



Die AMEMIYA Sonde-Theoretischer Hitergrund

Hans Joahim Belitz, Bernhard Althausen, Kazuya UEHARA
and Hiroshi AMEMIYA

Division of Advanced Plasma Research
Fusion Research and Development Directorate

January 2010

Japan Atomic Energy Agency

日本原子力研究開発機構

JAEA-Research

本レポートは独立行政法人日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。
本レポートの入手並びに著作権利用に関するお問い合わせは、下記あてにお問い合わせ下さい。
なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ホームページ (<http://www.jaea.go.jp>)
より発信されています。

独立行政法人日本原子力研究開発機構 研究技術情報部 研究技術情報課
〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根2番地4
電話 029-282-6387, Fax 029-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency
Inquiries about availability and/or copyright of this report should be addressed to
Intellectual Resources Section, Intellectual Resources Department,
Japan Atomic Energy Agency
2-4 Shirakata Shirane, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195 Japan
Tel +81-29-282-6387, Fax +81-29-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

© Japan Atomic Energy Agency, 2009

Die AMEMIYA-Sonde—Theoretischer Hitergrund

Hans Joahim Belitz*, Bernhard Althausen*, Kazuya Uehara and Hiroshi Amemiya**

Abteilung der vorgerückten Plasmaforsch
Fusion Schmeizverfahrens forchung und Development Directorate
Japan-Atomenergieforschungsagentur, Naka-shi, Ibaraki-ken

(Received November 16, 2009)

Diese Sonde wurde entwickelt, um die Temperatur T_i positiver Ionen in der Randschicht (SOL) eines Tokamak zu messen, wo T_i gewöhnlich grösser ist als die Elektronentemperatur T_e so dass die Vorschicht vor der Sonde nicht berücksichtigt werden muss und die Ionen gegen die Sonde mit der thermische Geschwindigkeit anlaufen. Die Achse der zylindrischen Sonde legen wir dabei parallel zum Magnetfeld. Die wichtigsten Parameter sind L/a , das Verhältnis von Länge zu Radius der zylindrischen Elektrode, und κ , das Verhältnis vom Radius zu $(\pi/4)^{1/2} \langle \rho \rangle$, $\langle \rho \rangle$ dem mittleren Ionen Larmorradius. Die Ionenstromstärke zu der Seiten- und Endflächen lassen sich durch ein Doppelintegral beschreiben, das sich für große κ durch eine analytische Formel ausdrücken lässt. Werden zwei Elektroden mit verschiedenen Längen zum Magnetfeld parallel gelegt, dann konvergiert der Unterschied der Stromstärken κ gegen die Temperatur T_i . Einige Beispiele bei der Anwendungen der Sonde an den Tokamaks, JFT-2M und Textor, sind dargestellt.

Schlüsselworts : Sonde, Ionen Temperatur, Magnetfeld, Randschich eines Tokamak, JFT-2M, Textor

* Institut für Plasmaphysik, Association EURATOM-FZJ,
Forschungszentrum Jülich, 52425 Jülich, Deutschland

** Institut für physikalische und chemische Forschung (The Institute of Physical and Chemical Research (RIKEN))
Hirosawa 2-1, Wokoshi, Saitama-ken

雨宮プローブ—理論的背景

日本原子力研究開発機構核融合研究開発部門
先進プラズマ研究開発ユニット

Hans Joachim Belitz*、 Bernhard Althausen*、 上原 和也、 雨宮 宏**、

(2009年11月16日受理)

本プローブはトカマク周辺プラズマ(SOL)の正イオンの温度を測定するために開発されたものである。周辺プラズマではイオン温度は通常電子温度より高いのでプローブ前面のプリシースを考慮する必要がなくイオンはプローブに熱速度で到来すると考えてよい。プローブは円筒型で軸は磁場に平行に置くものとする。重要なパラメータはプローブの長さ L と半径 a の比 L/a と半径と $(\pi/4)^{1/2}\langle\rho\rangle$ ($\langle\rho\rangle$: イオンの平均ラーマ半径)の比 κ である。円筒の側面、端面へのイオン電流強度は二重積分で表され κ の大きい場合には解析的な表式で表される。2本の異なる長さの円筒電極を磁場に平行に置く時互いの電流差から κ が得られそこからイオン温度が決定される。終わりに JFT-2M と Textor トカマクへのいくつかの適用例について示す。

那珂核融合研究所(駐在) : 〒311-0193 茨城県那珂市向山 801-1

* Institute für Plasmaphysik, Association EURATOM-FZJ
Forschungszentrum Jülich, 52425, Jülich, Deutschland

**理化学研究所 〒351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1

Inhaltsverzeichnis

1. Die AMEMIYA-Sonde, Koordinaten-----	1
2. Verteilungsdichten-----	1
3. Teilchenstromdichte, Teilchenstrom in x-Richtung-----	2
4. Anzahl der elektrisch geladenen Teilchen, die den Zylindermantel treffen-----	2
5. Die Wahrscheinlichkeit $P(r, v_1, v_2)$ -----	2
6. Das zwei-dimensionale Integrationsgebiet r - v , beziehungsweise r - ρ -----	4
7. Die AMEMIYA Größe κ -----	5
8. Integrationsverfahren nach GAUSS-----	6
9. Der Fall $\kappa = 0$ -----	7
10. Ergebnisse-----	8
11. Bestimmung der Temperatur-Anisotropie-----	11
ANHANG A -----	17
12. Anwendungen-----	20
Literturen-----	20

目次

1. 雨宮プローブ、座標-----	1
2. 分布関数-----	1
3. 電流密度、x-方向の電流-----	2
4. 円筒端面に達する荷電粒子数-----	2
5. 確率 $P(r, v_1, v_2)$ -----	2
6. r - v_r ないし r - ρ 二次元積分領域-----	4
7. 雨宮数 κ -----	5
8. GAUSS による積分の実行-----	6
9. $\kappa=0$ の場合-----	7
10. 計算結果-----	8
11. 非等方性温度の決定-----	11
付録-----	17
12. 適用例-----	20
参考文献-----	20

The AMEMIYA Probe-Theoretical Background

The present probe was developed in order to measure the temperature T_i of positive ions in the scrape-off layer (SOL) of tokamak where T_i is usually larger than the electron temperature T_e so that the presheath in front of the probe need not be considered and the ions reach the probe with the thermal velocity. The axis of the cylindrical probe is placed parallel to the magnetic field. The important parameter are L/a , the ratio of the length to the radius of the cylindrical probe and κ , the ratio of the probe radius to $(\pi/4)^{1/2} \langle \rho \rangle$, where $\langle \rho \rangle$ is the mean ion Larmor radius. The ion current densities to the side and the end surfaces are expressed by the double integral, which can give an analytical formula with respect to the value of κ . If two electrodes with different lengths are placed parallel to the magnetic field, the difference of current densities can be reduced to κ and hence to T_i . Some examples of the application of the probe to tokamaks, JFT-2M and Textor, are demonstrated.

Contents

1. AMEMIYA probe, Coordinates-----	1
2. Distribution functions-----	1
3. Current density, current in the x-direction-----	2
4. Number of charged particles reaching the end of the cylindrical electrode-----	2
5. Probability $P(r, v_1, v_2)$ -----	2
6. Two dimensional integration domain $r-v_r$ or $r-\rho$ -----	4
7. AMEMIYA quantity-----	5
8. Practice of integral by GAUSS-----	6
9. Case of $\kappa=0$ -----	7
10. Calculated results-----	8
11. Determination of anisotropic temperatures-----	11
APPENDIX A-----	17
12. Examples of application-----	20
Literatures-----	20

1. Die AMEMIYA-Sonde, Koordinaten

Die AMEMIYA-Sonde ist ein Zylinder mit dem Radius a und der Länge L . Seine Achse zeigt in x -Richtung. Die x -Richtung ist auch die Achse des zylindrischen Koordinatensystems. Ein homogenes Magnetfeld zeigt ebenfalls in x -Richtung.

2. Verteilungsdichten

Es werden zwei Verteilungen angenommen, eine Verteilung in axialer oder x -Richtung, eine zweite Verteilung senkrecht dazu, in radialer Richtung. Die Größen, die die axiale Verteilung beschreiben, erhalten den Index x . Die Größen, die die radiale Verteilung beschreiben, erhalten den Index r . Es werden auch - zumindest formal - zwei Temperaturen T_x und T_r angenommen.

Mit den Bezeichnungen

$$\gamma_x = \frac{m}{2 \cdot k \cdot T_x} \quad \text{und} \quad \gamma_r = \frac{m}{2 \cdot k \cdot T_r} \quad (1)$$

(mit m = Teilchenmasse, k = BOLTZMANN-Konstante, T = Temperatur) sind die normierten Verteilungsdichten in axialer Richtung

$$f_x(v_x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } v_x < 0 \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{\gamma_x}{\pi}} \cdot e^{-\gamma_x \cdot v_x^2} & \text{für } v_x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

und in radialer Richtung

$$f_r(v_r) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } v_r < 0 \\ 2 \cdot \gamma_r \cdot e^{-\gamma_r \cdot v_r^2} \cdot v_r & \text{für } v_r \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Die Verteilungsdichten haben die Dimension $[\frac{s}{m}]$.

Anmerkung 1:

Nach AMEMIYA kann gegebenenfalls aus den Sondenmessungen auf eine Anisotropie der Temperaturen geschlossen werden. Um diese Aussage auch quantitativ zu fassen, ist die obige Unterscheidung zwischen T_x und T_r erforderlich.

3. Teilchenstromdichte, Teilchenstrom in x-Richtung

Sei n [m^{-3}] die als räumlich konstant angenommene Teilchendichte und r der Abstand von der Zylinderachse, dann ist die räumlich konstante Teilchenstromdichte ϕ_x in x-Richtung

$$\phi_x = n \cdot \int_0^{\infty} f_x(v_x) \cdot v_x \cdot dv_x = \frac{n}{\sqrt{\gamma_x \cdot \pi}} \left[\frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right] \quad (4)$$

und der Teilchenstrom Φ_x durch eine Kreisfläche mit dem Radius a

$$\Phi_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^a \phi_x \cdot r \cdot dr = n \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma_x \cdot \pi}} \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \quad (5)$$

Hier genügt es die Verteilung in x-Richtung allein zu betrachten, da die Verteilung in radialer Richtung wegen der Normierung nur den Faktor 1 liefert.

4. Anzahl der elektrisch geladenen Teilchen, die den Zylindermantel treffen

Elektrisch geladene Teilchen gyrieren um die Magnetfeldlinien. Sie beschreiben in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld eine Kreisbahn um den Guiding Center, der der Magnetfeldlinie folgt. Ein Teil dieser Teilchen trifft auf den Zylindermantel. Dieser Anteil soll berechnet werden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein irgendwo vor dem Zylinder befindliches oder startendes Teilchen den Zylindermantel trifft, sei P . Diese Wahrscheinlichkeit hängt ab von seiner räumlichen Lage und den Geschwindigkeiten v_x und v_r . Es ist $P = P(r, v_x, v_r)$. Dann ist die Anzahl Z der Teilchen, die aus einem Teilchenstrom in x-Richtung auf den Zylindermantel treffen,

$$Z = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \int_{(r)} \int_{(v_x)} \int_{(v_r)} P(r, v_x, v_r) \cdot v_x \cdot f_x(v_x) \cdot f_r(v_r) \cdot dv_x \cdot dv_r \cdot r \cdot dr \quad (6)$$

Der Ausdruck $P = P(r, v_x, v_r)$ wird im nächsten Abschnitt konkretisiert. Dabei werden auch die Integrationsgrenzen bezüglich r , v_x und v_r festgelegt.

5. Die Wahrscheinlichkeit $P(r, v_1, v_2)$

Die Größe r hat hier eine etwas andere Bedeutung als in Gl. (5). Mit r wird der Abstand des Guiding Centers eines Teilchens von der Zylinderachse bezeichnet. Um diesen Guiding Center gyriert das Teilchen auf einer Kreisbahn mit dem Gyration- oder LARMOR-Radius ρ und der (im homogenen Magnetfeld konstanten) Gyration- oder LARMOR-Frequenz ω . Es gilt die Beziehung

$$v_r = \rho \cdot \omega \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeit P dafür, daß das Teilchen den Zylinder trifft, hängt nach AMEMIYA bezüglich der Geschwindigkeit v_x davon ab, ob v_x kleiner oder größer ist als eine kritische Geschwindigkeit v_c , wobei

$$v_c = \frac{L \cdot \omega}{2 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)} \quad (8)$$

Es gilt

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{\alpha}{\pi} & \text{für } v_x < v_c \\ \frac{\omega \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot v_x} & v_x \geq v_c \end{array} \right\} \quad (9)$$

Dabei ist

$$\alpha = \arccos \left[\frac{r^2 + \rho^2 - a^2}{2 \cdot r \cdot \rho} \right], \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad (10)$$

Damit kann in Gl. (6) die Integration über v_x ausgeführt werden. Es folgt aus

$$J_x = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cdot \int_0^{v_c} f_x(v_x) \cdot v_x \cdot dv_x + \frac{\omega \cdot L}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{v_c}^{\infty} f_x(v_x) \cdot dv_x$$

mit $f_x(v_x)$ gemäß Gl. (2) nach Integration

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \gamma_x}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cdot \left(1 - e^{-\gamma_x \cdot v_c^2}\right) + \frac{\omega \cdot L}{2 \cdot \pi} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_x} \cdot v_c) \quad (11)$$

Wegen der Gln. (7) - (10) ist J_x eine Funktion von r und v_r , also $J_x = J_x(r, v_r)$.

Es ist zweckmäßig, den Ausdruck für J_x in drei Komponenten aufzuspalten:

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} + J_{x3} \quad (11a)$$

mit

$$J_{x1} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \gamma_x}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \quad (11b)$$

$$J_{x2} = -\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \gamma_x}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cdot e^{-\gamma_x \cdot v_c^2} \quad (11c)$$

$$J_{x3} = \frac{\omega \cdot L}{2 \cdot \pi} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_x} \cdot v_c) \quad (11d)$$

Geht man damit in Gl. (6) ein, dann folgt

$$Z = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \int_{(r)} \int_{(v_r)} J_x(r, v_r) \cdot f_r(v_r) \cdot dv_r \cdot r \cdot dr \quad (12)$$

6. Das zwei-dimensionale Integrationsgebiet $r - v$, beziehungsweise $r - \rho$

Die Treffer-Bedingung, also die Wahrscheinlichkeit P dafür, daß ein Teilchen den Zylindermantel trifft, hängt (siehe /1/) noch davon ab, ob $r \geq a$ oder $0 < r < a$ ist. Im ersten Falle muß gelten

$$(r - a) \leq \rho \leq (r + a) \tag{13}$$

Im zweiten Falle muß gelten

$$(a - r) \leq \rho \leq (r + a) \tag{13a}$$

Das Integrationsgebiet wird also durch die folgenden drei Geraden begrenzt

$$\left. \begin{array}{l} g_1: \quad r = \rho + a \\ g_2: \quad r = \rho - a \\ g_3: \quad r = a - \rho \end{array} \right\} \tag{14}$$

mit r und $\rho \geq 0$.

Die Geraden g_1 und g_2 verlaufen parallel, sie stehen senkrecht auf g_3 . Das Integrationsgebiet ist in Fig. 1 schraffiert dargestellt.

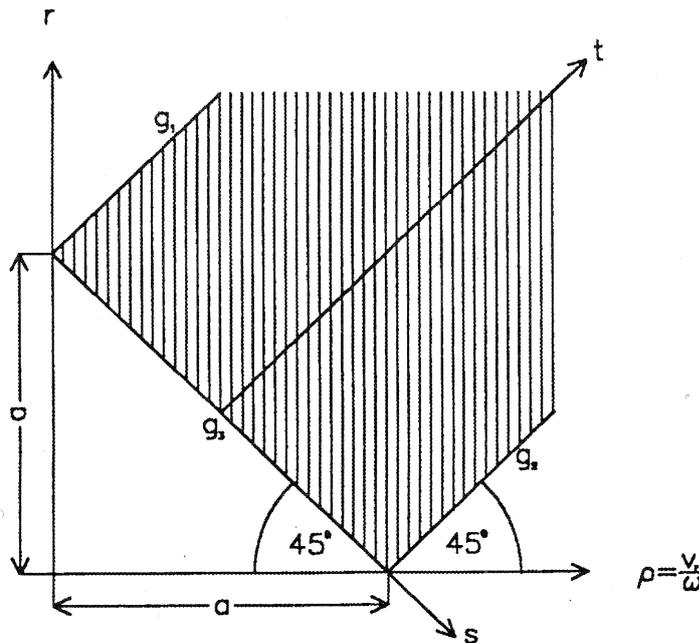


Fig. 1: Das Integrationsgebiet (schraffiert) in ρ - r -Koordinaten und s - t -Koordinaten

Vor einer weiteren Behandlung des Integrals in Gl. (12) wird die AMEMIYA-Größe κ eingeführt.

7. Die AMEMIYA-Größe κ

AMEMIYA definiert eine dimensionslose Größe κ

$$\kappa = \omega \cdot a \cdot \sqrt{\gamma_r} \quad (15)$$

und führt den Kurvenparameter QL ein

$$QL = \frac{L}{a} \quad (16)$$

Hier wird eine weitere Größe QT definiert als das Verhältnis von radialer Temperatur T_r zu axialer Temperatur T_x in der Form

$$QT = \frac{\sqrt{T_r}}{\sqrt{T_x}} = \frac{\sqrt{\gamma_x}}{\sqrt{\gamma_r}} \quad (17)$$

Es ist ferner die Anzahl Z der auf den Zylindermantel auftreffenden Teilchen auf den Teilchenfluß Φ_x zu beziehen, der die Stirnfläche des Zylinders trifft. In Gl. (12) beziehungsweise Gl. (11) ist also durch den in Gl. (5) angegebenen Term Φ_x zu dividieren. Zu diesem Zwecke schreiben wir Gl. (11d) in der Form

$$J_{x3} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \gamma_x}} \cdot \frac{\kappa \cdot QL \cdot QT}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_x} \cdot v_c) \quad (18)$$

Entsprechend ergibt sich mit Gl. (8) für das Argument der erfc-Funktion (es soll mit \arg bezeichnet werden)

$$\sqrt{\gamma_x} \cdot v_c = \arg = \frac{\kappa \cdot QL \cdot QT}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \frac{\alpha}{\pi})} \quad (19)$$

Es gilt dann für J_x in Gl. (11)

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \gamma}} \cdot F_x(r, v_x) \quad (20)$$

mit

$$F_x = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cdot \left(1 - e^{-\arg^2}\right) + \frac{\kappa \cdot QL \cdot QT}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{erfc}(\arg) \quad (21)$$

Geht man mit Gl. (7) zur $r - \rho$ - Darstellung über und setzt für $f_x(v_r)$ den Ausdruck von Gl. (3) ein, dann folgt für Gl. (12)

$$Z = \frac{n \cdot 4 \cdot \pi \cdot \omega^2 \cdot \gamma}{\sqrt{\pi \cdot \gamma}} \cdot \int_{(r)} \int_{(\rho)} F_x(r, \rho) \cdot e^{-\gamma \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot r \cdot dr \quad (22)$$

beziehungsweise mit Gl. (3)

$$Z = \Phi_x \cdot \frac{4 \cdot \kappa^2}{a^4} \cdot \int_{(r)} \int_{(\rho)} F_x(r, \rho) \cdot e^{-\kappa^2 \cdot \rho^2 / a^2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot r \cdot dr \quad (23)$$

Setzt man in Gl. (12) für J_x den Ausdruck J_{x1} nach Gl. (11b) ein, dann kann das Integral geschlossen dargestellt werden (siehe ANHANG A). Es ergibt sich, wenn man in diesem Sonderfall Z_1 für Z schreibt

$$Z_1 = \Phi_x \cdot \left[\frac{1 - e^{-\kappa^2}}{\kappa^2} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot (\operatorname{erfc}(\kappa) + 1)}{\kappa} \right] \quad (24)$$

Das ist in Übereinstimmung mit AMEMIYA (siehe die Gl. (14) in /1/). Für $\kappa \rightarrow 0$ wird Z_1 unendlich, für $\kappa \rightarrow \infty$ wird $Z_1 = 0$.

Das allgemeine Integral mit J_x nach Gl. (11) kann anscheinend nur numerisch gelöst werden.

8. Integrationsverfahren nach GAUSS

Das Integrationsgebiet ist in Fig. 1 dargestellt. Die Integration ist bezüglich ρ zunächst zu erstrecken von 0 bis a , wobei die Integration über r von g_3 bis g_1 läuft.

Dann ist die Integration bezüglich ρ zu erstrecken von a bis ∞ , dabei ist die r -Integration zu nehmen zwischen den Geraden g_2 und g_1 .

Das Doppelintegral Gl. (23) ist also für jedes Teilgebiet zu lösen. Die Integration vereinfacht sich erheblich, wenn man das Integrationsgebiet dreht. Dazu werden neue Koordinaten s und t eingeführt, so daß gilt

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{a}{2} \cdot (1 + s + t) \\ r &= \frac{a}{2} \cdot (1 - s + t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Es ist dann die Gerade g_1 gegeben durch $s = -1$, die Gerade g_2 durch $s = +1$, die Gerade g_3 durch $t = 0$.

Der Ausdruck für α in Gl. (10) stellt sich dar in der Form

$$\alpha = \arccos \left[\frac{(1+t)^2 + s^2 - 2}{(1+t)^2 - s^2} \right] \quad (26)$$

Man sieht (was natürlich auch aus Gl. (10) folgt): Es ist $\alpha = 0$ für $s = \pm 1$, sofern $t > 0$. Es ist $\alpha = \pi$ für $t = 0$. Der Fall $s = \pm 1$ und $t = 0$ ist unbestimmt.

Das Integral über s ist zu erstrecken von -1 bis $+1$, für t von 0 bis ∞ .

Die Integration über einen endlichen Integrationsbereich wird nach GAUSS-LEGENDRE durchgeführt. Danach gilt für das N-Punkte-Verfahren

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^N f(X_i) \cdot W_i \quad (27)$$

Die X_i sind geeignete Stützstellen im Bereich $(-1, +1)$, die W_i sind geeignete Gewichte. Die X_i und W_i werden mit dem IMSL-Programm DGQRUL /2/ berechnet.

Die Integration über den Integrationsbereich $0 \dots \infty$ wird nach GAUSS-LAGUERRE durchgeführt. Danach gilt für das N-Punkte-Verfahren

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^N f(X_i) \cdot W_i \quad (28)$$

Mit der JACOBI-Determinante $|D| = a^2/2$ und mit $r \cdot \rho = a^2 \cdot [(1+t)^2 - s^2]/4$ erhält man

$$Z = \Phi_x \cdot \frac{\kappa^2}{2} \cdot \int_{t=0}^{\infty} \int_{s=-1}^{+1} F_x(r, \rho) \cdot e^{-[0.5 \cdot \kappa \cdot (1+s+t)]^2} \cdot [(1+t)^2 - s^2] \cdot ds \cdot dt \quad (29)$$

oder, als geeignete Darstellung für die Integration nach GAUSS-LAGUERRE,

$$Z = \Phi_x \cdot \frac{\kappa^2}{2} \cdot \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} \cdot G(t) \cdot dt \quad (30)$$

mit

$$G(t) = \int_{s=-1}^{+1} F_x(r, \rho) \cdot e^{-[0.5 \cdot \kappa \cdot (1+s+t)]^2 + t} \cdot [(1+t)^2 - s^2] \cdot ds \quad (30a)$$

9. Der Fall $\kappa = 0$

Der Fall $\kappa=0$ muß wegen Gl. (24) abgeschätzt werden, denn das (allgemeine) Integral in Gl. (12) beziehungsweise in den Gln. (29) bis (30a) enthält den obigen Spezialfall. Der Schluß, daß mit dem Faktor κ^2 in Gl. (30) auch Z verschwindet, ist deshalb unbegründet. Andererseits kann das Integral in Gl. (30), wenn es numerisch berechnet wird, nur endliche Werte annehmen. Dieser Spezialfall muß also gesondert behandelt werden.

Für diese Abschätzung ist die r - ρ -Darstellung besser geeignet als die s - t -Darstellung, die zu weniger übersichtlichen Ausdrücken führt. Entwickelt man F_x in Gl. (21) nach steigenden Potenzen von κ beziehungsweise wegen Gl. (19) nach \arg , dann erhält man mit

$$1 - e^{-\arg^2} = \arg^2 + O(\arg^4) = O(\kappa^2)$$

und

$$\operatorname{erfc}(\arg) = 1 - \operatorname{erf}(\arg) = 1 - O(\kappa)$$

eine Entwicklung der Form

$$F_x = \frac{\kappa \cdot QL \cdot QT}{2 \cdot \sqrt{\pi}} + O(\kappa^2) \quad (31)$$

Geht man mit diesem in κ linearen Term in Gl. (23) ein, dann ergibt sich für den Integrationsbereich $0 \leq \rho \leq a$ nach Integration über r von $a - \rho$ bis $a + \rho$ der Ausdruck

$$Z_1 = \Phi_x \cdot \frac{4 \cdot \kappa^3 \cdot QL \cdot QT}{a^3 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_{\rho=0}^a e^{-\kappa^2 \cdot \rho^2 / a^2} \cdot \rho^2 \cdot d\rho$$

und entsprechend für den Integrationsbereich $\rho \geq a$, wenn man zuvor die Integration über r von $\rho - a$ bis $\rho + a$ ausführt,

$$Z_2 = \Phi_x \cdot \frac{4 \cdot \kappa^3 \cdot QL \cdot QT}{a^3 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_{\rho=a}^{\infty} e^{-\kappa^2 \cdot \rho^2 / a^2} \cdot \rho^2 \cdot d\rho$$

Es ist also

$$Z = Z_1 + Z_2 = \Phi_x \cdot \frac{4 \cdot \kappa^3 \cdot QL \cdot QT}{a^3 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\kappa^2 \cdot \rho^2 / a^2} \cdot \rho^2 \cdot d\rho$$

Für das Integral erhält man mit der Substitution $t = \kappa^2 \cdot \rho^2 / a^2$

$$\frac{a^3}{2 \cdot \kappa^3} \cdot \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} \cdot t^{1/2} \cdot dt = \frac{a^3}{2 \cdot \kappa^3} \cdot \Gamma(3/2) = \frac{a^3}{2 \cdot \kappa^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

Damit folgt für $\kappa = 0$

$$Z = \Phi_x \cdot QL \cdot QT \tag{32}$$

10. Ergebnisse

Es ergab sich eine erhebliche Diskrepanz zwischen der von AMEMIYA /1/ angegebenen Sondencharakteristik und den nach der Monte-Carlo-Methode berechneten Werten. Das war der Grund, die analytischen Rechnungen von AMEMIYA zu wiederholen. In Fig. 2 sind die Monte-Carlo-Rechnungen und die analytischen Rechnungen zusammengestellt für $QL = 3, 5, 7$ und 10 im Bereich κ von 0 bis 2 . Die Monte-Carlo-Rechnungen wurden nur für $\kappa \geq 0,1$ durchgeführt. Es wurde $QT = 1$, also $T_r = T_x$ gesetzt. Man sieht, daß die Übereinstimmung sehr gut ist.

Ein wesentlicher Unterschied zu der von AMEMIYA angegebenen Sondencharakteristik besteht darin, daß dort die Kurven bei $\kappa = 0$ den Anstieg Null haben.

Auf eine Anisotropie der Temperaturverteilung kann aus einer einzigen Sondenmessung nur sehr bedingt geschlossen werden. Das zeigt Fig. 3. Dort wurde für eine Sonde mit $QL = L/a = 5$ das Verhältnis von T_r/T_x über einen weiten Bereich variiert. Offensichtlich ist hier die Kurve mit $T_r/T_x = 4$ identisch mit der Kurve mit $L/a = 10$ in Fig. 2. Das folgt aus den Gln. (17) bis (21). Durch den Faktor QT ändert sich das "effektive QL ".

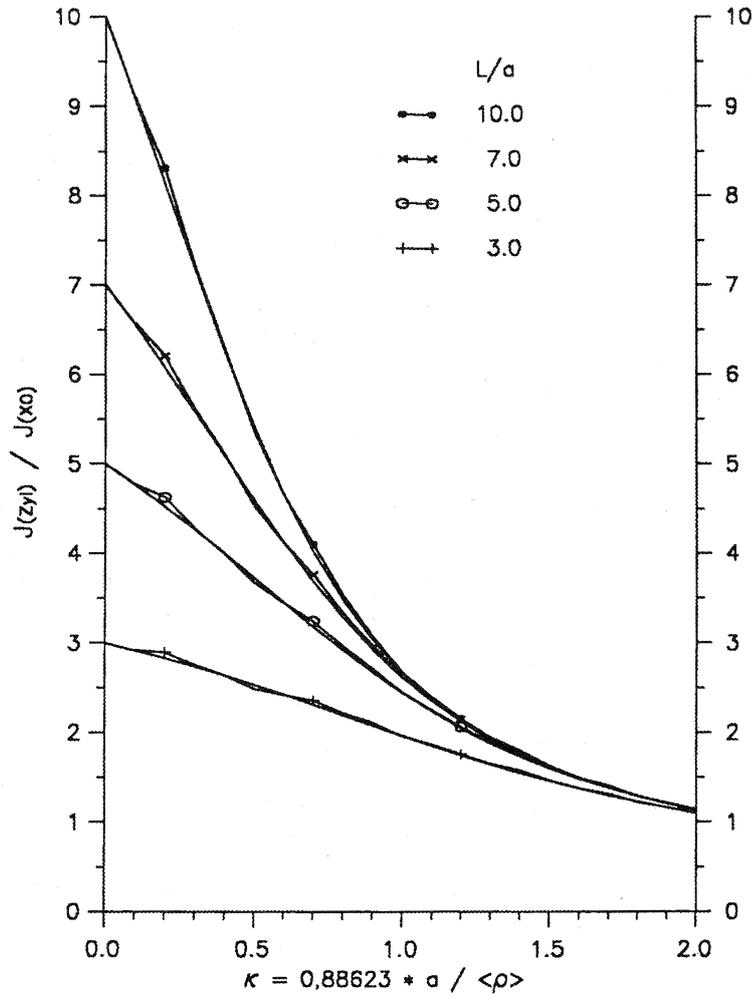


Fig. 2: Vergleich zwischen den analytischen und Monte-Carlo-Rechnungen

Auf das Vorhandensein einer Temperaturanisotropie kann (aus einer einzigen Messung) nur dann geschlossen werden, wenn $J(Zy)/J(x_0)$ größer ist als der QL-Wert der Sonde; im Falle der Fig. 3 also größer als 5. Für eine quantitative Aussage sind jedenfalls Messungen mit zwei Sonden mit unterschiedlichen QL-Werten erforderlich. Man müßte für

jede Sonde eine Graphik wie Fig. 3 erstellen und den κ -Wert bestimmen, für den jede Messung in die ihr entsprechende Sondencharakteristik paßt.

Das ist praktisch nicht machbar. Im nächsten Abschnitt wird eine Methode skizziert, wie solche Messungen ausgewertet werden können.

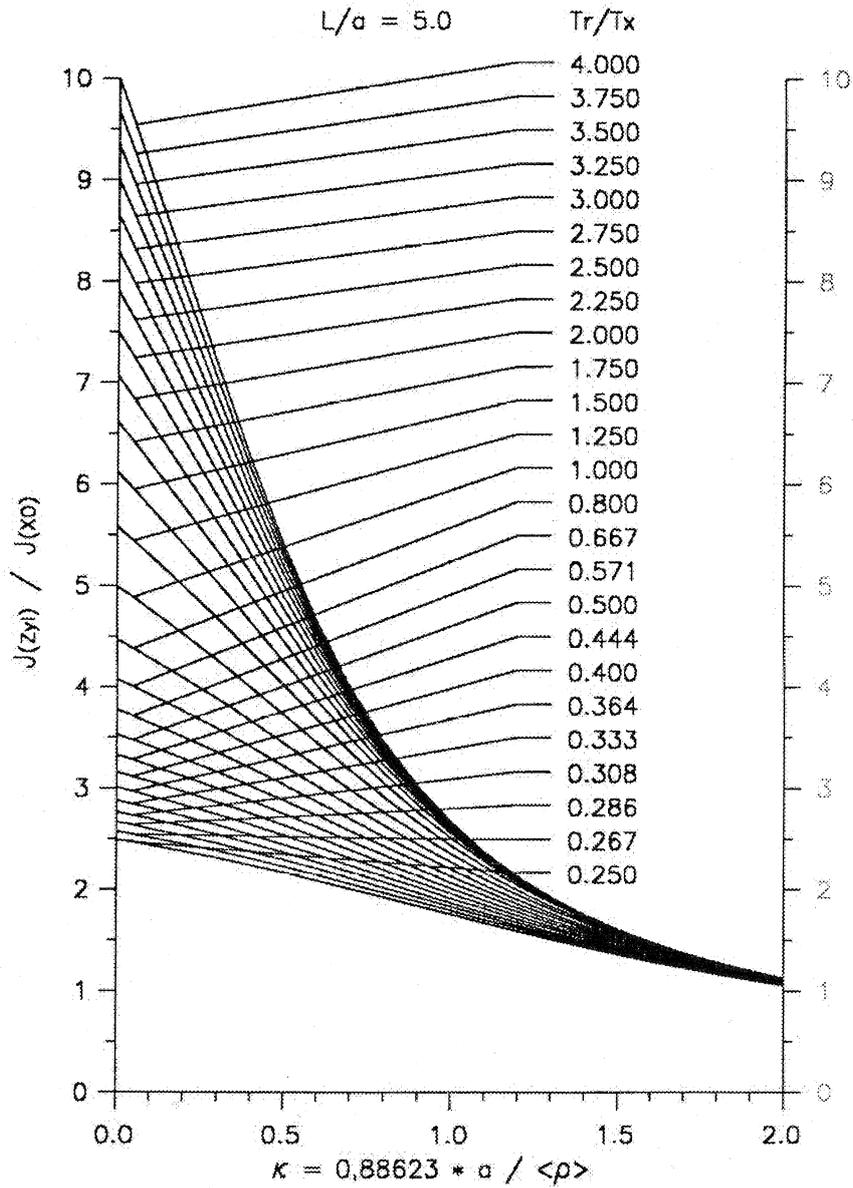


Fig. 3. Zusammenhang zwischen der normalisierten Stromstärke und der dimensionlosen Größe κ .

11. Bestimmung der Temperatur-Anisotropie

Wenn Temperatur-Anisotropie vorliegt, sind die Temperaturen T_x und T_r , beziehungsweise die Größen QT und κ zu bestimmen. Es ist dann die Anzahl der auf den Zylindermantel auftreffenden Teilchen (sie soll mit Z bezeichnet werden) eine Funktion dieser Größen

$$Z = f(T_x, T_r) = f(\kappa, QT) \quad (33)$$

Nun tritt nach den Gln. (18) bis (21) die Größe QT immer nur in Verbindung mit QL auf. Es wird deshalb ein "effektives" Q definiert

$$Q = QL \cdot QT \quad (34)$$

Es ist dann $Z = f(\kappa, Q)$.

Man kann damit, wie in Fig. 3 dargestellt, eine Kurvenschar berechnen für einen größeren Q - und κ -Bereich. Bezüglich Q muß der Bereich so groß sein, daß er die Messungen mit den beiden Sonden mit den unterschiedlichen QL -Werten abdeckt, - und zwar auch im Hinblick auf die Temperatur-Anisotropie. Aus einem solchen Datensatz läßt sich die Funktion $Z = f(\kappa, Q)$ darstellen. Das ist in Fig. 4 getan. Da zwischen $\kappa = 1$ und $\kappa = 2$ die Z -Werte sehr eng beieinander liegen (also eine sehr hohe Meßgenauigkeit erfordern würden), blieb dieser Bereich unberücksichtigt. Die Punkte haben einen Abstand $\delta\kappa = 0.05$ und $\delta Q = 0.25$. Das Gitter besteht aus $21 \cdot 31$ Punkten. In Fig. 4 sind nur einige "Iso- Z -Linien" dargestellt, ihre Werte lassen sich nach Gl. (32) an der Ordinatenachse ablesen.

Diese Kurven lassen sich darstellen in Form eines Doppelpolynoms

$$Z = \sum_{n=0}^{NQ} \sum_{k=0}^{NK} C(n,k) \cdot \kappa^k \cdot Q^n \quad (35)$$

Die Matrix $C(n,k)$ kann nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden. Hier wurde $NQ = NK = 4$ gewählt. Damit ergab sich ein mittlerer relativer Fehler von 0.0325 % und ein maximaler relativer Fehler von 0.1417 %. Die Approximation ist also sehr gut. Es wurde nicht versucht, sie durch eine andere Wahl von NQ oder NK zu optimieren. Eine weitere Möglichkeit der Optimierung besteht übrigens darin, in Gl. (34) statt nach Q nach $\log(Q)$ zu entwickeln, was insbesondere für größere Q und größere NQ angemessen erscheint. Die Matrixkoeffizienten $C(n,k)$ für den hier dargestellten Fall finden sich in Tab. I.

Fig. 4 zeigt die Problematik solcher Messungen. Zwei Zahlenbeispiele mögen das demonstrieren.

1. Messung

Die Sonde 1 hat den Wert $QL_1 = 6.6$ und ergibt den Meßwert $Z_1 = 4$, die Sonde 2 hat den Wert $QL_2 = 4$ und ergibt den Meßwert $Z_2 = 3$. Die Gerade $Q = 6.6$ schneidet die Kurve $Z = 4$ bei $\kappa = 0.6$, die Gerade $Q = 4$ schneidet die Kurve $Z = 3$ ebenfalls bei $\kappa = 0.6$. Es ist dann $QT = 1$ und $\kappa = 0.6$ für beiden Sonden, die Temperatur ist isotrop.

2. Messung

Die Sonde 1 hat den Wert $QL_1 = 8.25$ und ergibt den Meßwert $Z_1 = 4$, die Sonde hat den Wert $QL_2 = 5$ und ergibt den Meßwert $Z_2 = 3$. Hier sind sie κ -Werte für die Schnittpunkte der Geraden $Q = 8.25$ mit der Kurve $Z = 4$ und der Geraden $Q = 5$ mit der Kurve $Z = 3$ unterschiedlich. Der κ -Wert für den zweiten Schnittpunkt liegt zu weit rechts. Man sieht, daß der zweite Schnittpunkt dann schneller nach rechts wandert als der erste Schnittpunkt, wenn man die Q-Werte mit einem Faktor multipliziert, der größer als 1 ist. Multipliziert man die Q-Werte mit 0.8, dann liegen die Schnittpunkte bei $\kappa = 0.6$. Multipliziert man die Q-Werte mit einem noch kleineren Faktor, dann kommt der zweite Schnittpunkt weiter links zu liegen als der erste Schnittpunkt. Es ist also $QT = 0.8$.

Tab. 1: Matrix-Koeffizienten $C(n,k)$ in Gl. (35)

Kappa: min = 0.000, max = 1.000
 Q: min = 2.500, max = 10.000

n	k	$C(n,k)$
0	0	1.6537303872020021D-03
0	1	-8.4202494074102130D-02
0	2	6.6674914297374302D-01
0	3	-1.6531853755910790D+00
0	4	1.0361515188492678D+00
1	0	9.9821270208222040D-01
1	1	8.7432214078068782D-02
1	2	-6.7412666683442971D-01
1	3	1.6306903227406127D+00
1	4	-9.9028695770726387D-01
2	0	7.2860711976540185D-04
2	1	-1.2392810848780537D-01
2	2	2.2997485083065758D-01
2	3	-6.1300039523505002D-01
2	4	3.4657789712672767D-01
3	0	-1.2825579625438054D-04
3	1	5.6824994653216802D-03
3	2	-4.0420110180096729D-02
3	3	8.8495761017382477D-02
3	4	-4.2411326563645671D-02
4	0	6.5058419130472186D-06
4	1	-2.7092368563630945D-04
4	2	1.7977842691631370D-03
4	3	-3.0940715599942929D-03
4	4	1.2544678116976812D-03

Mittlerer relativer Fehler: 0.0325 %
 Maximaler relativer Fehler: 0.1417 %

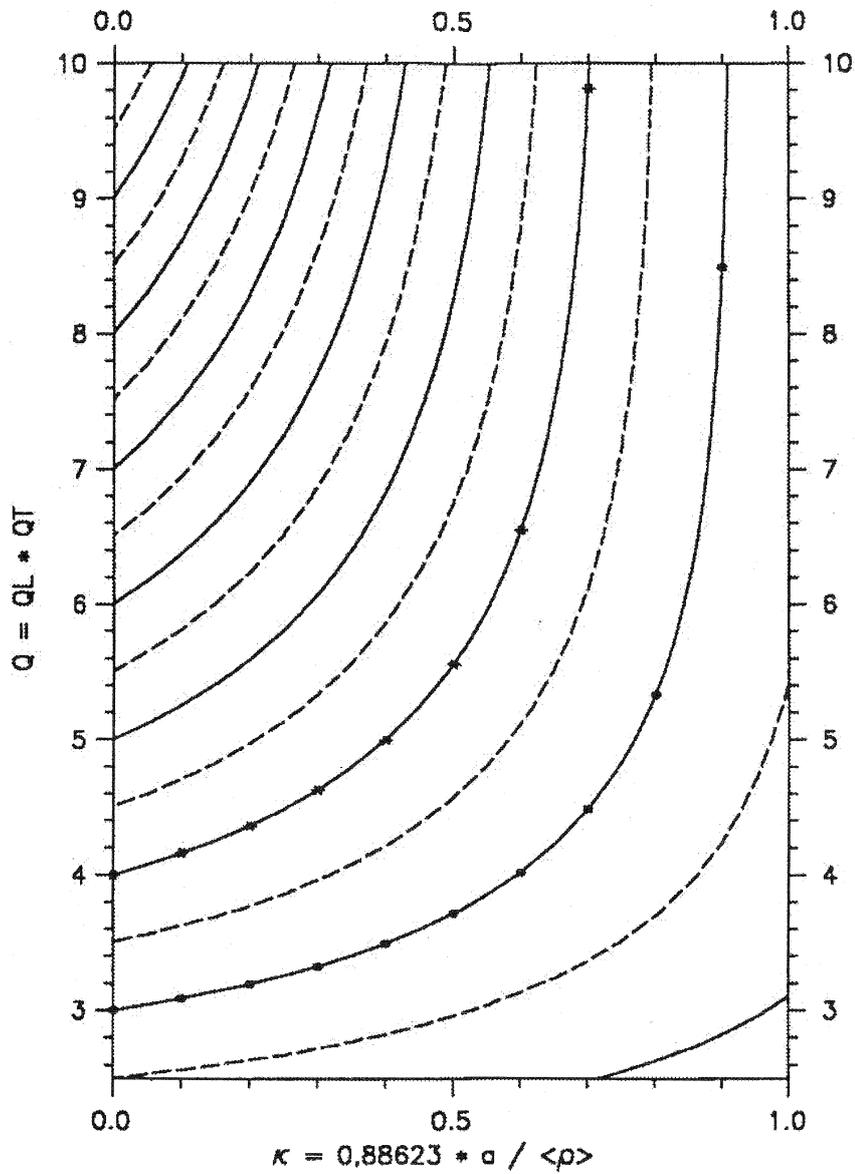


Fig. 4: Die Funktion $Z = f(\kappa, Q)$ als Höhenlinienbild

Zur maschinellen Auswertung solcher Messungen benötigt man eine Darstellung der Iso-Z-Linien in der Form

$$Q = f(\kappa, Z) \tag{36}$$

Man hat damit für die beiden Sonden mit QL_1 und Z_1 beziehungsweise QL_2 und Z_2 die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} QL_1 \cdot QT &= f(\kappa, Z_1) \\ QL_2 \cdot QT &= f(\kappa, Z_2) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

aus denen folgt

$$\frac{QL_1}{QL_2} = \frac{f(\kappa, Z_1)}{f(\kappa, Z_2)} \quad (37a)$$

Es ist dann (durch Iteration) ein solches κ zu bestimmen, daß Gl. (37a) erfüllt ist. Der QT-Wert folgt dann unmittelbar aus einer der beiden in Gl. (37) angegebenen Beziehungen.

Ein linearer Polynomansatz für Q analog zu dem für Z in Gl. (35) führt (jedenfalls für das in Fig. 4 dargestellte Beispiel) nicht zu einer hinreichend genauen Approximation. Das liegt offenbar an dem sehr steilen Anstieg der Iso-Z-Linien bei größeren κ -Werten. Es wird deshalb eine Spline-Approximation durchgeführt. Hierfür sind zunächst geeignete Stützstellen zu berechnen.

Dazu werden die Differentialgleichungen für die beiden Iso-Z-Linien verwendet. Für sie folgt aus Gl. (35) wegen $dZ/d\kappa = 0$

$$\frac{dQ}{d\kappa} = - \frac{\sum_{n=0}^{NQ} \sum_{k=1}^{NK} C(n,k) \cdot \kappa^{k-1} \cdot Q^n}{\sum_{n=1}^{NQ} \sum_{k=0}^{NK} C(n,k) \cdot \kappa^k \cdot n \cdot Q^{n-1}} \quad (38)$$

Wegen Gl. (32) und Gl. (35) muß für den Anfangswert Q_0 von Q bei $\kappa = 0$ gelten

$$Z = Q_0 = \sum_{n=0}^{NQ} C(n,0) \cdot Q_0^n \quad (39)$$

Wie gut diese Bedingung erfüllt ist, hängt von der Güte der Approximation in Gl. (35) ab. In Tab. 2 sind diese Werte für $Z = 4$ und $Z = 3$ zusammengestellt.

Tab.2: Der Wert nach Gl.(39) und der relative Fehler

Z_0	nach Gl.(39)	rel. Fehler (%)
4.00000D+00	3.99962D+00	9.53674D-03
3.00000D+00	2.99991D+00	2.89281D-03

In Fig. 4 sind für $Z = 4$ und $Z = 3$ die Linien berechnet und einige Linienpunkte gekennzeichnet. Sie dienen als Stützpunkte für die Spline-Darstellungen dieser Kurven. Man kann dann (innerhalb der durch diese Stützpunkte vorgegebenen Grenzen) für jeden κ -Wert den zugehörigen Wert $f_1 = f(\kappa, Z_1)$ beziehungsweise $f_2 = f(\kappa, Z_2)$ und daraus das Verhältnis $v = f_1/f_2$ berechnen. Für die beiden oben angenommenen Messungen muß sein

$v = 6.6/4 = 1.65$ beziehungsweise $v = 8.25/5 = 1.65$. Tab. 3 gibt für verschiedene κ die Werte f_1 , f_2 und v . Der richtige κ -Wert ist etwas größer als 0.6. Man erhält ihn durch Iteration zu $\kappa = 0.6069$. Entsprechend ist für die 1. Messung $QT = 1.0119$, für die 2. Messung $QT = 0.8095$.

Tab.3: Der κ -Wert mit f_1 , f_2 und v .

κ	f_1	f_2	v
0.700	9.812	4.488	2.186
0.600	6.551	4.021	1.629
0.500	5.556	3.714	1.496
0.400	4.998	3.493	1.431
0.300	4.628	3.326	1.391
0.200	4.361	3.194	1.365
0.100	4.159	3.088	1.347
0.000	4.000	3.000	1.333

Es ist in diesem Zusammenhang nicht uninteressant zu sehen, wie Meßfehler das Meßergebnis beeinflussen. Nimmt man an, daß die gemessenen Z-Werte mit einem Fehler von 3 % behaftet sind, dann hat man insgesamt sechs Kurven, die Meßwerte Z und jeweils die Werte $Z \pm \delta Z$. Für $Z = 4$ und $Z = 3$ sind diese Kurven in Fig. 5 dargestellt. Die Auswertung zeigt Ta. 4.

Tab.4: Die Auswertung der QT1 und QT2 für κ .

Z1 = 4.000,	Z2 = 3.000	
Kappa = 0.6069,	QT1 = 1.0119,	QT2 = 0.8095
Z1 = 4.120,	Z2 = 3.090	
Kappa = 0.6034,	QT1 = 1.0725,	QT2 = 0.8580
Z1 = 4.120,	Z2 = 2.910	
Kappa = 0.6034,	QT1 = 1.0725,	QT2 = 0.8580
Z1 = 3.880,	Z2 = 3.090	
Kappa = 0.6690,	QT1 = 1.1323,	QT2 = 0.9059
Z1 = 3.880,	Z2 = 2.910	
Kappa = 0.6690,	QT1 = 1.1326,	QT2 = 0.9061

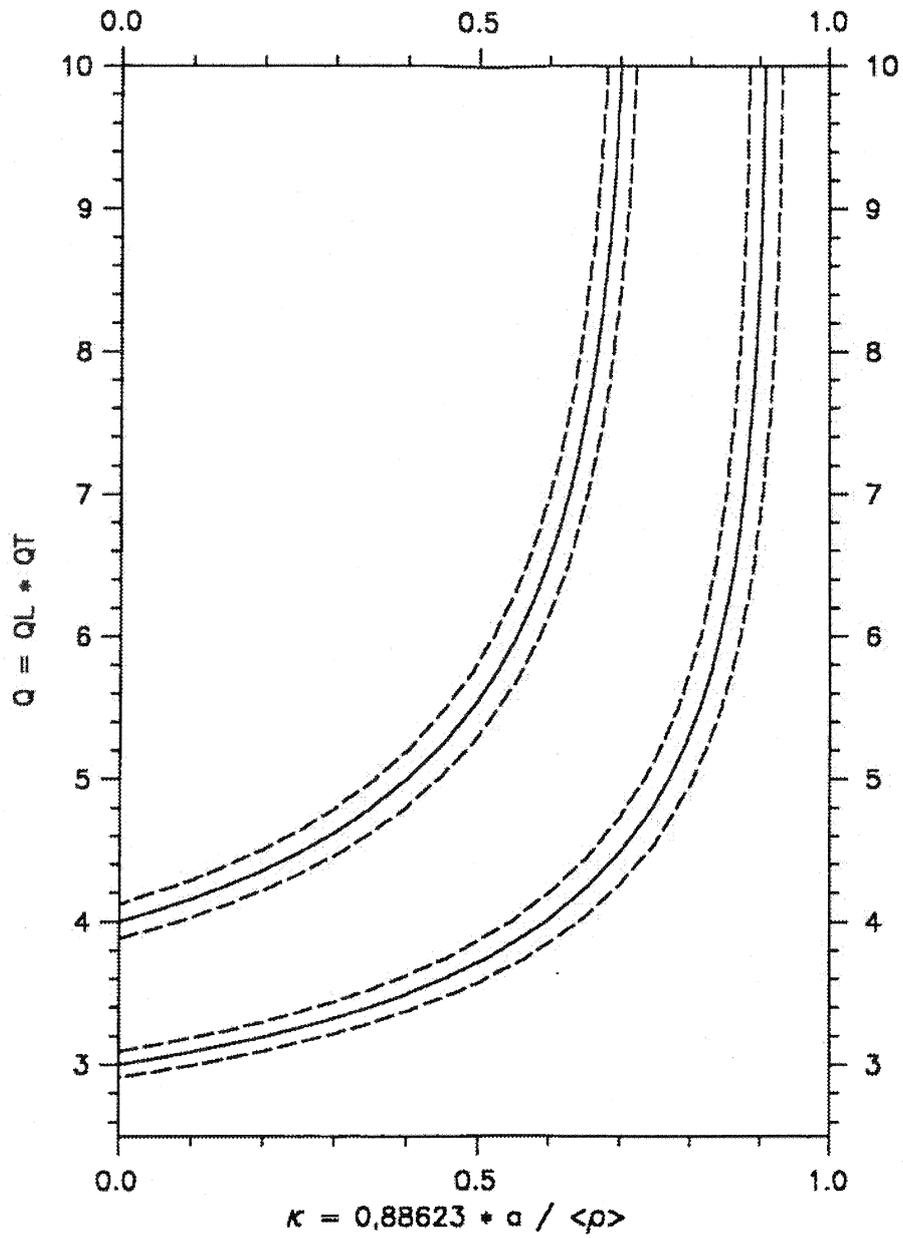


Fig. 5: Der Wert Q gegen κ .

ANHANG A

Das Integral

$$J = \int \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cdot r \cdot dr \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\alpha = \arccos \left[\frac{r^2 + \rho^2 - a^2}{2 \cdot r \cdot \rho} \right], \quad 0 \leq \alpha < \pi$$

Für das unbestimmte Integral gilt (unter Fortlassung der Integrationskonstanten)

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \left(\frac{r^2 + \rho^2 - a^2}{2 \cdot r \cdot \rho} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot a^2 \cdot \arcsin \left(\frac{r^2 - \rho^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot \rho} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \rho^2 - (r^2 - a^2 - \rho^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Anmerkung A1:

Der von AMEMIYA /1/ angegebene Ausdruck unterscheidet sich hiervon durch die Faktoren vor der arcsin-Funktion und vor der Wurzel.

Das bestimmte Integral wird in zwei Integrationsgebieten verwendet. Im Integrationsgebiet I mit $0 \leq \rho \leq a$ wird es mit J(I) bezeichnet, im Integrationsgebiet II mit $a \leq \rho < \infty$ wird es mit J(II) bezeichnet. Die unteren und oberen Integrationsgrenzen für r sind die Geraden g_1 , g_2 und g_3 in Gl. (14).

Man zeigt leicht, daß die Wurzel in Gl. (A.2) auf allen drei Geraden verschwindet.

Es gilt für die Gerade g_1 mit $r = a + \rho$

$$\left. \begin{aligned} J(g_1) &= \frac{1}{2} \cdot (a + \rho)^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos(1) \right] - \\ &\quad - \frac{a^2}{2 \cdot \pi} \cdot \arcsin(1) = \frac{1}{2} \cdot (a + \rho)^2 - \frac{a^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3a})$$

für die Gerade g_2 mit $r = \rho - a$

$$\left. \begin{aligned} J(g_2) &= \frac{1}{2} \cdot (\rho - a)^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos(1) \right] - \\ &\quad - \frac{a^2}{2 \cdot \pi} \cdot \arcsin(-1) = \frac{1}{2} \cdot (\rho - a)^2 + \frac{a^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3b})$$

und für die Gerade g_3 mit $r = a - \rho$

$$\left. \begin{aligned} J(g_3) &= \frac{1}{2} \cdot (a - \rho)^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{\pi} \cdot \arccos(-1) \right] - \\ &\quad - \frac{a^2}{2 \cdot \pi} \cdot \arcsin(-1) = \frac{a^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3c})$$

Damit gilt für das Integrationsgebiet I mit $0 \leq \rho \leq a$

$$J(\text{I}) = J(g_1) - J(g_3) = \frac{1}{2} \cdot (a + \rho)^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\rho^2 + 2 \cdot a \cdot \rho) \quad (\text{A.4})$$

und für das Integrationsgebiet II mit $a \leq \rho < \infty$

$$J(\text{II}) = J(g_1) - J(g_2) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot a \cdot \rho - a^2) \quad (\text{A.5})$$

Die Ausdrücke $J(\text{I})$ und $J(\text{II})$ sind mit der Verteilungsdichte $f_r(v_r)$ nach Gl. (3) zu multiplizieren und nach Transformation auf ρ gemäß Gl. (7) zwischen 0 und a beziehungsweise zwischen a und ∞ zu integrieren. Das ergibt, wenn die Bezeichnungen $J(\text{I})$ und $J(\text{II})$ für diese neuen Integrale beibehalten werden,

$$J(\text{I}) = \gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \int_0^a (\rho^2 + 2 \cdot a \cdot \rho) \cdot e^{-\gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \quad (\text{A.6})$$

und

$$J(\text{II}) = \gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \int_a^\infty e^{-\gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} \cdot (4 \cdot a \cdot \rho - a^2) \cdot d\rho \quad (\text{A.7})$$

Führt man mit AMEMIYA die Größe $\kappa = \sqrt{\gamma_r} \cdot \omega \cdot a$ ein (siehe oben den Abschnitt 7), dann gelten die folgenden Beziehungen

$$\int_0^a e^{-\gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} \cdot \rho^2 \cdot d\rho = \frac{a^3}{2 \cdot \kappa^3} \cdot \left[-\kappa \cdot e^{-\kappa^2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \text{erf}(\kappa) \right]$$

$$\int_a^\infty e^{-\gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} \cdot \rho^2 \cdot d\rho = \frac{a^3}{2 \cdot \kappa^3} \cdot \left[\kappa \cdot e^{-\kappa^2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \text{erfc}(\kappa) \right]$$

$$\int_a^\infty e^{-\gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{a^2}{2 \cdot \kappa^2} \cdot e^{-\kappa^2}$$

$$\int_0^a e^{-\gamma_r \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} \cdot \rho^3 \cdot d\rho = \frac{a^4}{2 \cdot \kappa^4} \cdot [1 - e^{-\kappa^2} - \kappa^2 \cdot e^{-\kappa^2}]$$

Es ergibt sich damit

$$J = J(I) + J(II) = \frac{a^2}{2} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\kappa^2}}{\kappa^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} \cdot (\operatorname{erfc}(\kappa) + 1) \right] \quad (\text{A.8})$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $1/\sqrt{\pi \cdot \gamma_x}$ (siehe den Ausdruck für J_{x1} in Gl. (11b)) und berücksichtigt man ferner Gl. (5), dann ergibt sich für diesen Anteil am Integral J_x die Anzahl der auf den Zylindermantel auftreffenden Teilchen zu

$$Z = \Phi_{x1} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\kappa^2}}{\kappa^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} \cdot (\operatorname{erfc}(\kappa) + 1) \right] \quad (\text{A.9})$$

Anmerkung A2:

Der Ausdruck für Z in Gl. (A.9) stimmt überein mit dem von AMEMIYA angegebenen Ausdruck. Möglicherweise handelt es sich bei dem Ausdruck für J in /1/ um einen Druckfehler.

12. Anwendungen

Eine asymmetrische Doppelsonde bestehend aus zwei unterschiedlich langen Zylindern mit gleichem Radius wurde gebaut, um damit die Ionen- Temperatur in der Randschicht von Tokamaks zu messen. Die Doppelsonde wurde auf einen beweglichen Mechanismus aufgesetzt und kann parallel zum Magnetfeld von der Wand bis zum Kernplasma des Tokamak JFT-2M verschoben werden. Die mechanische Konstruktion erlaubt die Justierung der Sonden-Achse parallel zum Magnetfeld, indem der Strom minimiert wird. Das Verhältnis der Sättigungsströme zwischen den Elektroden ergibt κ , und damit die Ionentemperatur T_i . Diese wurde für verschiedene Positionen in der Randschicht gemessen [3]. Es empfiehlt sich, beim Entwurf der asymmetrischen Doppelsonde, diesen Wert κ im Bereich $\kappa < 1$ zu wählen wo das Stromverhältnis empfindlich von κ abhängt.

Ein ähnliches Experiment wurde auch am Textor Tokamak gemacht. Nach diesen Ergebnissen, wurde eine "Toothbrush probe" entwickelt, wobei eine Reihe dieser asymmetrischen Doppelsonden auf eine Platte kombiniert war, um damit die Messung an mehreren Punkten gleichzeitig durchzuführen [4].

Der gemessene Wert von T_i sind mit anderen Methoden wie Katsuma-Sonde d.h. "Ion sensitive probe" [5-7] und Höthkersche "Schattensonde" [8, 9] verglichen worden. Als ein zusätzliches fruchtbares Ergebnis, konnte man den Ionenfluss aus der Einhüllenden des Sättigungsstroms abschätzen. Daraufhin wurden dazu geeignete Doppelsonden entwickelt, wodurch die Machzahl bestimmen werden konnte [10, 11]. Von diesen Messergebnissen der e-Abfalllänge der Dichte und Temperaturen, gelang es uns, die Transportgleichung in der Randschicht zu verifizieren und die Teilchen- und Thermo- diffusinkoeffizienten im Vergleich mit dem Bohmschen Koeffizienten zu bestimmen [12-14].

Wir weisen darauf hin, dass die oben erwähnten Ergebnisse im Schlußbericht des JFT-2M, 2006 Auflage der Fusion Sci. & Technology zusammengefasst sind. Überdies ist die vorhandene Sonde nicht nur auf die obige asymmetrischen Anordnung der Zylinder begrenzt. Man könnte weitere Modifikation machen, z.B. durch ein Paar gleicher Zylinder wobei die Seite eines der Zylinder ein Isolator ist, oder eine Kombination von einem Zylinders und einer Platte deren Oberfläche parallel mit der Stirnoberfläche des Zylinders ist. Auf diese Weise, kann man den Einfluss des Ionenstroms beseitigen. Eine Review [17], weitere Entwicklung [18,19] und Anwendung auf den Tokamak TRIAM-1M in [20] sind neulich aufgeführt.

Zum Schluss, danken wir den Herren Dr. G. Fuchs, Dr. K. Höthker, FZJ, und Dr. Y. Sadamoto, Joetsu Erziehung Univ., für ihre anregenden Diskussionen.

Literturen

1. H. Amemiya, "Measuring Method for Ion Temperature by Asymmetric Probes in Magnetic Fields", Jpn. J. Appl. Phys. **28** pp.1109-1112 (1989).
2. FORTRAN Subroutines for Mathematical Applications IMSL, Version 1.0, p.607 ff. (1987).
3. H. Amemiya and K. Uehara, "Ion Temperature Measuring Probe in a Strongly Magnetized Plasma", Rev. Sci. Instrum. **65** pp.2607-2614 (1994).
4. K. Uehara, S. Sengoku and H. Amemiya and JFT-2M group, "Toothbrush Probe for Instantaneous Measurement of Radial Profile in Tokamak Boundary Plasma", Jp. J. Appl. Phys. **36** pp.2351-2355 (1997).
5. I. Katsumata, "A Review of Ion Sensitive Probes", Contrib. Plasma Phys. **36** pp.73-80 (1996).
6. K. Uehara, A. Tsushima and H. Amemiya and JFT-2M group, "Direct Measurement of Ion Behavior using Modified Ion Sensitive Probe in Tokamak Boundary Plasma", J. Phys. Soc. Jpn. **66** pp.921-924 (1997).

7. K. Uehara, R. Fukumoto, A. Tsushima, H. Amemiya, "Evaluation of Ion Temperature Using Ion Sensitive Probe in the Boundary Plasma of JFT-2M Tokamak", *J. Phys. Soc. Jpn.* **72** pp.2804-2810 (2003).
8. K. Höthker, H. J. Belitz, W. Bieger and H. Amemiya, "A new method to determine ion temperatures in magnetized plasmas by means of an electrostatic probe", *Rev. Sci. Instrum.* **61** pp.114-120 (1990).
9. K. Uehara, T. Kawakami, H. Amemiya, K. Hoethker, A. Cosler, W. Bieger, "Measurements of Ion Temperature and Flow Velocity Using Symmetric and Asymmetric Double Probes in the Boundary Plasma of JFT-2M Tokamak", *Nuclear Fusion* **38** pp.1665-1674 (1998).
10. M. Maeda, K. Uehara and H. Amemiya, "Simultaneous Measurements of Plasma Flow and Ion Temperature Using the Asymmetric Double Probe", *Jpn. J. Appl. Phys.* **36** pp.6992-6993 (1997).
11. M. Maeda, K. Uehara and H. Amemiya, "Measuring Method of Mach Number in Tokamak Edge Plasma Using Probes", *Jpn. J. Appl. Phys.* **38** pp.2971-2972 (1999).
12. K. Uehara, A. Tsushima and H. Amemiya, "Transport Model of Boundary Plasma and Estimation of Transport Coefficients", *Czech. J. Phys.* **48** (S2) pp.339-344 (1998).
13. A. Tsushima, K. Uehara and H. Amemiya, "Particle and Heat Transports in the Scrape-off Layer of JFT-2M Tokamak", *J. Plasma Fusion Res. Series* **2** pp.81-84 (1999).
14. K. Uehara, M. Maeda, A. Tsushima and H. Amemiya, "Evaluation of Particle and Thermal Diffusivities in the Scrape-off Layer Plasma in JFT-2M Tokamak", *Contrib. Plasma Phys.* **42** pp.384-388 (2002).
15. S. Kasai, K. Kamiya, K. Shinohara, H. Kawashima, H. Ogawa, K. Uehara, Y. Miura, F. Okano, S. Suzuki, K. Hoshino, K. Tsuzuki, M. Sato, K. Oasa, Y. Kusama, T. Yamauchi, Y. Nagashima, K. Ida, S. Hidekuma, T. Ido, Y. Hamada, A. Nishizawa, Y. Kawasumi, Y. Uesugi, S. Okajima, K. Kawahata, A. Ejiri, H. Amemiya, Y. Sadamoto, "Plasma diagnostics in JFT-2M", *Fusion Sci. & Technol.* **49** pp.225-240 (2006).
16. H. Kawashima, S. Sengoku, K. Uehara, H. Tamai, T. Shoji, H. Ogawa, T. Shibata, M. Yamamoto, Y. Miura, Y. Kusama, H. Kimura, H. Amemiya, Y. Sadamoto, "Study of SOL/Divertor Plasmas in JFT-2M", *Fusion Sci. & Technol.* **49** pp.168-186 (2006).
17. K. Uehara, "Probe measurement in Fusion Plasmas", *J. Plasma Fusion Res.* **81** pp.509-517 (2005), in Japanese
18. H. Amemiya and K. Uehara, "Method for Detection of Separatrix Surface Using Differential Double Probe", *Jpn. J. Appl. Phys.* **45** pp.247-250 (2006).
19. K. Uehara, K. Tsuzuki, H. Amemiya, Y. Nagashima, K. Hoshino and Y. Sadamoto, "Direct Identification of Magnetic Surface by a Differential Double Probe in JFT-2M", *Jp. J. Appl. Phys.* **45** pp.L630-633 (2006).
20. Y. Sadamoto, K. Uehara, H. Amemiya, M. Sakamoto, H. Zushi, K. Hanada, K. Sato, K. Nakamura, M. Hasegawa, H. Hoshika, M. Ogawa, K. Takaki and N. Kimura, "Ion Temperature Measurements of the Boundary Plasma in the TRIAM-1M Tokamak", geschickt zum *J. Plasma and Fusion Res.* (2009).

This is a blank page.

国際単位系 (SI)

表1. SI基本単位

基本量	SI基本単位	
	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質の量	モル	mol
光度	カンデラ	cd

表2. 基本単位を用いて表されるSI組立単位の例

組立量	SI基本単位	
	名称	記号
面積	平方メートル	m ²
体積	立法メートル	m ³
速度	メートル毎秒	m/s
加速度	メートル毎秒毎秒	m/s ²
波長	メートル	m
密度	キログラム毎立方メートル	kg/m ³
面積密度	キログラム毎平方メートル	kg/m ²
比体積	立法メートル毎キログラム	m ³ /kg
電流密度	アンペア毎平方メートル	A/m ²
磁界の強度	アンペア毎メートル	A/m
濃度	モル毎立方メートル	mol/m ³
質量濃度	キログラム毎立法メートル	kg/m ³
輝度	カンデラ毎平方メートル	cd/m ²
屈折率 ^(a)	(数字の)	1
比透磁率 ^(b)	(数字の)	1

(a) 量濃度 (amount concentration) は臨床化学の分野では物質濃度 (substance concentration) とよばれる。
 (b) これらは無次元量あるいは次元1をもつ量であるが、そのことを表す単位記号である数字の1は通常は表記しない。

表3. 固有の名称と記号で表されるSI組立単位

組立量	SI組立単位			
	名称	記号	他のSI単位による表し方	SI基本単位による表し方
平面角	ラジアン ^(b)	rad	1 ^(b)	m/m
立体角	ステラジアン ^(b)	sr ^(c)	1 ^(b)	m ² /m ²
周波数	ヘルツ ^(d)	Hz		s ⁻¹
力	ニュートン	N		m kg s ⁻²
圧力, 応力	パスカル	Pa	N/m ²	m ⁻¹ kg s ⁻²
エネルギー, 仕事, 熱量	ジュール	J	N m	m ² kg s ⁻²
仕事率, 工率, 放射束	ワット	W	J/s	m ² kg s ⁻³
電荷, 電気量	クーロン	C		s A
電位差 (電圧), 起電力	ボルト	V	W/A	m ² kg s ⁻³ A ⁻¹
静電容量	ファラド	F	C/V	m ⁻² kg ⁻¹ s ⁴ A ²
電気抵抗	オーム	Ω	V/A	m ² kg s ⁻³ A ⁻²
コンダクタンス	ジーメンズ	S	AV	m ⁻² kg ⁻¹ s ³ A ²
磁束	ウェーバ	Wb	Vs	m ² kg s ⁻² A ⁻¹
磁束密度	テスラ	T	Wb/m ²	kg s ⁻² A ⁻¹
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A	m ² kg s ⁻² A ⁻²
セルシウス温度	セルシウス度 ^(e)	°C		K
光強度	ルーメン	lm		cd sr ^(c)
放射線量の放射能 ^(f)	ベクレル ^(d)	Bq		lm/m ²
吸収線量, ビエネルギー当量, カーマ	グレイ	Gy	J/kg	m ² s ⁻²
線量当量, 周辺線量当量, 方向性線量当量, 個人線量当量	シーベルト ^(g)	Sv	J/kg	m ² s ⁻²
酸素活性化	カタール	kat		s ⁻¹ mol

(a) SI接頭語は固有の名称と記号を持つ組立単位と組み合わせても使用できる。しかし接頭語を付した単位はもはやコヒーレントではない。
 (b) ラジアンとステラジアンは数字の1に対する単位の特別な名称で、量についての情報を付したために使われる。実際には、使用する時には記号rad及びsrが用いられるが、習慣として組立単位としての記号である数字の1は明示されない。
 (c) 測光学ではステラジアンという名称と記号srを単位の表し方の中に、そのまま維持している。
 (d) ヘルツは周期現象についてのみ、ベクレルは放射性核種の統計的過程についてのみ使用される。
 (e) セルシウス度はケルビンの特別な名称で、セルシウス温度を表すために使用される。セルシウス度とケルビンの単位の大きさは同一である。したがって、温度差や温度間隔を表す数値はどちらの単位でも同じである。
 (f) 放射性核種の放射能 (activity referred to a radionuclide) は、しばしば誤った用語で"radioactivity"と記される。
 (g) 単位シーベルト (PV,2002,70,205) についてはCIPM勧告2 (CI-2002) を参照。

表4. 単位の中に固有の名称と記号を含むSI組立単位の例

組立量	SI組立単位		
	名称	記号	SI基本単位による表し方
粘り	パスカル秒	Pa s	m ⁻¹ kg s ⁻¹
力のモーメント	ニュートンメートル	N m	m ² kg s ⁻²
表面張力	ニュートン毎メートル	N/m	kg s ⁻²
角速度	ラジアン毎秒	rad/s	m ⁻¹ s ⁻¹ =s ⁻¹
角加速度	ラジアン毎秒毎秒	rad/s ²	m ⁻¹ s ⁻² =s ⁻²
熱流密度, 放射照度	ワット毎平方メートル	W/m ²	kg s ⁻³
熱容量, エントロピー	ジュール毎ケルビン	J/K	m ² kg s ⁻² K ⁻¹
比熱容量, 比エントロピー	ジュール毎キログラム毎ケルビン	J/(kg K)	m ² s ⁻² K ⁻¹
比エネルギー	ジュール毎キログラム	J/kg	m ² s ⁻²
熱伝導率	ワット毎メートル毎ケルビン	W/(m K)	m kg s ⁻³ K ⁻¹
体積エネルギー	ジュール毎立方メートル	J/m ³	m ⁻¹ kg s ⁻²
電界の強さ	ボルト毎メートル	V/m	m kg s ⁻³ A ⁻¹
電荷密度	クーロン毎立方メートル	C/m ³	m ⁻³ s A
電表面電荷	クーロン毎平方メートル	C/m ²	m ⁻² s A
電束密度, 電気変位	クーロン毎平方メートル	C/m ²	m ⁻² s A
誘電率	ファラド毎メートル	F/m	m ³ kg ⁻¹ s ⁴ A ²
透磁率	ヘンリー毎メートル	H/m	m kg s ⁻² A ⁻²
モルエネルギー	ジュール毎モル	J/mol	m ² kg s ⁻² mol ⁻¹
モルエントロピー, モル熱容量	ジュール毎モル毎ケルビン	J/(mol K)	m ² kg s ⁻² K ⁻¹ mol ⁻¹
照射線量 (X線及びγ線)	クーロン毎キログラム	C/kg	kg ⁻¹ s A
吸収線量	グレイ毎秒	Gy/s	m ² s ⁻³
放射強度	ワット毎ステラジアン	W/sr	m ⁴ m ⁻² kg s ⁻³ =m ² kg s ⁻³
放射輝度	ワット毎平方メートル毎ステラジアン	W/(m ² sr)	m ² m ⁻² kg s ⁻³ =kg s ⁻³
酵素活性濃度	カタール毎立方メートル	kat/m ³	m ³ s ⁻¹ mol

表5. SI接頭語

乗数	接頭語	記号	乗数	接頭語	記号
10 ²⁴	ヨタ	Y	10 ⁻¹	デシ	d
10 ²¹	ゼタ	Z	10 ⁻²	センチ	c
10 ¹⁸	エクサ	E	10 ⁻³	ミリ	m
10 ¹⁵	ペタ	P	10 ⁻⁶	マイクログラム	μ
10 ¹²	テラ	T	10 ⁻⁹	ナノ	n
10 ⁹	ギガ	G	10 ⁻¹²	ピコ	p
10 ⁶	メガ	M	10 ⁻¹⁵	フェムト	f
10 ³	キロ	k	10 ⁻¹⁸	アト	a
10 ²	ヘクト	h	10 ⁻²¹	ゼプト	z
10 ¹	デカ	da	10 ⁻²⁴	ヨクト	y

表6. SIに属さないが、SIと併用される単位

名称	記号	SI単位による値
分	min	1 min=60s
時	h	1 h=60 min=3600 s
日	d	1 d=24 h=86 400 s
度	°	1°=(π/180) rad
分	'	1'=(1/60)°=(π/10800) rad
秒	"	1"=(1/60)'=(π/648000) rad
ヘクタール	ha	1ha=1hm ² =10 ⁴ m ²
リットル	L, l	1L=1l=1dm ³ =10 ³ cm ³ =10 ⁻³ m ³
トン	t	1t=10 ³ kg

表7. SIに属さないが、SIと併用される単位で、SI単位で表される数値が実験的に得られるもの

名称	記号	SI単位で表される数値
電子ボルト	eV	1eV=1.602 176 53(14)×10 ⁻¹⁹ J
ダルトン	Da	1Da=1.660 538 86(28)×10 ⁻²⁷ kg
統一原子質量単位	u	1u=1 Da
天文単位	ua	1ua=1.495 978 706 91(6)×10 ¹¹ m

表8. SIに属さないが、SIと併用されるその他の単位

名称	記号	SI単位で表される数値
バール	bar	1 bar=0.1MPa=100kPa=10 ⁵ Pa
水銀柱ミリメートル	mmHg	1mmHg=133.322Pa
オングストローム	Å	1 Å=0.1nm=100pm=10 ⁻¹⁰ m
海里	M	1 M=1852m
バイン	b	1 b=100fm ² =(10 ⁻¹⁵ cm) ² =10 ⁻²⁸ m ²
ノット	kn	1 kn=(1852/3600)m/s
ネーパ	Np	SI単位との数値的な関係は、対数量の定義に依存。
ベベル	B	
デジベル	dB	

表9. 固有の名称をもつCGS組立単位

名称	記号	SI単位で表される数値
エルグ	erg	1 erg=10 ⁻⁷ J
ダイン	dyn	1 dyn=10 ⁻⁵ N
ポアズ	P	1 P=1 dyn s cm ⁻² =0.1Pa s
ストークス	St	1 St=1cm ² s ⁻¹ =10 ⁻⁴ m ² s ⁻¹
スチルブ	sb	1 sb=1cd cm ⁻² =10 ⁴ cd m ⁻²
フォト	ph	1 ph=1cd sr cm ⁻² 10 ⁴ lx
ガリ	Gal	1 Gal=1cm s ⁻² =10 ⁻² ms ⁻²
マクスウェル	Mx	1 Mx=1G cm ² =10 ⁸ Wb
ガウス	G	1 G=1Mx cm ⁻² =10 ⁴ T
エルステッド ^(c)	Oe	1 Oe ≐ (10 ³ /4π)A m ⁻¹

(c) 3元系のCGS単位系とSIでは直接比較できないため、等号「≐」は対応関係を示すものである。

表10. SIに属さないその他の単位の例

名称	記号	SI単位で表される数値
キュリー	Ci	1 Ci=3.7×10 ¹⁰ Bq
レントゲン	R	1 R=2.58×10 ⁻⁴ C/kg
ラド	rad	1 rad=1cGy=10 ⁻² Gy
レム	rem	1 rem=1 cSv=10 ⁻² Sv
ガンマ	γ	1 γ=1 nT=10 ⁻⁹ T
フェルミ	f	1フェルミ=1 fm=10 ⁻¹⁵ m
メートル系カラット		1メートル系カラット=200 mg=2×10 ⁻⁴ kg
トル	Torr	1 Torr=(101 325/760) Pa
標準大気圧	atm	1 atm=101 325 Pa
カロリ	cal	1cal=4.1858J (「15°C」カロリ), 4.1868J (「IT」カロリ), 4.184J (「熱化学」カロリ)
マイクロン	μ	1 μ=1μm=10 ⁻⁶ m

