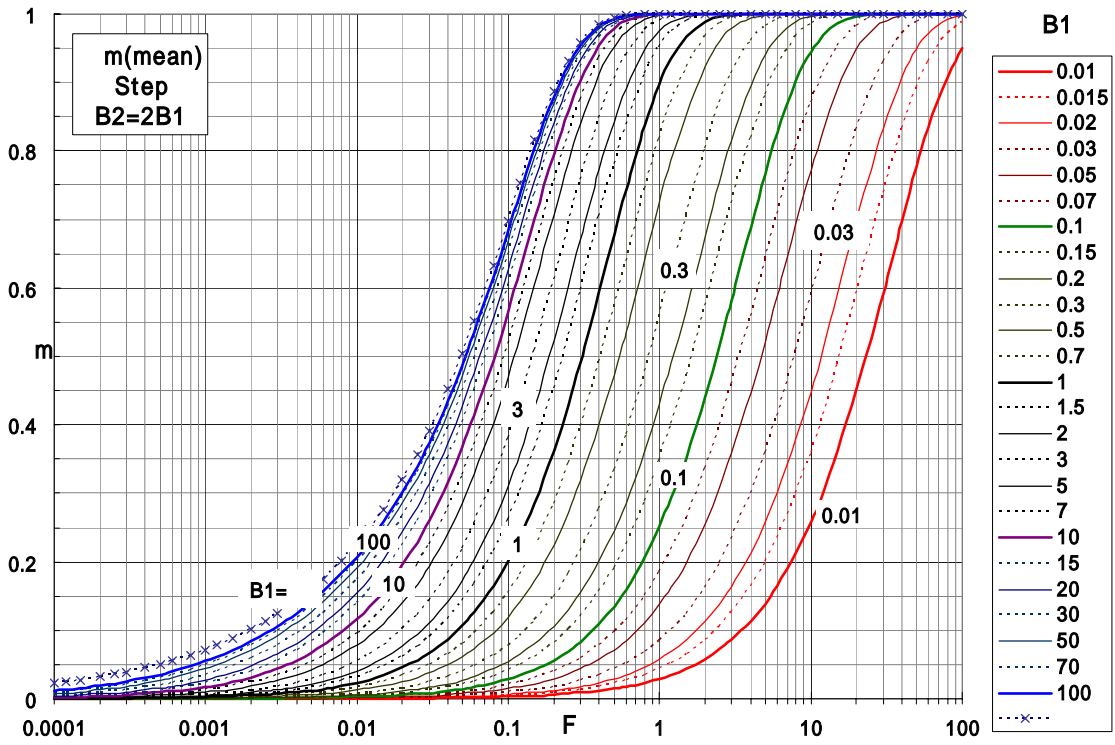


Fig.2.4.5(3) 板厚平均温度 m ($B_2=2B_1$)

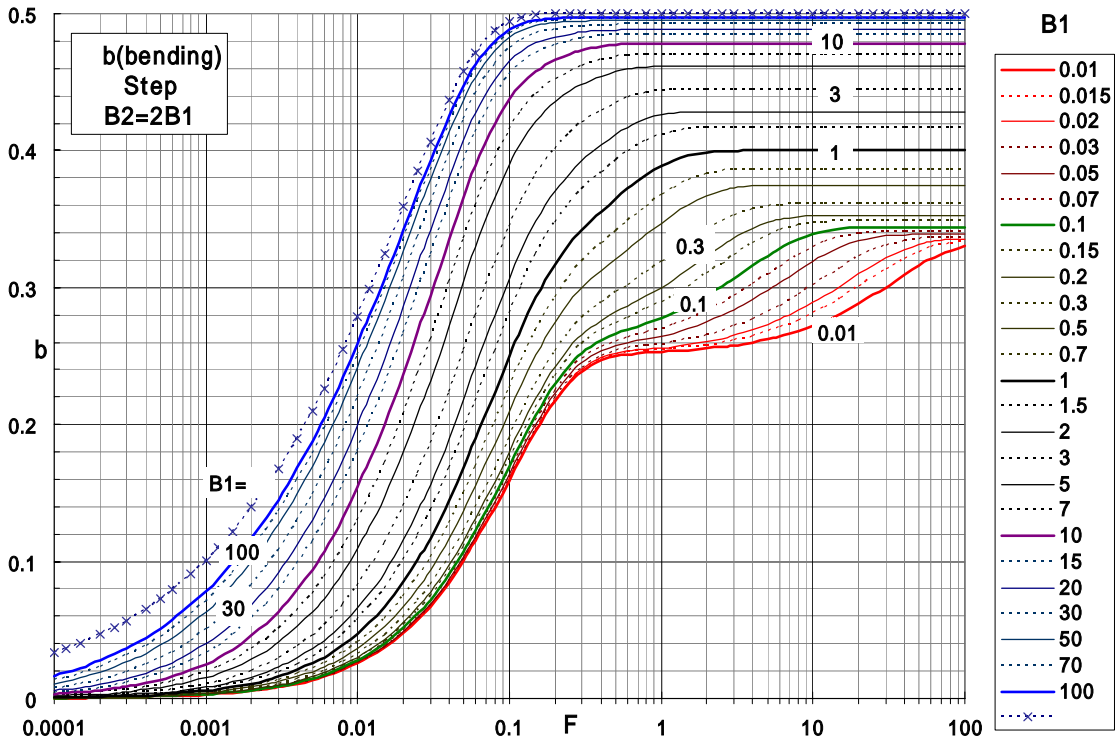


Fig.2.4.5(4) 熱曲げ応力 b ($B_2=2B_1$)

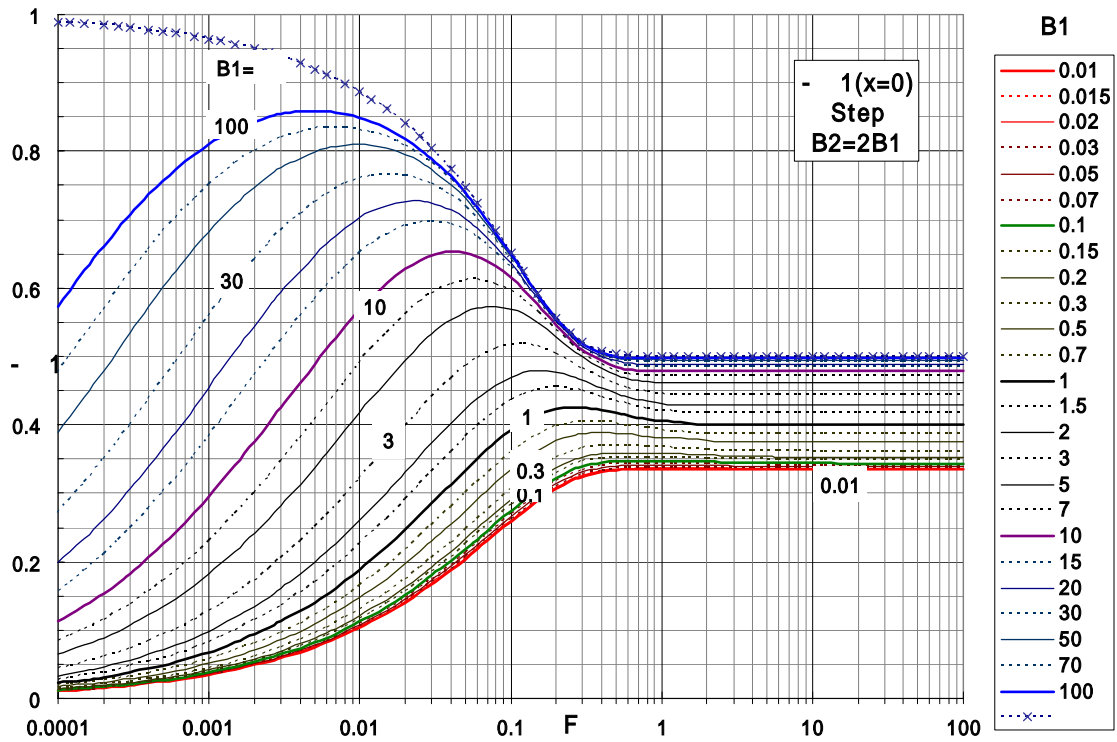


Fig.2.4.5(5) 基準面の熱応力 1 ($B_2=2B_1$)

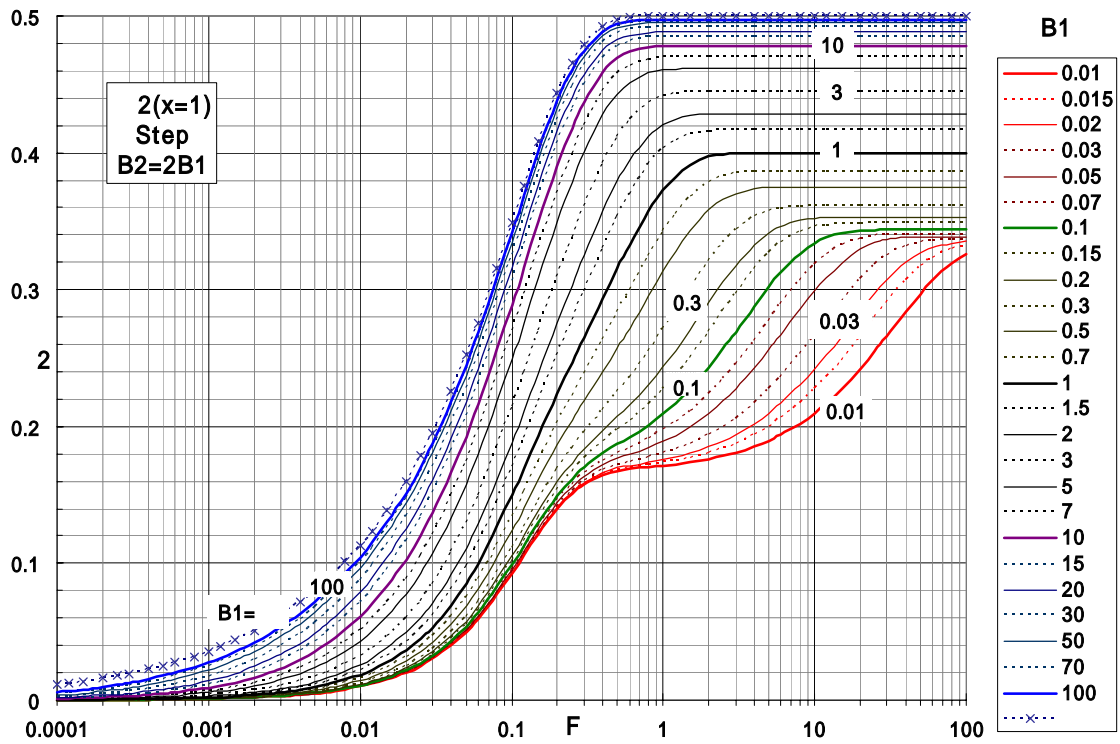


Fig.2.4.5(6) 背面の熱応力 2 ($B_2=2B_1$)

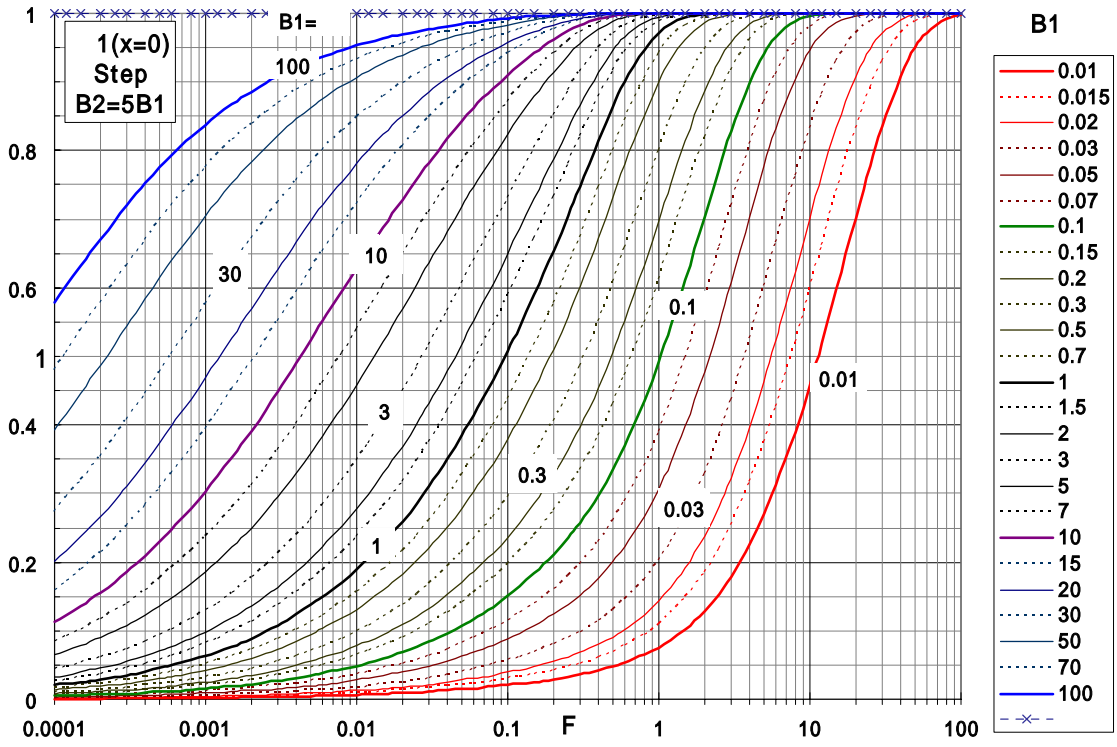


Fig.2.4.6(1) 基準面の温度 T_1 ($B_2=5B_1$)

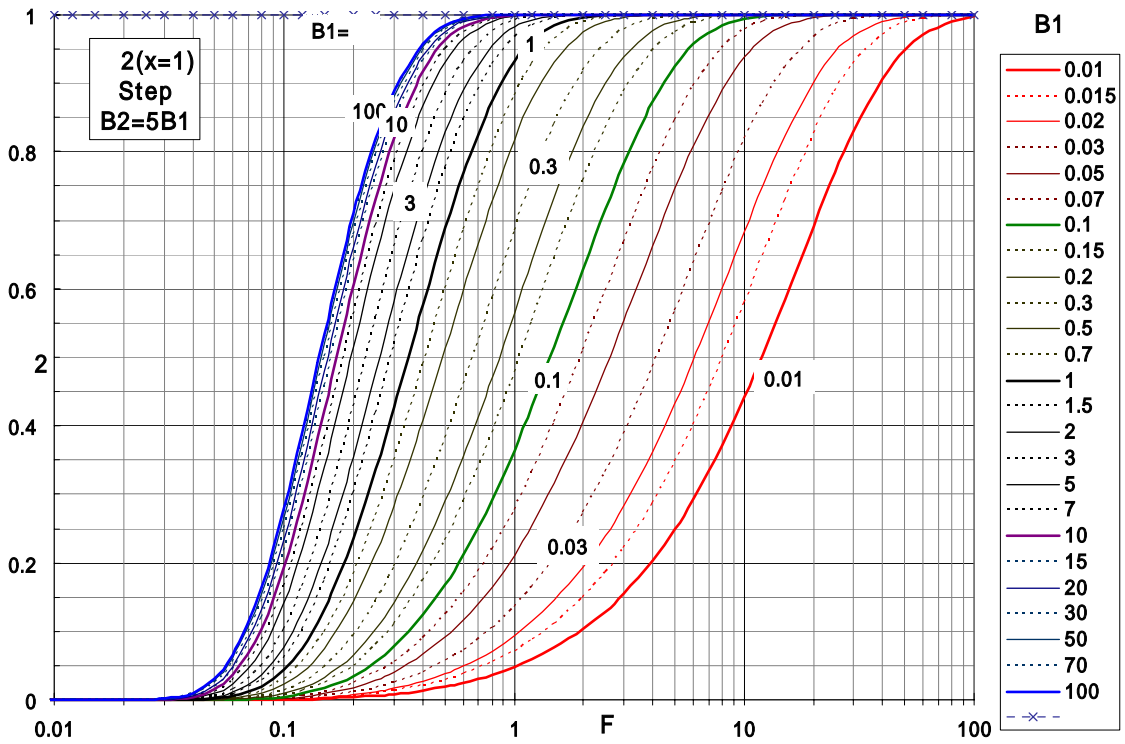


Fig.2.4.6(2) 背面の温度 T_2 ($B_2=5B_1$)

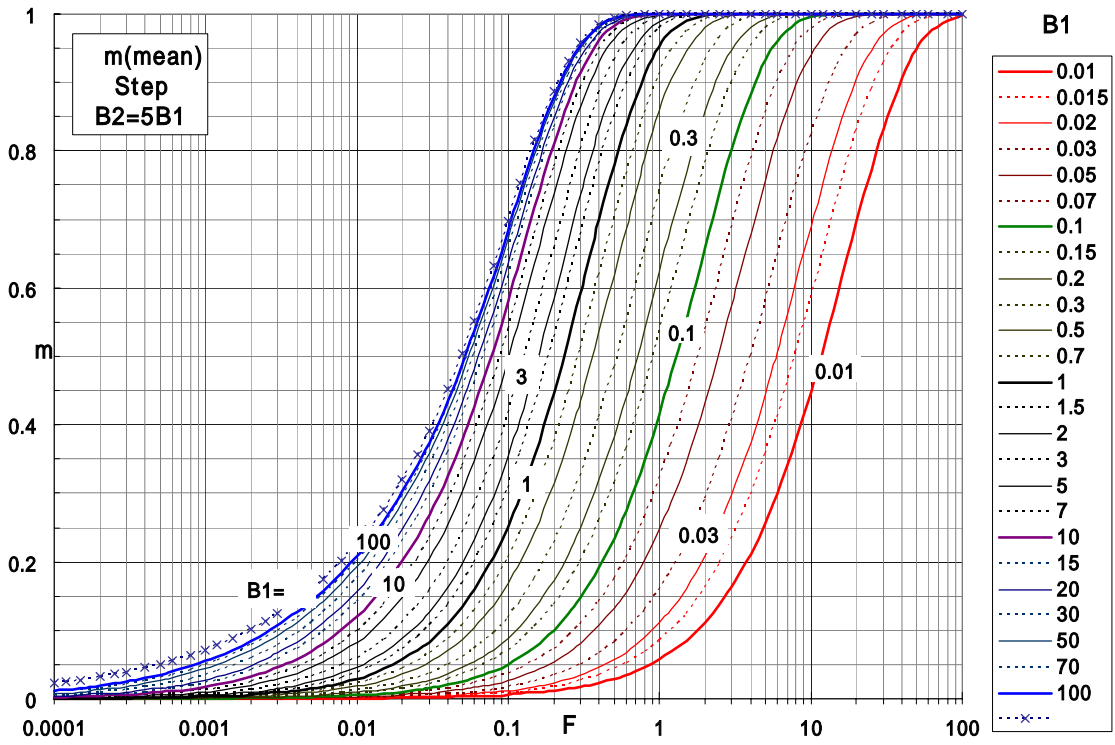


Fig.2.4.6(3) 板厚平均温度 m ($B_2=5B_1$)

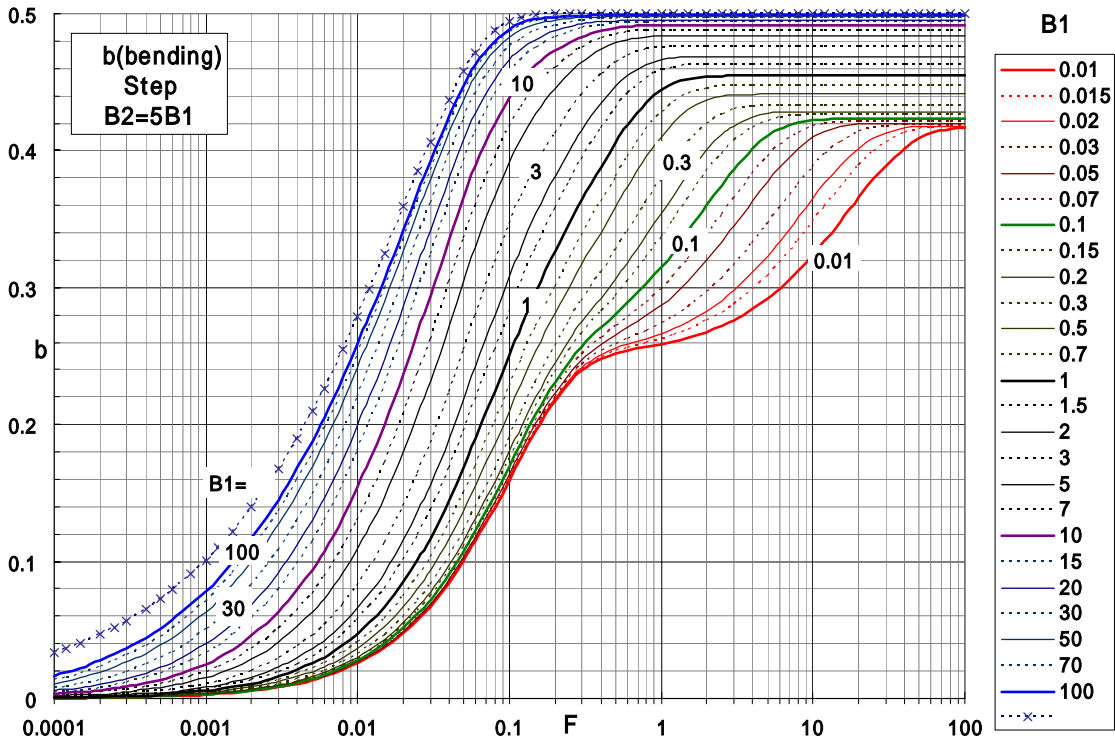


Fig.2.4.6(4) 熱曲げ応力 b ($B_2=5B_1$)

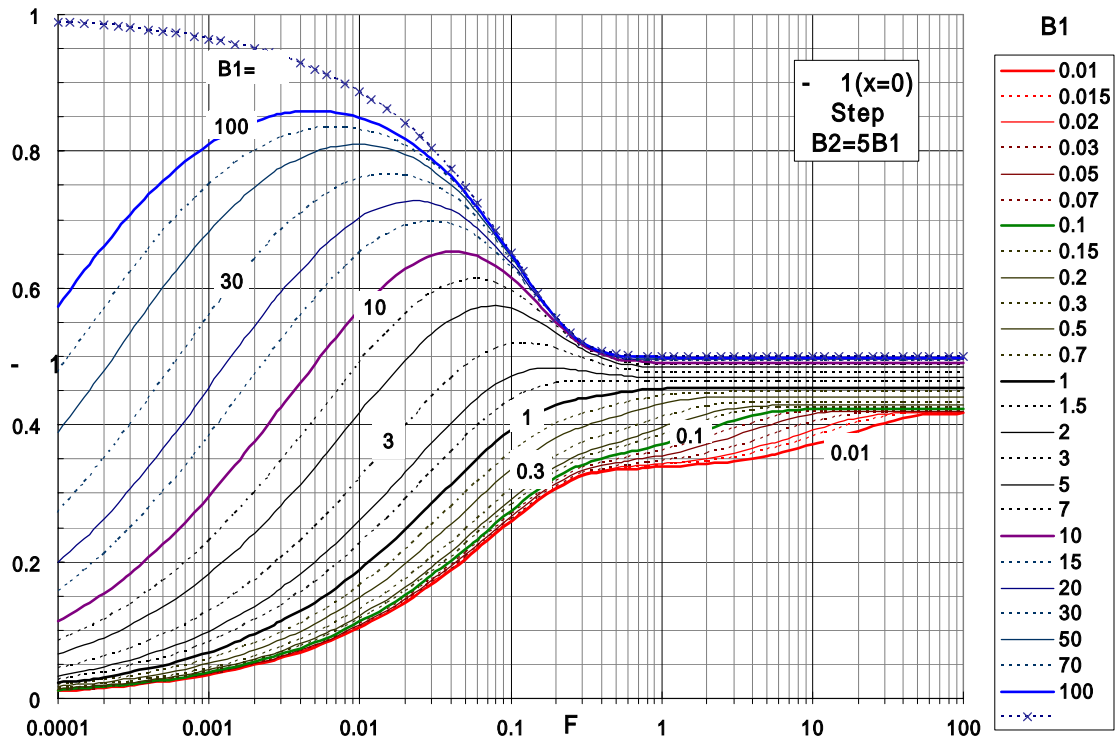


Fig.2.4.6(5) 基準面の熱応力 1 ($B_2=5B_1$)

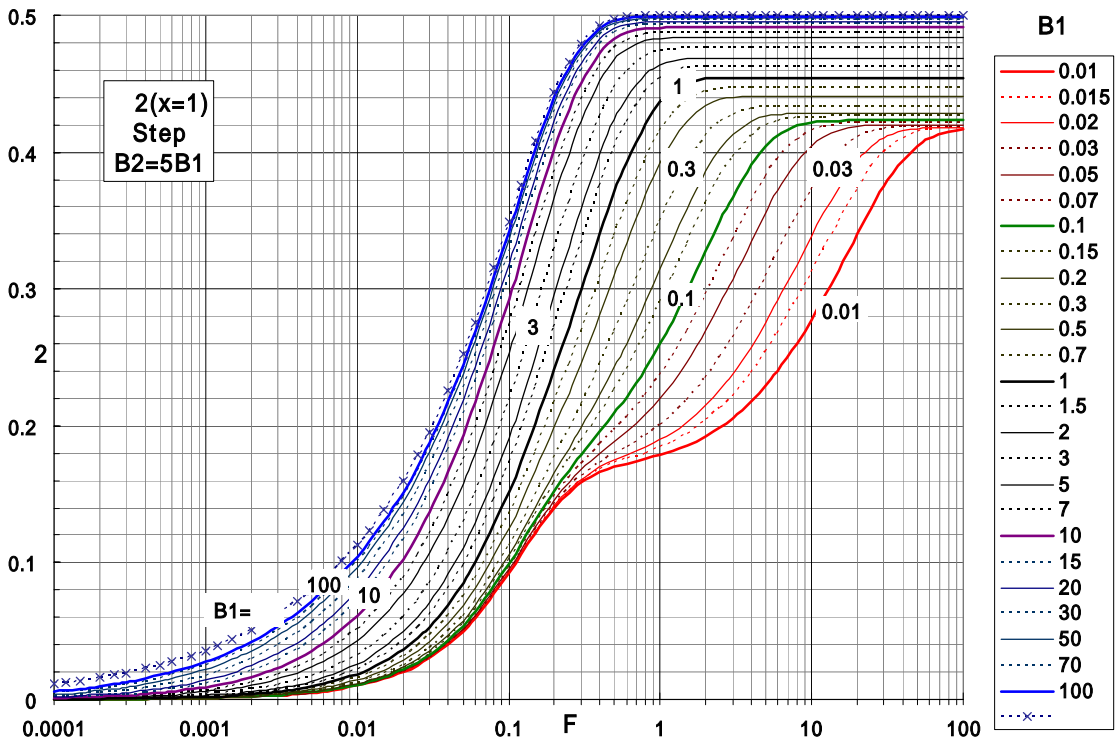


Fig.2.4.6(6) 背面の熱応力 2 ($B_2=5B_1$)

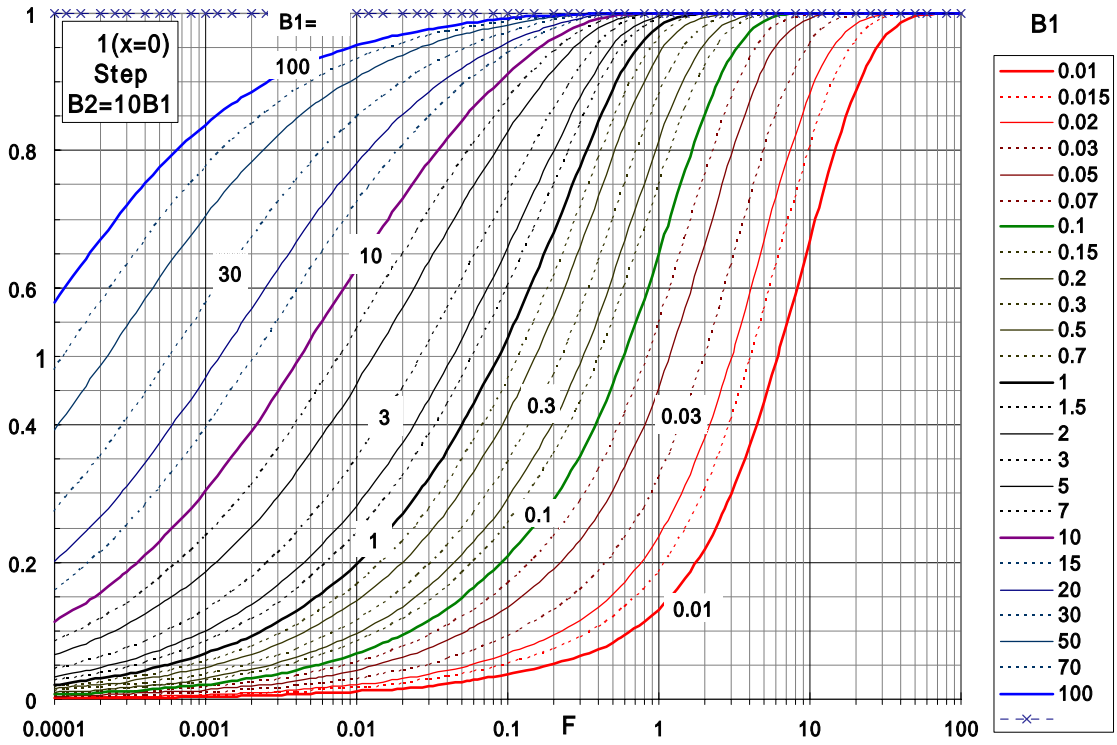


Fig.2.4.7(1) 基準面の温度 T_1 ($B_2=10B_1$)

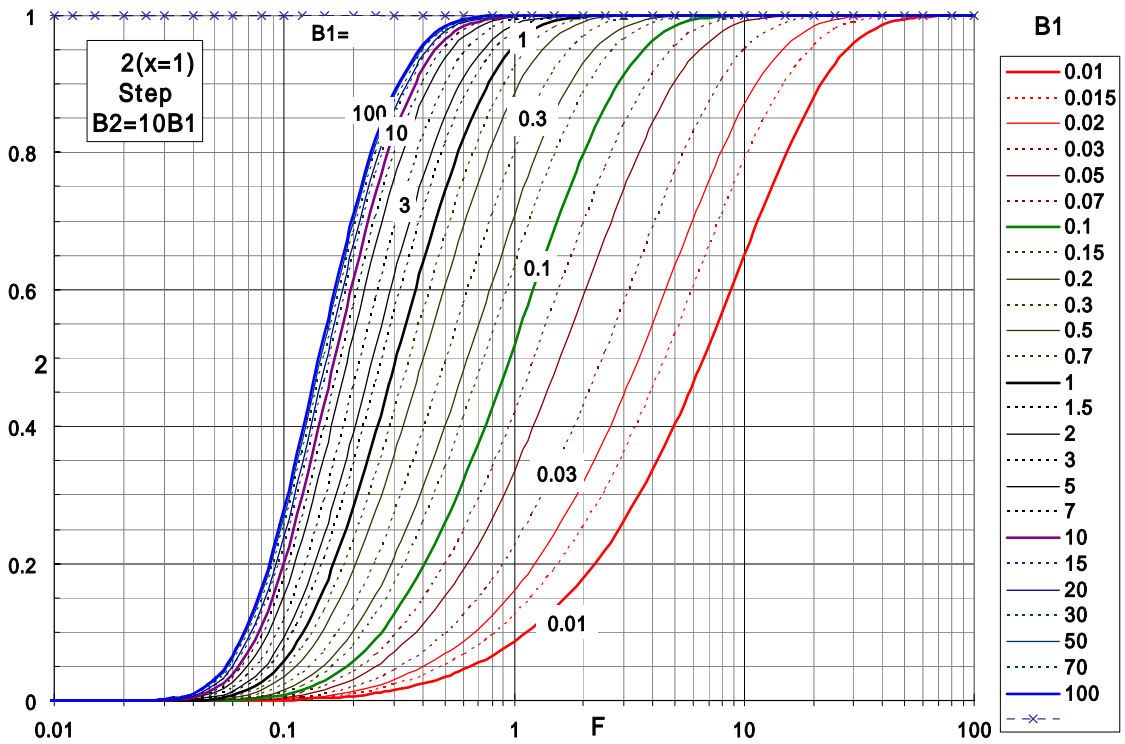


Fig.2.4.7(2) 背面の温度 T_2 ($B_2=10B_1$)

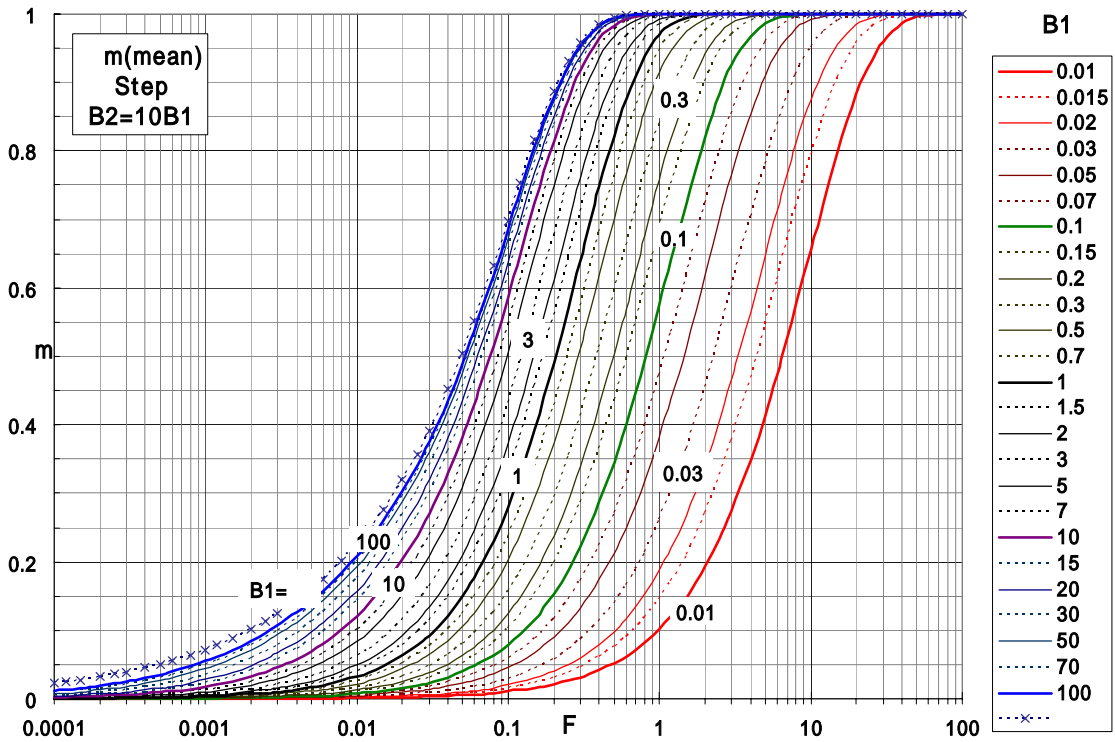


Fig.2.4.7(3) 板厚平均温度 $m (B_2=10B_1)$

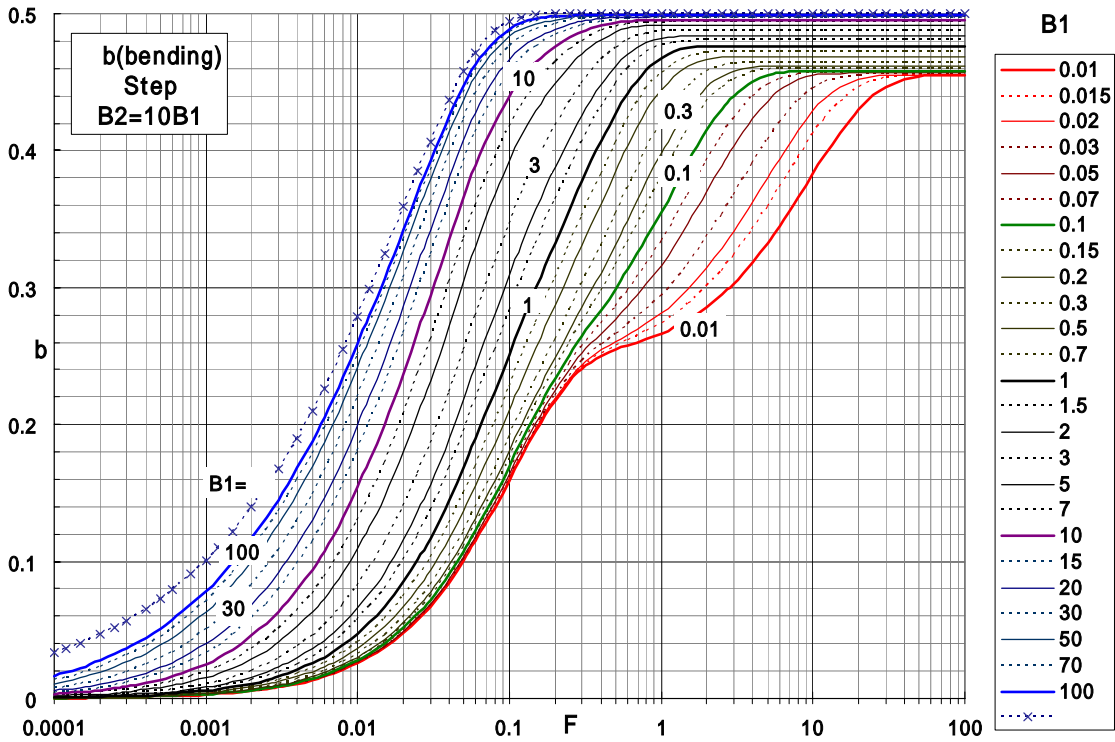


Fig.2.4.7(4) 熱曲げ応力 $b (B_2=10B_1)$

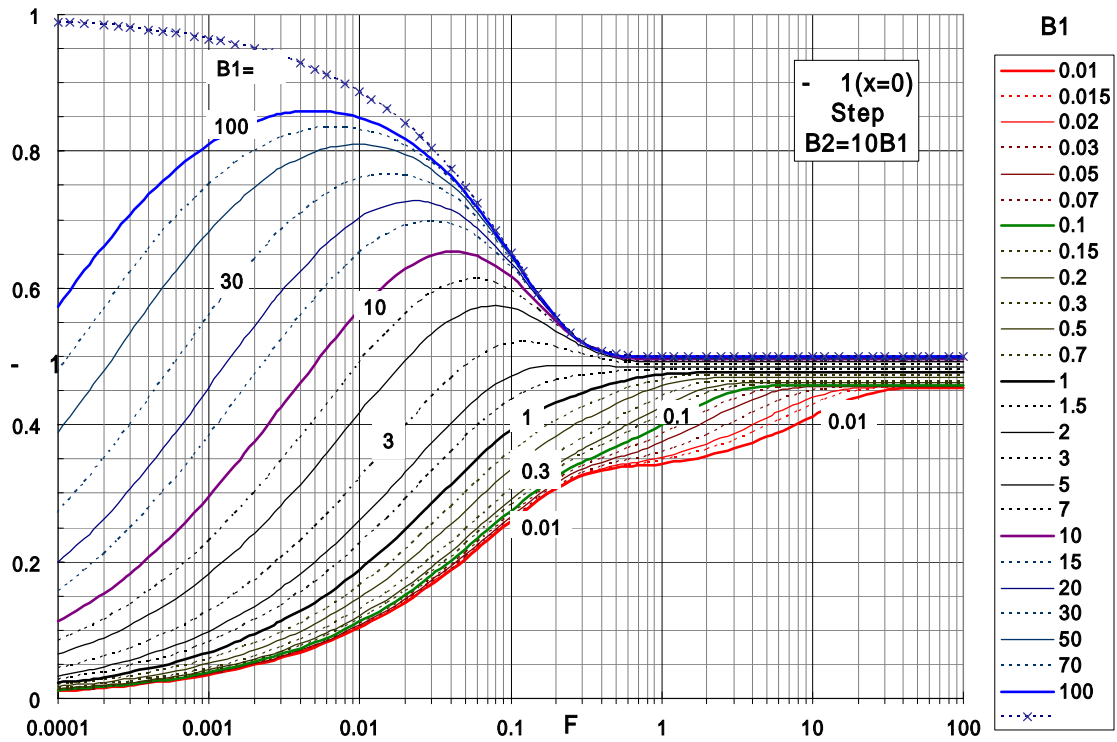


Fig.2.4.7(5) 基準面の熱応力 1 ($B_2=10B_1$)

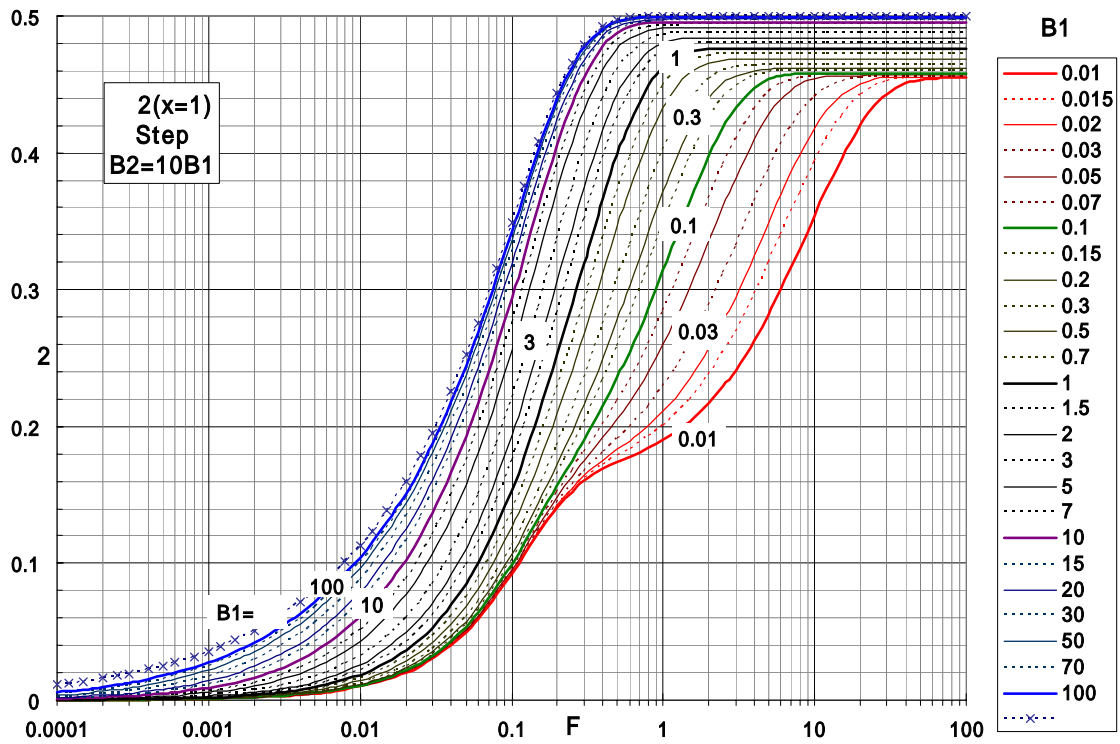


Fig.2.4.7(6) 背面の熱応力 2 ($B_2=10B_1$)

2.5 流体温度がステップ変化する場合の熱応力最大値

基準面の熱伝達係数 $0 < B_1$ および背面の熱伝達係数 $0 < B_2$ の全てのケースを含めた一括表示を行う。基準面側の流体温度のステップ変化による短時間領域の温度応答は次式で与えられる。

$$U_1(F) = 1 - e^{-(B_1^2 F)} \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \quad (2.5.1)$$

$$U_2(F) = 0 \quad (2.5.2)$$

$$U_m(F) = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} U_1(F) \quad (2.5.3)$$

$$U_b(F) = 6F - \frac{3(B_1 + 2)}{B_1} U_m(F) \quad (2.5.4)$$

(2.5.1) ~ (2.5.4)式は $F > 0.01$ で誤差は無視できる。変数分離形の解は前節までに求めた固有値 p_n および係数 c_n, d_n を用いて次式で与えられる。

$$U_1(F) = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-p_n^2 F} \quad (2.5.5)$$

$$U_2(F) = a_1 + a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2,n} e^{-p_n^2 F}, C_{2,n} = c_n \cos(p_n) + d_n \sin(p_n) \quad (2.5.6)$$

$$U_m(F) = a_1 + \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} e^{-p_n^2 F}, C_{m,n} = c_n \frac{\sin(p_n)}{p_n} + d_n \frac{1 - \cos(p_n)}{p_n} \quad (2.5.7)$$

$$U_b(F) = \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{b,n} e^{-p_n^2 F}, \quad (2.5.8)$$

$$C_{b,n} = 3 \frac{c_n \sin(p_n) - d_n \{1 + \cos(p_n)\}}{p_n} + 6 \frac{c_n \{\cos(p_n) - 1\} + d_n \sin(p_n)}{p_n^2}$$

以下の数値計算では $0.01 < F < 0.1$ に対して $n = 90$ 項まで、 $0.1 < F$ に対して $n = 10$ 項まで採用した。これで計算誤差は無視できる。

(1) 基準面の熱応力最大値

B_1 を横軸とし、 B_2 / B_1 をパラメータとして、基準面の熱応力(- 1)が最大となる時点 $F(- 1, \max)$ を Fig.2.5.1(1)に示した。最大値(- 1, max)を Fig.2.5.1(2)に示した。

$B_2 < 2B_1$ の場合、短時間で極大値(最大値)となる。極大値は $B_2 = 0$ の場合と等しく、基準

面の最大熱応力が B_2 に依存しない。極大値は $B_1 < 0.1$ でほぼ一定の 0.33、 $B_1 = 2$ で 0.48、 $B_1 =$ で 1 となる。

$B_2 > 2B_1$ および $B_1 > 2$ の場合、短時間で極大値（最大値）となる。

$B_2 > 2B_1$ および $B_1 < 2$ の場合、短時間の極大値よりも、 B_2 に依存した定常熱応力が大きく、定常熱応力が最大値となる。最大値は $B_2 =$ で 0.5 となる。Fig.2.5.1(1)では定常値の 99.9% に達する時間を示した。

(2) 背面の熱応力最大値

背面の熱応力 σ_2 が最大となる時点 $F(\sigma_{2,max})$ を Fig.2.5.2(1)に示した。 σ_2 の最大値 $\sigma_{2,max}$ を Fig.2.5.2(2)に示した。

$B_2 = 0.5B_1$ の場合、定常熱応力が最大値となることがわかる。Fig.2.5.2(1)では定常値の 99.9% に達する時間を示した。

$B_2 < 0.5 B_1$ の場合、 B_2 によって決まるある値以下の B_1 では、 B_2 にあまり依存しない短時間の極大値が最大値となる。ある値以上の B_1 では、 B_2 に依存した定常熱応力が最大値となることがわかる。これは B_1 による短時間の熱ピーク応力が背面の表面応力値を下げる方向に作用するからである。

(3) 熱曲げ応力最大値

熱曲げ応力 σ_b が最大となる時点 $F(\sigma_{b,max})$ を Fig.2.5.3(1)に示した。 σ_b の最大値 $\sigma_{b,max}$ を Fig.2.5.3(2)に示した。

$B_1 > B_2$ では、 B_2 にほとんど依存せず、短時間で極大値（最大値）となることがわかる。

$B_1 = B_2$ では、 B_2 に依存した定常熱応力が最大値となることがわかる。Fig.2.5.3(1)では定常値の 99.9% に達する時間を示した。

(4) 基準面の熱ピーク応力最大値

基準面の熱ピーク応力(σ_p)が最大となる時点 $F(\sigma_{p,max})$ を Fig.2.5.4(1)に示した。最大値($\sigma_{p,max}$) を Fig.2.5.4(2)に示した。

短時間で極大値（最大値）となり、極大値は B_2 に依存しない。

これら熱応力最大値とその時点は簡易評価で大きな利用価値があり重要である。また後の 2 . 7 節のランプ状温度変化に対する熱応力最大値とその時点の比較基準データとして参照される。計算結果の数表を付録 A2 に示した。

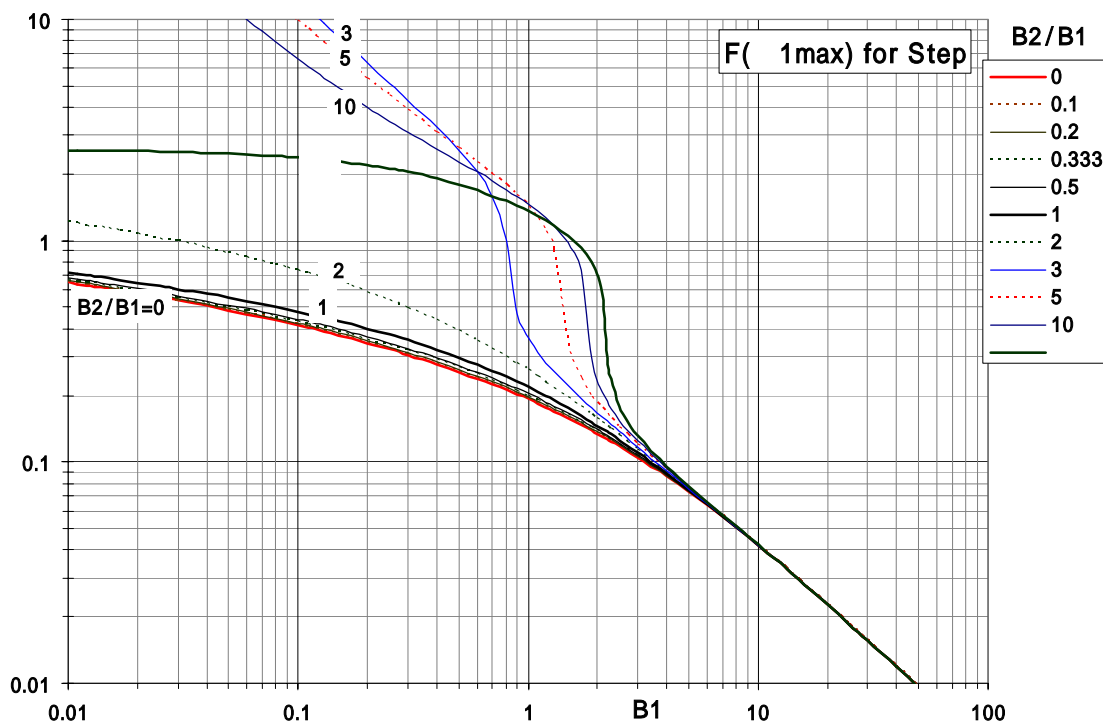


Fig.2.5.1(1) 基準面の熱応力 σ_1 が最大となる時点

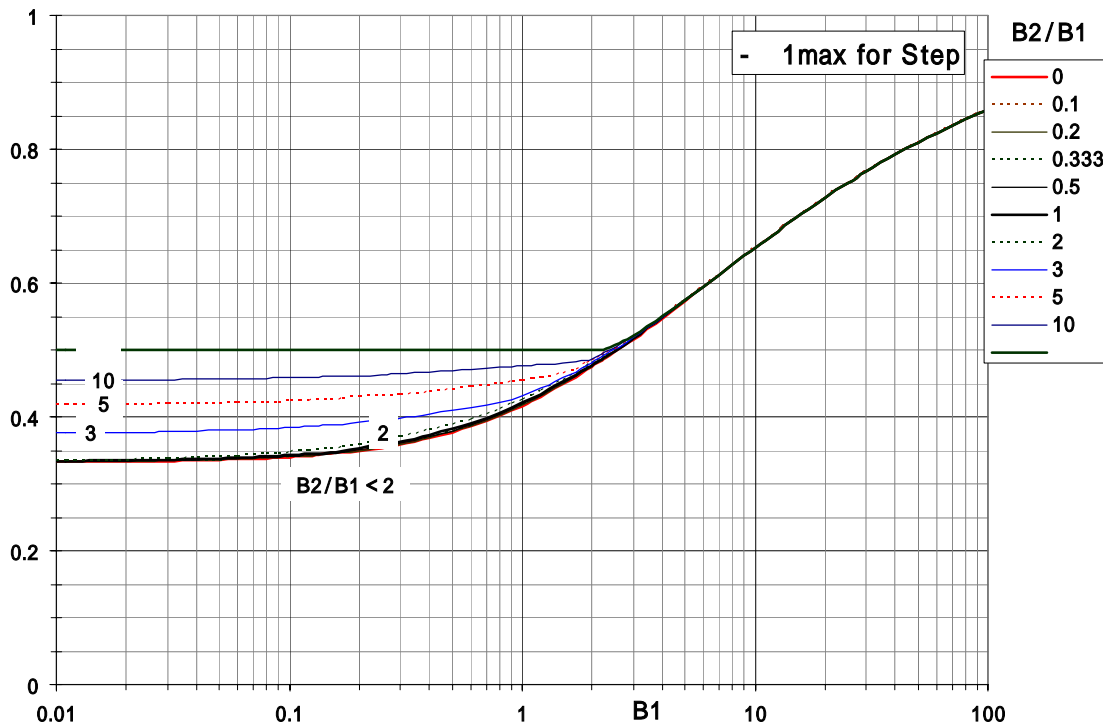


Fig.2.5.1(2) 基準面の熱応力の最大値

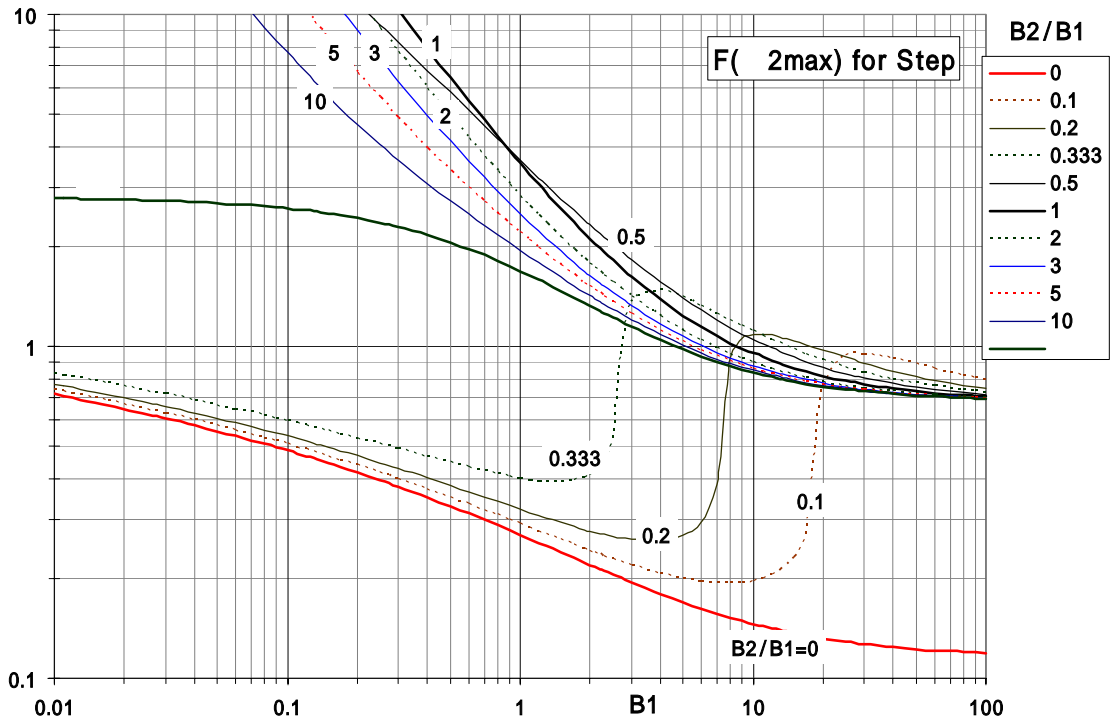


Fig.2.5.2(1) 背面の熱応力 σ_2 が最大となる時点

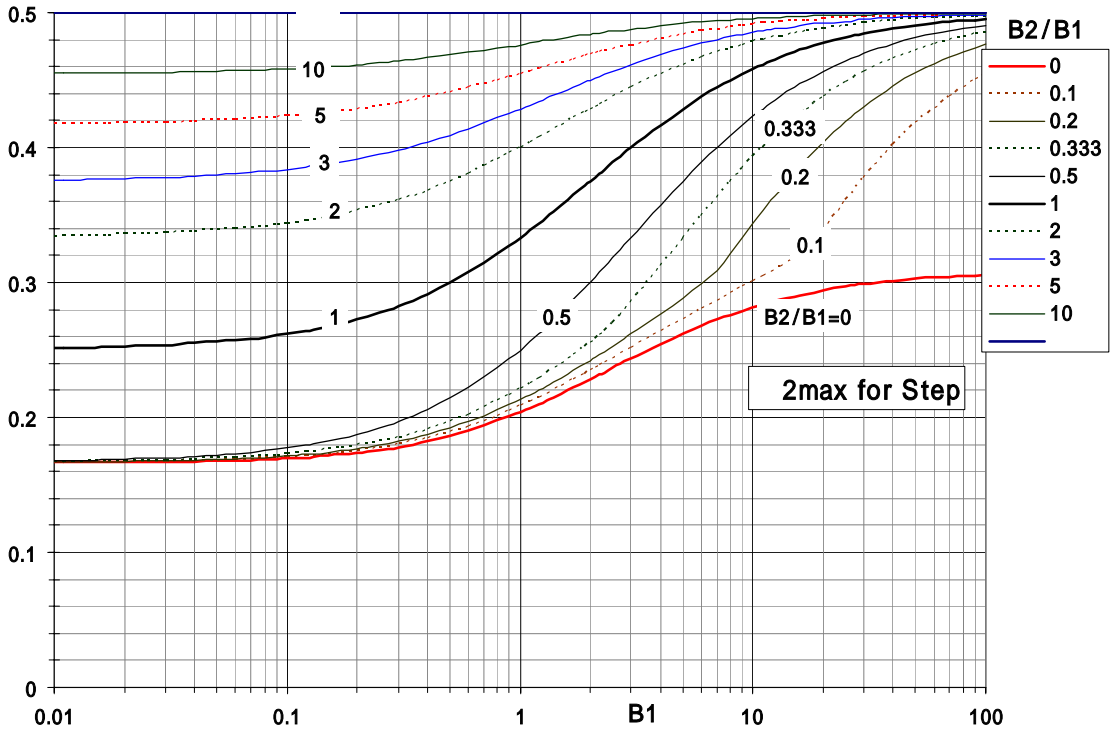


Fig.2.5.2(2) 背面の熱応力 σ_2 の最大値

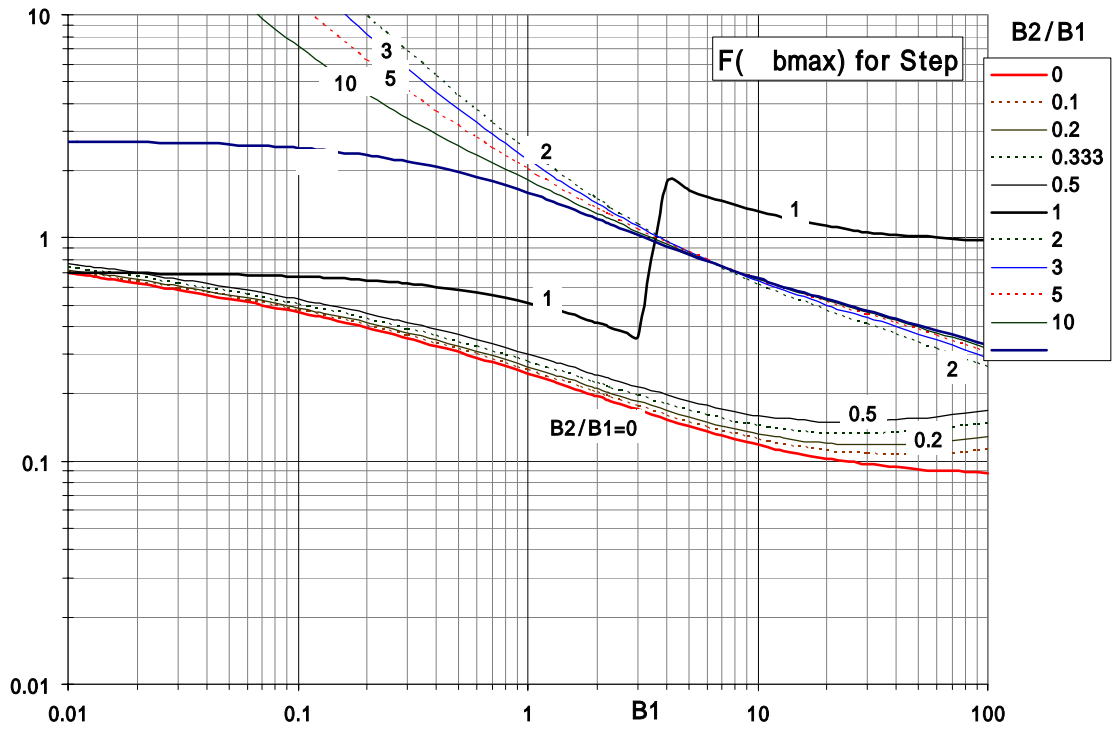


Fig.2.5.3(1) 熱曲げ応力 b が最大となる時点

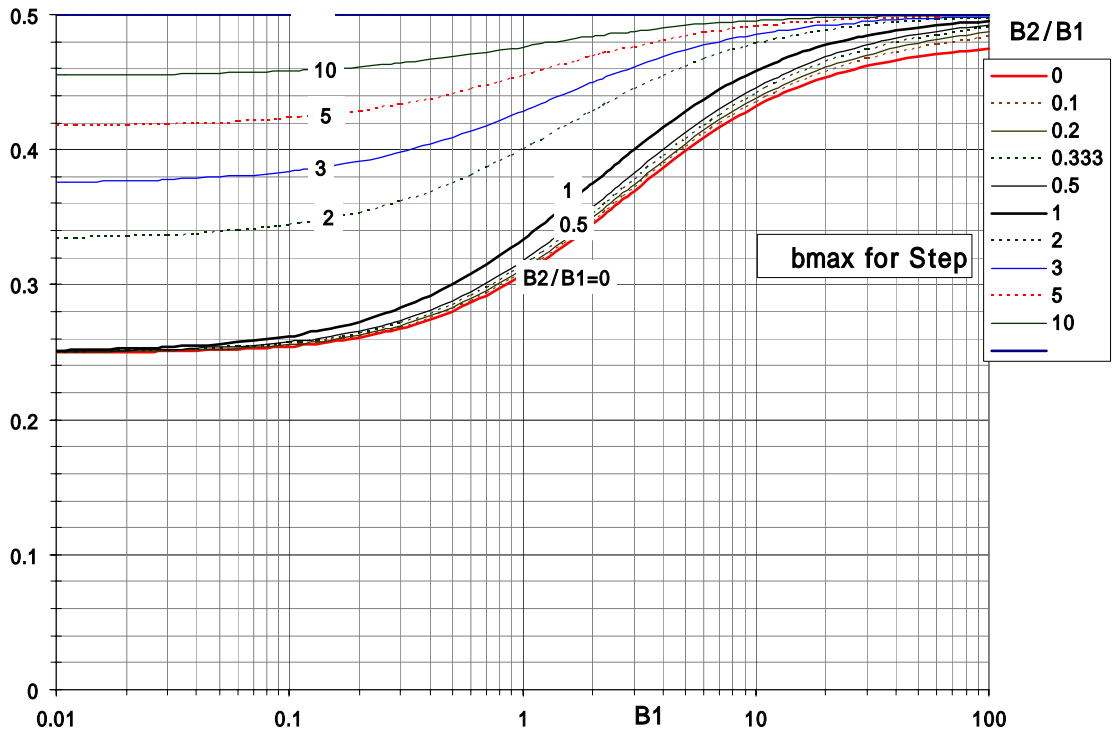


Fig.2.5.3(2) 熱曲げ応力 b の最大値



Fig.2.5.4(1) 基準面の熱ピーク応力 p_p が最大となる時点

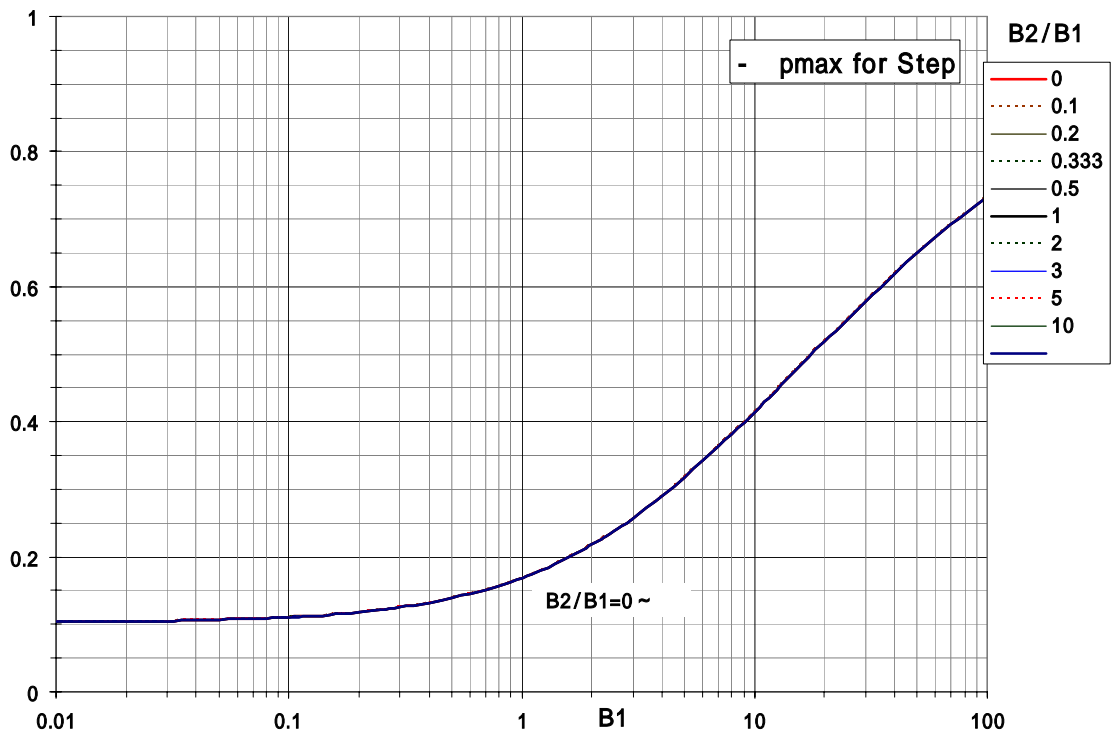


Fig.2.5.4(2) 基準面の熱ピーク応力の最大値

2.6 流体温度が線形変化する場合の温度および熱応力

基準面側の流体 1 温度が時間に比例して変化する場合とする。任意時点 F までの流体 1 温度の変化量を用いて温度を無次元化すると、無次元時間 $\tau = 0 \sim F$ で無次元流体温度 $V(\tau) = 0 \sim 1$ となる。すなわち $V(\tau) = \tau/F$ となり、微分は $V'(\tau) = 1/F$ となる。前節のステップ変化に対する一括表示解を用いて、畳み込み積分定理により、本節の解を以下のように求めることができる。短時間領域の誤差関数形の解は次式で与えられる。

$$U_{L,1}(F) = \int_0^F U_1(\tau) V'(F-\tau) d\tau = \int_0^F \left[1 - e(B_1^2 \tau) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{\tau}) \right] \frac{d\tau}{F} \quad (2.6.1)$$

$$= 1 + \frac{1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F})}{B_1^2 F} - \frac{2}{B_1 \sqrt{\pi F}}$$

$$U_{L,2}(F) = 0 \quad (2.6.2)$$

$$U_{L,m}(F) = \int_0^F \left[2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{1 - e(B_1^2 \tau) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{\tau})}{B_1} \right] \frac{d\tau}{F} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{U_{L,1}(F)}{B_1} \quad (2.6.3)$$

$$U_{L,b}(F) = \int_0^F \left[6\tau - \frac{6(B_1 + 2)}{B_1} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{3(B_1 + 2)}{B_1^2} \{ 1 - e(B_1^2 \tau) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{\tau}) \} \right] \frac{d\tau}{F} \quad (2.6.4)$$

$$= 3F - \frac{3(B_1 + 2)}{B_1} U_{L,m}(F)$$

(2.6.1) ~ (2.6.4) 式は、 $B_1 < 0.02$ および $F < 0.001$ での U_m および U_b に若干の計算誤差が生じるが、その絶対値は非常に小さい。ある値以下の計算値を 0 と見なすことで、短時間領域 $F < 0.01$ で使用できる。変数分離形の解は、前節の解を用いて次式で与えられる。

$$U_{L,1}(F) = \int_0^F \left[a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e(-p_n^2 \tau) \right] \frac{d\tau}{F} = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1 - e(-p_n^2 F)}{p_n^2 F} \quad (2.6.5)$$

$$U_{L,2}(F) = \int_0^F \left[a_1 + a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2,n} e(-p_n^2 \tau) \right] \frac{d\tau}{F} = a_1 + a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2,n} \frac{1 - e(-p_n^2 F)}{p_n^2 F} \quad (2.6.6)$$

$$U_{L,m}(F) = \int_0^F \left[a_1 + \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} e(-p_n^2 \tau) \right] \frac{d\tau}{F} = a_1 + \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \frac{1 - e(-p_n^2 F)}{p_n^2 F} \quad (2.6.7)$$

$$U_{L,b}(F) = \int_0^F \left[\frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{b,n} e(-p_n^2 \tau) \right] \frac{d\tau}{F} = \frac{a_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{b,n} \frac{1 - e(-p_n^2 F)}{p_n^2 F} \quad (2.6.8)$$

これらの温度解を用いて無次元温度 および無次元熱応力 は次式で与えられる。

$$\phi_1(F) = \frac{U_{L,1}(F)}{U_{L,1}(\infty)} = \frac{U_{L,1}(F)}{a_1} \quad (2.6.9)$$

$$\phi_2(F) = \frac{U_{L,2}(F)}{U_{L,2}(\infty)} = \frac{U_{L,2}(F)}{a_1 + a_2} \quad (a_1 + a_2 \neq 0) \quad , \quad \phi_2(F) = 1 \quad (a_1 + a_2 = 0) \quad (2.6.10)$$

$$\phi_m(F) = \frac{U_{L,m}(F)}{U_{L,m}(\infty)} = \frac{U_{L,m}(F)}{a_1 + a_2/2} \quad (2.6.11)$$

$$\beta_1(F) = \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1+B_1)S_1(F)}{B_1} = \frac{(1+B_1)\{U_{L,m}(F) - U_{L,1}(F)\}}{B_1} \quad (2.6.12)$$

$$\beta_2(F) = \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1+B_1)S_2(F)}{B_1} = \frac{(1+B_1)\{U_{L,m}(F) - U_{L,2}(F)\}}{B_1} \quad (2.6.13)$$

$$\beta_b(F) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1+B_1)S_b(F)}{B_1} = \frac{-(1+B_1)U_{L,b}(F)}{B_1} \quad (2.6.14)$$

$$\beta_p(F) = \frac{\sigma_p(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1+B_1)S_p(F)}{B_1} = \frac{(1+B_1)\{U_{L,m}(F) - U_{L,1}(F) - U_{L,b}(F)\}}{B_1} \quad (2.6.15)$$

B₂=0 の場合の 1、 2、 m、 b、 1、 2 および p の計算結果を Fig.2.6.1(1) ~ (7)に示す。
 B₂=0.1B₁ の場合の 1、 2、 m、 b、 1 および 2 の計算結果を Fig.2.6.2(1) ~ (6)に示す。
 B₂=0.2B₁ の場合の 1、 2、 m、 b、 1 および 2 の計算結果を Fig.2.6.3(1) ~ (6)に示す。
 B₂=0.5B₁ の場合の 1、 2、 m、 b、 1 および 2 の計算結果を Fig.2.6.4(1) ~ (6)に示す。B₂=B₁
 の場合の 1、 2、 m、 b、 1、 2 および p の計算結果を Fig.2.6.5(1) ~ (7)に示す。B₂=2B₁
 の場合の 1、 2、 m、 b、 1 および 2 の計算結果を Fig.2.6.6(1) ~ (6)に示す。B₂=5B₁ の場
 合の 1、 2、 m、 b、 1 および 2 の計算結果を Fig.2.6.7(1) ~ (6)に示す。B₂=10B₁ の場合の
 1、 2、 m、 b、 1 および 2 の計算結果を Fig.2.6.8(1) ~ (6)に示す。B₂= の場合の 1、
 2、 m、 b、 1、 2 および p の計算結果を Fig.2.6.9(1) ~ (7)に示す。〔補足、基準面の熱ピー
 ク応力 p は極大値(最大値)に達するまでは B₂ に依存しない。最大値から定常値 0 に減衰する

速さが B_2 に依存するが、依存度合は小さい。以上の理由で $B_2 = 0$ 、 $B_2 = B_1$ および $B_2 =$ の 3 ケース以外は p の図を省略した。]

これらの図から流体 1 温度が時間に比例して変化した場合の任意時点の温度および応力を計算できる。

使用例 1 (線形変化任意時点の温度および応力)

流体 1 温度 $T_f(t) = kt$

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}, F = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}, a_1 = \frac{B_1 + B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}, a_2 = \frac{-B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}$$

$$\phi_1(B_1, B_2, F) \rightarrow T_1(t) = a_1 T_f \phi_1$$

$$\phi_2(B_1, B_2, F) \rightarrow T_2(t) = (a_1 + a_2) T_f \phi_2$$

$$\phi_m(B_1, B_2, F) \rightarrow T_m(t) = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) T_f \phi_m$$

$$\beta_j(B_1, B_2, F) \rightarrow \sigma_j(t) = \frac{B_1 E \alpha T_f \beta_j}{(1 + B_1)(1 - \nu)} \quad (j = 1, 2, b, p)$$

使用例 2 (線形変化終了後の温度および応力)

流体 1 温度 $0 \leq t \leq t_R$ で $T_f(t) = (t / t_R) T_R$

流体 1 温度 $t_R < t$ で $T_f(t) = T_R$ 維持

時間 $t (> t_R)$ の温度および熱応力

t_R 以後も流体温度の線形変化が継続した場合と、 t_R を開始時間として逆方向の温度変化 $-(t - t_R) T_R / t_R$ した場合とを、それぞれ計算して重ね合わせる。

$$F_1 = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}, F_2 = \frac{\lambda(t - t_R)}{\rho c L^2}$$

$$\phi_1(F_1), \phi_1(F_2) \rightarrow T_1(t) = a_1 \left[\frac{t}{t_R} \phi_1(F_1) - \frac{t - t_R}{t_R} \phi_1(F_2) \right] T_R$$

$$\phi_2(F_1), \phi_2(F_2) \rightarrow T_2(t) = (a_1 + a_2) \left[\frac{t}{t_R} \phi_2(F_1) - \frac{t - t_R}{t_R} \phi_2(F_2) \right] T_R$$

$$\phi_m(F_1), \phi_m(F_2) \rightarrow T_m(t) = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \left[\frac{t}{t_R} \phi_m(F_1) - \frac{t - t_R}{t_R} \phi_m(F_2) \right] T_R$$

$$\beta_j(F_1), \beta_j(F_2) \rightarrow \sigma_j(t) = \frac{B_1 E \alpha T_R}{(1+B_1)(1-\nu)} \left[\frac{t}{t_R} \beta_j(F_1) - \frac{t-t_R}{t_R} \beta_j(F_2) \right] \quad (j=1,2,b,p)$$

このように任意の線形変化および線形変化終了後の任意時間 t に対して計算できること、すなわち汎用性があるのが利点である。文献[4]にも $B_2 = 0$ の場合の同様の線図が記載され、良く利用されている。ランプ状の温度変化に対して、温度変化終了後の最大熱応力を評価するには t を変えて何回も計算しなければならないのが欠点である。そこで次節でランプ状の温度変化終了後の最大熱応力を求める線図を与えることにした。

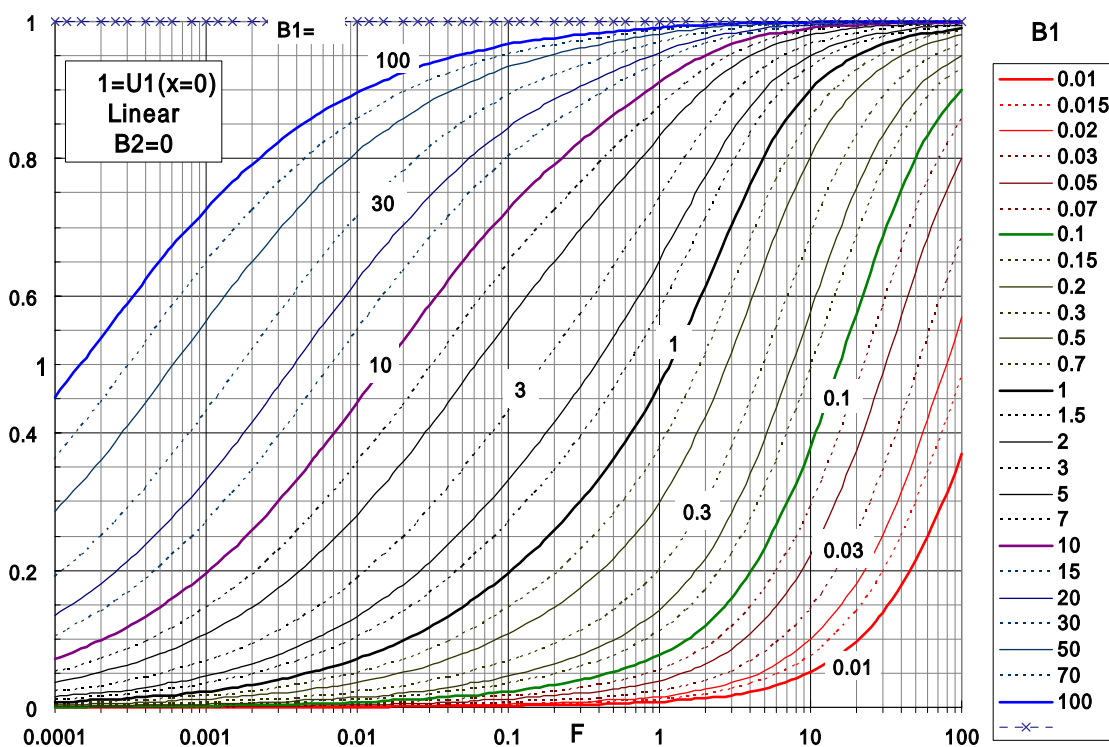


Fig.2.6.1(1) 基準面の温度 θ_1 (線形温度変化、 $B_2=0$)

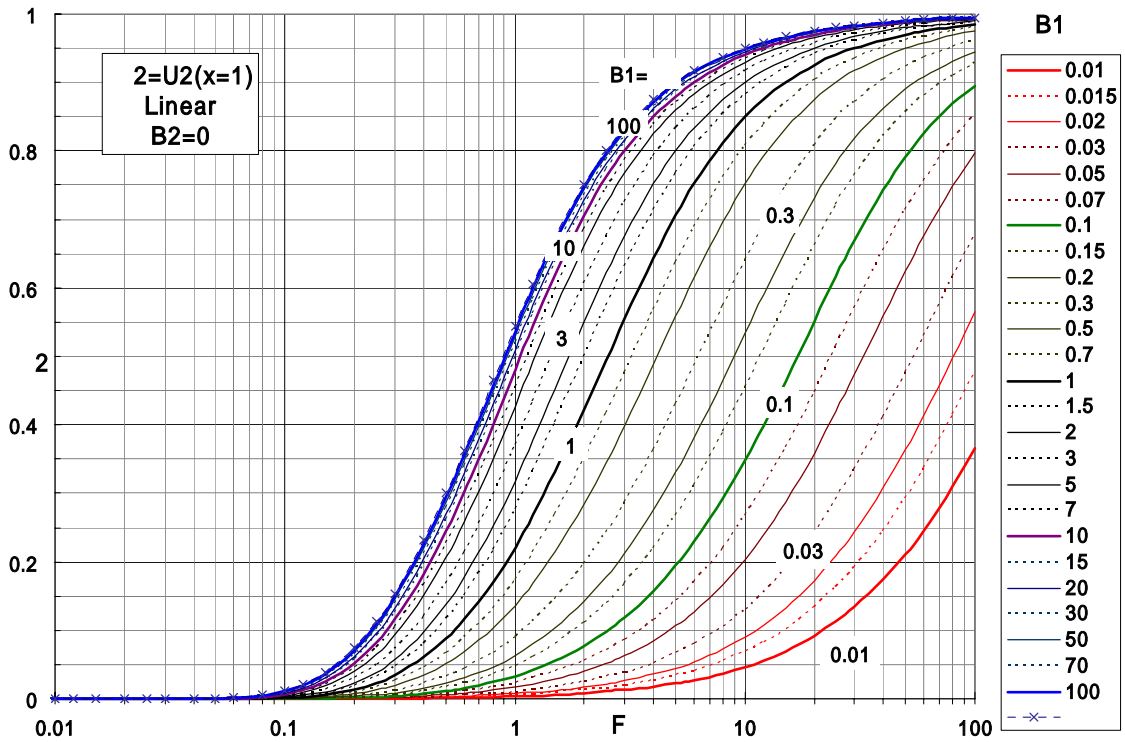


Fig.2.6.1(2) 背面の温度 z (線形温度変化、 $B_2=0$)

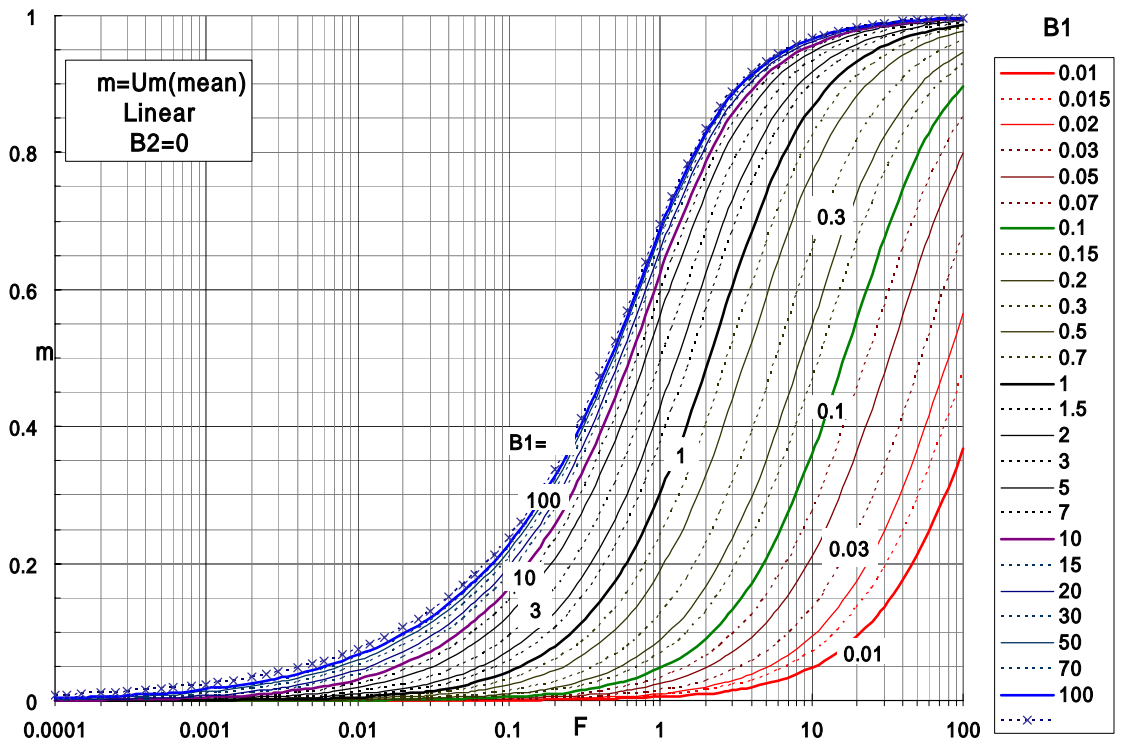


Fig.2.6.1(3) 板厚平均温度 m (線形温度変化、 $B_2=0$)

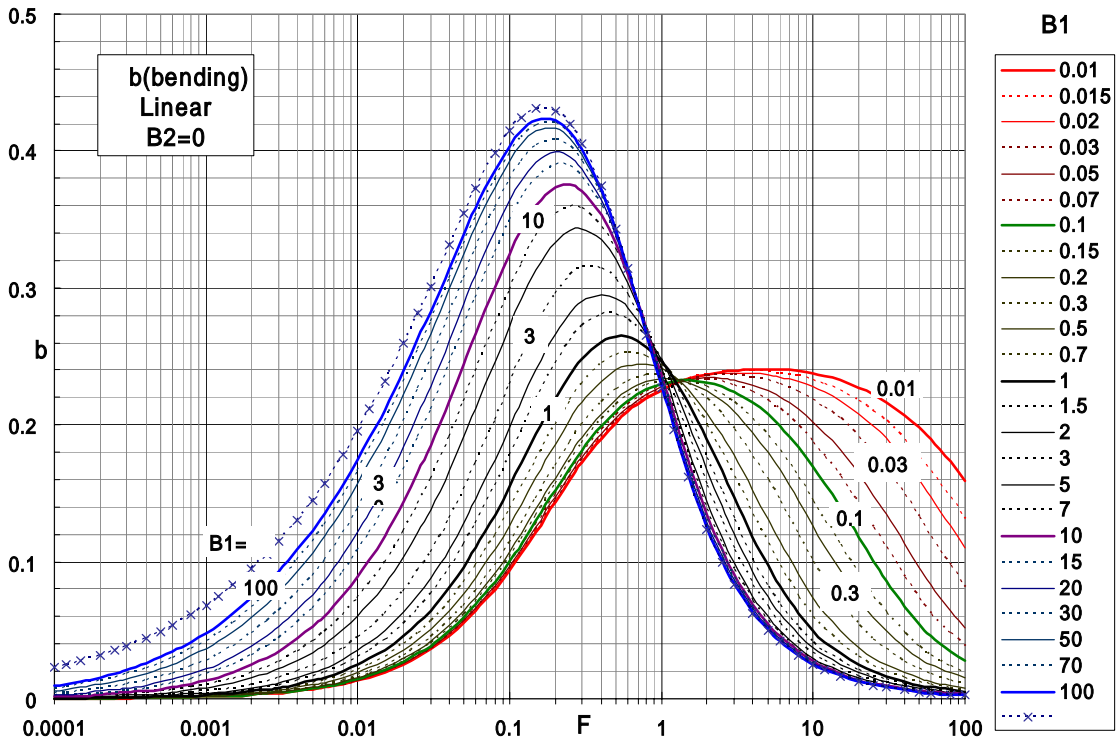


Fig.2.6.1(4) 熱曲げ応力 b (線形温度変化、 $B_2=0$)

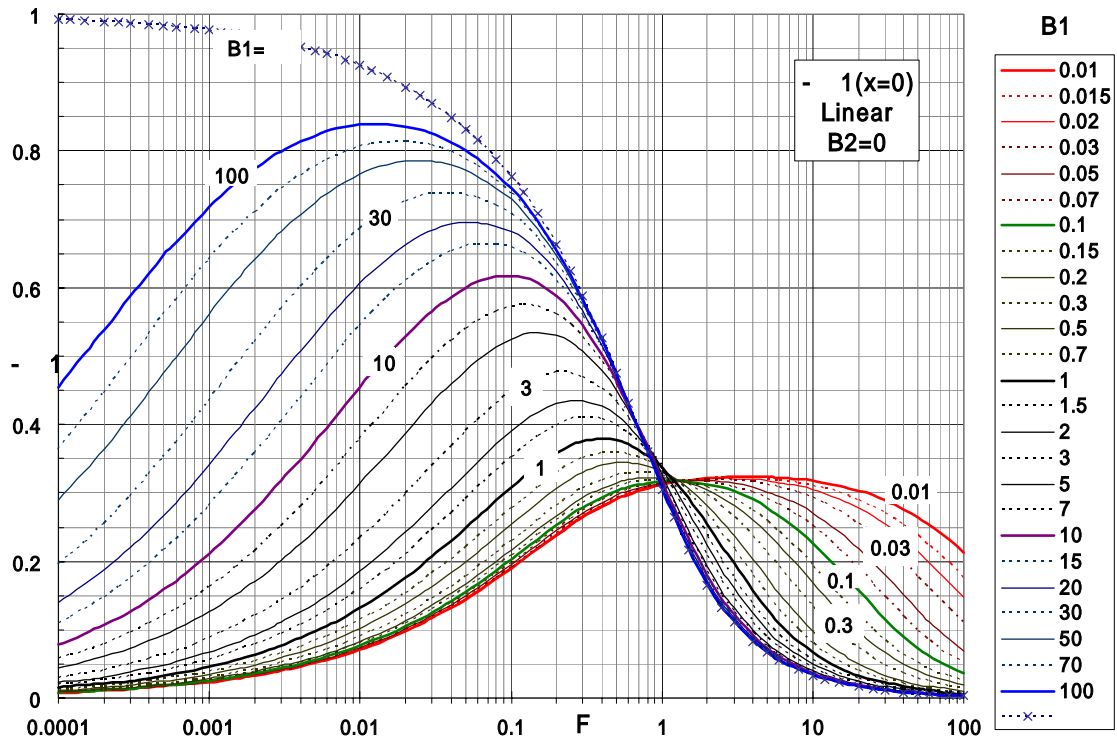


Fig.2.6.1(5) 基準面の熱応力 1 (線形温度変化、 $B_2=0$)

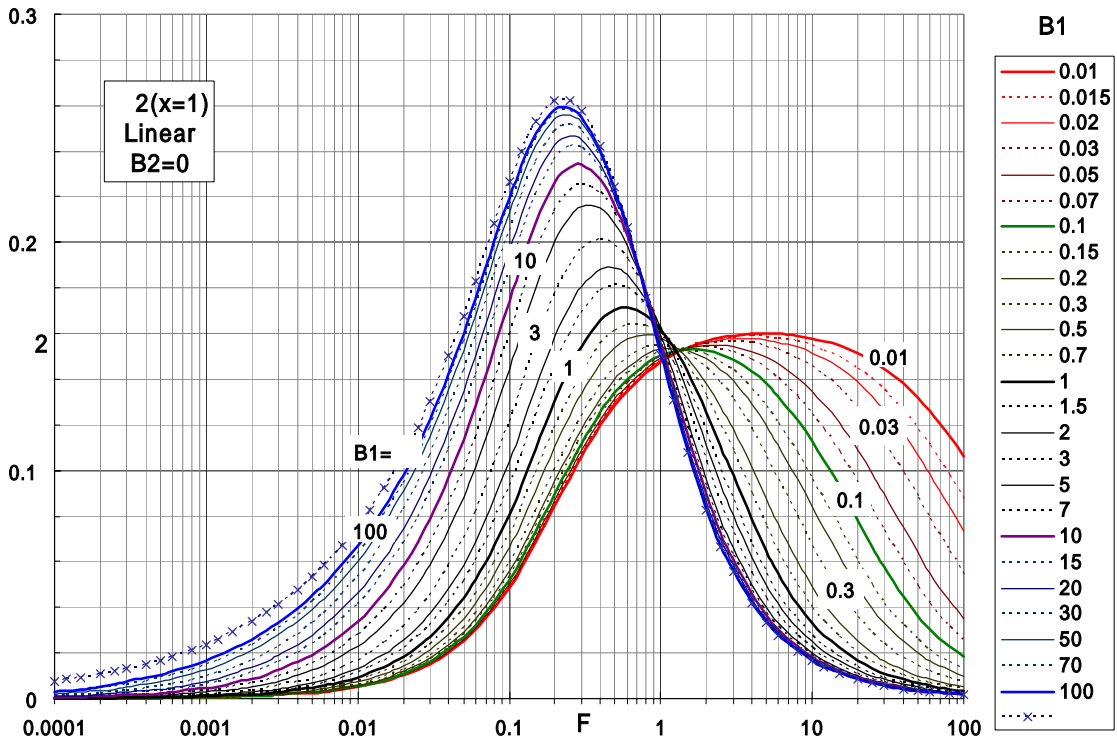


Fig.2.6.1(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2=0$)

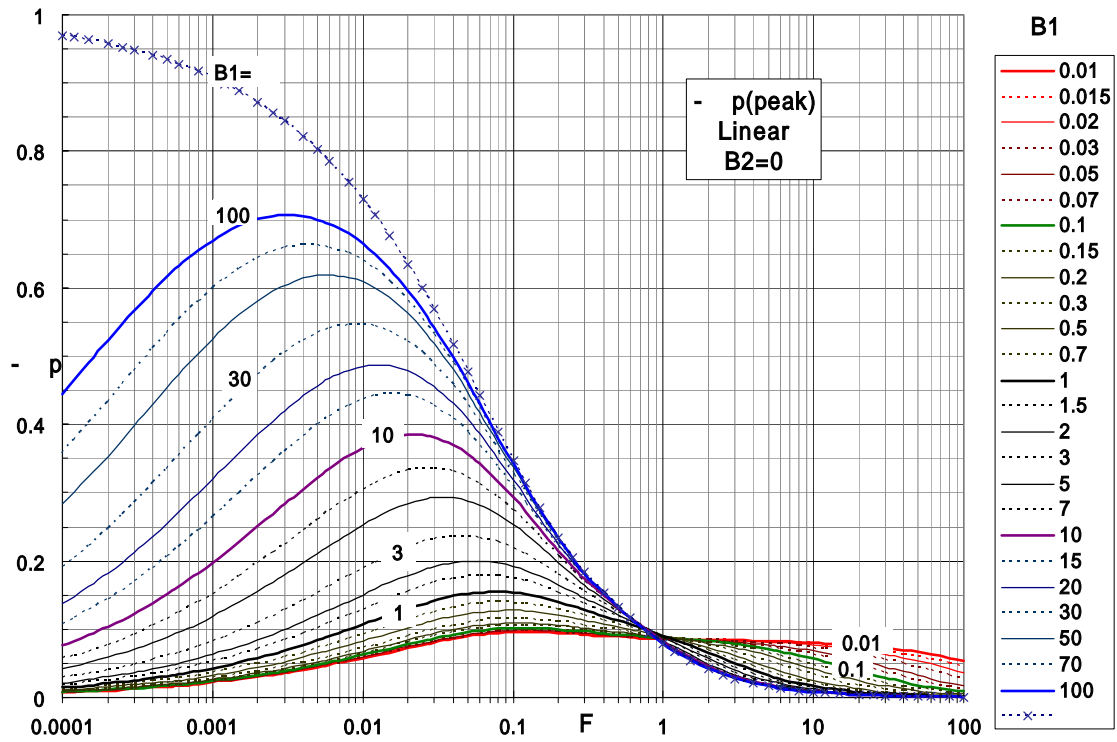


Fig.2.6.1(7) 基準面の熱ピーク応力 σ_p (線形温度変化、 $B_2=0$)

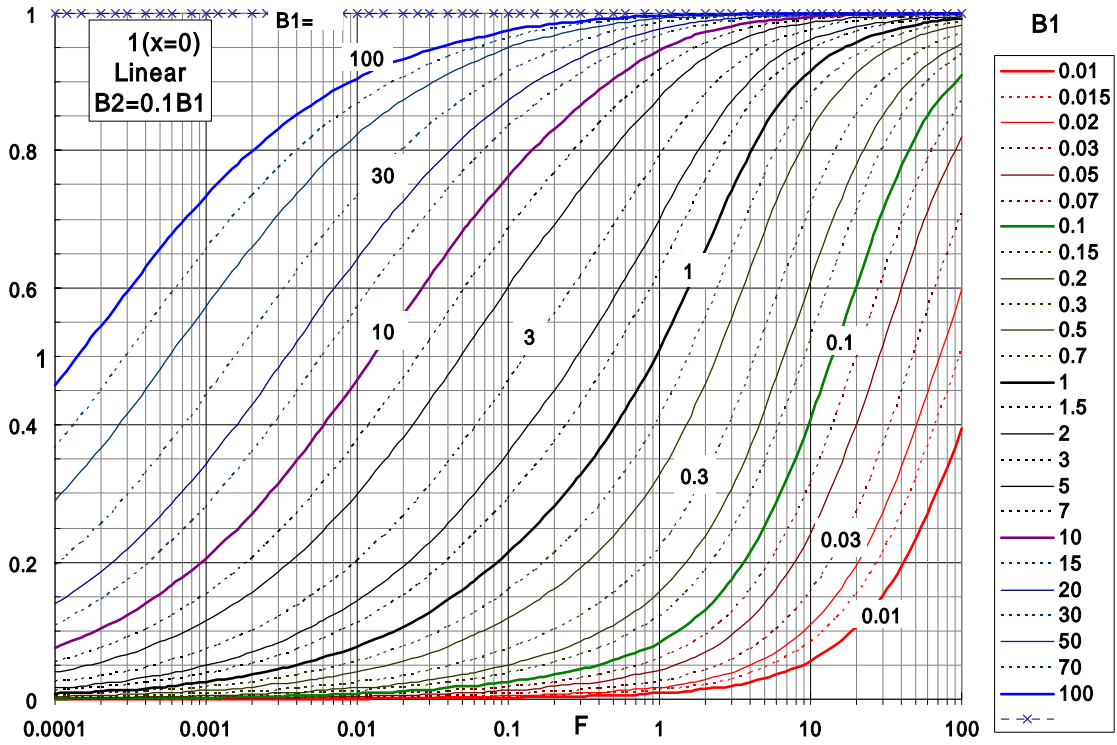


Fig.2.6.2(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2=0.1B_1$)

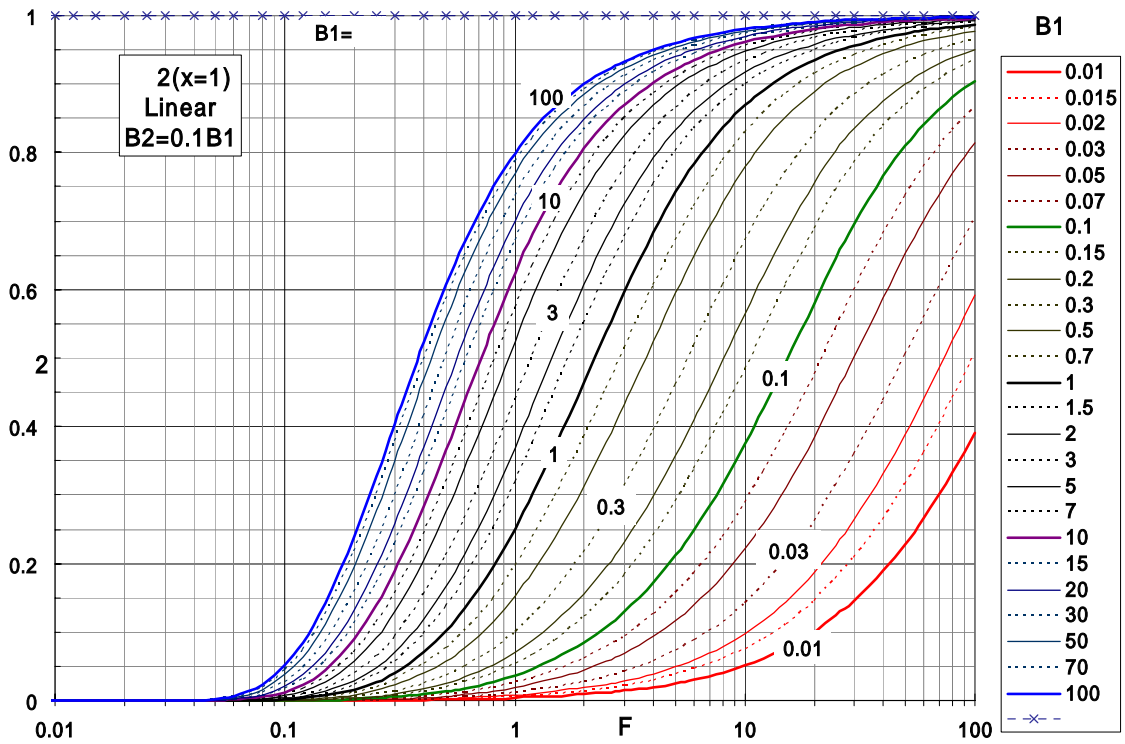


Fig.2.6.2(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2=0.1B_1$)

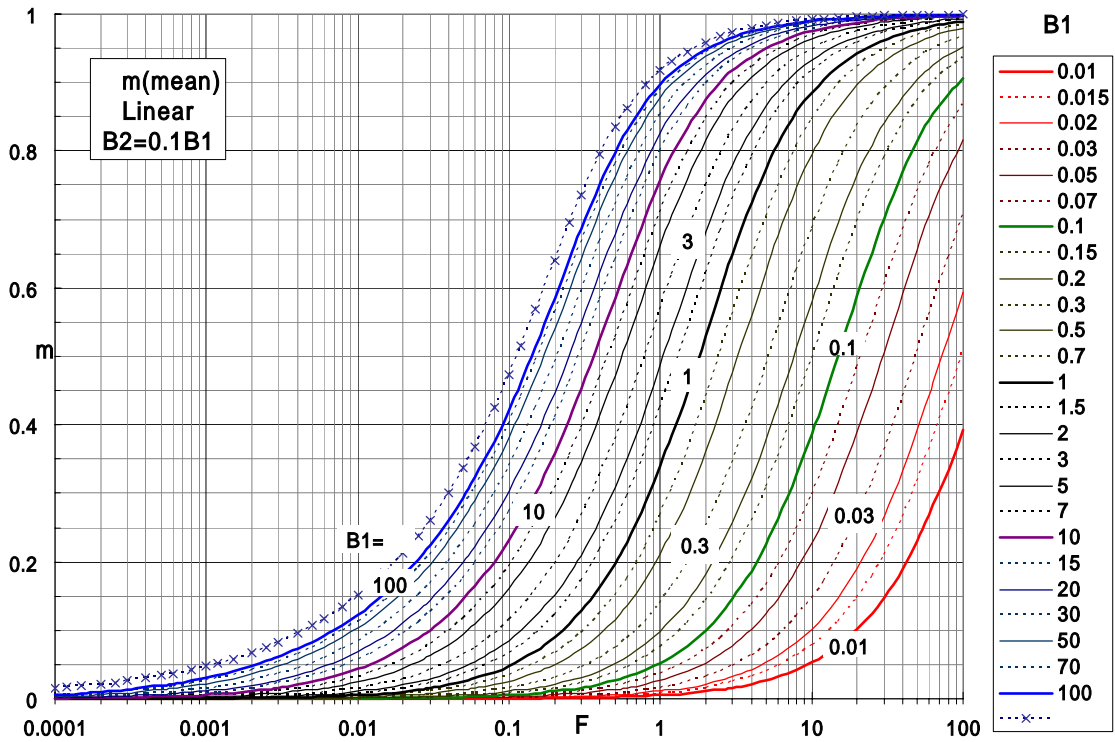


Fig.2.6.2(3) 板厚平均温度 m (線形温度変化、 $B_2=0.1B_1$)

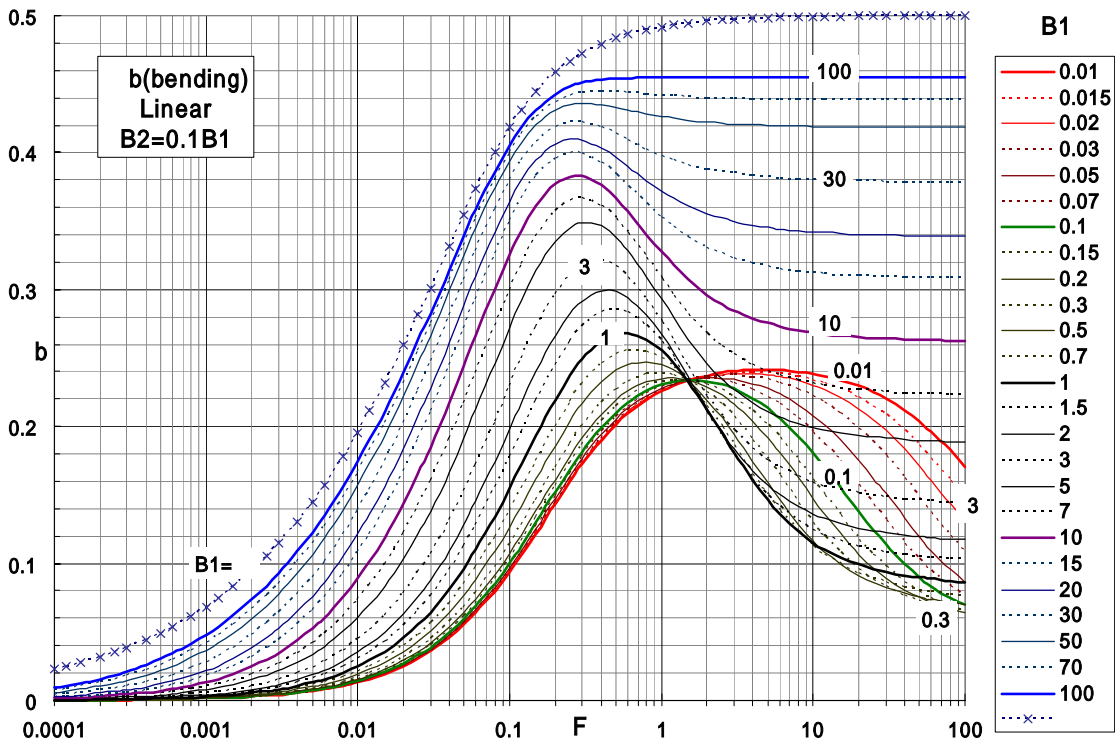


Fig.2.6.2(4) 熱曲げ応力 b (線形温度変化、 $B_2=0.1B_1$)

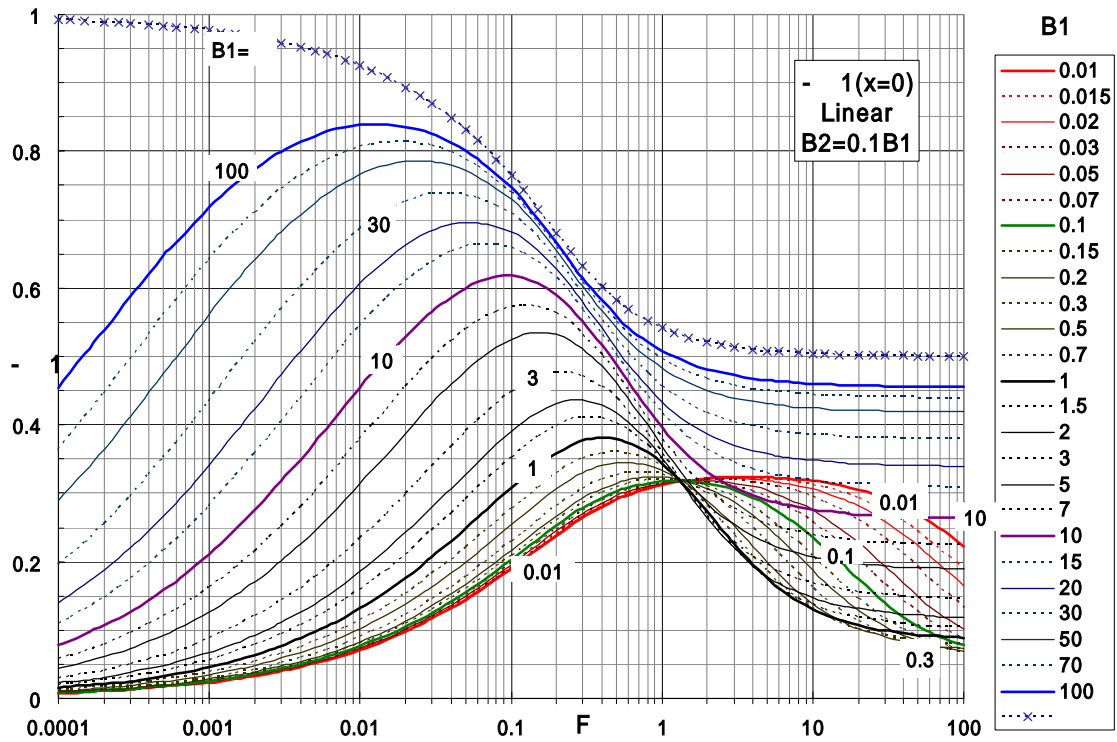


Fig.2.6.2(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2=0.1B_1$)

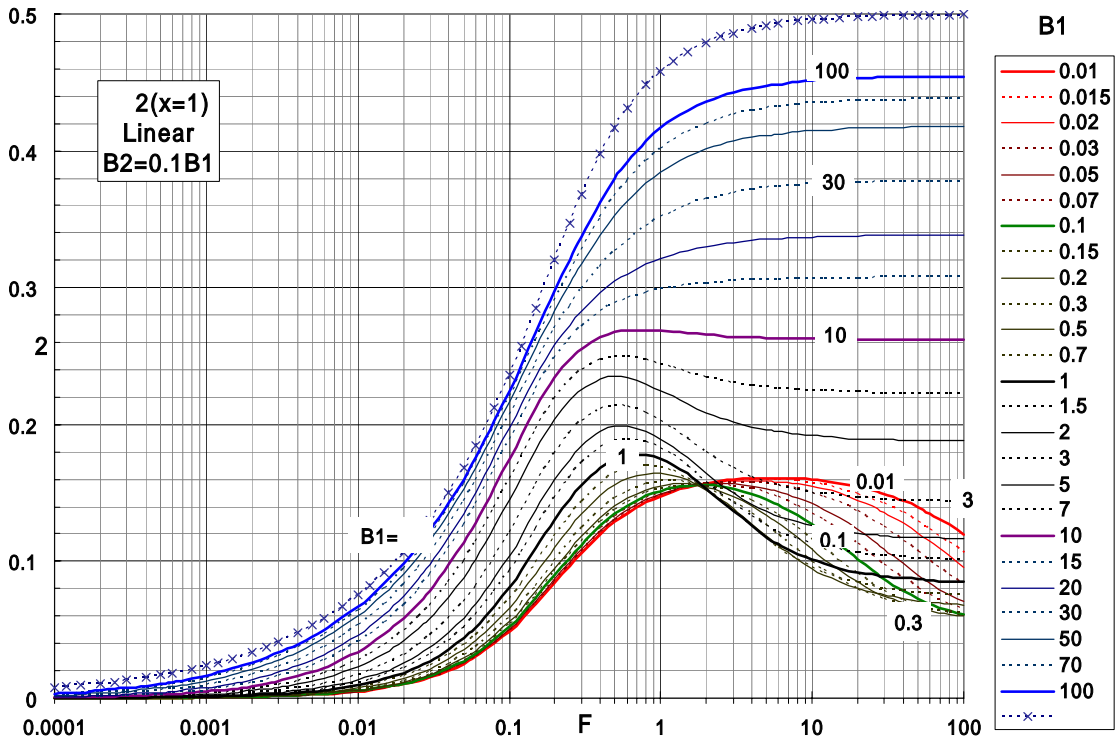


Fig.2.6.2(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2=0.1B_1$)

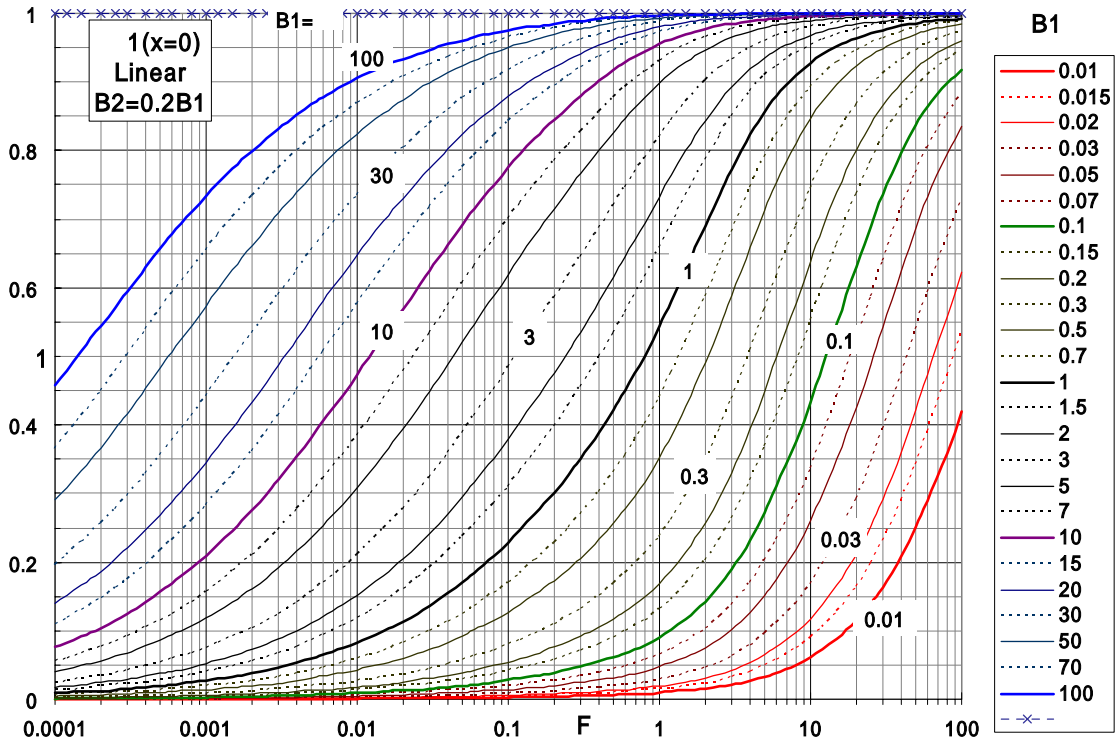


Fig.2.6.3(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2=0.2B_1$)

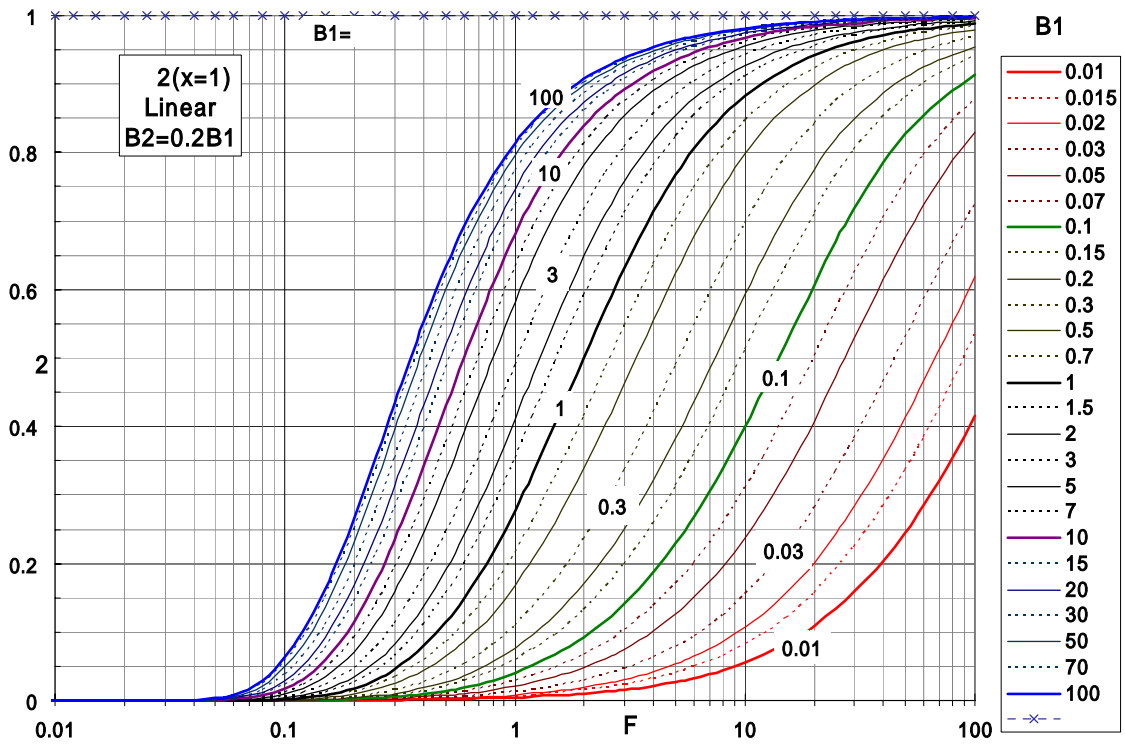


Fig.2.6.3(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2=0.2B_1$)

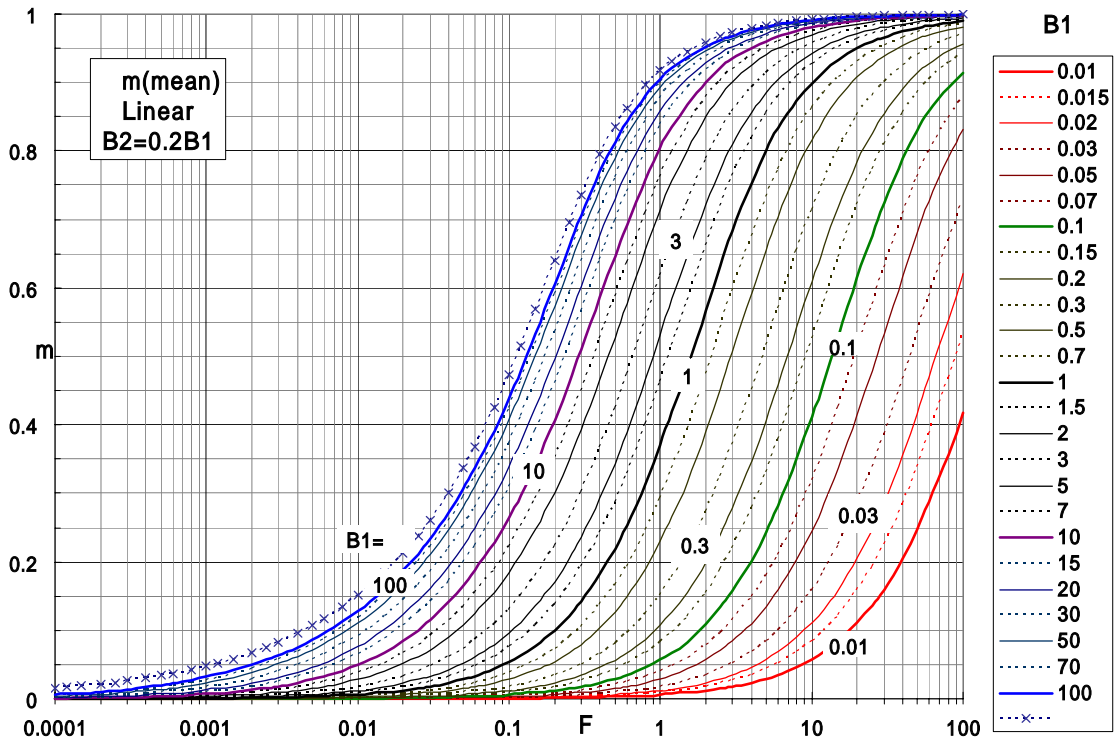


Fig.2.6.3(3) 板厚平均温度 m (線形温度変化、 $B_2=0.2B_1$)

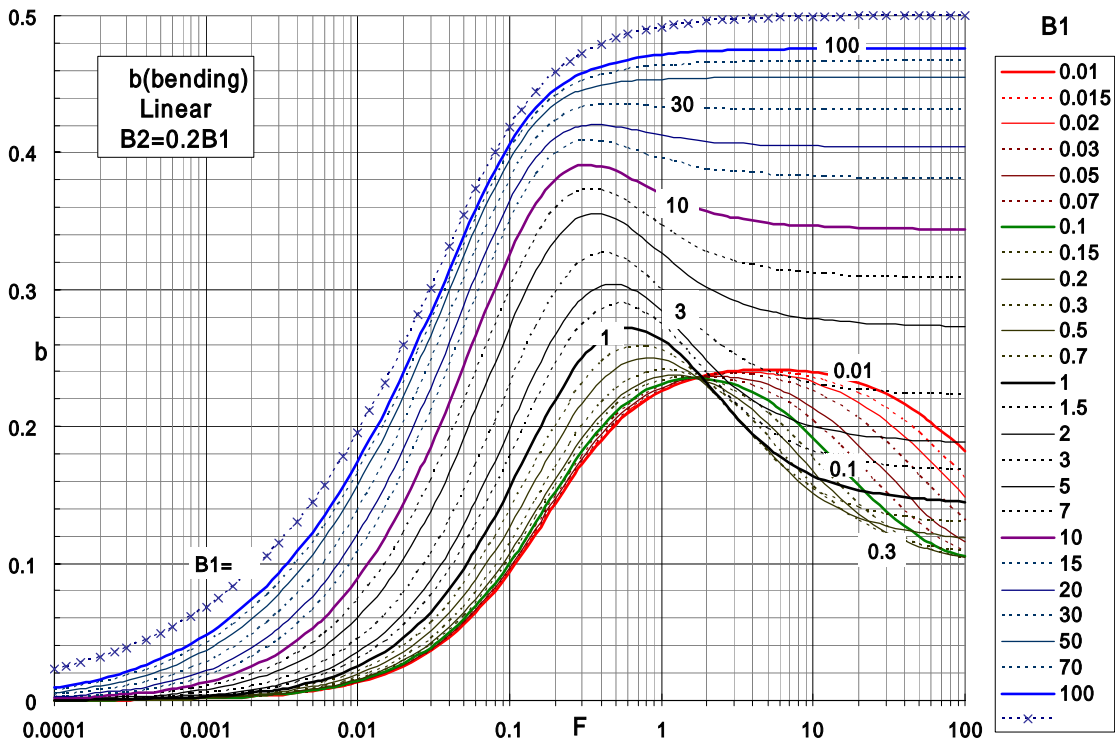


Fig.2.6.3(4) 熱曲げ応力 b (線形温度変化、 $B_2=0.2B_1$)

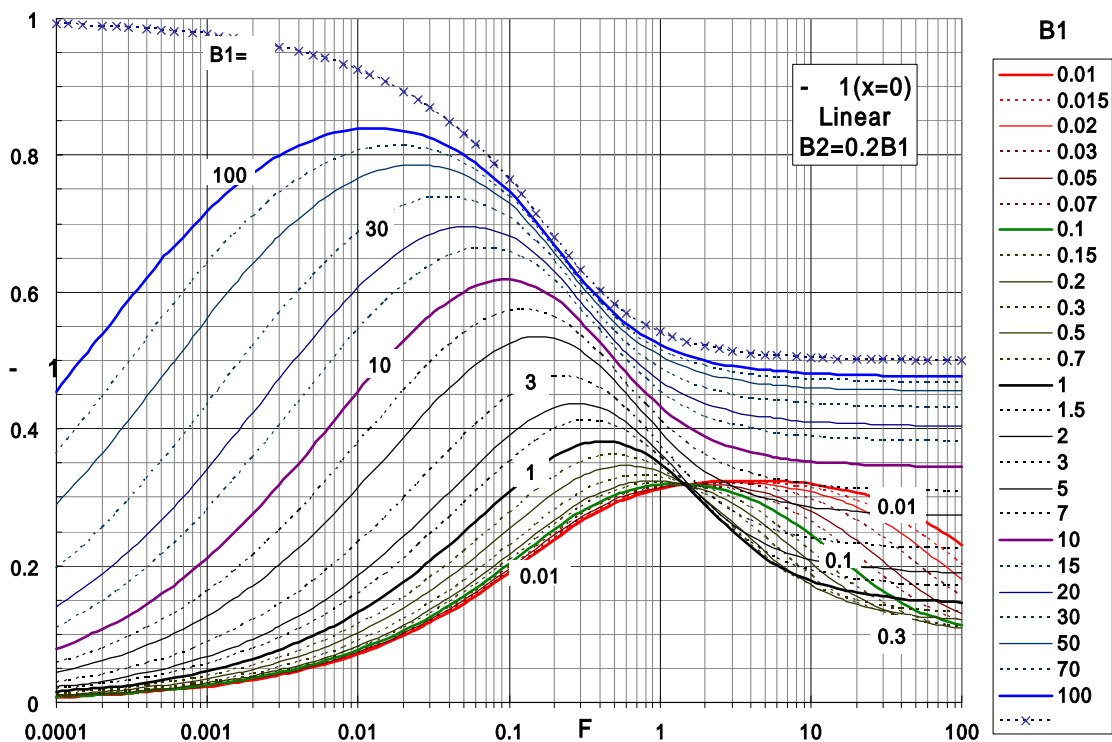


Fig.2.6.3(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2=0.2B_1$)

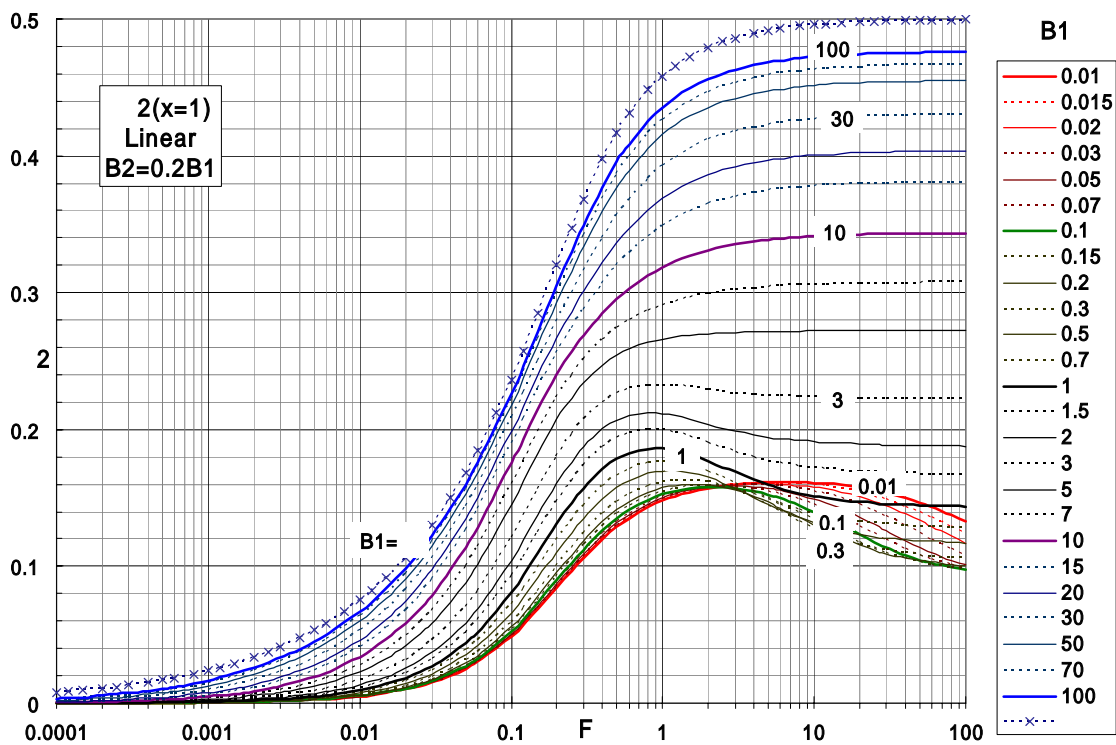


Fig.2.6.3(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2=0.2B_1$)

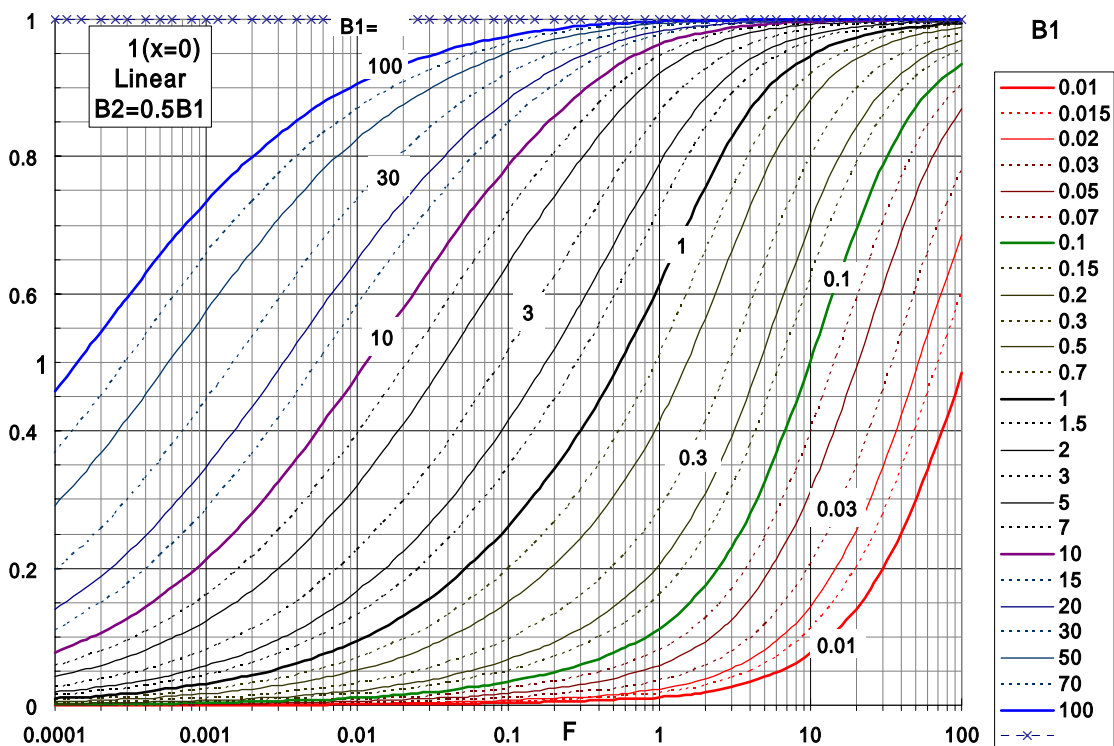


Fig.2.6.4(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2=0.5B_1$)

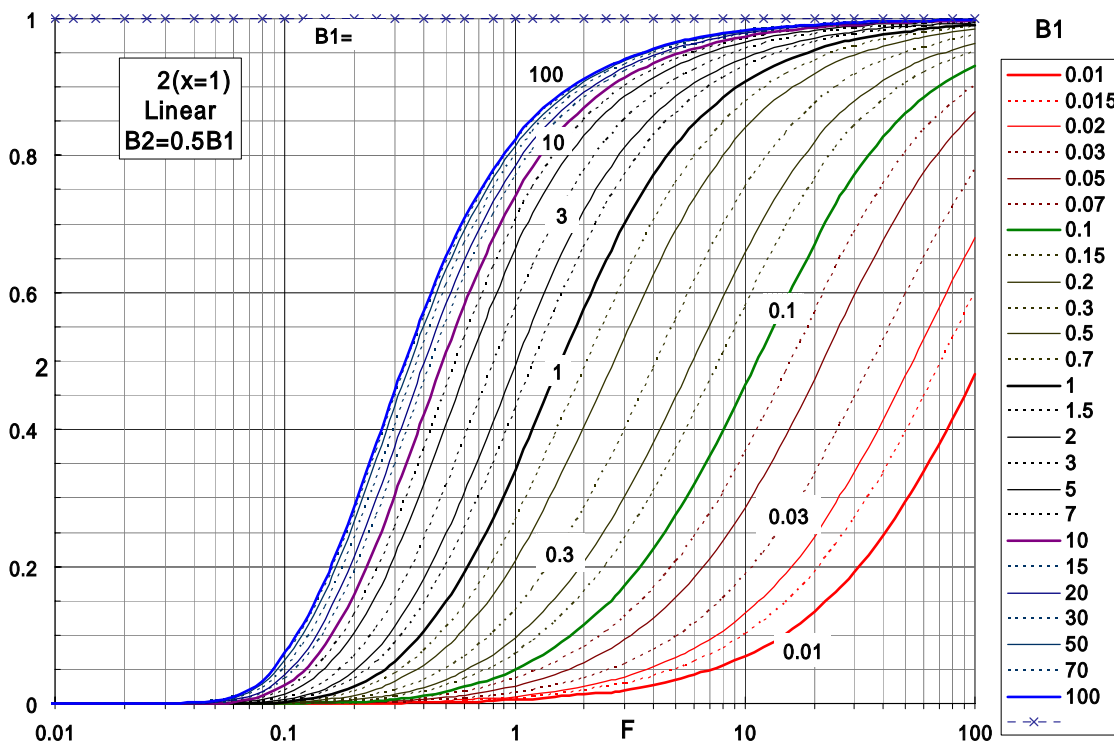


Fig.2.6.4(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2=0.5B_1$)

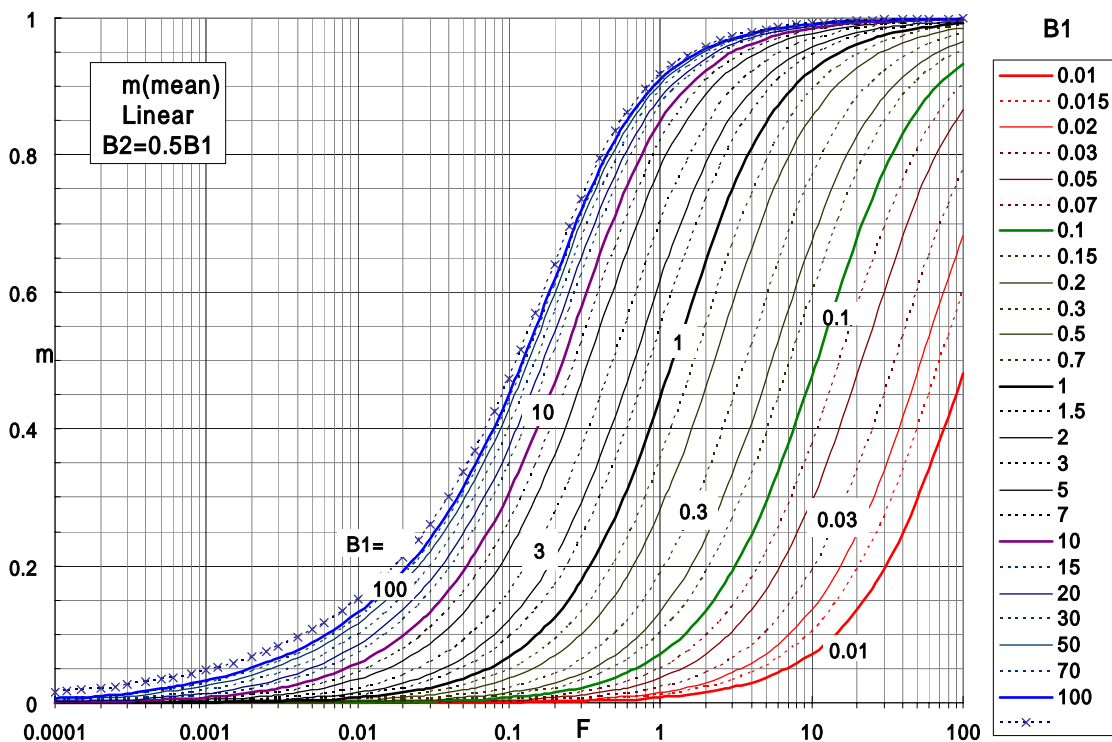


Fig.2.6.4(3) 板厚平均温度 m (線形温度変化、 $B_2=0.5B_1$)

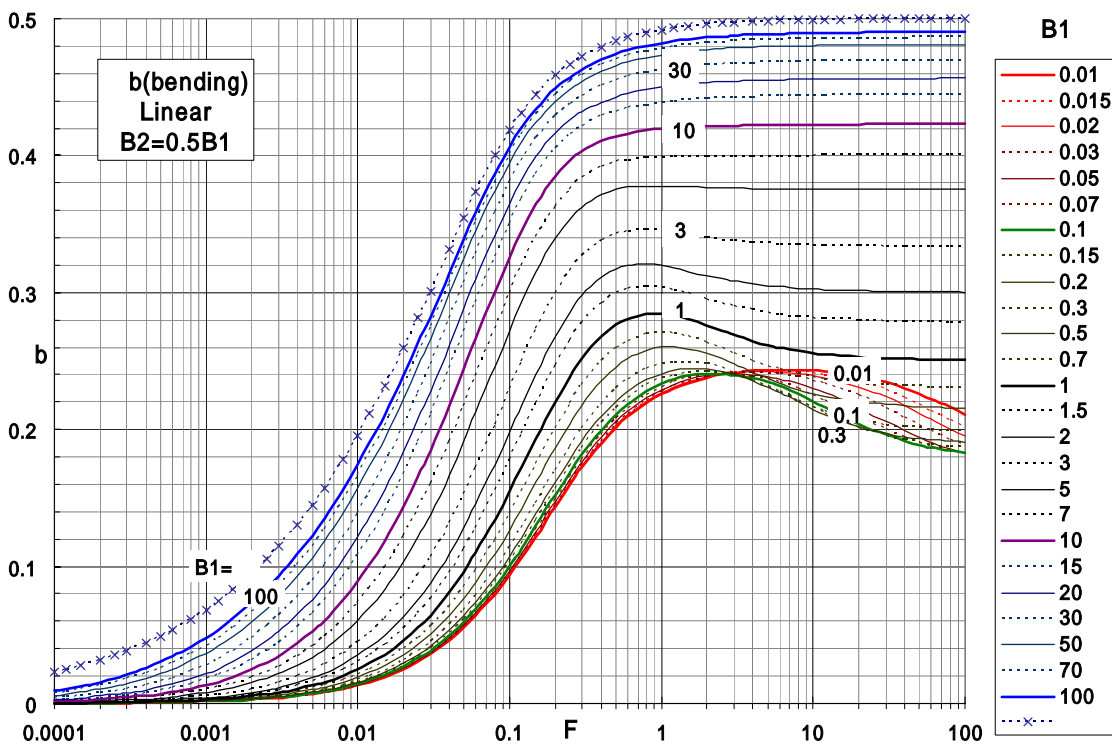


Fig.2.6.4(4) 熱曲げ応力 b (線形温度変化、 $B_2=0.5B_1$)

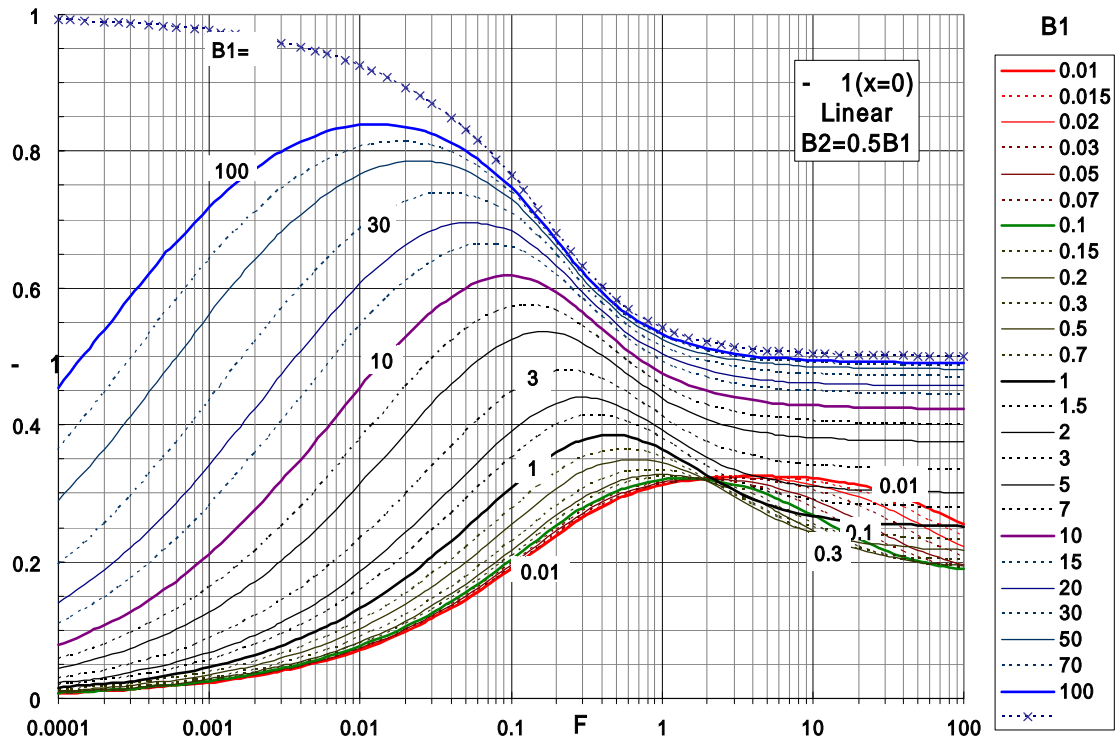


Fig.2.6.4(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2=0.5B_1$)

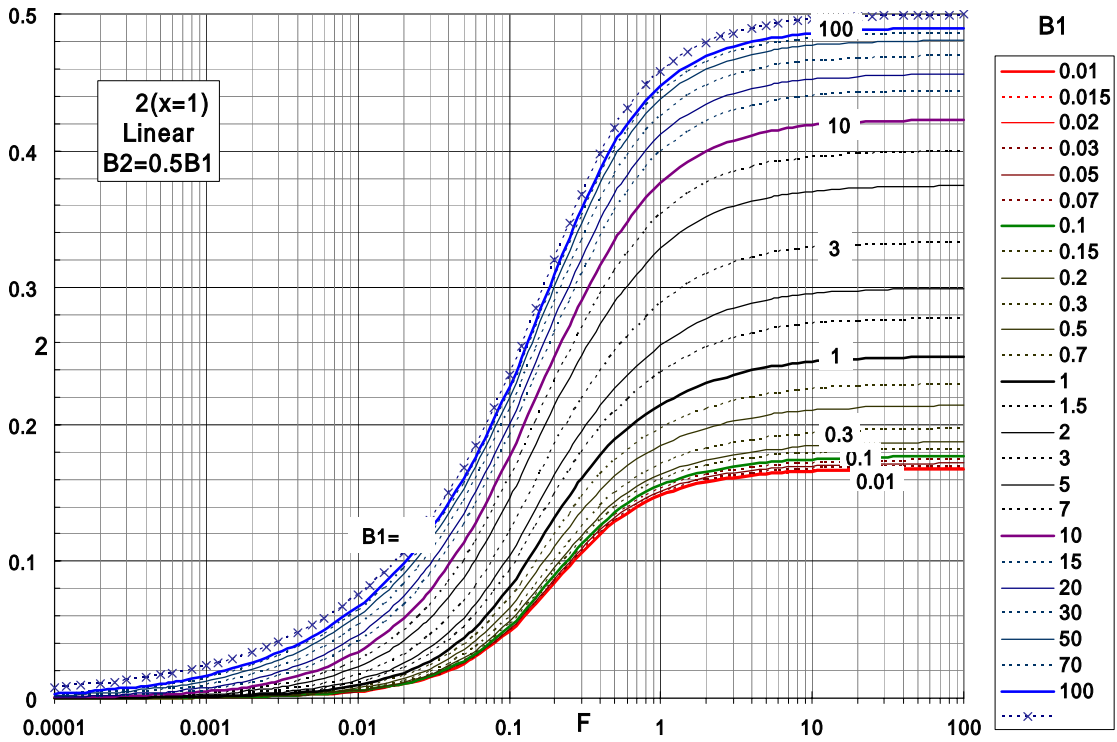


Fig.2.6.4(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2=0.5B_1$)

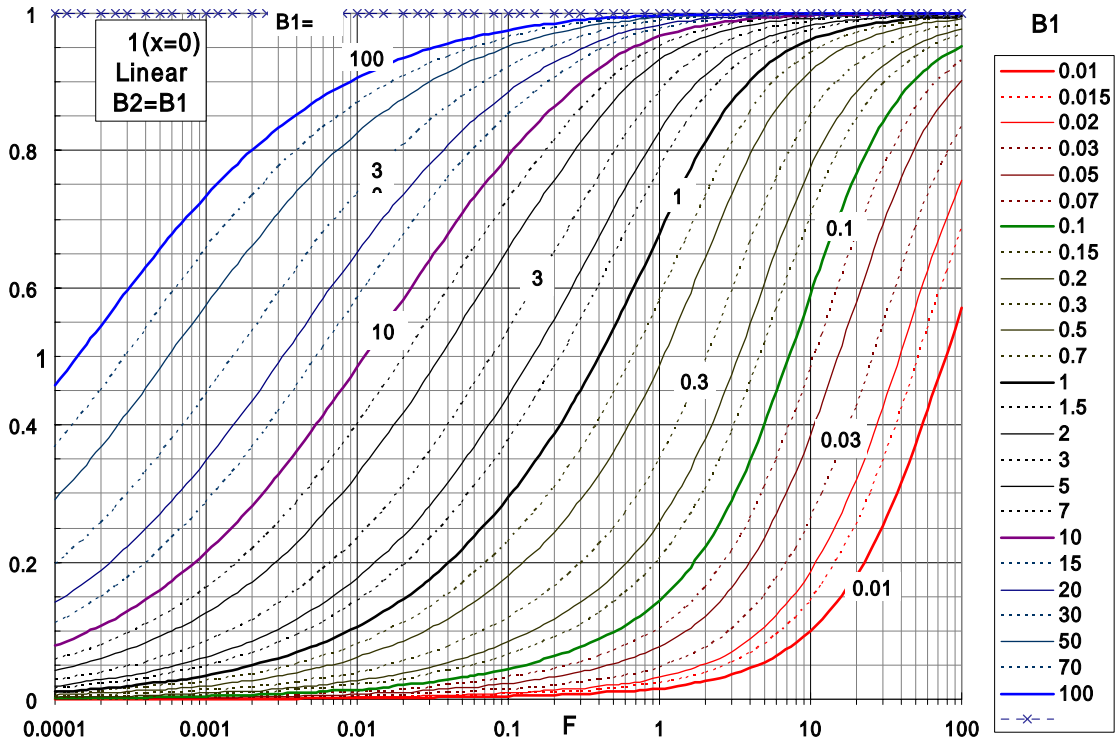


Fig.2.6.5(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2=B_1$)

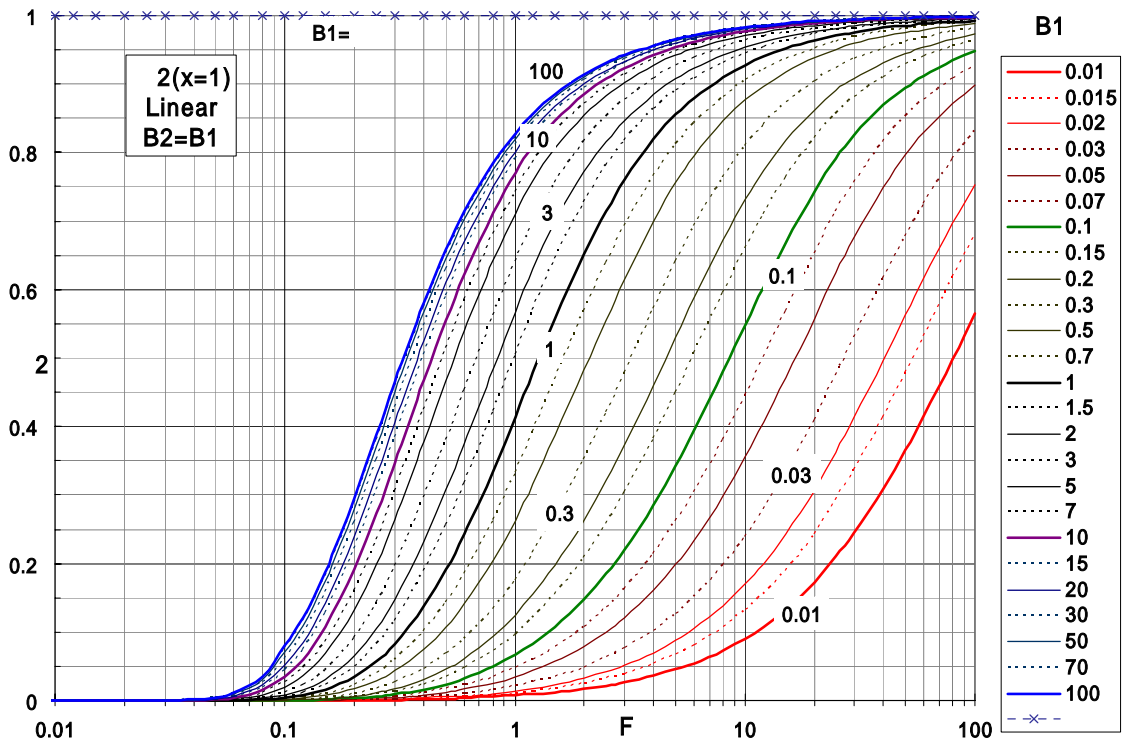


Fig.2.6.5(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2=B_1$)

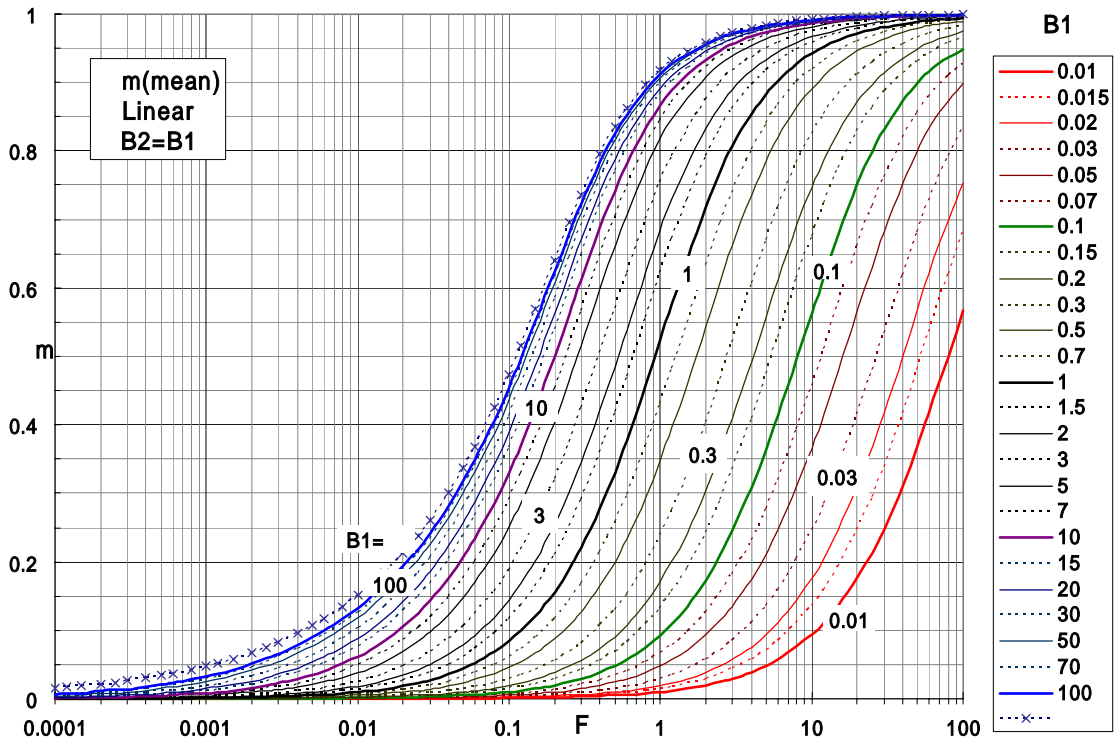


Fig.2.6.5(3) 板厚平均温度 m (線形温度变化、 $B_2=B_1$)

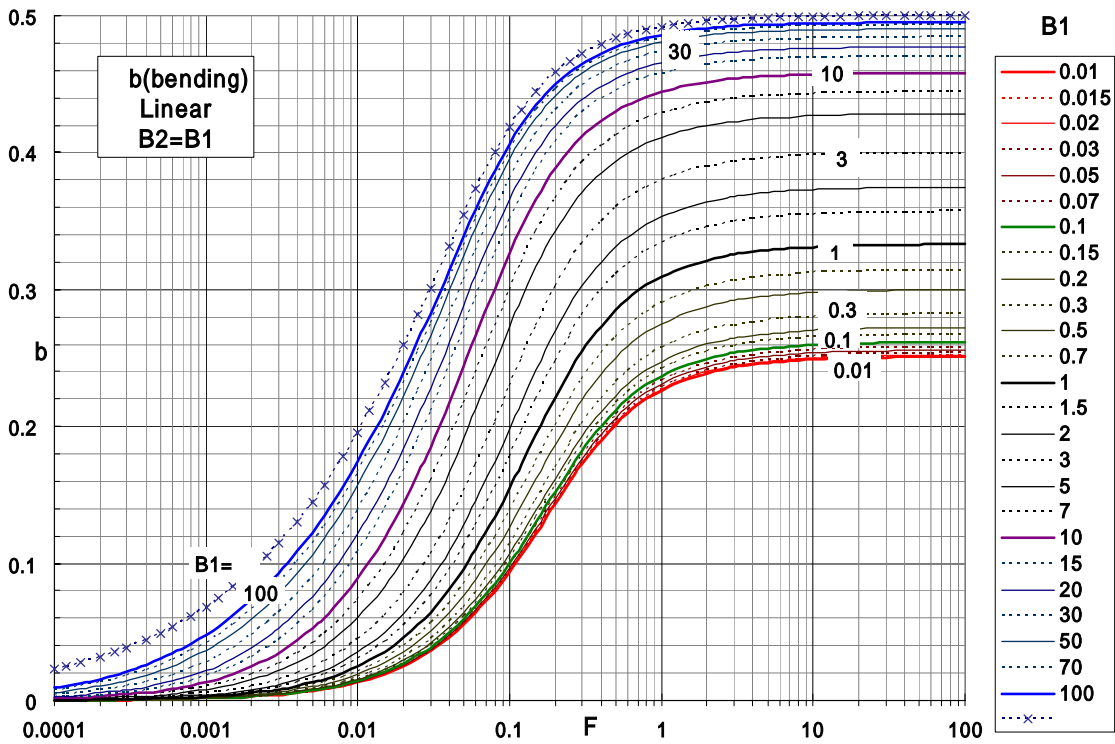


Fig.2.6.5(4) 熱曲げ応力 b (線形温度变化、 $B_2=B_1$)

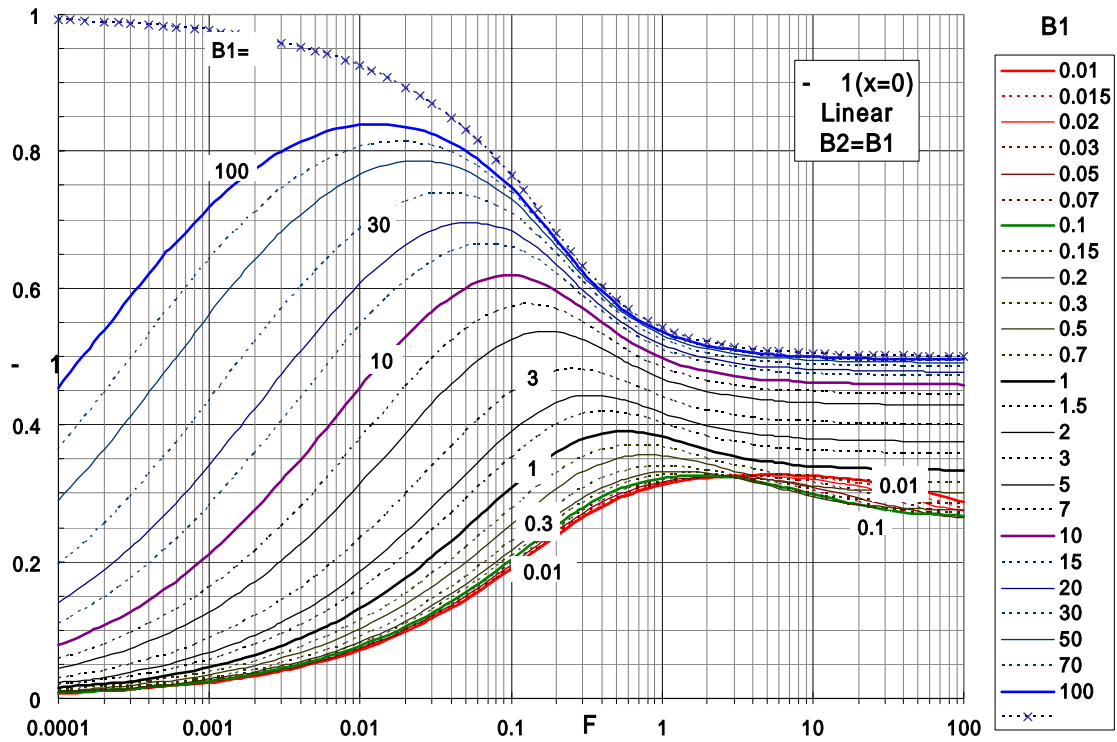


Fig.2.6.5(5) 基準面の熱応力 q_1 (線形温度変化、 $B_2=B_1$)

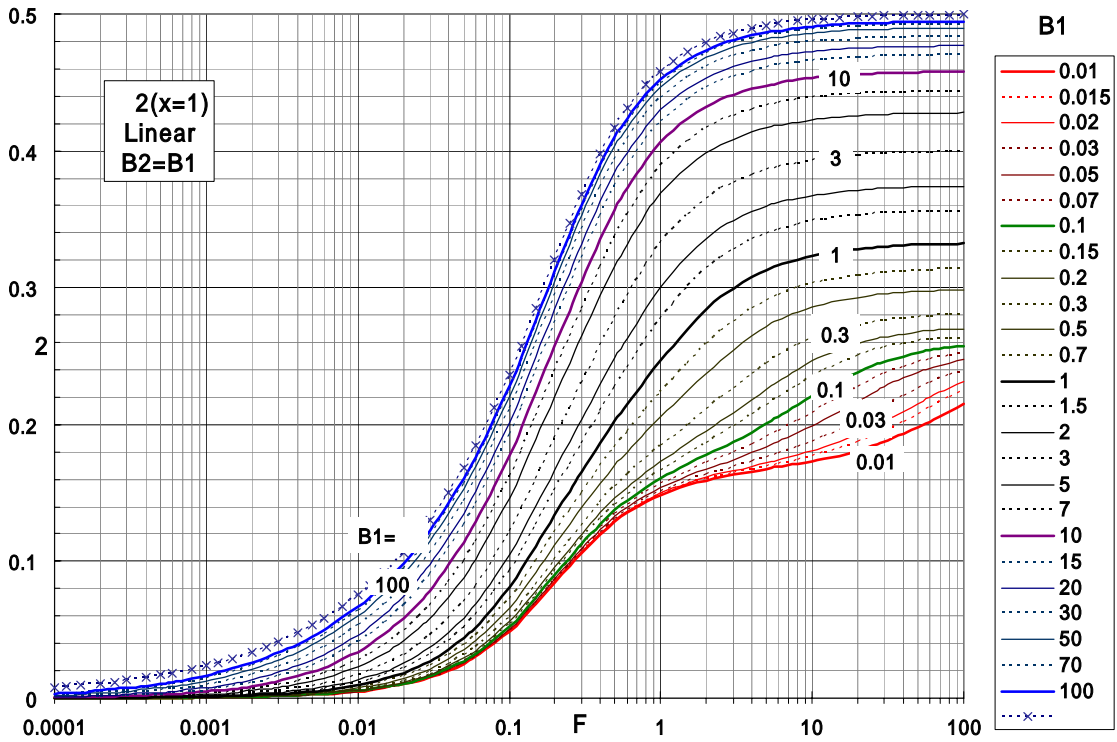


Fig.2.6.5(6) 背面の熱応力 q_2 (線形温度変化、 $B_2=B_1$)

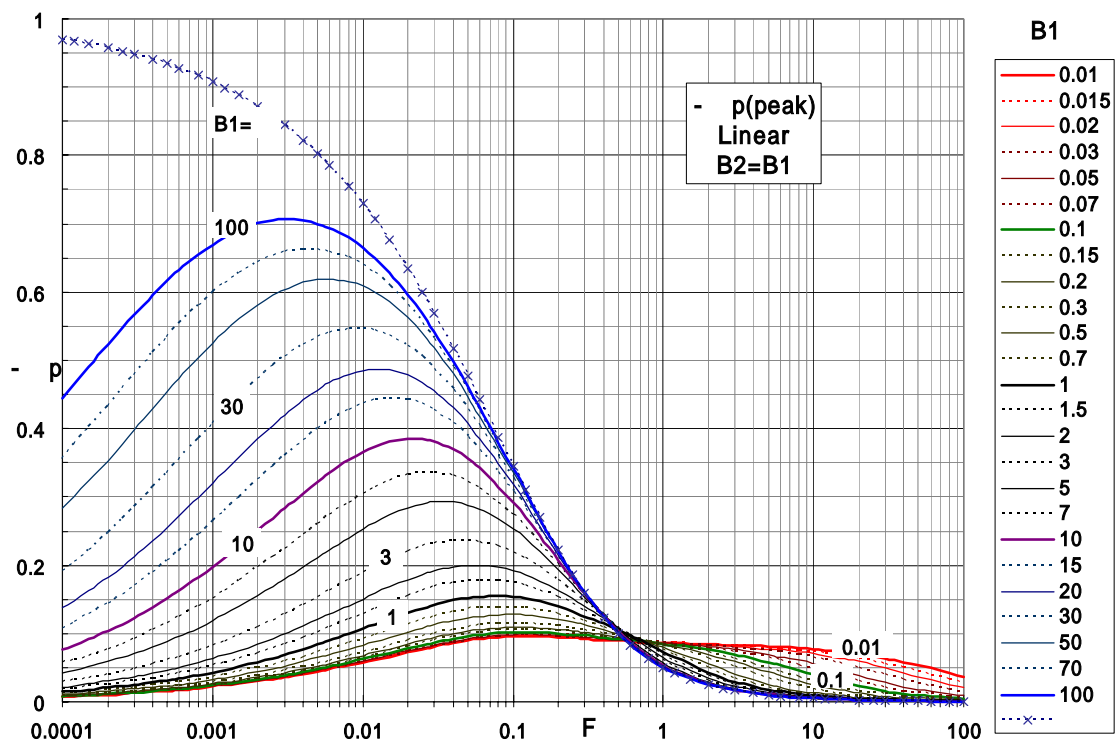


Fig.2.6.5(7) 基準面の熱ピーク応力 p (線形温度変化、 $B_2=B_1$)

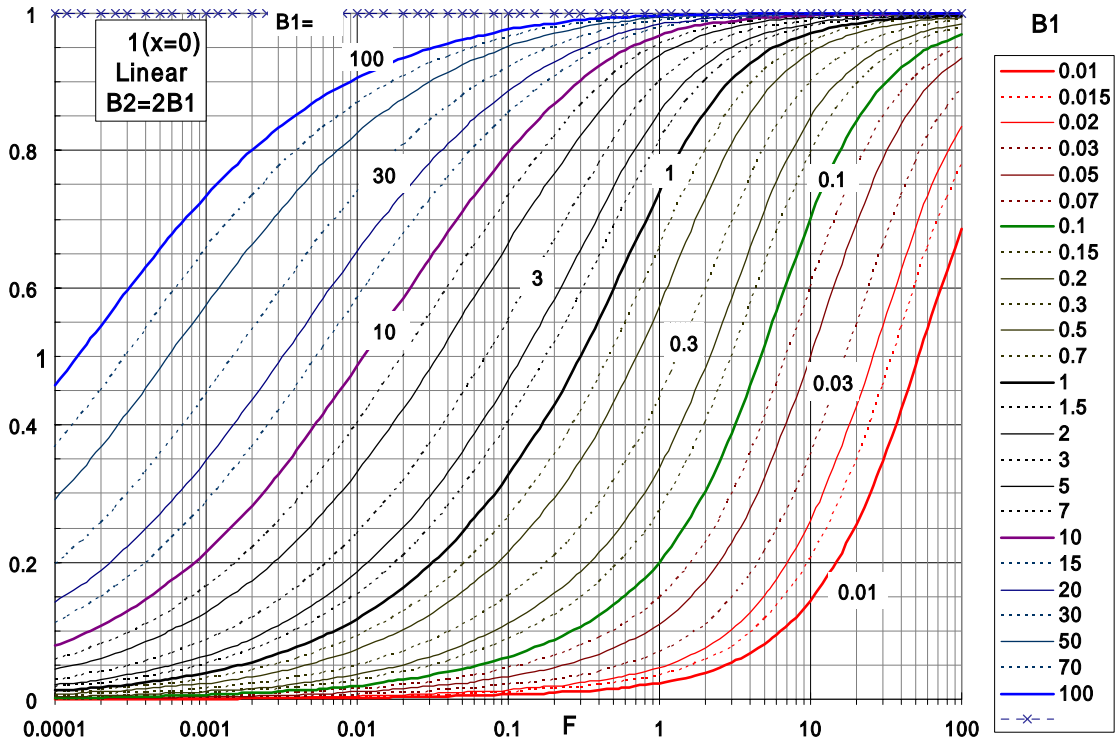


Fig.2.6.6(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2=2B_1$)

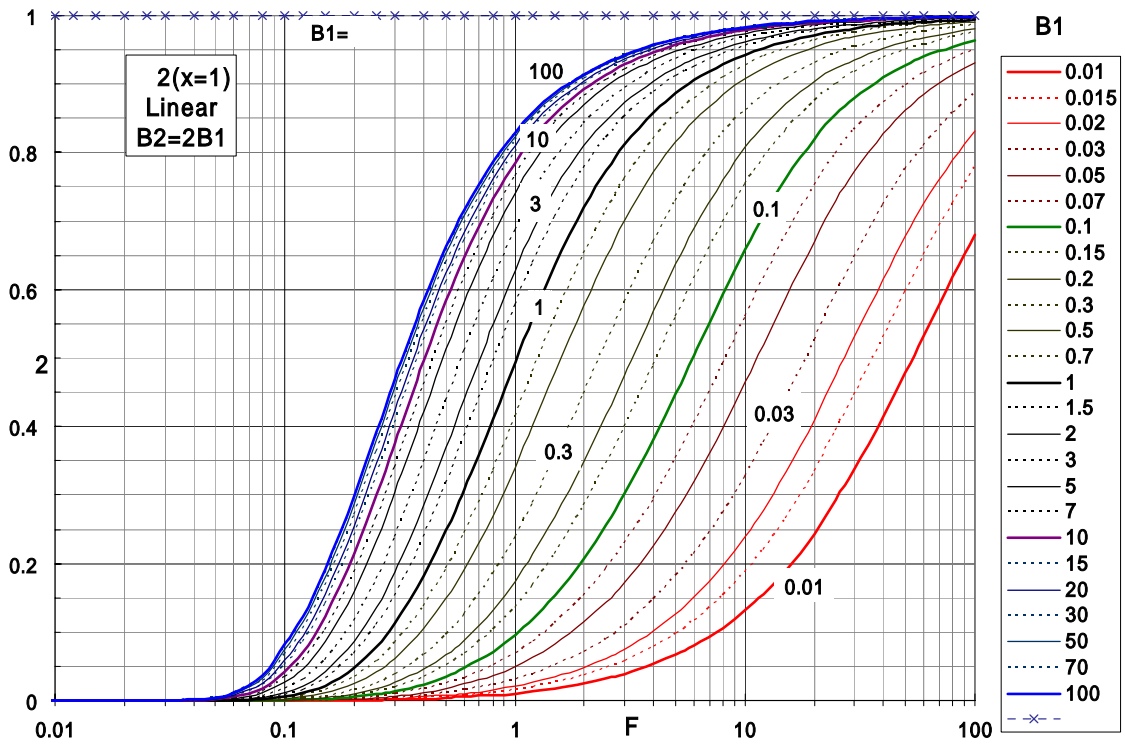


Fig.2.6.6(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2=2B_1$)

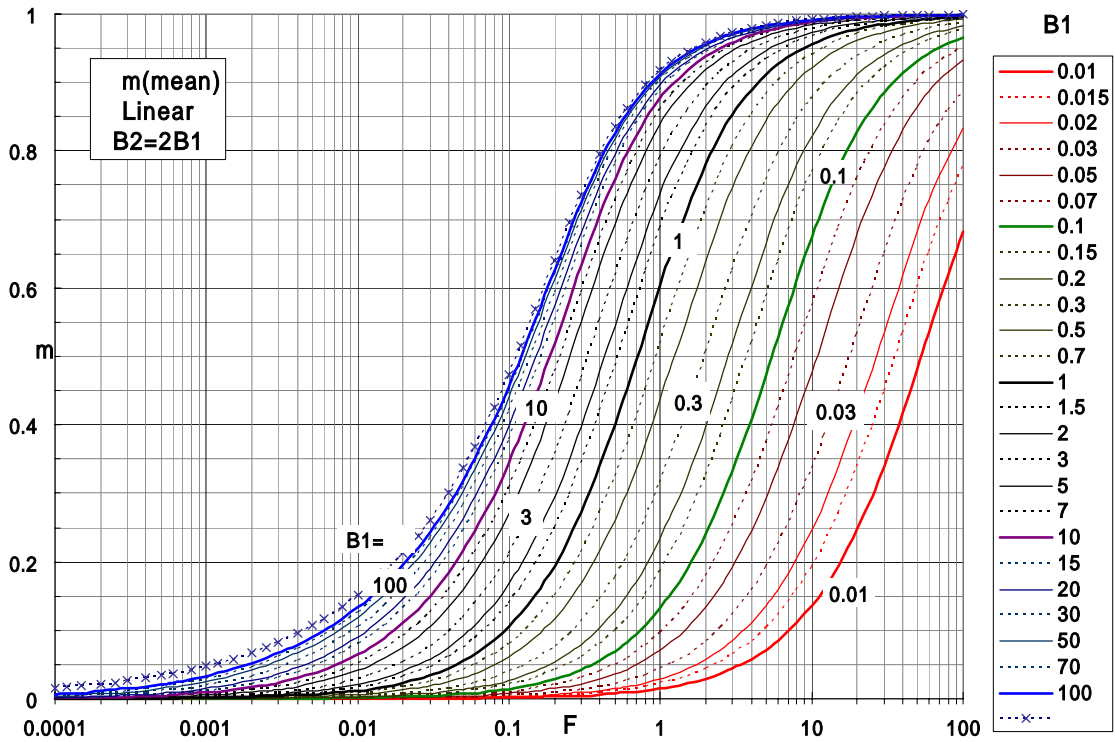


Fig.2.6.6(3) 板厚平均温度 m (線形温度变化、 $B_2=2B_1$)

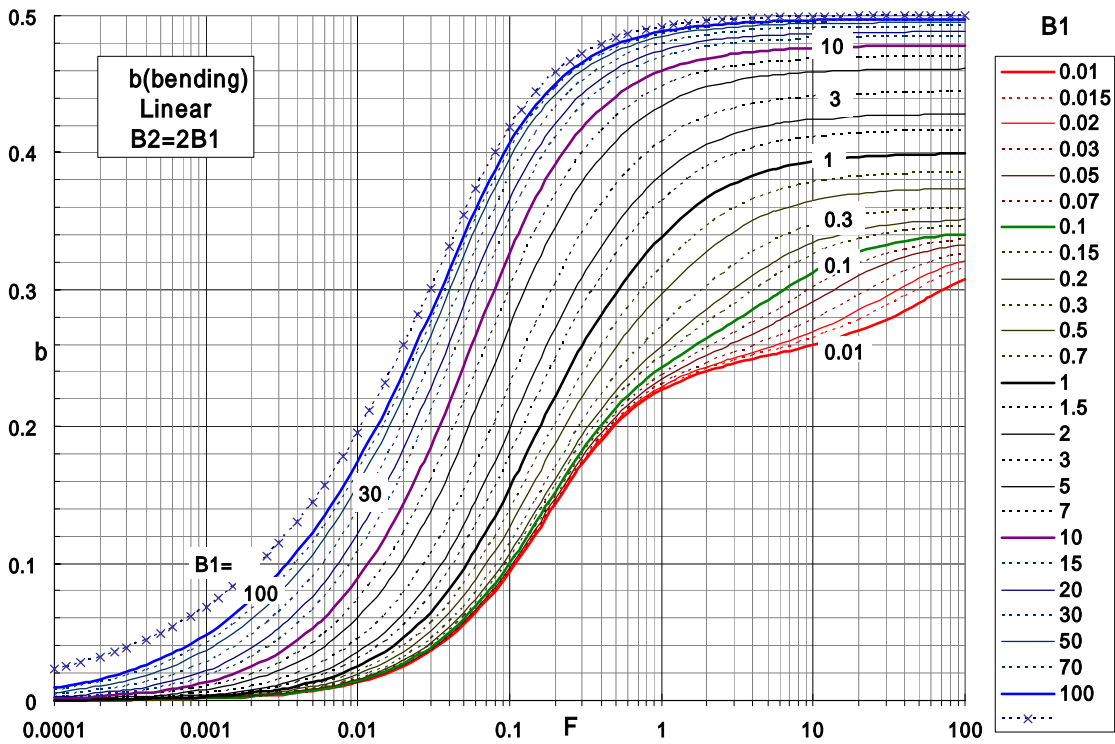


Fig.2.6.6(4) 熱曲げ応力 b (線形温度变化、 $B_2=2B_1$)

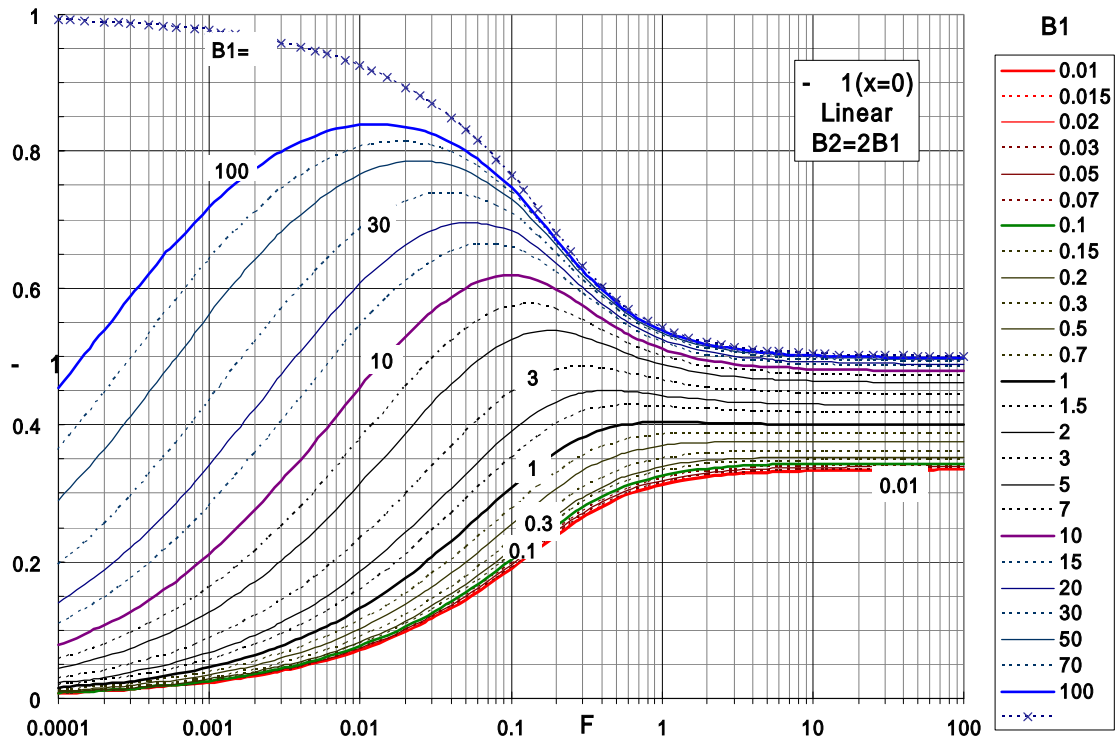


Fig.2.6.6(5) 基準面の熱応力 q_1 (線形温度変化、 $B_2=2B_1$)

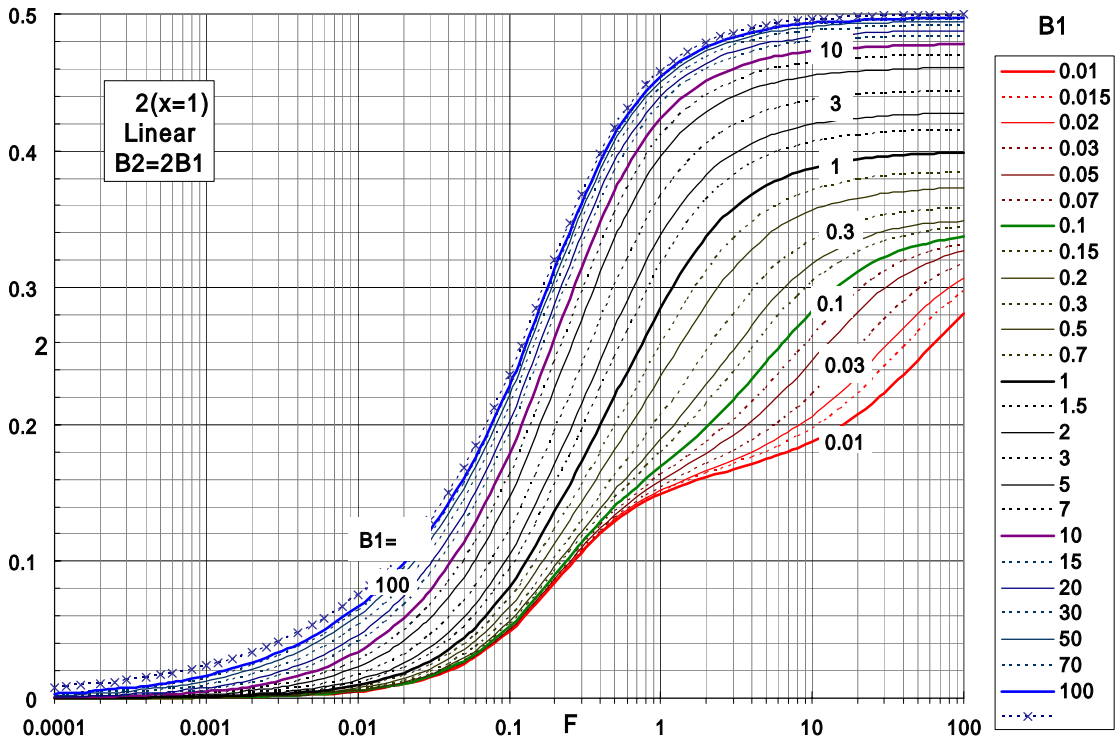


Fig.2.6.6(6) 背面の熱応力 q_2 (線形温度変化、 $B_2=2B_1$)

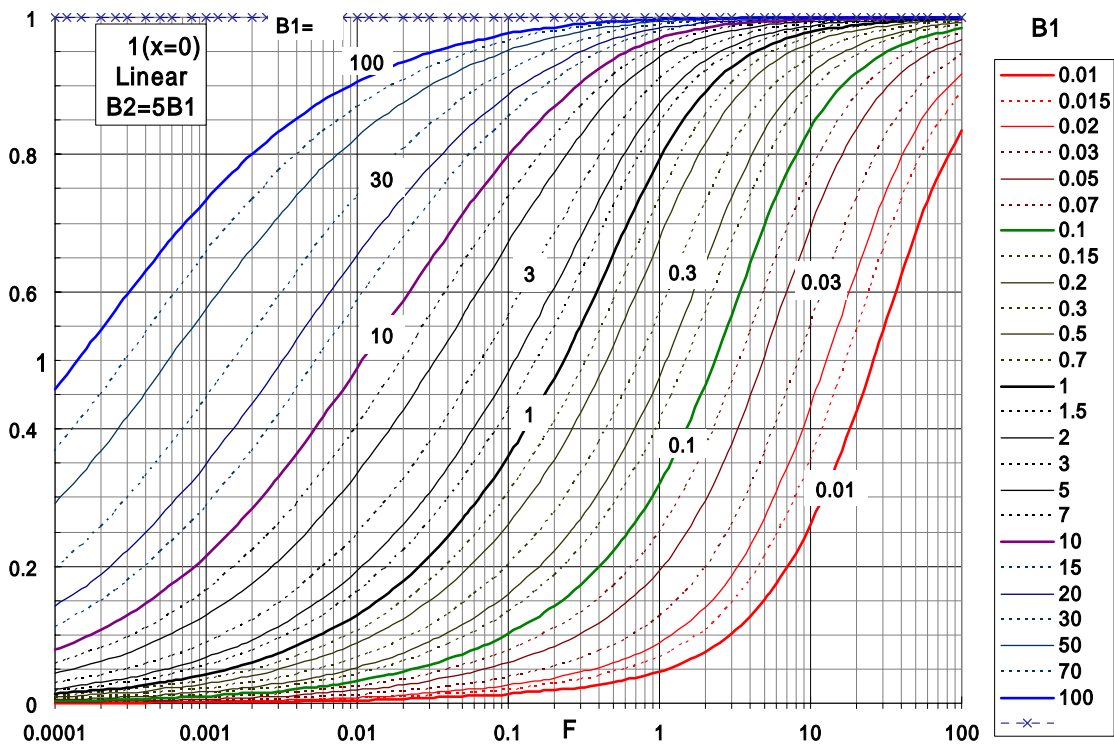


Fig.2.6.7(1) 基準面の温度 T_1 (線形温度変化、 $B_2=5B_1$)

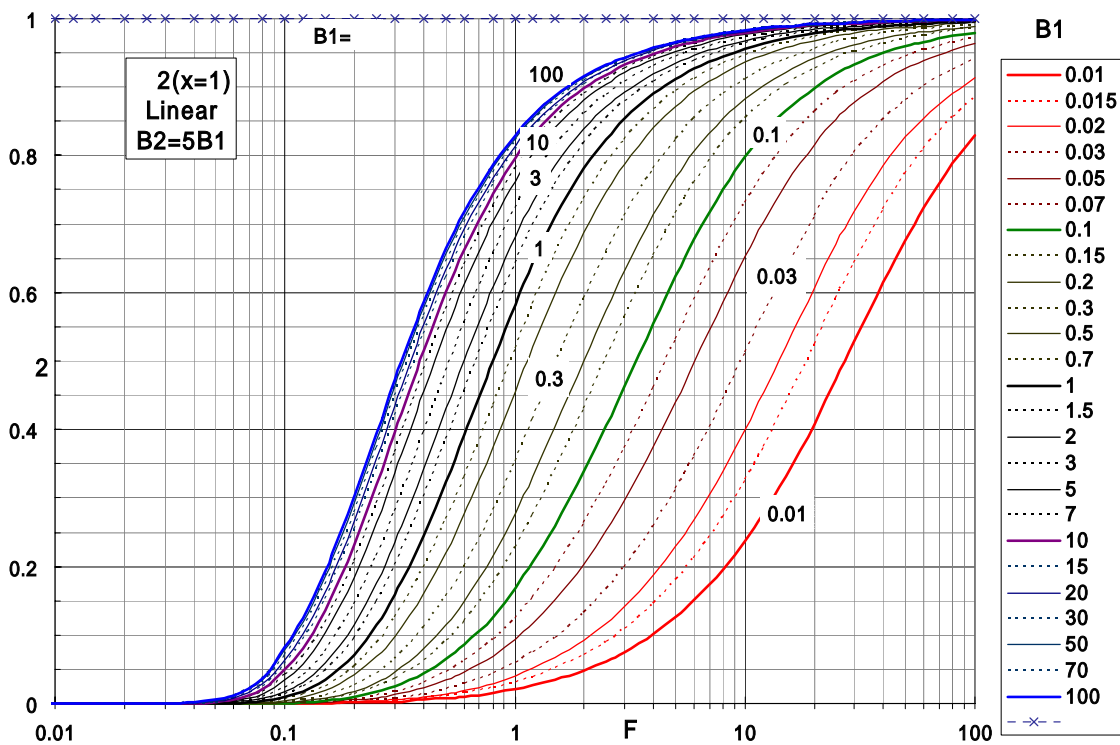


Fig.2.6.7(2) 背面の温度 T_2 (線形温度変化、 $B_2=5B_1$)

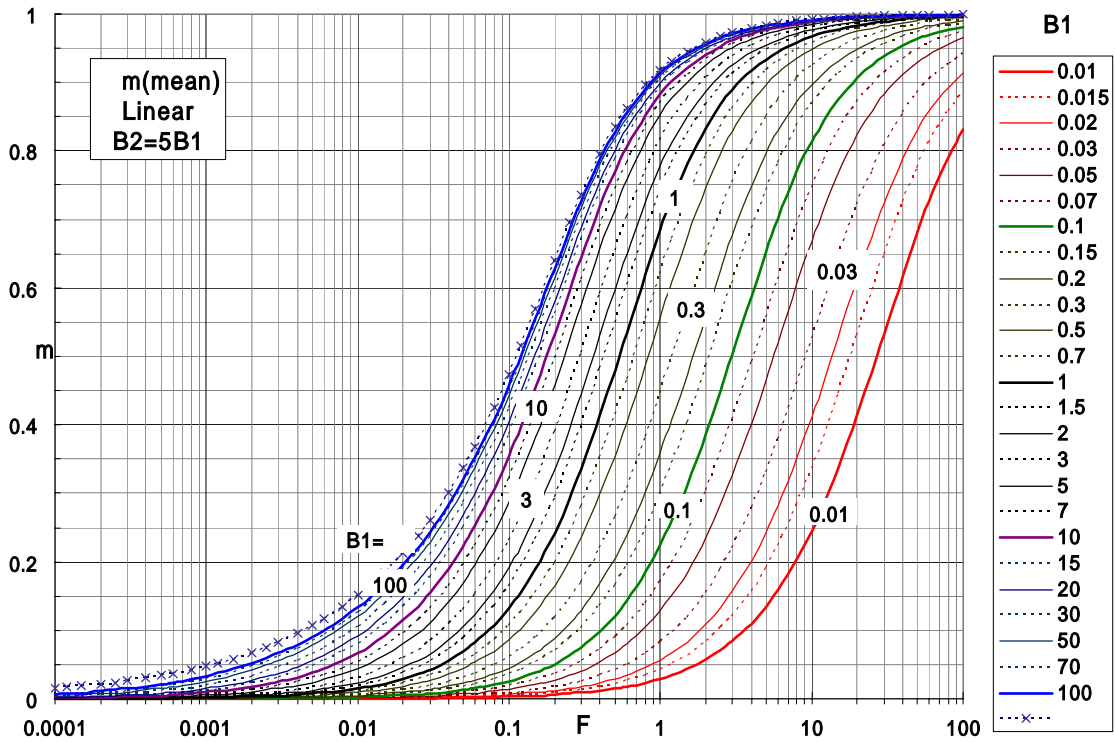


Fig.2.6.7(3) 板厚平均温度 m (線形温度変化、 $B_2=5B_1$)

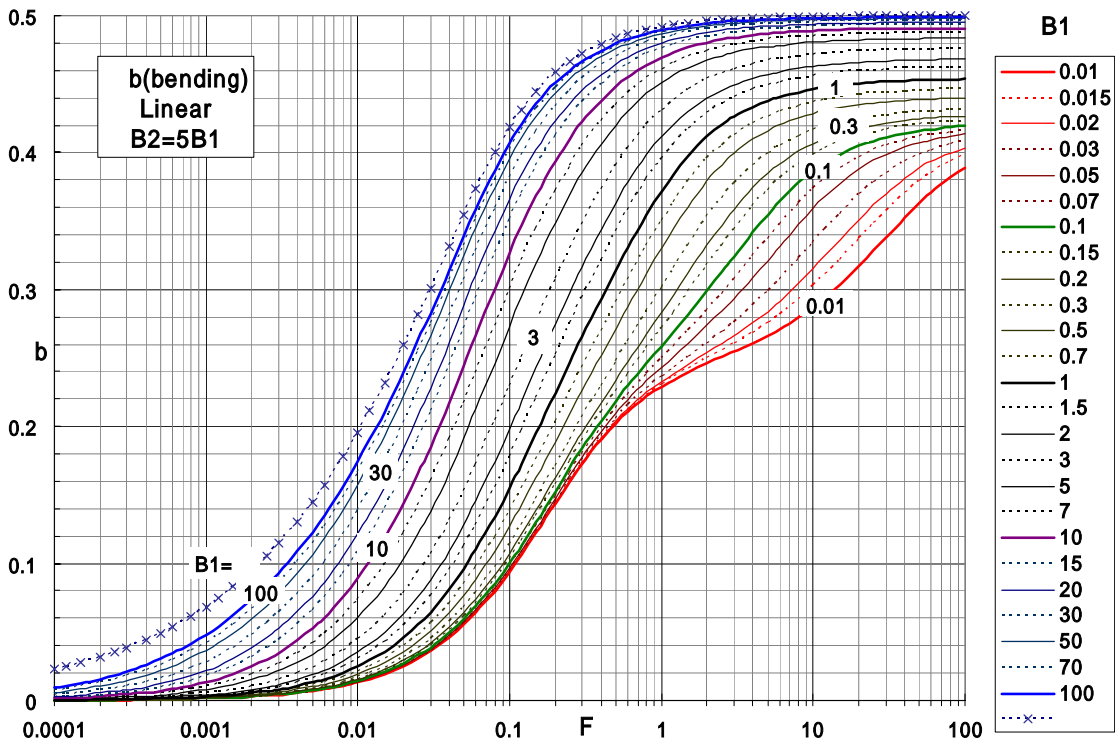


Fig.2.6.7(4) 熱曲げ応力 b (線形温度変化、 $B_2=5B_1$)

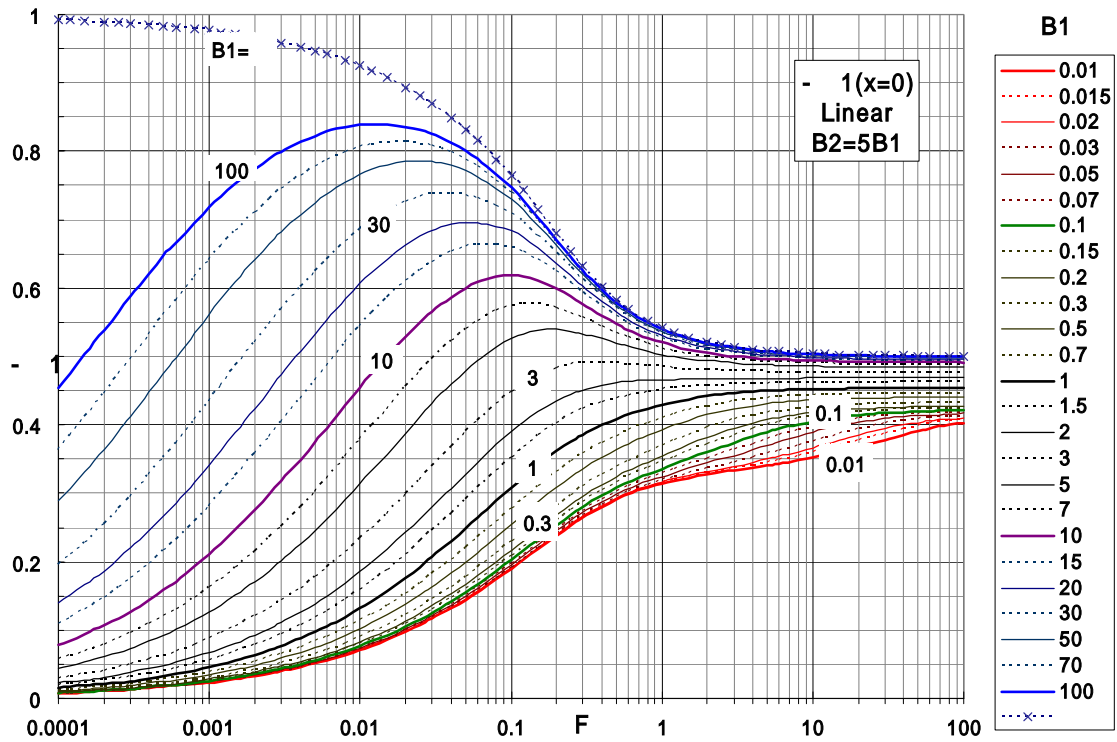


Fig.2.6.7(5) 基準面の熱応力 q_1 (線形温度変化、 $B_2=5B_1$)

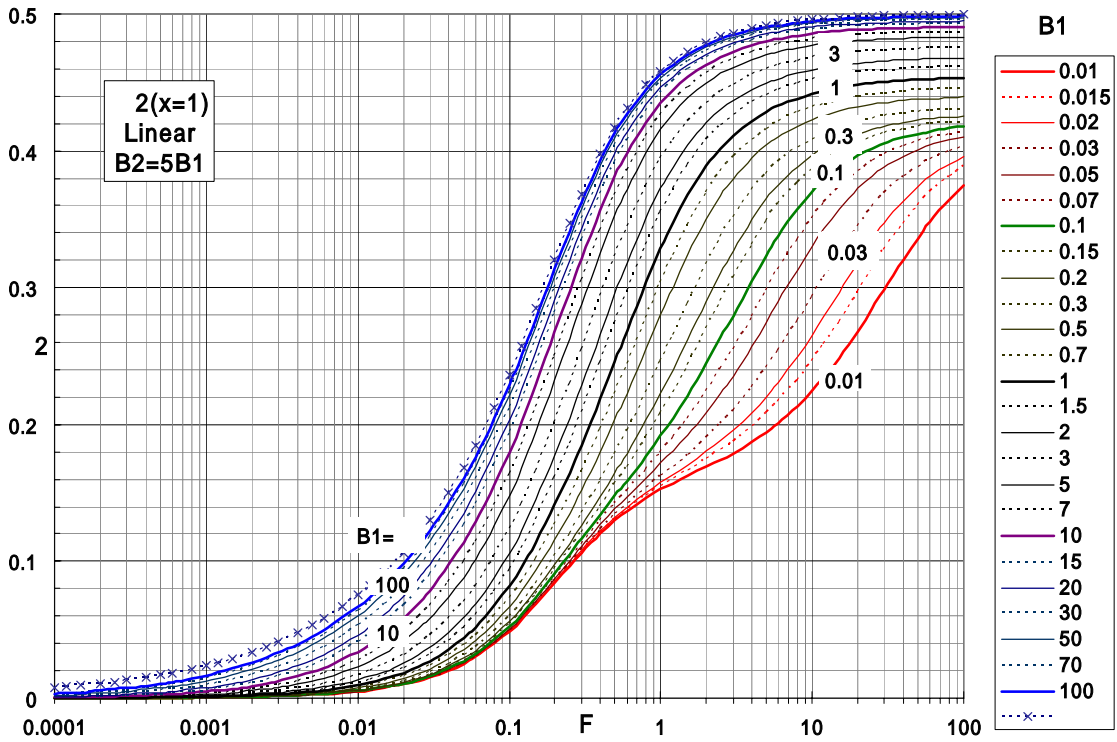


Fig.2.6.7(6) 背面の熱応力 q_2 (線形温度変化、 $B_2=5B_1$)

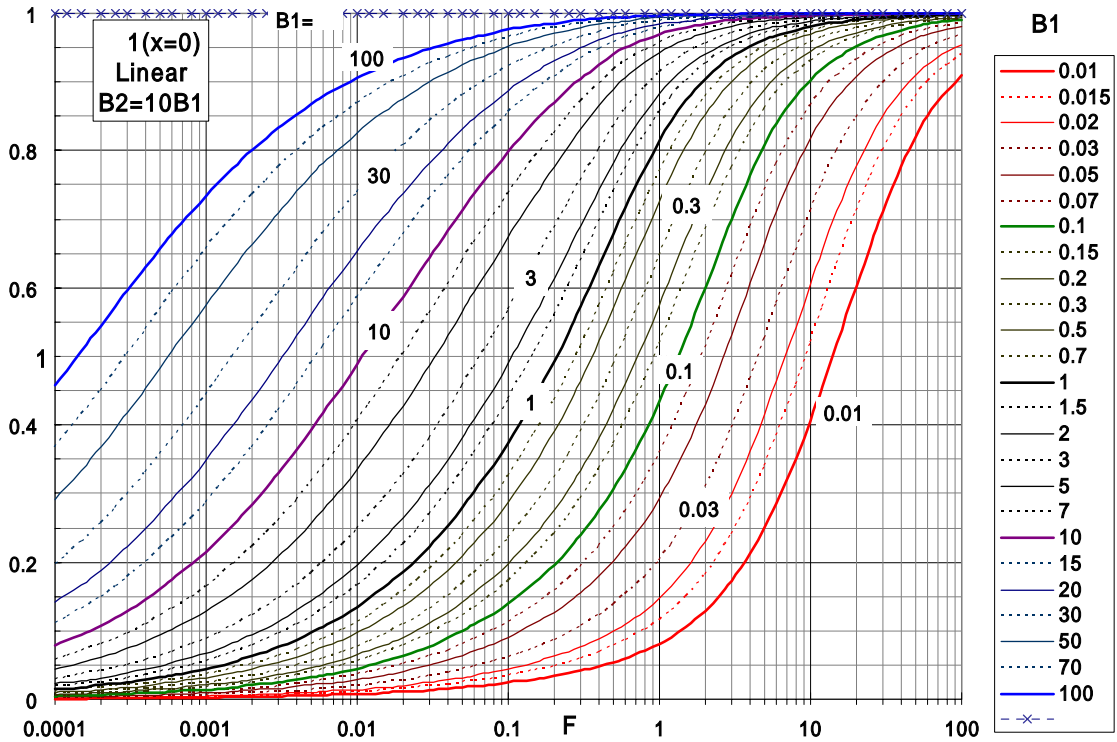


Fig.2.6.8(1) 基準面の温度 θ_1 (線形温度変化、 $B_2=10B_1$)

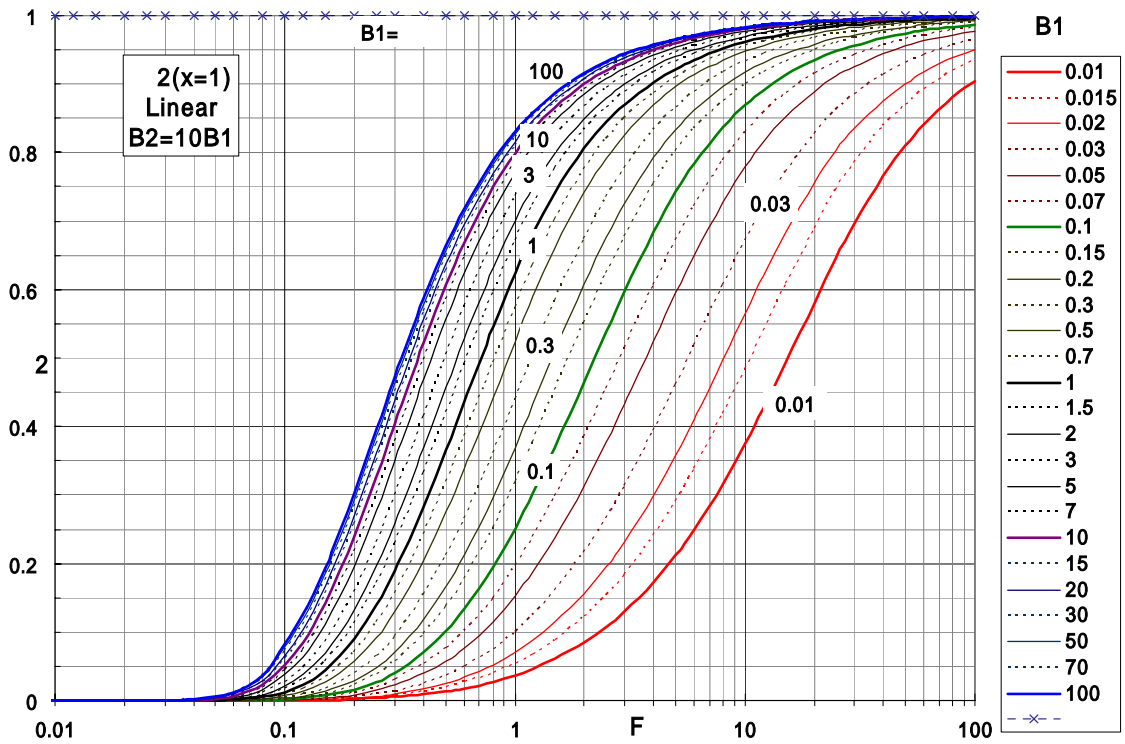


Fig.2.6.8(2) 背面の温度 θ_2 (線形温度変化、 $B_2=10B_1$)

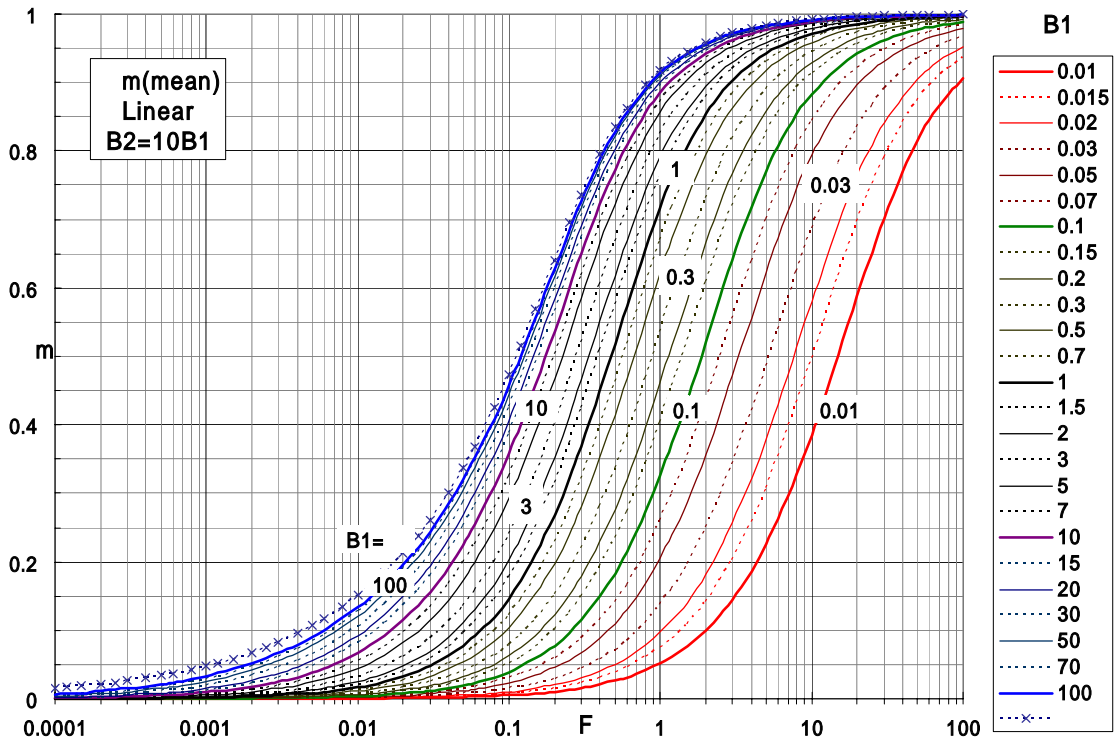


Fig.2.6.8(3) 板厚平均温度 m (線形温度变化、 $B_2=10B_1$)

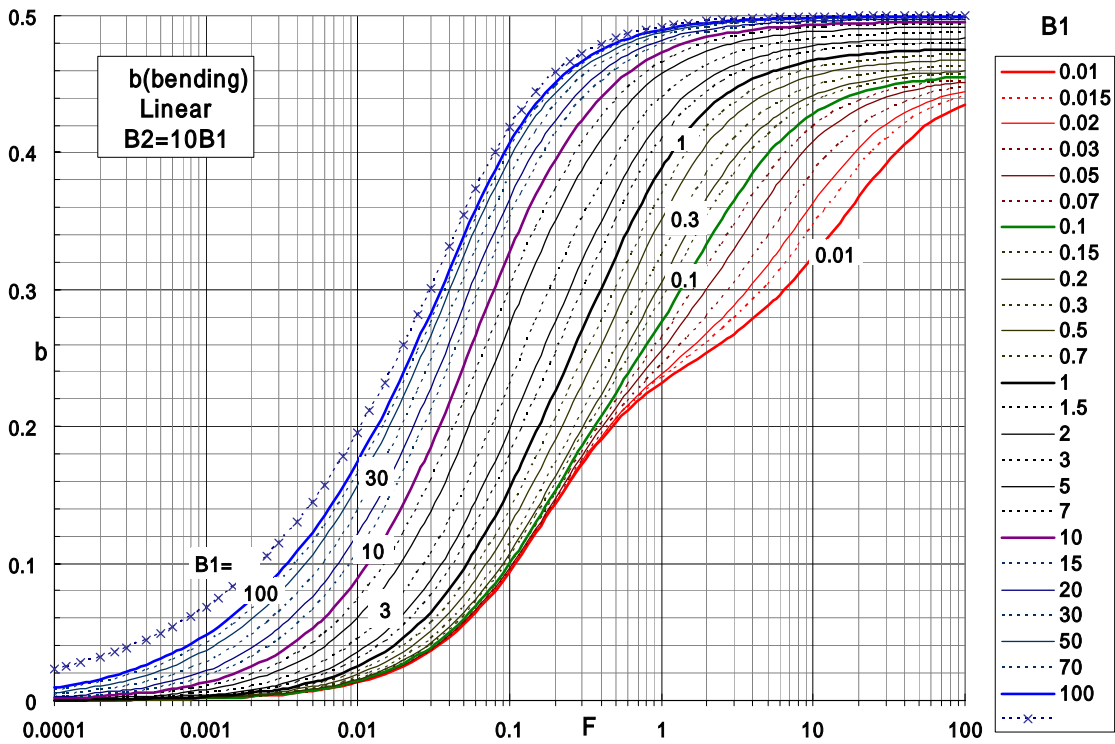


Fig.2.6.8(4) 熱曲げ応力 b (線形温度变化、 $B_2=10B_1$)

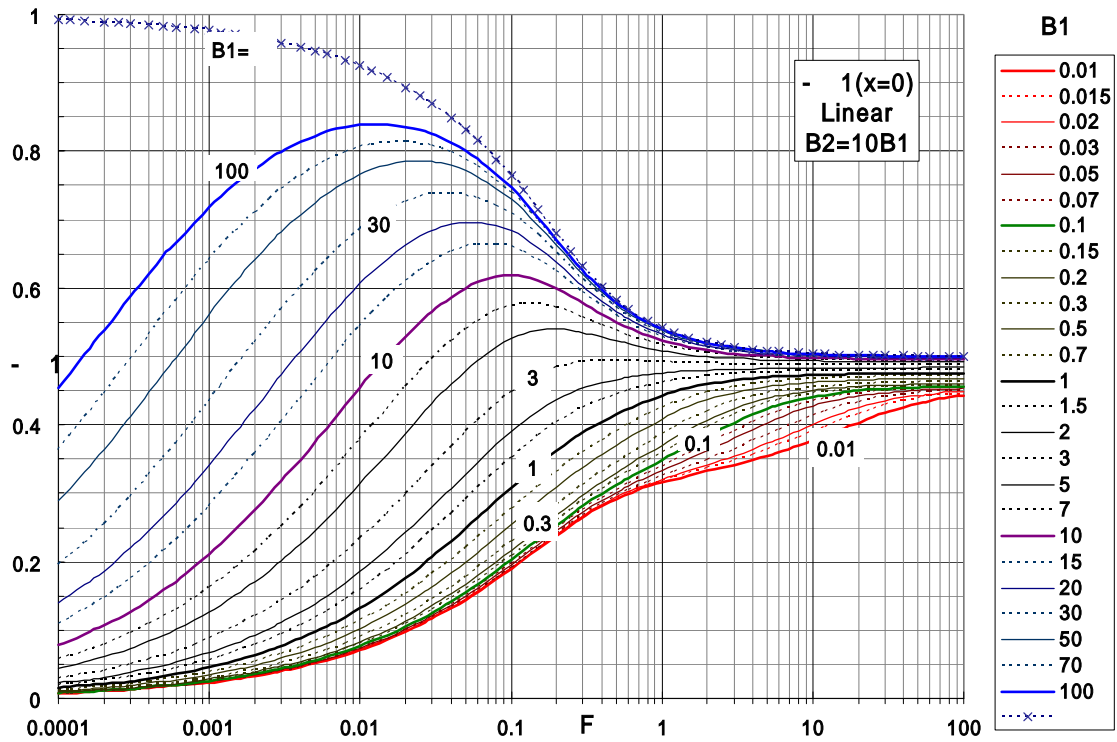


Fig.2.6.8(5) 基準面の熱応力 σ_1 (線形温度変化、 $B_2=10B_1$)

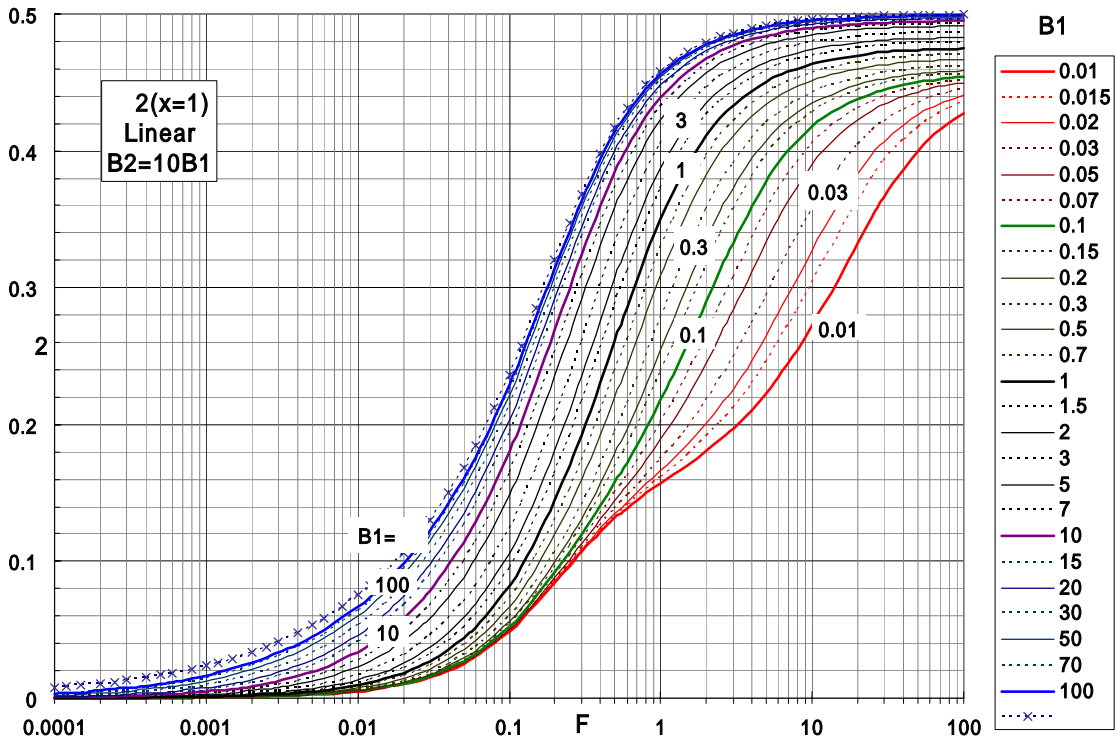


Fig.2.6.8(6) 背面の熱応力 σ_2 (線形温度変化、 $B_2=10B_1$)

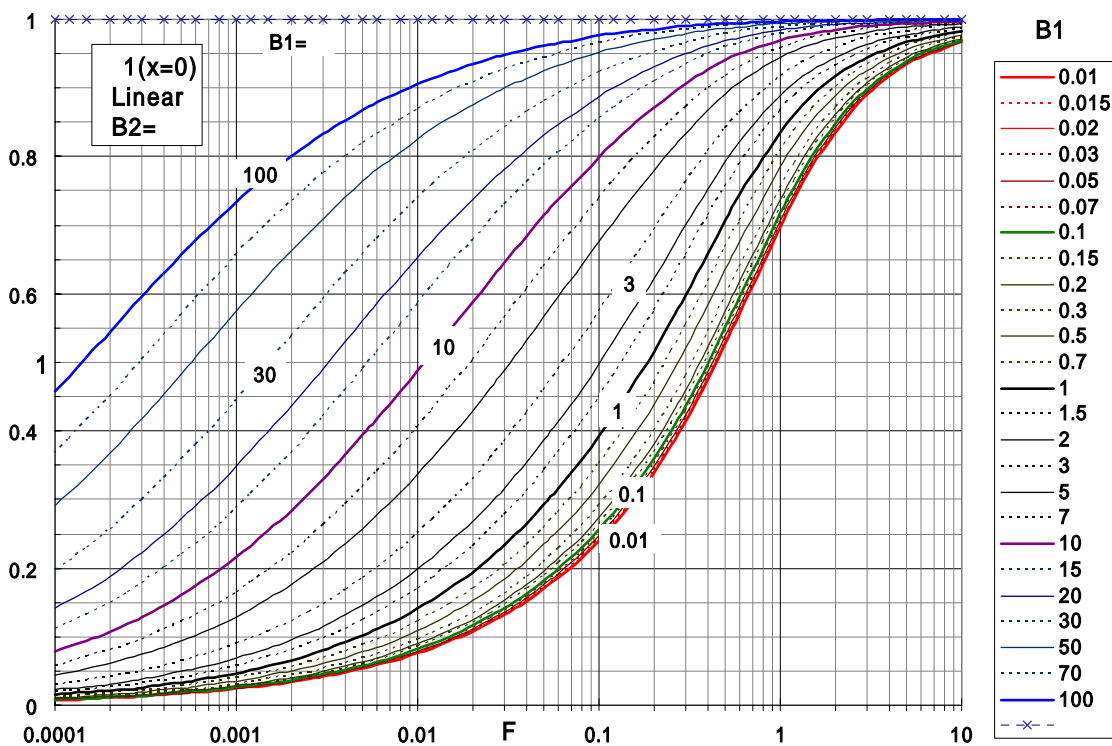


Fig.2.6.9(1) 基準面の温度 1 (線形温度変化、 $B_2=$)

Fig.2.6.9(2) (図省略、 $2 = 1$)

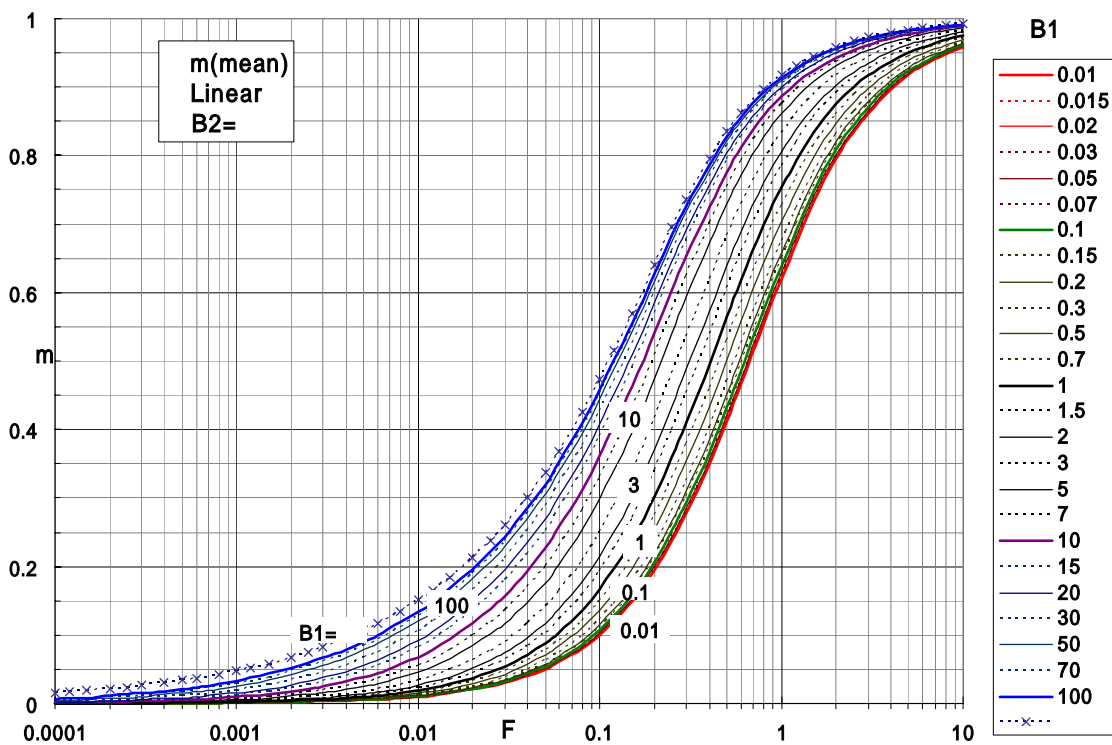


Fig.2.6.9(3) 板厚平均温度 m (線形温度変化、 $B_2=$)

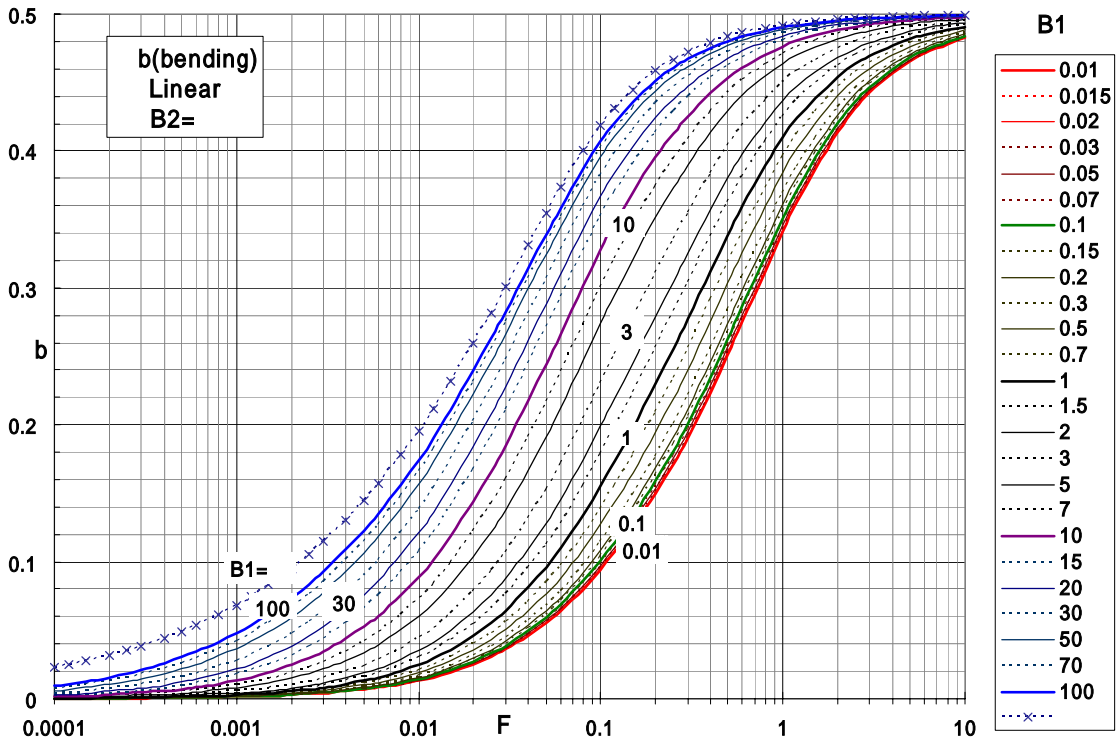


Fig.2.6.9(4) 熱曲げ応力 b (線形温度変化、 $B_2=$)

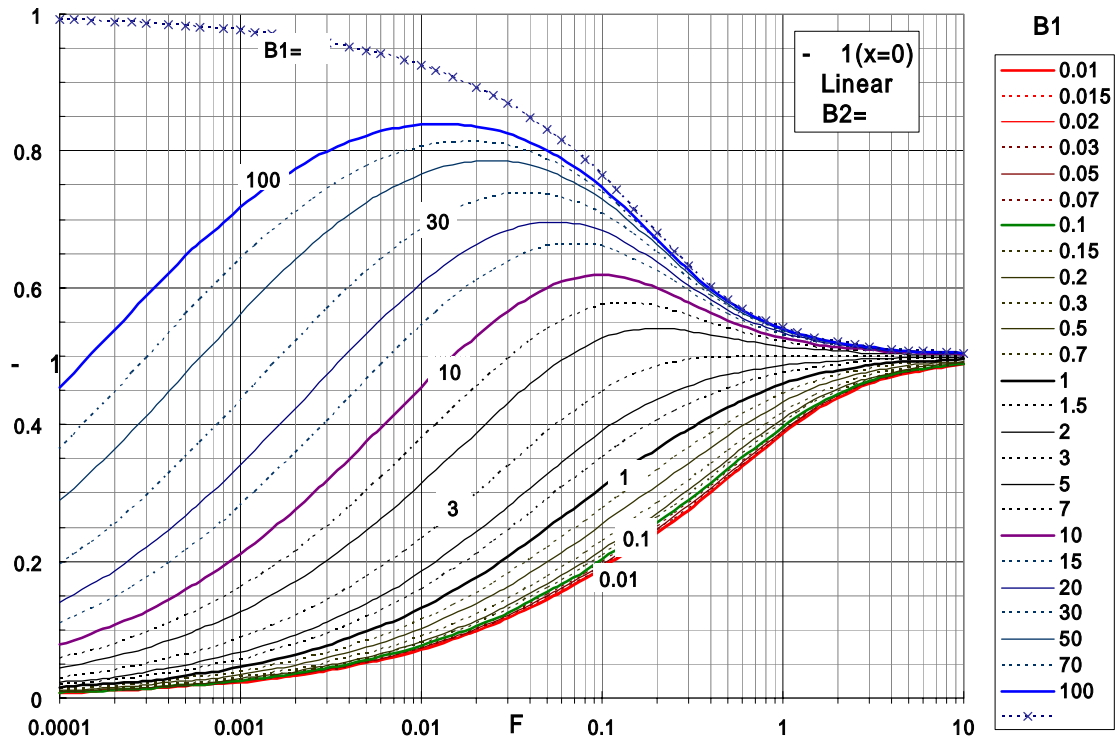


Fig.2.6.9(5) 基準面の熱応力 1 (線形温度変化、 $B_2=$)

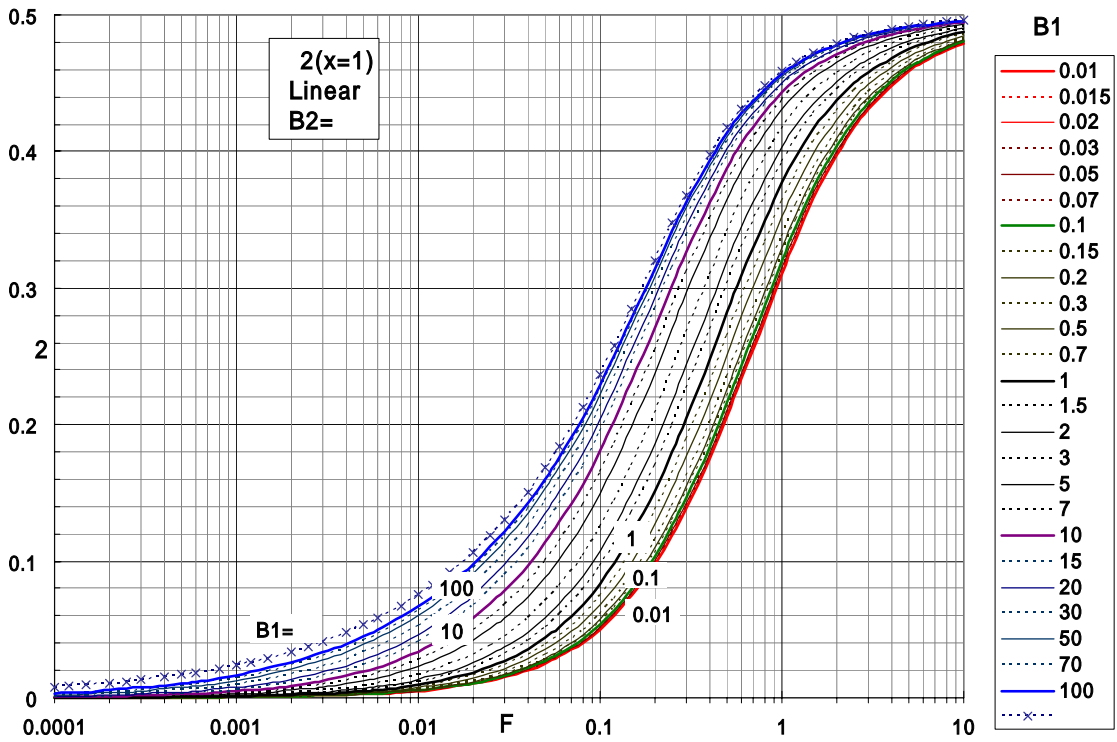


Fig.2.6.9(6) 背面の熱応力 2 (線形温度変化、 $B_2=$)

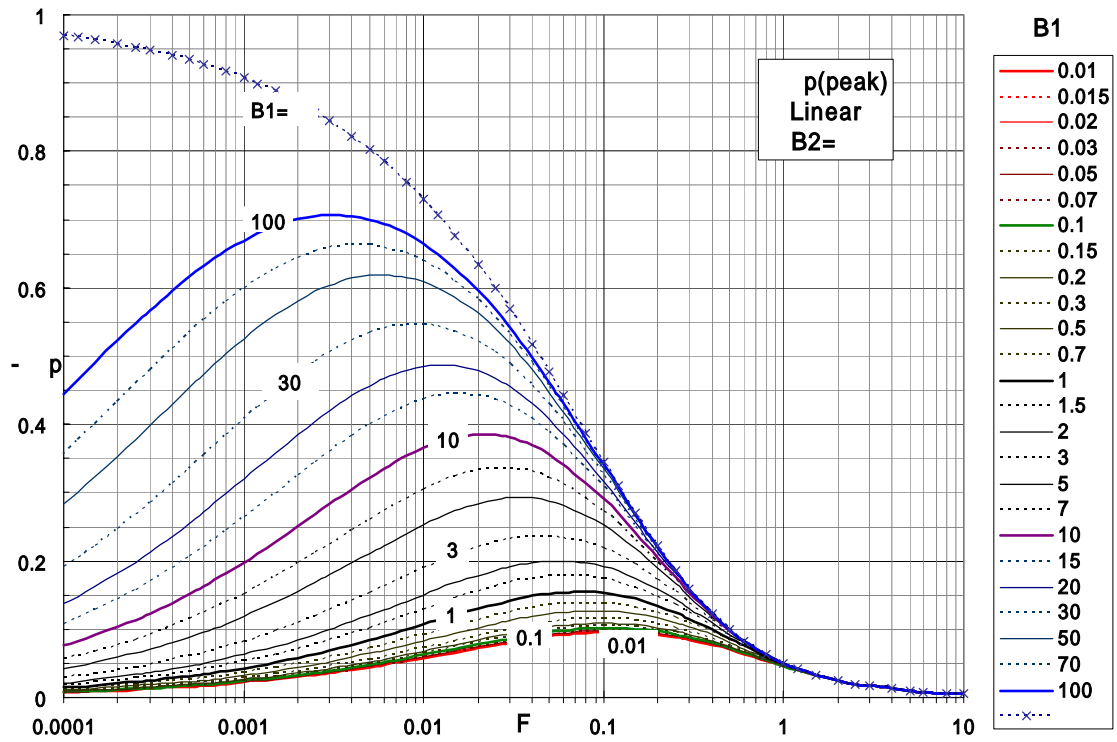


Fig.2.6.9(7) 基準面の熱ピーク応力 p (線形温度変化、 $B_2=$)

2.7 ランプ状温度変化による熱応力最大値

基準面側の流体 1 温度がランプ状に変化した場合とする。Fig.2.7.1 に示すようにランプ状温度変化の無次元時間幅を F_R とし、温度変化終了時点 $F=0$ とし、 $F=0$ での熱応力最大値 $\max(F_R)$ およびその時点 $F[\max(F_R)]$ を計算し、線図を作成する。前 2.6 節の線形温度変化に対する温度応答を $U_{L,j}(F)$ とすると、ランプ状温度変化終了時点 $F=0$ とした本節の温度応答 $U_{R,j}(F_R, F)$ は次式で与えられる ($j=1,2,m,b$)。

$$U_{R,j}(F_R, F) = \frac{F_R + F}{F_R} U_{L,j}(F_R + F) - \frac{F}{F_R} U_{L,j}(F) \quad (j=1,2,m,b) \quad (2.7.1)$$

無次元熱応力 $\beta_j (j=1,2,b,p)$ は次式で与えられる。

$$\beta_1(F_R, F) = \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1+B_1)\{U_{R,m}(F_R, F) - U_{R,1}(F_R, F)\}}{B_1} \quad (2.7.2)$$

$$\beta_2(F_R, F) = \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1+B_1)\{U_{R,m}(F_R, F) - U_{R,2}(F_R, F)\}}{B_1} \quad (2.7.3)$$

$$\beta_b(F_R, F) = \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{-(1+B_1)U_{R,b}(F_R, F)}{B_1} \quad (2.7.4)$$

$$\beta_p(F_R, F) = \frac{\sigma_p(t)}{\sigma_{N2}} = \frac{(1+B_1)\{U_{R,m}(F_R, F) - U_{R,1}(F_R, F) - U_{R,b}(F_R, F)\}}{B_1} \quad (2.7.5)$$

パラメータ範囲を $\{B_1 = 0.01 \sim 100, \quad \}$ $\{B_2/B_1 = 0, 0.1 \sim 10, \quad \}$ および $\{F_R = 0 \sim 10\}$ とし、(2.7.1) ~ (2.7.5) 式を用いて最大熱応力 $\beta_{j,\max}(F_R)$ およびその時点 $F\{\beta_{j,\max}(F_R)\}$ を計算した ($j=1,2,b,p$)。計算結果を用いてステップ変化 ($F_R=0$) に対する比を線図化した。ステップ変化と比較して、熱応力最大値がどの程度低減するか、また熱応力最大時点がどの程度変化するかを線図から簡単に読み取ることができる。参照基準値 (ステップ変化に対する計算結果) は 2.5 節の図あるいは付録 A2 の数表を使用すると良い。

(1) $B_2=0$ の場合

B_1 をパラメータとし、横軸を $F_R > 0$ とし、基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比 $F\{\beta_{1,\max}(F_R)\} / F\{\beta_{1,\max}(0)\}$ を Fig.2.7.2(1a) に示す。最大値のステップ変化に対する比 $\beta_{1,\max}(F_R) / \beta_{1,\max}(0)$ を Fig.2.7.2(1b) に示す。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.2(2a) に示す。最大値のス

テップ変化に対する比を Fig.2.7.2(2b)に示す。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.2(3a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.2(3b)に示す。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.2(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.2(4b)に示す。

全ての熱応力に対して、 B_1 が大きいほどステップ ランプによる熱応力低減効果が大きいことが分かる。

(2) $B_2=0.1B_1$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(1a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(1b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0$ の場合よりわずかに小さくなる。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(2a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(2b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0$ の場合より小さくなる。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(3a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(3b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0$ の場合より小さくなる。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.3(4b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0$ の場合よりわずかに大きくなる。

(3) $B_2=0.2B_1$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(1a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(1b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.1B_1$ の場合よりわずかに小さくなる。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(2a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(2b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.1B_1$ の場合より小さくなる。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(3a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(3b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.1B_1$ の場合より小さくなる。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.4(4b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.1B_1$ の場合よりわずかに大きくなる。

(4) $B_2=0.5B_1$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.5(1a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.5(1b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.2B_1$ の場合よりわずかに小さくなる。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.5(2a)に示す。最大値の比 ${}_{2,\max}(F_R) / {}_{2,\max}(0)$ は 1 となる。 $B_2 = 0.5B_1$ では定常応力が最大値となり、熱応力の低減効果がない。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.5(3a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.5(3b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.2B_1$ の場合より小さくなる。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.5(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.5(4b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.2B_1$ の場合よりわずかに大きくなる。

(5) $B_2=B_1$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.6(1a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.6(1b)に示す。熱応力の低減効果は $B_2 = 0.5B_1$ の場合より小さくなり、 F_R 大および B_1 で最大 0.5 となる。 $B_2 = B_1$ では低減効果の上限が 0.5 と一定になる。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.6(2a)に示す。最大値の比 ${}_{2,\max}(F_R) / {}_{2,\max}(0)$ は 1 となる。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.6(3a)に示す。最大値の比 ${}_{b,\max}(F_R) / {}_{b,\max}(0)$ は 1 となる。 $B_2 = B_1$ では定常応力が最大値となり、ステップ ランプによる熱曲げ応力の低減効果がない。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.6(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.6(4b)に示す。熱ピーク応力の低減効果は $B_2 = 0.5B_1$ の場合よりわずかに大きくなる。

(6) $B_2=2B_1$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.7(1a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.7(1b)に示す。最大時点は $B_2 = B_1$ の場合より少し遅れる。熱応力の低減効果の上限は 0.5 である。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.7(2a)に示す。最大値の比 ${}_{2,\max}(F_R) / {}_{2,\max}(0)$ は 1 となる。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.7(3a)に示す。最大値の比 ${}_{b,\max}(F_R) / {}_{b,\max}(0)$ は 1 となる。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.7(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.7(4b)に示す。熱ピーク応力の低減効果は $B_2 = B_1$ の場合より少し大きくなる。

(7) $B_2=5B_1$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.8(1a)に示す。最大値の

ステップ変化に対する比を Fig.2.7.8(1b)に示す。最大時点は $B_2 = 2B_1$ の場合より遅れる。熱応力の低減効果の上限は 0.5 である。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.8(2a)に示す。最大値の比 ${}_{2,\max}(F_R) / {}_{2,\max}(0)$ は 1 となる。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.8(3a)に示す。最大値の比 ${}_{b,\max}(F_R) / {}_{b,\max}(0)$ は 1 となる。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.8(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.8(4b)に示す。熱ピーク応力の低減効果は $B_2 = 2B_1$ の場合より少し大きくなる。

(8) $B_2=10B_1$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.9(1a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.9(1b)に示す。最大時点は $B_2 = 5B_1$ の場合より遅れる。熱応力の低減効果の上限は 0.5 である。

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.9(2a)に示す。最大値の比 ${}_{2,\max}(F_R) / {}_{2,\max}(0)$ は 1 となる。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.9(3a)に示す。最大値の比 ${}_{b,\max}(F_R) / {}_{b,\max}(0)$ は 1 となる。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.9(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.9(4b)に示す。熱ピーク応力の低減効果は $B_2 = 5B_1$ の場合より少し大きくなる。

(9) $B_2=$ の場合

基準面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.10(1a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.10(1b)に示す。最大時点は $B_2 = 10B_1$ の場合より遅れる。熱応力の低減効果の上限は 0.5 である。 $B_1 < 2$ では低減効果がない (最大値の比 = 1)

背面の熱応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.10(2a)に示す。最大値の比 ${}_{2,\max}(F_R) / {}_{2,\max}(0)$ は 1 となる。

熱曲げ応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.10(3a)に示す。最大値の比 ${}_{b,\max}(F_R) / {}_{b,\max}(0)$ は 1 となる。

基準面の熱ピーク応力が最大となる時点のステップ変化に対する比を Fig.2.7.10(4a)に示す。最大値のステップ変化に対する比を Fig.2.7.10(4b)に示す。熱ピーク応力の低減効果は $B_2 = 10B_1$ の場合より少し大きくなる。

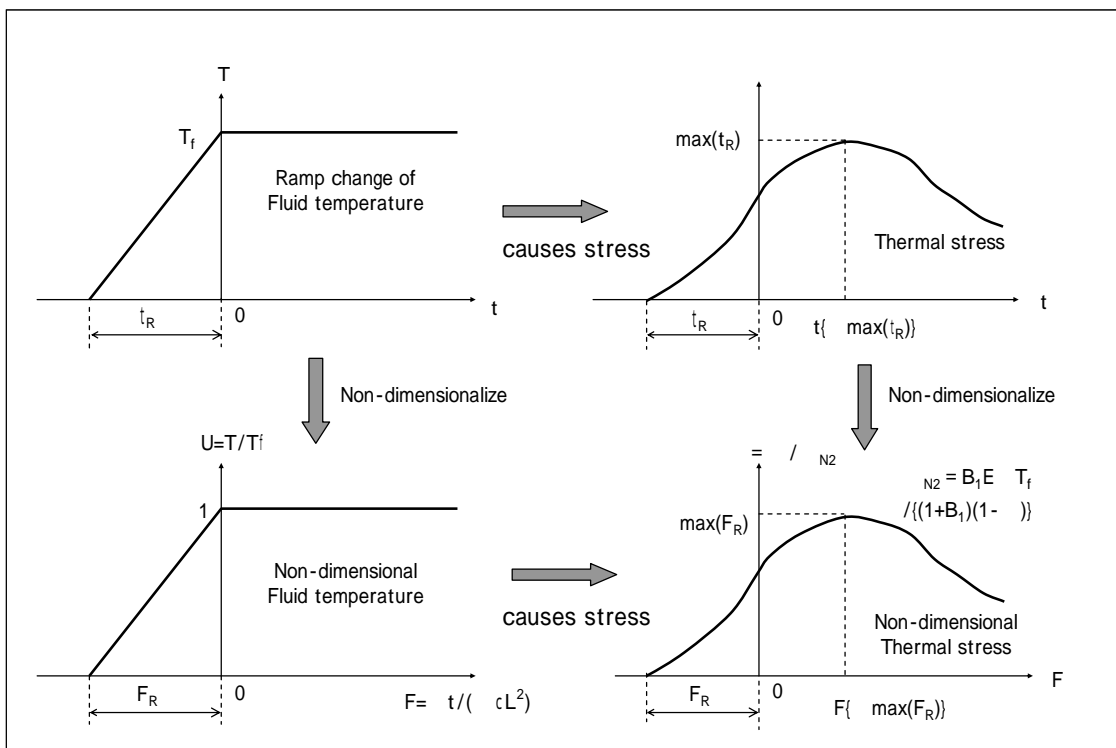


Fig.2.7.1 ランプ状温度変化

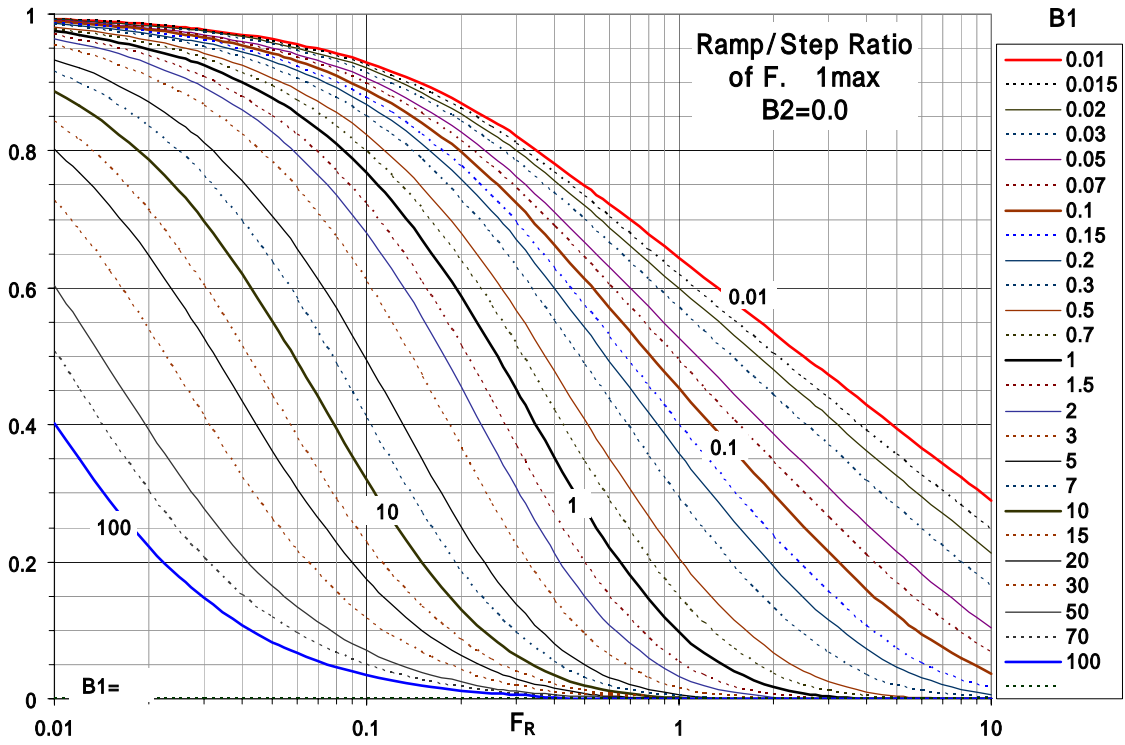


Fig.2.7.2(1a) 規準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0$)

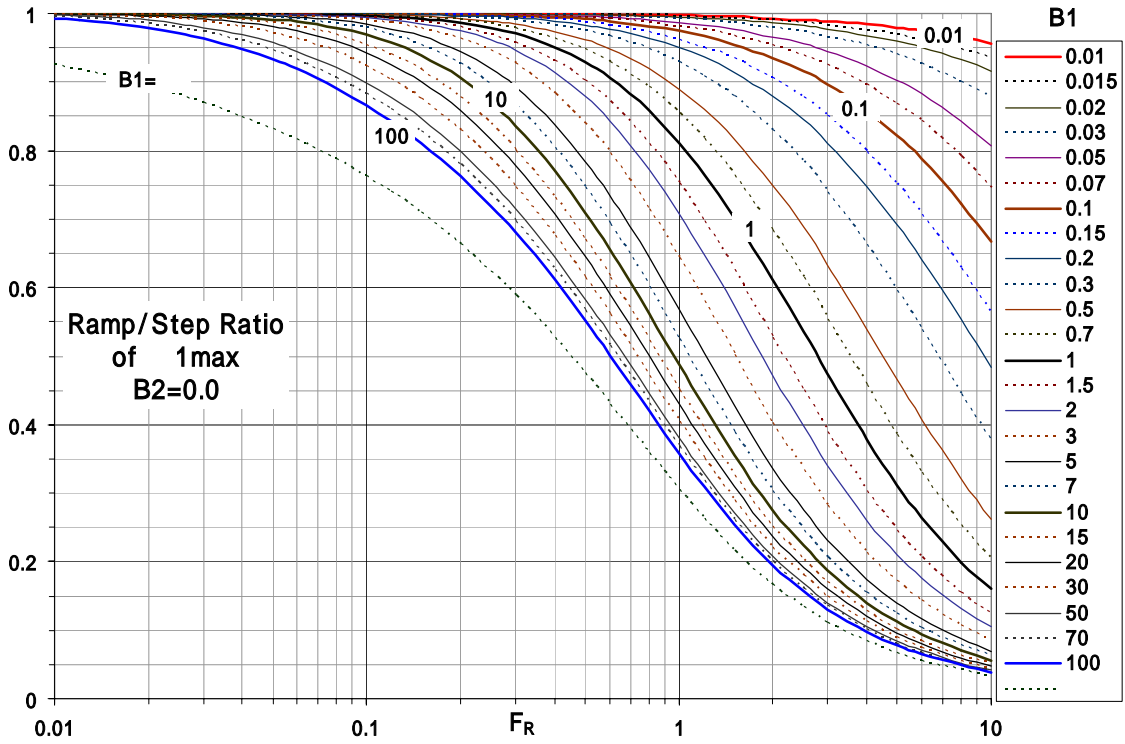


Fig.2.7.2(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=0$)

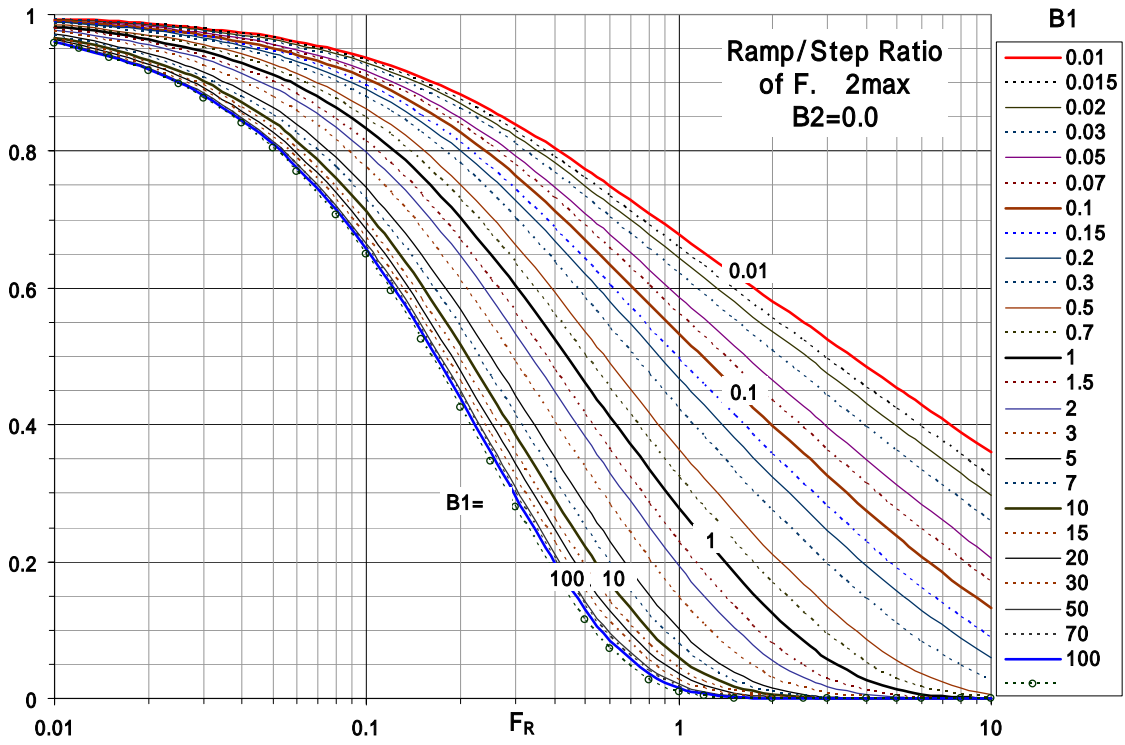


Fig.2.7.2(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0$)

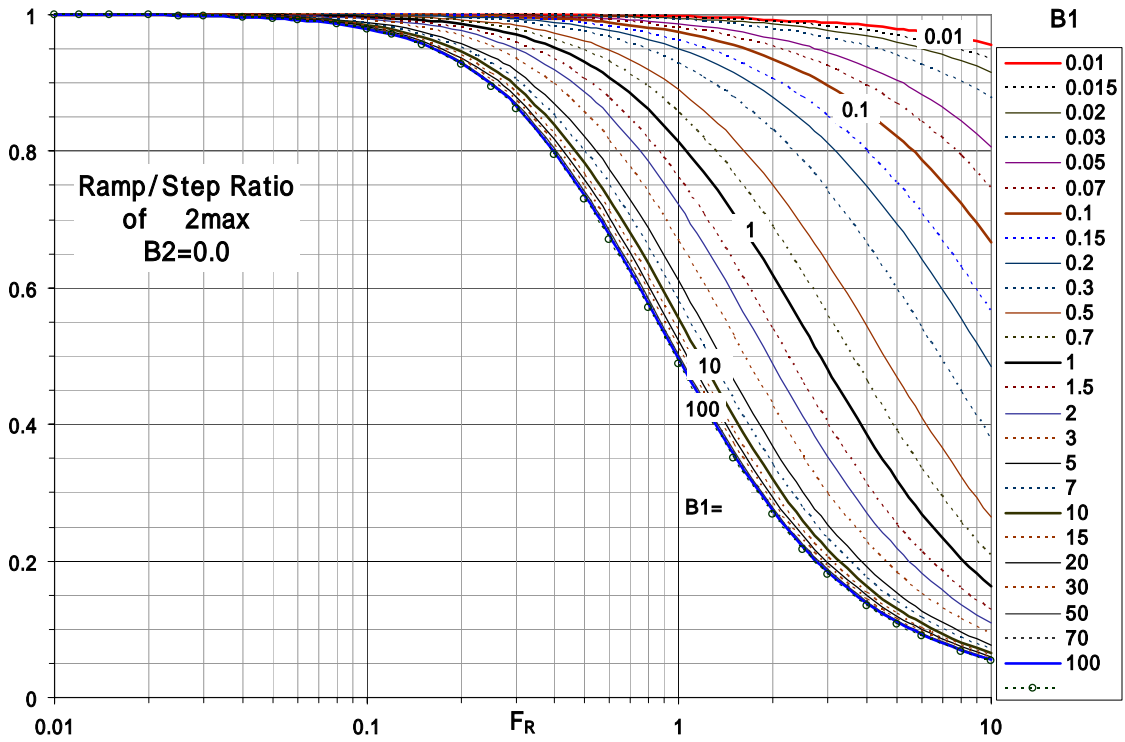


Fig.2.7.2(2b) 背面の熱応力最大値の比 ($B_2=0$)

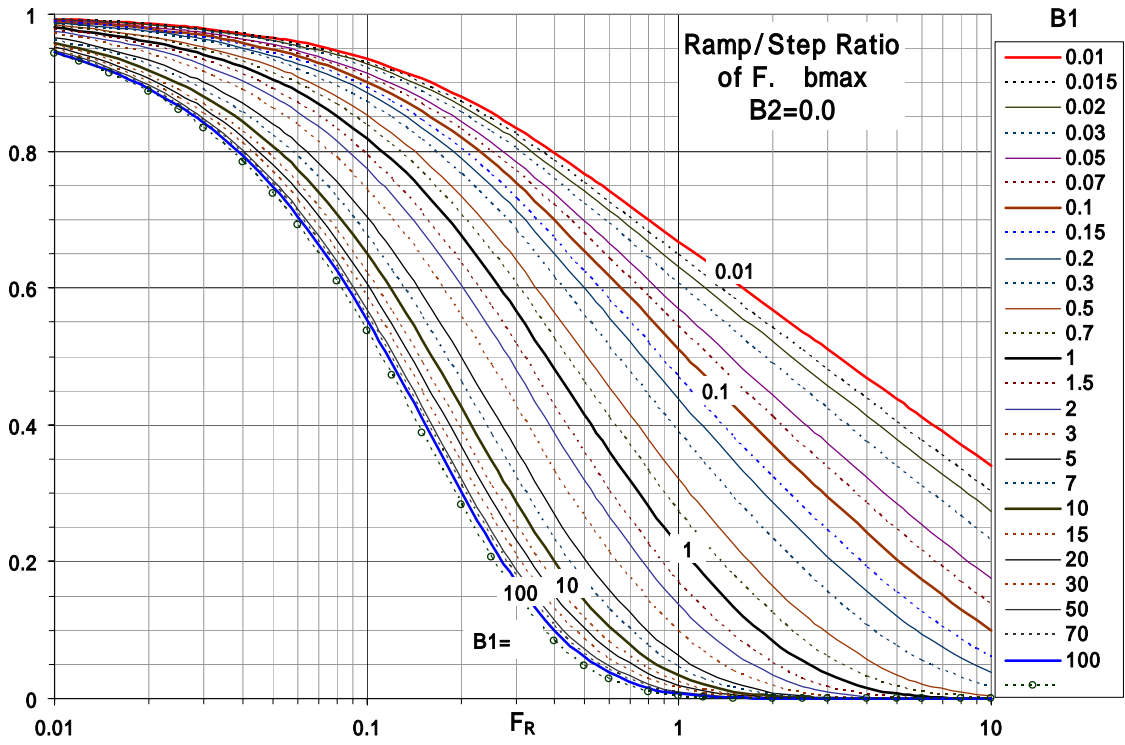


Fig.2.7.2(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=0$)

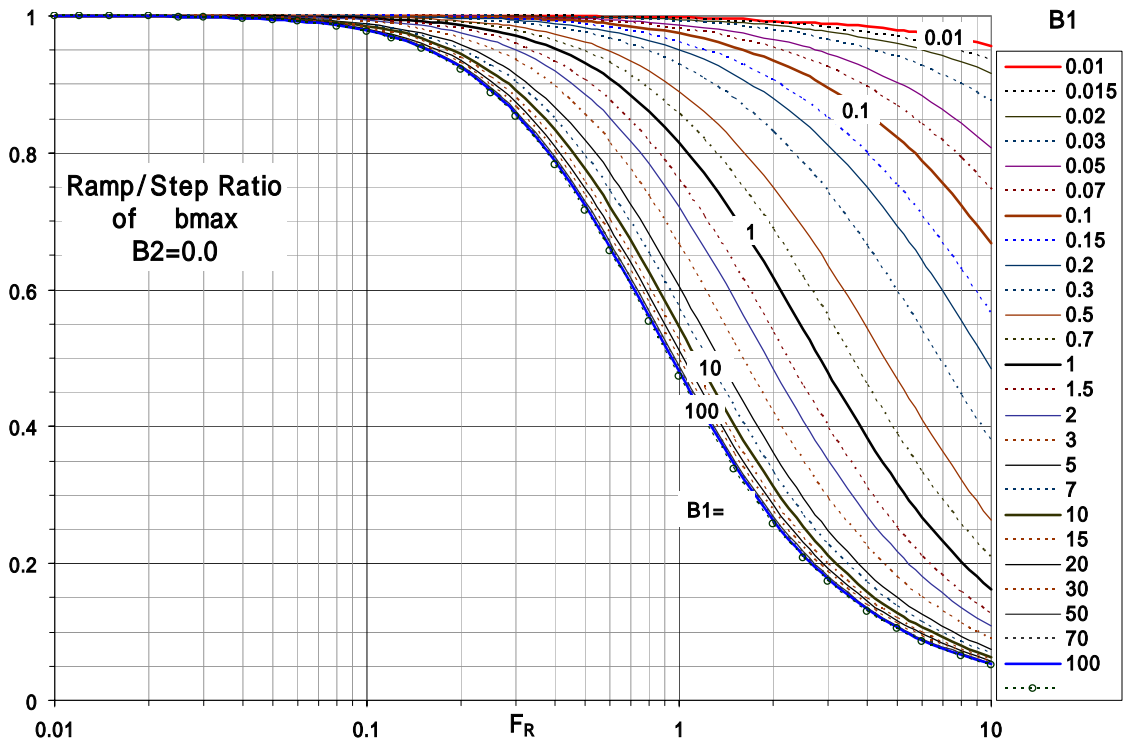


Fig.2.7.2(3b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2=0$)

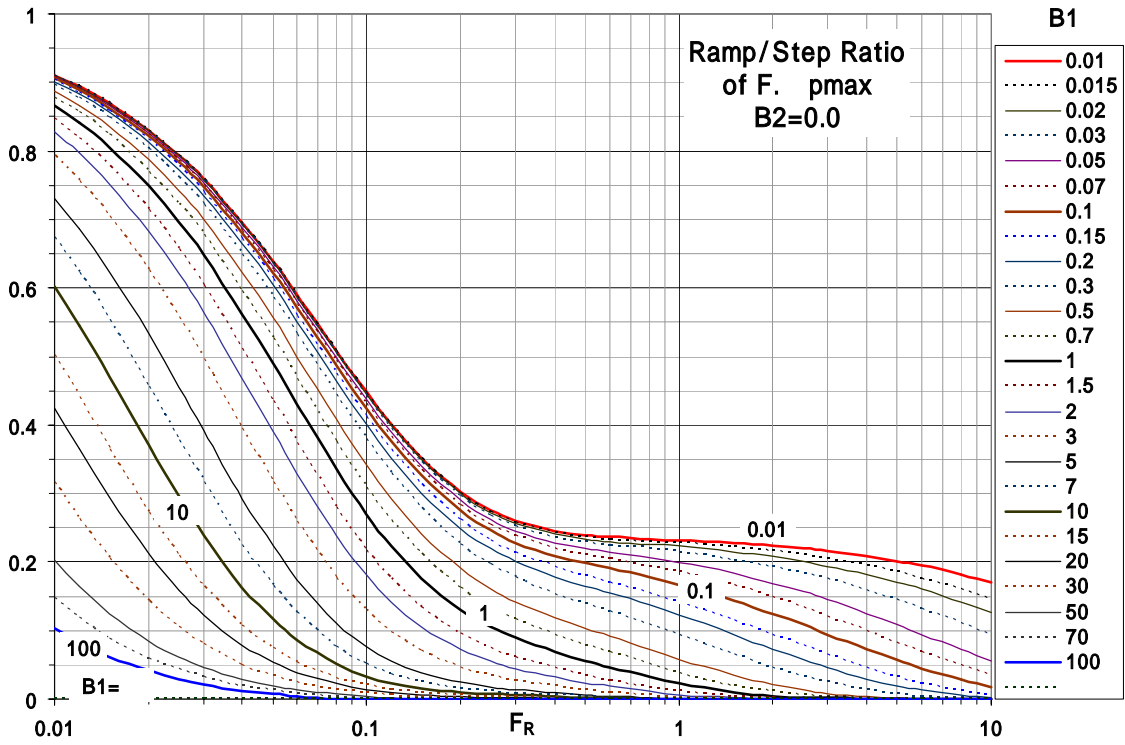


Fig.2.7.2(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2=0$)

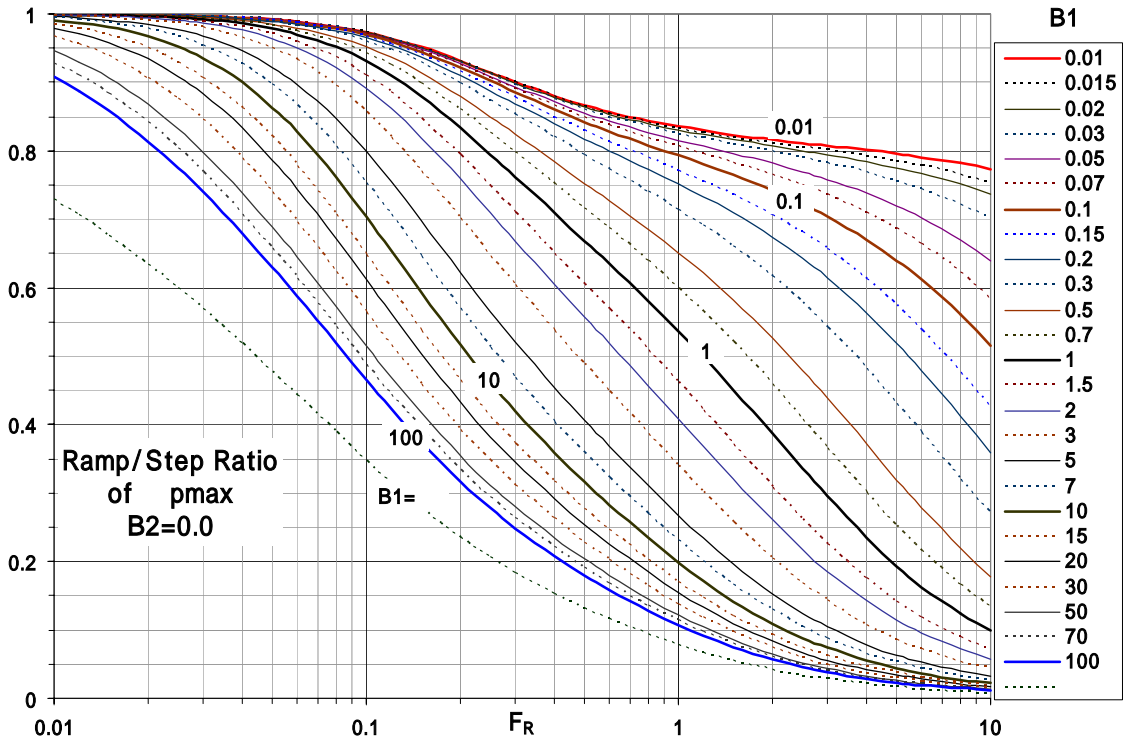


Fig.2.7.2(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2=0$)

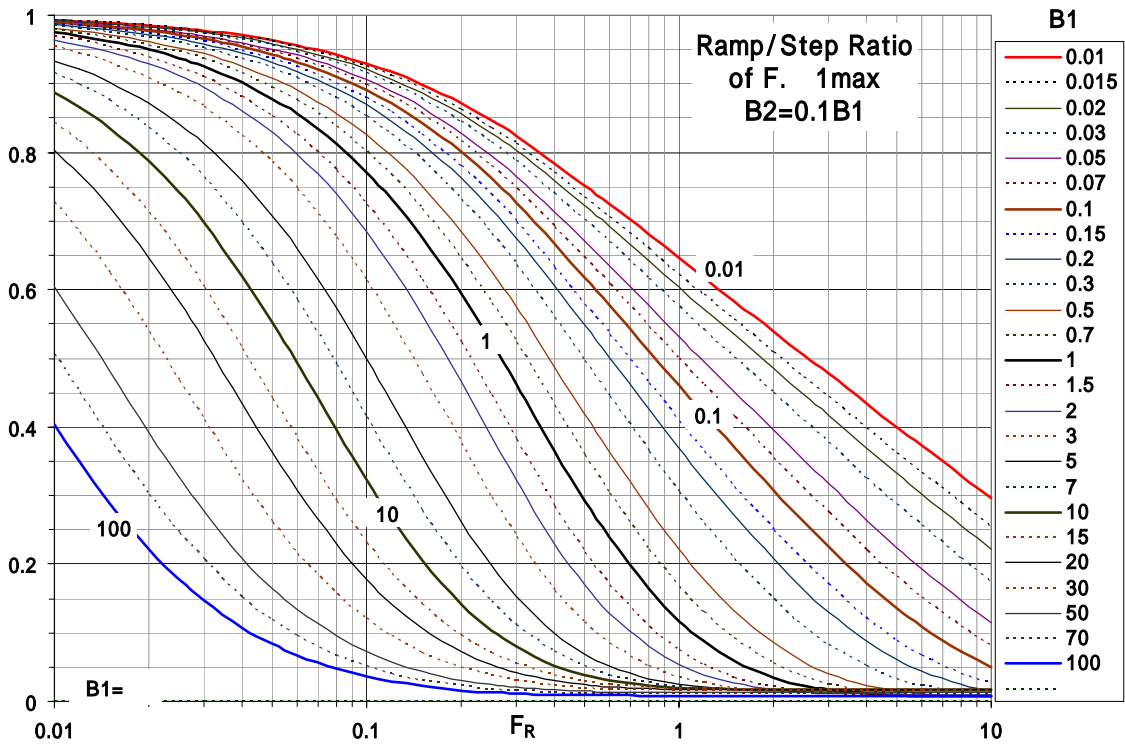


Fig. 2.7.3(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0.1B_1$)

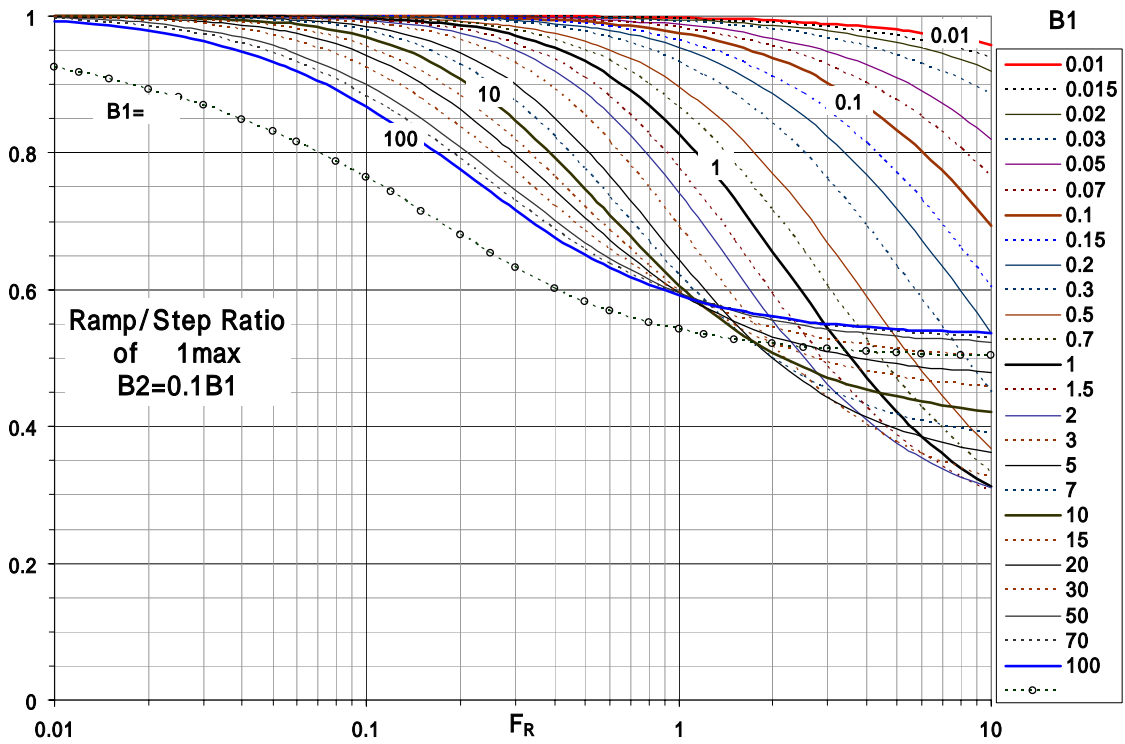


Fig. 2.7.3(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=0.1B_1$)

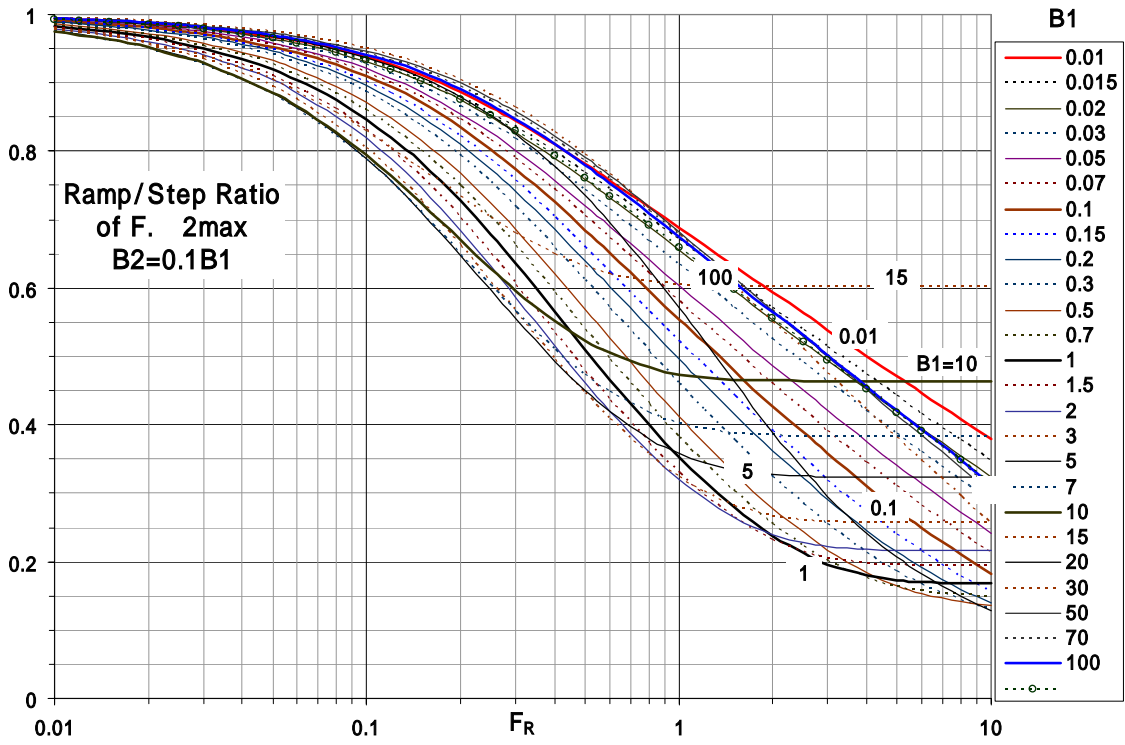


Fig. 2.7.3(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0.1B_1$)

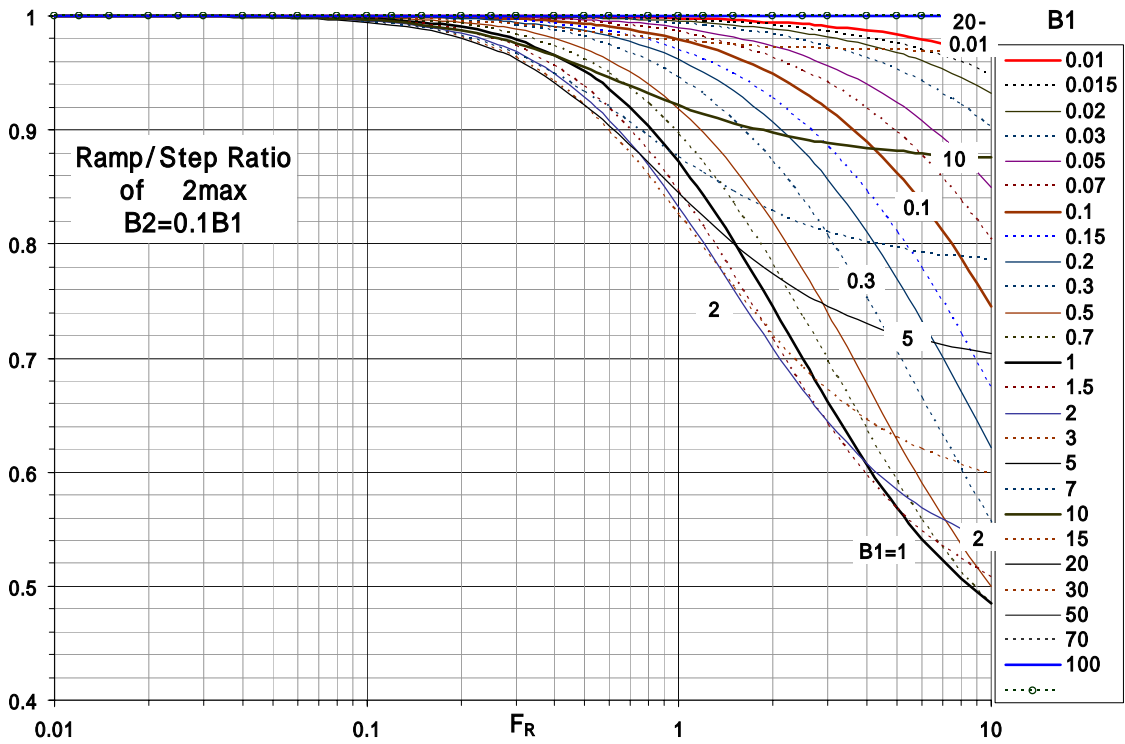


Fig.2.7.3(2b) 背面の熱応力最大値の比 ($B_2=0.1B_1$)

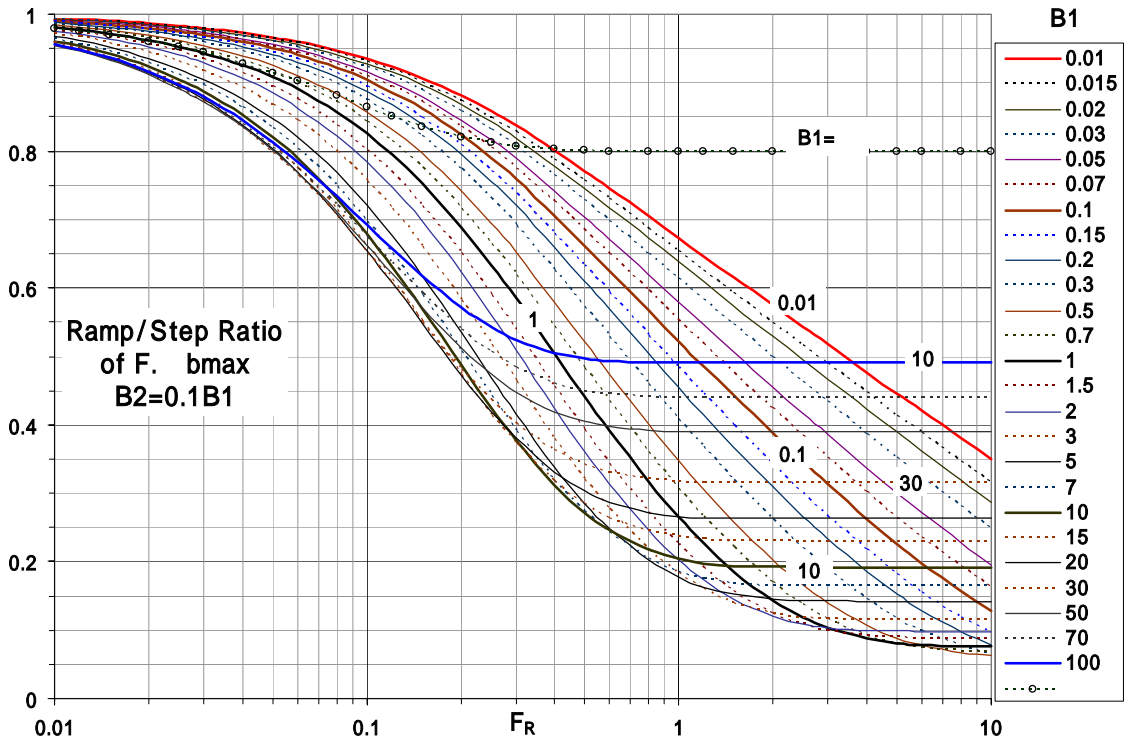


Fig.2.7.3(a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=0.1B_1$)

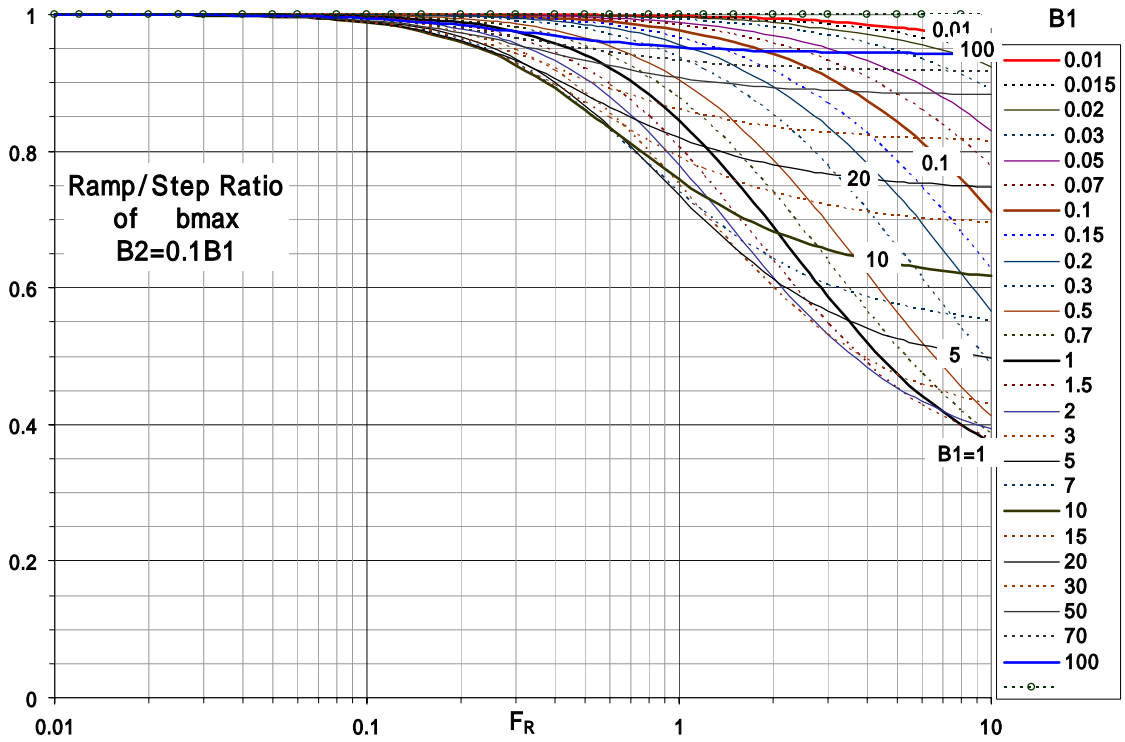


Fig.2.7.3(b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2=0.1B_1$)

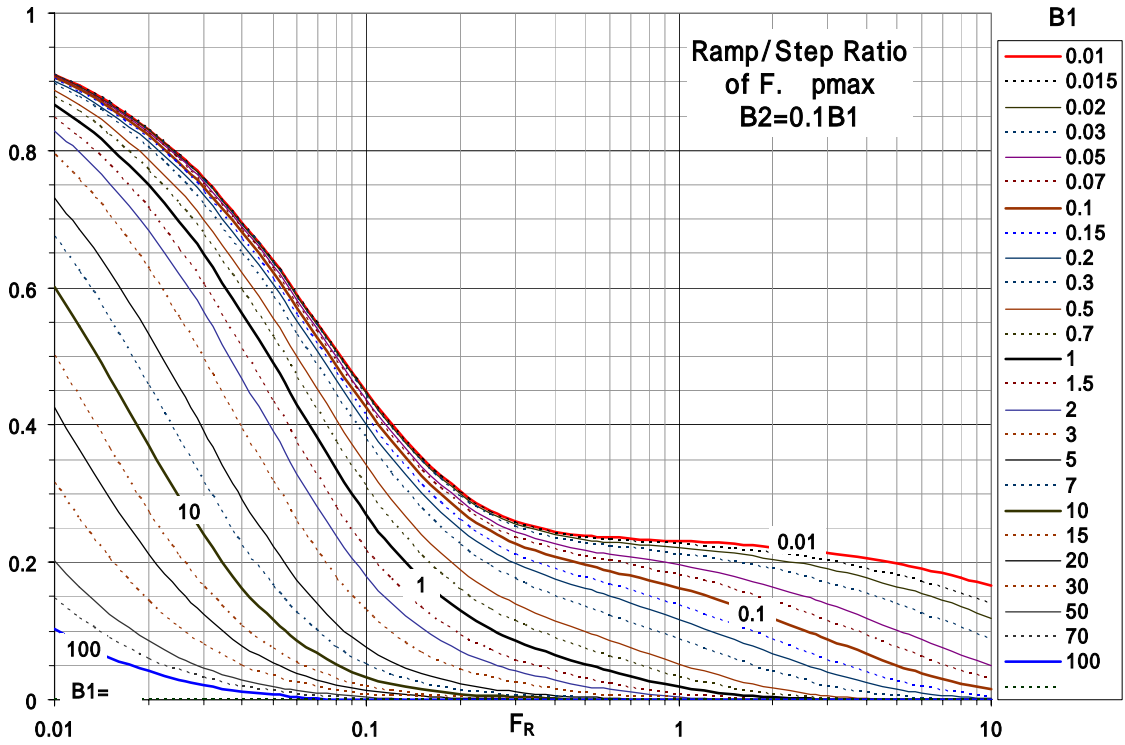


Fig.2.7.3(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2=0.1B_1$)

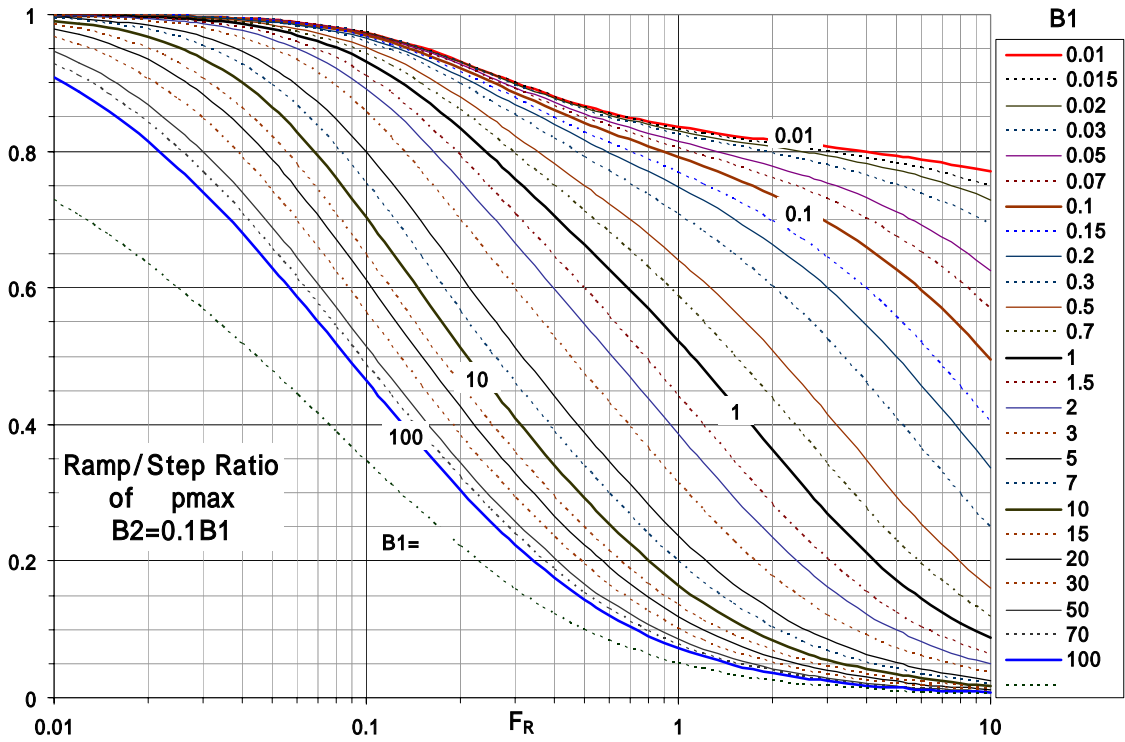


Fig.2.7.3(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2=0.1B_1$)

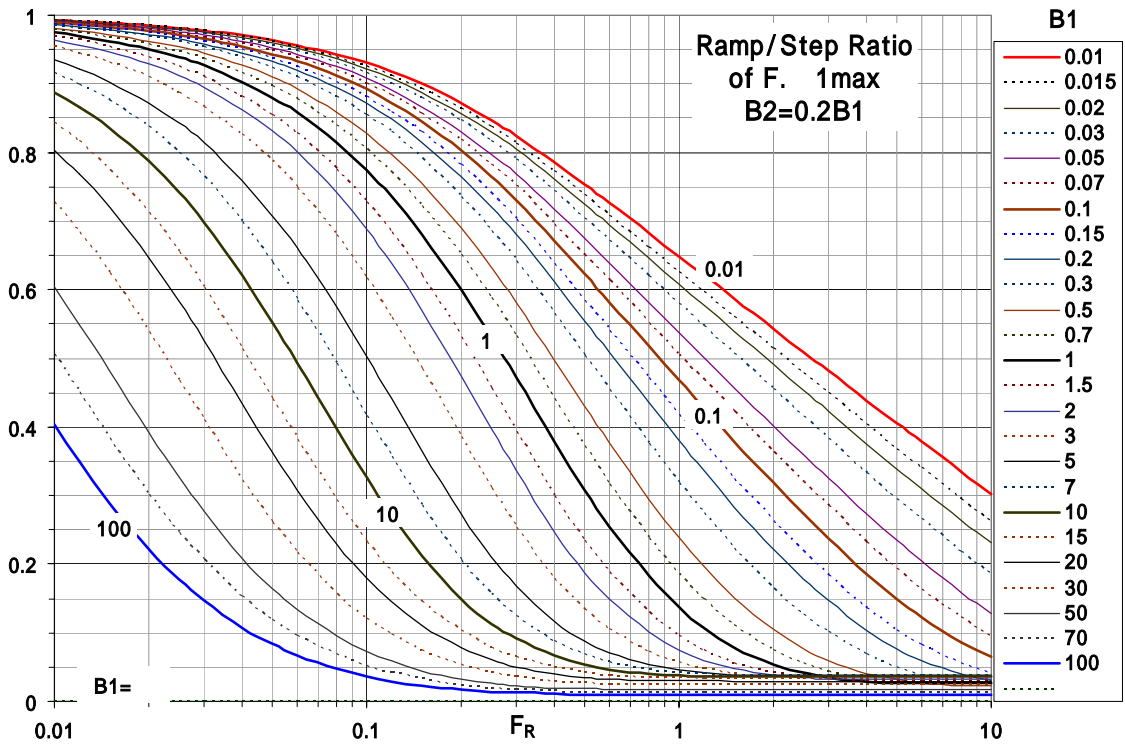


Fig. 2.7.4(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0.2B_1$)

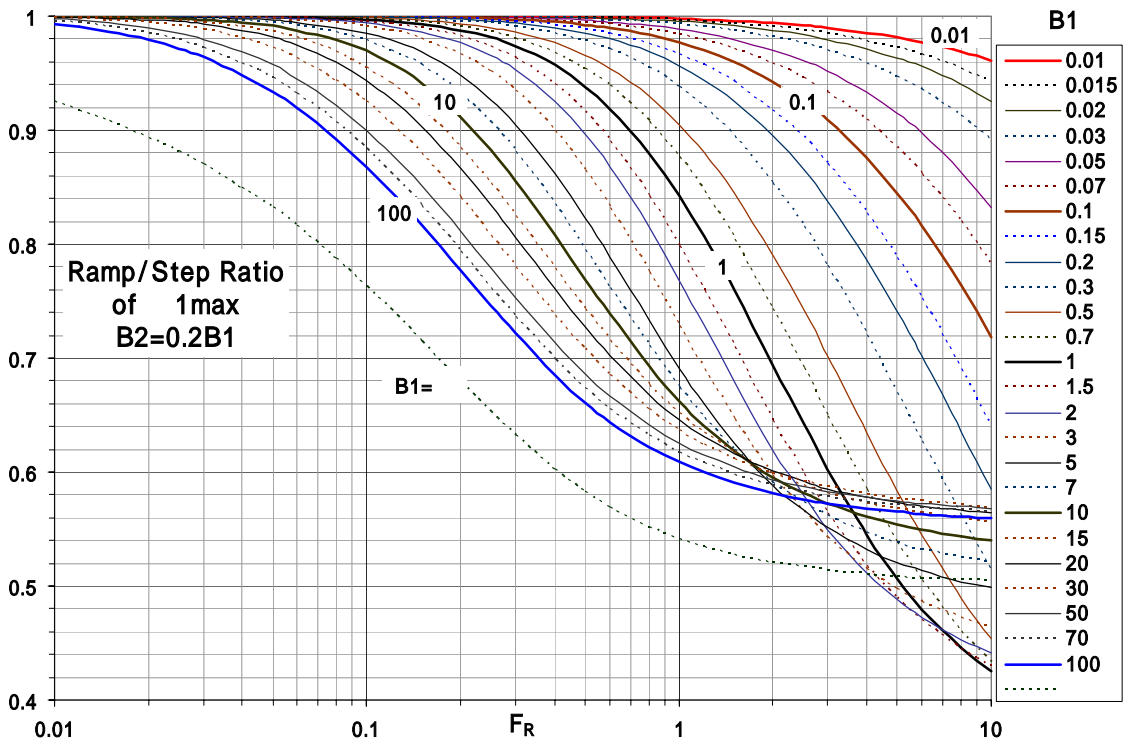


Fig. 2.7.4(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=0.2B_1$)

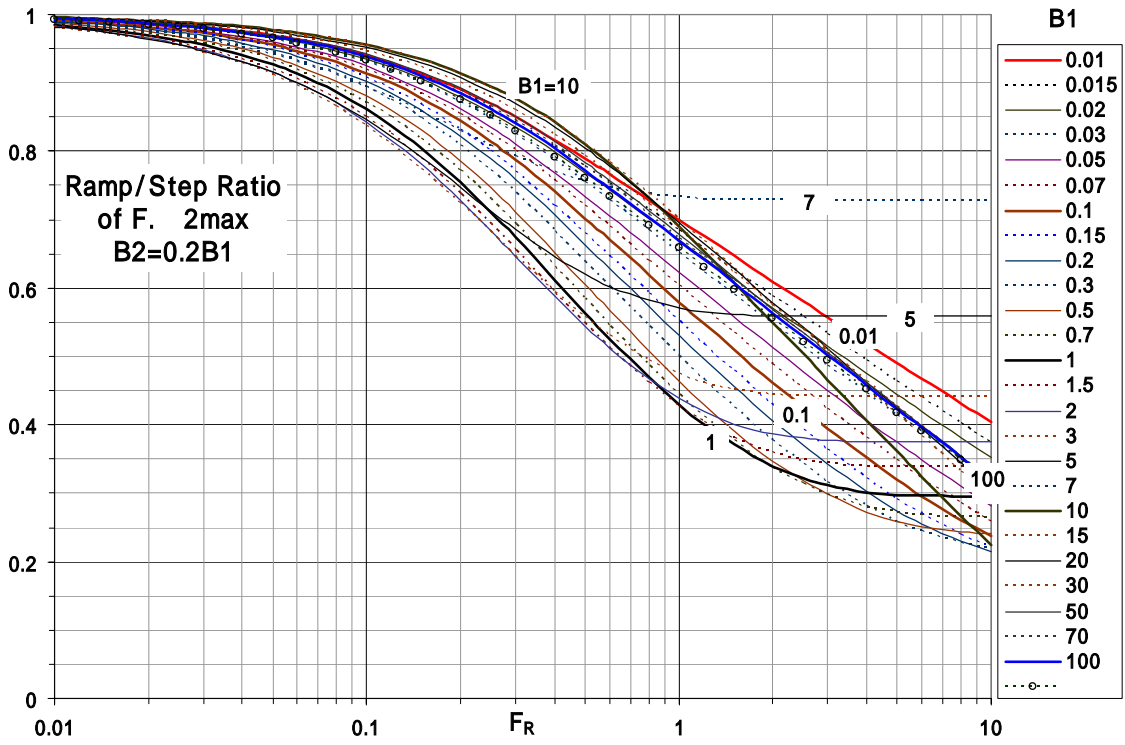


Fig. 2.7.4(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0.2B_1$)

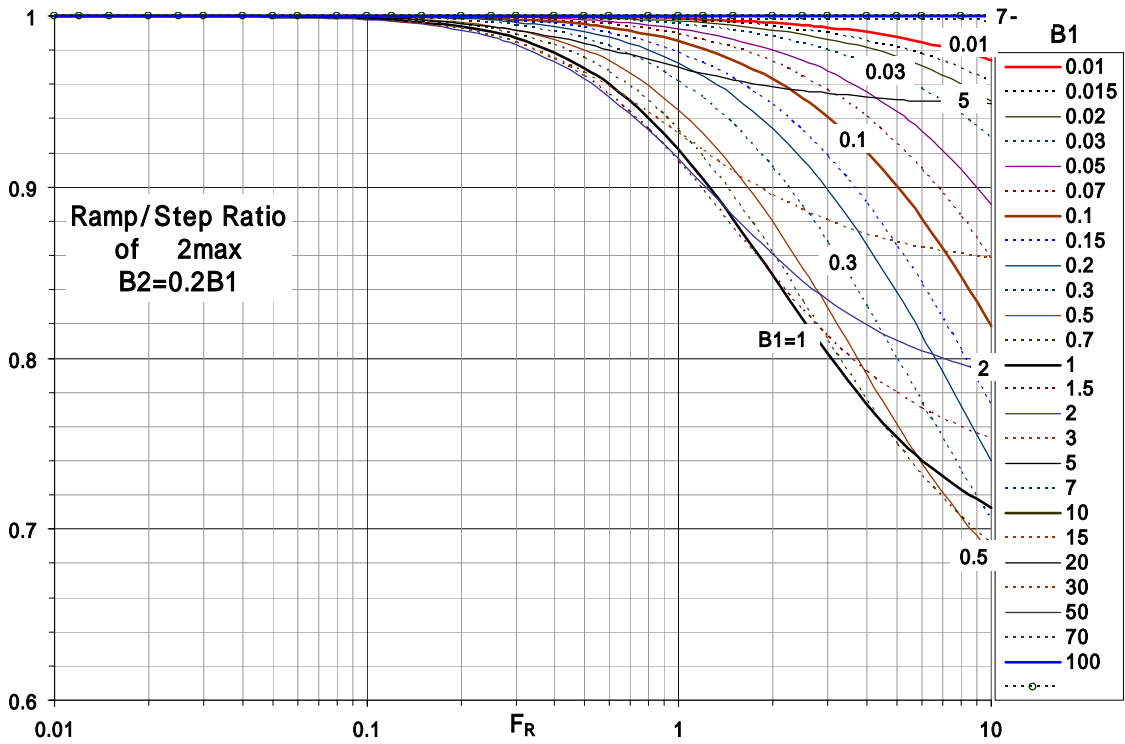


Fig.2.7.4(2b) 背面の熱応力最大値の比 ($B_2=0.2B_1$)

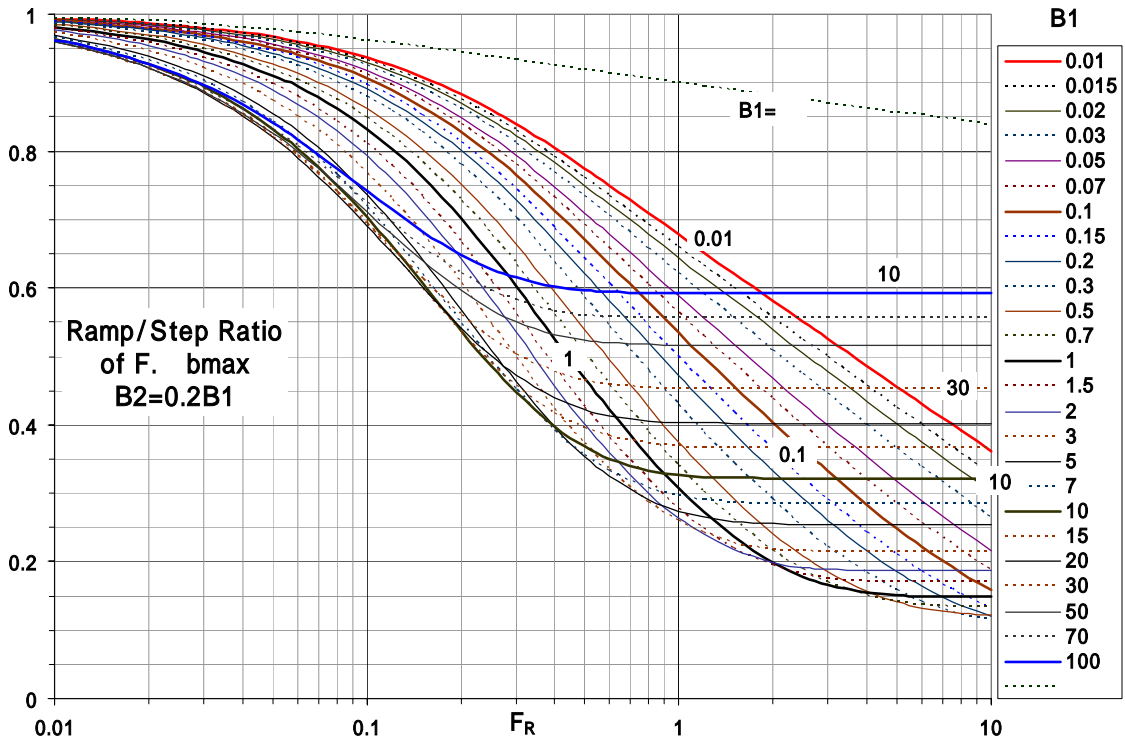


Fig.2.7.4(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=0.2B_1$)

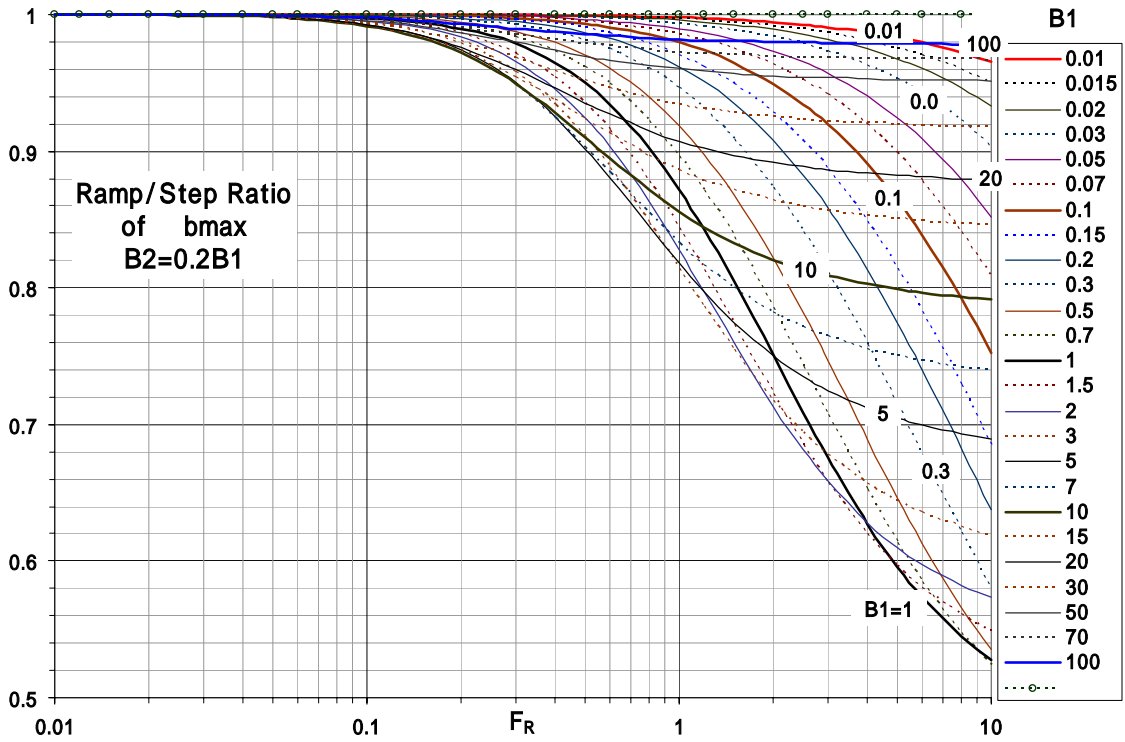


Fig.2.7.4(3b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2=0.2B_1$)

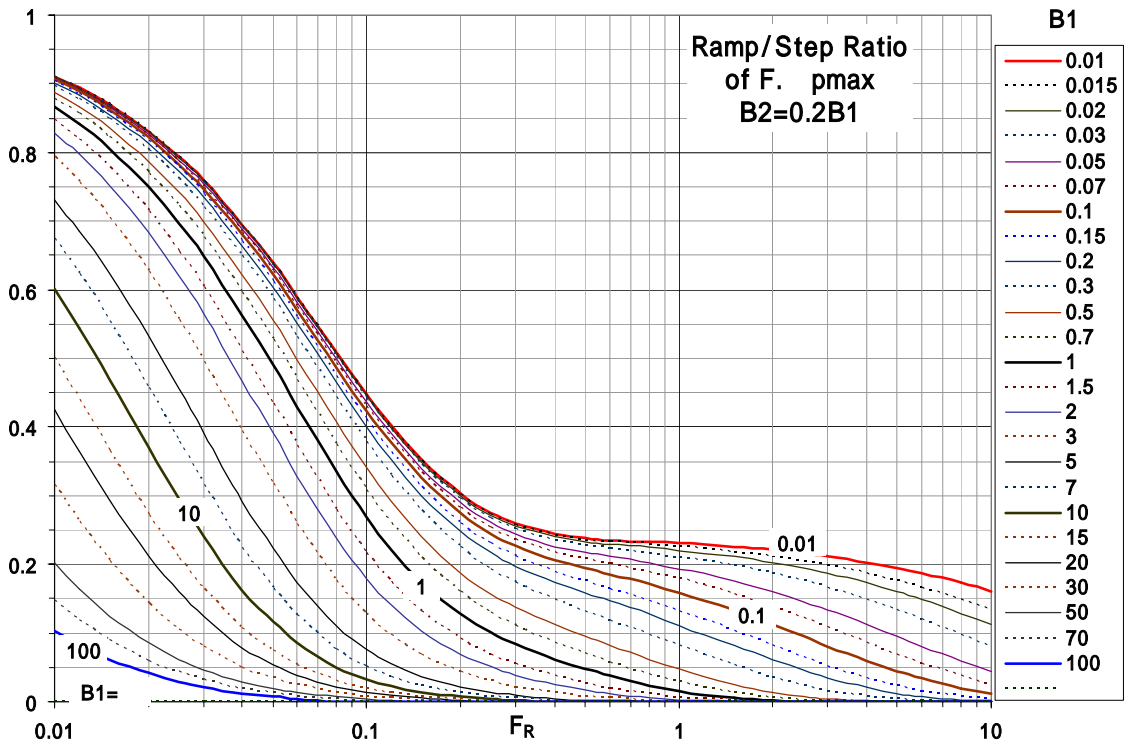


Fig.2.7.4(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 (B₂=0.2B₁)

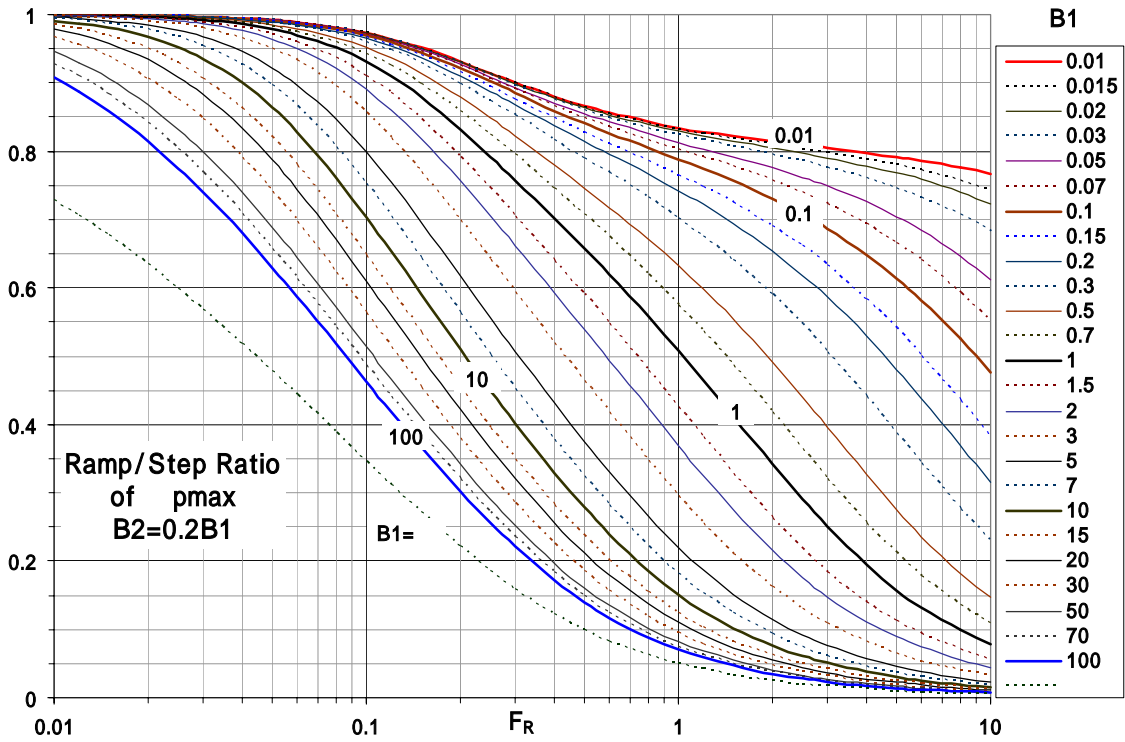


Fig.2.7.4(4b) 熱ピーク応力最大値の比 (B₂=0.2B₁)

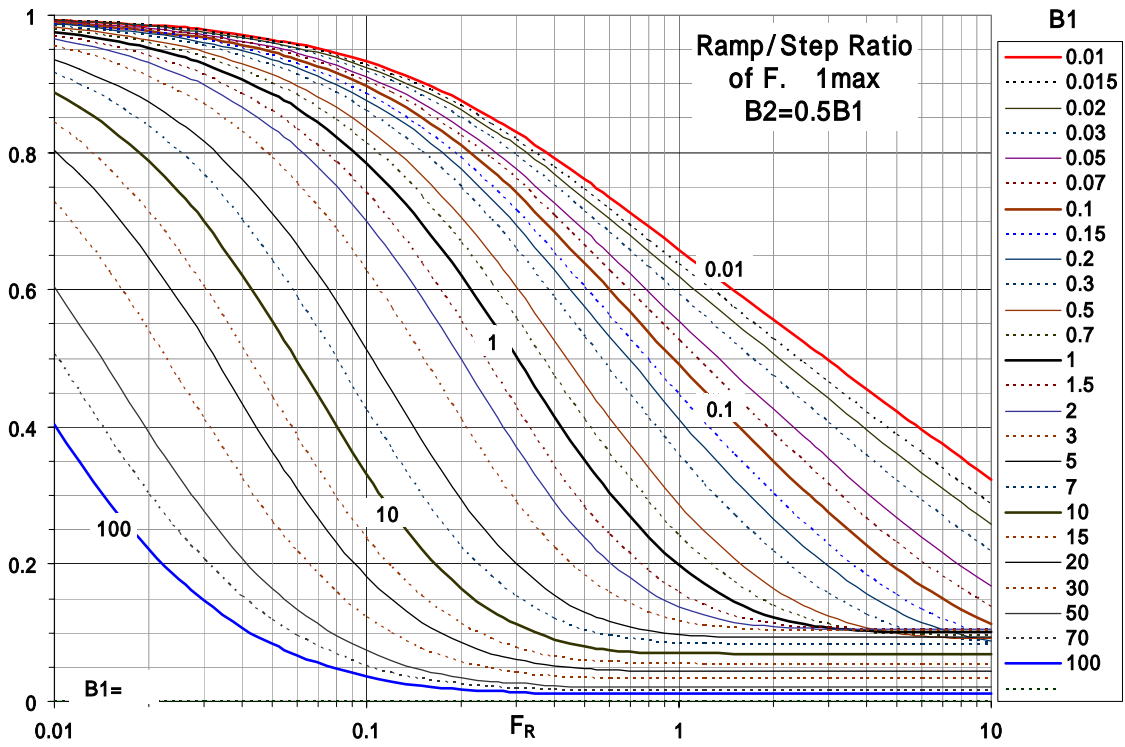


Fig. 2.7.5(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0.5B_1$)

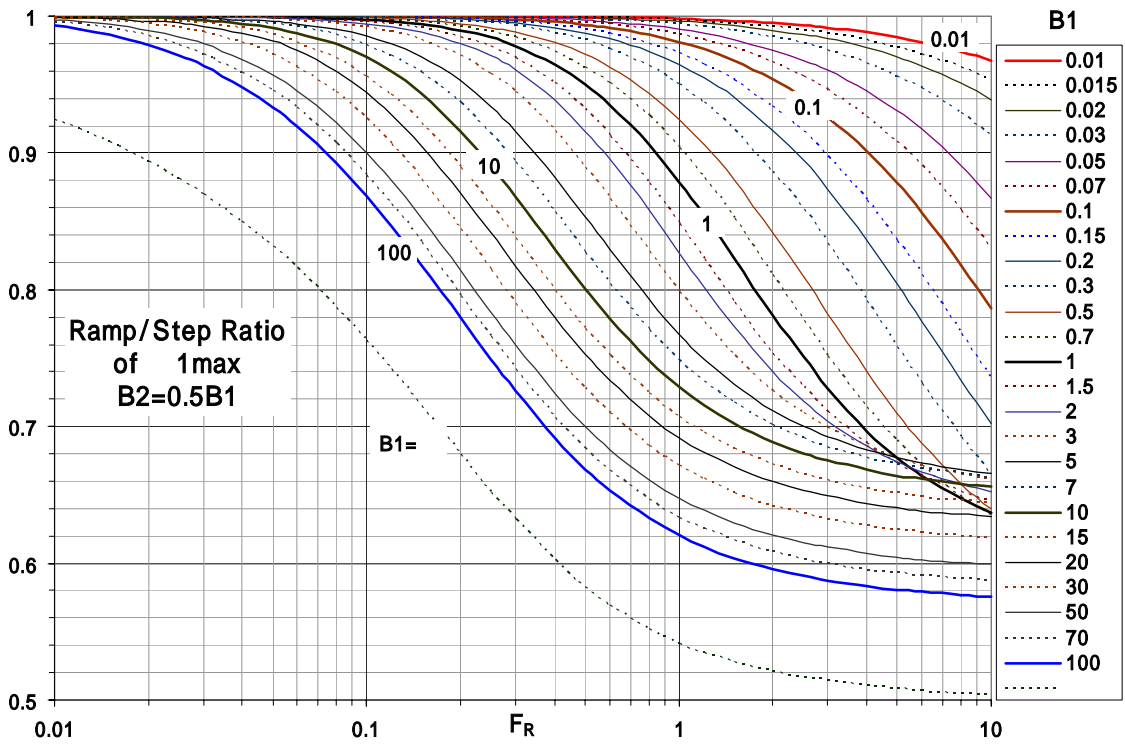


Fig. 2.7.5(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=0.5B_1$)

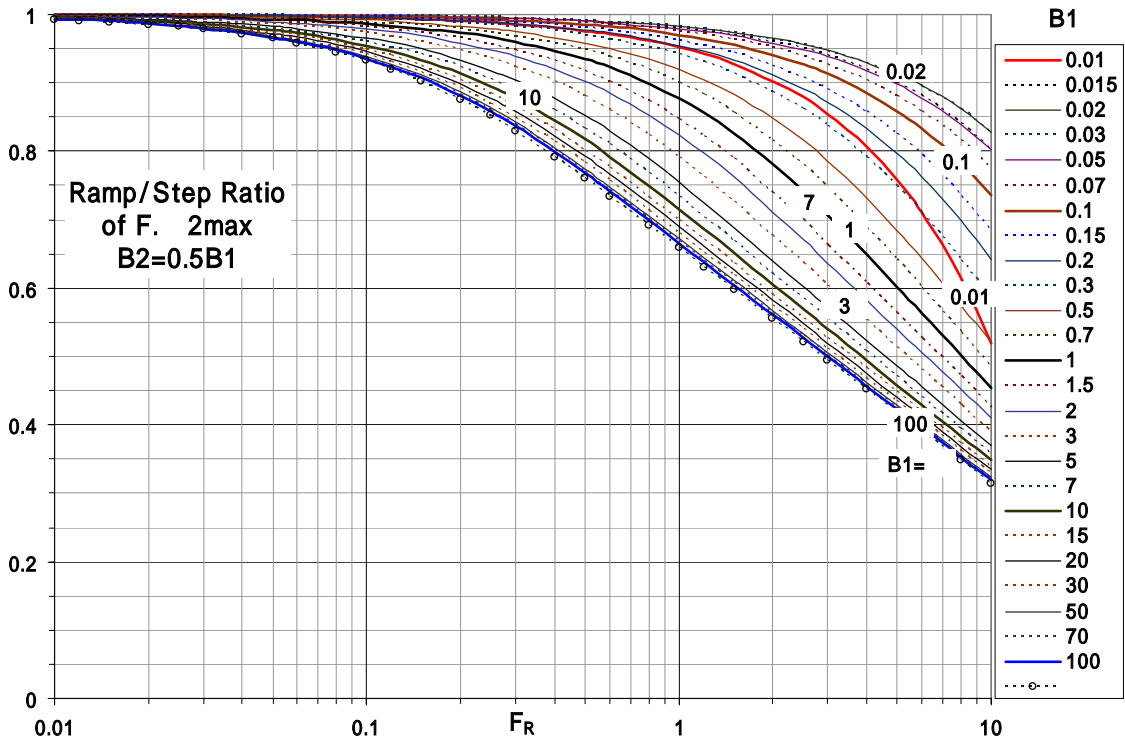


Fig. 2.7.5(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=0.5B_1$)

(図省略。 $\frac{\sigma_{2,max}(F_R)}{\sigma_{2,max}(0)} = 1$ である。 $B_2 = 0.5B_1$ ではステップ変化およびランプ変化とも定常応力が最大値となる。)

Fig.2.7.5(2b) 背面の熱応力最大値の比 ($B_2=0.5B_1$)

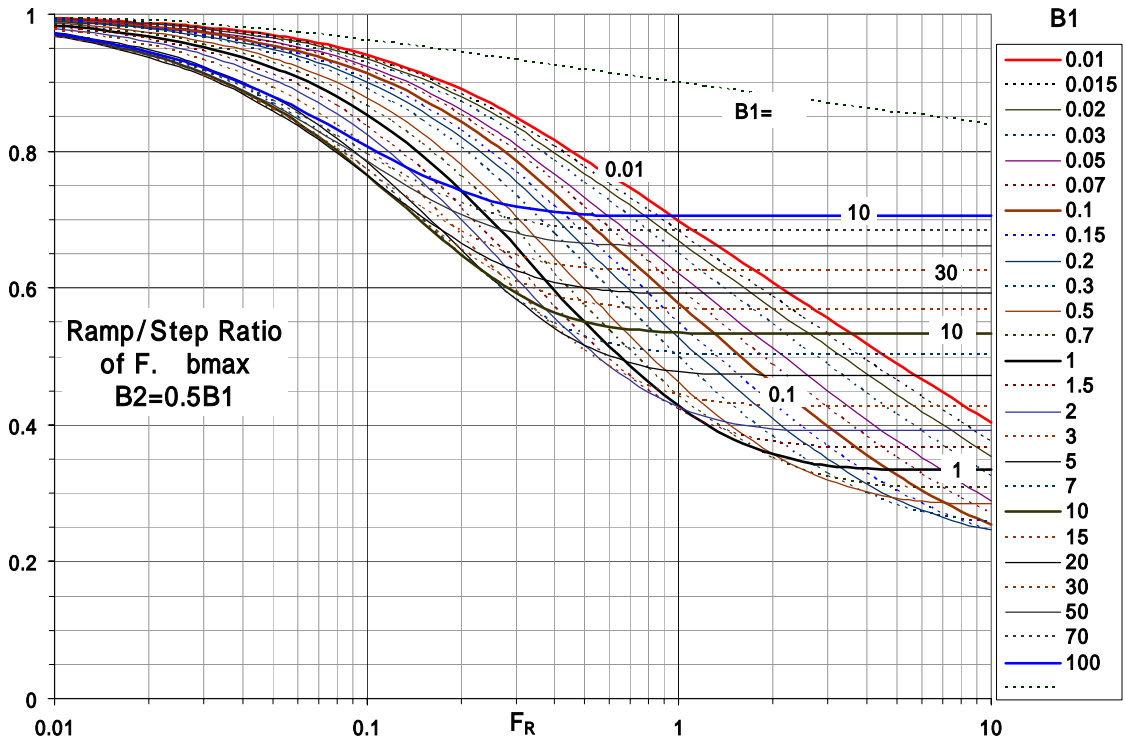


Fig.2.7.5(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=0.5B_1$)

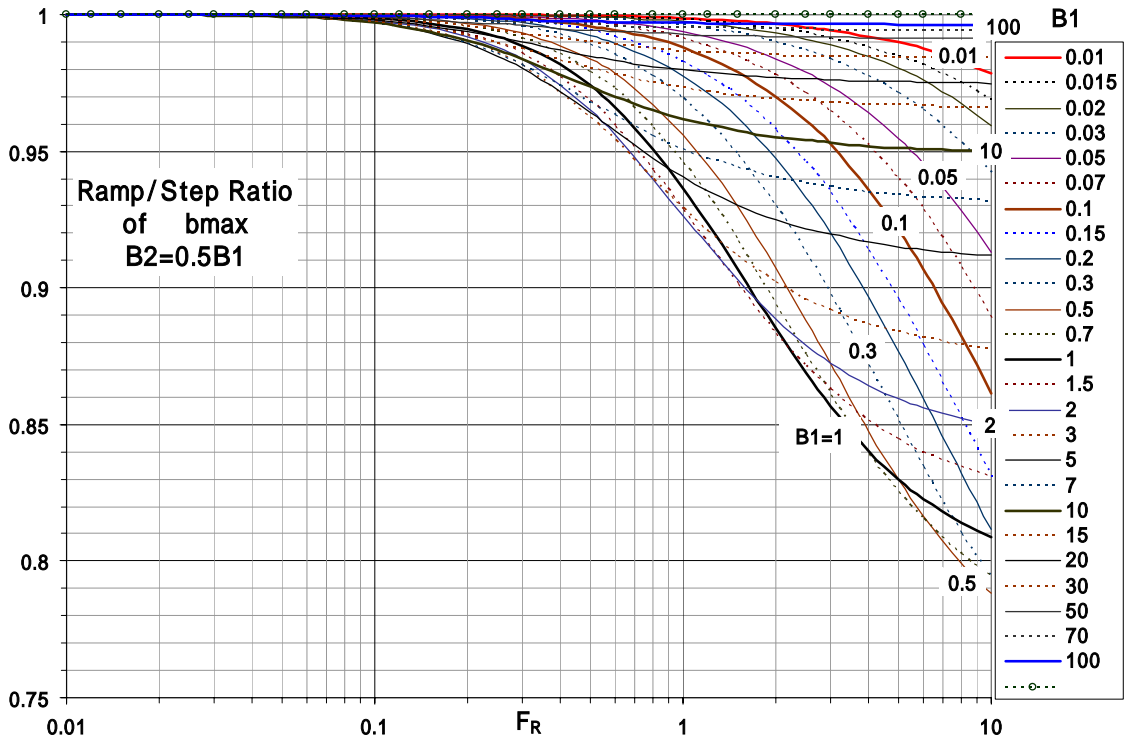


Fig.2.7.5(3b) 熱曲げ応力最大値の比 ($B_2=0.5B_1$)

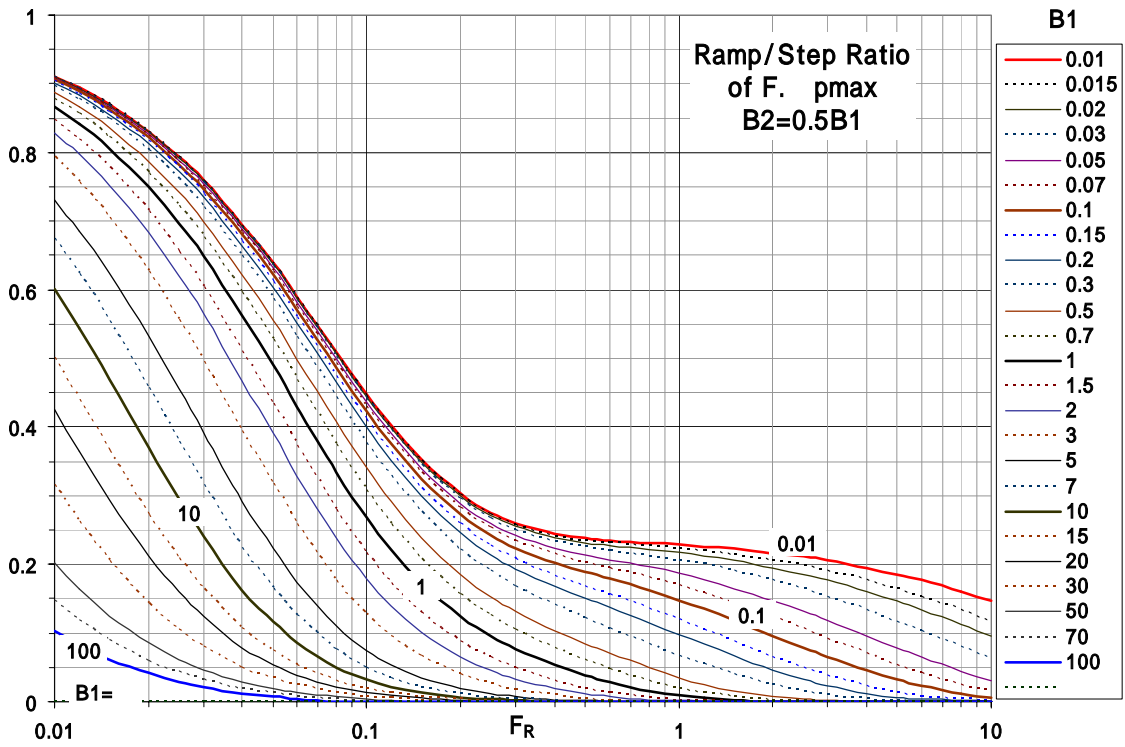


Fig.2.7.5(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 (B₂=0.5B₁)

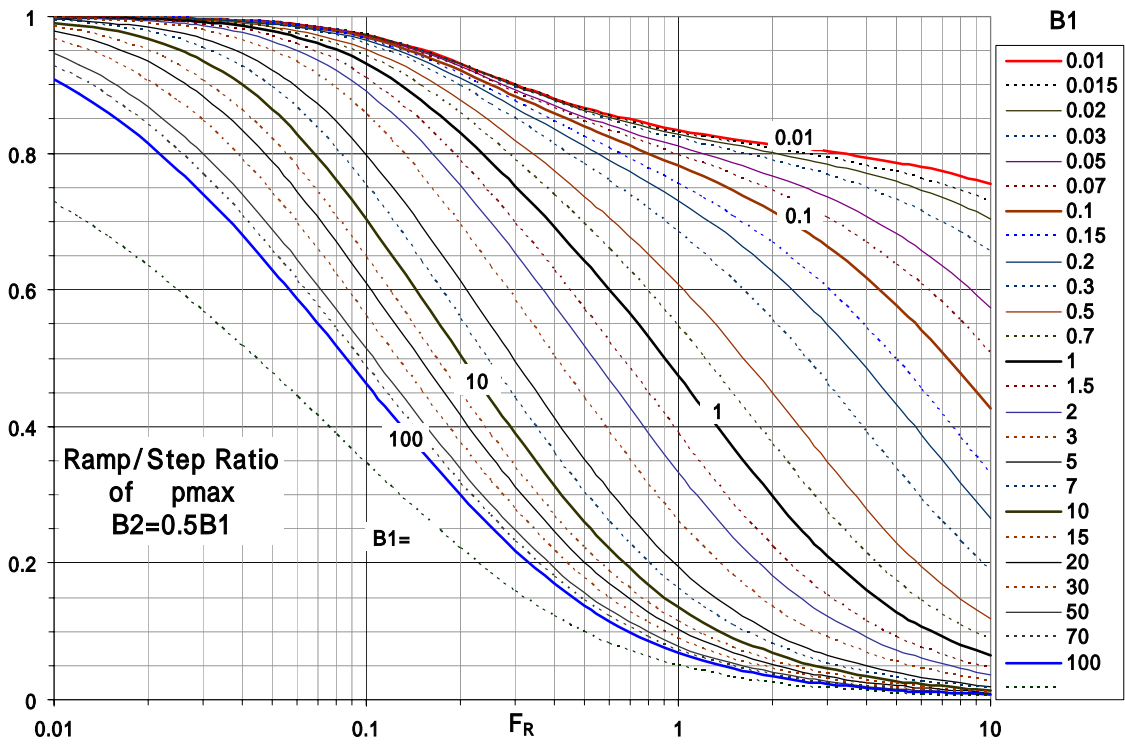


Fig.2.7.5(4b) 熱ピーク応力最大値の比 (B₂=0.5B₁)

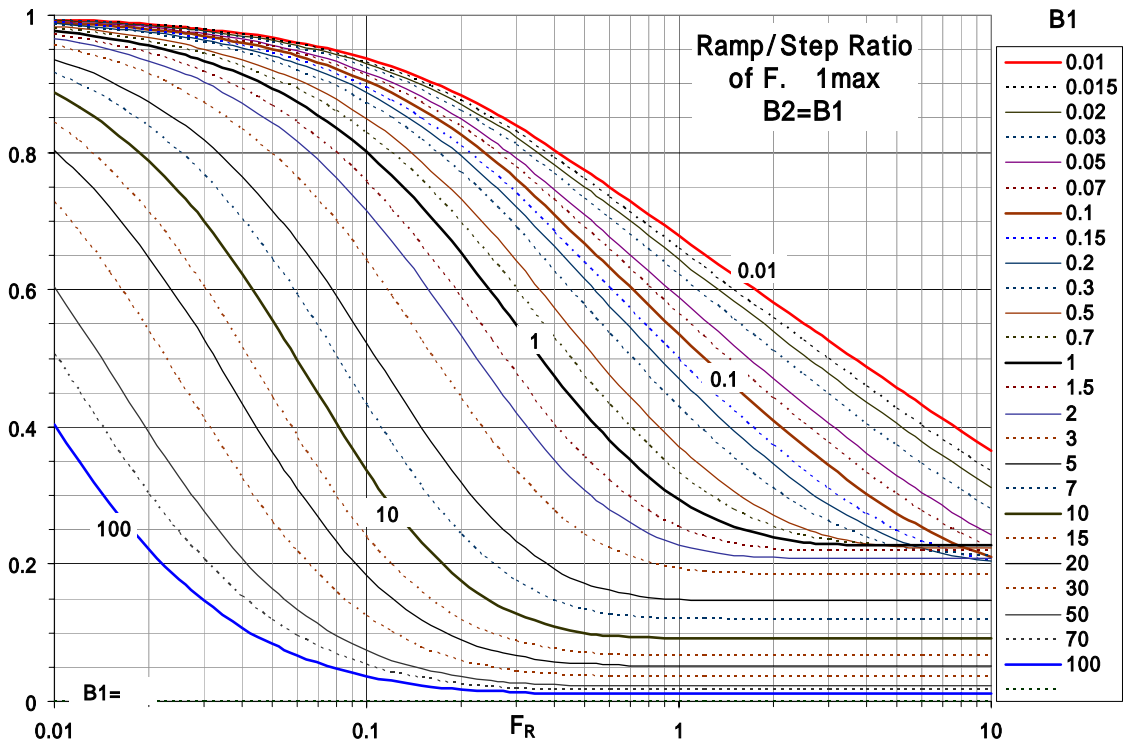


Fig. 2.7.6(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=B_1$)

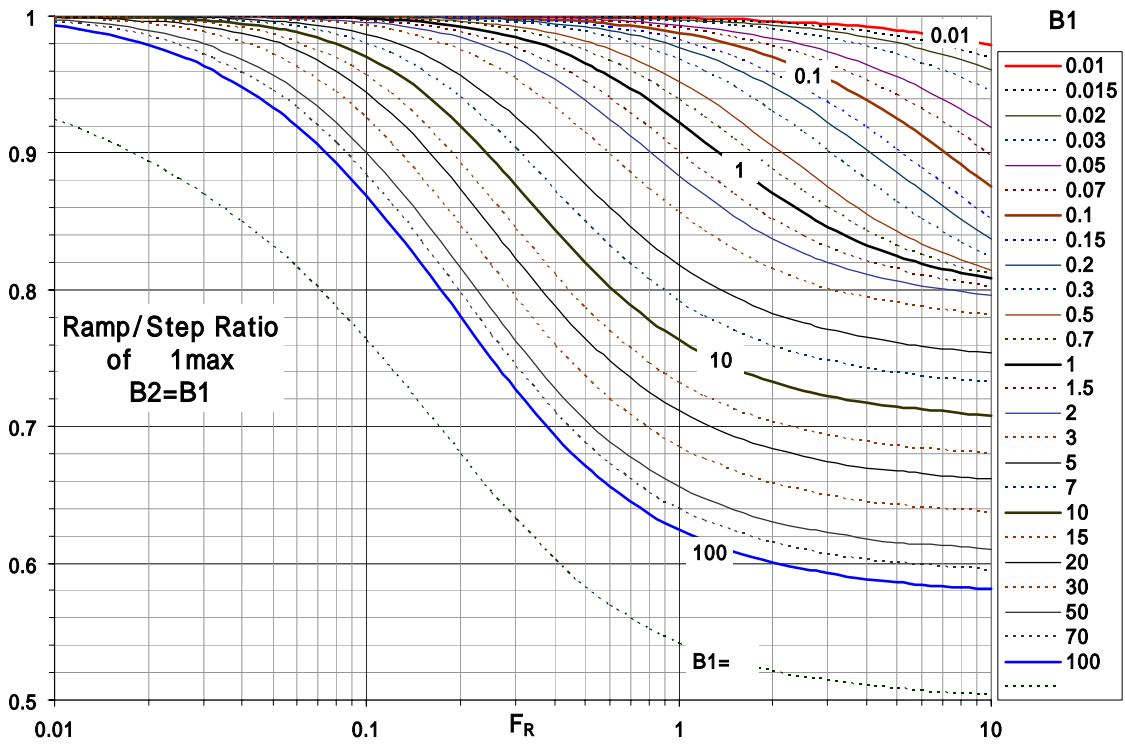


Fig. 2.7.6(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=B_1$)

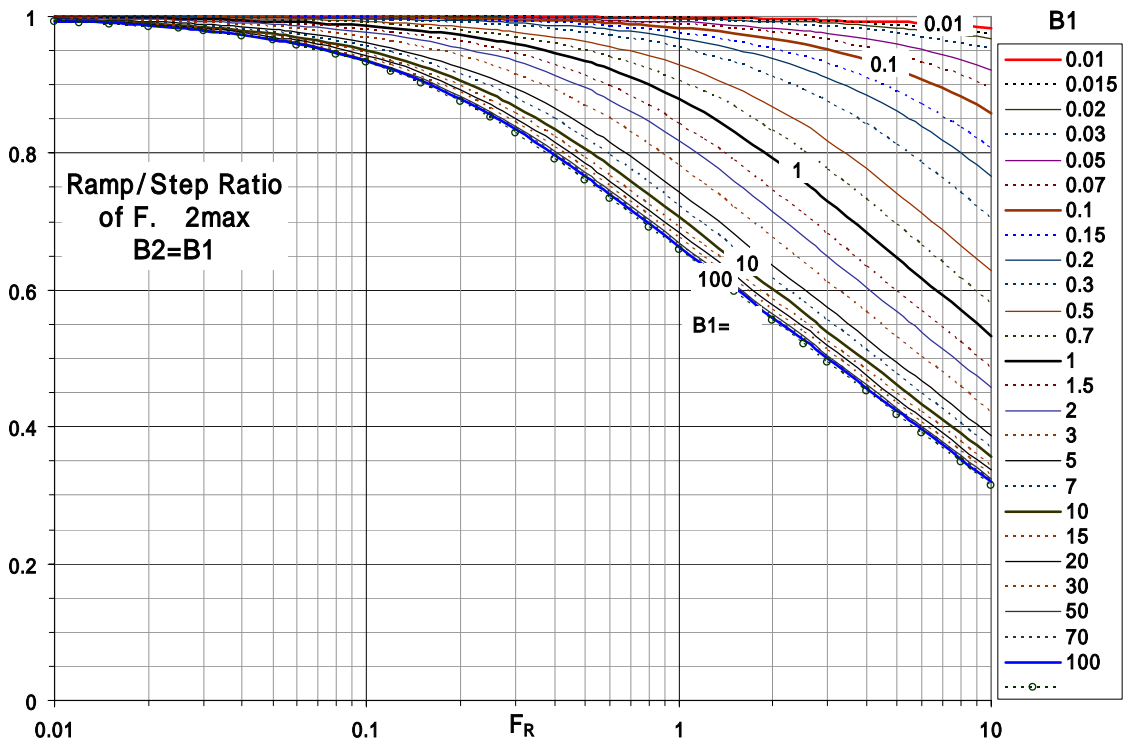


Fig. 2.7.6(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=B_1$)

Fig.2.7.6(2b) (図省略、 $\frac{2_{,max}(F_R)}{2_{,max}(0)} = 1$)

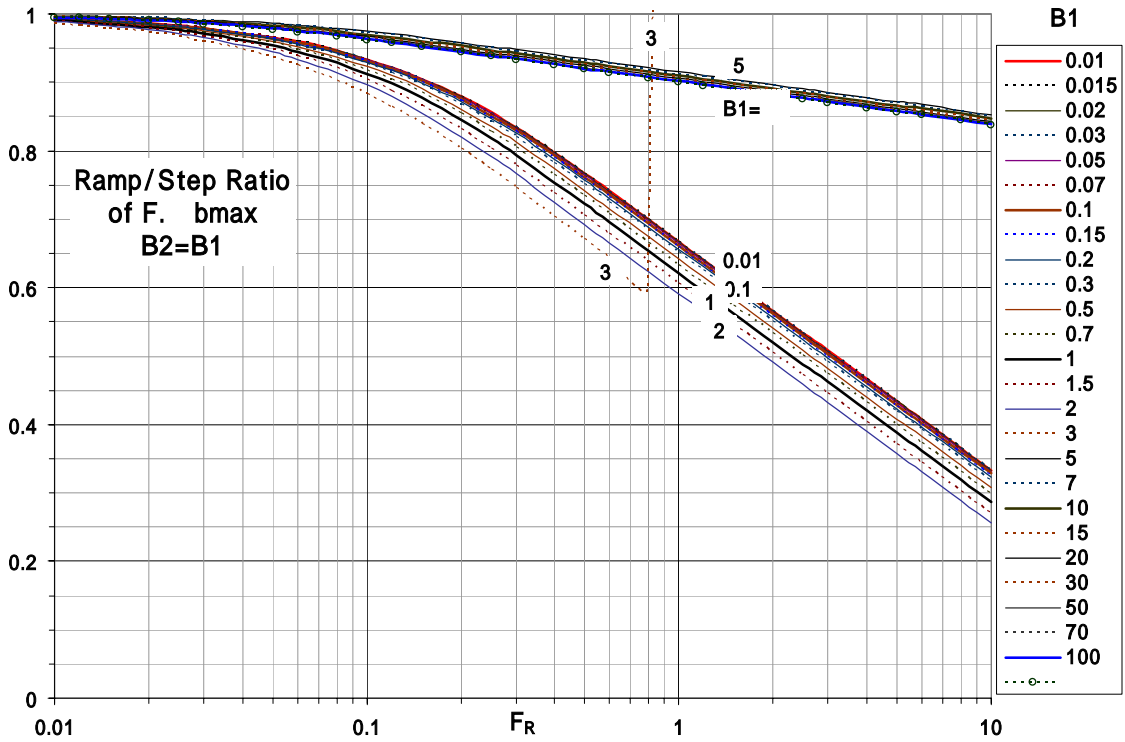


Fig.2.7.6(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=B_1$)

Fig.2.7.6(3b) (図省略、 $\frac{b_{,max}(F_R)}{b_{,max}(0)} = 1$)

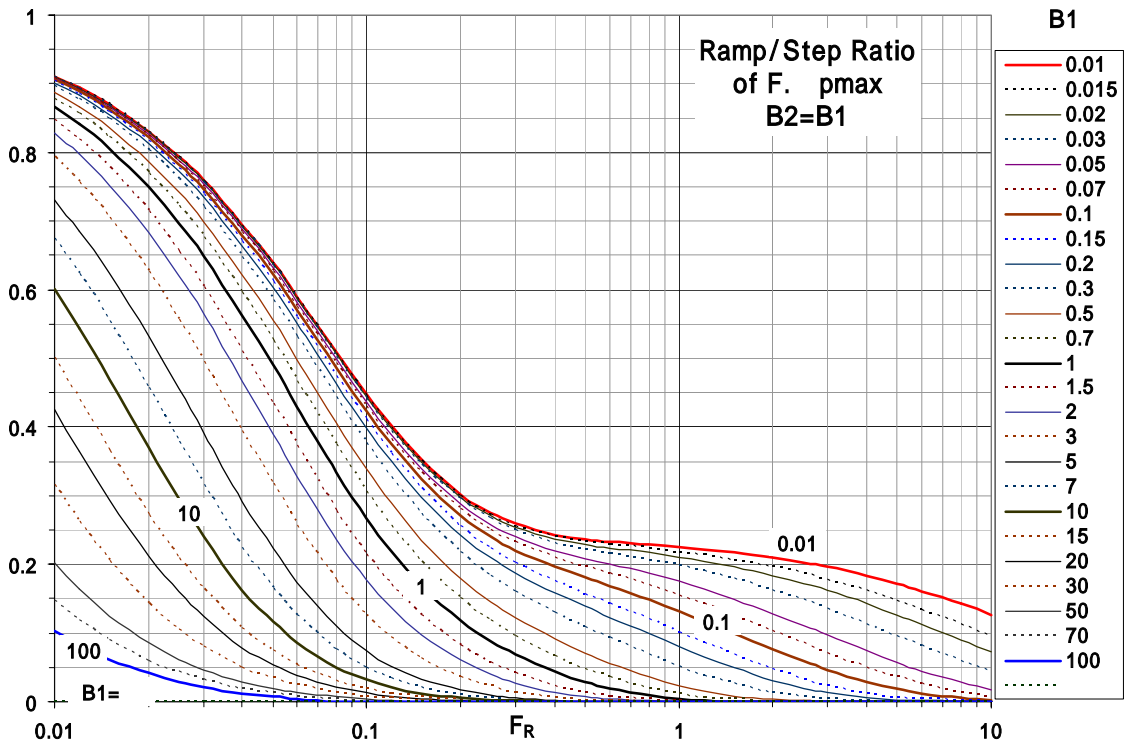


Fig.2.7.6(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2=B_1$)

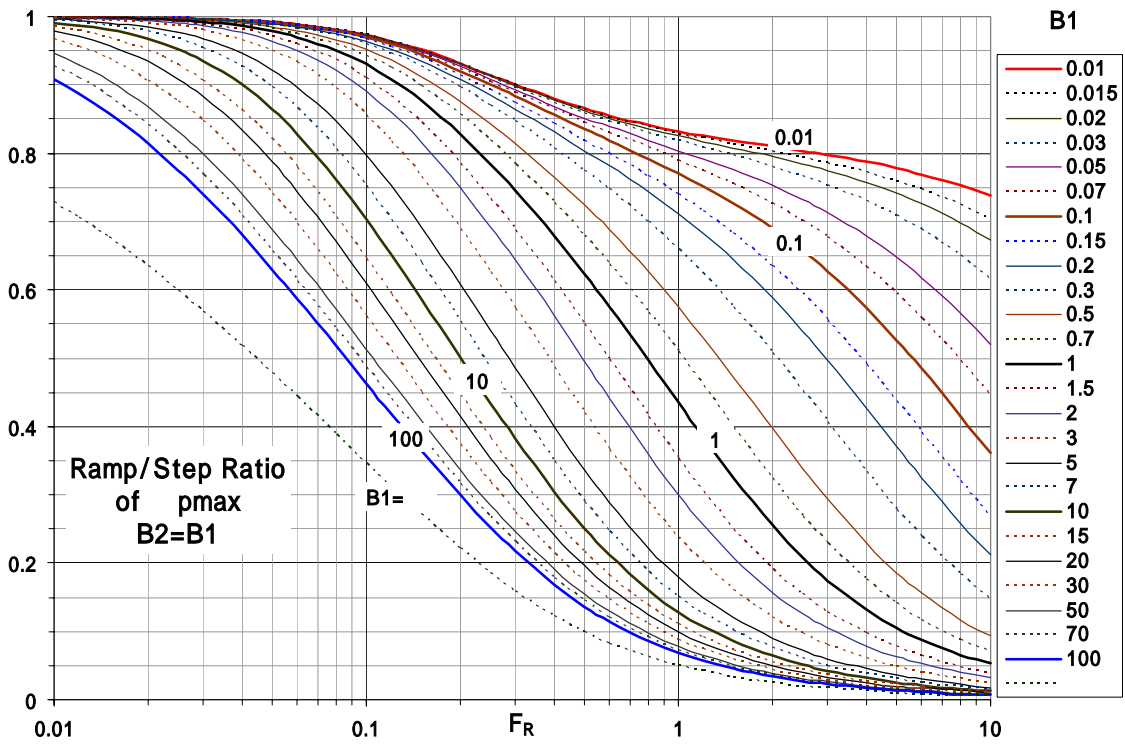


Fig.2.7.6(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2=B_1$)

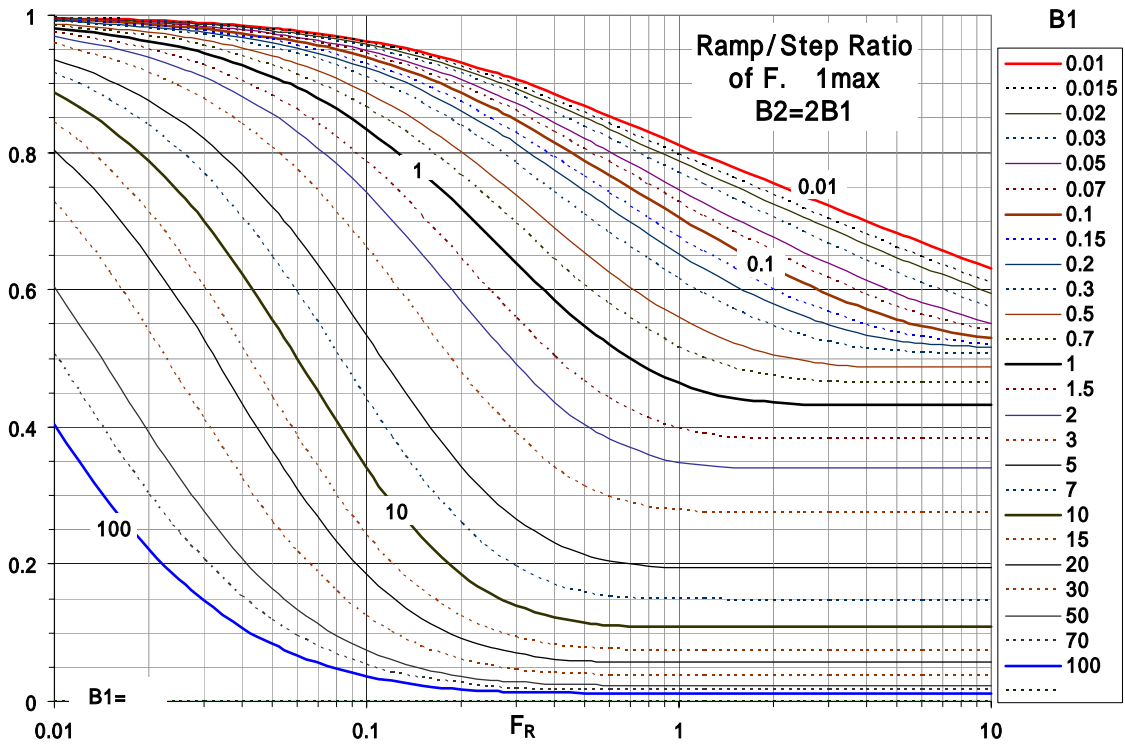


Fig. 2.7.7(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=2B_1$)

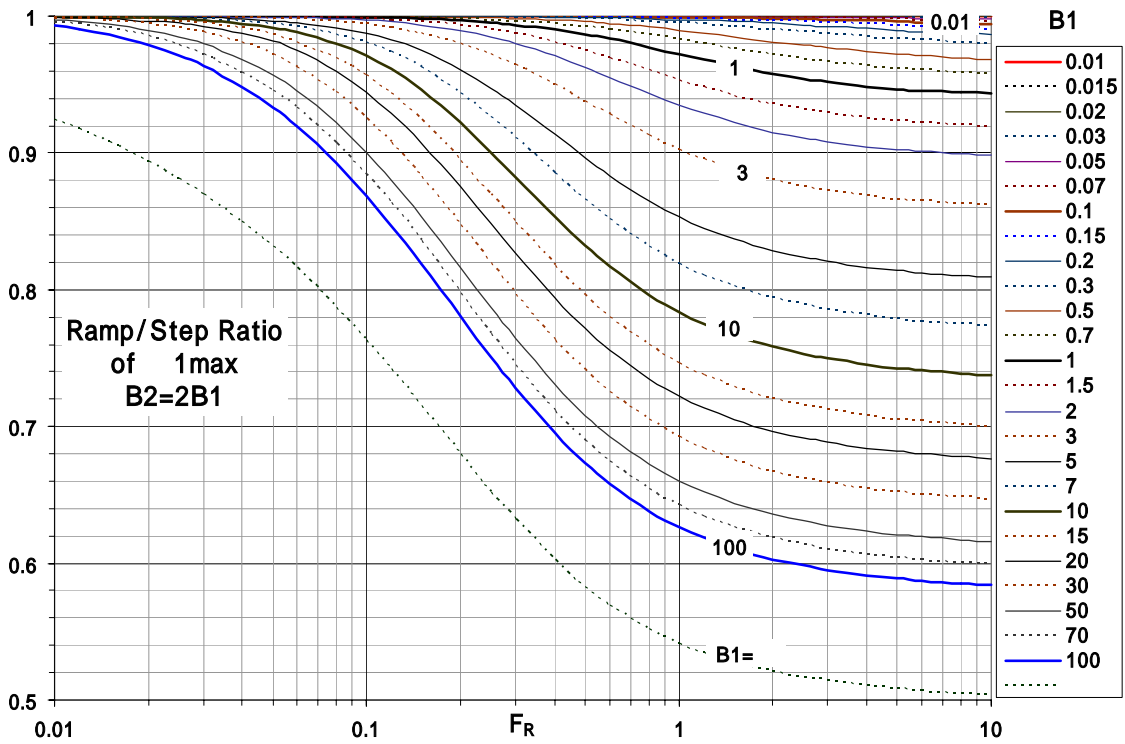


Fig. 2.7.7(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=2B_1$)

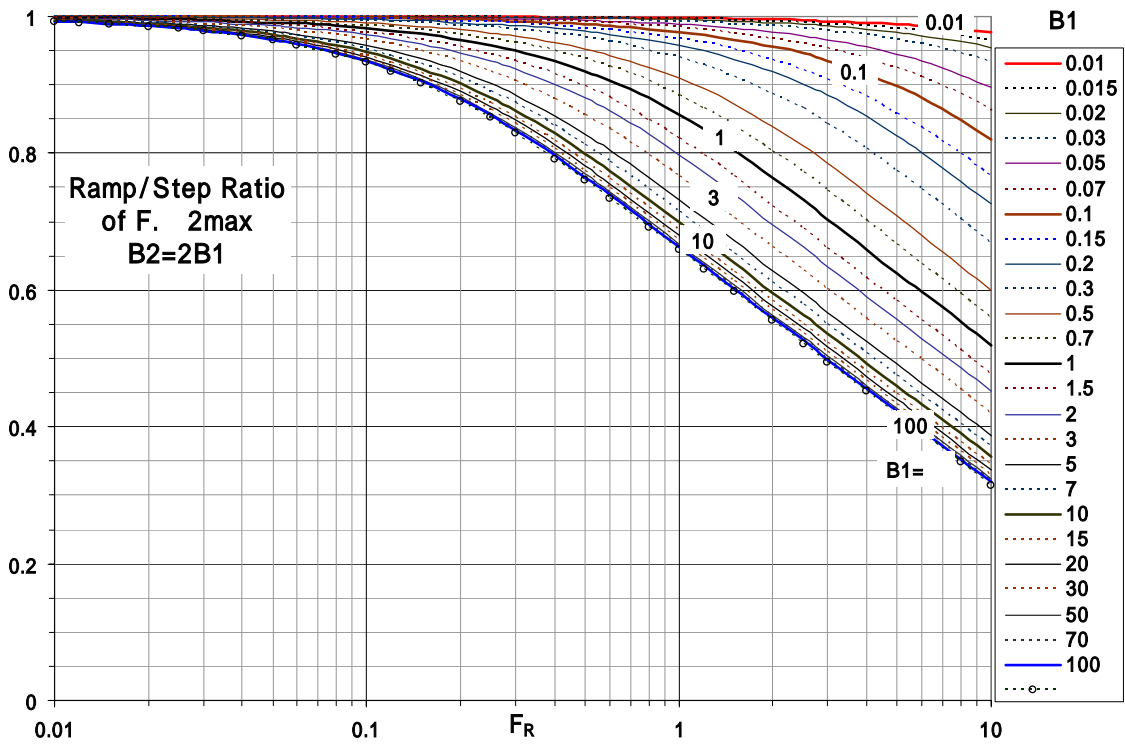


Fig. 2.7.7(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=2B_1$)

Fig.2.7.7(2b) (図省略、 $z_{\max}(F_R) / z_{\max}(0) = 1$)

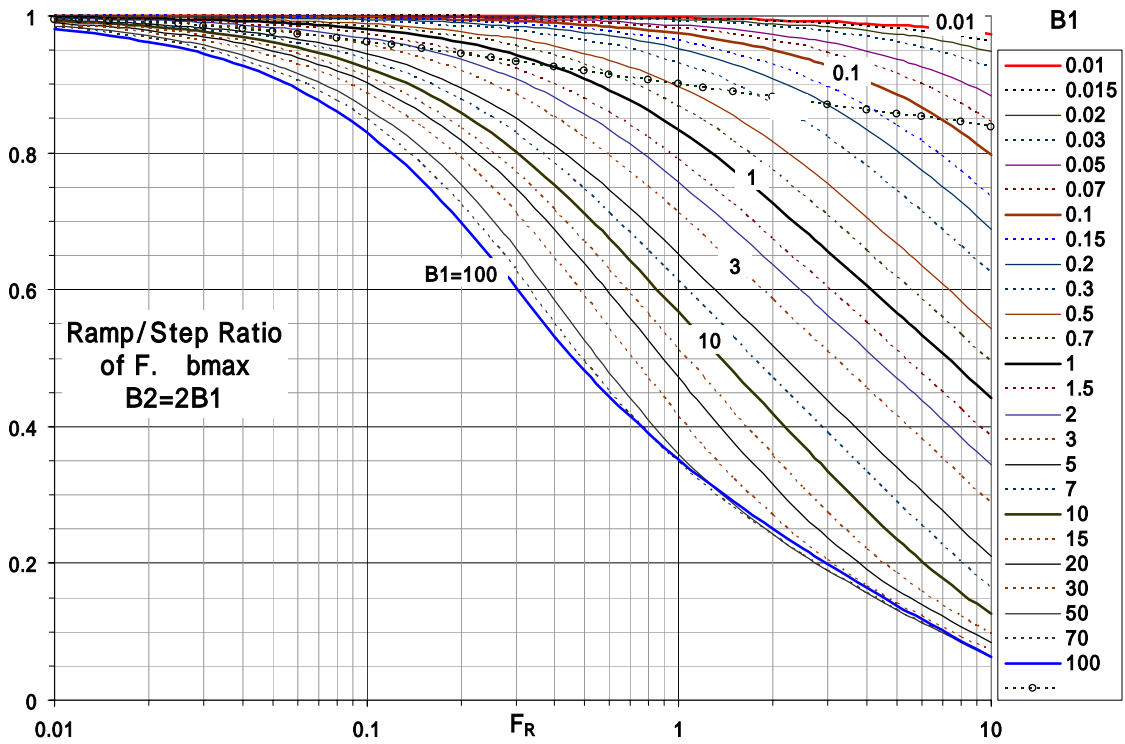


Fig.2.7.7(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=2B_1$)

Fig.2.7.7(3b) (図省略、 $b_{\max}(F_R) / b_{\max}(0) = 1$)

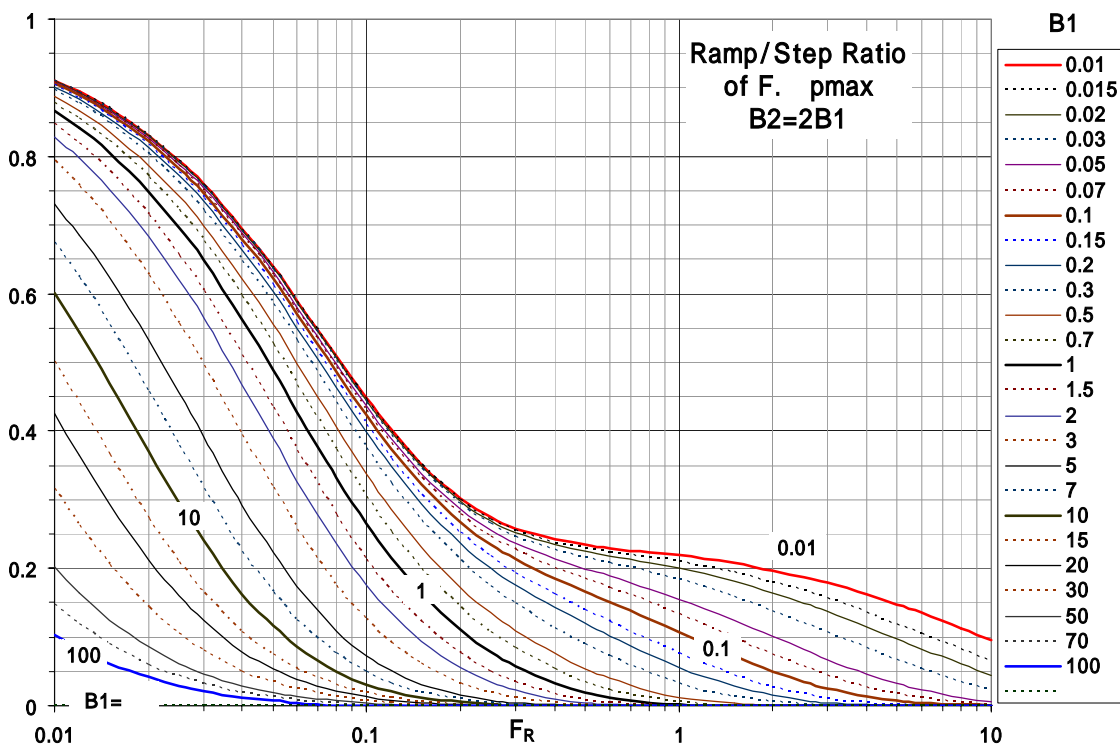


Fig.2.7.7(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2=2B_1$)

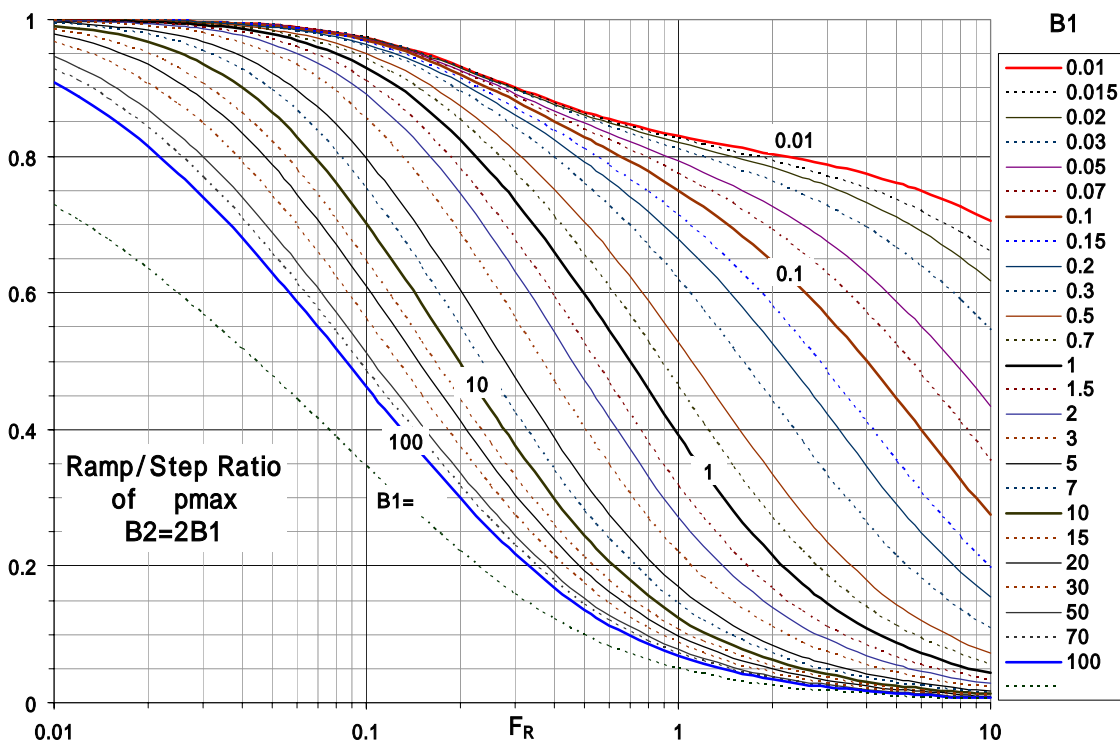


Fig.2.7.7(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2=2B_1$)

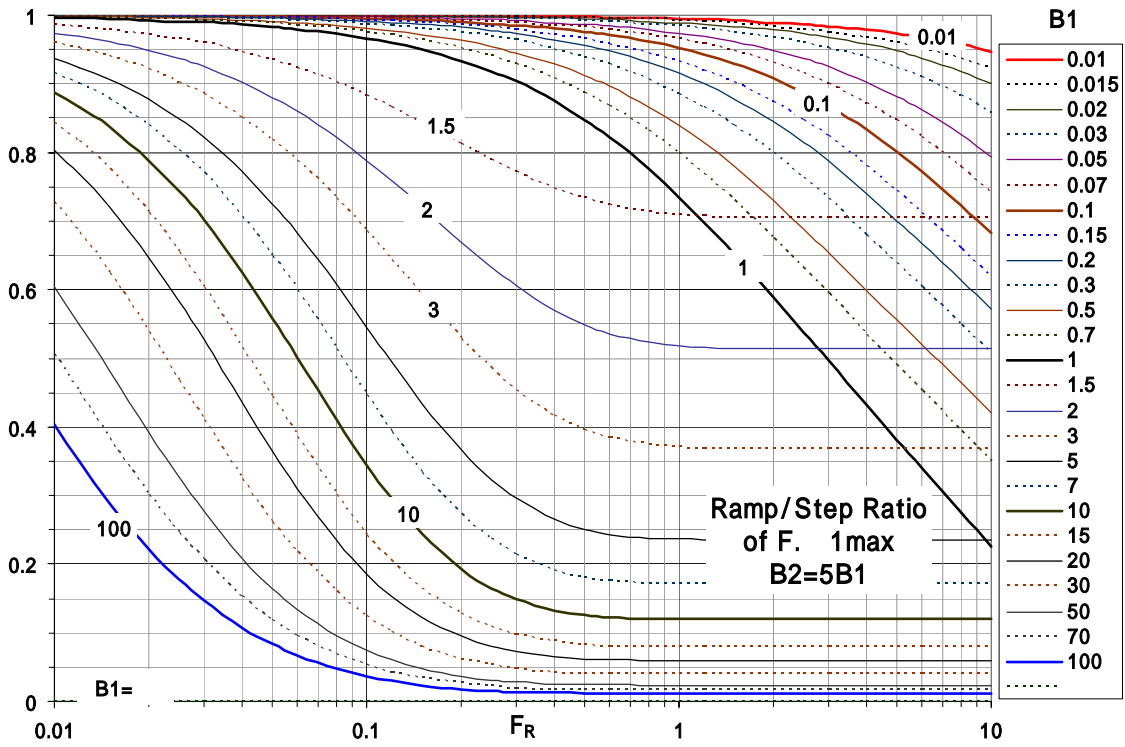


Fig. 2.7.8(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=5B_1$)

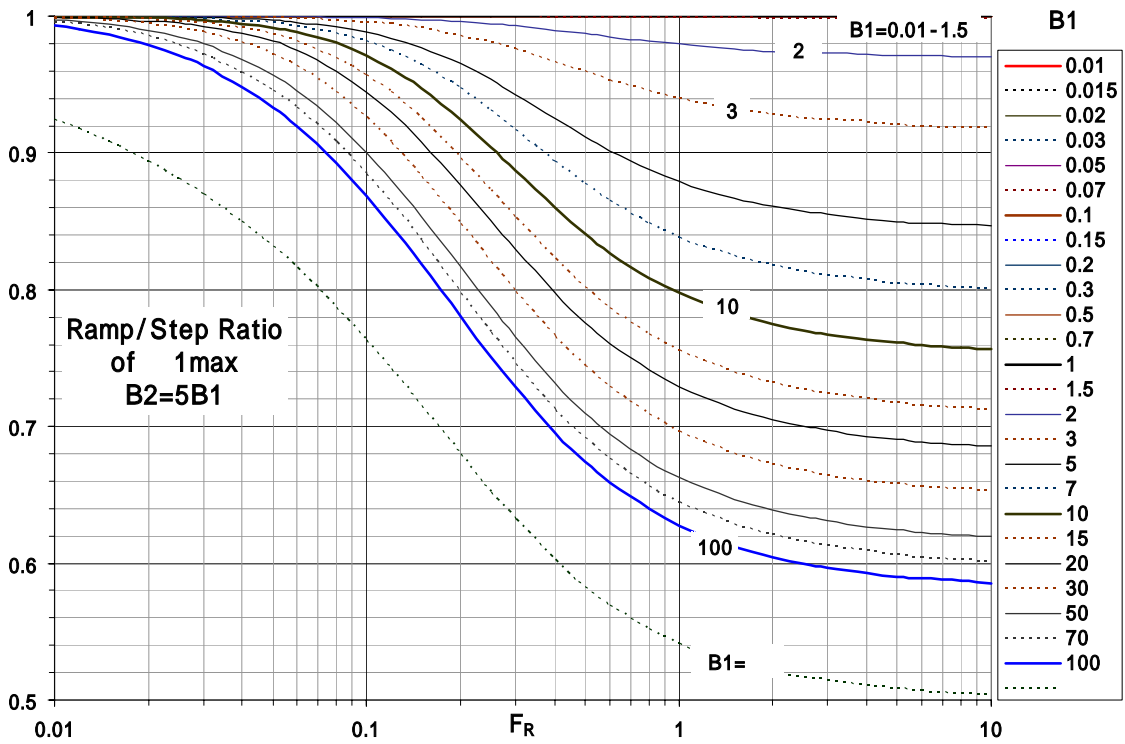


Fig. 2.7.8(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=5B_1$)

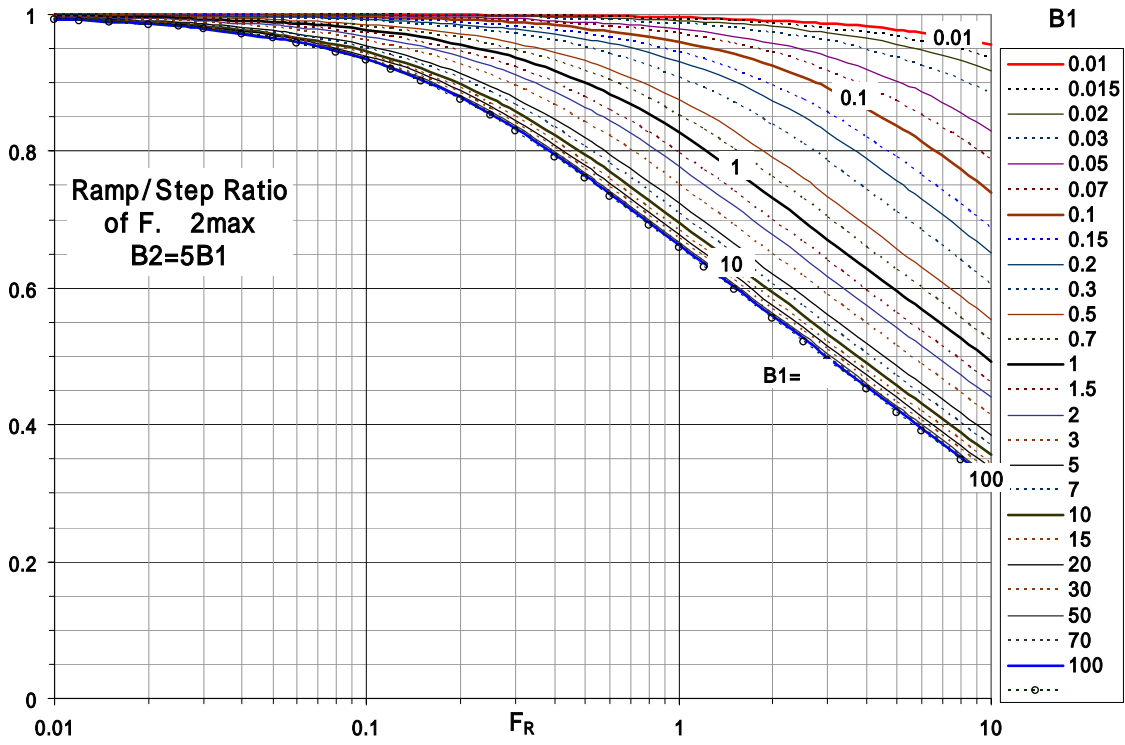


Fig. 2.7.8(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=5B_1$)

Fig.2.7.8(2b) (図省略、 $z_{\max}(F_R) / z_{\max}(0) = 1$)

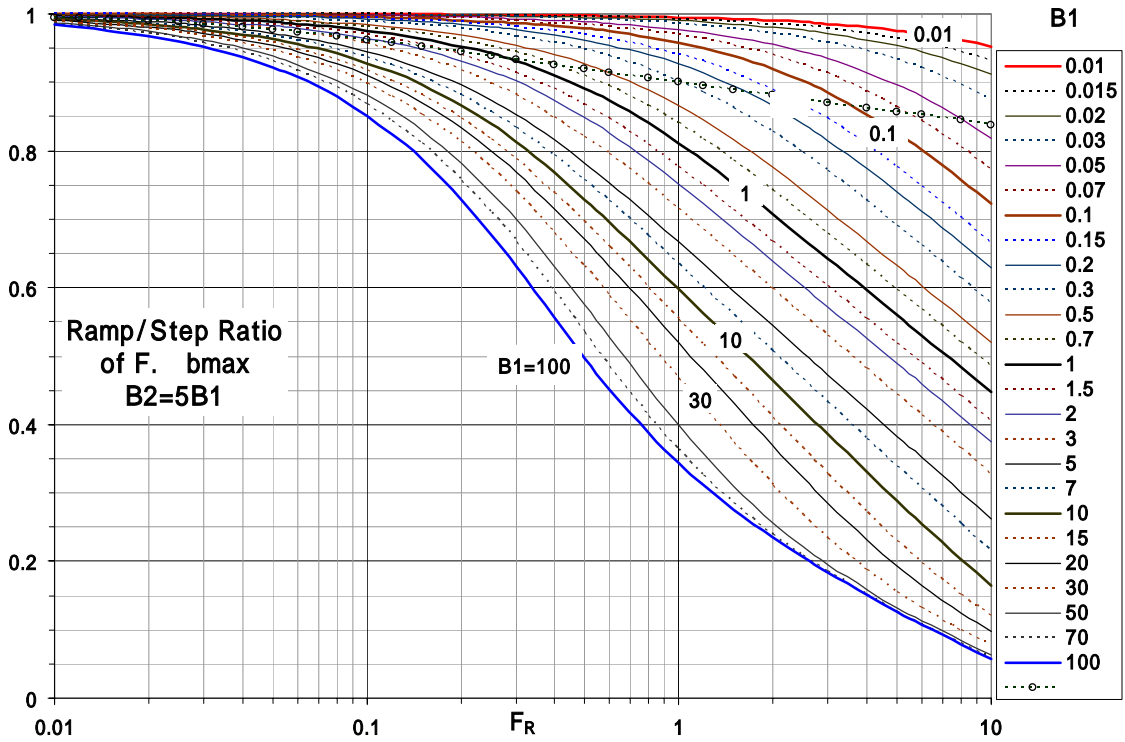


Fig.2.7.8(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=5B_1$)

Fig.2.7.8(3b) (図省略、 $b_{\max}(F_R) / b_{\max}(0) = 1$)

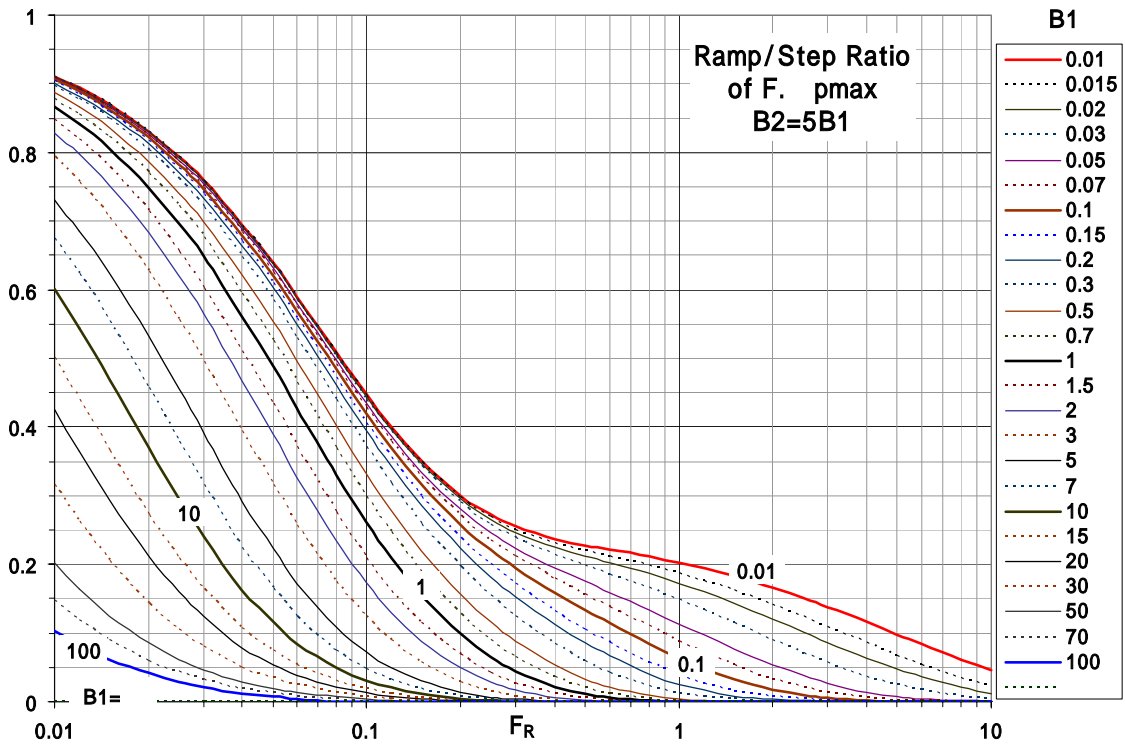


Fig.2.7.8(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2=5B_1$)

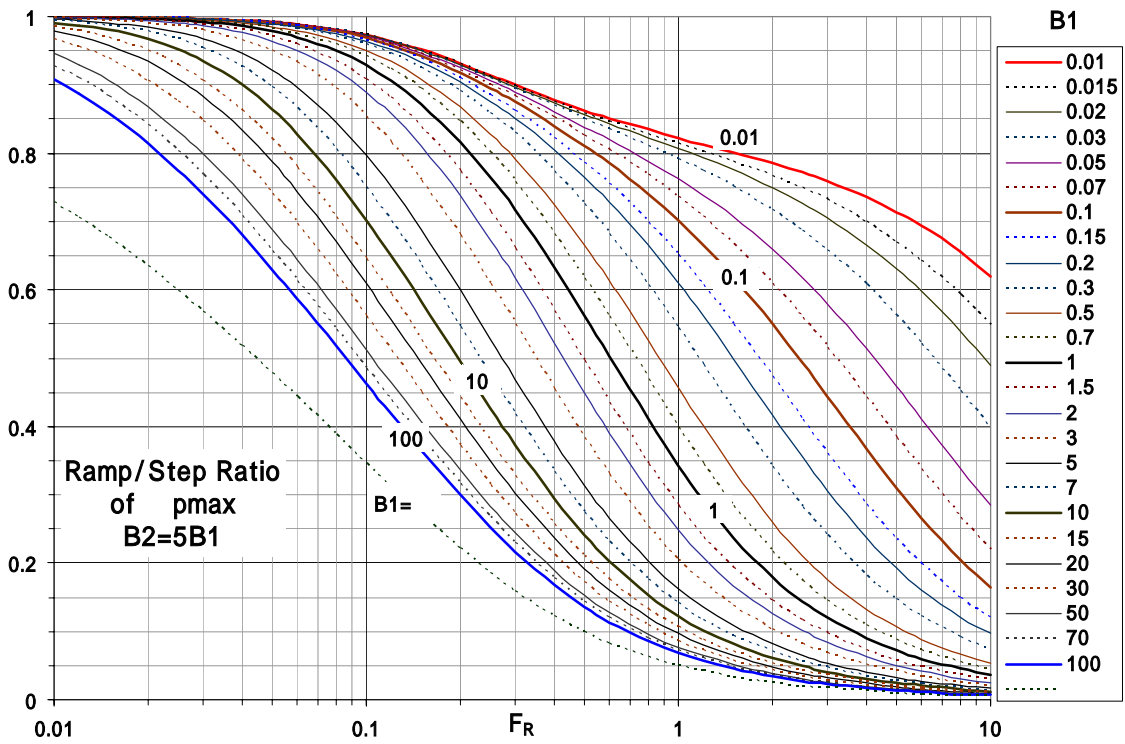


Fig.2.7.8(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2=5B_1$)

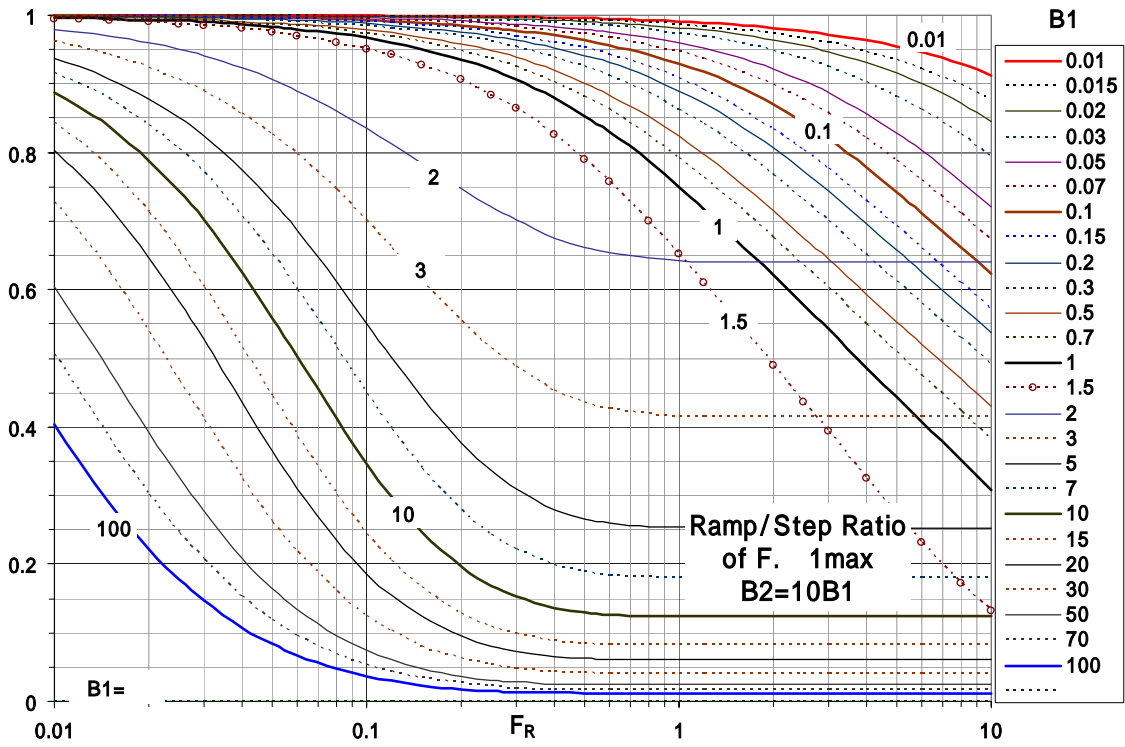


Fig. 2.7.9(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=10B_1$)

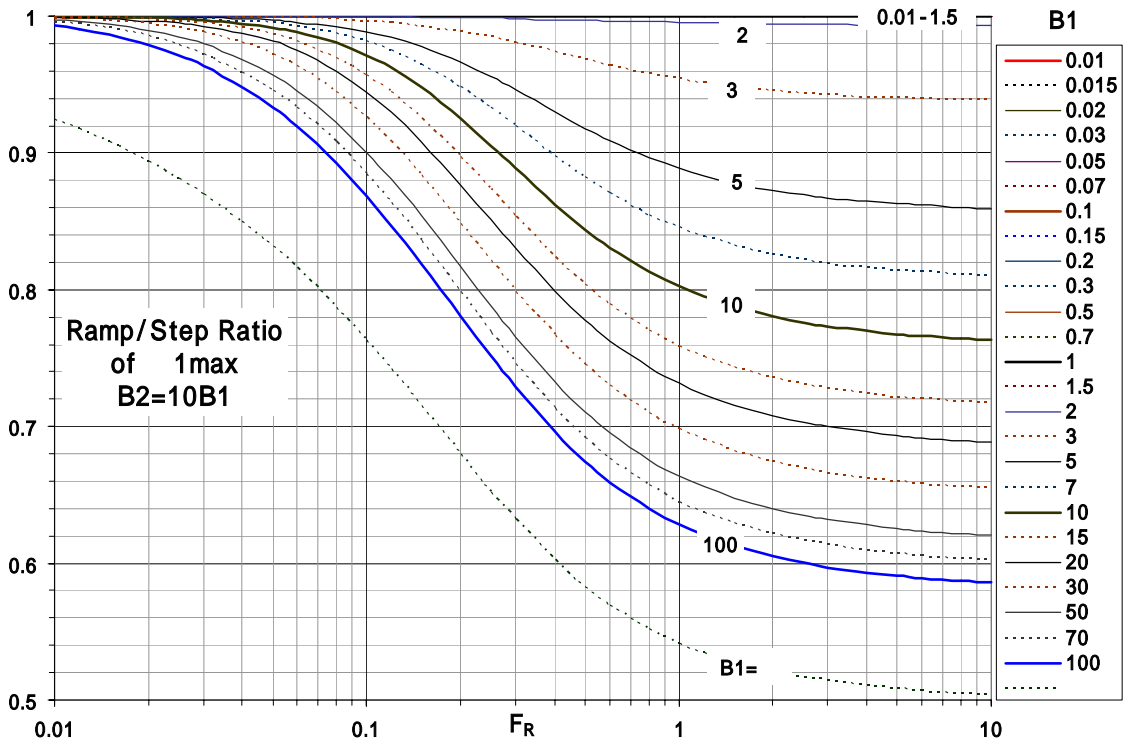


Fig. 2.7.9(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=10B_1$)

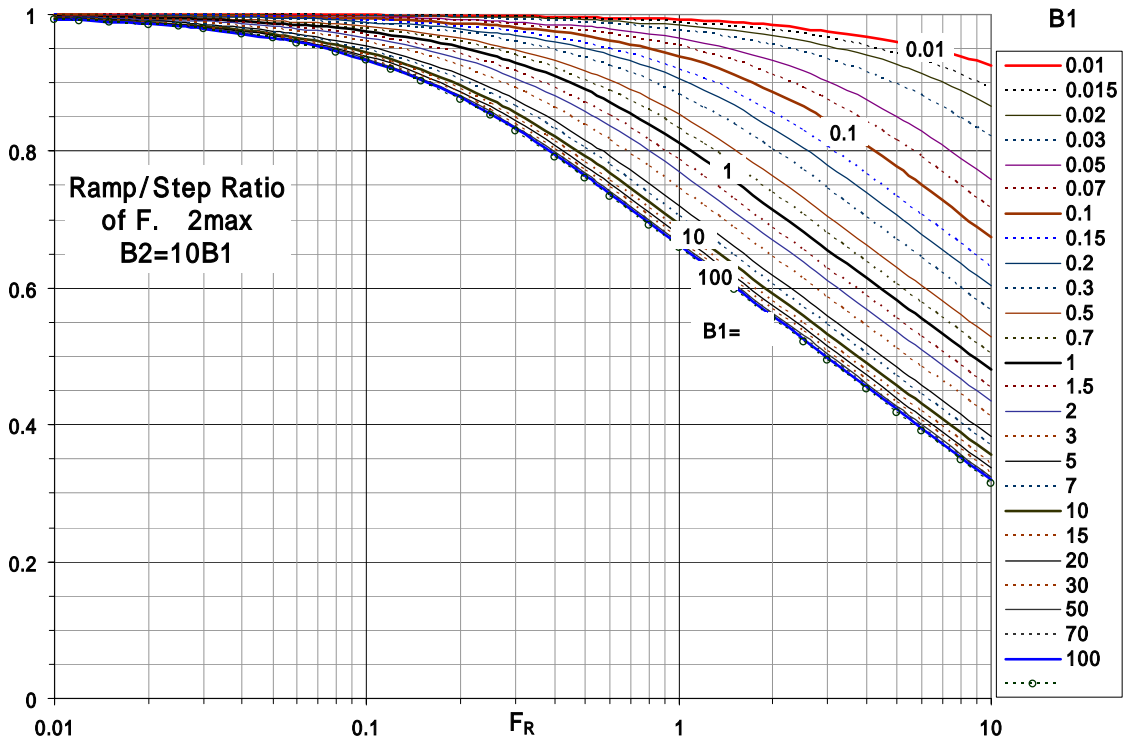


Fig. 2.7.9(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2=10B_1$)

Fig.2.7.9(2b) (図省略、 $z_{\max}(F_R) / z_{\max}(0) = 1$)

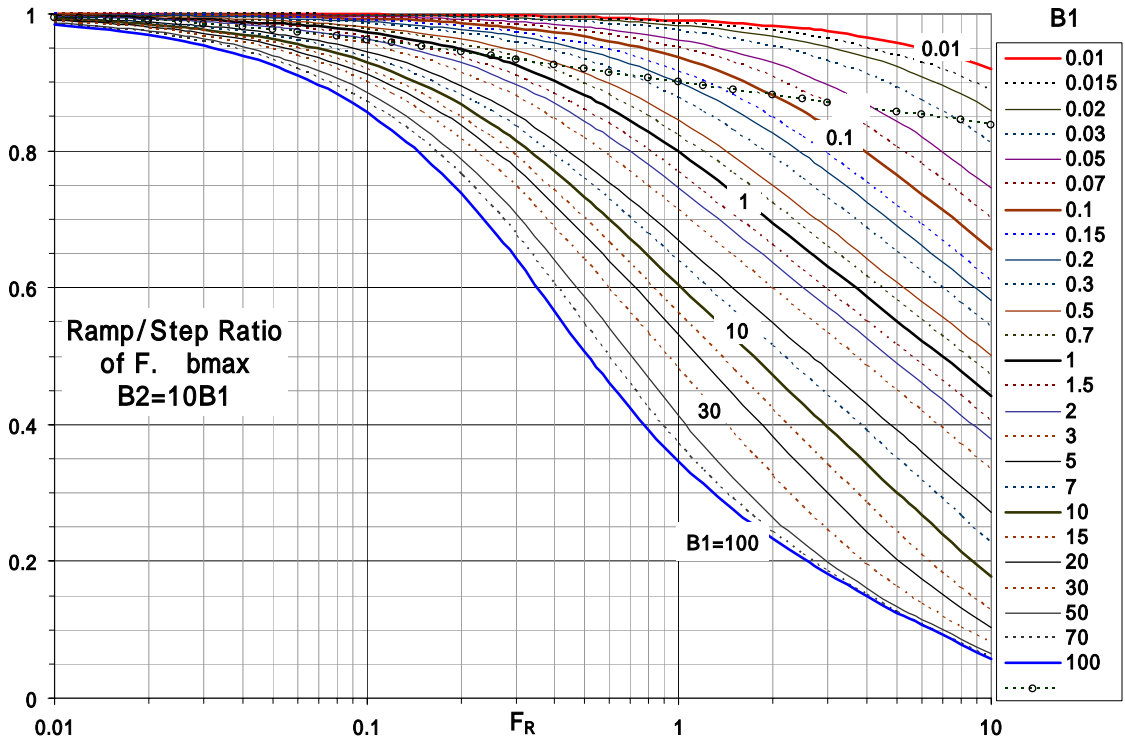


Fig.2.7.9(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2=10B_1$)

Fig.2.7.9(3b) (図省略、 $b_{\max}(F_R) / b_{\max}(0) = 1$)

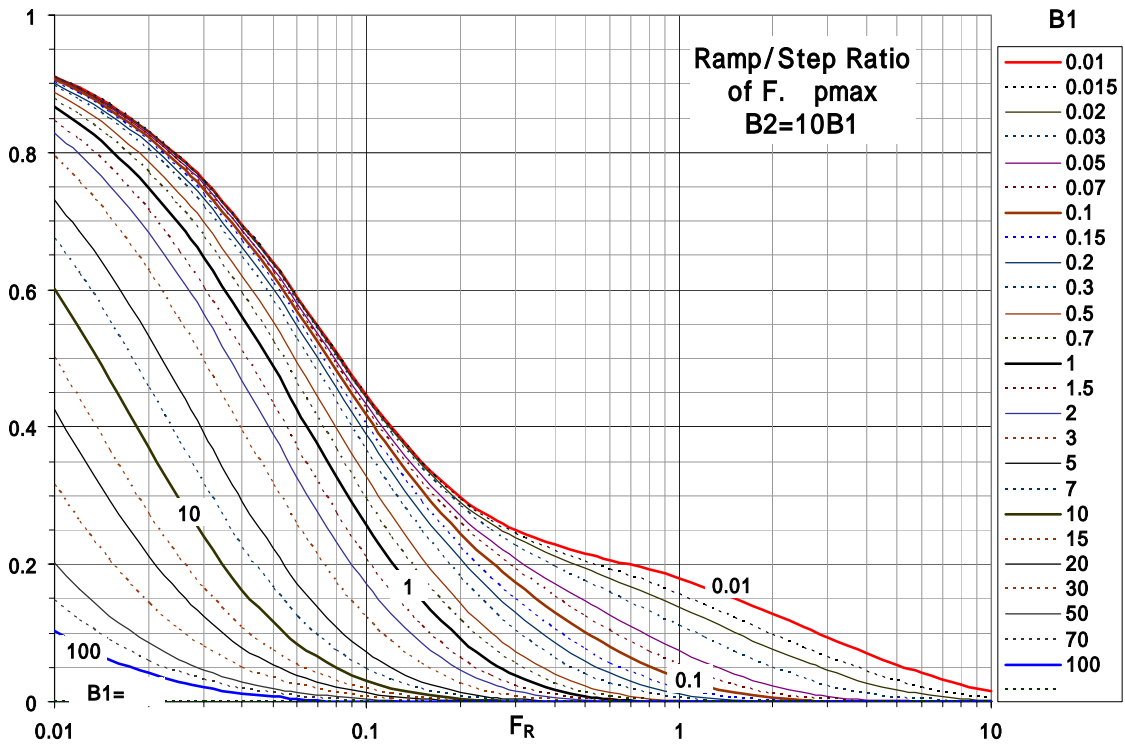


Fig.2.7.9(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2=10B_1$)

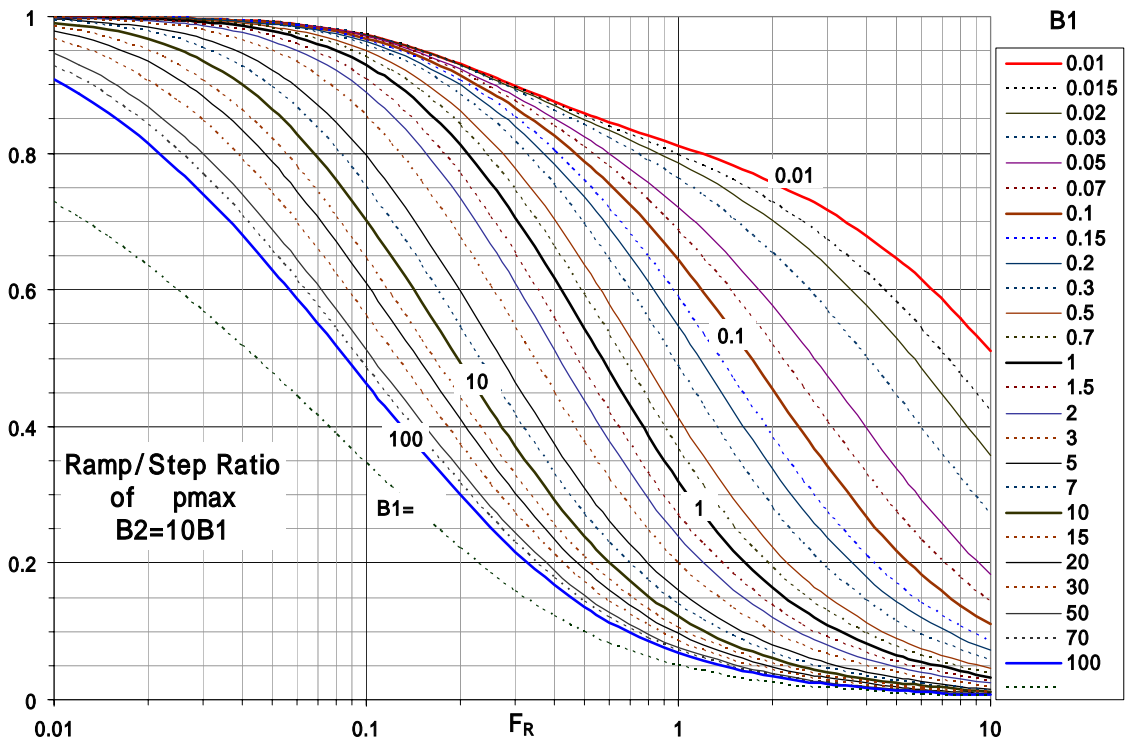


Fig.2.7.9(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2=10B_1$)

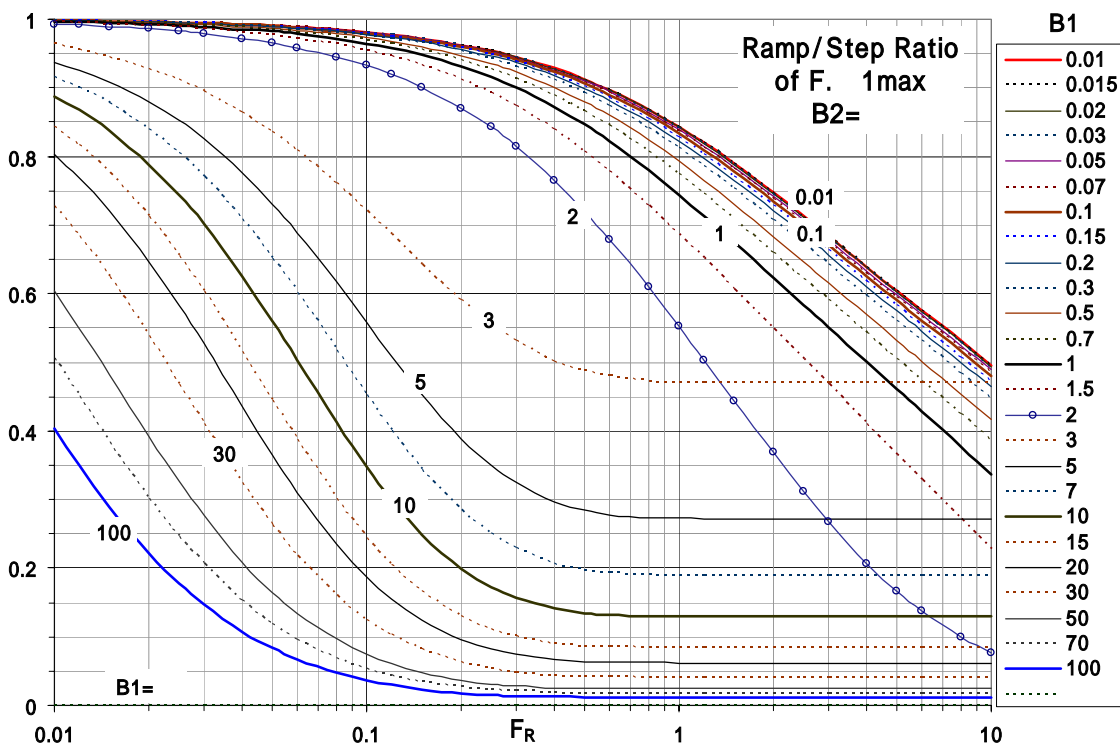


Fig. 2.7.10(1a) 基準面の熱応力最大時点の比 ($B_2=$)

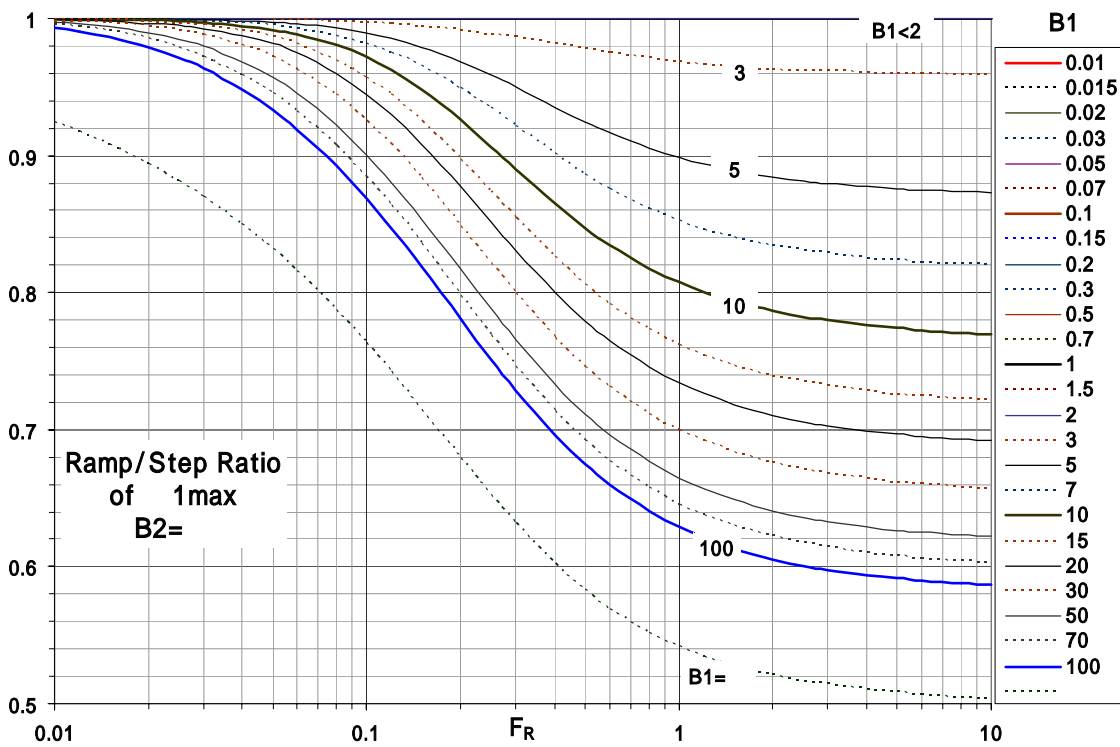


Fig. 2.7.10(1b) 基準面の熱応力最大値の比 ($B_2=$)

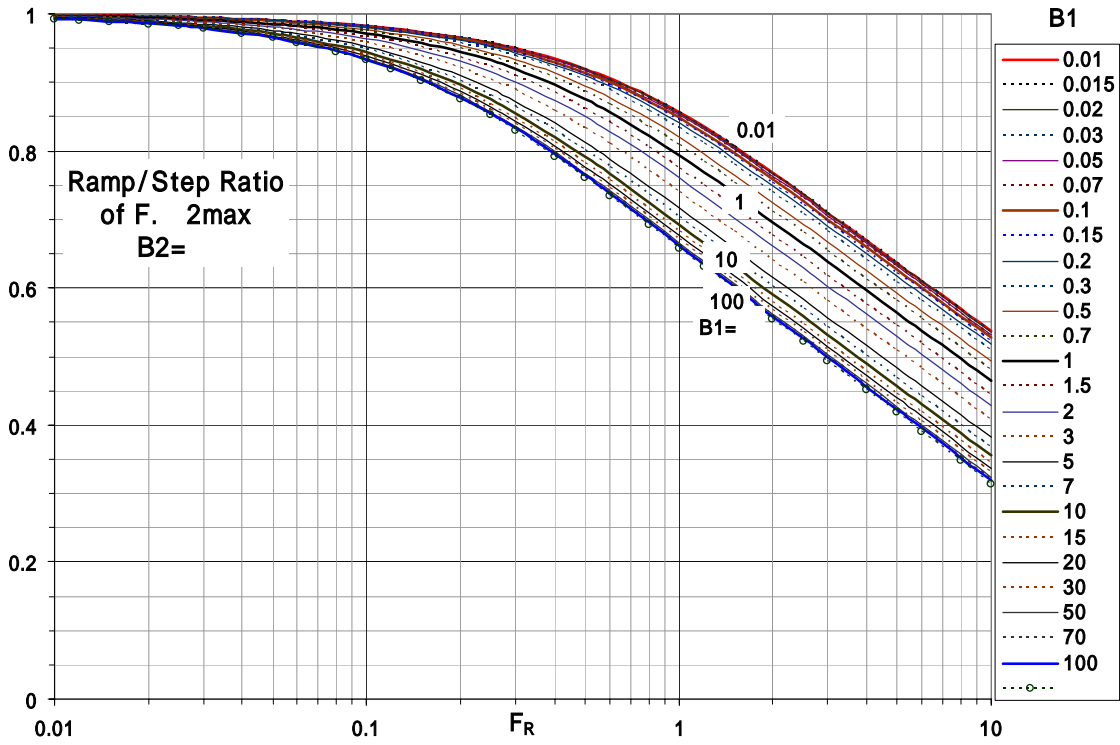


Fig. 2.7.10(2a) 背面の熱応力最大時点の比 ($B_2 =$)
 Fig.2.7.10(2b) (図省略、 $\frac{2_{max}(F_R)}{2_{max}(0)} = 1$)

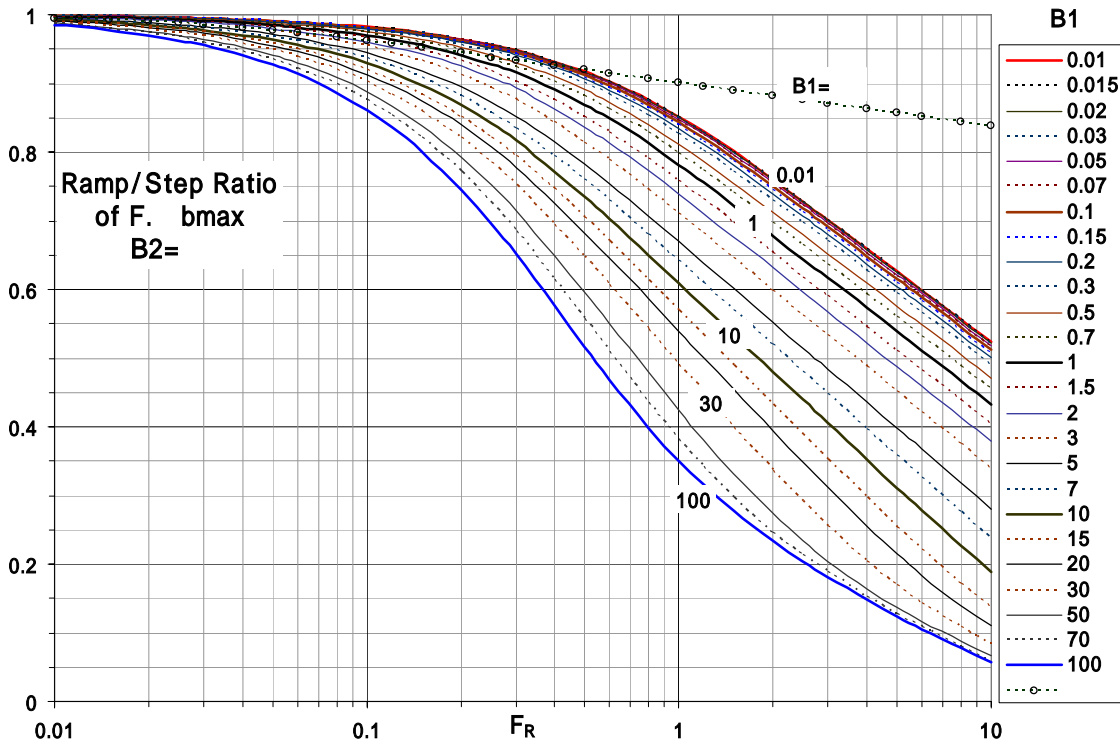


Fig.2.7.10(3a) 熱曲げ応力最大時点の比 ($B_2 =$)
 Fig.2.7.10(3b) (図省略、 $\frac{b_{max}(F_R)}{b_{max}(0)} = 1$)

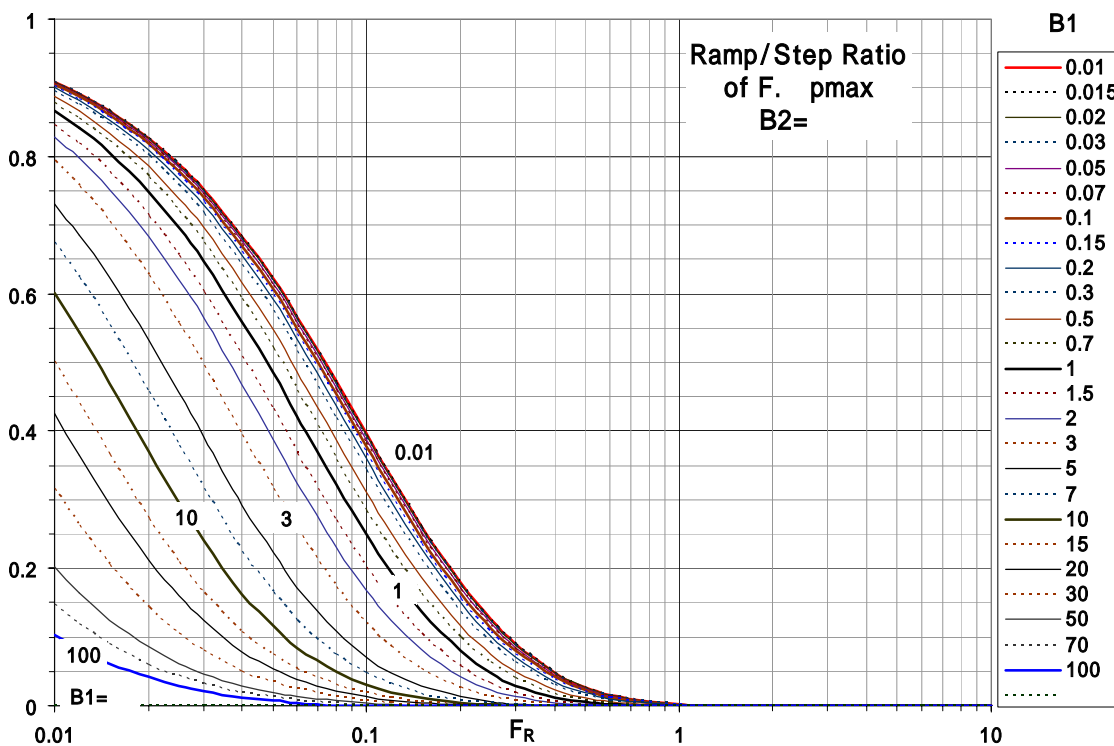


Fig.2.7.10(4a) 熱ピーク応力最大時点の比 ($B_2 =$)

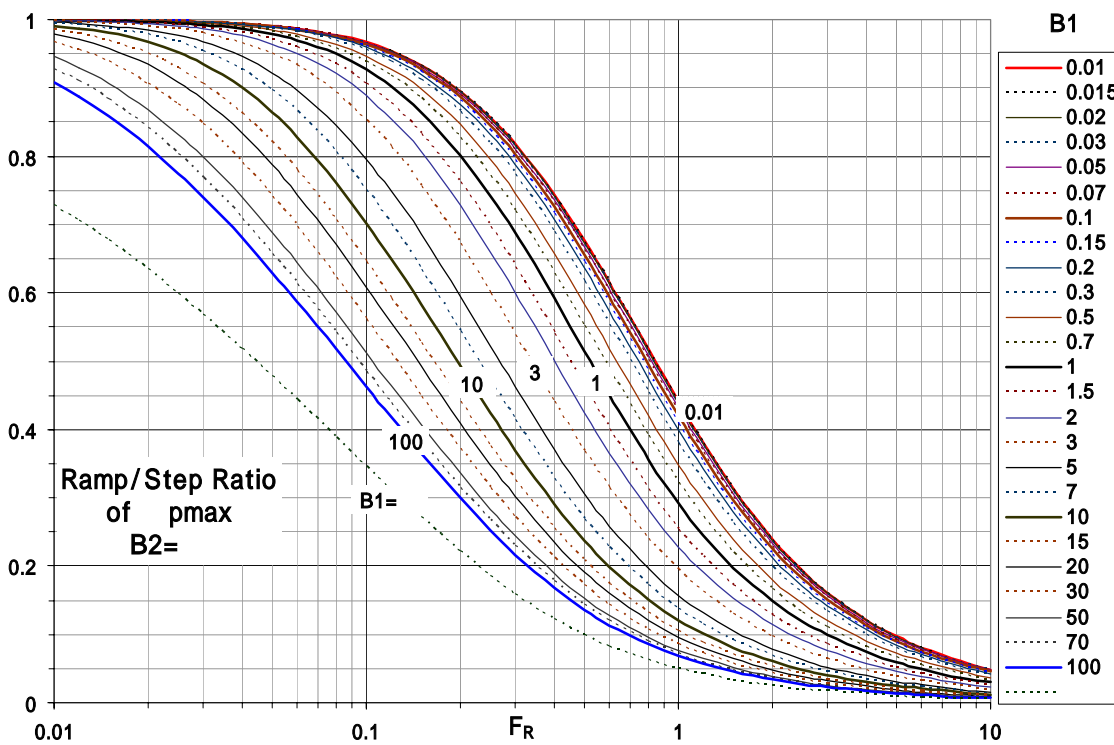


Fig.2.7.10(4b) 熱ピーク応力最大値の比 ($B_2 =$)

2.8 温度および熱応力の Green 関数簡易式

基準面側の流体 1 温度がステップ変化〔 $V=1$ 〕し、背面側の流体 2 温度が 0 を維持した場合の平板の温度 $U_j(F)$ および熱応力 $S_j(F)$ は Green 関数として使用することができる。流体 1 温度が任意の時間変化する場合〔 $V(F)$ 〕の温度および熱応力は次式の畳み込み積分で求めることができる。

$$U_j[V(F)] = \int_0^F U_j(\tau) V'(F-\tau) d\tau \quad (j=1,2,m,b) \quad (2.8.1)$$

$$S_j[V(F)] = \int_0^F S_j(\tau) V'(F-\tau) d\tau \quad (j=1,2,b,p) \quad (2.8.2)$$

〔 $B_1=0.01 \sim 100$ 、 $B_2=0, 0.01 \sim 100$ 、 $B_1 \neq B_2$ 〕の範囲に対して時間境界 F_1 および F_2 を設定し、短時間領域 ($F < F_1$)、中間領域 ($F_1 < F < F_2$) および長時間領域 ($F > F_2$) に対する実用的な簡易式を与えることを考える。

(1) 短時間領域の温度

短時間領域 ($F < F_1$) での Green 関数簡易式として誤差関数形の次式を使用することを検討した。

$$U_1(F) = 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \quad (2.8.3)$$

$$U_m(F) = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} U_1(F) \quad (2.8.4)$$

$$U_b(F) = 6F - \frac{3(B_1+2)}{B_1} U_m(F) \quad (2.8.5)$$

$$U_2(F) = 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 2e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \quad (B_2 = 0) \quad (2.8.6a)$$

$$U_2(F) = 4B_1 \sqrt{\frac{F}{\pi}} e\left(\frac{-1}{4F}\right) - 2B_1 e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) \quad (0 < B_2 = B_1) \quad (2.8.6b)$$

$$U_2(F) = -\frac{2B_1}{B_1 - B_2} e(B_1 + B_1^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1 \sqrt{F}\right) + \frac{2B_1}{B_1 - B_2} e(B_2 + B_2^2 F) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_2 \sqrt{F}\right) \quad (0 < B_2 \neq B_1) \quad (2.8.6c)$$

これらの簡易式の誤差 1%となる F 値を Table.2.8.1 に示した。F(U_b)が最も小さく、これが時間境界 F₁=0.06 ~ 0.12 の決定要因となる。詳細な U₂ 近似解(2.8.6a) ~ (2.8.6c)式は中間領域でも十分に使用できることが分かる。

(2) 中間領域の温度

中間領域 (F₁ < F < F₂) での Green 関数簡易式として変数分離形の n = 2 項まで採った次式を使用することを検討した。

$$U_1(F) = a_1 - c_1 e(-p_1^2 F) - c_2 e(-p_2^2 F) \quad (2.8.7)$$

$$U_2(F) = a_1 + a_2 - C_{2,1} e(-p_1^2 F) - C_{2,2} e(-p_2^2 F) \quad (2.8.8)$$

$$U_m(F) = a_1 + \frac{a_2}{2} - C_{m,1} e(-p_1^2 F) - C_{m,2} e(-p_2^2 F) \quad (2.8.9)$$

$$U_b(F) = \frac{a_2}{2} - C_{b,1} e(-p_1^2 F) - C_{b,2} e(-p_2^2 F) \quad (2.8.10)$$

これらの簡易式の誤差 1%となる F 値を Table.2.8.1 に示した。F(U₂)が最も大きく、これが時間境界 F₁=0.08 ~ 0.14 の決定要因となる。これら 2 項近似式の係数を付録 A3 に示した。

(3) 長時間領域の温度

長時間領域 (F₂ < F) の Green 関数簡易式として変数分離形の n = 1 項のみ採った次式を使用することを検討した。

$$U_1(F) = a_1 - c_1 e(-p_1^2 F) \quad (2.8.11)$$

$$U_2(F) = a_1 + a_2 - C_{2,1} e(-p_1^2 F) \quad (2.8.12)$$

$$U_m(F) = a_1 + \frac{a_2}{2} - C_{m,1} e(-p_1^2 F) \quad (2.8.13)$$

$$U_b(F) = \frac{a_2}{2} - C_{b,1} e(-p_1^2 F) \quad (2.8.14)$$

これらの簡易式の誤差 1%となる F 値を Table.2.8.1 に示した。F(U₂)および F(U_b)が大きく、これらが時間境界 F₂=0.16 ~ 0.47 の決定要因となる。表から U₁、U₂および U_mは B₁および B₂の細かい範囲に応じて個別の時間境界を設定すれば、中間領域を省いて誤差 2%程度にすることが

可能であることがわかる。ただし範囲の設定が煩雑であり、実用的ではないので取り扱わない。

(4) 短時間領域の背面温度の統一簡易式

詳細な U_2 近似解(2.8.6a) ~ (2.8.6c)式は B_2 の値に応じて3つの式を使い分けるので少し煩雑である。これを簡単な統一式で近似することを検討する。(2.3.6a)式で B_1 とすると次式を得る。

$$U_2(F) = 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \quad (B_1 = \infty, B_2 = 0) \quad (\text{a})$$

(a)式は基準表面温度をステップ変化させた時の断熱された背面温度の応答を表す。これが背面温度応答の上限値となる。式も単純であり、これを上限基準温度応答とする。(2.8.6c)式で B_1 とすると次式を得る。

$$U_2(F) = 2e^{(B_2 + B_2^2 F)} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_2\sqrt{F}\right) \quad (B_1 = \infty, B_2 > 0) \quad (\text{b})$$

(b)式で $F \rightarrow 0$ で (括弧内) となる。付録 A1 の級数展開式(A1.5)式の第1項のみで近似すると次式を得る。

$$\begin{aligned} U_2(F) &= 2e^{(B_2 + B_2^2 F)} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_2\sqrt{F}\right) \\ &\approx 2e^{(B_2 + B_2^2 F)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{1}{4F} + B_2 + B_2^2 F\right)} \left\{ \frac{2\sqrt{F}}{2B_2 F + 1} \right. \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{1}{4F}\right)} \frac{2\sqrt{F}}{2B_2 F + 1} \approx 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \times \frac{1}{2B_2 F + 1} \quad (B_1 = \infty, B_2 > 0) \end{aligned} \quad (\text{c})$$

(c)式は (上限基準温度応答) × (背面熱伝達による減少) と見なせる。同様に(2.8.6a)式を級数展開の第1項近似を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned} U_2(F) &= 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 2e^{(B_1 + B_1^2 F)} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B_1\sqrt{F}\right) \\ &\approx 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \frac{1}{2B_1 F + 1} = 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \times \frac{2B_1 F}{2B_1 F + 1} \quad (B_2 = 0) \end{aligned} \quad (\text{d})$$

(d)式は（上限基準温度応答）×（基準面熱伝達による減少）と見なせる。同様に(2.8.6c)式を級数展開の第1項近似を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned}
 U_2(F) &= -\frac{2B_1}{B_1-B_2}e(B_1+B_1^2F)\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}+B_1\sqrt{F}\right) \\
 &\quad +\frac{2B_1}{B_1-B_2}e(B_2+B_2^2F)\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}+B_2\sqrt{F}\right) \\
 &\approx -\frac{2B_1}{B_1-B_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right)\frac{1}{2B_1F+1}+\frac{2B_1}{B_1-B_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right)\frac{1}{2B_2F+1} \\
 &= 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right)\times\frac{2B_1F}{2B_1F+1}\times\frac{1}{2B_2F+1} \quad (B_2 > 0)
 \end{aligned} \tag{e}$$

(e)式は（上限基準温度応答）×（基準面熱伝達による減少）×（背面熱伝達による減少）と見なせる。(e)式は全パラメータ範囲（ $0 < B_1$ および $0 \leq B_2$ ）に対して計算可能な統一式でもある。数値計算の結果(e)式は厳密解に比べて $F=0.1$ で最大1.3倍程度の大きな値を与えることが分かった。主原因は erfc 級数解の第二項以下を無視した誤差である。(e)式を少し補正した次式を採用することにした。

$$U_2(F) = 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right)\times\frac{2B_1F}{2B_1F+1.25}\times\frac{1}{2B_2F+1} \quad (0 < B_1, 0 \leq B_2) \tag{2.8.15}$$

(2.8.15)式は $F=0.01 \sim 0.1$ で最大10%程度の誤差があるが、 U_2 絶対値が U_1 その他に比較して一桁以上小さいので、背面の熱応力への影響は小さい。短時間領域では U_1 を精度良く評価することが重要であるので(2.8.3)式を採用することにした。これを級数展開の1項近似した場合の近似式と誤差を以下に示す。

$$\begin{aligned}
 U_1(F) &= 1 - e(B_1^2F)\operatorname{erfc}(B_1\sqrt{F}) \approx 1 - (1 + B_1^2F)\left(1 - \frac{2B_1\sqrt{F}}{\sqrt{\pi}}\right) \\
 &\approx 2B_1\sqrt{\frac{F}{\pi}} - B_1^2F \quad (er = 0.7\% \text{ at } B_1\sqrt{F} = 0.1, er = 2.9\% \text{ at } B_1\sqrt{F} = 0.2)
 \end{aligned} \tag{2.8.16}$$

(2.8.16)式は $B_1 \sqrt{F} < 0.2$ で U_1 の評価に使用でき、表面温度の短時間の簡易式として便利である。ただし(2.8.4)式の U_m および(2.8.5)式の U_b に代入した場合は、差分計算となり相対誤差が拡大されるので、適用上限 F が小さくなる。結局は時間境界が増え、設定が煩雑になるのでここでは取

り扱わない。

(5) 熱応力を含めた誤差評価

温度の Green 関数を用いて熱応力の Green 関数は次式で与えられる。

$$S_1(F) = U_m(F) - U_1(F) \quad (2.8.17)$$

$$S_2(F) = U_m(F) - U_2(F) \quad (2.8.18)$$

$$S_b(F) = -U_b(F) \quad (2.8.19)$$

$$S_p(F) = U_m(F) - U_1(F) - U_b(F) \quad (2.8.20)$$

Table.2.8.1 を参考にして適用時間境界を以下のように決定した。

$$\begin{aligned} B_1 \leq 1 \text{ and } B_2 \leq 1 & \quad F_1 = 0.1, F_2 = 5F_1 = 0.5 \\ B_1 \leq 1 \text{ and } B_2 > 1 & \quad F_1 = 0.08, F_2 = 5F_1 = 0.4 \\ B_1 > 1 \text{ and } B_2 \leq 1 & \quad F_1 = 0.08, F_2 = 5F_1 = 0.4 \\ B_1 > 1 \text{ and } B_2 > 1 & \quad F_1 = 0.06, F_2 = 5F_1 = 0.3 \end{aligned} \quad (2.8.21)$$

U_2 の詳細な近似解(2.8.6a) ~ (2.8.6c) 式を短時間領域と中間領域に使用した場合の誤差評価結果を Table.2.8.2 に示した。ピーク応力の最大誤差が 1.4% となる以外は全て誤差 1% 以下となる。精度が高いことが分かる。

U_2 の統一形簡易式(2.8.15) 式を短時間領域にのみ使用した場合の誤差評価結果を Table.2.8.3 に示した。最大誤差は中間領域に移行した時点 ($F=F_1+0$) の U_2 の変数分離形の 2 項近似式(2.8.8) 式で 105% となる。ただし U_2 の絶対値は小さく (全パラメータ範囲で 0.03 以下) S_2 の最大誤差が 1.3% に増加する以外は、 U_2 の詳細な近似解を用いた場合と同等である。すなわち絶対値が他に比べて格段に小さい (短時間領域から中間領域前半にかけての) U_2 の誤差が大きくなることを許容して、他の諸量の精度を確保し、熱応力の精度を確保した近似体系となっている。 $U_2 < 0.03$ での U_2 の高精度の評価が必要な特殊な用途を除き、熱応力評価上は実用上十分な近似体系であると思われる。

Table.2.8.1 温度 Green 関数簡易式の誤差 1%となる F 値

B ₂	B ₁	Error Function				Separated Function (n=2)				Separated Function (n=1)			
		F(U ₁)	F(U ₂)	F(U _m)	F(U _b)	F(U ₁)	F(U ₂)	F(U _m)	F(U _b)	F(U ₁)	F(U ₂)	F(U _m)	F(U _b)
0	0.01	0.32	0.61	4.5	0.12	0.071	0.14	0.0015	0.021	0.35	0.44	0.018	0.47
	0.1	0.32	0.61	1.3	0.12	0.071	0.14	0.0096	0.024	0.34	0.43	0.083	0.46
	1	0.32	0.73	0.56	0.11	0.071	0.14	0.033	0.04	0.3	0.39	0.19	0.42
	10	0.4	0.62	0.36	0.099	0.053	0.12	0.05	0.055	0.16	0.27	0.17	0.27
	100	10	0.53	0.32	0.093	0.018	0.11	0.044	0.047	0.04	0.23	0.14	0.21
		(*1)	0.52	0.32	0.092	(*1)	0.11	0.043	0.046	(*1)	0.23	0.14	0.21
0.01	0.01	0.32	0.61	1.8	0.12	0.071	0.14	0.0024	0.021	0.34	0.44	0.0024	0.46
	0.1	0.32	0.61	1.1	0.12	0.071	0.14	0.011	0.023	0.34	0.43	0.078	0.46
	1	0.32	0.73	0.53	0.11	0.071	0.14	0.033	0.039	0.3	0.39	0.19	0.42
	10	0.4	0.62	0.35	0.099	0.053	0.12	0.05	0.055	0.16	0.27	0.17	0.27
	100	10	0.53	0.32	0.093	0.018	0.11	0.044	0.047	0.04	0.23	0.14	0.21
		(*1)	0.52	0.31	0.092	(*1)	0.1	0.043	0.046	(*1)	0.23	0.14	0.21
0.1	0.01	0.33	0.61	0.44	0.12	0.071	0.14	0.0087	0.019	0.34	0.43	0.077	0.45
	0.1	0.32	0.62	0.43	0.12	0.071	0.14	0.014	0.021	0.33	0.43	0.014	0.45
	1	0.33	0.75	0.37	0.11	0.07	0.14	0.034	0.038	0.3	0.39	0.18	0.41
	10	0.41	0.63	0.29	0.099	0.053	0.12	0.05	0.055	0.16	0.27	0.17	0.26
	100	10	0.53	0.27	0.093	0.018	0.11	0.044	0.047	0.04	0.23	0.14	0.21
		(*1)	0.52	0.27	0.092	(*1)	0.1	0.043	0.045	(*1)	0.23	0.14	0.21
1	0.01	0.37	0.73	0.18	0.11	0.067	0.14	0.03	0.0025	0.28	0.39	0.17	0.37
	0.1	0.37	0.75	0.18	0.11	0.067	0.14	0.032	0.0042	0.28	0.39	0.17	0.37
	1	0.38	2.1	0.17	0.11	0.067	0.14	0.04	0.023	0.26	0.36	0.04	0.34
	10	2.2	0.72	0.16	0.094	0.051	0.12	0.05	0.05	0.14	0.26	0.14	0.24
	100	10	0.6	0.15	0.088	0.017	0.11	0.044	0.043	0.037	0.23	0.12	0.19
		(*1)	0.59	0.15	0.087	(*1)	0.1	0.043	0.042	(*1)	0.22	0.12	0.19
10	0.01	0.39	0.62	0.12	0.091	0.051	0.12	0.042	0.045	0.17	0.27	0.15	0.21
	0.1	0.39	0.63	0.12	0.091	0.051	0.12	0.042	0.045	0.17	0.27	0.15	0.21
	1	0.39	0.72	0.11	0.089	0.051	0.12	0.044	0.041	0.16	0.26	0.13	0.2
	10	0.49	0.62	0.098	0.081	0.042	0.11	0.046	0.026	0.099	0.21	0.046	0.16
	100	10	0.53	0.093	0.076	0.015	0.092	0.04	0.026	0.029	0.18	0.05	0.14
		(*1)	0.52	0.092	0.075	(*1)	0.09	0.039	0.025	(*1)	0.18	0.049	0.13
100	0.01	0.33	0.53	0.097	0.084	0.044	0.11	0.039	0.039	0.14	0.23	0.13	0.17
	0.1	0.33	0.53	0.097	0.084	0.044	0.11	0.039	0.039	0.14	0.23	0.13	0.17
	1	0.33	0.6	0.095	0.082	0.044	0.11	0.04	0.037	0.14	0.23	0.12	0.17
	10	0.4	0.53	0.087	0.075	0.037	0.092	0.041	0.02	0.087	0.18	0.03	0.14
	100	10	0.45	0.082	0.07	0.014	0.083	0.036	0.021	0.026	0.16	0.036	0.11
		(*1)	0.44	0.081	0.07	(*1)	0.081	0.035	0.02	(*1)	0.16	0.035	0.11
	0.01	0.32	(*2)	0.096	0.083	0.043	(*2)	0.038	0.038	0.14	(*2)	0.13	0.17
	0.1	0.32	(*2)	0.095	0.083	0.043	(*2)	0.038	0.038	0.14	(*2)	0.13	0.17
	1	0.32	(*2)	0.093	0.081	0.043	(*2)	0.039	0.036	0.14	(*2)	0.11	0.16
	10	0.39	(*2)	0.085	0.074	0.036	(*2)	0.04	0.02	0.085	(*2)	0.029	0.13
	100	10	(*2)	0.08	0.069	0.014	(*2)	0.036	0.021	0.026	(*2)	0.036	0.11
		(*1)	(*2)	0.079	0.069	(*1)	(*2)	0.035	0.02	(*1)	(*2)	0.035	0.11
Comment	F(above) is at 1% error Available for F F(above) (*1) U ₁ =1.0 and no error (*2) U ₂ =0.0 and no error				F(above) is at 1% error Available for F F(above) (*1) U ₁ =1.0 and no error (*2) U ₂ =0.0 and no error				F(above) is at 1% error Available for F F(above) (*1) U ₁ =1.0 and no error (*2) U ₂ =0.0 and no error				

Table.2.8.2 温度および応力の Green 関数簡易式の最大誤差 (U₂ 詳細式)

B ₂	B ₁	error of U ₁		error of U ₂		error of U _m		error of S _b		error of S ₁		error of S ₂		error of S _b	
		k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)
0	0.01	2	0.27	3	0.46	4	0.00	4	0.71	4	0.43	3	0.93	2	0.99
	0.1	2	0.27	3	0.44	4	0.00	4	0.67	4	0.41	3	0.92	2	0.99
	1	2	0.26	3	0.30	2	0.02	1	0.64	2	0.36	3	0.75	1	1.12
	10	2	0.23	3	0.10	2	0.15	1	0.33	2	0.27	3	0.27	1	0.63
	100	2	0.02	3	0.27	2	0.08	1	0.45	2	0.02	3	0.82	1	1.05
			(*1)		3	0.30	2	0.07	1	0.48	2	0.03	3	0.92	1
0.01	0.01	2	0.27	3	0.45	1	0.00	4	0.70	4	0.43	3	0.91	2	0.99
	0.1	2	0.27	3	0.44	2	0.00	4	0.66	4	0.40	3	0.90	2	0.99
	1	2	0.26	3	0.30	2	0.02	1	0.65	2	0.36	3	0.74	1	1.12
	10	2	0.23	3	0.10	2	0.15	1	0.33	2	0.27	3	0.27	1	0.64
	100	2	0.02	3	0.27	2	0.08	1	0.46	2	0.02	3	0.81	1	1.05
			(*1)		3	0.30	2	0.07	1	0.48	2	0.03	3	0.91	1
0.1	0.01	2	0.27	3	0.44	1	0.02	4	0.61	4	0.38	3	0.81	2	0.97
	0.1	2	0.27	3	0.43	1	0.02	1	0.60	2	0.37	3	0.80	2	0.97
	1	2	0.26	3	0.29	2	0.02	1	0.67	2	0.35	3	0.65	1	1.14
	10	2	0.23	3	0.10	2	0.15	1	0.34	2	0.26	3	0.24	1	0.65
	100	2	0.02	3	0.27	2	0.08	1	0.47	2	0.02	3	0.70	1	1.08
			(*1)		3	0.30	2	0.07	1	0.50	2	0.03	3	0.79	1
1	0.01	2	0.21	3	0.30	1	0.13	1	0.76	2	0.28	3	0.30	1	1.08
	0.1	2	0.21	3	0.29	1	0.14	1	0.77	2	0.28	3	0.30	1	1.11
	1	2	0.20	3	0.20	1	0.15	1	0.85	2	0.27	3	0.22	1	1.32
	10	2	0.20	3	0.08	2	0.14	1	0.44	2	0.22	2	0.15	1	0.76
	100	2	0.01	3	0.20	1	0.10	1	0.61	1	0.05	3	0.26	1	1.26
			(*1)		3	0.22	1	0.11	1	0.65	1	0.05	3	0.28	1
10	0.01	2	0.17	3	0.10	1	0.26	1	0.54	2	0.21	1	0.26	2	0.64
	0.1	2	0.17	3	0.10	1	0.26	1	0.54	2	0.21	1	0.27	2	0.65
	1	2	0.18	3	0.08	1	0.28	1	0.60	2	0.21	1	0.29	2	0.64
	10	2	0.29	4	0.05	2	0.34	1	0.19	2	0.27	2	0.34	2	0.65
	100	2	0.02	3	0.03	2	0.19	1	0.28	1	0.05	2	0.19	1	0.36
			(*1)		3	0.03	2	0.17	1	0.30	2	0.06	2	0.17	1
100	0.01	2	0.08	3	0.27	1	0.45	1	0.78	1	0.15	1	0.45	1	0.73
	0.1	2	0.08	3	0.27	1	0.45	1	0.79	1	0.15	1	0.45	1	0.74
	1	2	0.08	3	0.20	1	0.49	1	0.87	1	0.17	1	0.49	1	0.87
	10	2	0.16	3	0.03	2	0.19	1	0.30	2	0.15	2	0.19	2	0.40
	100	2	0.01	3	0.10	1	0.24	1	0.43	1	0.09	1	0.25	1	0.53
			(*1)		3	0.11	1	0.26	1	0.46	1	0.10	1	0.26	1
	0.01	2	0.07		(*2)	1	0.48	1	0.83	1	0.16	1	0.48	1	0.77
	0.1	2	0.07		(*2)	1	0.49	1	0.84	1	0.16	1	0.49	1	0.78
	1	2	0.07		(*2)	1	0.53	1	0.92	1	0.18	1	0.53	1	0.91
	10	2	0.15		(*2)	1	0.20	1	0.33	2	0.14	1	0.20	2	0.36
	100	2	0.01		(*2)	1	0.27	1	0.47	1	0.10	1	0.27	1	0.57
			(*1)			(*2)	1	0.29	1	0.50	1	0.11	1	0.29	1
Comment	k=1 -- Maximum error occurs at F=F ₁ by Error Function k=2 -- Maximum error occurs at F=F ₁ +0 by Separated Function(n=2) k=3 -- Maximum error occurs at F=F ₂ by Error Function of U ₂ k=4 -- Maximum error occurs at F=F ₂ +0 by Separated Function(n=1) (*1) U ₁ =1.0 and no error (*2) U ₂ =0.0 and no error														

Table.2.8.3 温度および応力の Green 関数簡易式の最大誤差 (U₂統一簡易式)

B ₂	B ₁	error of U ₁		error of U ₂		error of U _m		error of S _b		error of S ₁		error of S ₂		error of S _p	
		k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)	k	er(%)
0	0.01	2	0.27	2	12.25	4	0.00	4	0.71	4	0.43	2	1.05	2	0.99
	0.1	2	0.27	2	12.10	4	0.00	4	0.67	4	0.41	2	1.05	2	0.99
	1	2	0.26	2	10.61	2	0.02	1	0.64	2	0.36	2	0.97	1	1.12
	10	2	0.23	2	22.13	2	0.15	1	0.33	2	0.27	2	1.26	1	0.63
	100	2	0.02	2	8.55	2	0.08	1	0.45	2	0.02	2	0.61	1	1.05
				(*1)	2	7.27	2	0.07	1	0.48	2	0.03	2	0.54	1
0.01	0.01	2	0.27	2	12.23	1	0.00	4	0.70	4	0.43	2	1.05	2	0.99
	0.1	2	0.27	2	12.08	2	0.00	4	0.66	4	0.40	2	1.04	2	0.99
	1	2	0.26	2	10.59	2	0.02	1	0.65	2	0.36	2	0.97	1	1.12
	10	2	0.23	2	22.12	2	0.15	1	0.33	2	0.27	2	1.25	1	0.64
	100	2	0.02	2	8.54	2	0.08	1	0.46	2	0.02	2	0.60	1	1.05
				(*1)	2	7.26	2	0.07	1	0.48	2	0.03	2	0.54	1
0.1	0.01	2	0.27	2	12.08	1	0.02	4	0.61	4	0.38	2	1.02	2	0.97
	0.1	2	0.27	2	11.94	1	0.02	1	0.60	2	0.37	2	1.02	2	0.97
	1	2	0.26	2	10.48	2	0.02	1	0.67	2	0.35	2	0.94	1	1.14
	10	2	0.23	2	21.98	2	0.15	1	0.34	2	0.26	2	1.23	1	0.65
	100	2	0.02	2	8.49	2	0.08	1	0.47	2	0.02	2	0.59	1	1.08
				(*1)	2	7.22	2	0.07	1	0.50	2	0.03	2	0.52	1
1	0.01	2	0.21	2	10.59	1	0.13	1	0.76	2	0.28	2	0.77	1	1.08
	0.1	2	0.21	2	10.48	1	0.14	1	0.77	2	0.28	2	0.77	1	1.11
	1	2	0.20	2	9.28	1	0.15	1	0.85	2	0.27	2	0.72	1	1.32
	10	2	0.20	2	20.46	2	0.14	1	0.44	2	0.22	2	1.01	1	0.76
	100	2	0.01	2	7.93	1	0.10	1	0.61	1	0.05	2	0.48	1	1.26
				(*1)	2	6.74	1	0.11	1	0.65	1	0.05	2	0.43	1
10	0.01	2	0.17	2	22.12	1	0.26	1	0.54	2	0.21	1	0.53	2	0.64
	0.1	2	0.17	2	21.98	1	0.26	1	0.54	2	0.21	1	0.53	2	0.65
	1	2	0.18	2	20.46	1	0.28	1	0.60	2	0.21	1	0.58	2	0.64
	10	2	0.29	2	105.55	2	0.34	1	0.19	2	0.27	2	0.73	2	0.65
	100	2	0.02	2	45.01	2	0.19	1	0.28	1	0.05	2	0.41	1	0.36
				(*1)	2	38.42	2	0.17	1	0.30	2	0.06	2	0.37	1
100	0.01	2	0.08	1	19.35	1	0.45	1	0.78	1	0.15	1	0.50	1	0.73
	0.1	2	0.08	1	19.35	1	0.45	1	0.79	1	0.15	1	0.51	1	0.74
	1	2	0.08	1	19.25	1	0.49	1	0.87	1	0.17	1	0.55	1	0.87
	10	2	0.16	2	45.01	2	0.19	1	0.30	2	0.15	1	0.21	2	0.40
	100	2	0.01	2	18.56	1	0.24	1	0.43	1	0.09	1	0.27	1	0.53
				(*1)	2	15.69	1	0.26	1	0.46	1	0.10	1	0.28	1
	0.01	2	0.07		(*2)	1	0.48	1	0.83	1	0.16	1	0.48	1	0.77
	0.1	2	0.07		(*2)	1	0.49	1	0.84	1	0.16	1	0.49	1	0.78
	1	2	0.07		(*2)	1	0.53	1	0.92	1	0.18	1	0.53	1	0.91
	10	2	0.15		(*2)	1	0.20	1	0.33	2	0.14	1	0.20	2	0.36
	100	2	0.01		(*2)	1	0.27	1	0.47	1	0.10	1	0.27	1	0.57
				(*1)		(*2)	1	0.29	1	0.50	1	0.11	1	0.29	1
Comment	k=1 -- Maximum error occurs at F=F ₁ by Error Function k=2 -- Maximum error occurs at F=F ₁ +0 by Separated Function(n=2) k=4 -- Maximum error occurs at F=F ₂ +0 by Separated Function(n=1) (*1) U ₁ =1.0 and no error (*2) U ₂ =0.0 and no error														

2.9 線図、数表および簡易式の利用方法

本報告で作成された線図、数表および簡易式の使用手順を示す。

(1) 流体温度ステップ変化による任意時点の温度および熱応力を線図から求める

Step1 - 熱伝達係数 h_1 および h_2 に対応する無次元数 B_1 および B_2 を算出する。時間 t に対応する無次元時間 F を算出する。

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}, F = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}$$

Step2 - 無次元定常温度分布の係数 a_1 および a_2 を算出する。

$$a_1 = \frac{B_1 + B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}, a_2 = \frac{-B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}$$

Step3 - B_1 、 B_2 および F に対する無次元温度 および無次元熱応力を以下の線図から求める。
 B_1 および B_2 の中間の値に対しては比例計算により求める。

Fig.2.2.2($B_2=$), Fig.2.3.1($B_2=0$)、Fig.2.4.1($B_2=0.1B_1$) ~ Fig.2.4.7($B_2=10B_1$)

$$\phi_j(F) (j=1,2,m), \beta_k(F) (k=1,2,b,p)$$

Step4 - および から温度 T および応力 を算出する。

$$T_1(t) = a_1 T_f \phi_1(F), T_2(t) = (a_1 + a_2) T_f \phi_2(F), T_m(t) = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) T_f \phi_m(F)$$

$$\sigma_k(t) = \frac{B_1}{1+B_1} \frac{E \alpha T_f}{1-\nu} \beta_k(F) \quad (k=1,2,b,p)$$

(2) 流体温度ステップ変化による任意時点の温度および熱応力を簡易式により計算する

Step1 - 熱伝達係数 h_1 および h_2 に対応する無次元数 B_1 および B_2 を算出する。時間 t に対応する無次元時間 F を算出する。

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}, F = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}$$

Step2 - 無次元定常温度分布の係数 a_1 および a_2 を算出する。

$$a_1 = \frac{B_1 + B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}, a_2 = \frac{-B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}$$

Step3 - 2項近似式の固有値と係数 [($p_n, C_n, C_{2,n}, C_{m,n}, C_{b,n}$) ($n=1, 2$)] を以下の表から読み取る。 B_1 および B_2 の中間の値については比例計算により求める。

Table.A3.1($B_2=0, 0.01$) ~ Table.A3.13($B_2=70, 100$)、Table.A3.14($B_2=$)

Step4 - 簡易式の適用時間境界 F_1 および F_2 を定める。

$$B_1 \leq 1 \text{ and } B_2 \leq 1 \quad F_1 = 0.1, F_2 = 5F_1 = 0.5$$

$$B_1 \leq 1 \text{ and } B_2 > 1 \quad F_1 = 0.08, F_2 = 5F_1 = 0.4$$

$$B_1 > 1 \text{ and } B_2 \leq 1 \quad F_1 = 0.08, F_2 = 5F_1 = 0.4$$

$$B_1 > 1 \text{ and } B_2 > 1 \quad F_1 = 0.06, F_2 = 5F_1 = 0.3$$

Step5 - F の範囲に応じて簡易式を選択し、無次元温度 U を算出する。

- ・短時間領域 ($F < F_1$) の場合は次式で計算する。

$$U_1(F) = 1 - e(B_1^2 F) \operatorname{erfc}(B_1 \sqrt{F}) \quad , \quad U_2(F) = 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}}\right) \times \frac{2B_1 F}{2B_1 F + 1.25} \times \frac{1}{2B_2 F + 1}$$

$$U_m(F) = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \frac{1}{B_1} U_1(F) \quad , \quad U_b(F) = 6F - \frac{3(B_1 + 2)}{B_1} U_m(F)$$

- ・中間領域 ($F_1 < F < F_2$) の場合は次式で計算する。

$$U_1(F) = a_1 - c_1 e(-p_1^2 F) - c_2 e(-p_2^2 F) \quad , \quad U_2(F) = a_1 + a_2 - C_{2,1} e(-p_1^2 F) - C_{2,2} e(-p_2^2 F)$$

$$U_m(F) = a_1 + \frac{a_2}{2} - C_{m,1} e(-p_1^2 F) - C_{m,2} e(-p_2^2 F) \quad ,$$

$$U_b(F) = \frac{a_2}{2} - C_{b,1} e(-p_1^2 F) - C_{b,2} e(-p_2^2 F)$$

- ・長時間領域 ($F > F_2$) の場合は次式で計算する。

$$U_1(F) = a_1 - c_1 e(-p_1^2 F) \quad , \quad U_2(F) = a_1 + a_2 - C_{2,1} e(-p_1^2 F)$$

$$U_m(F) = a_1 + \frac{a_2}{2} - C_{m,1} e(-p_1^2 F) \quad , \quad U_b(F) = \frac{a_2}{2} - C_{b,1} e(-p_1^2 F)$$

Step6 - 無次元熱応力 S を算出する。

$$S_1(F) = U_m(F) - U_1(F) \quad , \quad S_2(F) = U_m(F) - U_2(F)$$

$$S_b(F) = -U_b(F) \quad , \quad S_p(F) = U_m(F) - U_1(F) - U_b(F)$$

Step7 - U および S から温度 T および応力 を算出する。

$$T_j(t) = T_f U_j(F) \quad (j=1,2,m)$$

$$\sigma_k(t) = \frac{E \alpha T_f}{1 - \nu} S_k(F) \quad (k=1,2,b,p)$$

(3) 流体温度ステップ変化による最大熱応力とその時点を線図あるいは数表から求める

Step1 - 熱伝達係数 h_1 および h_2 に対応する無次元数 B_1 および B_2 を算出する。

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}$$

Step2 - B_1 および B_2 に対する最大熱応力 $\sigma_{k, \max}$ とその時点 $F(\sigma_{k, \max})$ を以下の線図あるいは数表から求める。 B_1 および B_2 の中間の値については比例計算により求める。線図 Fig.2.5.1 ~ 2.5.4 あるいは数表 Table.A2.1 ~ A2.4

Step3 - 最大熱応力 $\sigma_{k, \max}$ とその時点 $t(\sigma_{k, \max})$ を次式により求める。

$$\sigma_{k, \max} = \frac{B_1}{1+B_1} \frac{E\alpha T_f}{1-\nu} \beta_{k, \max}, \quad t(\sigma_{k, \max}) = \frac{\rho c L^2}{\lambda} F(\beta_{k, \max}) \quad (k=1,2,b,p)$$

(4) 流体温度線形変化(ランプ変化途中)の任意時点の温度および熱応力を線図から求める

Step1 - 熱伝達係数 h_1 および h_2 に対応する無次元数 B_1 および B_2 を算出する。

時間 t に対応する無次元時間 F を算出する。

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}, \quad F = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}$$

Step2 - 無次元定常温度分布の係数 a_1 および a_2 を算出する。

$$a_1 = \frac{B_1 + B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}, a_2 = \frac{-B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}$$

Step3 - 時間 t までの流体温度変化量を算出する。

温度変化率 k (/sec) の線形変化の場合 $T_f = kt$

時間幅 t_R および温度変化 T_R のランプ変化途中の場合 $T_f = \frac{t}{t_R} T_R$

Step4 - B_1 、 B_2 および F に対する無次元温度 および無次元熱応力 を以下の線図から求める。

B_1 および B_2 の中間の値に対しては比例計算により求める。

Fig.2.6.1($B_2=0$) ~ Fig.2.6.9($B_2=$)

$$\phi_j(F) (j=1,2,m), \beta_k(F) (k=1,2,b,p)$$

Step5 - および から温度 T および応力 を算出する。

$$T_1(t) = a_1 T_f \phi_1(F), \quad T_2(t) = (a_1 + a_2) T_f \phi_2(F), \quad T_m(t) = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) T_f \phi_m(F)$$

$$\sigma_k(t) = \frac{B_1}{1+B_1} \frac{E\alpha T_f}{1-\nu} \beta_k(F) \quad (k=1,2,b,p)$$

(5) 流体温度ランプ変化終了後の任意時点の温度および熱応力を線図から求める

ランプ変化終了後も流体温度変化が継続した場合と、ランプ変化終了後は逆方向の流体温度変化が生じた場合を、それぞれ算出して重ね合わせる。

Step1 - 熱伝達係数 h_1 および h_2 に対応する無次元数 B_1 および B_2 を算出する。

時間 t に対応する無次元時間 F_1 および時間 $t - t_R$ に対する無次元時間 F_2 を算出する。

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}, F_1 = \frac{\lambda t}{\rho c L^2}, F_2 = \frac{\lambda(t - t_R)}{\rho c L^2}$$

Step2 - 無次元定常温度分布の係数 a_1 および a_2 を算出する。

$$a_1 = \frac{B_1 + B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}, a_2 = \frac{-B_1 B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2}$$

Step3 - ランプ変化終了後も時間 t まで温度変化が継続した場合の変化量 T_{f1} を算出する。ランプ変化終了後 ($t_2 = t - t_R$) 逆方向の温度変化が生じた場合の変化量 T_{f2} を算出する。

$$T_{f1} = \frac{t}{t_R} T_R, T_{f2} = -\frac{t - t_R}{t_R} T_R$$

Step4 - B_1, B_2 および F_1 に対する無次元温度 (F_1) および無次元熱応力 (F_1) を以下の線図から求める。同様に F_2 に対する (F_2) および (F_2) を求める。 B_1 および B_2 の中間の値に対しては比例計算により求める。

Fig.2.6.1($B_2=0$) ~ Fig.2.6.9($B_2=$)

$$\phi_j(F_1) (j=1,2,m), \beta_k(F_1) (k=1,2,b,p), \phi_j(F_2) (j=1,2,m), \beta_k(F_2) (k=1,2,b,p)$$

Step5 - および から温度 T および応力 を算出する。

$$T_1(t) = a_1 [T_{f1} \phi_1(F_1) + T_{f2} \phi_1(F_2)] = a_1 T_R \left[\frac{t}{t_R} \phi_1(F_1) - \frac{t - t_R}{t_R} \phi_1(F_2) \right]$$

$$T_2(t) = (a_1 + a_2) [T_{f1} \phi_2(F_1) + T_{f2} \phi_2(F_2)] = (a_1 + a_2) T_R \left[\frac{t}{t_R} \phi_2(F_1) - \frac{t - t_R}{t_R} \phi_2(F_2) \right]$$

$$T_m(t) = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) [T_{f1} \phi_m(F_1) + T_{f2} \phi_m(F_2)] = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) T_R \left[\frac{t}{t_R} \phi_m(F_1) - \frac{t - t_R}{t_R} \phi_m(F_2) \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_k(t) &= \frac{B_1}{1 + B_1} \frac{E\alpha}{1 - \nu} [T_{f1} \beta_k(F_1) + T_{f2} \beta_k(F_2)] \\ &= \frac{B_1}{1 + B_1} \frac{E\alpha T_R}{1 - \nu} \left[\frac{t}{t_R} \beta_k(F_1) - \frac{t - t_R}{t_R} \beta_k(F_2) \right] \quad (k=1,2,b,p) \end{aligned}$$

(6) 流体温度ランプ変化による最大熱応力とその時点を線図あるいは数表から求める

最初にステップ変化の場合の最大熱応力とその時点を求める。次にランプ変化の場合のステップ変化に対する比率を求め、先に求めた値に乗じる。

Step1 - 熱伝達係数 h_1 および h_2 に対応する無次元数 B_1 および B_2 を算出する。

ランプ時間幅 t_R に対応する無次元ランプ時間幅 F_R を算出する。

$$B_1 = \frac{h_1 L}{\lambda}, B_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}, F_R = \frac{\lambda t_R}{\rho c L^2}$$

Step2 - 流体温度ステップ変化の場合の B_1 および B_2 に対する最大熱応力 $\sigma_{k, \max}$ とその時点 $t(\sigma_{k, \max})$ を以下の線図あるいは数表から求める。 B_1 および B_2 の中間の値については比例計算により求める。

線図 Fig.2.5.1 ~ 2.5.4 あるいは数表 Table.A2.1 ~ A2.4

Step3 - B_1 、 B_2 および F_R に対して、最大熱応力とその時点のステップ変化に対する比率 $R(F_R, B_1, B_2)$ を以下の線図から求める。 B_1 および B_2 の中間の値については比例計算により求める。

Fig.2.7.2($B_2=0$) ~ Fig.2.7.10($B_2=$)

Step4 - 最大熱応力 $\sigma_{k, \max}$ とその時点 $t(\sigma_{k, \max})$ を次式により求める。

$$\sigma_{k, \max} = \frac{B_1}{1+B_1} \frac{E \alpha T_f}{1-\nu} \beta_{k, \max} R(F_R, \beta_{k, \max})$$

$$t(\sigma_{k, \max}) = \frac{\rho c L^2}{\lambda} F(\beta_{k, \max}) R(F_R, F \cdot \beta_{k, \max}) \quad (k=1, 2, b, p)$$

[注]ここで求まる最大時点 $t(\sigma_{k, \max})$ は流体温度のランプ変化終了時点を $t=0$ とした場合である。ランプ変化開始時点を $t=0$ とする場合は、ここで求まる時間にランプ時間幅 t_R を加えるとよい。

3. まとめ

高速炉機器構造の熱過渡荷重、部位のスクリーニング評価等に活用すべく、非定常熱過渡応力の評価線図策定に関する研究を実施した。得られた成果の概要は次のとおりである。

- ・ 両面で熱伝達を受ける平板の非定常熱伝導および熱応力の理論解を求め、各種工学線図を作成した。
- ・ 流体温度がステップ変化あるいは線形変化した場合の非定常温度および熱応力の工学線図を作成した。
- ・ 流体温度がステップ変化あるいはランプ変化した場合の熱応力最大値およびその時点を求める工学線図を作成した。
- ・ 工学線図は、定常温度で規格化された無次元温度 および背面温度固定の定常熱応力で規格化された無次元熱応力 を導入して作成した。
- ・ 非定常温度および熱応力の簡便な Green 関数を作成した。

これらにより以下の成果が得られた。

- ・ 片面熱伝達に対する従来の工学線図に比較し、一般的な両面熱伝達に拡張され、適用範囲が大幅に拡張された。
- ・ 無次元化表示 および τ により工学線図の読み取り精度が向上した。
- ・ 過渡的な応力の極大値はその値を、また、応力最大状態で定常値に落ち着く場合はその定常値を、熱応力最大値として工学線図より判断でき、設計評価に活用できるようになった。
- ・ ステップ変化による熱応力最大値は背面温度固定の定常熱応力の2倍を超えないことが示された。
- ・ 流体温度がステップ変化する場合の熱応力最大値とその時点が工学線図から直接読み取れる。
- ・ 流体温度がランプ変化 / ステップ変化する場合の熱応力低減率が工学線図から直接読み取れる。
- ・ 熱応力評価上は無視できる短時間の背面温度を除き、温度および熱応力の最大誤差 1.4%の簡便な Green 関数が得られた。

これらの成果は、高速炉機器構造の熱過渡荷重および評価部位のスクリーニング、熱過渡応力評価法の開発改良、実構造の感度解析、設計評価および熱応力メカニズムの考察などに役立てることができる。

参考文献

- [1] 古橋他、熱過渡応力スクリーニング法の開発 - Green 関数法の応用、JNC TN9400 2004-013、2004 年 1 月
- [2] Conduction of Heat in Solids、 second edition、 H.S.Carslaw and J.C.Jeager、 Oxford University Press、 London、 1959.
- [3] Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating、 M.P.Heisler 、 Trans. ASME、 vol.69、 1947、 pp.227-236.
- [4] Engineering data file、 Charts for transient temperature in pipes、 D.R.McNeill and J.E.Brock、 Heating/Piping/Air Conditioning、 Nov.1971
- [5] BS 5500、 G.4、 Simplified method for assessing transient thermal stress at a pressure vessel nozzle、 British Standards Institution、 London、 1985.
- [6] Methods of Theoretical Physics Vol.1、 P.M.Morse and H.Feshbach、 McGraw-Hill、 1953.
- [7] On line fatigue monitoring methodology for power plant components 、 N.K.Mukhopadhyay and others、 IJPVP 60(1994)、 pp297-306.
- [8] Theory and Problems of Laplace Transforms、 M.R.Spiegel、 McGraw-Hill、 1965.

付 録

付録 A1 誤差関数

熱伝導問題の解としてよく使用される誤差関数 $\text{erf}(x)$ および補誤差関数 $\text{erfc}(x)$ は次式で定義される。

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (\text{A1.1})$$

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi \quad (\text{A1.2})$$

$x \ll 1$ あるいは $x \gg 1$ での $\text{erf}(x)$ あるいは $\text{erfc}(x)$ の級数展開式もよく使用される。特に近似値を計算する場合などによく使用される。

$$x \ll 1 \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \Lambda \right) \approx \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{A1.3})$$

$$x \ll 1 \quad \text{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \Lambda \right) \approx 1 - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{A1.4})$$

$$x \gg 1 \quad \text{erfc}(x) = \frac{e(-x^2)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^5} - \frac{15}{8x^7} + \Lambda + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \Lambda (2n-3)}{2^{n-1} x^{2n-1}} \right) \quad (\text{A1.5})$$

$$\approx \frac{e(-x^2)}{\sqrt{\pi} x}$$

$\text{erf}(x)$ の微分および 2 回微分もよく使用される。

$$\frac{d \text{erf}(x)}{dx} = -\frac{d \text{erfc}(x)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e(-x^2) \quad (\text{A1.6})$$

$$-\frac{d^2 \text{erf}(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \text{erfc}(x)}{dx^2} = \frac{4x}{\sqrt{\pi}} e(-x^2) \quad (\text{A1.7})$$

$\text{erfc}(x)$ を次々と積分した $i\text{erfc}(x)$ もよく使用される。

$$i^n \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad i^0 \operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erfc}(x) \quad (\text{A1.8})$$

特に 1 回積分 $i\operatorname{erfc}(x)$ および 2 回積分 $i^2\operatorname{erfc}(x)$ がよく使用される。

$$i\operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty \operatorname{erfc}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e(-x^2) - x \operatorname{erfc}(x) \quad (\text{A1.9})$$

$$\begin{aligned} i^2 \operatorname{erfc}(x) &= \int_x^\infty i\operatorname{erfc}(\xi) d\xi = \frac{1}{4} [\operatorname{erfc}(x) - 2x i\operatorname{erfc}(x)] \\ &= \frac{1}{4} \left[(1 + 2x^2) \operatorname{erfc}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e(-x^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

$e(x^2)$ と $\operatorname{erfc}(x)$ の積 $e(x^2)\operatorname{erfc}(x)$ もよく使用される。 $x \ll 1$ あるいは $x \gg 1$ での $e(x^2)\operatorname{erfc}(x)$ の級数展開式および近似式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} x \ll 1 \quad e(x^2)\operatorname{erfc}(x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \Lambda \right) \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \Lambda \right) \right\} \\ &\approx 1 - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} + x^2 \end{aligned} \quad (\text{A1.11})$$

$$x \gg 1 \quad e(x^2)\operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^5} - \frac{15}{8x^7} + \Lambda \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} x} \quad (\text{A1.12})$$

これら、熱伝導問題でよく使用される誤差関数類の数表を Table.A1 に示した。〔補足〕 $e(x^2)\operatorname{erfc}(x)$ を FORTRAN で $\operatorname{EXP}(X**2)*\operatorname{ERFC}(X)$ として計算すると、 x が上限値を超えると $\operatorname{EXP}(X**2)$ がオーバーフローを起こして計算できなくなる。最近の FORTRAN では $e(x^2)\operatorname{erfc}(x)$ が組み込み関数 $\operatorname{ERFCE}(X)$ として使用できるので、これを使用するのがよい。例えば以下のように $\operatorname{ERFCE}(X)$ を用いた FORTRAN 計算式を使用するのが良い。

$$e(B^2 F)\operatorname{erfc}(B\sqrt{F}) \rightarrow \operatorname{ERFCE}(B*\operatorname{SQRT}(F))$$

$$e(B + B^2 F)\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} + B\sqrt{F}\right) \rightarrow \operatorname{EXP}(-0.25/F) * \operatorname{ERFCE}(0.5/\operatorname{SQRT}(F) + B*\operatorname{SQRT}(F))$$

$$e(2B + B^2 F)\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} + B\sqrt{F}\right) \rightarrow \operatorname{EXP}(-1/F) * \operatorname{ERFCE}(1/\operatorname{SQRT}(F) + B*\operatorname{SQRT}(F))$$

Table.A1 誤差関数表(1/3)

x	$e(x^2)\text{erfc}$	$d^2\text{erfc}/dx^2$	$d\text{erf}(x)/dx$	$\text{erf}(x)$	$\text{erfc}(x)$	$2i\text{erfc}(x)$	$4i^2\text{erfc}(x)$
0.00	1.00000	0.00000	1.12838	0.00000	1.00000	1.12838	1.00000
0.01	0.98882	0.02257	1.12827	0.01128	0.98872	1.10849	0.97763
0.02	0.97783	0.04512	1.12793	0.02256	0.97744	1.08883	0.95566
0.03	0.96703	0.06764	1.12736	0.03384	0.96616	1.06939	0.93408
0.04	0.95642	0.09013	1.12658	0.04511	0.95489	1.05018	0.91288
0.05	0.94599	0.11256	1.12556	0.05637	0.94363	1.03120	0.89207
0.06	0.93574	0.13492	1.12432	0.06762	0.93238	1.01244	0.87163
0.07	0.92567	0.15720	1.12286	0.07886	0.92114	0.99390	0.85157
0.08	0.91576	0.17939	1.12118	0.09008	0.90992	0.97559	0.83187
0.09	0.90603	0.20147	1.11928	0.10128	0.89872	0.95751	0.81254
0.10	0.89646	0.22343	1.11715	0.11246	0.88754	0.93964	0.79357
0.11	0.88705	0.24526	1.11481	0.12362	0.87638	0.92201	0.77496
0.12	0.87779	0.26694	1.11225	0.13476	0.86524	0.90459	0.75669
0.13	0.86869	0.28846	1.10947	0.14587	0.85413	0.88740	0.73877
0.14	0.85974	0.30981	1.10648	0.15695	0.84305	0.87042	0.72119
0.15	0.85094	0.33098	1.10327	0.16800	0.83200	0.85367	0.70395
0.16	0.84228	0.35195	1.09986	0.17901	0.82099	0.83714	0.68705
0.17	0.83376	0.37272	1.09624	0.18999	0.81001	0.82083	0.67047
0.18	0.82538	0.39327	1.09241	0.20094	0.79906	0.80474	0.65421
0.19	0.81713	0.41358	1.08837	0.21184	0.78816	0.78887	0.63827
0.20	0.80902	0.43365	1.08413	0.22270	0.77730	0.77322	0.62265
0.21	0.80104	0.45347	1.07970	0.23352	0.76648	0.75778	0.60734
0.22	0.79318	0.47303	1.07507	0.24430	0.75570	0.74256	0.59234
0.23	0.78545	0.49231	1.07024	0.25502	0.74498	0.72755	0.57764
0.24	0.77784	0.51131	1.06522	0.26570	0.73430	0.71276	0.56324
0.25	0.77035	0.53001	1.06001	0.27633	0.72367	0.69818	0.54913
0.26	0.76297	0.54840	1.05462	0.28690	0.71310	0.68381	0.53531
0.27	0.75571	0.56649	1.04905	0.29742	0.70258	0.66965	0.52178
0.28	0.74857	0.58424	1.04329	0.30788	0.69212	0.65571	0.50852
0.29	0.74153	0.60167	1.03736	0.31828	0.68172	0.64197	0.49555
0.30	0.73460	0.61876	1.03126	0.32863	0.67137	0.62844	0.48284
0.31	0.72778	0.63549	1.02499	0.33891	0.66109	0.61511	0.47041
0.32	0.72106	0.65187	1.01855	0.34913	0.65087	0.60199	0.45824
0.33	0.71444	0.66789	1.01195	0.35928	0.64072	0.58908	0.44633
0.34	0.70792	0.68353	1.00520	0.36936	0.63064	0.57636	0.43467
0.35	0.70150	0.69880	0.99828	0.37938	0.62062	0.56385	0.42327
0.36	0.69517	0.71368	0.99122	0.38933	0.61067	0.55154	0.41212
0.37	0.68894	0.72817	0.98401	0.39921	0.60079	0.53942	0.40121
0.38	0.68280	0.74226	0.97666	0.40901	0.59099	0.52751	0.39054
0.39	0.67675	0.75595	0.96917	0.41874	0.58126	0.51578	0.38011
0.40	0.67079	0.76923	0.96154	0.42839	0.57161	0.50426	0.36991
0.41	0.66491	0.78210	0.95378	0.43797	0.56203	0.49292	0.35993
0.42	0.65912	0.79456	0.94590	0.44747	0.55253	0.48177	0.35019
0.43	0.65342	0.80659	0.93789	0.45689	0.54311	0.47082	0.34066
0.44	0.64779	0.81820	0.92977	0.46623	0.53377	0.46005	0.33135
0.45	0.64225	0.82938	0.92153	0.47548	0.52452	0.44947	0.32226
0.46	0.63679	0.84013	0.91318	0.48466	0.51534	0.43907	0.31337
0.47	0.63140	0.85045	0.90473	0.49375	0.50625	0.42885	0.30469
0.48	0.62609	0.86033	0.89618	0.50275	0.49725	0.41882	0.29622
0.49	0.62085	0.86978	0.88753	0.51167	0.48833	0.40896	0.28794
0.50	0.61569	0.87878	0.87878	0.52050	0.47950	0.39928	0.27986

Table.A1 誤差関数表(2/3)

x	$e(x^2)\text{erfc}$	$d^2\text{erfc}/dx^2$	$\text{derf}(x)/dx$	$\text{erf}(x)$	$\text{erfc}(x)$	$2\text{ierfc}(x)$	$4i^2\text{erfc}(x)$
0.50	0.61569	0.87878	0.87878	0.52050	0.47950	0.39928	0.27986
0.51	0.61060	0.88735	0.86995	0.52924	0.47076	0.38978	0.27197
0.52	0.60558	0.89548	0.86104	0.53790	0.46210	0.38045	0.26427
0.53	0.60063	0.90317	0.85204	0.54646	0.45354	0.37130	0.25675
0.54	0.59574	0.91041	0.84298	0.55494	0.44506	0.36231	0.24941
0.55	0.59093	0.91722	0.83384	0.56332	0.43668	0.35349	0.24226
0.56	0.58618	0.92359	0.82463	0.57162	0.42838	0.34484	0.23527
0.57	0.58149	0.92952	0.81537	0.57982	0.42018	0.33636	0.22846
0.58	0.57687	0.93501	0.80604	0.58792	0.41208	0.32803	0.22182
0.59	0.57230	0.94007	0.79667	0.59594	0.40406	0.31987	0.21534
0.60	0.56780	0.94469	0.78724	0.60386	0.39614	0.31187	0.20902
0.61	0.56336	0.94889	0.77778	0.61168	0.38832	0.30403	0.20286
0.62	0.55898	0.95265	0.76827	0.61941	0.38059	0.29634	0.19686
0.63	0.55466	0.95599	0.75872	0.62705	0.37295	0.28880	0.19101
0.64	0.55039	0.95891	0.74915	0.63459	0.36541	0.28142	0.18531
0.65	0.54618	0.96141	0.73955	0.64203	0.35797	0.27418	0.17975
0.66	0.54203	0.96350	0.72992	0.64938	0.35062	0.26710	0.17434
0.67	0.53792	0.96517	0.72028	0.65663	0.34337	0.26016	0.16907
0.68	0.53387	0.96644	0.71062	0.66378	0.33622	0.25336	0.16393
0.69	0.52988	0.96731	0.70095	0.67084	0.32916	0.24671	0.15893
0.70	0.52593	0.96778	0.69127	0.67780	0.32220	0.24020	0.15406
0.71	0.52203	0.96787	0.68160	0.68467	0.31533	0.23382	0.14932
0.72	0.51819	0.96756	0.67192	0.69143	0.30857	0.22758	0.14471
0.73	0.51439	0.96688	0.66225	0.69810	0.30190	0.22148	0.14022
0.74	0.51064	0.96582	0.65258	0.70468	0.29532	0.21551	0.13585
0.75	0.50694	0.96440	0.64293	0.71116	0.28884	0.20966	0.13160
0.76	0.50328	0.96261	0.63330	0.71754	0.28246	0.20395	0.12746
0.77	0.49967	0.96047	0.62368	0.72382	0.27618	0.19837	0.12344
0.78	0.49610	0.95798	0.61409	0.73001	0.26999	0.19290	0.11952
0.79	0.49258	0.95514	0.60452	0.73610	0.26390	0.18757	0.11572
0.80	0.48910	0.95198	0.59499	0.74210	0.25790	0.18235	0.11202
0.81	0.48566	0.94848	0.58548	0.74800	0.25200	0.17725	0.10843
0.82	0.48227	0.94467	0.57602	0.75381	0.24619	0.17227	0.10493
0.83	0.47891	0.94054	0.56659	0.75952	0.24048	0.16740	0.10153
0.84	0.47560	0.93611	0.55721	0.76514	0.23486	0.16265	0.09823
0.85	0.47233	0.93138	0.54787	0.77067	0.22933	0.15801	0.09503
0.86	0.46909	0.92636	0.53858	0.77610	0.22390	0.15347	0.09191
0.87	0.46590	0.92106	0.52934	0.78144	0.21856	0.14905	0.08889
0.88	0.46274	0.91548	0.52016	0.78669	0.21331	0.14473	0.08595
0.89	0.45962	0.90964	0.51103	0.79184	0.20816	0.14052	0.08310
0.90	0.45653	0.90354	0.50197	0.79691	0.20309	0.13640	0.08033
0.91	0.45348	0.89720	0.49296	0.80188	0.19812	0.13239	0.07764
0.92	0.45047	0.89061	0.48403	0.80677	0.19323	0.12848	0.07503
0.93	0.44749	0.88379	0.47515	0.81156	0.18844	0.12466	0.07250
0.94	0.44455	0.87674	0.46635	0.81627	0.18373	0.12094	0.07005
0.95	0.44164	0.86948	0.45762	0.82089	0.17911	0.11731	0.06766
0.96	0.43876	0.86201	0.44896	0.82542	0.17458	0.11378	0.06535
0.97	0.43592	0.85434	0.44038	0.82987	0.17013	0.11033	0.06311
0.98	0.43311	0.84648	0.43188	0.83423	0.16577	0.10697	0.06094
0.99	0.43033	0.83843	0.42345	0.83851	0.16149	0.10370	0.05883
1.00	0.42758	0.83021	0.41511	0.84270	0.15730	0.10051	0.05679

Table.A1 誤差関数表(3/3)

x	$e(x^2)\text{erfc}$	$d^2\text{erfc}/dx^2$	$\text{derf}(x)/dx$	$\text{erf}(x)$	$\text{erfc}(x)$	$2i\text{erfc}(x)$	$4i^2\text{erfc}(x)$
1.00	0.42758	0.83021	0.41511	0.84270	0.15730	0.10051	0.05679
1.05	0.41430	0.78680	0.37467	0.86244	0.13756	0.08578	0.04749
1.10	0.40173	0.74026	0.33648	0.88021	0.11979	0.07293	0.03957
1.15	0.38983	0.69156	0.30068	0.89612	0.10388	0.06176	0.03285
1.20	0.37854	0.64163	0.26734	0.91031	0.08969	0.05210	0.02717
1.25	0.36782	0.59130	0.23652	0.92290	0.07710	0.04377	0.02239
1.30	0.35764	0.54134	0.20821	0.93401	0.06599	0.03663	0.01838
1.35	0.34796	0.49240	0.18237	0.94376	0.05624	0.03053	0.01503
1.40	0.33874	0.44504	0.15894	0.95229	0.04772	0.02534	0.01224
1.45	0.32996	0.39971	0.13783	0.95970	0.04031	0.02095	0.00993
1.50	0.32159	0.35679	0.11893	0.96611	0.03390	0.01725	0.00803
1.55	0.31359	0.31654	0.10211	0.97162	0.02838	0.01414	0.00646
1.60	0.30595	0.27913	0.08723	0.97635	0.02365	0.01154	0.00518
1.65	0.29865	0.24468	0.07415	0.98038	0.01962	0.00939	0.00414
1.70	0.29166	0.21322	0.06271	0.98379	0.01621	0.00760	0.00329
1.75	0.28497	0.18471	0.05278	0.98667	0.01333	0.00613	0.00261
1.80	0.27856	0.15909	0.04419	0.98909	0.01091	0.00492	0.00206
1.85	0.27241	0.13623	0.03682	0.99111	0.00889	0.00393	0.00162
1.90	0.26651	0.11599	0.03053	0.99279	0.00721	0.00313	0.00127
1.95	0.26084	0.09820	0.02518	0.99418	0.00582	0.00248	0.00099
2.00	0.25540	0.08267	0.02067	0.99532	0.00468	0.00196	0.00077
2.05	0.25016	0.06920	0.01688	0.99626	0.00374	0.00154	0.00059
2.10	0.24512	0.05761	0.01372	0.99702	0.00298	0.00120	0.00046
2.15	0.24027	0.04769	0.01109	0.99764	0.00236	0.00094	0.00035
2.20	0.23559	0.03926	0.00892	0.99814	0.00186	0.00073	0.00027
2.25	0.23109	0.03214	0.00714	0.99854	0.00146	0.00056	0.00020
2.30	0.22674	0.02617	0.00569	0.99886	0.00114	0.00043	0.00015
2.35	0.22255	0.02119	0.00451	0.99911	0.00089	0.00033	0.00012
2.40	0.21850	0.01707	0.00356	0.99931	0.00069	0.00025	0.00009
2.45	0.21459	0.01367	0.00279	0.99947	0.00053	0.00019	0.00006
2.50	0.21081	0.01089	0.00218	0.99959	0.00041	0.00014	0.00005
2.55	0.20715	0.00863	0.00169	0.99969	0.00031	0.00011	0.00004
2.60	0.20361	0.00680	0.00131	0.99976	0.00024	0.00008	0.00003
2.65	0.20019	0.00533	0.00101	0.99982	0.00018	0.00006	0.00002
2.70	0.19687	0.00416	0.00077	0.99987	0.00013	0.00004	0.00001
2.75	0.19366	0.00322	0.00059	0.99990	0.00010	0.00003	0.00001
2.80	0.19055	0.00249	0.00044	0.99992	0.00008	0.00002	0.00001
2.85	0.18753	0.00191	0.00033	0.99994	0.00006	0.00002	0.00001
2.90	0.18460	0.00146	0.00025	0.99996	0.00004	0.00001	0.00000
2.95	0.18176	0.00111	0.00019	0.99997	0.00003	0.00001	0.00000
3.00	0.17900	0.00084	0.00014	0.99998	0.00002	0.00001	0.00000

付録 A2 流体温度ステップ変化による熱応力最大値とその時点

基準面側の流体 1 温度がステップ変化した場合の熱応力最大値とその時点の数表を示した。熱ピーク応力は必ず短時間で極大値（最大値）となる。熱ピーク応力以外では、 B_1 および B_2 のある範囲では短時間の極大値が最大値となり、範囲外では長時間の定常熱応力が最大値となる。最大時点を与える表において両者の境界を太い点線で示した。また定常熱応力が最大値となる場合は、最大時点として定常熱応力の 0.999 倍に達する時点を示した。

Table.A2.1(1) ~ 基準面の熱応力が最大となる時点 $F(\sigma_{1max})$

Table.A2.1(2) ~ 基準面の熱応力の最大値 σ_{1max}

Table.A2.2(1) ~ 背面の熱応力が最大となる時点 $F(\sigma_{2max})$

Table.A2.2(2) ~ 背面の熱応力の最大値 σ_{2max}

Table.A2.3(1) ~ 熱曲げ応力が最大となる時点 $F(\sigma_{bmax})$

Table.A2.3(2) ~ 熱曲げ応力の最大値 σ_{bmax}

Table.A2.4(1) ~ 基準面の熱ピーク応力が最大となる時点 $F(\sigma_{pmax})$

Table.A2.4(2) ~ 基準面の熱ピーク応力の最大値 σ_{pmax}

付録 A3 変数分離形の 2 項近似式の固有値と各係数

基準面側の流体 1 温度がステップ変化した場合の無次元温度の Green 関数は、無次元時間 $F = F_1$ では変数分離形の級数解で $n = 2$ まで採った 2 項近似式で十分な精度で近似できる。さらに $F = F_2 (> F_1)$ では $n = 1$ のみ採った 1 項近似式で近似できる。 $(0 < B_1 \leq 100, \quad)$ および $(0 < B_2 \leq 100, \quad)$ に対して定常温度分布の係数 (a_1, a_2) および固有値と係数 $\{(p_n, c_n, C_{2, n}, C_{m, n}, C_{b, n}) (n=1, 2)\}$ の数表を示した。

Table.A3.1 ~ $B_2 = 0, \quad 0.01$

Table.A3.2 ~ $B_2 = 0.015, \quad 0.02$

Table.A3.3 ~ $B_2 = 0.03, \quad 0.05$

Table.A3.4 ~ $B_2 = 0.07, \quad 0.1$

Table.A3.5 ~ $B_2 = 0.15, \quad 0.2$

Table.A3.6 ~ $B_2 = 0.3, \quad 0.5$

Table.A3.7 ~ $B_2 = 0.7, \quad 1$

Table.A3.8 ~ $B_2 = 1.5, \quad 2$

Table.A3.9 ~ $B_2 = 3, \quad 5$

Table.A3.10 ~ $B_2 = 7, \quad 10$

Table.A3.11 ~ $B_2 = 15, \quad 20$

Table.A3.12 ~ $B_2 = 30, \quad 50$

Table.A3.13 ~ $B_2 = 70, \quad 100$

Table.A3.14 ~ $B_2 =$

Table.A3.1 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0、0.01)

B ₂ = 0			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	1	0	0.0998	0.9967	1.0017	1	0.00249	3.1448	0.002	-0.002	2E-06	-0.0025
0.015	1	0	0.1222	0.995	1.0025	1	0.00374	3.1464	0.003	-0.003	4.6E-06	-0.0037
0.02	1	0	0.141	0.9934	1.0033	1	0.00498	3.1479	0.004	-0.004	8.1E-06	-0.0049
0.03	1	0	0.1723	0.9901	1.0049	1	0.00745	3.1511	0.006	-0.006	1.8E-05	-0.0073
0.05	1	0	0.2218	0.9835	1.0082	1	0.01236	3.1574	0.01	-0.01	5E-05	-0.0122
0.07	1	0	0.2615	0.977	1.0114	0.9999	0.01722	3.1637	0.0139	-0.0139	9.7E-05	-0.0169
0.1	1	0	0.3111	0.9673	1.0161	0.9998	0.02442	3.1731	0.0196	-0.0197	0.0002	-0.024
0.15	1	0	0.3779	0.9515	1.0237	0.9995	0.0362	3.1886	0.029	-0.029	0.00043	-0.0355
0.2	1	0	0.4328	0.936	1.0311	0.9992	0.04769	3.2039	0.0381	-0.0382	0.00074	-0.0468
0.3	1	0	0.5218	0.906	1.045	0.9983	0.06985	3.2341	0.0553	-0.0555	0.00159	-0.0683
0.5	1	0	0.6533	0.8498	1.0701	0.9956	0.11096	3.2923	0.0863	-0.0873	0.00398	-0.108
0.7	1	0	0.7506	0.7985	1.0918	0.9922	0.14808	3.3477	0.1129	-0.1154	0.00705	-0.1434
1	1	0	0.8603	0.7299	1.1191	0.9861	0.19707	3.4256	0.1456	-0.1517	0.01241	-0.1892
1.5	1	0	0.9882	0.6347	1.1537	0.9749	0.26381	3.5422	0.1841	-0.1999	0.02201	-0.2497
2	1	0	1.0769	0.5587	1.1785	0.9635	0.31604	3.6436	0.2075	-0.2367	0.03126	-0.2946
3	1	0	1.1925	0.447	1.2102	0.9431	0.39096	3.8088	0.2264	-0.2881	0.04681	-0.3532
5	1	0	1.3138	0.3152	1.2402	0.913	0.4764	4.0336	0.2161	-0.3442	0.06642	-0.4059
7	1	0	1.3766	0.2418	1.2532	0.8932	0.52241	4.1746	0.1907	-0.3722	0.07658	-0.4236
10	1	0	1.4289	0.1785	1.262	0.8743	0.56111	4.3058	0.1556	-0.3934	0.08392	-0.4295
15	1	0	1.4729	0.1239	1.2676	0.8565	0.59369	4.4255	0.1156	-0.4084	0.08851	-0.4261
20	1	0	1.4961	0.0947	1.2699	0.8464	0.61075	4.4915	0.0909	-0.4147	0.09009	-0.4207
30	1	0	1.5202	0.0644	1.2717	0.8355	0.62827	4.5615	0.0631	-0.4198	0.09098	-0.4122
50	1	0	1.54	0.0392	1.2727	0.826	0.64258	4.6202	0.0389	-0.4227	0.09109	-0.403
70	1	0	1.5487	0.0282	1.2729	0.8218	0.64878	4.6461	0.028	-0.4235	0.09095	-0.3984
100	1	0	1.5552	0.0198	1.2731	0.8185	0.65346	4.6658	0.0198	-0.424	0.09077	-0.3946
	1	0	1.5708	0	1.2732	0.8106	0.66444	4.7124	0	-0.4244	0.09006	-0.3849

B ₂ = 0.01			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.5025	-0.005	0.1413	0.4992	0.4992	0.5	0	3.1479	0.002	-0.002	1.7E-20	-0.0025
0.015	0.6024	-0.006	0.1579	0.5974	0.5989	0.5994	0.00074	3.1495	0.003	-0.003	1.5E-06	-0.0037
0.02	0.6689	-0.0066	0.1729	0.6623	0.6656	0.6656	0.00165	3.1511	0.004	-0.004	4E-06	-0.0049
0.03	0.7519	-0.0074	0.1994	0.7419	0.7494	0.7481	0.00371	3.1543	0.006	-0.006	1.2E-05	-0.0073
0.05	0.8347	-0.0083	0.2435	0.8182	0.8346	0.8305	0.00819	3.1606	0.0099	-0.0099	4E-05	-0.0121
0.07	0.8761	-0.0087	0.2803	0.8531	0.8788	0.8717	0.01283	3.1669	0.0138	-0.0138	8.3E-05	-0.0169
0.1	0.9099	-0.009	0.3272	0.8773	0.9169	0.9052	0.01985	3.1762	0.0196	-0.0196	0.00017	-0.024
0.15	0.9381	-0.0093	0.3915	0.8897	0.9524	0.933	0.03146	3.1917	0.0289	-0.029	0.0004	-0.0355
0.2	0.9528	-0.0094	0.4449	0.889	0.9744	0.9473	0.04286	3.207	0.038	-0.038	0.0007	-0.0467
0.3	0.9681	-0.0096	0.5321	0.8742	1.0034	0.9616	0.0649	3.2371	0.0552	-0.0554	0.00153	-0.0682
0.5	0.9806	-0.0097	0.662	0.8306	1.0408	0.9714	0.10587	3.2952	0.0861	-0.0871	0.00388	-0.1078
0.7	0.9861	-0.0098	0.7585	0.7848	1.0679	0.9735	0.1429	3.3505	0.1127	-0.1151	0.00692	-0.1431
1	0.9902	-0.0098	0.8677	0.7204	1.0992	0.9716	0.19181	3.4283	0.1453	-0.1514	0.01223	-0.1889
1.5	0.9934	-0.0098	0.9951	0.6285	1.1369	0.9636	0.25849	3.5447	0.1838	-0.1995	0.02178	-0.2493
2	0.9951	-0.0099	1.0835	0.5542	1.1633	0.9539	0.3107	3.6461	0.2072	-0.2363	0.03099	-0.2942
3	0.9967	-0.0099	1.1989	0.4441	1.1967	0.9352	0.38562	3.8111	0.2261	-0.2877	0.0465	-0.3529
5	0.998	-0.0099	1.3202	0.3135	1.228	0.9064	0.47111	4.0358	0.2159	-0.3438	0.06607	-0.4057
7	0.9986	-0.0099	1.383	0.2406	1.2415	0.8872	0.51715	4.1768	0.1905	-0.3718	0.07623	-0.4234
10	0.999	-0.0099	1.4352	0.1777	1.2507	0.8687	0.55589	4.3079	0.1555	-0.393	0.08358	-0.4293
15	0.9993	-0.0099	1.4793	0.1233	1.2568	0.8513	0.58851	4.4276	0.1155	-0.408	0.08817	-0.426
20	0.9995	-0.0099	1.5025	0.0943	1.2592	0.8413	0.60559	4.4936	0.0908	-0.4143	0.08976	-0.4206
30	0.9997	-0.0099	1.5265	0.0641	1.2611	0.8305	0.62313	4.5636	0.0631	-0.4194	0.09065	-0.4122
50	0.9998	-0.0099	1.5463	0.039	1.2622	0.8212	0.63745	4.6224	0.0389	-0.4223	0.09077	-0.403
70	0.9999	-0.0099	1.555	0.028	1.2626	0.817	0.64366	4.6482	0.028	-0.4231	0.09063	-0.3984
100	0.9999	-0.0099	1.5616	0.0197	1.2628	0.8137	0.64835	4.6679	0.0198	-0.4236	0.09045	-0.3946
	1	-0.0099	1.5771	0	1.263	0.8059	0.65934	4.7145	0	-0.424	0.08975	-0.3849

Table.A3.2 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.015、0.02)

B ₂ = 0.015			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.4036	-0.006	0.1579	0.4003	0.3993	0.4006	-0.0005	3.1495	0.002	-0.002	-1E-06	-0.0024
0.015	0.5037	-0.0074	0.173	0.4988	0.4988	0.5	2.4E-16	3.1511	0.003	-0.003	-1E-19	-0.0037
0.02	0.5751	-0.0085	0.1868	0.5685	0.5699	0.5708	0.00071	3.1527	0.004	-0.004	2E-06	-0.0049
0.03	0.67	-0.0099	0.2116	0.6601	0.665	0.665	0.00247	3.1559	0.006	-0.006	9E-06	-0.0073
0.05	0.7719	-0.0114	0.2537	0.7554	0.7686	0.7661	0.0066	3.1621	0.0099	-0.0099	3.5E-05	-0.0121
0.07	0.8257	-0.0122	0.2893	0.8027	0.8248	0.8195	0.01105	3.1684	0.0138	-0.0138	7.6E-05	-0.0169
0.1	0.8712	-0.0129	0.3349	0.8387	0.8744	0.8646	0.01789	3.1778	0.0196	-0.0196	0.00016	-0.0239
0.15	0.9103	-0.0135	0.3981	0.862	0.9205	0.9032	0.02934	3.1932	0.0289	-0.0289	0.00038	-0.0354
0.2	0.9312	-0.0138	0.4508	0.8674	0.9484	0.9236	0.04064	3.2085	0.0379	-0.038	0.00068	-0.0466
0.3	0.9531	-0.0141	0.5372	0.8593	0.9838	0.9444	0.06256	3.2386	0.0551	-0.0553	0.0015	-0.0681
0.5	0.9713	-0.0144	0.6663	0.8214	1.0268	0.9599	0.10342	3.2967	0.086	-0.0869	0.00383	-0.1077
0.7	0.9793	-0.0145	0.7624	0.7783	1.0563	0.9645	0.1404	3.3519	0.1125	-0.115	0.00686	-0.143
1	0.9854	-0.0146	0.8713	0.7159	1.0895	0.9645	0.18926	3.4297	0.1452	-0.1512	0.01215	-0.1888
1.5	0.9902	-0.0146	0.9985	0.6255	1.1288	0.9581	0.25589	3.546	0.1836	-0.1993	0.02166	-0.2491
2	0.9927	-0.0147	1.0868	0.552	1.1559	0.9493	0.30809	3.6473	0.207	-0.2361	0.03086	-0.294
3	0.9951	-0.0147	1.2021	0.4427	1.19	0.9313	0.383	3.8123	0.2259	-0.2875	0.04634	-0.3528
5	0.9971	-0.0147	1.3234	0.3127	1.222	0.9032	0.46851	4.0369	0.2158	-0.3436	0.0659	-0.4056
7	0.9979	-0.0147	1.3861	0.2401	1.2358	0.8843	0.51457	4.1779	0.1905	-0.3716	0.07606	-0.4233
10	0.9985	-0.0148	1.4384	0.1773	1.2452	0.866	0.55332	4.309	0.1554	-0.3928	0.0834	-0.4293
15	0.999	-0.0148	1.4824	0.1231	1.2514	0.8487	0.58596	4.4287	0.1155	-0.4078	0.088	-0.426
20	0.9993	-0.0148	1.5056	0.0941	1.2539	0.8388	0.60305	4.4947	0.0908	-0.4141	0.08959	-0.4206
30	0.9995	-0.0148	1.5297	0.064	1.2559	0.8281	0.6206	4.5647	0.0631	-0.4192	0.09049	-0.4122
50	0.9997	-0.0148	1.5495	0.0389	1.2571	0.8188	0.63493	4.6234	0.0389	-0.4221	0.09061	-0.403
70	0.9998	-0.0148	1.5582	0.028	1.2575	0.8146	0.64114	4.6493	0.028	-0.4229	0.09047	-0.3983
100	0.9999	-0.0148	1.5647	0.0197	1.2577	0.8114	0.64583	4.6689	0.0197	-0.4234	0.09029	-0.3946
	1	-0.0148	1.5803	0	1.258	0.8036	0.65683	4.7156	0	-0.4238	0.0896	-0.3849

B ₂ = 0.02			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.3378	-0.0066	0.1729	0.3344	0.3328	0.3344	-0.0008	3.1511	0.002	-0.002	-2E-06	-0.0024
0.015	0.4334	-0.0085	0.1868	0.4285	0.4274	0.4292	-0.0005	3.1527	0.003	-0.003	-2E-06	-0.0037
0.02	0.505	-0.0099	0.1997	0.4983	0.4983	0.5	2.1E-16	3.1543	0.004	-0.004	4.9E-20	-0.0049
0.03	0.6047	-0.0119	0.2231	0.5948	0.5978	0.5988	0.00148	3.1574	0.006	-0.006	6E-06	-0.0073
0.05	0.7183	-0.0141	0.2634	0.7019	0.7124	0.7112	0.00525	3.1637	0.0099	-0.0099	3E-05	-0.0121
0.07	0.7812	-0.0153	0.2979	0.7583	0.7772	0.7734	0.00947	3.17	0.0138	-0.0138	6.9E-05	-0.0169
0.1	0.8361	-0.0164	0.3425	0.8035	0.8357	0.8277	0.0161	3.1793	0.0195	-0.0195	0.00015	-0.0239
0.15	0.8844	-0.0173	0.4045	0.8361	0.8906	0.8753	0.02735	3.1948	0.0288	-0.0289	0.00037	-0.0354
0.2	0.9107	-0.0179	0.4566	0.847	0.9237	0.9011	0.03853	3.21	0.0379	-0.0379	0.00066	-0.0466
0.3	0.9387	-0.0184	0.5422	0.845	0.965	0.9278	0.06032	3.2401	0.055	-0.0552	0.00147	-0.068
0.5	0.9623	-0.0189	0.6705	0.8125	1.0131	0.9486	0.10105	3.2981	0.0859	-0.0868	0.00379	-0.1076
0.7	0.9728	-0.0191	0.7663	0.7718	1.045	0.9557	0.13795	3.3533	0.1124	-0.1148	0.00679	-0.1428
1	0.9808	-0.0192	0.8749	0.7114	1.0801	0.9576	0.18675	3.431	0.145	-0.151	0.01206	-0.1886
1.5	0.9871	-0.0194	1.0019	0.6226	1.1207	0.9527	0.25333	3.5473	0.1834	-0.1991	0.02155	-0.2489
2	0.9903	-0.0194	1.0901	0.5498	1.1486	0.9446	0.3055	3.6485	0.2069	-0.2359	0.03072	-0.2939
3	0.9935	-0.0195	1.2053	0.4413	1.1835	0.9275	0.38041	3.8134	0.2258	-0.2873	0.04618	-0.3526
5	0.9961	-0.0195	1.3265	0.3119	1.2161	0.9	0.46593	4.038	0.2157	-0.3433	0.06573	-0.4054
7	0.9972	-0.0196	1.3893	0.2395	1.2301	0.8813	0.51201	4.179	0.1904	-0.3714	0.07588	-0.4232
10	0.998	-0.0196	1.4415	0.1769	1.2397	0.8632	0.55078	4.3101	0.1554	-0.3926	0.08323	-0.4292
15	0.9987	-0.0196	1.4855	0.1228	1.2461	0.8461	0.58344	4.4297	0.1154	-0.4076	0.08783	-0.4259
20	0.999	-0.0196	1.5088	0.0939	1.2487	0.8363	0.60053	4.4957	0.0908	-0.4139	0.08942	-0.4205
30	0.9994	-0.0196	1.5328	0.0638	1.2508	0.8257	0.61809	4.5657	0.063	-0.419	0.09033	-0.4121
50	0.9996	-0.0196	1.5526	0.0389	1.252	0.8164	0.63243	4.6245	0.0389	-0.4219	0.09045	-0.403
70	0.9997	-0.0196	1.5613	0.0279	1.2524	0.8123	0.63865	4.6504	0.028	-0.4227	0.09031	-0.3983
100	0.9998	-0.0196	1.5679	0.0196	1.2526	0.8091	0.64333	4.67	0.0197	-0.4232	0.09013	-0.3946
	1	-0.0196	1.5834	0	1.253	0.8014	0.65434	4.7166	0	-0.4237	0.08944	-0.3849

Table.A3.3 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.03、0.05)

B ₂ = 0.03			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.2556	-0.0074	0.1994	0.2523	0.2498	0.2519	-0.0012	3.1543	0.002	-0.002	-4E-06	-0.0024
0.015	0.3399	-0.0099	0.2116	0.335	0.3325	0.335	-0.0012	3.1559	0.003	-0.003	-5E-06	-0.0037
0.02	0.4071	-0.0119	0.2231	0.4005	0.3985	0.4012	-0.001	3.1574	0.004	-0.004	-4E-06	-0.0049
0.03	0.5074	-0.0148	0.2443	0.4975	0.4975	0.5	0	3.1606	0.006	-0.006	5.7E-19	-0.0073
0.05	0.6319	-0.0184	0.2817	0.6155	0.6216	0.6227	0.00306	3.1669	0.0099	-0.0099	2E-05	-0.0121
0.07	0.7062	-0.0206	0.3143	0.6833	0.6969	0.6958	0.0068	3.1731	0.0138	-0.0138	5.5E-05	-0.0168
0.1	0.7744	-0.0226	0.357	0.742	0.7678	0.763	0.01296	3.1824	0.0195	-0.0195	0.00013	-0.0238
0.15	0.8374	-0.0244	0.4171	0.7892	0.8365	0.8248	0.02373	3.1978	0.0288	-0.0288	0.00034	-0.0353
0.2	0.8729	-0.0254	0.4679	0.8092	0.8782	0.8595	0.03463	3.2131	0.0378	-0.0378	0.00062	-0.0465
0.3	0.9115	-0.0265	0.5521	0.818	0.9296	0.8967	0.05609	3.2431	0.0549	-0.0551	0.00141	-0.0679
0.5	0.945	-0.0275	0.6789	0.7955	0.9869	0.9271	0.09648	3.301	0.0856	-0.0866	0.00369	-0.1074
0.7	0.9601	-0.028	0.774	0.7594	1.0232	0.9386	0.13321	3.3562	0.1121	-0.1145	0.00666	-0.1426
1	0.9717	-0.0283	0.882	0.7026	1.0616	0.9441	0.18186	3.4337	0.1447	-0.1507	0.01189	-0.1883
1.5	0.981	-0.0286	1.0086	0.6168	1.105	0.9422	0.24832	3.5498	0.1831	-0.1987	0.02132	-0.2486
2	0.9857	-0.0287	1.0966	0.5455	1.1343	0.9356	0.30044	3.651	0.2065	-0.2355	0.03046	-0.2935
3	0.9904	-0.0288	1.2117	0.4385	1.1706	0.92	0.37532	3.8157	0.2255	-0.2868	0.04587	-0.3523
5	0.9942	-0.029	1.3328	0.3103	1.2044	0.8937	0.46087	4.0402	0.2155	-0.3429	0.06539	-0.4052
7	0.9959	-0.029	1.3955	0.2384	1.2189	0.8756	0.50697	4.1811	0.1902	-0.371	0.07553	-0.423
10	0.9971	-0.029	1.4477	0.1761	1.229	0.8579	0.54578	4.3122	0.1553	-0.3922	0.08288	-0.4291
15	0.9981	-0.0291	1.4918	0.1223	1.2356	0.841	0.57846	4.4319	0.1154	-0.4072	0.08749	-0.4258
20	0.9986	-0.0291	1.515	0.0936	1.2384	0.8314	0.59557	4.4978	0.0907	-0.4135	0.08909	-0.4205
30	0.999	-0.0291	1.539	0.0636	1.2406	0.8209	0.61315	4.5679	0.063	-0.4186	0.09	-0.4121
50	0.9994	-0.0291	1.5589	0.0387	1.242	0.8118	0.6275	4.6266	0.0388	-0.4215	0.09012	-0.403
70	0.9996	-0.0291	1.5675	0.0278	1.2424	0.8077	0.63372	4.6525	0.028	-0.4223	0.08999	-0.3983
100	0.9997	-0.0291	1.5741	0.0196	1.2427	0.8046	0.63842	4.6721	0.0197	-0.4228	0.08982	-0.3946
	1	-0.0291	1.5897	0	1.2431	0.7969	0.64943	4.7187	0	-0.4233	0.08913	-0.3849

B ₂ = 0.05			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.1736	-0.0083	0.2435	0.1703	0.1669	0.1694	-0.0017	3.1606	0.002	-0.002	-8E-06	-0.0024
0.015	0.2395	-0.0114	0.2537	0.2346	0.2306	0.2339	-0.002	3.1621	0.003	-0.003	-1E-05	-0.0036
0.02	0.2958	-0.0141	0.2634	0.2892	0.2849	0.2887	-0.0021	3.1637	0.004	-0.004	-1E-05	-0.0048
0.03	0.3865	-0.0184	0.2817	0.3767	0.373	0.3773	-0.0019	3.1669	0.0059	-0.0059	-1E-05	-0.0072
0.05	0.5122	-0.0244	0.3149	0.4959	0.4959	0.5	0	3.1731	0.0098	-0.0098	-1E-18	-0.012
0.07	0.5951	-0.0283	0.3446	0.5724	0.578	0.5809	0.00282	3.1793	0.0137	-0.0137	2.7E-05	-0.0167
0.1	0.6774	-0.0323	0.3841	0.6451	0.661	0.6612	0.00798	3.1886	0.0194	-0.0194	9.5E-05	-0.0237
0.15	0.759	-0.0361	0.4409	0.711	0.7462	0.7406	0.01768	3.204	0.0286	-0.0286	0.00028	-0.0351
0.2	0.8077	-0.0385	0.4896	0.7443	0.7998	0.7878	0.02788	3.2192	0.0375	-0.0376	0.00054	-0.0462
0.3	0.863	-0.0411	0.5711	0.7698	0.8663	0.841	0.04849	3.2491	0.0546	-0.0548	0.00129	-0.0676
0.5	0.913	-0.0435	0.6953	0.764	0.9387	0.8874	0.08803	3.3068	0.0852	-0.0862	0.0035	-0.1069
0.7	0.9363	-0.0446	0.789	0.7363	0.9823	0.9068	0.12431	3.3618	0.1116	-0.114	0.00641	-0.142
1	0.9546	-0.0455	0.896	0.6862	1.0267	0.9187	0.17258	3.4391	0.1441	-0.15	0.01155	-0.1876
1.5	0.9692	-0.0462	1.0217	0.6059	1.075	0.9221	0.23873	3.5549	0.1824	-0.198	0.02087	-0.2479
2	0.9767	-0.0465	1.1094	0.5374	1.1068	0.9183	0.29071	3.6559	0.2059	-0.2346	0.02993	-0.2928
3	0.9844	-0.0469	1.2242	0.4333	1.1458	0.9056	0.3655	3.8204	0.2249	-0.286	0.04525	-0.3517
5	0.9906	-0.0472	1.3451	0.3072	1.1818	0.8816	0.45106	4.0446	0.2151	-0.342	0.06471	-0.4047
7	0.9932	-0.0473	1.4078	0.2362	1.1973	0.8645	0.4972	4.1854	0.1899	-0.3701	0.07484	-0.4227
10	0.9953	-0.0474	1.46	0.1746	1.2081	0.8476	0.53606	4.3165	0.1551	-0.3913	0.08219	-0.4289
15	0.9968	-0.0475	1.5041	0.1213	1.2153	0.8313	0.56879	4.4361	0.1153	-0.4064	0.08682	-0.4257
20	0.9976	-0.0475	1.5273	0.0928	1.2183	0.8219	0.58593	4.5021	0.0906	-0.4127	0.08842	-0.4204
30	0.9984	-0.0475	1.5513	0.0631	1.2209	0.8117	0.60354	4.5721	0.063	-0.4178	0.08935	-0.412
50	0.9991	-0.0476	1.5712	0.0384	1.2225	0.8028	0.61792	4.6308	0.0388	-0.4207	0.08949	-0.4029
70	0.9993	-0.0476	1.5799	0.0276	1.223	0.7988	0.62415	4.6567	0.028	-0.4216	0.08936	-0.3983
100	0.9995	-0.0476	1.5864	0.0194	1.2234	0.7957	0.62885	4.6764	0.0197	-0.422	0.08919	-0.3946
	1	-0.0476	1.602	0	1.224	0.7883	0.63989	4.723	0	-0.4225	0.08851	-0.3849

Table.A3.4 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.07、0.1)

B ₂ = 0.07			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.1326	-0.0087	0.2803	0.1293	0.1255	0.1283	-0.0019	3.1669	0.002	-0.002	-1E-05	-0.0024
0.015	0.1865	-0.0122	0.2893	0.1816	0.1767	0.1804	-0.0024	3.1684	0.003	-0.003	-2E-05	-0.0036
0.02	0.2341	-0.0153	0.2979	0.2276	0.2221	0.2265	-0.0028	3.17	0.0039	-0.0039	-2E-05	-0.0048
0.03	0.3144	-0.0206	0.3143	0.3046	0.2987	0.3041	-0.003	3.1731	0.0059	-0.0059	-2E-05	-0.0072
0.05	0.4332	-0.0283	0.3446	0.4169	0.4129	0.419	-0.002	3.1793	0.0098	-0.0098	-2E-05	-0.012
0.07	0.5169	-0.0338	0.372	0.4942	0.4942	0.5	0	3.1855	0.0136	-0.0136	-5E-19	-0.0166
0.1	0.6045	-0.0395	0.4092	0.5723	0.5807	0.5847	0.00422	3.1948	0.0193	-0.0193	5.7E-05	-0.0236
0.15	0.6963	-0.0456	0.4632	0.6484	0.6739	0.6733	0.0128	3.2101	0.0284	-0.0285	0.00022	-0.035
0.2	0.7535	-0.0493	0.5101	0.6903	0.7346	0.7283	0.02224	3.2252	0.0373	-0.0374	0.00047	-0.046
0.3	0.821	-0.0537	0.5892	0.7281	0.8113	0.7928	0.04186	3.255	0.0543	-0.0545	0.00118	-0.0673
0.5	0.8843	-0.0579	0.711	0.7358	0.8951	0.8516	0.08037	3.3125	0.0848	-0.0857	0.00332	-0.1065
0.7	0.9145	-0.0598	0.8035	0.7151	0.9448	0.8777	0.11611	3.3673	0.1111	-0.1134	0.00616	-0.1415
1	0.9386	-0.0614	0.9095	0.6709	0.9942	0.8951	0.1639	3.4445	0.1435	-0.1494	0.01121	-0.187
1.5	0.9582	-0.0627	1.0346	0.5957	1.0467	0.9032	0.22967	3.56	0.1818	-0.1972	0.02042	-0.2472
2	0.9683	-0.0633	1.1219	0.5298	1.0808	0.902	0.28147	3.6607	0.2052	-0.2338	0.02941	-0.2921
3	0.9787	-0.064	1.2364	0.4283	1.1222	0.8919	0.35612	3.825	0.2244	-0.2851	0.04464	-0.351
5	0.9871	-0.0646	1.3573	0.3043	1.1601	0.8701	0.44165	4.049	0.2147	-0.3412	0.06403	-0.4043
7	0.9907	-0.0648	1.4199	0.2342	1.1766	0.8539	0.48782	4.1898	0.1897	-0.3692	0.07416	-0.4223
10	0.9935	-0.065	1.4721	0.1732	1.188	0.8377	0.52671	4.3207	0.1549	-0.3905	0.08151	-0.4286
15	0.9957	-0.0651	1.5162	0.1204	1.1958	0.8219	0.55949	4.4403	0.1151	-0.4055	0.08615	-0.4255
20	0.9967	-0.0652	1.5394	0.0921	1.1991	0.8128	0.57665	4.5063	0.0905	-0.4119	0.08776	-0.4203
30	0.9978	-0.0653	1.5635	0.0626	1.2019	0.8029	0.59428	4.5763	0.0629	-0.417	0.0887	-0.412
50	0.9987	-0.0653	1.5833	0.0381	1.2037	0.7942	0.60869	4.6351	0.0388	-0.4199	0.08885	-0.4029
70	0.9991	-0.0654	1.592	0.0274	1.2043	0.7903	0.61493	4.6609	0.028	-0.4208	0.08873	-0.3983
100	0.9994	-0.0654	1.5986	0.0193	1.2048	0.7873	0.61964	4.6806	0.0197	-0.4212	0.08856	-0.3945
	1	-0.0654	1.6141	0	1.2056	0.78	0.63069	4.7272	0	-0.4217	0.0879	-0.3849

B ₂ = 0.1			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0991	-0.009	0.3272	0.0958	0.0917	0.0946	-0.0021	3.1762	0.002	-0.002	-2E-05	-0.0024
0.015	0.1416	-0.0129	0.3349	0.1367	0.1312	0.1352	-0.0028	3.1778	0.0029	-0.0029	-2E-05	-0.0036
0.02	0.1803	-0.0164	0.3425	0.1738	0.1671	0.1722	-0.0033	3.1793	0.0039	-0.0039	-3E-05	-0.0048
0.03	0.2481	-0.0226	0.357	0.2384	0.2303	0.2369	-0.004	3.1824	0.0058	-0.0058	-4E-05	-0.0072
0.05	0.3548	-0.0323	0.3841	0.3387	0.3305	0.3388	-0.0041	3.1886	0.0097	-0.0097	-5E-05	-0.0119
0.07	0.435	-0.0395	0.4092	0.4125	0.4065	0.4153	-0.003	3.1948	0.0135	-0.0135	-4E-05	-0.0165
0.1	0.5238	-0.0476	0.4435	0.4918	0.4918	0.5	3.8E-16	3.204	0.0191	-0.0191	-7E-20	-0.0234
0.15	0.6226	-0.0566	0.4943	0.575	0.589	0.5942	0.00701	3.2192	0.0282	-0.0282	0.00014	-0.0347
0.2	0.6875	-0.0625	0.5389	0.6246	0.6551	0.6558	0.0153	3.2343	0.037	-0.0371	0.00035	-0.0457
0.3	0.7674	-0.0698	0.615	0.675	0.7413	0.7314	0.03336	3.2639	0.0538	-0.054	0.00101	-0.0668
0.5	0.8462	-0.0769	0.7337	0.6983	0.8373	0.8042	0.07013	3.3211	0.0842	-0.0851	0.00304	-0.1058
0.7	0.8851	-0.0805	0.8246	0.6865	0.8939	0.8382	0.10492	3.3757	0.1103	-0.1126	0.00579	-0.1407
1	0.9167	-0.0833	0.9293	0.65	0.9494	0.8627	0.1519	3.4525	0.1426	-0.1484	0.01072	-0.1861
1.5	0.9429	-0.0857	1.0533	0.5815	1.0073	0.877	0.21696	3.5676	0.1808	-0.196	0.01976	-0.2462
2	0.9565	-0.087	1.1402	0.5192	1.0443	0.8791	0.26843	3.668	0.2043	-0.2326	0.02863	-0.2911
3	0.9706	-0.0882	1.2543	0.4213	1.0887	0.8726	0.34281	3.8319	0.2235	-0.2838	0.04373	-0.3501
5	0.9821	-0.0893	1.375	0.3003	1.1294	0.8538	0.42823	4.0556	0.2141	-0.3398	0.06303	-0.4036
7	0.9872	-0.0897	1.4377	0.2313	1.147	0.8389	0.47442	4.1962	0.1892	-0.3679	0.07314	-0.4218
10	0.991	-0.0901	1.4899	0.1712	1.1593	0.8236	0.51335	4.3271	0.1546	-0.3892	0.0805	-0.4282
15	0.994	-0.0904	1.534	0.1191	1.1678	0.8086	0.54617	4.4467	0.1149	-0.4043	0.08515	-0.4253
20	0.9955	-0.0905	1.5572	0.0911	1.1715	0.7999	0.56336	4.5126	0.0904	-0.4107	0.08678	-0.4201
30	0.997	-0.0906	1.5813	0.062	1.1747	0.7903	0.58102	4.5826	0.0628	-0.4158	0.08774	-0.4118
50	0.9982	-0.0907	1.6012	0.0377	1.1768	0.7819	0.59545	4.6414	0.0387	-0.4187	0.08791	-0.4028
70	0.9987	-0.0908	1.6098	0.0271	1.1776	0.7781	0.6017	4.6672	0.0279	-0.4196	0.08779	-0.3982
100	0.9991	-0.0908	1.6164	0.0191	1.1781	0.7752	0.60642	4.6869	0.0197	-0.4201	0.08763	-0.3945
	1	-0.0909	1.632	0	1.1791	0.7681	0.6175	4.7335	0	-0.4206	0.08699	-0.3848

Table.A3.5 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.15、0.2)

B ₂ = 0.15			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0712	-0.0093	0.3915	0.068	0.0635	0.0666	-0.0022	3.1917	0.0019	-0.0019	-3E-05	-0.0024
0.015	0.1031	-0.0135	0.3981	0.0983	0.092	0.0964	-0.0031	3.1932	0.0029	-0.0029	-4E-05	-0.0035
0.02	0.133	-0.0173	0.4045	0.1265	0.1188	0.1243	-0.0039	3.1948	0.0039	-0.0039	-5E-05	-0.0047
0.03	0.187	-0.0244	0.4171	0.1773	0.1673	0.1749	-0.005	3.1978	0.0058	-0.0058	-7E-05	-0.0071
0.05	0.2771	-0.0361	0.4409	0.2611	0.2487	0.2591	-0.0062	3.204	0.0096	-0.0095	-9E-05	-0.0117
0.07	0.3492	-0.0456	0.4632	0.3269	0.3145	0.3266	-0.0062	3.2101	0.0133	-0.0133	-0.0001	-0.0163
0.1	0.434	-0.0566	0.4943	0.4022	0.3927	0.4057	-0.0048	3.2192	0.0188	-0.0188	-9E-05	-0.0232
0.15	0.5349	-0.0698	0.541	0.4877	0.4877	0.4999	-6E-16	3.2343	0.0278	-0.0278	-9E-19	-0.0343
0.2	0.6053	-0.0789	0.5826	0.543	0.5559	0.5655	0.00652	3.2492	0.0365	-0.0366	0.00017	-0.0452
0.3	0.697	-0.0909	0.6548	0.6053	0.649	0.6506	0.02201	3.2786	0.0531	-0.0533	0.00074	-0.0661
0.5	0.7931	-0.1035	0.7691	0.6464	0.7567	0.7383	0.05572	3.3353	0.0831	-0.084	0.0026	-0.1048
0.7	0.8429	-0.11	0.8577	0.6457	0.821	0.7819	0.08875	3.3895	0.1091	-0.1113	0.00519	-0.1394
1	0.8846	-0.1154	0.9605	0.6196	0.8838	0.8154	0.13416	3.4658	0.1411	-0.1467	0.00992	-0.1845
1.5	0.92	-0.12	1.0831	0.5605	0.9484	0.838	0.19786	3.5802	0.1792	-0.1941	0.0187	-0.2444
2	0.9388	-0.1225	1.1693	0.5034	0.9892	0.8448	0.24864	3.6801	0.2027	-0.2305	0.02738	-0.2893
3	0.9583	-0.125	1.283	0.4109	1.0378	0.8433	0.32242	3.8434	0.2221	-0.2816	0.04225	-0.3485
5	0.9746	-0.1271	1.4036	0.2941	1.0821	0.8289	0.40755	4.0665	0.2132	-0.3376	0.06139	-0.4024
7	0.9817	-0.1281	1.4663	0.227	1.1013	0.8158	0.4537	4.2069	0.1885	-0.3657	0.07147	-0.4209
10	0.9871	-0.1288	1.5186	0.1682	1.115	0.802	0.49265	4.3377	0.1541	-0.3871	0.07883	-0.4276
15	0.9914	-0.1293	1.5627	0.1171	1.1245	0.7881	0.52551	4.4572	0.1146	-0.4022	0.08351	-0.4249
20	0.9935	-0.1296	1.586	0.0896	1.1287	0.78	0.54273	4.5231	0.0902	-0.4086	0.08517	-0.4198
30	0.9957	-0.1299	1.6101	0.061	1.1324	0.7709	0.56042	4.5931	0.0627	-0.4138	0.08615	-0.4116
50	0.9974	-0.1301	1.63	0.0371	1.135	0.763	0.57488	4.6519	0.0386	-0.4167	0.08635	-0.4026
70	0.9981	-0.1302	1.6387	0.0267	1.1359	0.7594	0.58114	4.6777	0.0279	-0.4176	0.08626	-0.3981
100	0.9987	-0.1303	1.6453	0.0188	1.1366	0.7566	0.58587	4.6974	0.0196	-0.4181	0.08611	-0.3944
	1	-0.1304	1.6609	0	1.1379	0.7498	0.59697	4.744	0	-0.4186	0.08549	-0.3848

B ₂ = 0.2			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0566	-0.0094	0.4449	0.0534	0.0487	0.0519	-0.0023	3.207	0.0019	-0.0019	-4E-05	-0.0023
0.015	0.0826	-0.0138	0.4508	0.0778	0.0711	0.0757	-0.0033	3.2085	0.0029	-0.0028	-5E-05	-0.0035
0.02	0.1071	-0.0179	0.4566	0.1008	0.0924	0.0983	-0.0042	3.21	0.0038	-0.0038	-7E-05	-0.0047
0.03	0.1525	-0.0254	0.4679	0.143	0.1317	0.1399	-0.0056	3.2131	0.0057	-0.0057	-9E-05	-0.007
0.05	0.2308	-0.0385	0.4896	0.2149	0.2	0.2117	-0.0075	3.2192	0.0094	-0.0094	-0.0001	-0.0116
0.07	0.2958	-0.0493	0.5101	0.2736	0.2571	0.2713	-0.0083	3.2252	0.0131	-0.0131	-0.0002	-0.0161
0.1	0.375	-0.0625	0.5389	0.3435	0.3275	0.3439	-0.008	3.2343	0.0186	-0.0185	-0.0002	-0.0229
0.15	0.4737	-0.0789	0.5826	0.4269	0.4169	0.4343	-0.005	3.2492	0.0274	-0.0274	-0.0001	-0.0339
0.2	0.5455	-0.0909	0.6221	0.4837	0.4837	0.4999	8.6E-16	3.264	0.0361	-0.0361	-3E-18	-0.0447
0.3	0.6429	-0.1071	0.6912	0.552	0.578	0.5886	0.01312	3.2931	0.0525	-0.0526	0.00048	-0.0654
0.5	0.75	-0.125	0.8019	0.6044	0.6911	0.6848	0.04381	3.3494	0.0822	-0.0829	0.00218	-0.1037
0.7	0.8077	-0.1346	0.8886	0.6119	0.7599	0.7349	0.07501	3.4032	0.1079	-0.1099	0.00462	-0.1381
1	0.8571	-0.1429	0.9899	0.5938	0.8274	0.7749	0.11873	3.4789	0.1397	-0.1451	0.00914	-0.183
1.5	0.9	-0.15	1.1113	0.5423	0.8967	0.804	0.18092	3.5927	0.1776	-0.1922	0.01766	-0.2427
2	0.9231	-0.1539	1.197	0.4896	0.9402	0.8146	0.23091	3.6921	0.2011	-0.2284	0.02616	-0.2876
3	0.9474	-0.1579	1.3104	0.4017	0.992	0.8173	0.30397	3.8548	0.2208	-0.2794	0.04081	-0.3469
5	0.9677	-0.1613	1.4309	0.2887	1.0392	0.8065	0.38869	4.0773	0.2122	-0.3354	0.05979	-0.4012
7	0.9767	-0.1628	1.4937	0.2231	1.0598	0.7951	0.43476	4.2175	0.1878	-0.3636	0.06983	-0.42
10	0.9836	-0.1639	1.5461	0.1655	1.0745	0.7825	0.47368	4.3482	0.1537	-0.3849	0.0772	-0.4269
15	0.989	-0.1648	1.5903	0.1153	1.0849	0.7695	0.50655	4.4676	0.1143	-0.4001	0.08191	-0.4244
20	0.9917	-0.1653	1.6136	0.0883	1.0895	0.7619	0.52378	4.5336	0.09	-0.4065	0.08358	-0.4194
30	0.9945	-0.1658	1.6378	0.0601	1.0937	0.7533	0.54149	4.6035	0.0625	-0.4117	0.0846	-0.4114
50	0.9967	-0.1661	1.6577	0.0366	1.0966	0.7457	0.55596	4.6623	0.0385	-0.4147	0.08483	-0.4025
70	0.9976	-0.1663	1.6664	0.0263	1.0977	0.7423	0.56223	4.6882	0.0278	-0.4156	0.08475	-0.398
100	0.9983	-0.1664	1.673	0.0185	1.0984	0.7396	0.56697	4.7078	0.0196	-0.4161	0.08461	-0.3943
	1	-0.1667	1.6887	0	1.1001	0.7331	0.57808	4.7544	0	-0.4166	0.08402	-0.3848

Table.A3.6 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.3、0.5)

B ₂ = 0.3			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0415	-0.0096	0.5321	0.0384	0.0334	0.0368	-0.0025	3.2371	0.0019	-0.0018	-5E-05	-0.0023
0.015	0.061	-0.0141	0.5372	0.0563	0.0492	0.0541	-0.0036	3.2386	0.0028	-0.0028	-8E-05	-0.0034
0.02	0.0798	-0.0184	0.5422	0.0735	0.0643	0.0706	-0.0046	3.2401	0.0037	-0.0037	-1E-04	-0.0046
0.03	0.115	-0.0265	0.5521	0.1056	0.093	0.1019	-0.0064	3.2431	0.0055	-0.0055	-0.0001	-0.0068
0.05	0.1781	-0.0411	0.5711	0.1625	0.1444	0.1577	-0.0091	3.2491	0.0092	-0.0091	-0.0002	-0.0113
0.07	0.2327	-0.0537	0.5892	0.211	0.1893	0.2061	-0.0109	3.255	0.0128	-0.0127	-0.0003	-0.0158
0.1	0.3023	-0.0698	0.615	0.2714	0.2471	0.2677	-0.0122	3.2639	0.0181	-0.018	-0.0003	-0.0224
0.15	0.3939	-0.0909	0.6548	0.3479	0.3245	0.3488	-0.0118	3.2786	0.0267	-0.0267	-0.0004	-0.0332
0.2	0.4643	-0.1071	0.6912	0.4035	0.3853	0.4109	-0.0092	3.2931	0.0351	-0.0351	-0.0003	-0.0437
0.3	0.5652	-0.1304	0.7558	0.4758	0.4758	0.4998	2.2E-16	3.3217	0.0512	-0.0512	6.8E-18	-0.064
0.5	0.6842	-0.1579	0.8612	0.5407	0.5904	0.6033	0.02518	3.3772	0.0803	-0.0808	0.00139	-0.1017
0.7	0.7521	-0.1736	0.945	0.5589	0.6629	0.6608	0.05281	3.4301	0.1055	-0.1073	0.00354	-0.1356
1	0.8125	-0.1875	1.0438	0.5523	0.7351	0.7093	0.09311	3.5049	0.1369	-0.1419	0.00768	-0.18
1.5	0.8667	-0.2	1.1634	0.5126	0.8099	0.7475	0.15211	3.6174	0.1746	-0.1883	0.01569	-0.2394
2	0.8966	-0.2069	1.2485	0.4667	0.857	0.7637	0.20039	3.7159	0.1981	-0.2242	0.02382	-0.2842
3	0.9286	-0.2143	1.3616	0.3864	0.913	0.773	0.27181	3.8773	0.2181	-0.2749	0.03804	-0.3438
5	0.9559	-0.2206	1.4823	0.2796	0.9642	0.7679	0.35552	4.0988	0.2103	-0.3309	0.05669	-0.3988
7	0.9681	-0.2234	1.5453	0.2167	0.9868	0.7592	0.4013	4.2386	0.1865	-0.3591	0.06666	-0.4182
10	0.9774	-0.2256	1.5979	0.161	1.0031	0.7486	0.4401	4.369	0.1527	-0.3806	0.07403	-0.4256
15	0.9849	-0.2273	1.6424	0.1123	1.0147	0.7372	0.47291	4.4884	0.1137	-0.3959	0.07879	-0.4235
20	0.9886	-0.2281	1.6659	0.086	1.02	0.7303	0.49013	4.5543	0.0895	-0.4023	0.08051	-0.4187
30	0.9924	-0.229	1.6902	0.0585	1.0249	0.7225	0.50784	4.6242	0.0622	-0.4076	0.08158	-0.4109
50	0.9954	-0.2297	1.7103	0.0357	1.0283	0.7156	0.52232	4.683	0.0384	-0.4106	0.08186	-0.4021
70	0.9967	-0.23	1.719	0.0257	1.0296	0.7124	0.52859	4.7088	0.0277	-0.4115	0.08181	-0.3977
100	0.9977	-0.2302	1.7257	0.018	1.0306	0.7099	0.53333	4.7285	0.0195	-0.412	0.08169	-0.394
	1	-0.2308	1.7414	0	1.0326	0.7039	0.54444	4.7751	0	-0.4126	0.08115	-0.3846

B ₂ = 0.5			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0291	-0.0097	0.662	0.0261	0.0208	0.0243	-0.0027	3.2952	0.0018	-0.0017	-8E-05	-0.0022
0.015	0.0431	-0.0144	0.6663	0.0385	0.0308	0.036	-0.0039	3.2967	0.0026	-0.0026	-0.0001	-0.0033
0.02	0.0566	-0.0189	0.6705	0.0505	0.0405	0.0473	-0.005	3.2981	0.0035	-0.0035	-0.0002	-0.0044
0.03	0.0826	-0.0275	0.6789	0.0735	0.0592	0.069	-0.0072	3.301	0.0053	-0.0052	-0.0002	-0.0065
0.05	0.1304	-0.0435	0.6953	0.1153	0.0939	0.109	-0.0108	3.3068	0.0087	-0.0086	-0.0004	-0.0108
0.07	0.1736	-0.0579	0.711	0.1525	0.1253	0.1451	-0.0137	3.3125	0.0121	-0.012	-0.0005	-0.0151
0.1	0.2308	-0.0769	0.7337	0.2008	0.1675	0.1929	-0.0168	3.3211	0.0172	-0.017	-0.0006	-0.0214
0.15	0.3103	-0.1035	0.7691	0.2658	0.227	0.2593	-0.0196	3.3353	0.0255	-0.0252	-0.0008	-0.0317
0.2	0.375	-0.125	0.8019	0.3161	0.2764	0.3132	-0.02	3.3494	0.0335	-0.0332	-0.0009	-0.0419
0.3	0.4737	-0.1579	0.8612	0.3868	0.3543	0.3953	-0.0165	3.3772	0.0488	-0.0485	-0.0008	-0.0614
0.5	0.6	-0.2	0.9602	0.4604	0.4604	0.4994	0	3.431	0.0768	-0.0768	7.1E-18	-0.0979
0.7	0.6774	-0.2258	1.0403	0.4891	0.5314	0.5618	0.02151	3.4826	0.1012	-0.1022	0.00163	-0.1308
1	0.75	-0.25	1.1362	0.4957	0.6045	0.6181	0.05556	3.5555	0.1318	-0.1356	0.00506	-0.1743
1.5	0.8182	-0.2727	1.2539	0.4709	0.682	0.6661	0.10841	3.6656	0.1689	-0.1808	0.01213	-0.233
2	0.8571	-0.2857	1.3385	0.4343	0.7315	0.689	0.15323	3.7623	0.1924	-0.2161	0.01956	-0.2776
3	0.9	-0.3	1.4518	0.3645	0.7911	0.7064	0.22119	3.9215	0.2131	-0.2661	0.03292	-0.3377
5	0.9375	-0.3125	1.5736	0.2666	0.8462	0.7091	0.30256	4.1409	0.2068	-0.3219	0.05091	-0.3941
7	0.9546	-0.3182	1.6374	0.2074	0.871	0.704	0.34761	4.2799	0.1839	-0.3502	0.06072	-0.4144
10	0.9677	-0.3226	1.6908	0.1546	0.889	0.6961	0.38601	4.4099	0.151	-0.3718	0.06807	-0.4228
15	0.9783	-0.3261	1.736	0.1079	0.9022	0.6869	0.41861	4.5291	0.1126	-0.3872	0.0729	-0.4215
20	0.9836	-0.3279	1.7599	0.0828	0.9083	0.6811	0.43575	4.5949	0.0887	-0.3938	0.07469	-0.4172
30	0.989	-0.3297	1.7846	0.0564	0.9139	0.6744	0.45339	4.6649	0.0617	-0.3992	0.07587	-0.4097
50	0.9934	-0.3311	1.805	0.0344	0.918	0.6683	0.46782	4.7237	0.038	-0.4023	0.07625	-0.4012
70	0.9953	-0.3318	1.8139	0.0247	0.9196	0.6655	0.47408	4.7495	0.0274	-0.4033	0.07624	-0.3969
100	0.9967	-0.3322	1.8206	0.0174	0.9208	0.6633	0.4788	4.7692	0.0193	-0.4038	0.07616	-0.3934
	1	-0.3333	1.8366	0	0.9233	0.6579	0.48988	4.8158	0	-0.4045	0.07572	-0.3841

Table.A3.7 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 0.7、1)

B ₂ = 0.7			Eigen-value and Coefficients(n=1)						Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b	
0.01	0.0237	-0.0098	0.7585	0.0208	0.0153	0.0189	-0.0028	3.3505	0.0017	-0.0016	-0.0001	-0.0021	
0.015	0.0351	-0.0145	0.7624	0.0307	0.0226	0.0281	-0.0041	3.3519	0.0025	-0.0025	-0.0002	-0.0031	
0.02	0.0463	-0.0191	0.7663	0.0404	0.0299	0.037	-0.0053	3.3533	0.0034	-0.0033	-0.0002	-0.0042	
0.03	0.0679	-0.028	0.774	0.0591	0.0439	0.0542	-0.0077	3.3562	0.005	-0.0049	-0.0003	-0.0062	
0.05	0.1083	-0.0446	0.789	0.0936	0.0702	0.0864	-0.0118	3.3618	0.0083	-0.0081	-0.0005	-0.0104	
0.07	0.1453	-0.0598	0.8035	0.1248	0.0945	0.116	-0.0153	3.3673	0.0116	-0.0113	-0.0006	-0.0144	
0.1	0.1954	-0.0805	0.8246	0.1663	0.1277	0.1559	-0.0195	3.3757	0.0164	-0.0161	-0.0008	-0.0205	
0.15	0.267	-0.11	0.8577	0.2237	0.1759	0.213	-0.0242	3.3895	0.0243	-0.0238	-0.0011	-0.0305	
0.2	0.3269	-0.1346	0.8886	0.2696	0.2171	0.2608	-0.0266	3.4032	0.032	-0.0314	-0.0013	-0.0402	
0.3	0.4215	-0.1736	0.945	0.337	0.2841	0.3359	-0.0268	3.4301	0.0468	-0.046	-0.0015	-0.0591	
0.5	0.5484	-0.2258	1.0403	0.4123	0.3795	0.436	-0.0167	3.4826	0.0737	-0.073	-0.0012	-0.0944	
0.7	0.6296	-0.2593	1.1184	0.4457	0.4457	0.4989	3.3E-16	3.5328	0.0974	-0.0974	2E-18	-0.1265	
1	0.7083	-0.2917	1.2129	0.4594	0.5157	0.5577	0.02886	3.6041	0.1273	-0.1296	0.00281	-0.169	
1.5	0.7846	-0.3231	1.3299	0.4435	0.5916	0.6103	0.07632	3.712	0.1638	-0.1736	0.00901	-0.2269	
2	0.8293	-0.3415	1.4147	0.4129	0.6409	0.6368	0.11797	3.8071	0.1873	-0.2081	0.01579	-0.2713	
3	0.8793	-0.3621	1.5289	0.35	0.7008	0.6591	0.18265	3.9642	0.2085	-0.2574	0.02833	-0.3317	
5	0.9239	-0.3804	1.6523	0.258	0.7571	0.6666	0.26171	4.1817	0.2035	-0.3128	0.04566	-0.3893	
7	0.9444	-0.3889	1.7173	0.2014	0.7827	0.6638	0.30601	4.3201	0.1815	-0.3411	0.05528	-0.4106	
10	0.9605	-0.3955	1.7717	0.1503	0.8015	0.6577	0.34398	4.4498	0.1493	-0.3629	0.06259	-0.4199	
15	0.9733	-0.4008	1.8178	0.1051	0.8153	0.6499	0.37633	4.5688	0.1116	-0.3784	0.06747	-0.4194	
20	0.9798	-0.4035	1.8421	0.0806	0.8218	0.6447	0.39338	4.6346	0.0879	-0.3851	0.06932	-0.4154	
30	0.9865	-0.4062	1.8673	0.0549	0.8278	0.6387	0.41093	4.7045	0.0612	-0.3906	0.07058	-0.4083	
50	0.9918	-0.4084	1.8881	0.0335	0.8322	0.6332	0.4253	4.7633	0.0378	-0.3938	0.07104	-0.4002	
70	0.9942	-0.4094	1.8972	0.0241	0.834	0.6306	0.43153	4.7892	0.0272	-0.3948	0.07108	-0.3959	
100	0.9959	-0.4101	1.9041	0.0169	0.8353	0.6286	0.43624	4.8089	0.0192	-0.3954	0.07103	-0.3925	
	1	-0.4118	1.9203	0	0.8381	0.6236	0.44728	4.8556	0	-0.3962	0.07067	-0.3834	

B ₂ = 1			Eigen-value and Coefficients(n=1)						Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b	
0.01	0.0196	-0.0098	0.8677	0.0168	0.011	0.0148	-0.0029	3.4283	0.0016	-0.0015	-0.0001	-0.002	
0.015	0.0291	-0.0146	0.8713	0.0249	0.0163	0.022	-0.0043	3.4297	0.0024	-0.0023	-0.0002	-0.0029	
0.02	0.0385	-0.0192	0.8749	0.0328	0.0216	0.0291	-0.0057	3.431	0.0031	-0.003	-0.0003	-0.0039	
0.03	0.0566	-0.0283	0.882	0.0481	0.0318	0.0428	-0.0082	3.4337	0.0047	-0.0045	-0.0004	-0.0059	
0.05	0.0909	-0.0455	0.896	0.0768	0.0513	0.0687	-0.0129	3.4391	0.0078	-0.0075	-0.0006	-0.0098	
0.07	0.1228	-0.0614	0.9095	0.1031	0.0696	0.0929	-0.017	3.4445	0.0109	-0.0105	-0.0008	-0.0136	
0.1	0.1667	-0.0833	0.9293	0.1387	0.0949	0.126	-0.0222	3.4525	0.0154	-0.0148	-0.0011	-0.0194	
0.15	0.2308	-0.1154	0.9605	0.1891	0.1326	0.1745	-0.0287	3.4658	0.0229	-0.022	-0.0015	-0.0288	
0.2	0.2857	-0.1429	0.9899	0.2306	0.1655	0.2159	-0.0331	3.4789	0.0301	-0.029	-0.0019	-0.038	
0.3	0.375	-0.1875	1.0438	0.2935	0.2205	0.2832	-0.0372	3.5049	0.0441	-0.0426	-0.0024	-0.056	
0.5	0.5	-0.25	1.1362	0.3685	0.3022	0.3768	-0.0339	3.5555	0.0698	-0.0678	-0.0026	-0.0897	
0.7	0.5833	-0.2917	1.2129	0.4052	0.361	0.4382	-0.0227	3.6041	0.0925	-0.0908	-0.002	-0.1205	
1	0.6667	-0.3333	1.3065	0.4249	0.4249	0.4978	1.4E-16	3.6732	0.1213	-0.1213	-8E-18	-0.1618	
1.5	0.75	-0.375	1.4238	0.4172	0.496	0.5534	0.04076	3.7783	0.157	-0.1633	0.00506	-0.2185	
2	0.8	-0.4	1.5094	0.3924	0.5431	0.5828	0.07834	3.8712	0.1804	-0.1966	0.01096	-0.2625	
3	0.8571	-0.4286	1.6257	0.3363	0.6013	0.6093	0.13871	4.0255	0.2022	-0.2448	0.02233	-0.3231	
5	0.9091	-0.4546	1.7523	0.2502	0.6571	0.6214	0.21466	4.2406	0.199	-0.2995	0.03868	-0.3823	
7	0.9333	-0.4667	1.8192	0.196	0.6827	0.6208	0.25795	4.378	0.1782	-0.3277	0.048	-0.4049	
10	0.9524	-0.4762	1.8753	0.1466	0.7018	0.6164	0.29535	4.5073	0.1471	-0.3495	0.05521	-0.4155	
15	0.9677	-0.4839	1.9229	0.1026	0.7159	0.6099	0.32739	4.6261	0.1101	-0.3653	0.06012	-0.4161	
20	0.9756	-0.4878	1.948	0.0787	0.7226	0.6054	0.34432	4.6919	0.0869	-0.3721	0.06204	-0.4126	
30	0.9836	-0.4918	1.974	0.0536	0.7288	0.6	0.36177	4.762	0.0605	-0.3777	0.06339	-0.4061	
50	0.9901	-0.4951	1.9955	0.0327	0.7335	0.595	0.37608	4.8208	0.0374	-0.3811	0.06396	-0.3983	
70	0.9929	-0.4965	2.0048	0.0235	0.7353	0.5927	0.38228	4.8467	0.027	-0.3821	0.06405	-0.3942	
100	0.995	-0.4975	2.0119	0.0165	0.7367	0.5908	0.38697	4.8664	0.019	-0.3828	0.06404	-0.3909	
	1	-0.5	2.0288	0	0.7397	0.5862	0.39797	4.9132	0	-0.3836	0.06379	-0.3821	

Table.A3.8 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 1.5、2)

B ₂ = 1.5			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0164	-0.0098	0.9951	0.0137	0.0076	0.0116	-0.0031	3.5447	0.0014	-0.0013	-0.0002	-0.0018
0.015	0.0244	-0.0146	0.9985	0.0204	0.0113	0.0173	-0.0046	3.546	0.0022	-0.002	-0.0002	-0.0027
0.02	0.0323	-0.0194	1.0019	0.0269	0.0149	0.0229	-0.0061	3.5473	0.0029	-0.0027	-0.0003	-0.0036
0.03	0.0476	-0.0286	1.0086	0.0396	0.0221	0.0338	-0.0089	3.5498	0.0043	-0.004	-0.0005	-0.0054
0.05	0.0769	-0.0462	1.0217	0.0636	0.0358	0.0545	-0.0141	3.5549	0.0072	-0.0066	-0.0008	-0.009
0.07	0.1045	-0.0627	1.0346	0.0858	0.0488	0.0741	-0.0188	3.56	0.01	-0.0092	-0.001	-0.0125
0.1	0.1429	-0.0857	1.0533	0.1163	0.0672	0.1013	-0.0251	3.5676	0.0142	-0.0131	-0.0014	-0.0178
0.15	0.2	-0.12	1.0831	0.1605	0.0948	0.1418	-0.0335	3.5802	0.021	-0.0194	-0.002	-0.0265
0.2	0.25	-0.15	1.1113	0.1977	0.1196	0.1772	-0.0399	3.5927	0.0277	-0.0256	-0.0025	-0.035
0.3	0.3333	-0.2	1.1634	0.2559	0.162	0.2362	-0.0481	3.6174	0.0406	-0.0377	-0.0034	-0.0517
0.5	0.4546	-0.2727	1.2539	0.3292	0.2273	0.3216	-0.0523	3.6656	0.0645	-0.0603	-0.0043	-0.0831
0.7	0.5385	-0.3231	1.3299	0.3683	0.2761	0.3799	-0.0475	3.712	0.0859	-0.081	-0.0045	-0.1122
1	0.625	-0.375	1.4238	0.393	0.3306	0.4386	-0.0323	3.7783	0.1132	-0.1089	-0.0035	-0.1515
1.5	0.7143	-0.4286	1.5427	0.3932	0.3932	0.4956	1.7E-16	3.8795	0.1478	-0.1478	3.6E-18	-0.2062
2	0.7692	-0.4615	1.6305	0.3741	0.4357	0.5272	0.03226	3.9696	0.1709	-0.179	0.00465	-0.2495
3	0.8333	-0.5	1.7509	0.3248	0.4894	0.5574	0.08682	4.1201	0.1935	-0.225	0.01433	-0.3102
5	0.8929	-0.5357	1.8832	0.2443	0.5421	0.5737	0.15854	4.3318	0.1927	-0.2781	0.02912	-0.3713
7	0.9211	-0.5526	1.9535	0.1921	0.5669	0.5752	0.20049	4.4682	0.1737	-0.306	0.0379	-0.3958
10	0.9434	-0.566	2.0127	0.1441	0.5855	0.5725	0.23719	4.5969	0.144	-0.3277	0.04487	-0.4081
15	0.9615	-0.5769	2.0628	0.101	0.5994	0.5672	0.2689	4.7158	0.1082	-0.3437	0.04977	-0.4103
20	0.9709	-0.5825	2.0894	0.0775	0.606	0.5633	0.28571	4.7817	0.0854	-0.3506	0.05174	-0.4077
30	0.9804	-0.5882	2.1168	0.0528	0.6122	0.5585	0.30311	4.8519	0.0596	-0.3565	0.0532	-0.4019
50	0.9881	-0.5929	2.1395	0.0322	0.6169	0.554	0.31738	4.9109	0.0368	-0.36	0.05389	-0.3948
70	0.9915	-0.5949	2.1494	0.0232	0.6188	0.5518	0.32358	4.9369	0.0266	-0.3612	0.05404	-0.3909
100	0.994	-0.5964	2.1569	0.0163	0.6201	0.5501	0.32826	4.9567	0.0187	-0.3619	0.05409	-0.3878
	1	-0.6	2.1746	0	0.6231	0.5458	0.33926	5.0036	0	-0.3629	0.05398	-0.3794

B ₂ = 2			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0148	-0.0099	1.0835	0.0122	0.0058	0.01	-0.0033	3.6461	0.0013	-0.0012	-0.0002	-0.0017
0.015	0.022	-0.0147	1.0868	0.0182	0.0087	0.0149	-0.0048	3.6473	0.002	-0.0018	-0.0003	-0.0025
0.02	0.0291	-0.0194	1.0901	0.024	0.0115	0.0197	-0.0064	3.6485	0.0027	-0.0024	-0.0004	-0.0034
0.03	0.0431	-0.0287	1.0966	0.0354	0.017	0.0292	-0.0094	3.651	0.004	-0.0035	-0.0005	-0.005
0.05	0.0698	-0.0465	1.1094	0.057	0.0277	0.0473	-0.015	3.6559	0.0067	-0.0059	-0.0009	-0.0083
0.07	0.095	-0.0633	1.1219	0.0772	0.0378	0.0644	-0.0201	3.6607	0.0093	-0.0082	-0.0012	-0.0116
0.1	0.1304	-0.087	1.1402	0.105	0.0522	0.0884	-0.027	3.668	0.0132	-0.0116	-0.0016	-0.0166
0.15	0.1837	-0.1225	1.1693	0.1458	0.0742	0.1245	-0.0366	3.6801	0.0197	-0.0173	-0.0023	-0.0247
0.2	0.2308	-0.1539	1.197	0.1806	0.094	0.1564	-0.0443	3.6921	0.0259	-0.0228	-0.003	-0.0327
0.3	0.3103	-0.2069	1.2485	0.236	0.1286	0.2104	-0.0552	3.7159	0.0381	-0.0336	-0.004	-0.0483
0.5	0.4286	-0.2857	1.3385	0.308	0.1829	0.2901	-0.0645	3.7623	0.0606	-0.054	-0.0055	-0.0779
0.7	0.5122	-0.3415	1.4147	0.3481	0.2243	0.3459	-0.0641	3.8071	0.0809	-0.0728	-0.0061	-0.1055
1	0.6	-0.4	1.5094	0.3758	0.2715	0.4033	-0.0542	3.8712	0.1071	-0.0983	-0.006	-0.143
1.5	0.6923	-0.4615	1.6305	0.3806	0.3268	0.4605	-0.0282	3.9696	0.1406	-0.1343	-0.0037	-0.196
2	0.75	-0.5	1.7207	0.3649	0.3649	0.4931	-1E-16	4.0575	0.1635	-0.1635	-3E-17	-0.2384
3	0.8182	-0.5455	1.8451	0.3199	0.4141	0.5252	0.04999	4.2052	0.1867	-0.2071	0.00825	-0.2988
5	0.8824	-0.5882	1.9829	0.2426	0.4633	0.5441	0.11833	4.4145	0.1877	-0.2583	0.02165	-0.3613
7	0.913	-0.6087	2.0565	0.1914	0.4867	0.5468	0.15923	4.5501	0.17	-0.2856	0.0299	-0.3872
10	0.9375	-0.625	2.1186	0.1438	0.5044	0.5451	0.19544	4.6787	0.1415	-0.3071	0.0366	-0.4011
15	0.9575	-0.6383	2.1714	0.1009	0.5178	0.5406	0.22696	4.7978	0.1066	-0.323	0.04141	-0.4046
20	0.9677	-0.6452	2.1993	0.0775	0.5242	0.537	0.24375	4.8639	0.0843	-0.3301	0.04339	-0.4027
30	0.9783	-0.6522	2.2282	0.0528	0.5303	0.5325	0.26117	4.9344	0.0588	-0.336	0.04491	-0.3976
50	0.9868	-0.6579	2.252	0.0322	0.5348	0.5282	0.27548	4.9938	0.0364	-0.3397	0.04568	-0.391
70	0.9906	-0.6604	2.2624	0.0231	0.5366	0.5261	0.2817	5.0199	0.0263	-0.341	0.04587	-0.3874
100	0.9934	-0.6623	2.2703	0.0163	0.538	0.5245	0.2864	5.0398	0.0185	-0.3417	0.04595	-0.3844
	1	-0.6667	2.2889	0	0.5409	0.5203	0.29745	5.087	0	-0.3429	0.04593	-0.3764

Table.A3.9 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 3、5)

B ₂ = 3			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0132	-0.0099	1.1989	0.0107	0.004	0.0084	-0.0035	3.8111	0.0012	-0.001	-0.0002	-0.0015
0.015	0.0196	-0.0147	1.2021	0.016	0.006	0.0125	-0.0051	3.8123	0.0018	-0.0014	-0.0003	-0.0022
0.02	0.026	-0.0195	1.2053	0.0212	0.0079	0.0166	-0.0068	3.8134	0.0024	-0.0019	-0.0004	-0.003
0.03	0.0385	-0.0288	1.2117	0.0312	0.0117	0.0246	-0.01	3.8157	0.0036	-0.0029	-0.0006	-0.0045
0.05	0.0625	-0.0469	1.2242	0.0505	0.0191	0.0399	-0.0161	3.8204	0.0061	-0.0048	-0.001	-0.0075
0.07	0.0854	-0.064	1.2364	0.0686	0.0262	0.0545	-0.0218	3.825	0.0085	-0.0067	-0.0013	-0.0104
0.1	0.1177	-0.0882	1.2543	0.0938	0.0363	0.0752	-0.0295	3.8319	0.012	-0.0095	-0.0019	-0.0148
0.15	0.1667	-0.125	1.283	0.1311	0.0519	0.1065	-0.0407	3.8434	0.0178	-0.0141	-0.0027	-0.0221
0.2	0.2105	-0.1579	1.3104	0.1633	0.0661	0.1346	-0.05	3.8548	0.0236	-0.0186	-0.0034	-0.0293
0.3	0.2857	-0.2143	1.3616	0.2157	0.0913	0.1826	-0.0642	3.8773	0.0347	-0.0275	-0.0048	-0.0433
0.5	0.4	-0.3	1.4518	0.2862	0.1318	0.2556	-0.08	3.9215	0.0554	-0.0444	-0.0069	-0.0703
0.7	0.4828	-0.3621	1.5289	0.3274	0.1635	0.3079	-0.0853	3.9642	0.0742	-0.0601	-0.0082	-0.0956
1	0.5714	-0.4286	1.6257	0.3583	0.2004	0.3631	-0.0827	4.0255	0.0988	-0.0816	-0.009	-0.1304
1.5	0.6667	-0.5	1.7509	0.3687	0.2447	0.4199	-0.0654	4.1201	0.1307	-0.1125	-0.0083	-0.1803
2	0.7273	-0.5455	1.8451	0.3573	0.2761	0.4532	-0.0431	4.2052	0.1531	-0.138	-0.0061	-0.221
3	0.8	-0.6	1.9765	0.3174	0.3174	0.4874	-9E-17	4.3493	0.1769	-0.1769	1.9E-17	-0.2806
5	0.8696	-0.6522	2.1239	0.2435	0.3599	0.5093	0.0631	4.5558	0.1806	-0.224	0.01114	-0.3446
7	0.9032	-0.6774	2.2032	0.1931	0.3806	0.5137	0.10238	4.691	0.165	-0.2496	0.01844	-0.3725
10	0.9302	-0.6977	2.2705	0.1455	0.3966	0.5131	0.13786	4.82	0.1382	-0.2703	0.0246	-0.3887
15	0.9524	-0.7143	2.3278	0.1023	0.4088	0.5094	0.16918	4.94	0.1046	-0.2858	0.02916	-0.3943
20	0.9639	-0.7229	2.3581	0.0786	0.4147	0.5063	0.18601	5.0069	0.0829	-0.2928	0.0311	-0.3935
30	0.9756	-0.7317	2.3895	0.0536	0.4202	0.5022	0.20354	5.0783	0.0579	-0.2989	0.03263	-0.3895
50	0.9852	-0.7389	2.4154	0.0327	0.4244	0.498	0.21801	5.1384	0.0358	-0.3027	0.03347	-0.3837
70	0.9894	-0.7421	2.4268	0.0235	0.4261	0.496	0.22431	5.1649	0.0259	-0.3041	0.0337	-0.3805
100	0.9926	-0.7444	2.4354	0.0165	0.4273	0.4945	0.22907	5.1851	0.0182	-0.3049	0.03382	-0.3777
	1	-0.75	2.4556	0	0.43	0.4904	0.24029	5.2329	0	-0.3063	0.03392	-0.3702

B ₂ = 5			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0119	-0.0099	1.3202	0.0096	0.0025	0.0071	-0.0037	4.0358	0.0011	-0.0007	-0.0002	-0.0013
0.015	0.0177	-0.0147	1.3234	0.0143	0.0037	0.0106	-0.0055	4.0369	0.0016	-0.001	-0.0003	-0.0019
0.02	0.0234	-0.0195	1.3265	0.019	0.0049	0.014	-0.0073	4.038	0.0022	-0.0014	-0.0004	-0.0026
0.03	0.0347	-0.029	1.3328	0.028	0.0072	0.0208	-0.0107	4.0402	0.0033	-0.0021	-0.0006	-0.0039
0.05	0.0566	-0.0472	1.3451	0.0455	0.0118	0.0339	-0.0174	4.0446	0.0054	-0.0034	-0.001	-0.0064
0.07	0.0775	-0.0646	1.3573	0.0619	0.0162	0.0464	-0.0236	4.049	0.0076	-0.0048	-0.0014	-0.009
0.1	0.1071	-0.0893	1.375	0.085	0.0226	0.0642	-0.0322	4.0556	0.0108	-0.0068	-0.002	-0.0128
0.15	0.1525	-0.1271	1.4036	0.1194	0.0325	0.0915	-0.045	4.0665	0.016	-0.0101	-0.0029	-0.0191
0.2	0.1936	-0.1613	1.4309	0.1496	0.0416	0.1161	-0.056	4.0773	0.0212	-0.0134	-0.0038	-0.0254
0.3	0.2647	-0.2206	1.4823	0.1995	0.0579	0.1589	-0.0736	4.0988	0.0312	-0.0199	-0.0054	-0.0376
0.5	0.375	-0.3125	1.5736	0.2687	0.0846	0.2251	-0.0961	4.1409	0.0501	-0.0322	-0.0079	-0.0613
0.7	0.4565	-0.3804	1.6523	0.3111	0.106	0.2739	-0.1075	4.1817	0.0673	-0.0438	-0.0098	-0.0838
1	0.5455	-0.4546	1.7523	0.3451	0.1314	0.3264	-0.1127	4.2406	0.0901	-0.0599	-0.0116	-0.1151
1.5	0.6429	-0.5357	1.8832	0.3609	0.1626	0.382	-0.1056	4.3318	0.1204	-0.0834	-0.0126	-0.1608
2	0.7059	-0.5882	1.9829	0.3539	0.1853	0.4156	-0.0904	4.4145	0.1422	-0.1033	-0.0119	-0.1989
3	0.7826	-0.6522	2.1239	0.3192	0.216	0.4516	-0.056	4.5558	0.1666	-0.1344	-0.0083	-0.2564
5	0.8571	-0.7143	2.2845	0.2486	0.2486	0.4764	-1E-16	4.7613	0.1734	-0.1734	2.9E-17	-0.3213
7	0.8936	-0.7447	2.3719	0.1985	0.2651	0.4825	0.0369	4.8976	0.1601	-0.1954	0.00599	-0.3513
10	0.9231	-0.7692	2.4466	0.1503	0.2779	0.4832	0.07126	5.0289	0.1354	-0.2137	0.01128	-0.3701
15	0.9474	-0.7895	2.5104	0.1059	0.2879	0.4805	0.10226	5.152	0.1031	-0.2278	0.01536	-0.3783
20	0.96	-0.8	2.5443	0.0815	0.2927	0.4778	0.11913	5.2208	0.0819	-0.2343	0.01715	-0.3789
30	0.973	-0.8108	2.5795	0.0556	0.2974	0.474	0.13686	5.2945	0.0574	-0.2401	0.0186	-0.3764
50	0.9836	-0.8197	2.6086	0.0339	0.3009	0.4701	0.15158	5.3566	0.0355	-0.2439	0.01943	-0.3717
70	0.9882	-0.8235	2.6213	0.0244	0.3023	0.4682	0.15802	5.3841	0.0257	-0.2452	0.01968	-0.3689
100	0.9917	-0.8265	2.6309	0.0171	0.3033	0.4666	0.16289	5.4049	0.0181	-0.2461	0.01982	-0.3664
	1	-0.8333	2.6537	0	0.3056	0.4627	0.1744	5.4544	0	-0.2477	0.01998	-0.3596

Table.A3.10 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 7、10)

B ₂ = 7			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0113	-0.0099	1.383	0.0092	0.0018	0.0065	-0.0038	4.1768	0.001	-0.0005	-0.0002	-0.0012
0.015	0.0169	-0.0147	1.3861	0.0136	0.0026	0.0098	-0.0057	4.1779	0.0016	-0.0008	-0.0003	-0.0018
0.02	0.0223	-0.0196	1.3893	0.0181	0.0035	0.0129	-0.0075	4.179	0.0021	-0.0011	-0.0004	-0.0024
0.03	0.0331	-0.029	1.3955	0.0267	0.0052	0.0192	-0.0111	4.1811	0.0031	-0.0016	-0.0006	-0.0035
0.05	0.0541	-0.0473	1.4078	0.0433	0.0086	0.0313	-0.018	4.1854	0.0052	-0.0026	-0.001	-0.0059
0.07	0.0741	-0.0648	1.4199	0.0591	0.0118	0.0429	-0.0245	4.1898	0.0072	-0.0037	-0.0014	-0.0082
0.1	0.1026	-0.0897	1.4377	0.0812	0.0164	0.0594	-0.0336	4.1962	0.0102	-0.0053	-0.002	-0.0117
0.15	0.1463	-0.1281	1.4663	0.1145	0.0236	0.0848	-0.0472	4.2069	0.0152	-0.0078	-0.003	-0.0175
0.2	0.1861	-0.1628	1.4937	0.1438	0.0303	0.1079	-0.059	4.2175	0.0201	-0.0104	-0.0039	-0.0232
0.3	0.2553	-0.2234	1.5453	0.1926	0.0423	0.1482	-0.0783	4.2386	0.0296	-0.0154	-0.0055	-0.0345
0.5	0.3636	-0.3182	1.6374	0.2612	0.0622	0.2112	-0.1043	4.2799	0.0476	-0.025	-0.0083	-0.0564
0.7	0.4444	-0.3889	1.7173	0.3042	0.0783	0.258	-0.1189	4.3201	0.0641	-0.0341	-0.0104	-0.0772
1	0.5333	-0.4667	1.8192	0.3398	0.0975	0.309	-0.1284	4.378	0.0861	-0.0468	-0.0126	-0.1064
1.5	0.6316	-0.5526	1.9535	0.3584	0.1215	0.3637	-0.1268	4.4682	0.1155	-0.0656	-0.0143	-0.1494
2	0.6957	-0.6087	2.0565	0.3536	0.139	0.3974	-0.1157	4.5501	0.1371	-0.0816	-0.0143	-0.1859
3	0.7742	-0.6774	2.2032	0.3216	0.1631	0.434	-0.0865	4.691	0.1619	-0.107	-0.012	-0.2416
5	0.8511	-0.7447	2.3719	0.2528	0.1893	0.4603	-0.0352	4.8976	0.1704	-0.1396	-0.0052	-0.3063
7	0.8889	-0.7778	2.4645	0.2027	0.2027	0.4672	1.8E-16	5.0359	0.1584	-0.1584	2.8E-17	-0.3374
10	0.9195	-0.8046	2.5439	0.154	0.2133	0.4686	0.03346	5.1699	0.1347	-0.1743	0.00476	-0.3575
15	0.9449	-0.8268	2.612	0.1087	0.2216	0.4664	0.0641	5.2961	0.1031	-0.1868	0.0085	-0.3673
20	0.9581	-0.8383	2.6483	0.0837	0.2256	0.4639	0.08094	5.3669	0.0821	-0.1927	0.01016	-0.3687
30	0.9717	-0.8502	2.6859	0.0571	0.2295	0.4603	0.09873	5.4428	0.0576	-0.1979	0.01152	-0.3669
50	0.9828	-0.86	2.7171	0.0349	0.2325	0.4565	0.11358	5.5069	0.0357	-0.2015	0.01231	-0.3628
70	0.9877	-0.8642	2.7307	0.0251	0.2337	0.4547	0.1201	5.5352	0.0258	-0.2027	0.01255	-0.3603
100	0.9913	-0.8674	2.741	0.0176	0.2346	0.4531	0.12504	5.5567	0.0182	-0.2036	0.01268	-0.358
	1	-0.875	2.7654	0	0.2365	0.4493	0.13672	5.6078	0	-0.2051	0.01285	-0.3517

B ₂ = 10			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0109	-0.0099	1.4352	0.0088	0.0013	0.0061	-0.0039	4.3079	0.001	-0.0004	-0.0002	-0.0011
0.015	0.0162	-0.0148	1.4384	0.0131	0.0019	0.0091	-0.0058	4.309	0.0015	-0.0006	-0.0003	-0.0016
0.02	0.0215	-0.0196	1.4415	0.0174	0.0025	0.0121	-0.0077	4.3101	0.002	-0.0008	-0.0004	-0.0022
0.03	0.0319	-0.029	1.4477	0.0257	0.0037	0.018	-0.0114	4.3122	0.003	-0.0012	-0.0006	-0.0033
0.05	0.0521	-0.0474	1.46	0.0418	0.006	0.0293	-0.0185	4.3165	0.0049	-0.002	-0.001	-0.0054
0.07	0.0715	-0.065	1.4721	0.057	0.0083	0.0402	-0.0253	4.3207	0.0069	-0.0027	-0.0014	-0.0076
0.1	0.0991	-0.0901	1.4899	0.0785	0.0116	0.0558	-0.0348	4.3271	0.0098	-0.0039	-0.002	-0.0108
0.15	0.1416	-0.1288	1.5186	0.1109	0.0167	0.0797	-0.049	4.3377	0.0146	-0.0058	-0.003	-0.0161
0.2	0.1803	-0.1639	1.5461	0.1395	0.0215	0.1016	-0.0615	4.3482	0.0193	-0.0077	-0.0039	-0.0214
0.3	0.2481	-0.2256	1.5979	0.1874	0.0301	0.1399	-0.0822	4.369	0.0285	-0.0114	-0.0055	-0.0318
0.5	0.3548	-0.3226	1.6908	0.2557	0.0445	0.2002	-0.111	4.4099	0.0458	-0.0186	-0.0084	-0.0521
0.7	0.435	-0.3955	1.7717	0.2991	0.0561	0.2454	-0.1284	4.4498	0.0617	-0.0254	-0.0106	-0.0714
1	0.5238	-0.4762	1.8753	0.336	0.0702	0.2951	-0.1414	4.5073	0.083	-0.0349	-0.0131	-0.0987
1.5	0.6226	-0.566	2.0127	0.3569	0.0878	0.3489	-0.1446	4.5969	0.1119	-0.0492	-0.0153	-0.1393
2	0.6875	-0.625	2.1186	0.354	0.1009	0.3825	-0.1371	4.6787	0.1333	-0.0614	-0.0159	-0.1741
3	0.7674	-0.6977	2.2705	0.3243	0.119	0.4195	-0.1127	4.82	0.1585	-0.0811	-0.0144	-0.228
5	0.8462	-0.7692	2.4466	0.257	0.139	0.4468	-0.0659	5.0289	0.1686	-0.1068	-0.0089	-0.2921
7	0.8851	-0.8046	2.5439	0.2069	0.1493	0.4545	-0.0324	5.1699	0.1578	-0.122	-0.0043	-0.3238
10	0.9167	-0.8333	2.6277	0.1576	0.1576	0.4565	1.7E-17	5.3073	0.135	-0.135	-2E-17	-0.345
15	0.9429	-0.8571	2.6998	0.1116	0.1641	0.4547	0.03017	5.4374	0.1037	-0.1454	0.00345	-0.356
20	0.9565	-0.8696	2.7383	0.0859	0.1673	0.4524	0.0469	5.5107	0.0828	-0.1504	0.00499	-0.3581
30	0.9706	-0.8824	2.7783	0.0587	0.1704	0.449	0.06468	5.5893	0.0581	-0.1548	0.00626	-0.3571
50	0.9821	-0.8929	2.8114	0.0358	0.1728	0.4453	0.0796	5.6558	0.0361	-0.1579	0.00699	-0.3535
70	0.9872	-0.8974	2.8258	0.0258	0.1737	0.4435	0.08617	5.6852	0.026	-0.159	0.00721	-0.3512
100	0.991	-0.9009	2.8368	0.0181	0.1744	0.442	0.09116	5.7075	0.0184	-0.1598	0.00733	-0.3491
	1	-0.9091	2.8628	0	0.176	0.4382	0.10298	5.7606	0	-0.1612	0.00748	-0.3431

Table.A3.11 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 15、20)

B ₂ = 15			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0106	-0.0099	1.4793	0.0085	0.0008	0.0058	-0.004	4.4276	0.001	-0.0003	-0.0002	-0.001
0.015	0.0157	-0.0148	1.4824	0.0127	0.0013	0.0086	-0.006	4.4287	0.0014	-0.0004	-0.0003	-0.0015
0.02	0.0209	-0.0196	1.4855	0.0169	0.0017	0.0114	-0.0079	4.4297	0.0019	-0.0005	-0.0004	-0.002
0.03	0.031	-0.0291	1.4918	0.025	0.0025	0.017	-0.0117	4.4319	0.0029	-0.0008	-0.0006	-0.003
0.05	0.0506	-0.0475	1.5041	0.0406	0.0041	0.0278	-0.019	4.4361	0.0048	-0.0014	-0.001	-0.005
0.07	0.0695	-0.0651	1.5162	0.0554	0.0056	0.0381	-0.0259	4.4403	0.0067	-0.0019	-0.0014	-0.007
0.1	0.0964	-0.0904	1.534	0.0764	0.0078	0.0529	-0.0357	4.4467	0.0095	-0.0027	-0.002	-0.01
0.15	0.1379	-0.1293	1.5627	0.108	0.0112	0.0757	-0.0505	4.4572	0.0141	-0.004	-0.0029	-0.0149
0.2	0.1758	-0.1648	1.5903	0.1361	0.0145	0.0966	-0.0636	4.4676	0.0187	-0.0053	-0.0038	-0.0198
0.3	0.2424	-0.2273	1.6424	0.1834	0.0203	0.1333	-0.0855	4.4884	0.0276	-0.0079	-0.0055	-0.0295
0.5	0.3478	-0.3261	1.736	0.2514	0.0301	0.1914	-0.1166	4.5291	0.0444	-0.0129	-0.0084	-0.0483
0.7	0.4275	-0.4008	1.8178	0.2951	0.038	0.2352	-0.1362	4.5688	0.0599	-0.0177	-0.0107	-0.0664
1	0.5161	-0.4839	1.9229	0.333	0.0477	0.2837	-0.1523	4.6261	0.0808	-0.0244	-0.0133	-0.092
1.5	0.6154	-0.5769	2.0628	0.3558	0.0599	0.3367	-0.1596	4.7158	0.1092	-0.0344	-0.0158	-0.1304
2	0.6809	-0.6383	2.1714	0.3545	0.069	0.37	-0.1554	4.7978	0.1305	-0.0431	-0.0167	-0.1635
3	0.7619	-0.7143	2.3278	0.3269	0.0818	0.4073	-0.1353	4.94	0.1562	-0.0572	-0.0159	-0.2155
5	0.8421	-0.7895	2.5104	0.2609	0.096	0.4354	-0.0927	5.152	0.1677	-0.0759	-0.0113	-0.2786
7	0.8819	-0.8268	2.612	0.2107	0.1034	0.4436	-0.061	5.2961	0.158	-0.0872	-0.0072	-0.3106
10	0.9143	-0.8571	2.6998	0.161	0.1094	0.4461	-0.0296	5.4374	0.1359	-0.0969	-0.0032	-0.3327
15	0.9412	-0.8824	2.7756	0.1142	0.1142	0.4447	0	5.5719	0.1049	-0.1049	1.5E-17	-0.3446
20	0.9552	-0.8955	2.8161	0.0881	0.1165	0.4425	0.01656	5.6479	0.0838	-0.1087	0.00145	-0.3473
30	0.9697	-0.9091	2.8583	0.0602	0.1188	0.4392	0.03427	5.7296	0.059	-0.1122	0.00264	-0.3468
50	0.9816	-0.9203	2.8932	0.0368	0.1206	0.4357	0.04921	5.7988	0.0366	-0.1146	0.00332	-0.3438
70	0.9868	-0.9251	2.9085	0.0264	0.1213	0.4338	0.0558	5.8294	0.0265	-0.1155	0.00353	-0.3416
100	0.9907	-0.9288	2.9201	0.0186	0.1218	0.4324	0.06082	5.8527	0.0187	-0.1161	0.00364	-0.3396
	1	-0.9375	2.9476	0	0.1229	0.4286	0.07273	5.908	0	-0.1173	0.00377	-0.3339

B ₂ = 20			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0104	-0.0099	1.5025	0.0084	0.0006	0.0056	-0.004	4.4936	0.0009	-0.0002	-0.0002	-0.001
0.015	0.0155	-0.0148	1.5056	0.0125	0.0009	0.0084	-0.006	4.4947	0.0014	-0.0003	-0.0003	-0.0014
0.02	0.0206	-0.0196	1.5088	0.0166	0.0012	0.0111	-0.008	4.4957	0.0019	-0.0004	-0.0004	-0.0019
0.03	0.0305	-0.0291	1.515	0.0246	0.0019	0.0165	-0.0118	4.4978	0.0028	-0.0006	-0.0006	-0.0029
0.05	0.0499	-0.0475	1.5273	0.04	0.003	0.027	-0.0192	4.5021	0.0047	-0.001	-0.001	-0.0048
0.07	0.0685	-0.0652	1.5394	0.0546	0.0042	0.037	-0.0263	4.5063	0.0066	-0.0014	-0.0014	-0.0067
0.1	0.095	-0.0905	1.5572	0.0753	0.0059	0.0514	-0.0362	4.5126	0.0093	-0.0021	-0.002	-0.0095
0.15	0.1361	-0.1296	1.586	0.1066	0.0085	0.0737	-0.0513	4.5231	0.0139	-0.0031	-0.0029	-0.0143
0.2	0.1736	-0.1653	1.6136	0.1345	0.0109	0.094	-0.0646	4.5336	0.0184	-0.0041	-0.0038	-0.019
0.3	0.2395	-0.2281	1.6659	0.1814	0.0153	0.1299	-0.0872	4.5543	0.0271	-0.006	-0.0054	-0.0282
0.5	0.3443	-0.3279	1.7599	0.2492	0.0227	0.1869	-0.1196	4.5949	0.0437	-0.0098	-0.0083	-0.0463
0.7	0.4236	-0.4035	1.8421	0.2931	0.0288	0.23	-0.1403	4.6346	0.059	-0.0135	-0.0106	-0.0637
1	0.5122	-0.4878	1.948	0.3316	0.0361	0.2778	-0.158	4.6919	0.0797	-0.0186	-0.0133	-0.0883
1.5	0.6117	-0.5825	2.0894	0.3553	0.0455	0.3303	-0.1675	4.7817	0.1079	-0.0263	-0.0159	-0.1255
2	0.6774	-0.6452	2.1993	0.3548	0.0524	0.3635	-0.165	4.8639	0.1292	-0.033	-0.017	-0.1576
3	0.759	-0.7229	2.3581	0.3283	0.0622	0.4008	-0.1473	5.0069	0.1552	-0.0439	-0.0165	-0.2085
5	0.84	-0.8	2.5443	0.263	0.0732	0.4292	-0.107	5.2208	0.1675	-0.0586	-0.0123	-0.2709
7	0.8802	-0.8383	2.6483	0.2129	0.079	0.4377	-0.0764	5.3669	0.1583	-0.0674	-0.0084	-0.3029
10	0.913	-0.8696	2.7383	0.1629	0.0837	0.4404	-0.0457	5.5107	0.1366	-0.0752	-0.0045	-0.3253
15	0.9403	-0.8955	2.8161	0.1157	0.0874	0.4392	-0.0164	5.6479	0.1057	-0.0815	-0.0014	-0.3377
20	0.9546	-0.9091	2.8577	0.0893	0.0893	0.4372	-8E-17	5.7255	0.0846	-0.0846	-1E-17	-0.3407
30	0.9692	-0.9231	2.9011	0.061	0.091	0.4339	0.01764	5.8092	0.0596	-0.0874	0.00116	-0.3405
50	0.9813	-0.9346	2.9371	0.0373	0.0924	0.4304	0.03256	5.8802	0.037	-0.0894	0.00182	-0.3377
70	0.9866	-0.9396	2.9529	0.0268	0.093	0.4286	0.03915	5.9115	0.0268	-0.0901	0.00202	-0.3356
100	0.9906	-0.9434	2.9648	0.0189	0.0934	0.4271	0.04417	5.9354	0.0189	-0.0906	0.00212	-0.3337
	1	-0.9524	2.993	0	0.0943	0.4234	0.05612	5.9921	0	-0.0916	0.00224	-0.3281

Table.A3.12 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 30、50)

B ₂ = 30			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0102	-0.0099	1.5265	0.0083	0.0004	0.0054	-0.0041	4.5636	0.0009	-0.0001	-0.0002	-0.0009
0.015	0.0153	-0.0148	1.5297	0.0123	0.0006	0.0081	-0.0061	4.5647	0.0014	-0.0002	-0.0003	-0.0014
0.02	0.0202	-0.0196	1.5328	0.0163	0.0008	0.0108	-0.0081	4.5657	0.0019	-0.0003	-0.0004	-0.0018
0.03	0.0301	-0.0291	1.539	0.0242	0.0012	0.016	-0.012	4.5679	0.0028	-0.0004	-0.0006	-0.0027
0.05	0.0491	-0.0475	1.5513	0.0394	0.002	0.0262	-0.0195	4.5721	0.0046	-0.0007	-0.001	-0.0046
0.07	0.0675	-0.0653	1.5635	0.0538	0.0028	0.036	-0.0266	4.5763	0.0065	-0.001	-0.0014	-0.0064
0.1	0.0937	-0.0906	1.5813	0.0742	0.0039	0.0499	-0.0367	4.5826	0.0092	-0.0014	-0.0019	-0.0091
0.15	0.1342	-0.1299	1.6101	0.1052	0.0057	0.0716	-0.0521	4.5931	0.0137	-0.0021	-0.0028	-0.0136
0.2	0.1713	-0.1658	1.6378	0.1328	0.0073	0.0914	-0.0657	4.6035	0.0181	-0.0027	-0.0037	-0.0181
0.3	0.2366	-0.229	1.6902	0.1794	0.0102	0.1265	-0.0889	4.6242	0.0267	-0.0041	-0.0053	-0.0269
0.5	0.3407	-0.3297	1.7846	0.247	0.0152	0.1823	-0.1225	4.6649	0.0431	-0.0067	-0.0082	-0.0442
0.7	0.4197	-0.4062	1.8673	0.2911	0.0193	0.2246	-0.1445	4.7045	0.0582	-0.0091	-0.0105	-0.0608
1	0.5082	-0.4918	1.974	0.3301	0.0243	0.2718	-0.1638	4.762	0.0786	-0.0126	-0.0132	-0.0845
1.5	0.6078	-0.5882	2.1168	0.3549	0.0306	0.3237	-0.1757	4.8519	0.1067	-0.0178	-0.0159	-0.1203
2	0.6739	-0.6522	2.2282	0.3552	0.0354	0.3567	-0.1749	4.9344	0.1279	-0.0224	-0.0171	-0.1514
3	0.7561	-0.7317	2.3895	0.3297	0.042	0.394	-0.1597	5.0783	0.1542	-0.0299	-0.0168	-0.2009
5	0.8378	-0.8108	2.5795	0.2652	0.0496	0.4228	-0.1221	5.2945	0.1674	-0.04	-0.013	-0.2624
7	0.8785	-0.8502	2.6859	0.2151	0.0536	0.4315	-0.0925	5.4428	0.1588	-0.0462	-0.0092	-0.2944
10	0.9118	-0.8824	2.7783	0.1649	0.0568	0.4345	-0.0626	5.5893	0.1375	-0.0516	-0.0056	-0.317
15	0.9394	-0.9091	2.8583	0.1173	0.0594	0.4334	-0.0338	5.7296	0.1067	-0.0561	-0.0025	-0.3299
20	0.9539	-0.9231	2.9011	0.0905	0.0607	0.4314	-0.0175	5.8092	0.0855	-0.0583	-0.0011	-0.3331
30	0.9688	-0.9375	2.9458	0.0619	0.0619	0.4283	0	5.8951	0.0603	-0.0603	0	-0.3332
50	0.981	-0.9494	2.9829	0.0379	0.0629	0.4248	0.01488	5.968	0.0375	-0.0617	0.00065	-0.3306
70	0.9864	-0.9546	2.9991	0.0272	0.0633	0.423	0.02148	6.0003	0.0271	-0.0623	0.00083	-0.3286
100	0.9904	-0.9585	3.0114	0.0192	0.0636	0.4216	0.0265	6.0248	0.0191	-0.0626	0.00094	-0.3268
	1	-0.9677	3.0406	0	0.0642	0.4178	0.03847	6.0831	0	-0.0633	0.00104	-0.3214

B ₂ = 50			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.0101	-0.0099	1.5463	0.0082	0.0003	0.0053	-0.0041	4.6224	0.0009	-8E-05	-0.0002	-0.0009
0.015	0.0151	-0.0148	1.5495	0.0122	0.0004	0.0079	-0.0061	4.6234	0.0014	-0.0001	-0.0003	-0.0013
0.02	0.02	-0.0196	1.5526	0.0161	0.0005	0.0105	-0.0081	4.6245	0.0018	-0.0002	-0.0004	-0.0018
0.03	0.0297	-0.0291	1.5589	0.0239	0.0007	0.0156	-0.0121	4.6266	0.0027	-0.0003	-0.0006	-0.0026
0.05	0.0485	-0.0476	1.5712	0.0389	0.0012	0.0255	-0.0197	4.6308	0.0046	-0.0004	-0.001	-0.0044
0.07	0.0666	-0.0653	1.5833	0.0532	0.0017	0.0351	-0.0269	4.6351	0.0064	-0.0006	-0.0013	-0.0061
0.1	0.0926	-0.0907	1.6012	0.0734	0.0024	0.0488	-0.0371	4.6414	0.0091	-0.0008	-0.0019	-0.0087
0.15	0.1327	-0.1301	1.63	0.1041	0.0034	0.07	-0.0527	4.6519	0.0135	-0.0013	-0.0028	-0.013
0.2	0.1694	-0.1661	1.6577	0.1314	0.0044	0.0894	-0.0666	4.6623	0.0179	-0.0017	-0.0037	-0.0173
0.3	0.2343	-0.2297	1.7103	0.1778	0.0062	0.1237	-0.0903	4.683	0.0264	-0.0025	-0.0053	-0.0258
0.5	0.3378	-0.3311	1.805	0.2452	0.0092	0.1785	-0.125	4.7237	0.0425	-0.004	-0.0081	-0.0424
0.7	0.4166	-0.4084	1.8881	0.2895	0.0117	0.2203	-0.148	4.7633	0.0575	-0.0055	-0.0104	-0.0584
1	0.505	-0.4951	1.9955	0.3289	0.0147	0.2668	-0.1686	4.8208	0.0778	-0.0076	-0.0131	-0.0813
1.5	0.6047	-0.5929	2.1395	0.3545	0.0185	0.3183	-0.1824	4.9109	0.1057	-0.0108	-0.0158	-0.1159
2	0.6711	-0.6579	2.252	0.3555	0.0214	0.3511	-0.1831	4.9938	0.1269	-0.0136	-0.0171	-0.1461
3	0.7537	-0.7389	2.4154	0.3309	0.0255	0.3884	-0.17	5.1384	0.1534	-0.0182	-0.017	-0.1945
5	0.8361	-0.8197	2.6086	0.2671	0.0301	0.4173	-0.1346	5.3566	0.1674	-0.0244	-0.0133	-0.2551
7	0.8772	-0.86	2.7171	0.217	0.0325	0.4262	-0.106	5.5069	0.1593	-0.0282	-0.0097	-0.2869
10	0.9107	-0.8929	2.8114	0.1666	0.0346	0.4294	-0.0768	5.6558	0.1383	-0.0316	-0.0061	-0.3097
15	0.9387	-0.9203	2.8932	0.1186	0.0362	0.4285	-0.0484	5.7988	0.1076	-0.0344	-0.0031	-0.3228
20	0.9533	-0.9346	2.9371	0.0916	0.037	0.4266	-0.0323	5.8802	0.0864	-0.0358	-0.0018	-0.3262
30	0.9684	-0.9494	2.9829	0.0627	0.0377	0.4234	-0.0148	5.968	0.061	-0.037	-0.0006	-0.3266
50	0.9808	-0.9615	3.0209	0.0383	0.0383	0.42	-4E-17	6.0426	0.0379	-0.0379	-1E-18	-0.3241
70	0.9862	-0.9669	3.0375	0.0276	0.0386	0.4182	0.00658	6.0757	0.0274	-0.0383	0.00019	-0.3222
100	0.9903	-0.9709	3.0502	0.0194	0.0387	0.4168	0.01161	6.1008	0.0194	-0.0385	0.00029	-0.3204
	1	-0.9804	3.0801	0	0.0391	0.413	0.02358	6.1606	0	-0.0389	0.00039	-0.3151

Table.A3.13 2項近似式の固有値と係数 (B₂ = 70、100)

B ₂ = 70			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.01	-0.0099	1.555	0.0081	0.0002	0.0053	-0.0041	4.6482	0.0009	-6E-05	-0.0002	-0.0009
0.015	0.015	-0.0148	1.5582	0.0121	0.0003	0.0078	-0.0062	4.6493	0.0014	-9E-05	-0.0003	-0.0013
0.02	0.0199	-0.0196	1.5613	0.016	0.0004	0.0104	-0.0082	4.6504	0.0018	-0.0001	-0.0004	-0.0017
0.03	0.0295	-0.0291	1.5675	0.0238	0.0005	0.0155	-0.0121	4.6525	0.0027	-0.0002	-0.0006	-0.0026
0.05	0.0483	-0.0476	1.5799	0.0387	0.0009	0.0253	-0.0197	4.6567	0.0045	-0.0003	-0.001	-0.0043
0.07	0.0663	-0.0654	1.592	0.0529	0.0012	0.0347	-0.027	4.6609	0.0063	-0.0004	-0.0013	-0.006
0.1	0.0921	-0.0908	1.6098	0.073	0.0017	0.0483	-0.0373	4.6672	0.009	-0.0006	-0.0019	-0.0085
0.15	0.1321	-0.1302	1.6387	0.1036	0.0024	0.0692	-0.053	4.6777	0.0134	-0.0009	-0.0028	-0.0128
0.2	0.1687	-0.1663	1.6664	0.1308	0.0031	0.0885	-0.067	4.6882	0.0178	-0.0012	-0.0036	-0.017
0.3	0.2333	-0.23	1.719	0.1771	0.0044	0.1225	-0.0909	4.7088	0.0262	-0.0018	-0.0052	-0.0253
0.5	0.3365	-0.3318	1.8139	0.2445	0.0066	0.1769	-0.126	4.7495	0.0423	-0.0029	-0.008	-0.0416
0.7	0.4152	-0.4094	1.8972	0.2888	0.0083	0.2184	-0.1494	4.7892	0.0572	-0.0039	-0.0103	-0.0574
1	0.5036	-0.4965	2.0048	0.3284	0.0105	0.2646	-0.1707	4.8467	0.0774	-0.0055	-0.013	-0.0799
1.5	0.6034	-0.5949	2.1494	0.3543	0.0133	0.3159	-0.1853	4.9369	0.1053	-0.0077	-0.0158	-0.1139
2	0.6698	-0.6604	2.2624	0.3556	0.0153	0.3486	-0.1867	5.0199	0.1265	-0.0097	-0.017	-0.1438
3	0.7527	-0.7421	2.4268	0.3315	0.0183	0.3859	-0.1745	5.1649	0.1531	-0.013	-0.017	-0.1916
5	0.8353	-0.8235	2.6213	0.2679	0.0216	0.4149	-0.1401	5.3841	0.1674	-0.0175	-0.0134	-0.2517
7	0.8765	-0.8642	2.7307	0.2179	0.0234	0.4239	-0.112	5.5352	0.1595	-0.0203	-0.0099	-0.2835
10	0.9103	-0.8974	2.8258	0.1673	0.0248	0.4271	-0.083	5.6852	0.1387	-0.0227	-0.0063	-0.3063
15	0.9383	-0.9251	2.9085	0.1192	0.026	0.4263	-0.0548	5.8294	0.1081	-0.0248	-0.0033	-0.3195
20	0.953	-0.9396	2.9529	0.0921	0.0266	0.4244	-0.0388	5.9115	0.0867	-0.0258	-0.0019	-0.323
30	0.9682	-0.9546	2.9991	0.063	0.0271	0.4213	-0.0214	6.0003	0.0613	-0.0267	-0.0008	-0.3234
50	0.9807	-0.9669	3.0375	0.0385	0.0276	0.4178	-0.0066	6.0757	0.0381	-0.0273	-0.0002	-0.321
70	0.9861	-0.9722	3.0544	0.0277	0.0277	0.4161	-2E-17	6.1091	0.0276	-0.0276	-2E-18	-0.3192
100	0.9902	-0.9763	3.0671	0.0195	0.0279	0.4146	0.00502	6.1345	0.0195	-0.0277	0.0001	-0.3174
	1	-0.9859	3.0974	0	0.0281	0.4109	0.017	6.1949	0	-0.0281	0.0002	-0.3121

B ₂ = 100			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B ₁	a ₁	a ₂	p	c	C ₂	C _m	C _b	p	c	C ₂	C _m	C _b
0.01	0.01	-0.0099	1.5616	0.0081	0.0001	0.0052	-0.0042	4.6679	0.0009	-4E-05	-0.0002	-0.0008
0.015	0.0149	-0.0148	1.5647	0.0121	0.0002	0.0078	-0.0062	4.6689	0.0014	-6E-05	-0.0003	-0.0013
0.02	0.0198	-0.0196	1.5679	0.016	0.0003	0.0103	-0.0082	4.67	0.0018	-8E-05	-0.0004	-0.0017
0.03	0.0294	-0.0291	1.5741	0.0237	0.0004	0.0153	-0.0122	4.6721	0.0027	-0.0001	-0.0006	-0.0025
0.05	0.0481	-0.0476	1.5864	0.0385	0.0006	0.0251	-0.0198	4.6764	0.0045	-0.0002	-0.001	-0.0042
0.07	0.066	-0.0654	1.5986	0.0527	0.0008	0.0344	-0.0271	4.6806	0.0063	-0.0003	-0.0013	-0.0059
0.1	0.0917	-0.0908	1.6164	0.0728	0.0012	0.0479	-0.0375	4.6869	0.009	-0.0004	-0.0019	-0.0084
0.15	0.1316	-0.1303	1.6453	0.1032	0.0017	0.0687	-0.0532	4.6974	0.0134	-0.0006	-0.0028	-0.0126
0.2	0.1681	-0.1664	1.673	0.1304	0.0022	0.0878	-0.0673	4.7078	0.0177	-0.0008	-0.0036	-0.0168
0.3	0.2325	-0.2302	1.7257	0.1765	0.0031	0.1216	-0.0914	4.7285	0.0261	-0.0012	-0.0052	-0.025
0.5	0.3356	-0.3322	1.8206	0.2439	0.0046	0.1757	-0.1268	4.7692	0.0422	-0.002	-0.0079	-0.0411
0.7	0.4142	-0.4101	1.9041	0.2883	0.0058	0.2169	-0.1506	4.8089	0.057	-0.0028	-0.0102	-0.0566
1	0.5025	-0.4975	2.0119	0.328	0.0074	0.263	-0.1723	4.8664	0.0771	-0.0038	-0.0129	-0.0788
1.5	0.6024	-0.5964	2.1569	0.3541	0.0093	0.3141	-0.1875	4.9567	0.1049	-0.0054	-0.0157	-0.1125
2	0.6689	-0.6623	2.2703	0.3557	0.0108	0.3468	-0.1894	5.0398	0.1262	-0.0068	-0.017	-0.142
3	0.7519	-0.7444	2.4354	0.3319	0.0128	0.384	-0.1779	5.1851	0.1529	-0.0091	-0.017	-0.1894
5	0.8347	-0.8265	2.6309	0.2685	0.0152	0.4131	-0.1442	5.4049	0.1674	-0.0123	-0.0135	-0.2492
7	0.8761	-0.8674	2.741	0.2185	0.0164	0.4221	-0.1165	5.5567	0.1597	-0.0143	-0.0099	-0.2809
10	0.9099	-0.9009	2.8368	0.1679	0.0174	0.4254	-0.0877	5.7075	0.139	-0.016	-0.0064	-0.3037
15	0.9381	-0.9288	2.9201	0.1196	0.0183	0.4246	-0.0597	5.8527	0.1084	-0.0174	-0.0034	-0.317
20	0.9528	-0.9434	2.9648	0.0924	0.0187	0.4227	-0.0437	5.9354	0.087	-0.0181	-0.002	-0.3205
30	0.9681	-0.9585	3.0114	0.0633	0.0191	0.4196	-0.0264	6.0248	0.0615	-0.0188	-0.0009	-0.321
50	0.9806	-0.9709	3.0502	0.0387	0.0194	0.4162	-0.0116	6.1008	0.0383	-0.0192	-0.0003	-0.3187
70	0.9861	-0.9763	3.0671	0.0278	0.0195	0.4144	-0.005	6.1345	0.0277	-0.0194	-0.0001	-0.3168
100	0.9902	-0.9804	3.08	0.0196	0.0196	0.413	1.1E-16	6.1601	0.0195	-0.0195	-3E-18	-0.3151
	1	-0.9901	3.1105	0	0.0198	0.4092	0.01198	6.2211	0	-0.0198	9.9E-05	-0.3098

Table.A3.14 2項近似式の固有値と係数 ($B_2 =$)

$B_2 =$			Eigen-value and Coefficients(n=1)					Eigen-value and Coefficients(n=2)				
B_1	a_1	a_2	p	c	C_2	C_m	C_b	p	c	C_2	C_m	C_b
0.01	0.0099	-0.0099	1.5771	0.008	0	0.0051	-0.0042	4.7145	0.0009	0	-0.0002	-0.0008
0.015	0.0148	-0.0148	1.5803	0.0119	0	0.0076	-0.0062	4.7156	0.0013	0	-0.0003	-0.0012
0.02	0.0196	-0.0196	1.5834	0.0158	0	0.0101	-0.0083	4.7166	0.0018	0	-0.0004	-0.0016
0.03	0.0291	-0.0291	1.5897	0.0235	0	0.015	-0.0123	4.7187	0.0027	0	-0.0006	-0.0024
0.05	0.0476	-0.0476	1.602	0.0382	0	0.0246	-0.02	4.723	0.0045	0	-0.0009	-0.0041
0.07	0.0654	-0.0654	1.6141	0.0522	0	0.0338	-0.0273	4.7272	0.0062	0	-0.0013	-0.0057
0.1	0.0909	-0.0909	1.632	0.0721	0	0.047	-0.0378	4.7335	0.0089	0	-0.0018	-0.0081
0.15	0.1304	-0.1304	1.6609	0.1024	0	0.0674	-0.0537	4.744	0.0132	0	-0.0027	-0.0122
0.2	0.1667	-0.1667	1.6887	0.1294	0	0.0862	-0.068	4.7544	0.0175	0	-0.0035	-0.0162
0.3	0.2308	-0.2308	1.7414	0.1753	0	0.1195	-0.0924	4.7751	0.0259	0	-0.0051	-0.0241
0.5	0.3333	-0.3333	1.8366	0.2425	0	0.1728	-0.1287	4.8158	0.0418	0	-0.0078	-0.0397
0.7	0.4118	-0.4118	1.9203	0.287	0	0.2136	-0.1532	4.8556	0.0565	0	-0.0101	-0.0547
1	0.5	-0.5	2.0288	0.327	0	0.2592	-0.176	4.9132	0.0765	0	-0.0127	-0.0762
1.5	0.6	-0.6	2.1746	0.3538	0	0.3099	-0.1926	5.0036	0.1042	0	-0.0155	-0.1089
2	0.6667	-0.6667	2.2889	0.3559	0	0.3423	-0.1957	5.087	0.1255	0	-0.0168	-0.1377
3	0.75	-0.75	2.4556	0.3328	0	0.3795	-0.1859	5.2329	0.1524	0	-0.0169	-0.1841
5	0.8333	-0.8333	2.6537	0.27	0	0.4087	-0.1541	5.4544	0.1674	0	-0.0135	-0.243
7	0.875	-0.875	2.7654	0.22	0	0.4178	-0.1272	5.6078	0.1601	0	-0.01	-0.2744
10	0.9091	-0.9091	2.8628	0.1692	0	0.4212	-0.099	5.7606	0.1397	0	-0.0065	-0.2973
15	0.9375	-0.9375	2.9476	0.1206	0	0.4205	-0.0714	5.908	0.1091	0	-0.0035	-0.3107
20	0.9524	-0.9524	2.993	0.0932	0	0.4187	-0.0555	5.9921	0.0877	0	-0.0021	-0.3143
30	0.9677	-0.9677	3.0406	0.0639	0	0.4156	-0.0383	6.0831	0.062	0	-0.001	-0.315
50	0.9804	-0.9804	3.0801	0.0391	0	0.4122	-0.0235	6.1606	0.0386	0	-0.0004	-0.3127
70	0.9859	-0.9859	3.0974	0.0281	0	0.4105	-0.017	6.1949	0.028	0	-0.0002	-0.3109
100	0.9901	-0.9901	3.1105	0.0198	0	0.409	-0.012	6.2211	0.0197	0	-1E-04	-0.3092
	1	-1	3.1416	0	0	0.4053	0	6.2832	0	0	0	-0.304

国際単位系 (SI)

表1. SI 基本単位

基本量	SI 基本単位	
	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質の量	モル	mol
光度	カンデラ	cd

表2. 基本単位を用いて表されるSI組立単位の例

組立量	SI 基本単位	
	名称	記号
面積	平方メートル	m ²
体積	立方メートル	m ³
速度	メートル毎秒	m/s
加速度	メートル毎秒毎秒	m/s ²
波数	毎メートル	m ⁻¹
密度 (質量密度)	キログラム毎立方メートル	kg/m ³
質量体積 (比体積)	立方メートル毎キログラム	m ³ /kg
電流密度	アンペア毎平方メートル	A/m ²
磁界の強さ	アンペア毎メートル	A/m
(物質の)濃度	モル毎立方メートル	mol/m ³
輝度	カンデラ毎平方メートル	cd/m ²
屈折率	(数の) 1	1

表5. SI 接頭語

乗数	接頭語	記号	乗数	接頭語	記号
10 ²⁴	ヨタ	Y	10 ⁻¹	デシ	d
10 ²¹	ゼタ	Z	10 ⁻²	センチ	c
10 ¹⁸	エクサ	E	10 ⁻³	ミリ	m
10 ¹⁵	ペタ	P	10 ⁻⁶	マイクロ	μ
10 ¹²	テラ	T	10 ⁻⁹	ナノ	n
10 ⁹	ギガ	G	10 ⁻¹²	ピコ	p
10 ⁶	メガ	M	10 ⁻¹⁵	フェムト	f
10 ³	キロ	k	10 ⁻¹⁸	アト	a
10 ²	ヘクト	h	10 ⁻²¹	ゼプト	z
10 ¹	デカ	da	10 ⁻²⁴	ヨクト	y

表3. 固有の名称とその独自の記号で表されるSI組立単位

組立量	SI 組立単位			
	名称	記号	他のSI単位による表し方	SI基本単位による表し方
平面角	ラジアン ^(a)	rad		m ² ・m ⁻¹ =1 ^(b)
立体角	ステラジアン ^(a)	sr ^(c)		m ² ・m ⁻² =1 ^(b)
周波数	ヘルツ	Hz		s ⁻¹
力	ニュートン	N		m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻²
圧力, 応力	パスカル	Pa	N/m ²	m ⁻¹ ・kg ⁻¹ ・s ⁻²
エネルギー, 仕事, 熱量	ジュール	J	N・m	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻²
工率, 放射束	ワット	W	J/s	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³
電荷, 電気量	クーロン	C		s ¹ ・A
電位差 (電圧), 起電力	ボルト	V	W/A	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³ ・A ⁻¹
静電容量	ファラド	F	C/V	m ⁻² ・kg ⁻¹ ・s ⁴ ・A ²
電気抵抗	オーム	Ω	V/A	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³ ・A ⁻²
コンダクタンス	ジーメン	S	A/V	m ⁻² ・kg ⁻¹ ・s ³ ・A ²
磁束密度	ウェーバ	Wb	V・s	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻² ・A ⁻¹
磁束密度	テスラ	T	Wb/m ²	kg ⁻¹ ・s ⁻² ・A ⁻¹
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻² ・A ⁻²
セルシウス温度	セルシウス度 ^(d)	°C		K
光照射度	ルーメン	lm	cd・sr ^(c)	m ² ・m ⁻² ・cd=cd
(放射核種の)放射能	ベクレル	Bq	lm/m ²	m ² ・m ⁻⁴ ・cd=m ⁻² ・cd
吸収線量, 質量エネルギー分与, カーマ線量当量, 周辺線量当量, 方向性線量当量, 個人線量当量, 組織線量当量	グレイ	Gy	J/kg	m ² ・s ⁻²
	シーベルト	Sv	J/kg	m ² ・s ⁻²

- (a) ラジアン及びステラジアンの使用は、同じ次元であっても異なった性質をもった量を区別するときの組立単位の表し方として利点がある。組立単位を形作るときにいくつかの用例は表4に示されている。
- (b) 実際には、使用する時には記号rad及びsrが用いられるが、習慣として組立単位としての記号“1”は明示されない。
- (c) 測光学では、ステラジアンの名称と記号srを単位の表し方の中にそのまま維持している。
- (d) この単位は、例としてミリセルシウス度m°CのようにSI接頭語を伴って用いても良い。

表4. 単位の中に固有の名称とその独自の記号を含むSI組立単位の例

組立量	SI 組立単位			
	名称	記号	SI 基本単位による表し方	
粘力のモーメント	パスカル秒	Pa・s	m ⁻¹ ・kg ⁻¹ ・s ⁻¹	
表面張力	ニュートンメートル	N・m	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻²	
角速度	ニュートン毎メートル	N/m	kg ⁻¹ ・s ⁻²	
角加速度	ラジアン毎秒	rad/s	m ² ・m ⁻¹ ・s ⁻¹ =s ⁻¹	
熱流密度, 放射照度	ラジアン毎平方秒	rad/s ²	m ² ・m ⁻¹ ・s ⁻² =s ⁻²	
熱容量, エントロピー	ワット毎平方メートル	W/m ²	kg ⁻¹ ・s ⁻³	
質量熱容量 (比熱容量), 質量エントロピー	ジュール毎キログラム毎ケルビン	J/K	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻² ・K ⁻¹	
質量熱容量 (比熱容量), 質量エントロピー	ジュール毎キログラム	J/(kg・K)	m ² ・s ⁻² ・K ⁻¹	
熱伝導率	ジュール毎立方メートル	J/m ³	m ⁻¹ ・kg ⁻¹ ・s ⁻²	
体積エネルギー	ワット毎メートル毎ケルビン	W/(m・K)	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³ ・K ⁻¹	
電界の強さ	ジュール毎立方メートル	J/m ³	m ⁻¹ ・kg ⁻¹ ・s ⁻²	
体積電荷	ボルト毎メートル	V/m	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³ ・A ⁻¹	
電気変位	クーロン毎立方メートル	C/m ³	m ⁻³ ・s ¹ ・A	
誘電率	クーロン毎平方メートル	C/m ²	m ⁻² ・s ¹ ・A	
透磁率	ファラド毎メートル	F/m	m ⁻³ ・kg ⁻¹ ・s ⁴ ・A ²	
モルエネルギー	ヘンリー毎メートル	H/m	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻² ・A ⁻²	
モルエントロピー	ジュール毎モル	J/mol	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻² ・mol ⁻¹	
モルエントロピー	ジュール毎モル毎ケルビン	J/(mol・K)	m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻² ・K ⁻¹ ・mol ⁻¹	
照射線量 (X線及びγ線)	クーロン毎キログラム	C/kg	kg ⁻¹ ・s ¹ ・A	
吸収線量	グレイ毎秒	Gy/s	m ² ・s ⁻³	
放射線強度	ワット毎ステラジアン	W/sr	m ⁴ ・m ⁻² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³ =m ² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³	
放射輝度	ワット毎平方メートル毎ステラジアン	W/(m ² ・sr)	m ² ・m ⁻² ・kg ⁻¹ ・s ⁻³ =kg ⁻¹ ・s ⁻³	

表6. 国際単位系と併用されるが国際単位系に属さない単位

名称	記号	SI 単位による値
分	min	1 min=60s
時	h	1 h=60 min=3600 s
日	d	1 d=24 h=86400 s
度	°	1°=(π/180) rad
分	′	1′=(1/60)°=(π/10800) rad
秒	″	1″=(1/60)′=(π/648000) rad
リットル	l, L	1 l=1 dm ³ =10 ⁻³ m ³
トン	t	1 t=10 ³ kg
ネーパ	Np	1 Np=1
ベル	B	1 B=(1/2) ln10 (Np)

表7. 国際単位系と併用されこれに属さない単位でSI単位で表される数値が実験的に得られるもの

名称	記号	SI 単位であらわされる数値
電子ボルト	eV	1 eV=1.60217733(49)×10 ⁻¹⁹ J
統一原子質量単位	u	1 u=1.6605402(10)×10 ⁻²⁷ kg
天文単位	ua	1 ua=1.49597870691(30)×10 ¹¹ m

表8. 国際単位系に属さないが国際単位系と併用されるその他の単位

名称	記号	SI 単位であらわされる数値
海里		1 海里=1852m
ノット		1 ノット=1 海里毎時=(1852/3600)m/s
アール	a	1 a=1 dam ² =10 ² m ²
ヘクタール	ha	1 ha=1 hm ² =10 ⁴ m ²
バル	bar	1 bar=0.1MPa=100kPa=1000hPa=10 ⁵ Pa
オングストローム	Å	1 Å=0.1nm=10 ⁻¹⁰ m
バール	b	1 b=100fm ² =10 ⁻²⁸ m ²

表9. 固有の名称を含むCGS組立単位

名称	記号	SI 単位であらわされる数値
エルグ	erg	1 erg=10 ⁻⁷ J
ダイン	dyn	1 dyn=10 ⁻⁵ N
ポアズ	P	1 P=1 dyn・s/cm ² =0.1Pa・s
ストークス	St	1 St=1cm ² /s=10 ⁻⁴ m ² /s
ガウス	G	1 G=10 ⁴ T
エルステッド	Oe	1 Oe=(1000/4π) A/m
マクスウェル	Mx	1 Mx=10 ⁻⁸ Wb
スチル	sb	1 sb=1cd/cm ² =10 ⁴ cd/m ²
ホト	ph	1 ph=10 ¹¹ lx
ガリ	Gal	1 Gal=1cm/s ² =10 ⁻² m/s ²

表10. 国際単位に属さないその他の単位の例

名称	記号	SI 単位であらわされる数値
キュリー	Ci	1 Ci=3.7×10 ¹⁰ Bq
レントゲン	R	1 R=2.58×10 ⁻⁴ C/kg
ラド	rad	1 rad=1cGy=10 ⁻² Gy
レム	rem	1 rem=1cSv=10 ⁻² Sv
X線単位	X unit	1 X unit=1.002×10 ⁻⁴ nm
ガンマ	γ	1 γ=1 nT=10 ⁻⁹ T
ジャンスキー	Jy	1 Jy=10 ⁻²⁶ W・m ⁻² ・Hz ⁻¹
フェルミ	fm	1 fermi=1 fm=10 ⁻¹⁵ m
メートル系カラット	Torr	1 metric carat = 200 mg = 2×10 ⁻⁴ kg
トル	Torr	1 Torr = (101 325/760) Pa
標準大気圧	atm	1 atm = 101 325 Pa
カロリ	cal	
マイクロン	μ	1 μ=1μm=10 ⁻⁶ m