

中性子輸送計算システムCBGによる 小林ベンチマーク問題の計算

Calculations of Kobayashi Benchmark Problems with
a Neutron Transport Simulation Code System CBG

千葉 豪

Go CHIBA

原子力基礎工学研究部門

核工学・炉工学ユニット

Division of Nuclear Data and Reactor Engineering
Nuclear Science and Engineering Directorate

本レポートは独立行政法人日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。
本レポートの入手並びに著作権利用に関するお問い合わせは、下記あてにお問い合わせ下さい。
なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ホームページ (<http://www.jaea.go.jp>)
より発信されています。

独立行政法人日本原子力研究開発機構 研究技術情報部 研究技術情報課
〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根2番地4
電話 029-282-6387, Fax 029-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency
Inquiries about availability and/or copyright of this report should be addressed to
Intellectual Resources Section, Intellectual Resources Department,
Japan Atomic Energy Agency
2-4 Shirakata Shirane, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195 Japan
Tel +81-29-282-6387, Fax +81-29-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

© Japan Atomic Energy Agency, 2009

中性子輸送計算システム CBG による 小林ベンチマーク問題の計算

日本原子力研究開発機構

原子力基礎工学研究部門

核工学・炉工学ユニット

千葉 豪

(2009 年 4 月 27 日受理)

中性子輸送計算コードシステム CBG の中性子遮蔽問題への適用性を評価するため、三次元決定論的コードを用いた遮蔽計算を想定して作成された中性子輸送ベンチマーク問題（小林ベンチマーク問題）を CBG を用いて計算した。

遮蔽体領域が完全吸収媒質の問題において、次数に上限がある角度求積セットを用いた場合は、射線効果により参照解と比較して 20%以上の差異を中性子束に生じる場合があること、次数に上限がないセットを用いた場合では、適切な次数を設定することにより中性子束について参照解を 20%以内で再現することを示した。

また、遮蔽体領域が 50%散乱の問題において、高次の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットを用いることにより、中性子束について参照解を 10%以内で再現することを示した。また、計算を効率的に行うための多段階離散座標法を提案し、それを適用することで計算精度を保ちつつ計算時間を 4 分の 1 程度まで短縮することを示した。

Calculations of Kobayashi Benchmark Problems with a Neutron Transport Simulation Code System CBG

Go CHIBA

Division of Nuclear Data and Reactor Engineering
Nuclear Science and Engineering Directorate
Japan Atomic Energy Agency
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received April 27, 2009)

In order to evaluate applicability of a neutron transport simulation code system CBG to shielding problems, calculations are performed with CBG for the Kobayashi benchmark problems which have been proposed for validation of neutron shielding calculations with 3D deterministic codes.

In fully-absorbing shielding problems, it is shown that angular quadrature sets which have limitations on the angular order result in large discrepancy to the reference solutions in neutron flux due to the ray effect and that angular quadrature sets which have no limitations on the order reproduce well the reference neutron flux.

In partly-absorbing shielding problems, it is shown that calculations with the high-order Tri-DP_NT_N set reproduce well the reference neutron flux. In addition, a multi-step discrete ordinates method is proposed, and it is shown that it can drastically reduce calculation time with similar calculation accuracy.

Keywords: Neutron Transport, Shielding Problems, Kobayashi Benchmark, Angular Quadrature Set, Discrete Ordinates

目 次

1. 序論	1
2. 小林ベンチマーク問題	2
2.1 ベンチマーク問題の詳細	2
2.2 ベンチマーク問題の参照解	5
3. 中性子輸送計算コードシステム CBG	10
3.1 角度求積セット	10
3.2 射線効果への対処	11
4. 結果	13
4.1 遮蔽体領域が完全吸収媒質の場合（問題 i）	13
4.2 遮蔽体領域が 50% 散乱媒質の場合（問題 ii）	28
5. 結論	38
謝辞	38
参考文献	39
付録 A ガウス・ルジャンドル求積公式の導出	40
付録 B 角度求積セットが満たすべき要件	42

Contents

1. Introduction	1
2. Kobayashi benchmark problems	2
2.1 Details of benchmark problems	2
2.2 Reference solutions for benchmark problems	5
3. A neutron transport simulation code system CBG	10
3.1 Angular quadrature set	10
3.2 Remedy for ray effect	11
4. Results	13
4.1 Fully absorption shielding case (problem i)	13
4.2 Fifty percent scattering shielding case (problem ii)	28
5. Conclusion	38
Acknowledgement	38
References	39
Appendix A Derivation of Gauss-Legendre quadrature formula	40
Appendix B Conditions required for angular quadrature set	42

List of Tables

Table 2.1.1	Position set	2
Table 2.1.2	Cross section and neutron source strength	5
Table 3.1.1	Number of discrete points in various angular quadrature sets . .	11
Table 4.2.1	Comparison in calculation time (Unit:second)	33

List of Figures

Fig. 2.1.1	Specifications of Kobayashi benchmark problems (Problems 1 and 2)	3
Fig. 2.1.2	Specifications of Kobayashi benchmark problems (Problem 3)	4
Fig. 2.2.1	Reference solution for problem 1A ($x=z=5\text{cm}$)	5
Fig. 2.2.2	Reference solution for problem 1B ($x=y=z$)	6
Fig. 2.2.3	Reference solution for problem 1C ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$)	6
Fig. 2.2.4	Reference solution for problem 2A ($x=5\text{cm}, z=5\text{cm}$)	7
Fig. 2.2.5	Reference solution for problem 2B ($y=95\text{cm}, z=5\text{cm}$)	7
Fig. 2.2.6	Reference solution for problem 3A ($x=5\text{cm}, z=5\text{cm}$)	8
Fig. 2.2.7	Reference solution for problem 3B ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$)	8
Fig. 2.2.8	Reference solution for problem 3C ($y=95\text{cm}, z=35\text{cm}$)	9
Fig. 4.1.1	Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: LQN&EON)	13
Fig. 4.1.2	Result for problem 1Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_DPN_TN) . .	14
Fig. 4.1.3	Result for problem 1Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Rec_DPN_TN) . .	15
Fig. 4.1.4	Result for problem 1Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN) . . .	15
Fig. 4.1.5	Result for problem 1Bi ($x=y=z$, quadrature set: Tri_DPN_TN) . . .	16
Fig. 4.1.6	Result for problem 1Bi ($x=y=z$, quadrature set: Rec_DPN_TN) . . .	16
Fig. 4.1.7	Result for problem 1Bi ($x=y=z$, quadrature set: DP_NNxN)	17
Fig. 4.1.8	Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_DPN_TN)	17
Fig. 4.1.9	Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: Rec_DPN_TN)	18
Fig. 4.1.10	Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN)	18
Fig. 4.1.11	Result for problem 2Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_DPN_TN) . .	19
Fig. 4.1.12	Result for problem 2Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Rec_DPN_TN) . .	20
Fig. 4.1.13	Result for problem 2Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN) . . .	20
Fig. 4.1.14	Result for problem 2Bi ($y=95\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_DPN_TN)	21
Fig. 4.1.15	Result for problem 2Bi ($y=95\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: Rec_DPN_TN)	21
Fig. 4.1.16	Result for problem 2Bi ($y=95\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN)	22
Fig. 4.1.17	Result for problem 3Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_DPN_TN) . .	23
Fig. 4.1.18	Result for problem 3Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Rec_DPN_TN) . .	24
Fig. 4.1.19	Result for problem 3Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN) . . .	24
Fig. 4.1.20	Result for problem 3Bi ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$, Tri_DPN_TN)	25
Fig. 4.1.21	Result for problem 3Bi ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: Rec_DPN_TN)	25
Fig. 4.1.22	Result for problem 3Bi ($y=55\text{cm}, z=5\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN)	26

Fig. 4.1.23	Result for problem 3Ci ($y=95\text{cm}$, $z=35\text{cm}$, quadrature set: Tri. DP_NT_N)	26
Fig. 4.1.24	Result for problem 3Ci ($y=95\text{cm}$, $z=35\text{cm}$, quadrature set: Rec. DP_NT_N)	27
Fig. 4.1.25	Result for problem 3Ci ($y=95\text{cm}$, $z=35\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN)	27
Fig. 4.2.1	Result for problem 1Aii ($x=z=5\text{cm}$, Multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	28
Fig. 4.2.2	Result for problem 1Bii ($x=y=z$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	29
Fig. 4.2.3	Result for problem 1Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	29
Fig. 4.2.4	Result for problem 2Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	30
Fig. 4.2.5	Result for problem 2Bii ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	30
Fig. 4.2.6	Result for problem 3Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	31
Fig. 4.2.7	Result for problem 3Bii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	31
Fig. 4.2.8	Result for problem 3Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N))	32
Fig. 4.2.9	Result for problem 1Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	34
Fig. 4.2.10	Result for problem 1Bii ($x=y=z$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	34
Fig. 4.2.11	Result for problem 1Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	35
Fig. 4.2.12	Result for problem 2Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	35
Fig. 4.2.13	Result for problem 2Bii ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	36
Fig. 4.2.14	Result for problem 3Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	36
Fig. 4.2.15	Result for problem 3Bii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	37
Fig. 4.2.16	Result for problem 3Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: L Q_N , EO $_N$))	37

This is a blank page.

1. 序論

中性子の遮蔽計算の分野においては、連続エネルギーモンテカルロ法が標準的な手法としての地位を確立しつつあると言えるであろう。複雑な空間形状や中性子束の複雑なエネルギー、角度依存性を厳密に取り扱うことができる、という特長を有する連続エネルギーモンテカルロ法は、近年の計算機能力の急激な進歩に後押しされ、有用性の非常に高いツールとなった。

しかし、決定論的手法も、適切な近似を用いることにより比較的短時間で良好な精度の解を得られることから、その果たす役割は今もって大きい。加えて、概念設計の段階で「あたり」をつけるために必要とされる中性子遮蔽（漏洩）計算、基準体系に対する系の微小な変動に伴う漏洩中性子の変動の観察等、（絶対値として）高い精度が要求されない計算が必要とされるような局面においても、その有用性は大きく発揮される。

中性子輸送計算コードシステム CBG¹⁾は、原子炉核計算に関する技術開発を円滑に進めるためを開発された決定論的手法に基づくコードシステムであるが、その利用は多方面に広がりつつあり、最近では核データファイルのベンチマーク計算を効率的に行う目的に利用されている²⁾。核データファイルのベンチマーク計算では、中性子増倍系である臨界実験データのみならず、中性子に対する遮蔽実験データも利用することが重要である。従って、CBG を用いて統合的に核データのベンチマーク計算を行うためには、主に臨界計算に利用してきた CBG の、中性子遮蔽計算に対する適用性を確認することが必要となる。

本報告書では、中性子の遮蔽計算を想定して作成された中性子輸送ベンチマーク問題³⁾（通称小林ベンチマーク問題）を用いて、CBG の中性子遮蔽計算への適用性を確認する。併せて、局所的に中性子源が置かれた体系を（離散座標法に基づく）中性子輸送計算コードで計算する際に発生する射線効果（Ray effect）を低減するために開発した方法についても述べる。

2. 小林ベンチマーク問題

今回の検討に用いたのは、1996年に小林が経済協力開発機構・原子力機関(OECD/NEA)にて提案した三次元の放射線輸送ベンチマーク問題(通称、小林ベンチマーク問題)³⁾である。本章ではベンチマーク問題の詳細と与えられた参照解について説明する。

2.1 ベンチマーク問題の詳細

本ベンチマーク問題には、三つの単純な体系が与えられており、各々の体系は中性子源領域、ボイド領域、遮蔽体領域の三種類の領域で構成されている。なお、遮蔽体領域に対しては二種類の断面積セット(中性子が完全に吸収されるものと、50%が散乱されるもの)が与えられている。

体系図を Figs. 2.1.1, 2.1.2 に示す。体系 1 は正方ボイドを、体系 2 はボイドダクトを、体系 3 はドッグレッグ・ボイドダクトを、それぞれ含んでいる。それぞれの体系に対して中性子束を計算すべき位置のセットが与えられており、体系 1, 3 に対しては 3 つ、体系 2 に対しては 2 つの位置セットが与えられている。これらの位置セットはアルファベット A, B, C で識別される。位置セットの詳細について Table 2.1.1 に示す。また、遮蔽体領域を完全吸収とした問題は i、50% 散乱とした問題は ii と識別される。結果的に、ベンチマークの各問題は、体系、中性子束を評価する位置のセット、遮蔽体領域の媒質に応じて定義され、例えば、ボイドダクトを含む体系 2 の位置セット B における中性子束を計算する問題で遮蔽体領域が 50% 散乱の場合には「問題 2Bii」と記述する。

Table 2.1.1 Position set

Problem	Position set	Position
1	A	Along y-axis at $x=z=5\text{cm}$
	B	Along diagonal line
	C	Along x-axis at $y=55\text{cm}$ and $z=5\text{cm}$
2	A	Along y-axis at $x=z=5\text{cm}$
	B	Along x-axis at $y=95\text{cm}$ and $z=5\text{cm}$
3	A	Along y-axis at $x=z=5\text{cm}$
	B	Along x-axis at $y=55\text{cm}$ and $z=5\text{cm}$
	C	Along x-axis at $y=95\text{cm}$ and $z=35\text{cm}$

断面積と中性子源強度の数値データを Table 2.1.2 に示す。

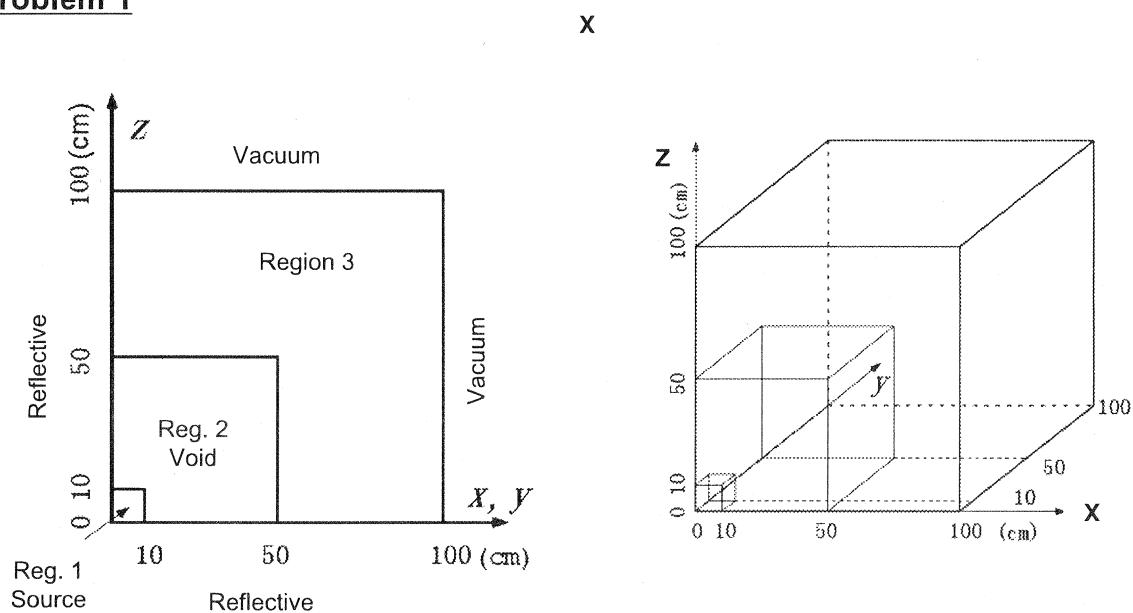
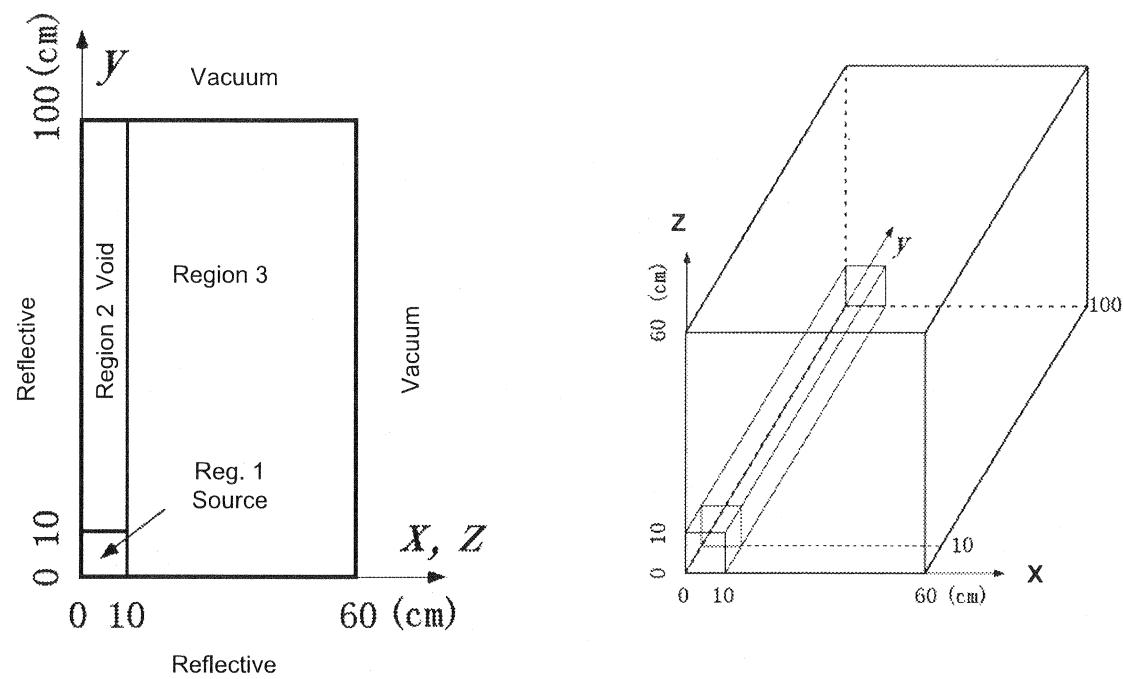
Problem 1**Problem 2**

Fig. 2.1.1 Specifications of Kobayashi benchmark problems (Problems 1 and 2)³⁾

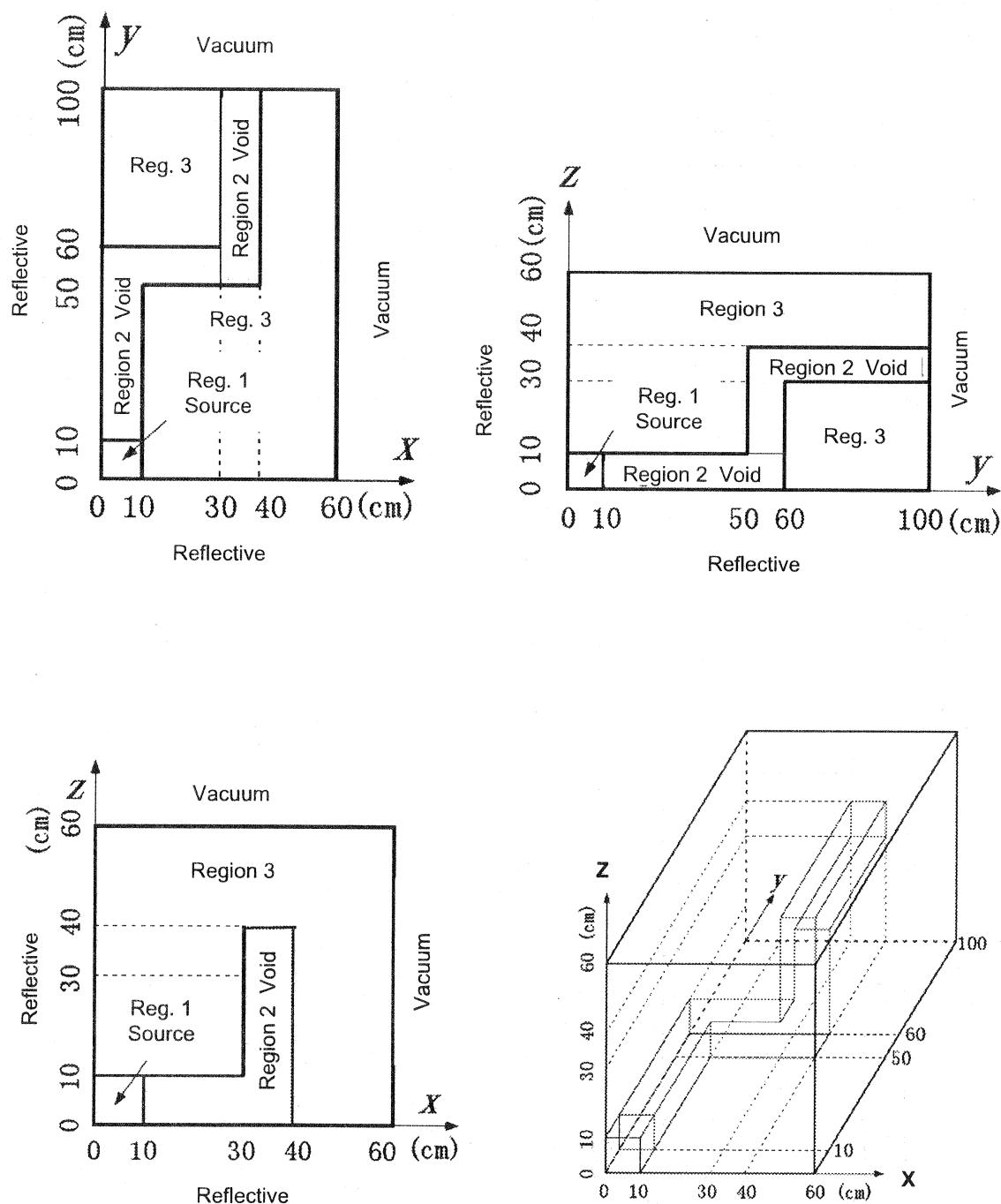


Fig. 2.1.2 Specifications of Kobayashi benchmark problems (Problem 3)³⁾

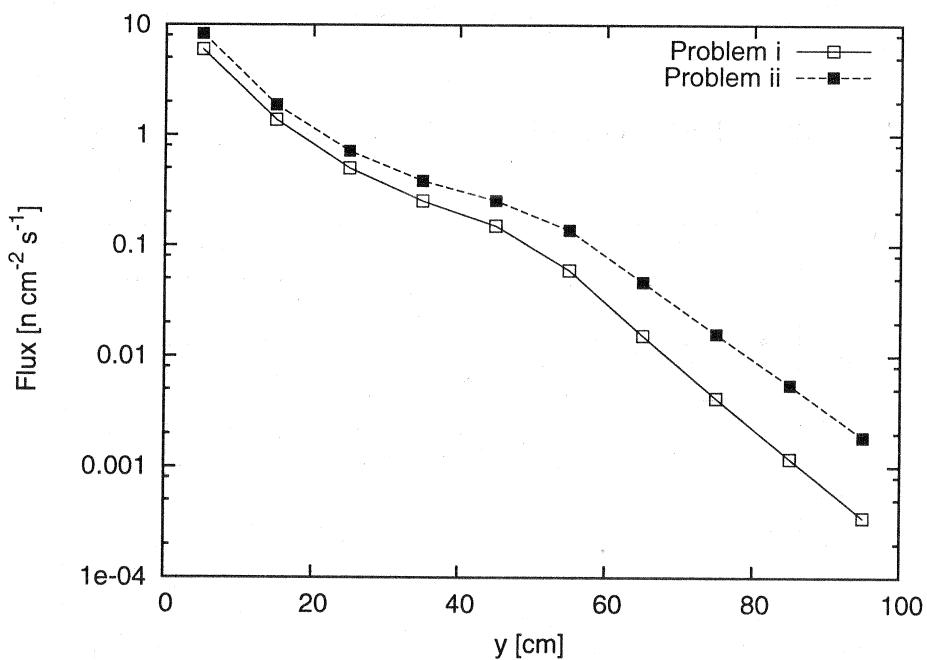
Table 2.1.2 Cross section and neutron source strength

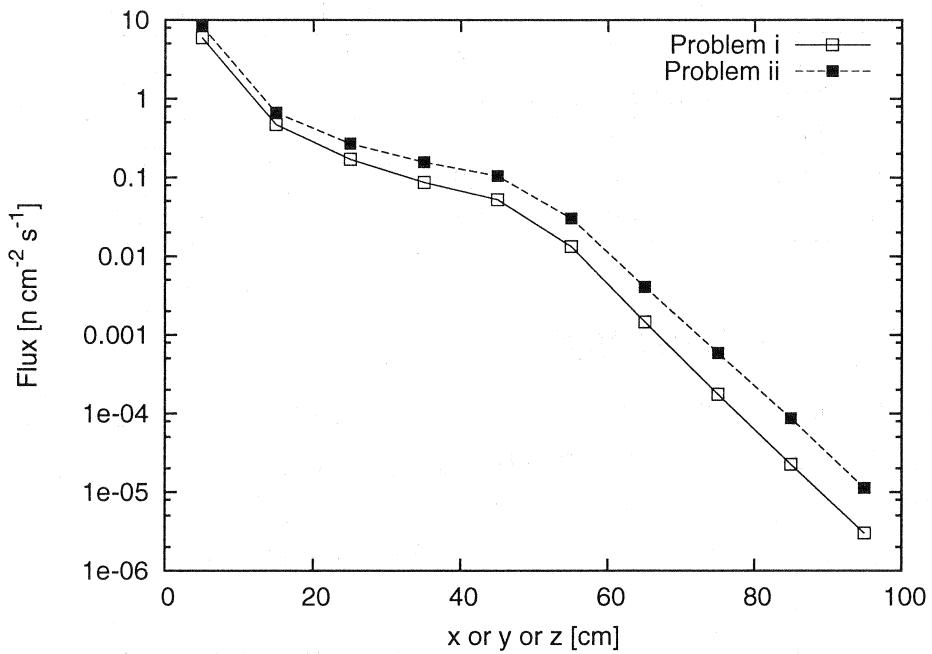
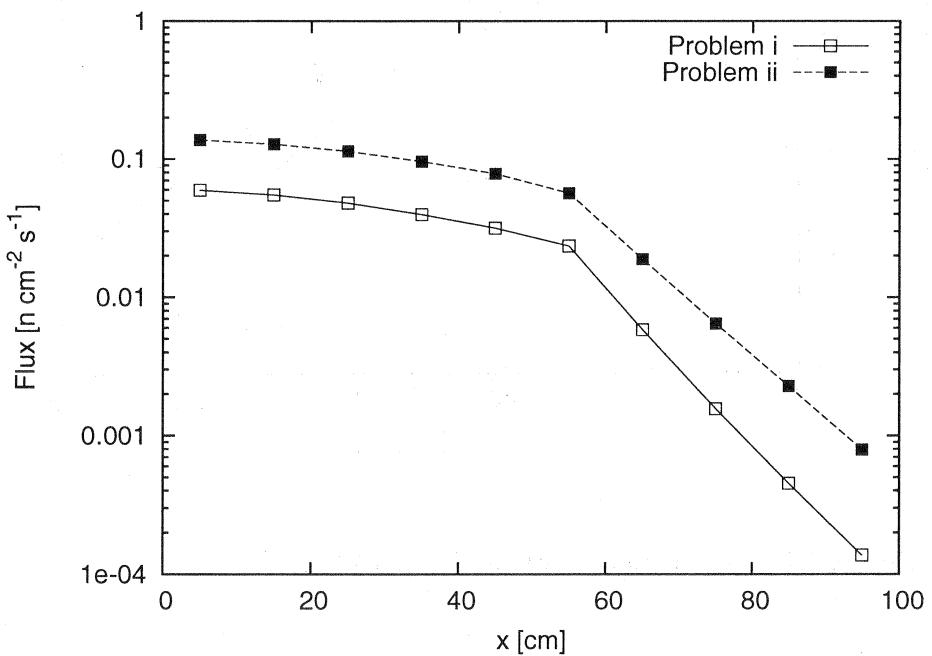
Region	S	Σ_t	Σ_s	Problem i	Problem ii
	(n cm ⁻³ s ⁻¹)	(cm ⁻¹)	(cm ⁻¹)		
1 (Source)	1	0.1	0	0.05	
2 (Void)	0	10^{-4}	0		0.5×10^{-4}
3 (Shield)	0	0.1	0	0.05	

2.2 ベンチマーク問題の参照解

本ベンチマーク問題の参照解としては、問題iに対しては数値的に計算した厳密解が、問題i, iiに対してはモンテカルロコード GMVP で得られた解が与えられている³⁾。今回の検討では GMVP による解を参照解として用いることとした。

それぞれの問題に対する参照解を Fig. 2.2.1 から Fig. 2.2.8 に示す。

**Fig. 2.2.1 Reference solution for problem 1A ($x=z=5\text{cm}$)**

Fig. 2.2.2 Reference solution for problem 1B ($x=y=z$)Fig. 2.2.3 Reference solution for problem 1C ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$)

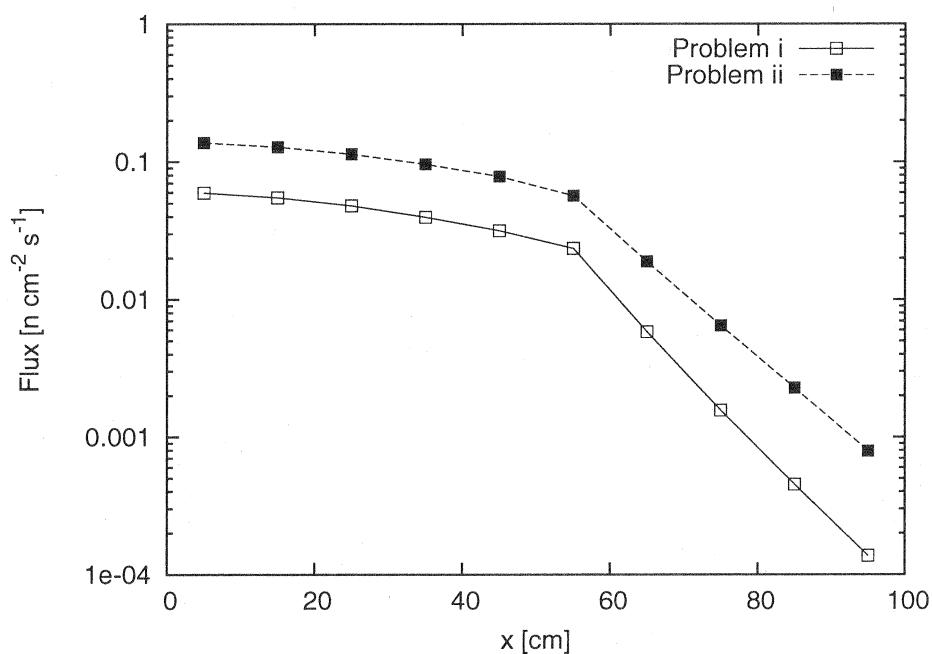


Fig. 2.2.4 Reference solution for problem 2A ($x=5\text{cm}$, $z=5\text{cm}$)

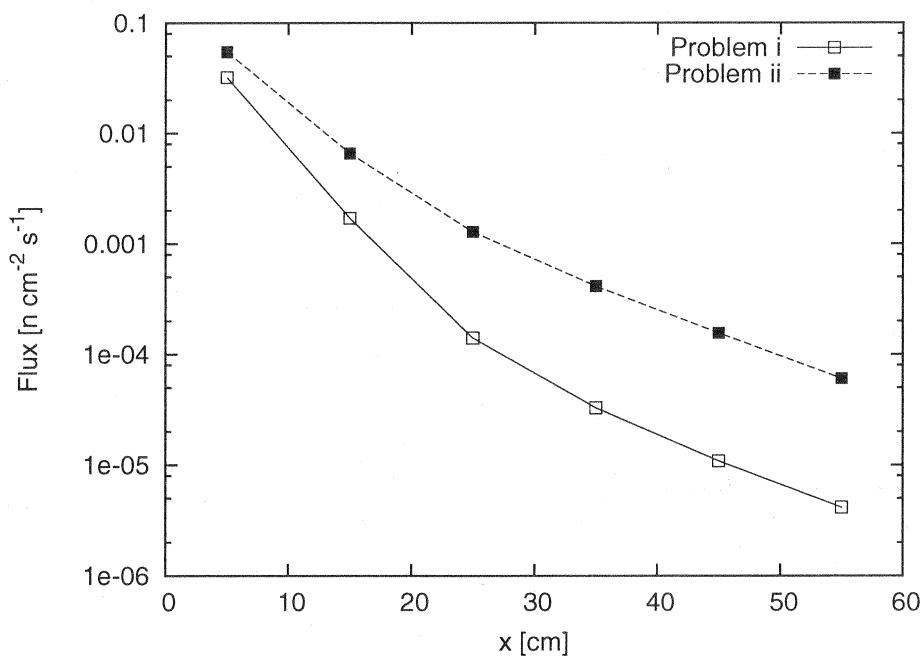


Fig. 2.2.5 Reference solution for problem 2B ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$)

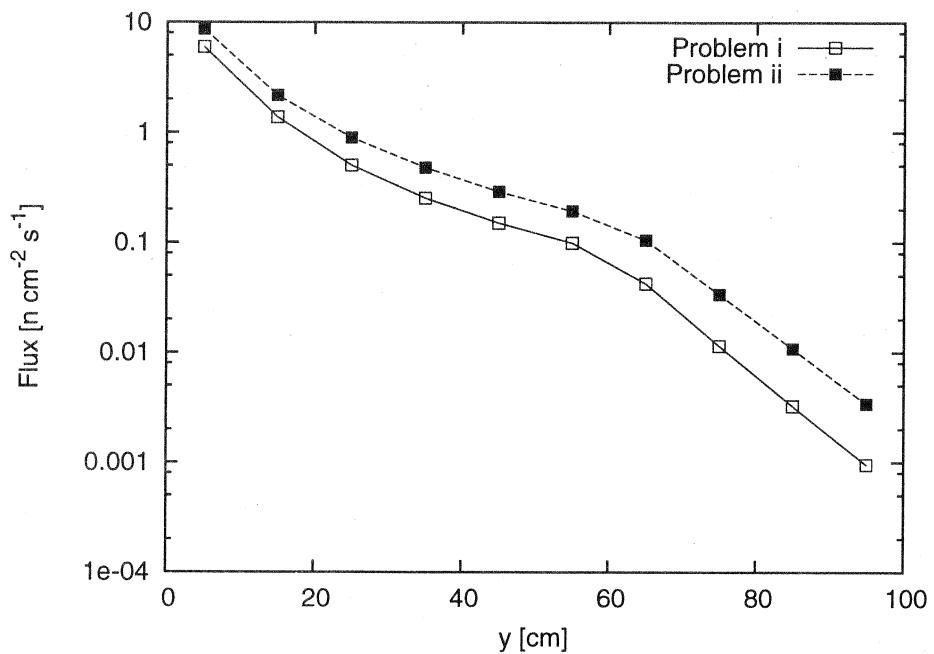


Fig. 2.2.6 Reference solution for problem 3A ($x=5\text{cm}$, $z=5\text{cm}$)

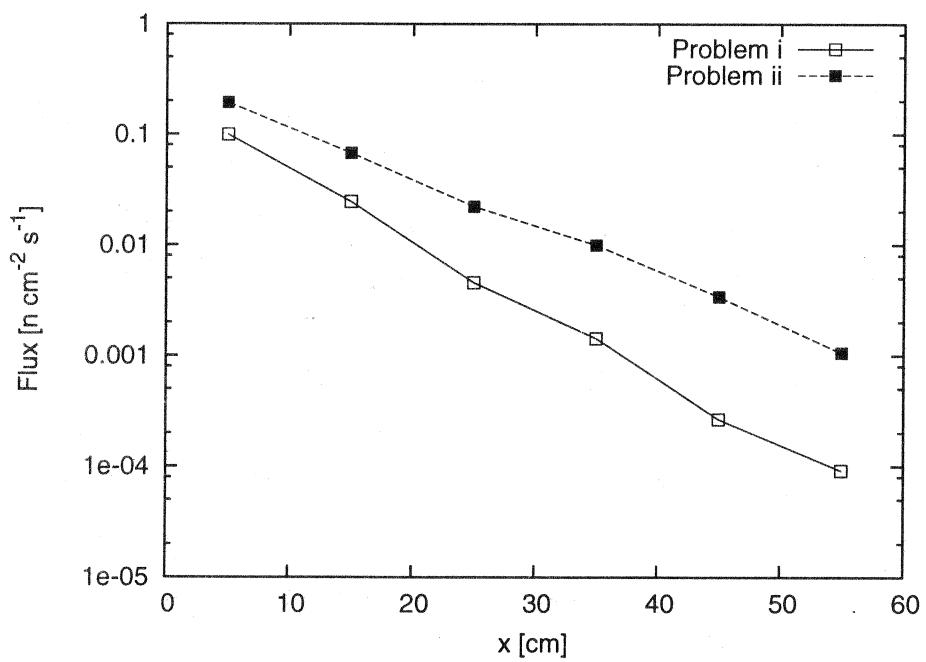


Fig. 2.2.7 Reference solution for problem 3B ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$)

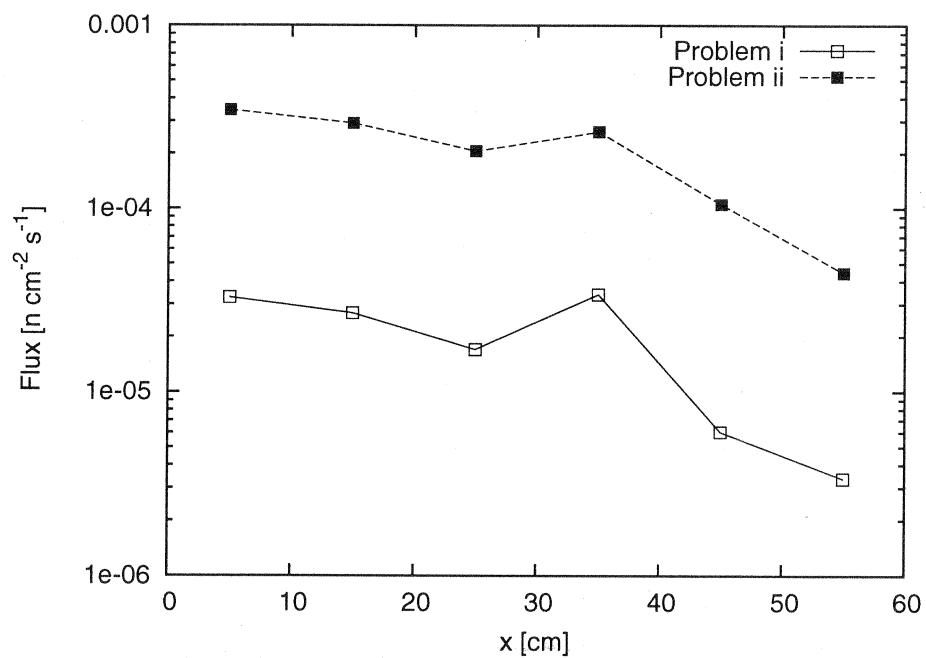


Fig. 2.2.8 Reference solution for problem 3C ($y=95\text{cm}$, $z=35\text{cm}$)

3. 中性子輸送計算コードシステムCBG

CBGは原子炉の核計算に関する技術開発のために作成されたコードシステムであり、中性子輸送計算をはじめとした原子炉炉心計算のための種々の機能が実装されている。本検討では、中性子輸送方程式のための数値計算ソルバーのひとつであるSNTを用いた。SNTはデカルト座標系で定義される中性子輸送方程式を離散座標法に基づいて解くソルバーである。空間の離散化はダイアモンド差分(negative flux fix-up)に基づいて行う。

3.1 角度求積セット

離散座標法による中性子輸送計算では、使用する角度求積セットの種類とその次数が計算精度に大きく影響する。

SNTは種々の角度求積セットを利用することが可能である。本検討で用いた求積セットは以下の通りである。なお、求積セットを論ずる上で必要となる事項については付録としてまとめた。

- LQ_N：いわゆる階対称(level symmetric)セット。全ての軸について離散点が対称であるため、計算対象の軸をどのように設定しても計算値が同一となることが保証される。離散点と重みは、角度中性子束の極角方向に関する余弦 μ に対する依存性が $\mu \in (-1, 1)$ の区間において μ の多項式で記述できると仮定した場合に精度の高い求積ができるよう、決定される。20次より高次のセットは一部の重みが負の値をとってしまうため定義することが出来ない。
- Rec.DP_NT_N：極角方向と方位角方向についての積分をそれぞれの方向についての積分の積として表現するセット(product quadrature)であり、極角方向についてはdouble Gaussianセット、方位角方向についてはChebyshevセットを用いる。Chebyshevセットの離散点数は極角に依存しない一定数とするため、各オクタントにおける離散点の配置が長方形形状となる。本報告書では、次数 N は $\mu \in (0, 1)$ におけるdouble Gaussianセットの離散点数、かつ $\eta \in (0, 1)$ ($\xi \in (0, 1)$) におけるChebyshevセットの離散点数と定義する。
- Tri.DP_NT_N：Rec.DP_NT_Nと、Chebyshevセットの離散点数が極角に依存する点で異なるセット。本報告書では、次数 N は $\mu \in (0, 1)$ におけるdouble Gaussianセットの離散点数とし、Chebyshevセットの離散点数は、極角に対する離散点が μ_j の降順で i 番目の場合に i とする。従って、各オクタントにおける離散点の配置は三角形状となる。
- EO_N⁴⁾：LQ_Nでは $\mu = 0$ (もしくは $\eta = 0, \xi = 0$)において角度中性子束が不連続となる場合に精度の良い求積が難しい。そのような問題に対処するため開発された求積セットであり、各オクタント毎で精度の良い求積ができるように離散点と重みが定義されている。

- $DP_N Nx N^4$ ⁴⁾: Product quadrature であり、 EO_N の検証の目的で作成された求積セットである。極角方向については double Gaussian セット、方位角方向については方位角 ϕ に対して Gauss-Legendre セットを適用している。

Table 3.1.1 に各求積セットの各次数における全離散点数をまとめた。

Table 3.1.1 Number of discrete points in various angular quadrature sets

N	LQ_N / EO_N	$Tri.DP_N T_N$	$Rec.DP_N T_N / DP_N Nx N$
10	120	440	800
12	168	624	1152
14	224	840	1568
16	288	1088	2048
18	360	1368	2592
20	440	1680	3200
22		2024	3872
24		2400	
26		2808	
28		3248	
30		3720	

3.2 射線効果への対処

今回の検討に用いた小林ベンチマーク問題のように、局所的に存在する中性子源からの中性子輸送を離散座標法で計算する場合には射線効果が問題となる。射線効果を回避、もしくは低減するための方法として、角度分割を詳細化した（次数を増加させた）分点セットを用いる、というものが挙げられる。しかしこの場合には、分点数の増大に伴う計算時間の増大が問題となる。

射線効果を回避するもうひとつの方法として、第一衝突源法 (First collision source method, FCS 法)⁵⁾ がよく知られている。これは、中性子源からでた中性子がはじめて媒質の原子と衝突（反応）してそこで生成する二次中性子（すなわち第一衝突源）を計算し、この第一衝突源を源とした計算を別途行う、という手法である。

解くべき中性子輸送方程式は以下のように記述される。

$$L\phi = S\phi + Q \quad (3.1)$$

ここで、 L は漏洩と衝突の演算子、 S は散乱による生成の演算子、 Q は中性子源を示す。FCS 法ではこれを以下のように分けて記述する。

$$L\phi_1 = Q, \quad (3.2)$$

$$L\phi_2 = S\phi_2 + S\phi_1 \quad (3.3)$$

これらを解くことにより、中性子束 ϕ は

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (3.4)$$

として計算することが出来る。

式(3.2)で示される第一衝突源の計算では、計算体系の全ての媒質を完全吸収とみなした場合の角度中性子束の空間分布が必要となるが、それは単純な指數関数の積分式で与えられる。FCS 法ではこの積分計算を射線追跡法 (Ray tracing) により数値的に行う。式(3.3)の計算は、中性子源の分布が空間的に広がっているため射線効果が現れにくくなり、その結果、通常の離散座標法の輸送計算で行うことができる。

FCS 法の有効性は広く知られているが、これを離散座標法コードに導入するためには、離散座標法とは全くアルゴリズムの異なる計算ルーチンを組み込まなければならないため、手間を要するという問題がある。

そこで、以上の点を踏まえて、式(3.2)を射線追跡法ではなく詳細な（次数を増加させた）角度分点の離散座標法で計算するという方法を考案した。この方法では、式(3.2)の計算は全ての媒質を完全吸収とみなして行うため、自群散乱源に関する内部反復が不要となり、計算を効率的に行うことが可能となる。本報告書ではこの方法を「多段階離散座標法（多段階 Sn 法）」と呼称することとする。

また、式(3.3)を解く際にも射線効果を考慮しなければならない場合がある。そのような場合には以下のように、三段階の離散座標輸送計算を行って対処する。

$$L\phi_1 = Q, \quad (3.5)$$

$$L\phi_2 = S\phi_1, \quad (3.6)$$

$$L\phi_3 = S\phi_3 + S\phi_2 \quad (3.7)$$

その結果、中性子束は $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ として計算される。ここでは、式(3.5)(3.6)の計算は、詳細角度分点で行う。

本報告書では、遮蔽体領域が 50% 散乱媒質の場合（問題 ii）に対して、詳細角度分点による計算、多段階 Sn 法による計算をそれぞれ行い、多段階 Sn 法の有効性を示す¹。なお、式(3.2)(3.3)に基づく計算を「二段階 Sn 法」、式(3.5)(3.6)(3.7)に基づく計算を「三段階 Sn 法」とそれぞれ区別して呼称する。

¹ 遮蔽体領域が完全吸収の場合には、遮蔽体内で散乱が生じない（散乱源が無い）ため、多段階 Sn 法を適用することは出来ない。

4. 結果

4.1 遮蔽体領域が完全吸収媒質の場合（問題 i）

本節では、遮蔽体領域を完全吸収媒質とした問題（問題 i）に対する計算結果を示す。はじめに、次数の上限が存在する LQ_N 、 EO_N 求積セットを用いて、射線効果が現れやすいと報告されている⁶⁾ 問題 1Ci（正方ボイド）を計算した。Fig. 4.1.1 に結果（参照解に対する比）を示す。

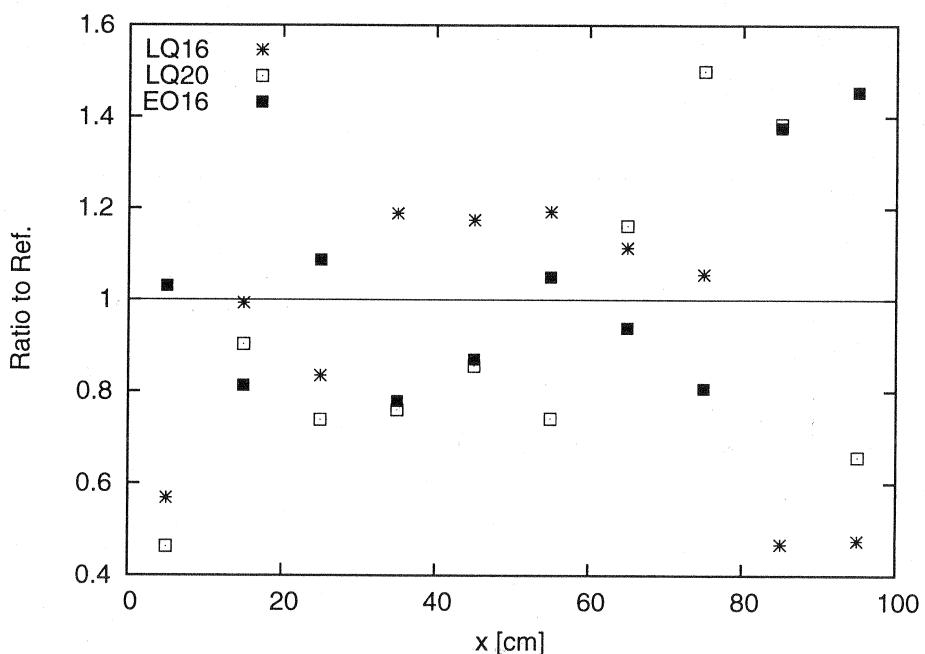


Fig. 4.1.1 Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $LQ_N \& EO_N$)

この図から明らかなように、 LQ_N 、 EO_N のいずれのセットを用いても、全ての点について中性子束の参照解を 20%以内で再現することは出来なかった。従って、以降の計算では、次数の上限が存在しない他の求積セット（Rec_DPN_TN、Tri_DPN_TN、DP_NNxN）を用いることとした。

問題 1i (正方ボイド) に対する求積セットを変えた場合の計算結果を、Fig. 4.1.2 から Fig. 4.1.10 に示す (図中の N は求積セットの次数を示す)。

問題 1Aiにおいては、Fig. 4.1.2 から Fig. 4.1.4 で示すように、全ての求積セットが次数を増加することにより参照解を 20%以内で再現出来ていること、 $DP_N NxN$ セットが比較的低い次数で参照解を再現することが分かる。

問題 1Biにおいては、Fig. 4.1.5 から Fig. 4.1.7 で示すように、計算結果の求積セット次数に対する依存性が大きく現れる。Rec_ $DP_N T_N$ セット、Tri_ $DP_N T_N$ セットは次数を増加することにより参照解を 20%以内で再現するが、 $DP_N NxN$ セットは最大次数 ($N=18$) を設定した場合でも最大で 30%程度の差異が見られる。

問題 1Ciにおいては、Fig. 4.1.8 から Fig. 4.1.10 で示すように、全ての求積セットが次数を増加することにより参照解を 20%以内で再現すること、Tri_ $DP_N T_N$ セットが比較的低い次数で参照解を再現することが分かる。

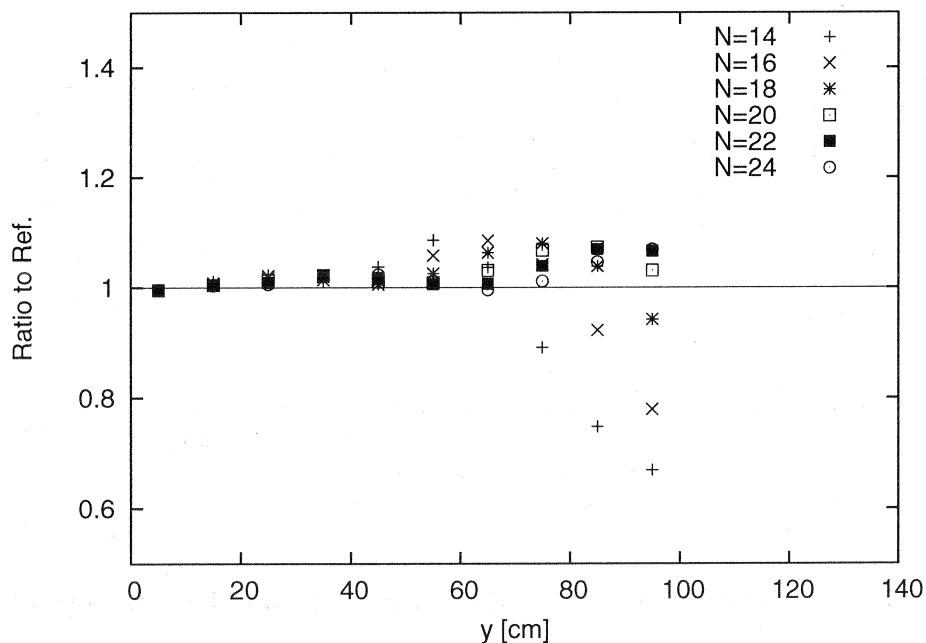


Fig. 4.1.2 Result for problem 1Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_ $DP_N T_N$)

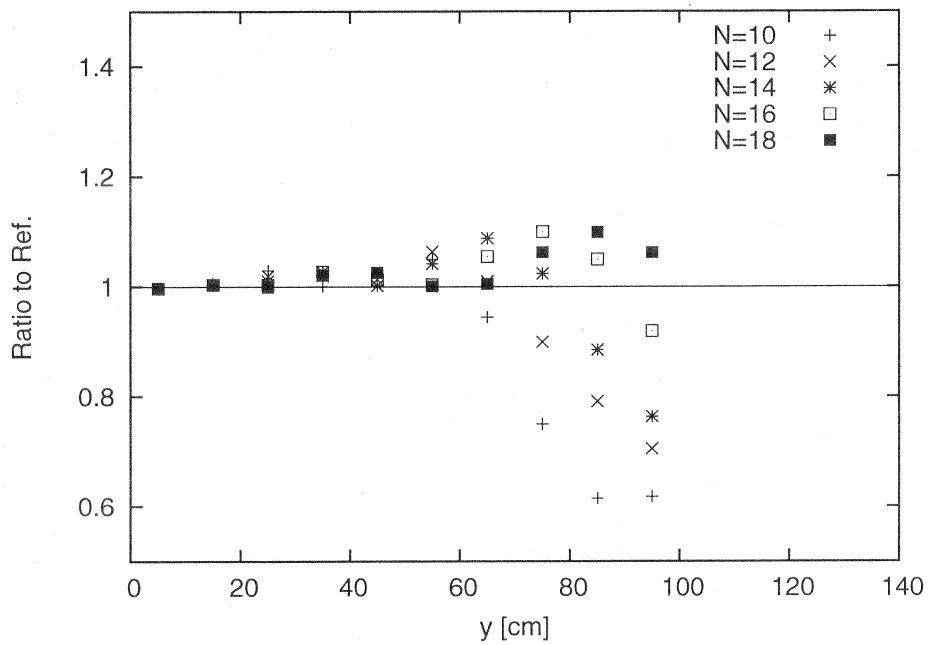


Fig. 4.1.3 Result for problem 1Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Rec _{N} DP _{N} T _{N})

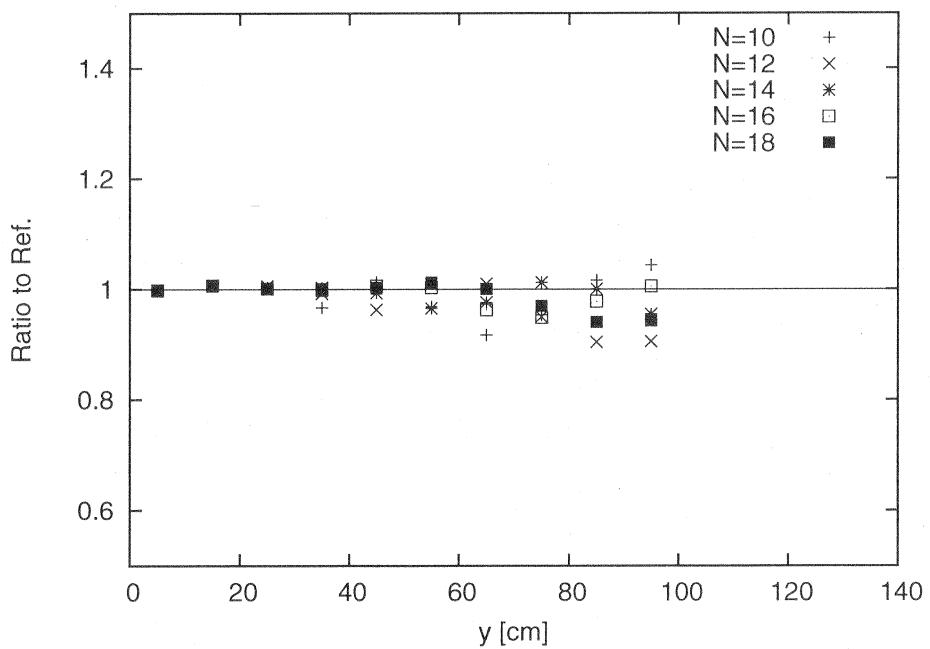
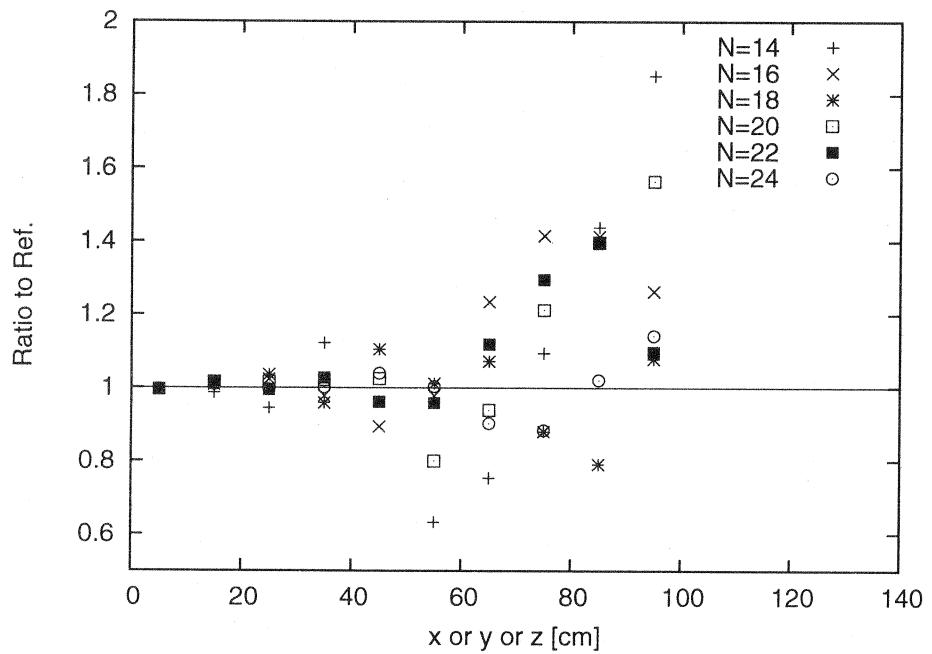
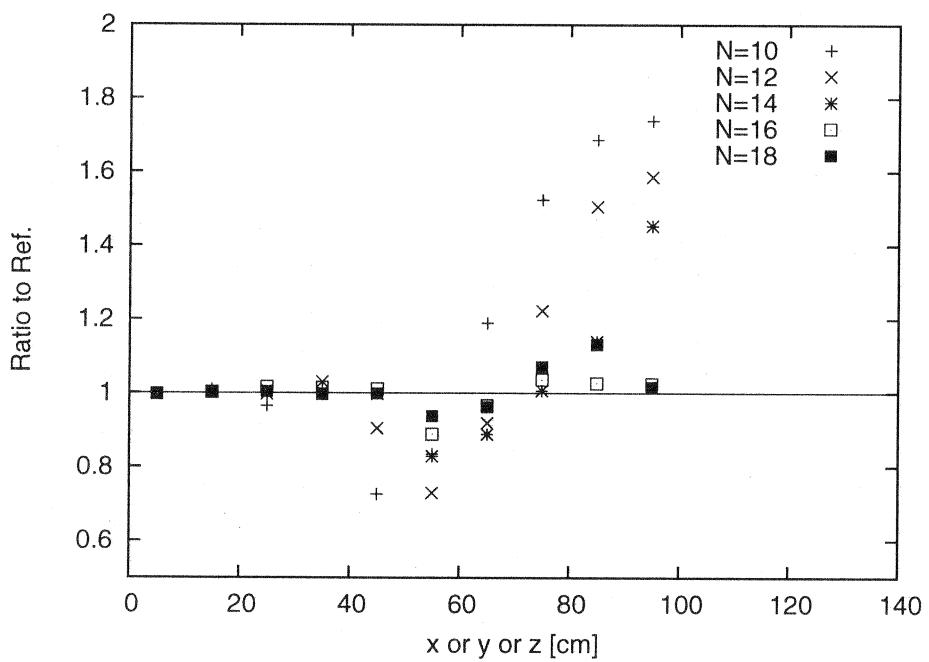


Fig. 4.1.4 Result for problem 1Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: DP _{N} NxN)

Fig. 4.1.5 Result for problem 1Bi ($x=y=z$, quadrature set: $\text{Tri_DP}_N \text{T}_N$)Fig. 4.1.6 Result for problem 1Bi ($x=y=z$, quadrature set: $\text{Rec_DP}_N \text{T}_N$)

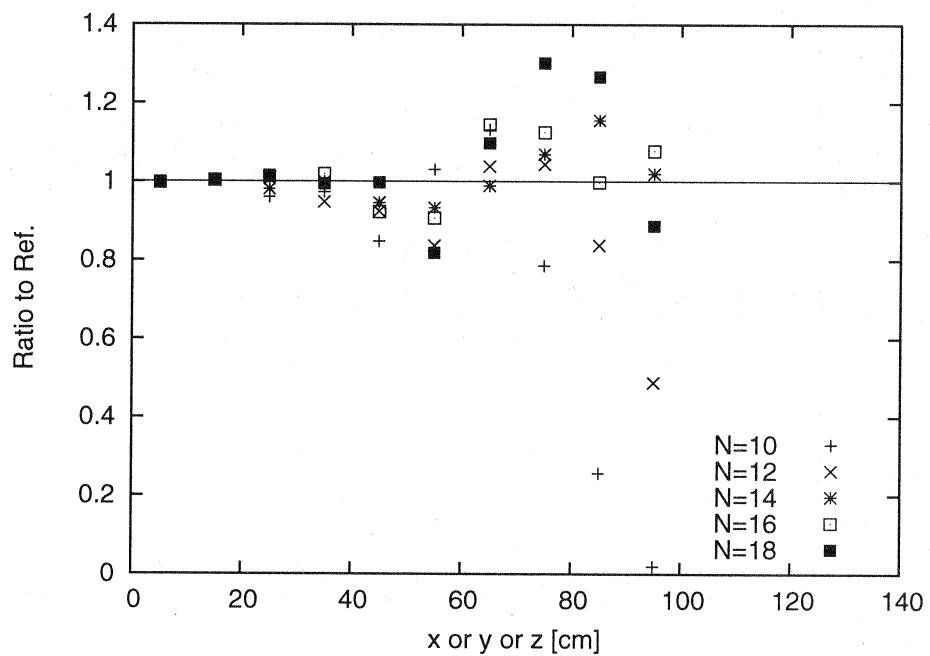


Fig. 4.1.7 Result for problem 1Bi ($x=y=z$, quadrature set: $DP_N NxN$)

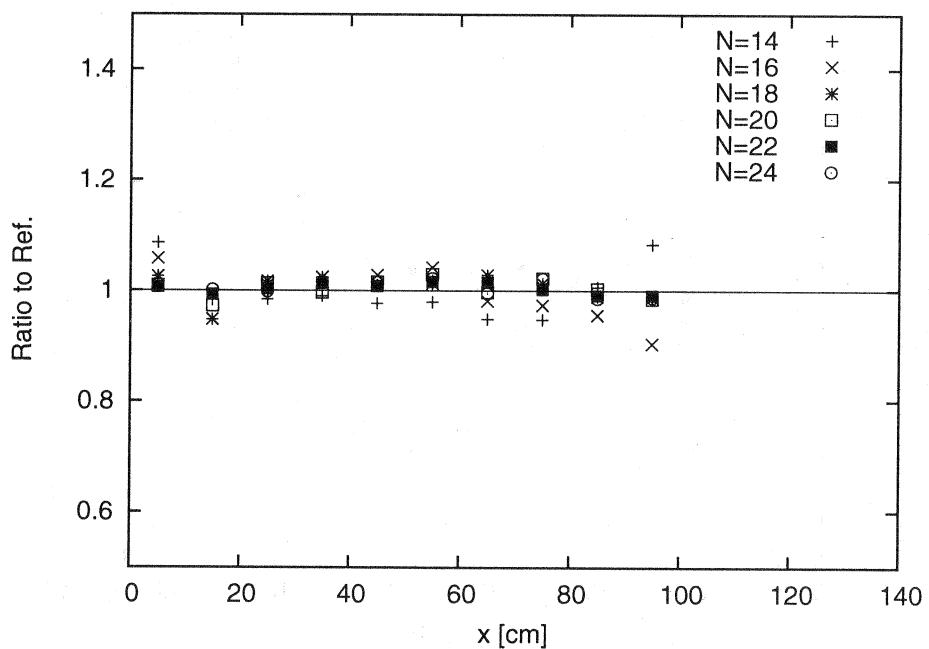
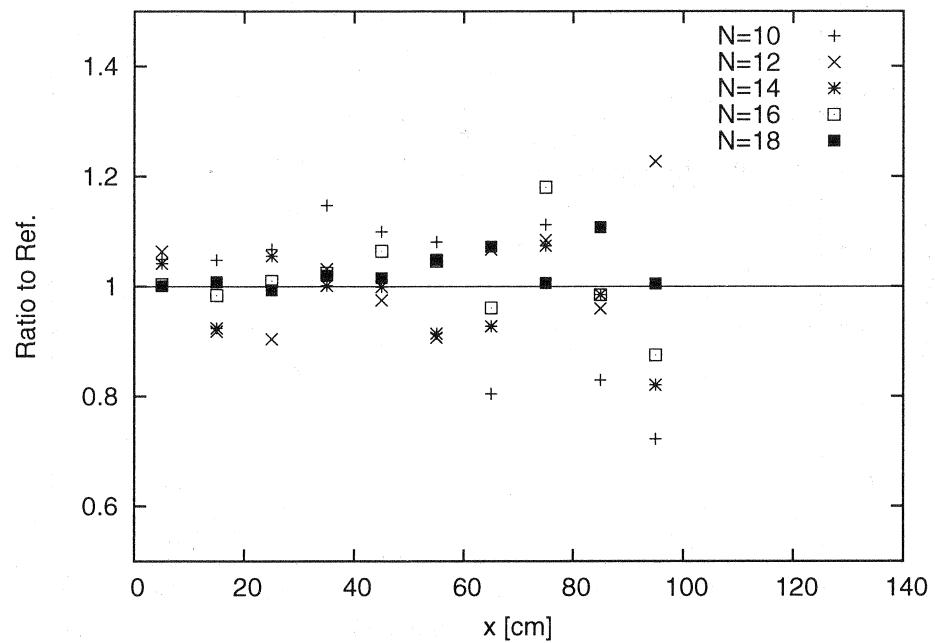
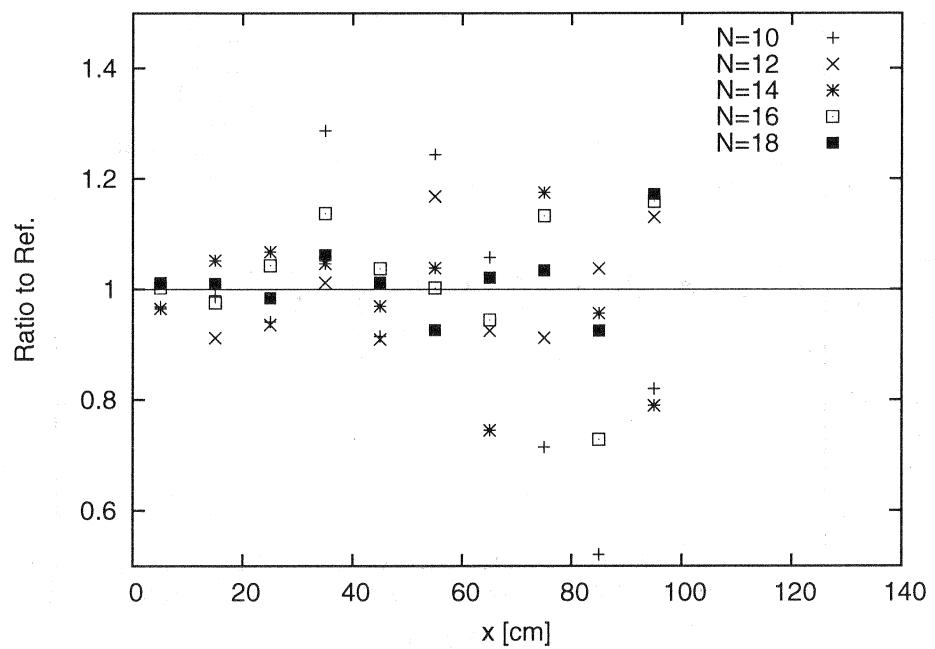


Fig. 4.1.8 Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{Tri}_-DP_NT_N$)

Fig. 4.1.9 Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{Rec_DP}_N \mathbf{T}_N$)Fig. 4.1.10 Result for problem 1Ci ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{DP}_N \mathbf{N} \times \mathbf{N}$)

問題2i（ボイドダクト）に対する求積セットを変えた場合の計算結果を、Fig. 4.1.11からFig. 4.1.16に示す。

問題2Aiにおいては、Fig. 4.1.11からFig. 4.1.13で示すように、全ての求積セットが次数を増加することにより参照解を20%以内で再現出来ていること、 $DP_N NxN$ セットが比較的低い次数で参照解を再現することが分かる。

問題2Biにおいては、Fig. 4.1.14からFig. 4.1.16で示すように、Rec_ DP_NT_N セット、Tri_ DP_NT_N セットが次数を増加することにより参照解を20%以内で再現するが、 $DP_N NxN$ セットは最大次数（N=18）を設定した場合でも最大70%程度の差異が見られる。また、Rec_ DP_NT_N セットとTri_ DP_NT_N セットの比較では、Tri_ DP_NT_N セットが参照解とより一致することが分かる。

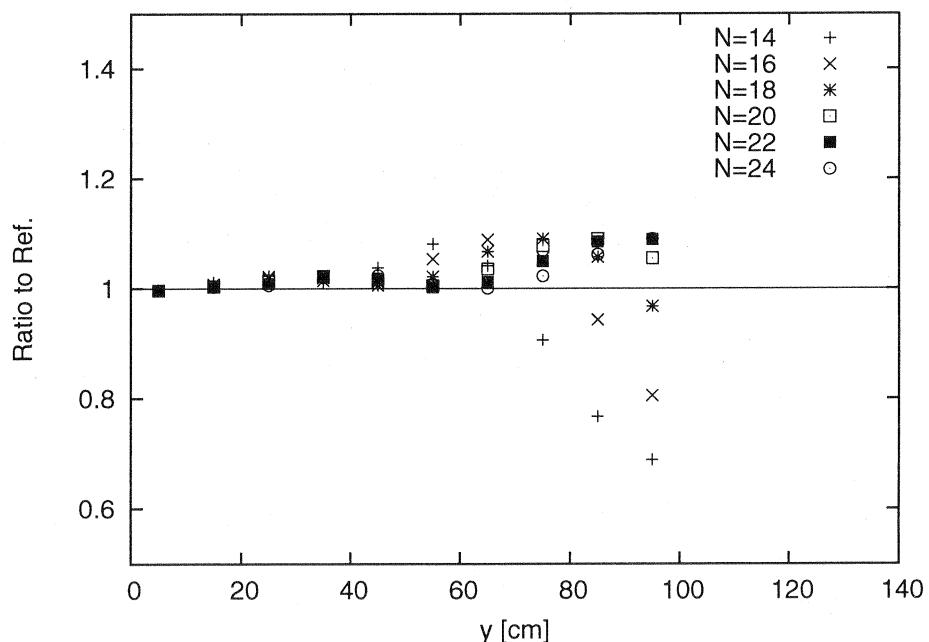
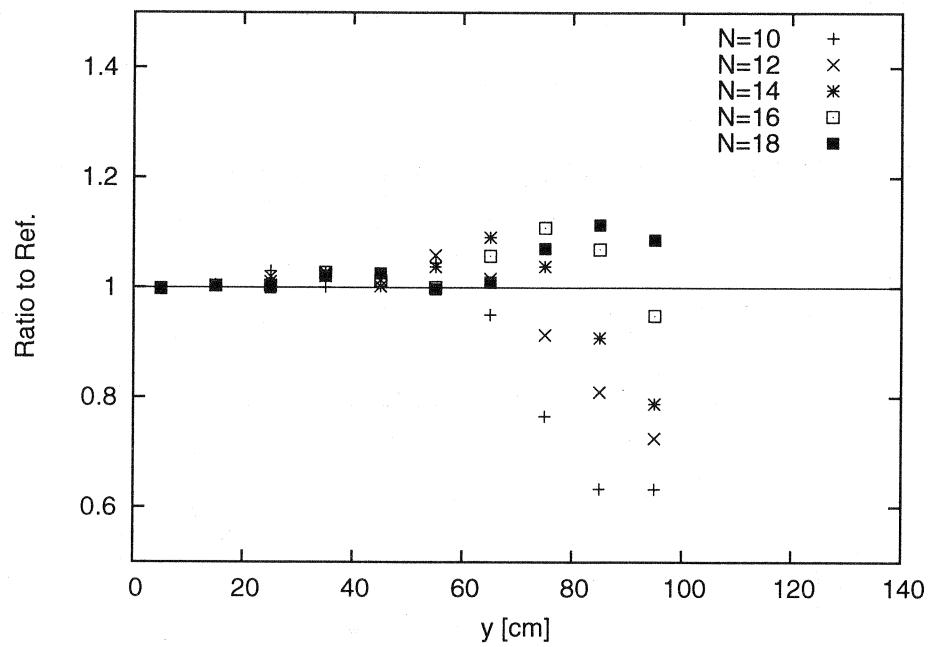
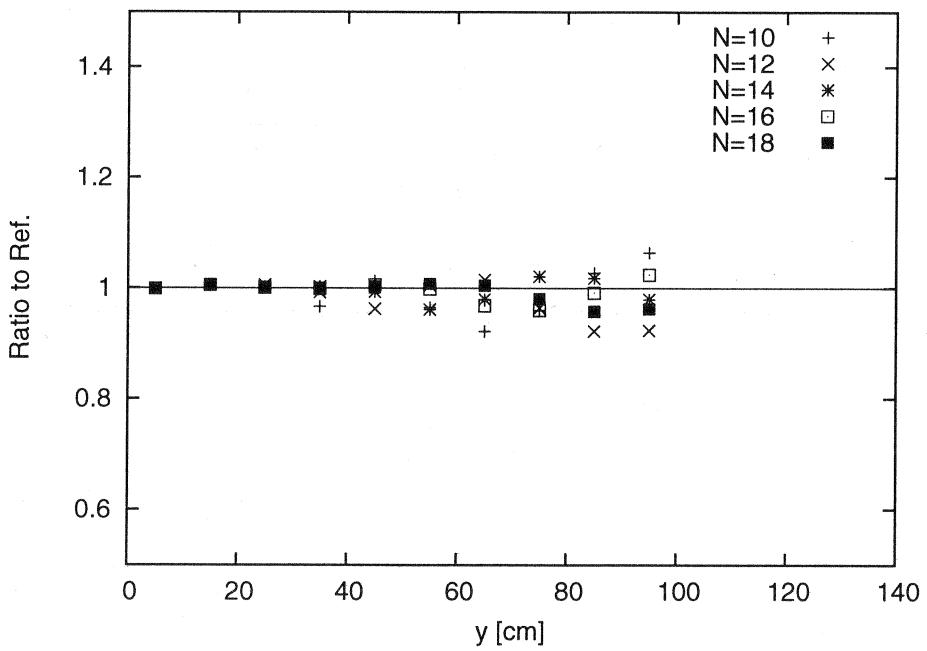


Fig. 4.1.11 Result for problem 2Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_ DP_NT_N)

Fig. 4.1.12 Result for problem 2Ai ($x=z=5$ cm, quadrature set: $\text{Rec_DP}_N\text{T}_N$)Fig. 4.1.13 Result for problem 2Ai ($x=z=5$ cm, quadrature set: $\text{DP}_N\text{N}_x\text{N}$)

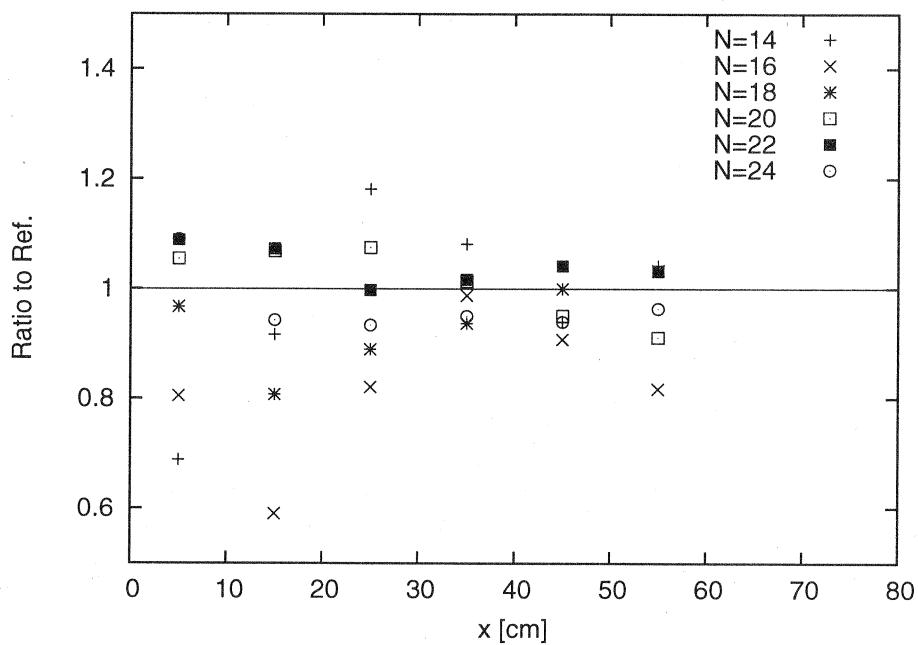


Fig. 4.1.14 Result for problem 2Bi ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{Tri}_\text{D}\mathbf{P}_N \mathbf{T}_N$)

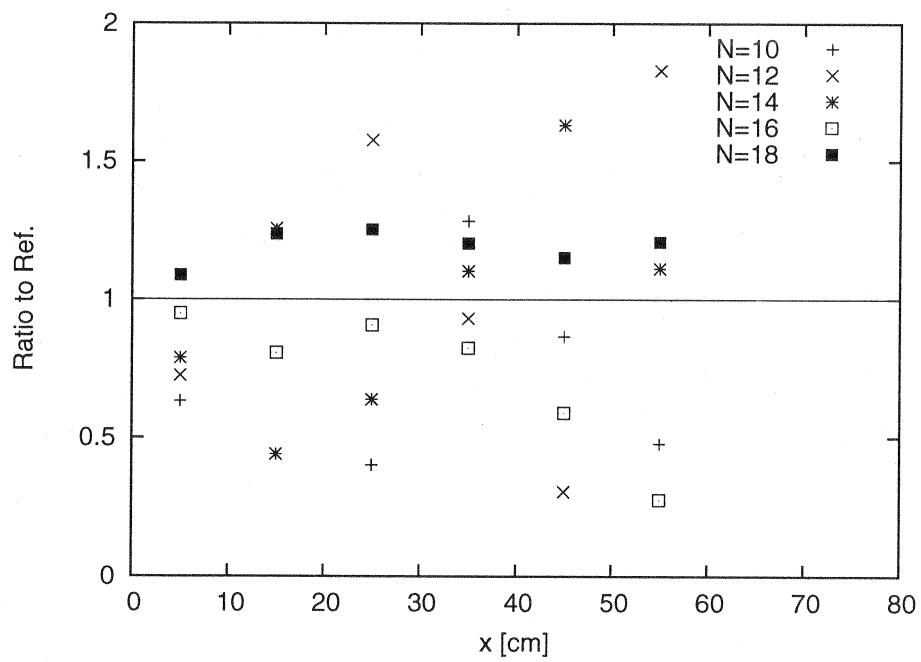


Fig. 4.1.15 Result for problem 2Bi ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{Rec}_\text{D}\mathbf{P}_N \mathbf{T}_N$)

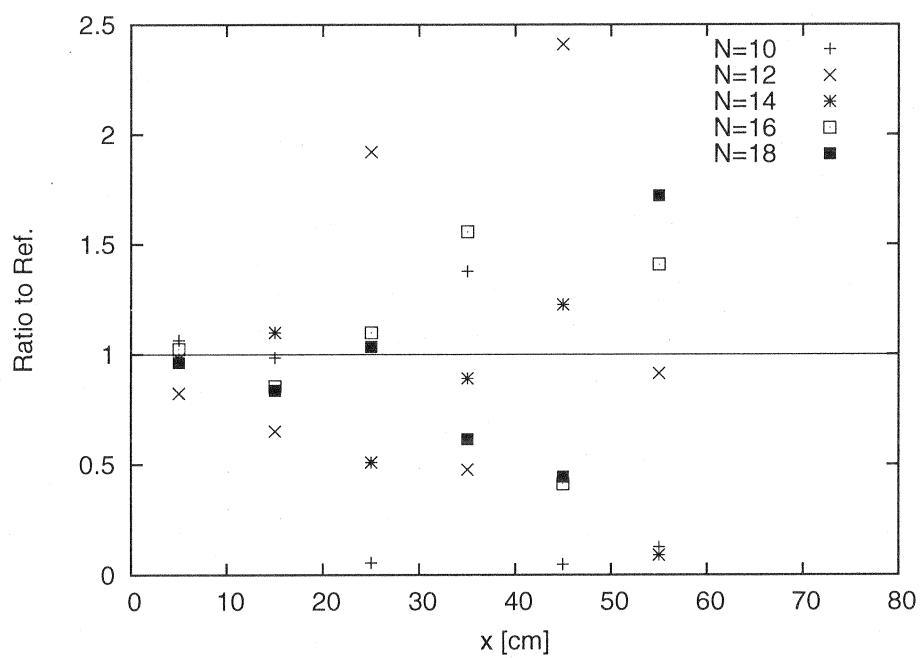


Fig. 4.1.16 Result for problem 2Bi ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{DP}_N NxN$)

問題3i（ドッグレッグ・ボイドダクト）に対する求積セットを変えた場合の計算結果を、Fig. 4.1.17からFig. 4.1.25に示す。

問題3Aiにおいては、Fig. 4.1.17からFig. 4.1.19で示すように、全ての求積セットにおいて、次数を増加することにより参照解を20%以内で再現出来ていること、 $DP_N NxN$ セットが比較的低い次数で参照解を良く再現することが分かる。

問題3Biにおいては、Fig. 4.1.20からFig. 4.1.22で示すように、Rec_ DP_NT_N セット、Tri_ DP_NT_N セットが次数を増加することにより参照解を20%以内で再現するが、 $DP_N NxN$ セットでは最大次数（N=18）を設定した場合でも最大50%程度の差異が見られる。また、Rec_ DP_NT_N セットとTri_ DP_NT_N セットの比較では、Tri_ DP_NT_N セットが格段に参照解と一致していることが分かる。

問題3Ciにおいては、これまでに設定した次数では良好な結果が得られなかつたため、次数を増加させて計算を行つた。Fig. 4.1.23からFig. 4.1.25で示すように、全ての求積セットが次数を増加することにより参照解を20%以内で再現する。

以上の結果より、遮蔽体領域が完全吸収の場合には、Tri_ DP_NT_N セットが比較的低い次数で参照解を良好に再現することが分かった。

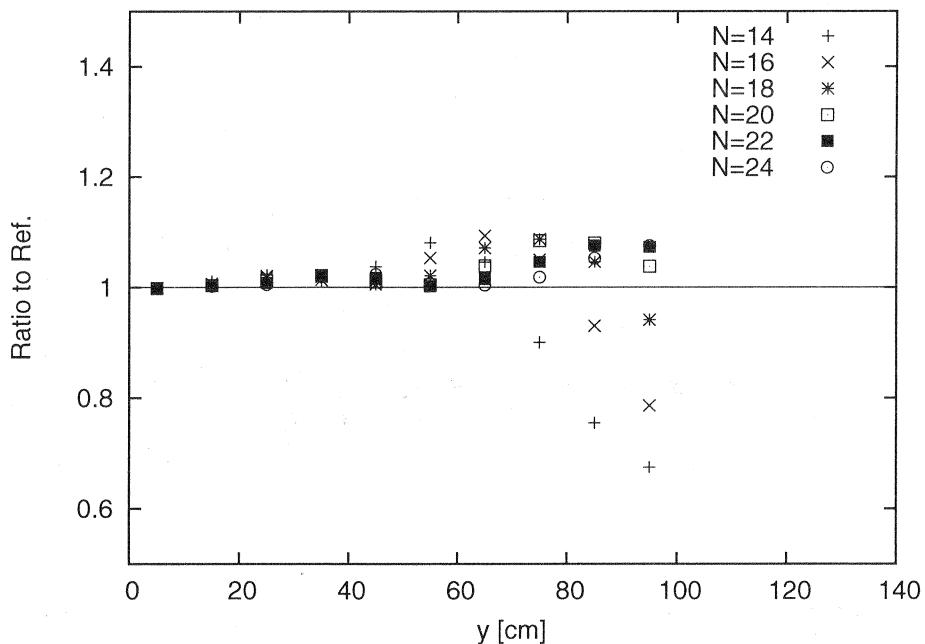
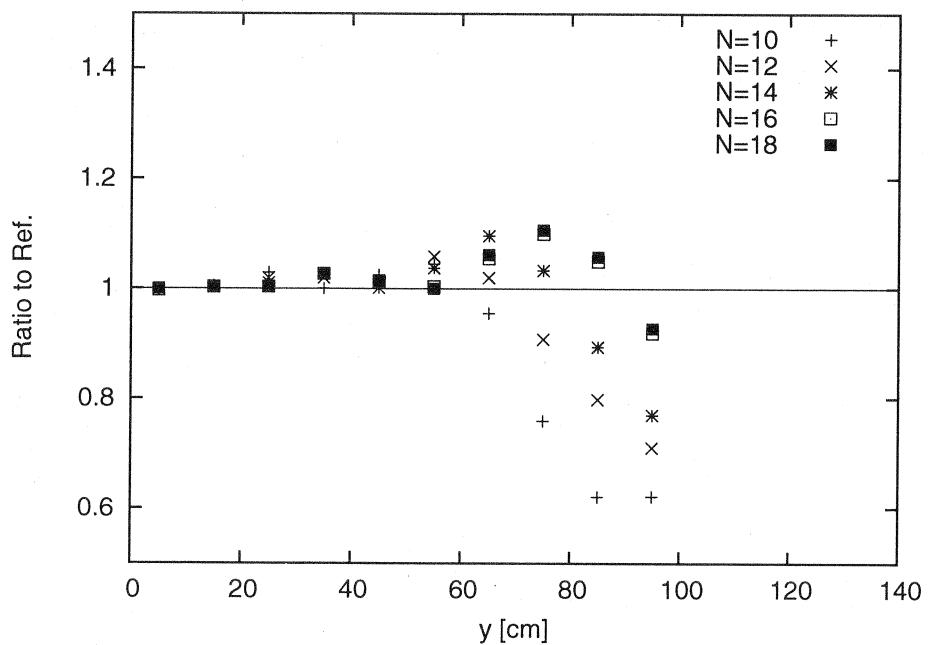
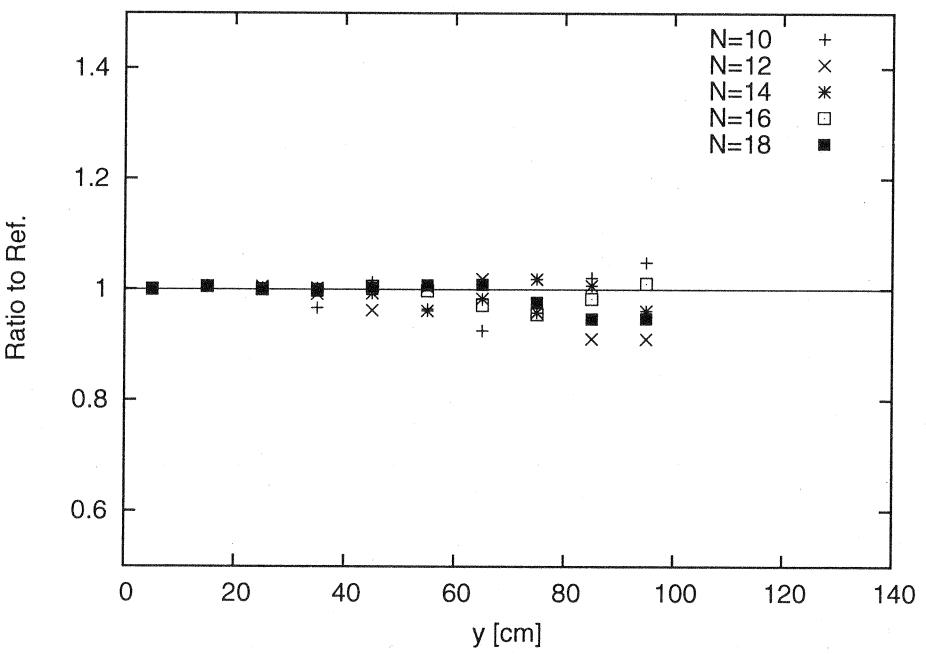


Fig. 4.1.17 Result for problem 3Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: Tri_ DP_NT_N)

Fig. 4.1.18 Result for problem 3Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{Rec-DP}_N\text{T}_N$)Fig. 4.1.19 Result for problem 3Ai ($x=z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{DP}_N\text{N}\times\text{N}$)

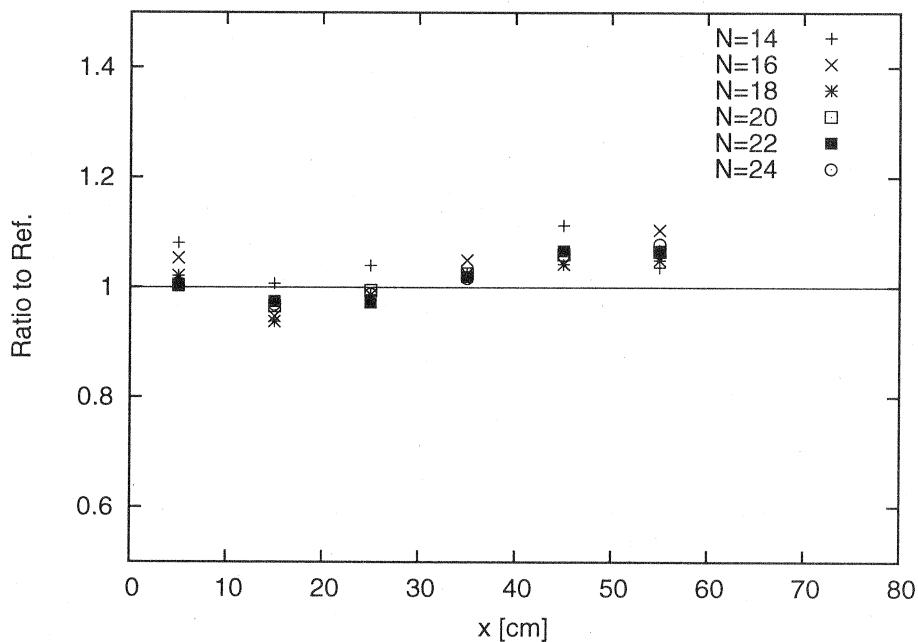


Fig. 4.1.20 Result for problem 3Bi ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, $\text{Tri-DP}_N\text{T}_N$)

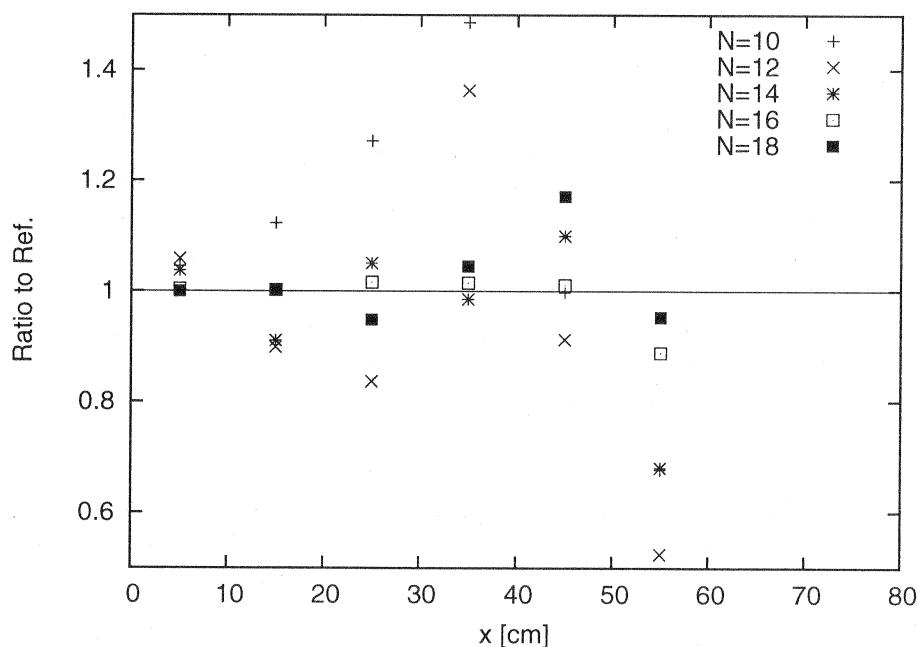
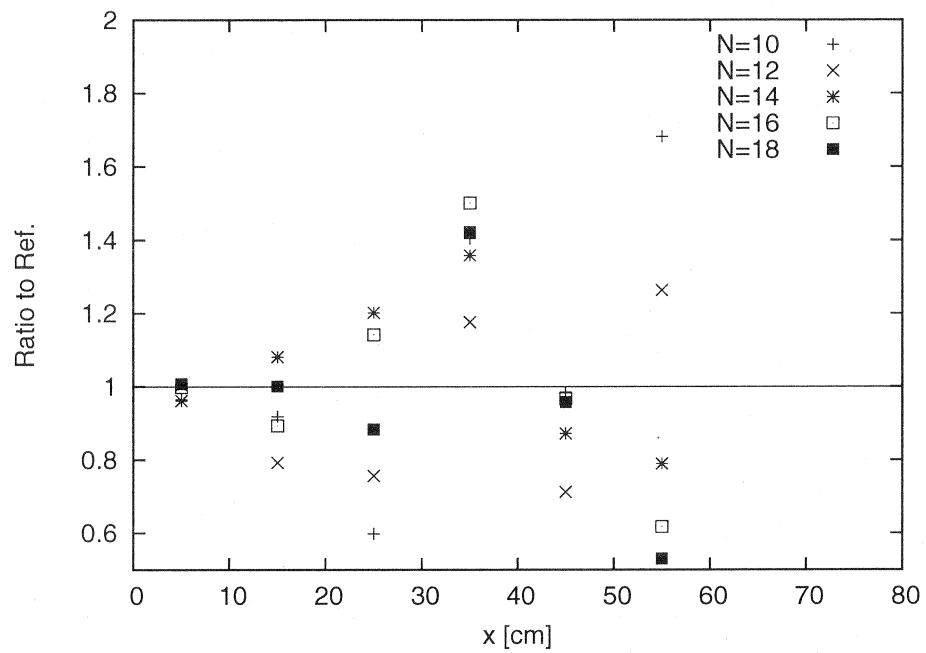
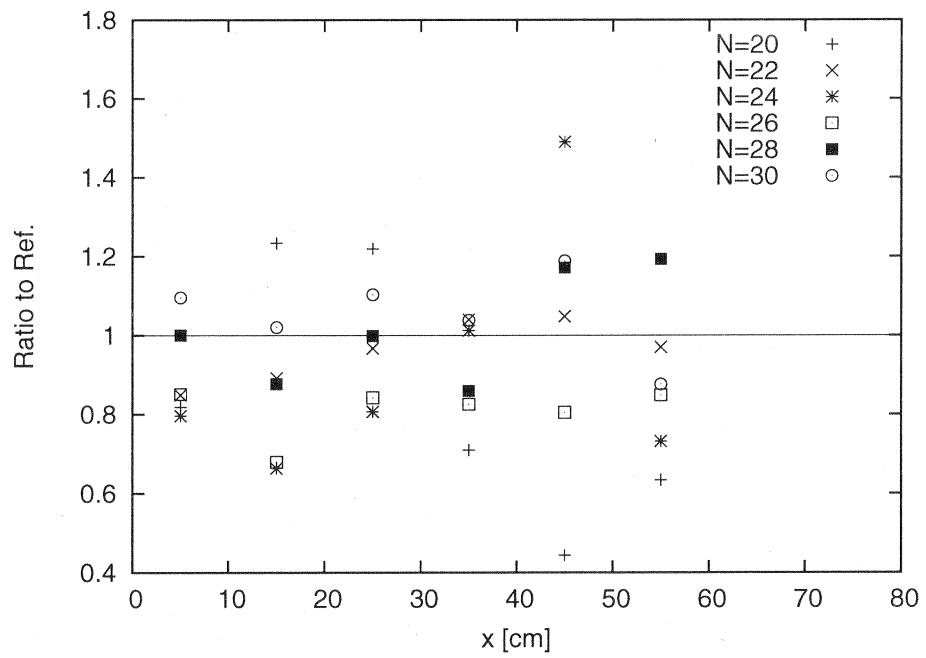


Fig. 4.1.21 Result for problem 3Bi ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: $\text{Rec-DP}_N\text{T}_N$)

Fig. 4.1.22 Result for problem 3Bi ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, quadrature set: DP_NNxN)Fig. 4.1.23 Result for problem 3Ci ($y=95\text{cm}$, $z=35\text{cm}$, quadrature set: $\text{Tri-DP}_N\text{T}_N$)

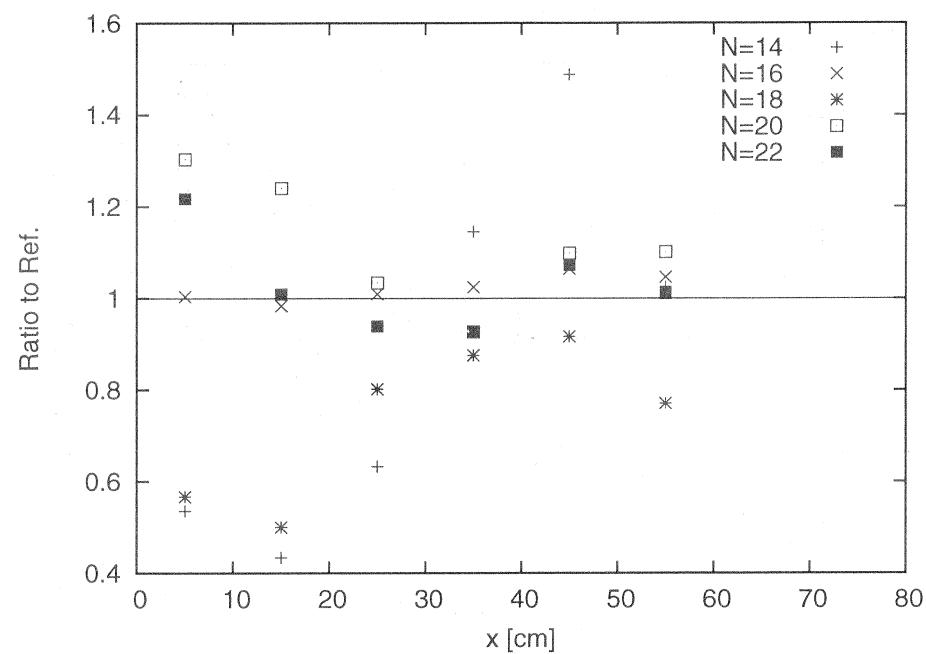


Fig. 4.1.24 Result for problem 3Ci ($y=95\text{cm}$, $z=35\text{cm}$, quadrature set: $\text{Rec-DP}_N \text{T}_N$)

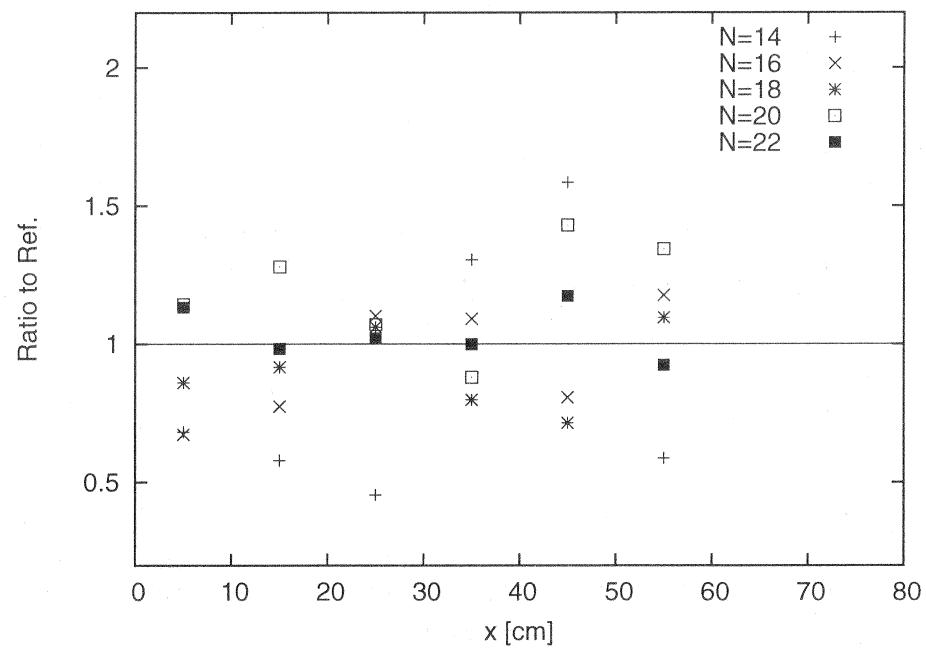


Fig. 4.1.25 Result for problem 3Ci ($y=95\text{cm}$, $z=35\text{cm}$, quadrature set: $\text{DP}_N \text{NxN}$)

4.2 遮蔽体領域が 50% 散乱媒質の場合 (問題 ii)

次に、遮蔽体領域が 50% 散乱媒質である問題 ii に対して、 $N=24$ の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットを用いて計算を行った。その結果、全ての問題に対して、参照解を 10% 以内で再現することを確認した（結果は後に示す）。

遮蔽体領域が 50% 散乱媒質の場合には、前章で示した多段階 Sn 法が有効と予想される。そこで、多段階 Sn 法（二段階ないし三段階）による計算を行い、 $N=24$ の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットのみを用いて得た結果との比較を行った¹。なお、多段階 Sn 法による計算では、最終段階の計算を LQ16 セットで行い、それ以外の段階では $N=24$ の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットで行った。結果を Fig. 4.2.1 から Fig. 4.2.8 に示す。

これらより、二段階 Sn 法による結果と比べて、三段階 Sn 法による結果が、詳細分点の求積セットを用いた結果とよく一致することが分かった。このことは、第一衝突源に基づく計算を粗い分点の求積セットで行った場合に有意な誤差が生じること、つまり、第一衝突源に基づく計算でも射線効果が有意に発生していることを意味している。

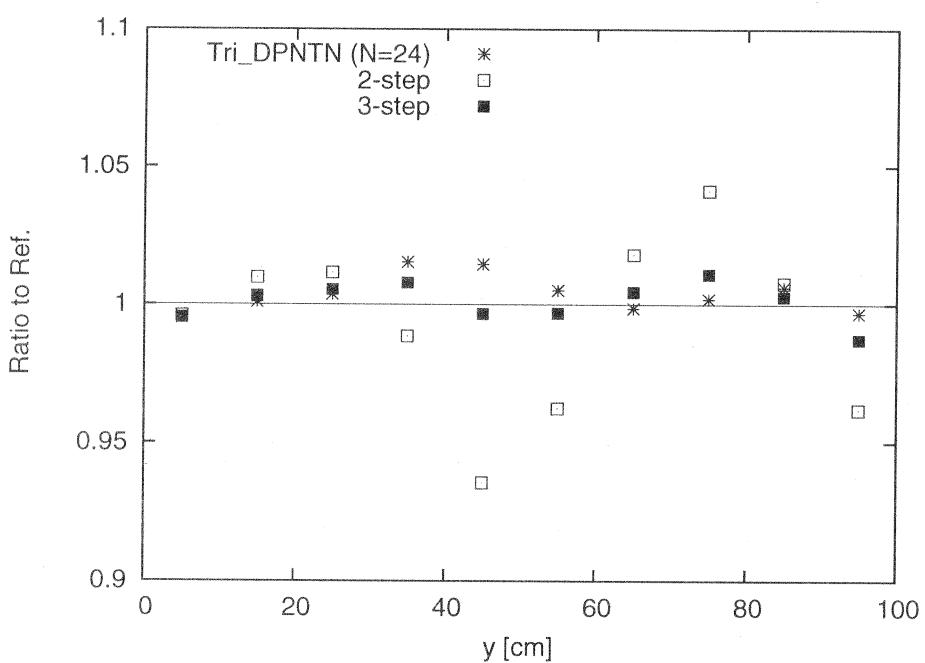


Fig. 4.2.1 Result for problem 1Aii ($x=z=5\text{cm}$, Multi-step Sn (quadrature set: LQ_N))

¹ なお、多段階 Sn 法はこの場合、 $N=24$ の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットのみを用いて得た結果以上の精度を得ることは出来ない。なぜなら、第一衝突源の計算を $N=24$ の $\text{Tri}_N \text{DO}_N \text{T}_N$ セットを用いて行っているからである。

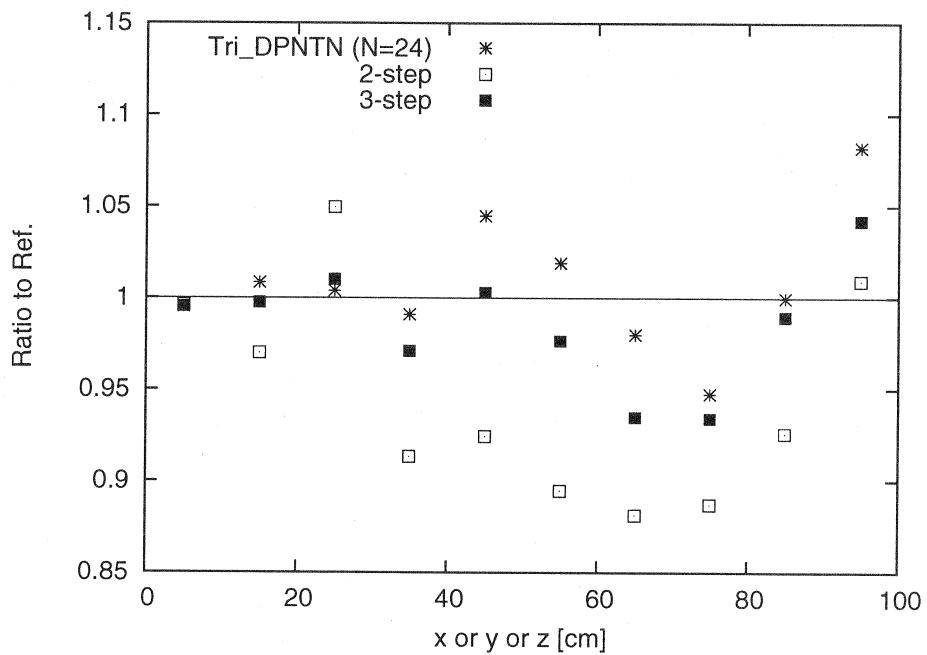


Fig. 4.2.2 Result for problem 1Bii ($x=y=z$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N))

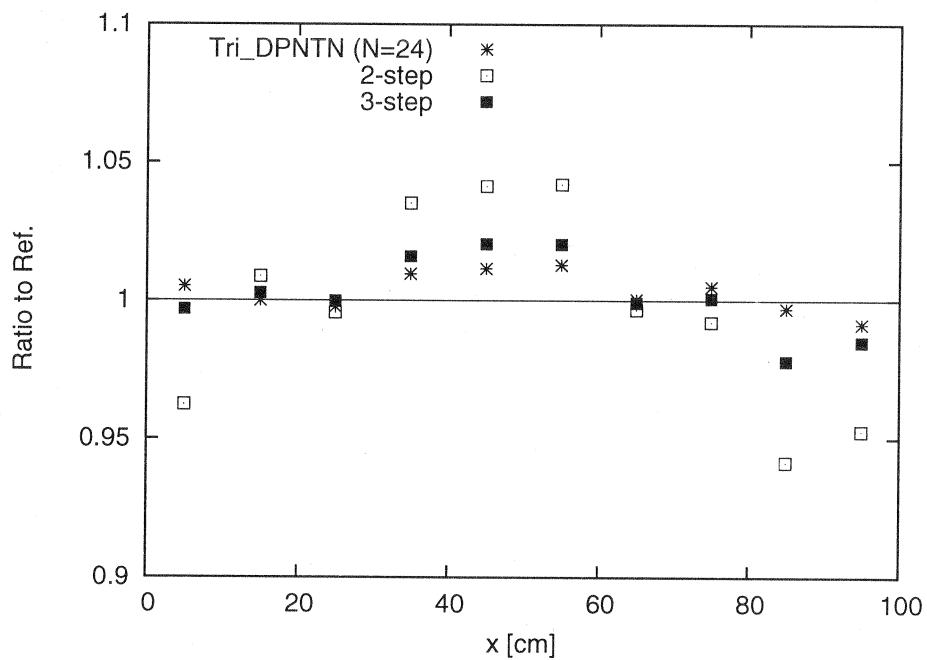


Fig. 4.2.3 Result for problem 1Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N))

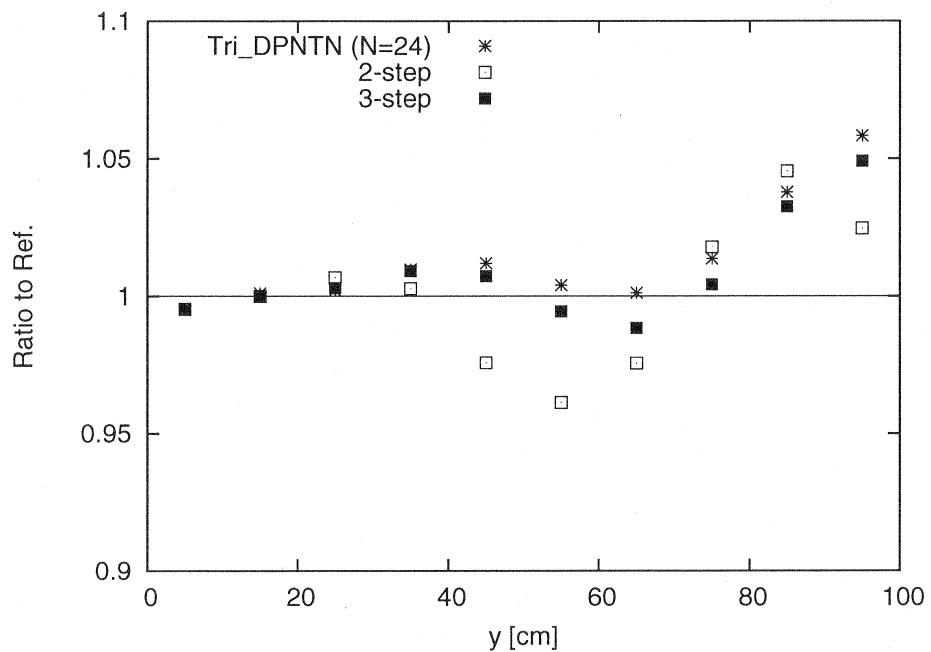


Fig. 4.2.4 Result for problem 2Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N))

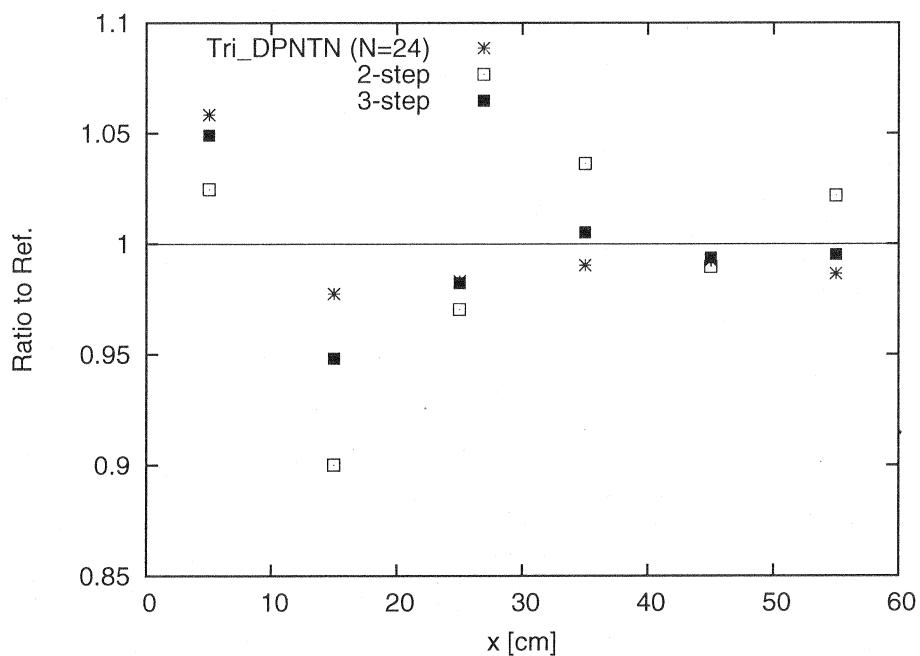


Fig. 4.2.5 Result for problem 2Bii ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N))

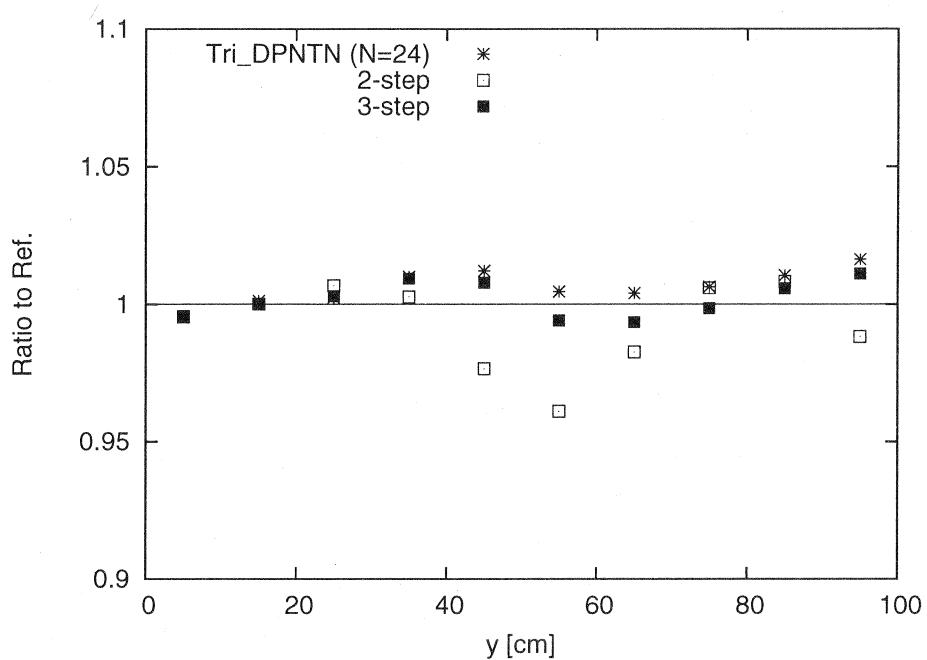


Fig. 4.2.6 Result for problem 3Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N))

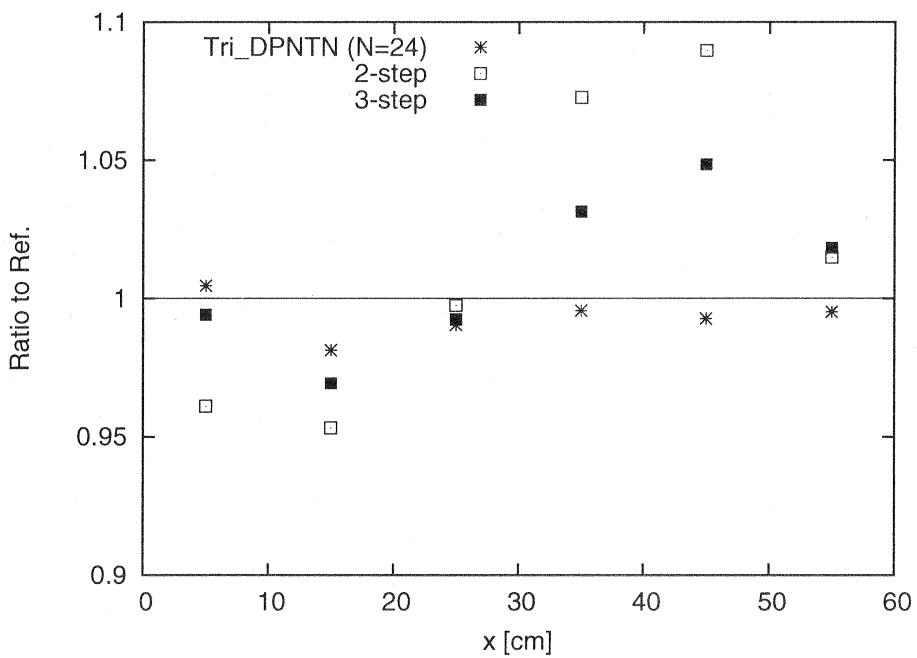


Fig. 4.2.7 Result for problem 3Bii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N))

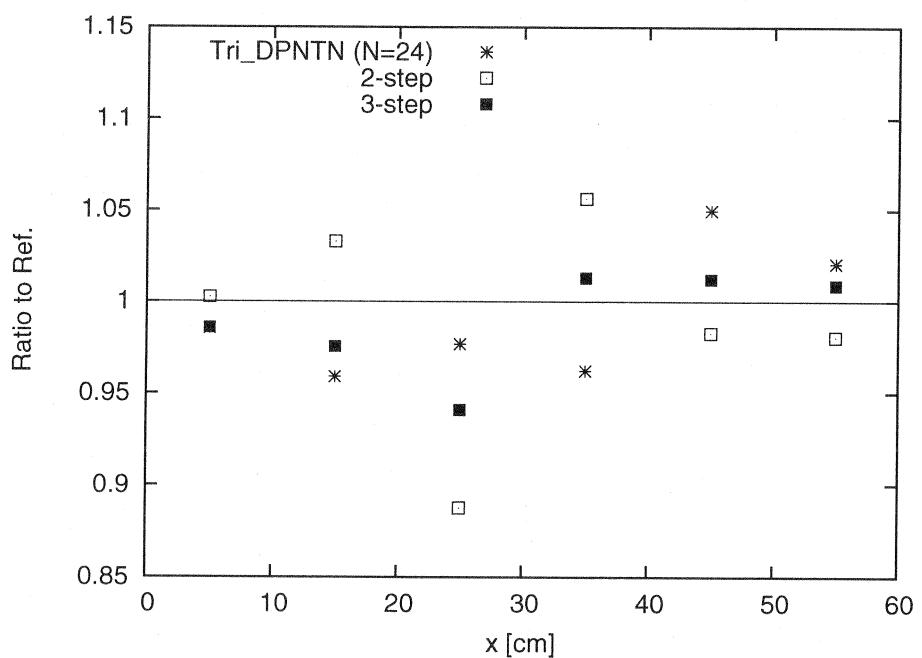


Fig. 4.2.8 Result for problem 3Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: \mathbf{LQ}_N))

次に三段階 Sn 法において、最終段階の計算に用いる求積セットとして LQ16、EO16 を用いた計算を行った（その他の段階は $N=24$ の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットを使用）。結果を Fig. 4.2.9 から Fig. 4.2.16 に示す。三段階 Sn 法の結果は、 $N=16$ の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットを用いた結果と、いくつかの問題で 5% 程度の差異が見られたものの、良好に一致することを確認した。

また、いくつかの例外はあるが、一般的には EO16 を用いたほうが、 $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットを用いた計算結果と良く一致することが分かった。従って、多段階 Sn 法の最終段階の計算では、EO セットを用いることが望ましい。

Table 4.2.1 に、 $N=24$ の $\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ セットのみを用いた場合と、多段階 Sn 法（最終段階は EO16）を用いた場合² の計算時間を示す（プロセッサナンバー T7500 の 2.2GHz の Intel Core 2 Duo の CPU を使用）。三段階 Sn 法を用いた場合は多段階 Sn 法を用いない場合と比較して計算時間は 1/4 程度となり、その有効性を確認した。

Table 4.2.1 Comparison in calculation time (Unit:second)

Problem	$\text{Tri}_N \text{DP}_N \text{T}_N$ ($N=24$)	Multi-step Sn	
		2-step	3-step
1	438.5	78.3	98.5
2	154.0	25.1	32.7
3	143.5	24.4	32.7

²全段階を含んだ計算時間

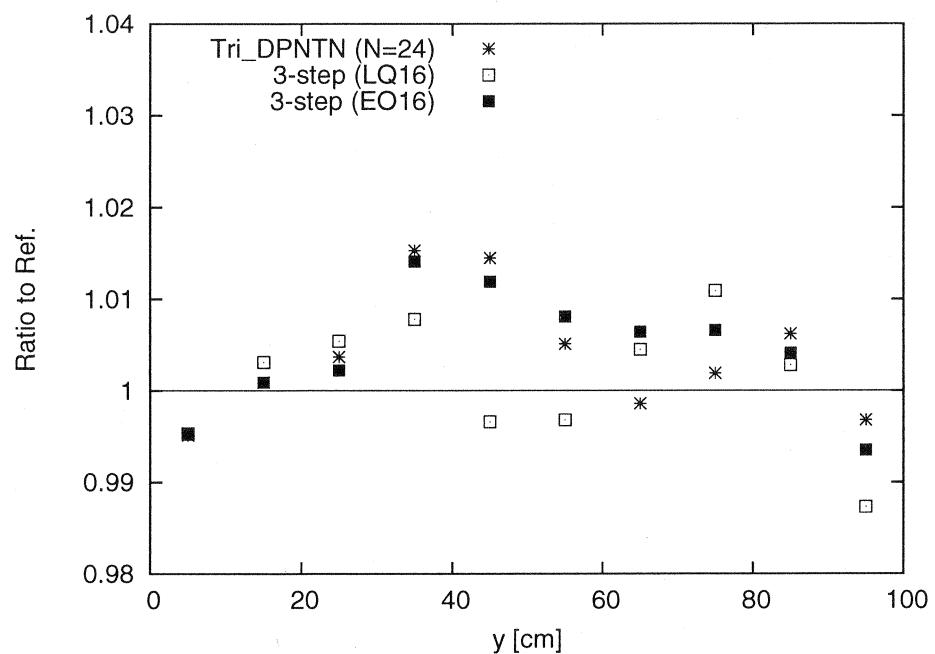


Fig. 4.2.9 Result for problem 1Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

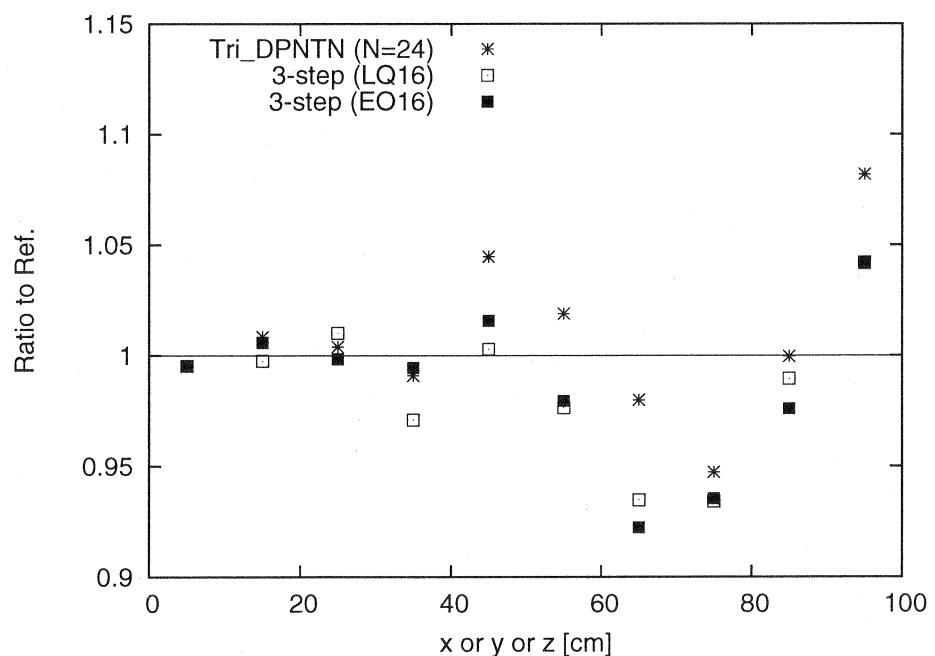


Fig. 4.2.10 Result for problem 1Bii ($x=y=z$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

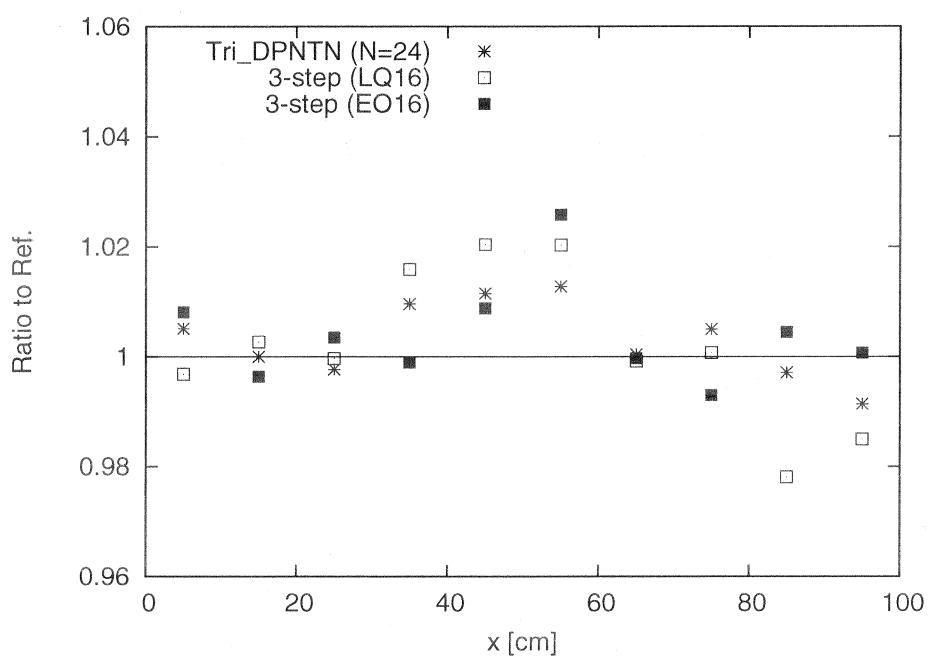


Fig. 4.2.11 Result for problem 1Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

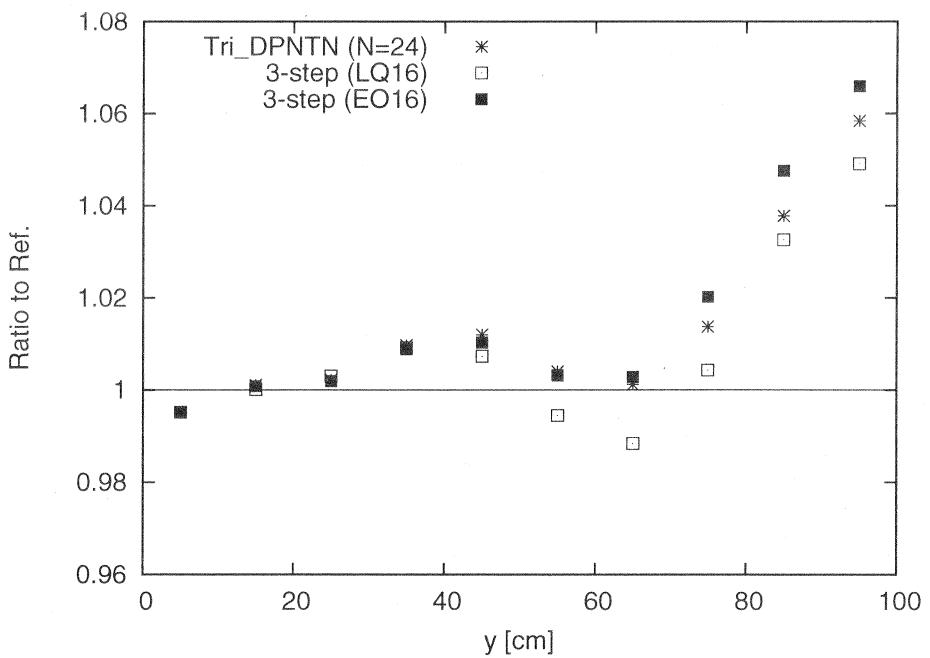


Fig. 4.2.12 Result for problem 2Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

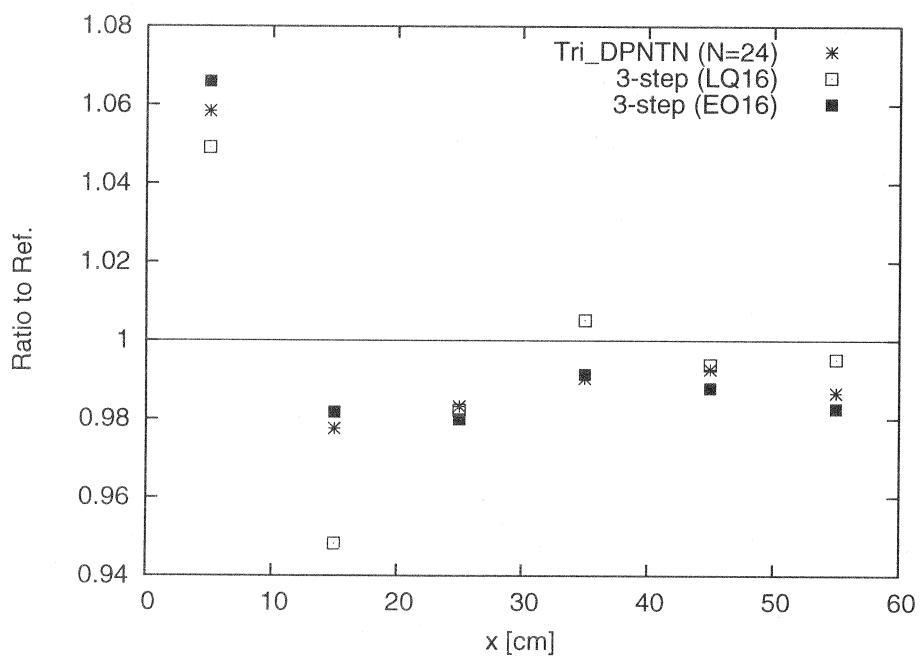


Fig. 4.2.13 Result for problem 2Bii ($y=95\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

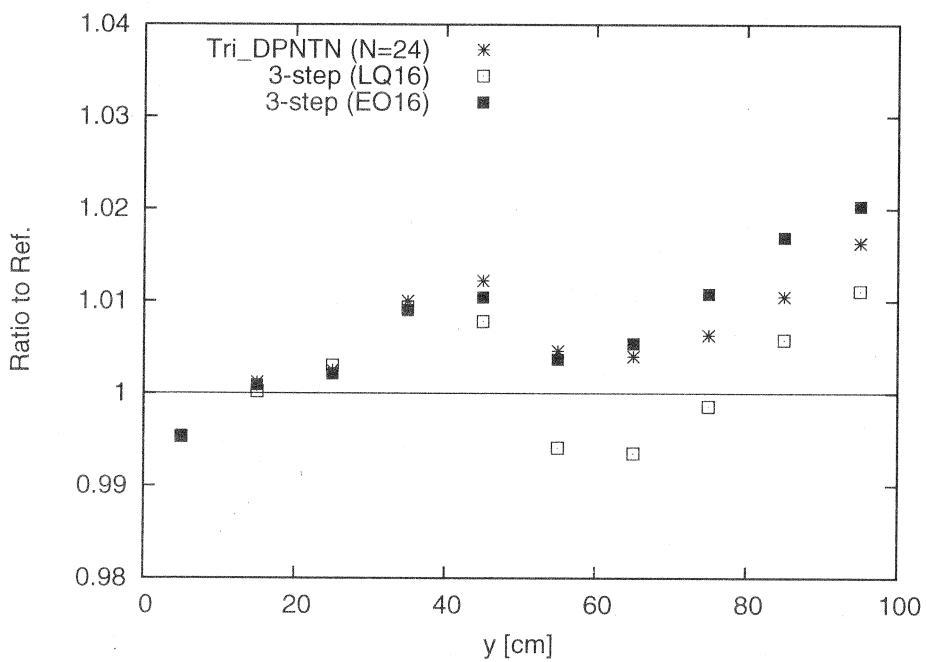


Fig. 4.2.14 Result for problem 3Aii ($x=z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

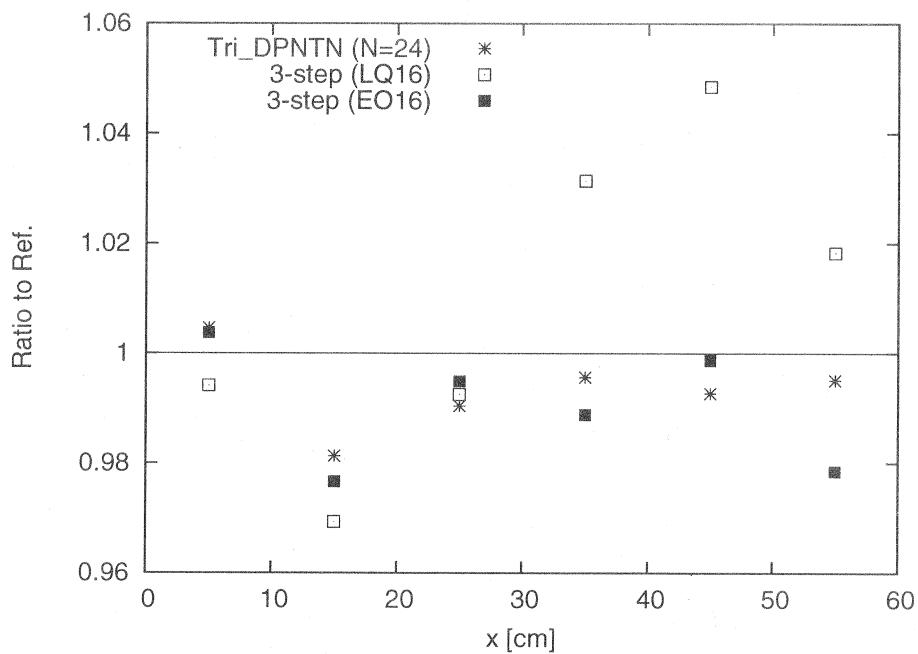


Fig. 4.2.15 Result for problem 3Bii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

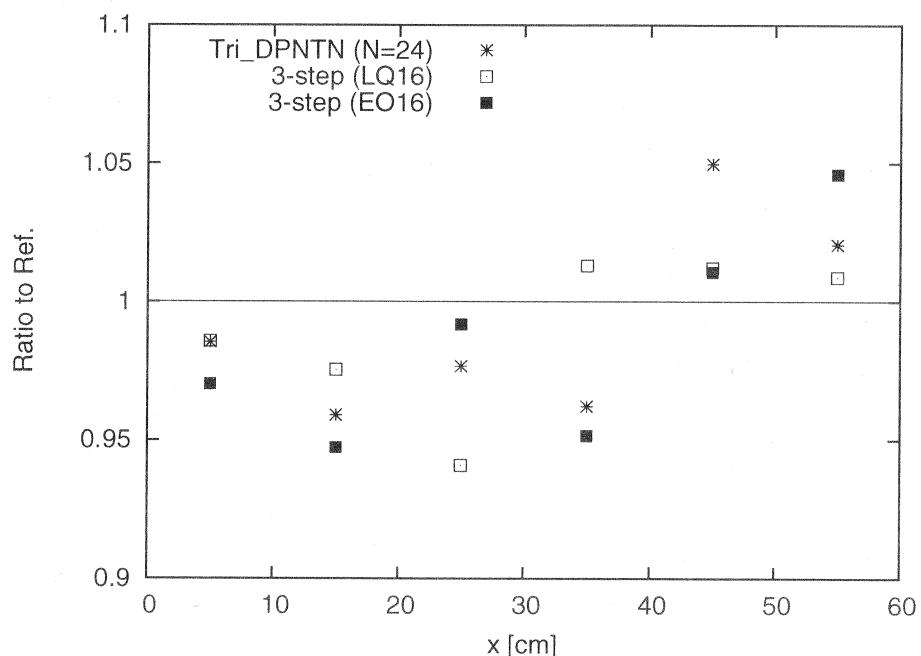


Fig. 4.2.16 Result for problem 3Cii ($y=55\text{cm}$, $z=5\text{cm}$, multi-step Sn (quadrature set: LQ_N , EO_N))

5. 結論

中性子輸送計算コードシステム CBG の中性子遮蔽問題への適用性を評価するため、中性子の遮蔽計算を想定して作成された中性子輸送ベンチマーク問題（小林ベンチマーク問題）を CBG を用いて計算し、その結果をモンテカルロ法による参照解と比較した。

はじめに、遮蔽体領域が完全吸収媒質の問題に対して、種々の角度求積セットを用いて計算を行った。次数に上限がある LQ_N セット、 EO_N セットを用いた場合、射線効果により、位置によっては参照解と比較して 20%以上の差異が中性子束に生じた。一方、次数に上限がない $Tri_DP_NT_N$ セット、 $Rec_DP_NT_N$ セット、 DP_NNxN セットを用いた場合、適切な次数を設定することにより、中性子束についてモンテカルロ法による参照解と 20%以内で一致した。また、 $Tri_DP_NT_N$ セットは比較的低い次数で参照解とよく一致することが分かった。

次に遮蔽体領域が 50%散乱の問題の計算を行った。高次（次数 24）の $Tri_DP_NT_N$ セットを用いることにより、全ての問題に対して、中性子束について参照解を 10%以内で再現することができた。また、計算の効率化を図るために多段階 Sn 法を提案した。三段階 Sn 法の適用によって、計算精度を保つつゝ、計算時間の 4 分の 1 程度までの短縮化が達成できた。なお、三段階 Sn 法での最終段階の計算では LQ_N セットよりも EO_N セットの使用が推奨されることを示した。

謝辞

EO_N 角度求積セットの開発者である原子燃料工業の遠藤知弘氏には、本検討および射線効果のメカニズムとその対処法に関して大変貴重なご意見を賜わりました。核融合研究開発部門・核融合中性子工学グループの今野力氏には、核融合中性子の輸送計算法についてのご助言をいただきとともに、種々のデータ、レポートの提供をしていただきました。また本レポートに対し、有益なコメントをいただきました。原子力基礎工学研究部門・核設計技術開発グループの岡嶋成晃氏、長家康展氏には、本報告書についてのご助言をいただきました。ここに深い謝意を表します。

参考文献

- 1) Chiba G., Shimazu Y., 'Sodium void reactivity calculations for fast critical assemblies without whole-lattice homogenization,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[12], p.1526 (2008).
- 2) 千葉 豪、奥村啓介、「JENDL-4 開発のための評価済み核データファイルのベンチマークテスト」、JAEA-Research 2008-089 (2008).
- 3) Kobayashi K., *et al.*, '3D radiation transport benchmark problems and results for simple geometries with void region,' *Prog. Nucl. Energy*, **39**[2], p.119 (2001).
- 4) Endo T., Yamamoto A., 'Development of new solid angle quadrature sets to satisfy even- and odd-moment conditions,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**[10], p.1249 (2007).
- 5) Takeuchi K., 'A calculation method and radiation transport code in two dimensional (R,Z) geometry,' Papers of Ship Res, Inst., No.57 (1979).
- 6) Konno C., 'TORT solutions with FNSUNCL3 for Kobayashi's 3D benchmarks,' *Prog. Nucl. Energy*, **39**[2], p.167 (2001).
- 7) Alcouffe R. E., O'Dell R. D., 'Transport calculations for nuclear reactors,' *CRC Handbook of Nuclear Reactors Calculations*, Vol.1, p.380, CRC Press, Boca Raton, Florida (1986).
- 8) Sanchez R., *et al.*, 'Treatment of boundary conditions in trajectory-based deterministic transort methods,' *Nucl. Sci. Eng.*, **140**, p.23 (2002).

付録A ガウス・ルジャンドル求積公式の導出

$(2N - 1)$ 次多項式の積分が N 点のガウス・ルジャンドル求積により厳密に求まることを、文献 7 の記述に従って以下に示す。

まず $(2N - 1)$ 次の任意の多項式 $g_{2N-1}(\mu)$ が $\mu \in (-1, 1)$ で定義されているとする。そして、 $(N - 1)$ 次の別の多項式 $G_{N-1}(\mu)$ が $\mu \in (-1, 1)$ で以下の条件を満たすとする。

$$(i) \quad G_{N-1}(\mu_m) = g_{2N-1}(\mu_m), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.1})$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G_{N-1}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g_{2N-1}(\mu) d\mu \quad (\text{A.2})$$

$g_{2N-1}(\mu)$ は、 $(2N - 1)$ 次の多項式 $f_{2N-1}(\mu)$ を用いて次のように書ける。

$$g_{2N-1}(\mu) = G_{N-1}(\mu) + f_{2N-1}(\mu) \quad (\text{A.3})$$

ここで条件 (i) を用いると、 $f_{2N-1}(\mu)$ は μ_m でゼロとなることから、 $f_{2N-1}(\mu)$ は $N - 1$ 次の多項式 $F_{N-1}(\mu)$ を用いて次のように書くことが出来る。

$$f_{2N-1}(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\dots(\mu - \mu_N)F_{N-1}(\mu) \quad (\text{A.4})$$

多項式 $g_{2N-1}(\mu)$ は任意であるので $F_{N-1}(\mu)$ も任意多項式となる。条件 (ii) より、

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{2N-1}(\mu) d\mu = 0 \quad (\text{A.5})$$

が成り立つためには、 $F_{N-1}(\mu)$ の μ の各累乗項に対して以下の式が成り立たなければならない。

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\dots(\mu - \mu_N) \mu^k d\mu = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (\text{A.6})$$

この式は、各々の μ^k に掛かる N 次多項式 $(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\dots(\mu - \mu_N)$ が、 $\mu \in (-1, 1)$ の範囲で低次の多項式と直交することを意味する。そしてルジャンドル多項式はこの条件を満たす。従って、もし μ_m がルジャンドル多項式 $P_N(\mu)$ のゼロ点であるならば、条件 (i)(ii) を完全に満たすことになる。

任意の $(N - 1)$ 次多項式の $\mu \in (-1, 1)$ に対する積分は、 N 点の求積公式で求めることが出来る。従って、 $G_{N-1}(\mu)$ の積分も、以下の式で計算することが出来る。

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 G_{N-1}(\mu) d\mu = \sum_{m=1}^N w_m G_{N-1}(\mu_m) \quad (\text{A.7})$$

ここで、 μ_m は求積公式における離散点、 w_m は離散点 m の重みを示す。

以上の議論より、多項式 $g_{2N-1}(\mu)$ の積分は

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 g_{2N-1}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G_{N-1}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N w_m G_{N-1}(\mu_m) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N w_m g_{2N-1}(\mu_m) \quad (\text{A.8})$$

と書け、求積公式で厳密に計算できることが分かる。

なお、重み w_m は、 $g_{2N-1}(\mu)$ のそれぞれの μ に対する累乗について式 (A.8) を満足するように決定する。詳細は本稿では割愛する。

付録B 角度求積セットが満たすべき要件

一次元一群で散乱が等方の輸送方程式を考える。

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma\psi(x, \mu) = \frac{1}{2}\sigma_s \int d\mu \psi(x, \mu) \quad (\text{B.1})$$

ここで、 $\psi(x, \mu)$ は位置 x における進行方向と X 軸がなす角の余弦が μ となる角度中性子束を、 σ は全断面積を、 σ_s は散乱断面積を、それぞれ示す。これに離散座標法 (Sn 法) を適用すると、以下のような記述となる。

$$\mu_i \frac{d\psi(x, \mu_i)}{dx} + \sigma\psi(x, \mu_i) = \frac{1}{2}\sigma_s \sum_i \omega_i \psi(x, \mu_i) \quad (\text{B.2})$$

従って、Sn 法適用後の輸送方程式が原式と等価になる条件は、以下となる。

$$\int d\mu \psi(x, \mu) = \sum_i \omega_i \psi(x, \mu_i) \quad (\text{B.3})$$

中性子束 $\psi(x, \mu)$ の角度依存性が $\mu \in (-1, 1)$ の範囲で有限次の多項式で記述される場合には、相応の次数をとったガウス分点セットにより上式は厳密に成り立つことが保証される。また、 $(-1, 0)$ 、 $(0, 1)$ のそれぞれの範囲について有限次の多項式で記述される場合（例えば $\mu = 0$ で不連続な関数となる場合や滑らかに連続でない関数となる場合）には、それぞれの積分範囲についてガウス分点セットを適用すれば良い（二重ガウス求積セット）。

次に、散乱の非等方性を考慮した場合を考える。ただし、散乱断面積は L 次までのルジャンドル多項式の係数で与えられるとする。この場合、輸送方程式は以下となる。

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_s^l \int d\mu P_l(\mu) \psi(x, \mu) \quad (\text{B.4})$$

ここで、 σ_s^l は散乱断面積の l 次ルジャンドル成分である。これに Sn 法を適用すると、以下のような記述となる。

$$\mu_i \frac{d\psi(x, \mu_i)}{dx} + \sigma\psi(x, \mu_i) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_s^l \sum_i \omega_i P_l(\mu_i) \psi(x, \mu_i) \quad (\text{B.5})$$

従って、Sn 法適用後の輸送方程式が原式と等価になる条件は以下となる。

$$\int d\mu P_l(\mu) \psi(x, \mu) = \sum_i \omega_i P_l(\mu_i) \psi(x, \mu_i), \quad l = 0, \dots, L \quad (\text{B.6})$$

このような場合、上式が成り立つような求積セットがあれば良いことになる。従って、等方散乱の場合と比較して、より高次のガウス求積セットもしくは二重ガウス求積セットを用いなければ

ならない。

次に、中性子束 $\psi(x, \mu)$ の角度依存性が以下のように L' 次までのルジャンドル多項式で記述されるものとする。

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{L'} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \phi_l(x) \quad (\text{B.7})$$

これを式 (B.6) に代入すると、次の関係式を得る。

$$\sum_{l'=0}^{L'} \frac{2l'+1}{2} \phi_{l'}(x) \int d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu) = \sum_{l'=0}^{L'} \frac{2l'+1}{2} \phi_{l'}(x) \sum_i \omega_i P_l(\mu_i) P_{l'}(\mu_i) \quad (\text{B.8})$$

これを整理して書くと

$$\int d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu) = \sum_i \omega_i P_l(\mu_i) P_{l'}(\mu_i), \quad (l \leq L, \quad l' \leq L') \quad (\text{B.9})$$

となる。前述したように、 $\psi(x, \mu)$ が $\mu = 0$ で不連続もしくは滑らかでない連続関数となった場合には、 $\psi(x, \mu)$ をルジャンドル展開した場合に必要な次数 L' が大きくなってしまうため、求積セットが満たすべき条件がより厳しいものとなる。

以上の議論を多次元に拡張した場合には、求積セットが満たすべき式は、

$$\int_{4\pi} d\Omega R_{lm}(\Omega) \psi(r, \Omega) = \sum_i \omega_i R_{lm}(\Omega_i) \psi(r, \Omega_i) \quad (\text{B.10})$$

もしくは、

$$\int_{4\pi} d\Omega R_{lm}(\Omega) R_{l'm'}(\Omega) = \sum_i \omega_i R_{lm}(\Omega_i) R_{l'm'}(\Omega_i) \quad (\text{B.11})$$

と与えられる。ここで、 R_{lm} は実数の球面調和関数を示す。中性子束の角度依存性が定次の球面調和関数でよく表現できる場合には式 (B.11) に基づいて求積セットを求めれば良いが、そうでない場合は式 (B.10) に基づいて、計算の対象とする体系の角度中性子束の振る舞いに応じた求積セットを別途決めれば良い。

最後に、文献 8 の記述を引用する。

散乱断面積の非等方成分がルジャンドル係数の L 次まで与えられている、均質の大きい体系を考える。このような体系では中性子束の異方性は無視することが出来る。従って、式 (B.10) は次のように書くことが出来る。

$$\int_{4\pi} d\Omega R_{lm}(\Omega) = \sum_i \omega_i R_{lm}(\Omega_i) = \delta_{l0, m0} \quad (\text{B.12})$$

すなわち、 $l \neq 0, m \neq 0$ の場合には、上式の求積値がゼロでないと、非等方散乱が生じてしまうことを意味しており、物理的に適切ではない。従って、角度求積セットは上の式を満たさなければならない。

This is a blank page.

国際単位系 (SI)

表1. SI 基本単位

基本量	SI 基本単位	
	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質量	モル	mol
光度	カンデラ	cd

表2. 基本単位を用いて表されるSI組立単位の例

組立量	SI 基本単位	
	名称	記号
面積	平方メートル	m^2
体積	立方メートル	m^3
速度	メートル毎秒	m/s
加速	メートル毎秒毎秒	m/s^2
波数	メートル	m^{-1}
密度、質量密度	キログラム毎立方メートル	kg/m^3
面積密度	キログラム毎平方メートル	kg/m^2
比体積	立方メートル毎キログラム	m^3/kg
電流密度	アンペア毎平方メートル	A/m^2
磁界の強さ	アンペア毎メートル	A/m
量濃度 ^(a) 、濃度 ^(b)	モル毎立方メートル	mol/m^3
質量濃度	キログラム毎立方メートル	kg/m^3
輝度	カンデラ毎平方メートル	cd/m^2
屈折率 ^(b)	(数字の) 1	1
比透磁率 ^(b)	(数字の) 1	1

(a) 量濃度(amount concentration)は臨床化学の分野では物質濃度(substance concentration)ともよばれる。

(b) これらは無次元量あるいは次元1をもつ量であるが、そのことを表す単位記号である数字の1は通常は表記しない。

表3. 固有の名称と記号で表されるSI組立単位

組立量	SI 組立単位		
	名称	記号	他のSI単位による表し方
平面角	ラジアン ^(b)	rad	$1^{(b)}$
立体角	ステラジアン ^(b)	sr ^(c)	$1^{(b)}$
周波数	ヘルツ ^(d)	Hz	m^2m^2/s^1
力	ニュートン	N	$m\ kg\ s^2$
圧力、応力	パスカル	Pa	N/m^2
エネルギー、仕事、熱量	ジュール	J	$m^2\ kg\ s^2$
仕事率、工率、放射束	ワット	W	$m^2\ kg\ s^3$
電荷、電気量	クーロン	C	sA
電位差(電圧)、起電力	ボルト	V	$m^2\ kg\ s^{-3}A^{-1}$
静電容量	ファラード	F	C/V
電気抵抗	オーム	Ω	$m^2\ kg\ s^{-3}A^{-2}$
コンダクタンス	ジーメンス	S	A/V
磁束密度	ウエーバー	Wb	$m^2\ kg\ s^{-2}A^{-1}$
磁束密度	テスラ	T	Wb/m^2
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A
セルシウス度	セルシウス度 ^(e)	°C	K
光束度	ルーメン	lm	cd sr ^(c)
照度	ルクス	lx	lm/m^2
放射性核種の放射能 ^(f)	ベクレル ^(d)	Bq	s^{-1}
吸収線量、比エネルギー一分率	グレイ	Gy	J/kg
カーマ			$m^2\ s^{-2}$
線量当量、周辺線量当量、方向性線量当量、個人線量当量	シーベルト ^(g)	Sv	J/kg
酸素活性	カタール	kat	$m^2\ s^{-2}$

(a) SI接頭語は固有の名称と記号を持つ組立単位と組み合せても使用できる。しかし接頭語を付した単位はもはやコヒーレントではない。

(b) ラジアンとステラジアンは数字の1に対する単位の特別な名称で、量についての情報をつたえるために使われる。実際には、使用する時には記号rad及びsrが用いられるが、習慣として組立単位としての記号である数字の1は明示されない。

(c) 制光子ではステラジアンという名称と記号srを単位の表し方の中に、そのまま維持している。

(d) ヘルツは周期現象についてのみ、ベクレルは放射性核種の統計的過程についてのみ使用される。

(e) セルシウス度はケルビンの特別な名称で、セルシウス度を表すために使用される。セルシウス度とケルビンの単位の大きさは同一である。したがって、温度差や温度間隔を表す数値はどちらの単位で表しても同じである。

(f) 放射性核種の放射能(activity referred to a radionuclide)は、しばしば誤った用語で“radioactivity”と記される。

(g) 単位シーベルト(PV,2002,70,205)についてはCIPM勧告2(CI-2002)を参照。

表4. 単位の中に固有の名称と記号を含むSI組立単位の例

組立量	SI 組立単位		
	名称	記号	SI 基本単位による表し方
粘度	パスカル秒	Pa s	$m^{-1}kg\ s^{-1}$
力のモーメント	ニュートンメートル	N m	$m^2\ kg\ s^2$
表面張力	ニュートン每メートル	N/m	$kg\ s^2$
角速度	ラジアン毎秒	rad/s	$m^{-1}s^{-1}=s^{-1}$
角加速度	ラジアン毎秒毎秒	rad/s ²	$m^{-1}s^{-2}=s^{-2}$
熱流密度、放射照度	ワット毎平方メートル	W/m ²	$kg\ s^{-3}$
熱容量、エンタルピー	ジュール每ケルビン	J/K	$m^2\ kg\ s^{-2}K^{-1}$
比熱容量、比エンタルピー	ジュール每キログラム毎ケルビン	J/(kg K)	$m^2\ s^{-2}K^{-1}$
比エネルギー	ジュール每キログラム	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
熱伝導率	ワット每メートル毎ケルビン	W/(m K)	$kg\ s^{-3}K^{-1}$
体積エネルギー	ジュール每立方メートル	J/m ³	$m^{-1}kg\ s^2$
電界の強さ	ボルト每メートル	V/m	$m\ kg\ s^3A^{-1}$
電荷密度	クーロン每立方メートル	C/m ³	$m^{-3}sA$
表面電荷密度	クーロン每平方メートル	C/m ²	$m^{-2}sA$
電束密度、電気変位	クーロン每平方メートル	C/m ²	$m^{-2}sA$
誘電率	アラード每メートル	F/m	$m^3\ kg^{-1}s^4A^2$
透磁率	ヘンリー每メートル	H/m	$m\ kg\ s^2A^{-2}$
モルエネルギー	ジュール每モル	J/mol	$m^2\ kg\ s^{-2}mol^{-1}$
モルエントロピー、モル熱容量	ジュール每モル每ケルビン	J/(mol K)	$m^2\ kg\ s^{-2}K^{-1}mol^{-1}$
照射線量(X線及びγ線)	クーロン每キログラム	C/kg	$kg^{-1}sA$
吸収線量率	グレイ毎秒	Gy/s	$m^{-2}s^{-3}$
放射強度	ワット每メートル毎スチラジアン	W/sr	$m^3\ m^{-2}kg\ s^{-3}=m^2\ kg\ s^{-3}$
放射輝度	ワット每平方メートル毎スチラジアン	W/(m ² sr)	$m^2\ m^{-2}kg\ s^{-3}=kg\ s^{-3}$
醇素活性濃度	カタール每立方メートル	kat/m ³	$m^{-3}s^{-1}mol$

表5. SI接頭語

乗数	接頭語	記号	乗数	接頭語	記号
10^{24}	ヨタ	Y	10^{-1}	デシ	d
10^{21}	ゼタ	Z	10^{-2}	センチ	c
10^{18}	エクサ	E	10^{-3}	ミリ	m
10^{15}	ペタ	P	10^{-6}	マイクロ	μ
10^{12}	テラ	T	10^{-9}	ナノ	n
10^9	ギガ	G	10^{-12}	ピコ	p
10^6	メガ	M	10^{-15}	フェムト	f
10^3	キロ	k	10^{-18}	アト	a
10^2	ヘクト	h	10^{-21}	ゼット	z
10^1	デカ	da	10^{-24}	ヨクト	y

表6. SIに属さないが、SIと併用される単位

名称	記号	SI 単位による値
分	min	1 min=60s
時	h	1 h=60 min=3600 s
日	d	1 d=24 h=86 400 s
度	°	$1^\circ=(\pi/180)\ rad$
分	'	$1'=(1/60)^\circ=(n/10800)\ rad$
秒	"	$1''=(1/60)'=(n/648000)\ rad$
ヘクタール	ha	$1ha=1hm^2=10^4m^2$
リットル	L	$1L=1dm^3=10^3cm^3=10^{-3}m^3$
トン	t	$1t=10^3kg$

表7. SIに属さないが、SIと併用される単位で、SI単位で表される数値が実験的に得られるもの

名称	記号	SI 単位で表される数値
電子ボルト	eV	$1eV=1.602\ 176\ 53(14)\times 10^{-19}J$
ダルトン	Da	$1Da=1.660\ 538\ 86(28)\times 10^{-27}kg$
統一原子質量単位	u	$1u=1 Da$
天文単位	ua	$1ua=1.495\ 978\ 706\ 91(6)\times 10^{11}m$

表8. SIに属さないが、SIと併用されるその他の単位

名称	記号	SI 単位で表される数値
バール	bar	$1 bar=0.1MPa=100kPa=10^5Pa$
水銀柱ミリメートル	mmHg	$1mmHg=133.322Pa$
オングストローム	Å	$1 \text{ \AA}=0.1nm=100pm=10^{-10}m$
海里	M	$1 M=1852m$
バーン	b	$1 b=100fm^2=(10^{-12}cm)^2=10^{-28}m^2$
ノット	kn	$1 kn=(1852/3600)m/s$
ネーパル	Np	$1 Np=1Pa$ SI単位との数値的な関係は、対数量の定義に依存。
ベル	B	
デジベル	dB	

(c) 3元系のCGS単位系とSIでは直接比較できないため、等号「▲」は対応関係を示すものである。

表10. SIに属さないその他の単位の例

名称	記号	SI 単位で表される数値
キュリ	Ci	$1 Ci=3.7\times 10^{10}Bq$
レントゲン	R	$1 R=2.58\times 10^4C/kg$
ラド	rad	$1 rad=1cGy=10^2Gy$
レム	rem	$1 rem=1cSv=10^2Sv$
ガンマ	γ	$1 \gamma=1 nT=10^{-9}T$
フェルミ	fm	$1 fm=10^{-15}m$
メートル系カラット		$1 \text{ メートル系カラット}=200 mg=2\times 10^{-4}kg$
トル	Torr	$1 Torr=(101\ 325/760)\ Pa$
標準大気圧	atm	$1 atm=101\ 325\ Pa$
カロリ	cal	$1 cal=4.1858J\ ((15^\circ C)\ カロリー), 4.1868J\ ((IT)\ カロリー), 4.184J\ ((熱化学)\ カロリー)$
ミクロ	μ	$1 \mu=1\mu m=10^{-6}m$

