JAEA-Research 2015-009 DOI:10.11484/jaea-research-2015-009



中性子多重相関計数法の数理的基礎 - ウラン・プルトニウム混合二酸化物の例-

Essentials of Neutron Multiplicity Counting Mathematics – An Example of U-Pu Mixed Dioxide –

細馬 隆

Takashi HOSOMA

バックエンド研究開発部門 核燃料サイクル工学研究所 再処理技術開発センター 技術部

Technology Development Department Tokai Reprocessing Technology Development Center Nuclear Fuel Cycle Engineering Laboratories Sector of Decommissioning and Radioactive Waste Management **P**

August 2015

日本原子力研究開発機構

Japan Atomic Energy Agency

本レポートは国立研究開発法人日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。 本レポートの入手並びに著作権利用に関するお問い合わせは、下記あてにお問い合わせ下さい。 なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ホームページ(<u>http://www.jaea.go.jp</u>) より発信されています。

国立研究開発法人日本原子力研究開発機構 研究連携成果展開部 研究成果管理課 〒319-1195 茨城県那珂郡東海村大字白方 2 番地4 電話 029-282-6387, Fax 029-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency. Inquiries about availability and/or copyright of this report should be addressed to Institutional Repository Section,

Intellectual Resources Management and R&D Collaboration Department, Japan Atomic Energy Agency.

2-4 Shirakata, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195 Japan Tel +81-29-282-6387, Fax +81-29-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

© Japan Atomic Energy Agency, 2015

中性子多重相関計数法の数理的基礎

- ウラン・プルトニウム混合二酸化物の例 -

日本原子力研究開発機構 バックエンド研究開発部門 核燃料サイクル工学研究所 再処理技術開発センター 技術部

細馬 隆

(2015年6月12日受理)

プルトニウム転換技術開発施設では、グローブボックスの一部や低放射性固体廃棄 物容器内部の少量・不定形のウラン・プルトニウム混合二酸化物に対し、米国エネル ギー省の支援を受けて中性子同時計数法による計量装置の開発・設置・改良を行い、 20年にわたり計量管理と保障措置対応に用いてきた。中性子計数による測定の対象は 今後、高次多重相関の計数技術の進歩により、²⁴⁴Cm等を含む高質量のウラン・プル トニウム混合二酸化物に拡がると思われる。そこで、中性子多重相関計数法の数理的 基礎について現場での経験を含めて再考し、また以下の点について基礎を拡充した: 確率母関数を用いた七重相関までの多重相関分布式の代数的導出;モンテカルロ法に 代えて試料内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離を用いた漏れ増倍率の 評価;及び renewal 過程としての Poisson 過程が持つ2つの異なる時間軸と同時計数の 仕組みの関連付け及び確率過程に由来するほぼ同時中性子の導出と評価。

本報告書では、数理的基礎全体を概観できるよう、従来の基礎を併せて紹介した。 多重相関分布式については、理解しやすい「組合せ」に基づく新しい表現を併記し、 実際に取り扱ったウラン・プルトニウム混合二酸化物の組成や大きさをスペクトルや 平均自由行程の例とした。また、代表的な自発核分裂性核種及び誘導核分裂性核種に ついて、中性子発生個数分布その他の基礎データを調査・添付した。

Essentials of Neutron Multiplicity Counting Mathematics – An Example of U-Pu Mixed Dioxide –

Takashi HOSOMA

Technology Development Department Tokai Reprocessing Technology Development Center Nuclear Fuel Cycle Engineering Laboratories Sector of Decommissioning and Radioactive Waste Management Japan Atomic Energy Agency Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received June 12, 2015)

Several neutron coincidence counting assay systems for small and unshaped uranium-plutonium dioxide remained in some of glove boxes or contained in solid wastes have been developed, installed and improved in the last two decades for nuclear materials accounting and for safeguards at the Plutonium Conversion Development Facility supported by the U.S. Department of Energy. Objects to be measured by neutron counting would extend to high-mass uranium-plutonium dioxide containing ²⁴⁴Cm etc. by an innovation of higher order multiplicity counting technique, therefore essentials of neutron multiplicity counting mathematics were reconsidered into where experiences in the field were taken, then expanded in regard to the following subjects : formulae of multiplicity distribution were algebraically derived up to septuplet using a probability generating function ; leakage multiplication was evaluated not by monte carlo method but by an average length from an arbitrary point inside a sample to an arbitrary point on its surface; and a mechanism of coincidence counting was associated with a couple of different time axes in Poisson process as a renewal process, consequently a pair of close-tocoincident neutrons from the process was derived and evaluated.

In this report, conventional bases were included to view all the mathematics. For the multiplicity distribution formulae, new expressions using combination which is easy-to-understand were wrote down with the conventional ones. For spectrum and mean free path, actually treated uranium-plutonium dioxide was selected as an example of composition and size. Primary multiplicity distribution and other basic data for representative spontaneous fission nuclei and induced fission nuclei were reviewed and attached.

Keywords: Uranium-Plutonium Mixed Dioxide, Decommission, Non Destructive Assay, Neutron, Coincidence, Multiplicity, Safeguards, Poisson Process, Renewal Process

目次

1.	緒言		1				
2.	基礎	入門	2				
	2.1	Ⅰ 核分裂で生じる中性子数の初期分布と観測される分布、両者の変換則					
	2.2	炉雑音理論との繋がり	8				
	2.3	Hoffmann による双子の又は偶然の中性子ペアの概念	14				
	2.4	二重相関(観測される中性子ペア)の計数	20				
	2.5	測定装置の例	27				
3.	七重	相関までの多重相関分布式	35				
	3.1	核分裂で生じる複数個ペアの数	35				
	3.2	Hage による重畳的核分裂の概念	39				
	3.3	Böhnel による確率母関数を用いた相関分析	46				
	3.4	確率母関数を用いた多重相関分布式の代数的な導出	52				
4.	U-Pu	混合二酸化物における平均自由行程,エネルギースペクトルとその変化	64				
	4.1	仮定した組成と各核種の断面積	64				
	4.2	平均自由行程の評価	77				
	4.3	自発核分裂反応と(α, n)反応によるエネルギースペクトル	80				
	4.4	線スペクトルの場合のエネルギースペクトルの変化	90				
	4.5	連続スペクトルの場合のエネルギースペクトルの変化1	02				
5.	非モ	ンテカルロ法による漏れ増倍率の評価1	06				
	5.1	球と円柱の試料内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離1	06				
	5.2	核分裂反応断面積の全断面積に対する比1	16				
	5.3	組成及びエネルギースペクトルで重み付けた比の積分値1	22				
	5.4	平均自由行程と平均距離及び積分値による漏れ増倍率の評価1	24				
6.	Poiss	on 過程における時間軸とほぼ同時中性子の評価1	28				
	6.1	Renewal 過程としての Poisson 過程と2つの異なる時間軸1	28				
	6.2	同時計数の仕組みと2つの異なる時間軸1	34				
	6.3	確率過程に由来するほぼ同時中性子の導出と評価1	36				
7.	まと	ø1	42				
謝話	辛		45				
参考文献		1	46				
付録		1	51				

Contents

1. Preface1	Ĺ
2. Introduction to bases	2
2.1 Primary distribution of the number of neutrons arising from a fission,	
observed distribution and transformation rule between them	2
2.2 Connection to the reactor noise theory	3
2.3 Coupled or accidental neutron pairs concept by Hoffmann14	ł
2.4 Counting doublets (observed neutron pairs)20)
2.5 Example of assay system27	7
3. Formulation of multiplicity distribution up to septuplet	5
3.1 The number of multiple neutron pairs arising from a fission	5
3.2 Overlapping fission concept by Hage)
3.3 Correlation analysis using probability generating function by Böhnel46	;
3.4 Algebraic derivation of the formulae using the function	2
4. Mean free path, energy spectrum and its variation in U-Pu mixed dioxide64	ł
4.1 Assumed composition and cross sections of each isotope64	ł
4.2 Evaluation of mean free path77	7
4.3 Energy spectrum due to spontaneous fission and (α ,n) reaction80)
4.4 Variation of spectrum for a line spectrum90)
4.5 Variation of spectrum for the continuous spectrum102	2
5. Evaluation of leakage multiplication by non-monte-carlo method	3
5.1 Average length from an arbitrary point inside a sample to an arbitrary	
point on its surface for a sphere and a cylinder106	3
5.2 Ratio of fission cross section to total cross section	3
5.3 Integrated ratio weighed by the composition and the energy spectrum122	2
5.4 Evaluation of leakage multiplication by the mean free path, the average	
length and the integration124	ł
6. Time axes in Poisson process and evaluation of close-to-coincident neutrons128	3
6.1 Poisson process as a renewal process and a couple of different time axes .128	3
6.2 Mechanism of coincidence counting and a couple of different time axes134	ł
6.3 Derivation and evaluation of a pair of close-to-coincident neutrons	
from the process	3
7. Conclusions142	2
Acknowledgements	5
References	3
Appendix151	Ĺ

記号表

- ここで「核分裂で生じる中性子」には核分裂片から生じる遅発中性子を含まない。
- ν 1回の核分裂で生じる中性子の数(
 ν 又は <ν> はその期待値)
- P_ν 1回の核分裂で生じる中性子の数の確率分布
- Q_n 1回の核分裂で生じる中性子の観測された数 n の確率分布
 - ϵ 検出効率 (counts per fission)
- ϵ_n 検出効率 (counts per neutron)
- F 単位時間あたりの平均的な核分裂数
- α 系又は試料中の即発中性子減衰定数

Feynman, Hoffmann and Serber (1956) \mathcal{KLMI} ' $e^{-\alpha t}$ will be the expected number of neutrons present at time t due to one primary neutron introduced into boiler.'

- Y 計数率のゆらぎの Poisson 過程からの外れを示す指標
- P_p, P_d 1個の中性子が即発中性子又は遅発中性子を生じる事象の確率
- *v_p*,*v_d* 1回の事象から生じる即発中性子数又は遅発中性子数の期待値
 - K 1個の中性子から生じる即発中性子及び遅発中性子の合計数(k_{eff}に対応)
 - ρ 反応度
 - *l* 即発中性子寿命(第2章)
 - Λ 即発中性子世代時間
 - S 中性子の計数率=相関の有無を考えない単味 (singlet) 計数率 = Singles
 - D 中性子ペア(2個1組)の計数率=二重相関(doublet)計数率 = Doubles
 - *v_{s1}* 自発核分裂1回で生じる中性子の数の期待値
 - *V*₁₁ 誘導核分裂1回で生じる中性子の数の期待値
 - レ_{s2} 自発核分裂1回で生じる中性子ペア(2個1組)の組数の期待値 で階乗モーメントによる表現の場合
 - *v*_{i2} 誘導核分裂1回で生じる中性子ペア(2個1組)の組数の期待値 で階乗モーメントによる表現の場合
 - F_p 単位時間・重量あたりの²⁴⁰Puの自発核分裂数
- *meff* 実効²⁴⁰Pu量
 - *α_r* (*α*, n) 反応由来中性子数の自発核分裂由来中性子数に対する比
 - p 1個の中性子が誘導核分裂反応を生じる事象の確率(Pp と同じ)
 - *p*_c 1 個の中性子が誘導核分裂反応以外の中性子吸収反応を生じる事象の確率で 6 MeV 以下では (n,γ) 反応 (中性子捕獲) が主体
 - pi 1個の中性子が試料から漏れる事象の確率(第2章)
 - 11個の中性子が試料から漏れる事象の確率(第3章以降)
 - fa 二重相関計数時のゲートの有効割合(doubles gate fraction)
 - *T*_{di} Rossi-alpha 分布の減衰定数(die-away time)
- M_T 全增倍率
- M_L 漏れ増倍率

記号表(続き)

 $[R+A]_s$ R+A scaler の値

- A_s A scaler の値
- T_s T scaler の値
- R_s R+A scaler A scaler を同時計数回路のゲート長 G 等で処理した値
- B_G Background の値
- ρ₀ 誘導核分裂反応が無視できる場合の Doubles の Singles に対する比
- $\overline{\nu_{sm}}$ 自発核分裂1回で生じる複数個中性子ペア (m 個1組, $m \ge 2$)の組数の期待値 で階乗モーメントによる表現の場合
- $\overline{\nu_{im}}$ 誘導核分裂1回で生じる複数個中性子ペア (m 個1組, $m \ge 2$)の組数の期待値 で階乗モーメントによる表現の場合
- $\overline{\eta_{sm}}$ 自発核分裂1回で生じる複数個中性子ペア(m 個1組, $m \ge 2$)の組数の期待値 で「組合せ」による表現の場合
- $\overline{\eta_{im}}$ 誘導核分裂1回で生じる複数個中性子ペア(m 個1組, $m \ge 2$)の組数の期待値 で「組合せ」による表現の場合
 - T 三重相関 (triplet) 計数率 = Triples
- Q_r 四重相関 (quadruplet) 計数率 = Quadruples
- Q_t 五重相関 (quintuplet) 計数率 = Quintuples
- S_x 六重相関 (sextuplet) 計数率 = Sextuples
- S_p 七重相関 (septuplet) 計数率 = Septuples
- f_t 三重相関計数時のゲートの有効割合 (triples gate fraction)
- f_m m 重相関計数時のゲートの有効割合 (multiples gate fraction)
- lm 平均自由行程
- σ 核反応の断面積(種類に応じて添字を付ける)
- こ 試料内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離で 本報告書で提案する新しい概念
- PE 試料中で中性子が原子核との衝突前に漏れる確率
- rf/t 核分裂反応断面積の全断面積に対する比
- $r_{c/t}$ (n, γ)反応断面積の全断面積に対する比
 - λ Poisson 過程における事象到来の "rate" で定数
 - x Poisson 過程において事象到来時を0とする事象毎の経過時間
- C_m^P Poisson 過程において相関があるように見える偶発的な複数個中性子ペア (m 個 1 組, $m \ge 2$)の組数
- PDF 確率密度関数 (Probability Density Function)
- PMF 確率重み関数 (Probability Mass Function)
- CDF 累積確率分布関数(Cumulative Distribution Function)
- PGF 確率母関数 (Probability Generating Function)

Notation

Neutrons arising from a fission does not include delayed neutrons from a fission product.

- ν The number of neutrons arising from a fission ($\overline{\nu}$ or $\langle \nu \rangle$ is the expectation)
- P_{ν} Probability distribution of the number of neutrons arising from a fission
- Q_n Probability distribution of the number of observed neutrons n arising from a fission
 - ϵ Efficiency of counter (counts per fission)
- ϵ_n Efficiency of counter (counts per neutron)
- F The average number of fissions per unit time
- α Rate of decay regarding prompt neutrons in a system or a sample $e^{-\alpha t}$ will be the expected number of neutrons present at time t due to one primary neutron introduced into boiler' by Feynman, Hoffmann and Serber (1956).
- τ $\,$ Mean time between fissions $\,$
- Y Measure of the excess in counting fluctuation expected in Poisson process

 P_p, P_d Probability of an event which a neutron yields prompt neutrons or delayed neutrons

 $\overline{\nu_p}, \overline{\nu_d}$ The expected number of prompt neutrons or delayed neutrons born from an event

- K Sum of prompt and delayed neutrons born from a neutron (corresponds to k_{eff})
- ρ Reactivity
- l Prompt neutron lifespan (Section 2)
- Λ Prompt neutron generation time
- S Count rate of neutrons = Count rate of singlets unrelated to correlation = Singles
- *D* Count rate of neutron pairs (a couple) = Count rate of doublets = Doubles
- $\overline{\nu_{s1}}$ The expected number of neutrons arising from a spontaneous fission
- $\overline{\nu_{i1}}$ The expected number of neutrons arising from an induced fission
- $\overline{\nu_{s2}}$ The expected number of neutron pairs (a couple) arising from a spontaneous fission, for expression using a factorial moment
- $\overline{\nu_{i2}}$ The expected number of neutron pairs (a couple) arising from an induced fission, for expression using a factorial moment
- $F_p~~{
 m The~number~of}~^{
 m 240}{
 m Pu}$ spontaneous fissions per time and mass
- $m_{e\!f\!f}$ Effective ²⁴⁰Pu mass
 - α_r Ratio of neutrons arising from (α ,n) reaction to those from spontaneous fission
 - *p* Probability of an event where a neutron produces a fission (same as P_p)
 - p_c Probability of an event where a neutron is absorbed without fission composed mainly of (n,γ) reaction (neutron capture) less than 6 MeV
 - p_l Probability of an event where a neutron leaks from a sample (Section 2)
 - l Probability of an event where a neutron leaks from a sample (Section 3 or later)
 - f_d Fraction of gate effectiveness to count doublets (doubles gate fraction)
 - au_{di} Rate of decay regarding the curve of Rossi-alpha distribution (die-away time)
- M_T Total multiplication
- M_L Leakage multiplication

Notation (cont'd)

- $[R + A]_s$ R+A scaler counts
 - A_s A scaler counts
 - T_s T scaler counts
 - R_s R+A scaler A scaler counts treated by parameters (ex. G) of circuit
 - B_G Background counts
 - $\rho_0~$ Ratio of doubles to singles when induced fission is negligible
 - $\overline{\nu_{sm}}$ The expected number of multiple neutron pairs (composed of *m* neutrons, $m \ge 2$) arising from a spontaneous fission, for expression using a factorial moment
 - $\overline{\nu_{im}}$ The expected number of multiple neutron pairs (composed of *m* neutrons, $m \ge 2$) arising from an induced fission, for expression using a factorial moment
 - $\overline{\eta_{sm}}$ The expected number of multiple neutron pairs (composed of *m* neutrons, $m \ge 2$) arising from a spontaneous fission, for expression using a combination
 - $\overline{\eta_{im}}$ The expected number of multiple neutron pairs (composed of *m* neutrons, $m \ge 2$) arising from an induced fission, for expression using a combination
 - T Count rate of neutron pairs composed of three neutrons (triplet) = Triples
 - Q_r Count rate of neutron pairs composed of four neutrons (quadruplet) = Quadruples
 - Q_t Count rate of neutron pairs composed of five neutrons (quintuplet) = Quintuples
 - S_x Count rate of neutron pairs composed of six neutrons (sextuplet) = Sextuples
 - S_p Count rate of neutron pairs composed of seven neutrons (septuplet) = Septuples
 - f_t Fraction of gate effectiveness to count triplets (triples gate fraction)
 - f_m Fraction of gate effectiveness to count $m^{ ext{th}}$ multiplets (multiples gate fraction)
 - l_m Mean free path
 - σ Cross section of nuclear reaction (a suffix is attached correspoding the reaction)
 - \overline{L} Average length from an arbitrary point inside a sample to an arbitrary point on its surface, a new concept proposed in the report.
 - P_E Probability of neutron leakage before collision with a nuclei in a sample
 - $r_{f/t}$ Ratio of fission cross section to total cross section
 - $r_{c/t}$ Ratio of (n, γ) cross section to total cross section
 - $\lambda~$ Arrival "rate" of events in Poisson process, which is constant.
 - x Time restarts from 0 at every arrival of an event in Poisson process
 - C_m^P The number of correlated-like neutron pairs (composed of *m* neutrons, $m \ge 2$) arising accidentally from Poisson process
- PDF Probability Density Function
- PMF Probability Mass Function
- CDF Cumulative Distribution Function
- PGF Probability Generating Function

1. 緒言

プルトニウム転換技術開発施設では、東海再処理工場で使用済燃料から分離・精製された 硝酸プルトニウム溶液を硝酸ウラニル溶液と混合し、マイクロ波加熱直接脱硝法によって、 ウラン・プルトニウム混合二酸化物粉末(U/Pu比は 1)を得る技術の実証を行ってきた¹⁾。 得られた粉末は、平成 27 年 3 月末で、新型転換炉「ふげん」,高速増殖原型炉「もん じゅ」,高速増殖実験炉「常陽」用に MOX 量で 15.4 t (Pu 量で 6.4 t)となっている。

本施設は、東海再処理工場とともに国際原子力機関(IAEA)による厳格な国際保障措置 と国内保障措置のもとにあり、グローブボックスの一部と低放射性固体廃棄物容器の内部に 残留する少量・不定形のウラン・プルトニウム混合二酸化物に対し、米国エネルギー省 (DOE)の支援を受けて、約20年前から中性子同時計数法によるプルトニウム計量装置の 開発・設置・改良がおこなわれ^{2,3,4,5,6,7,8,9}、計量管理及び保障措置対応に用いられてきた。 また、費用対効果が高く現場負荷が小さいプルトニウム原料溶液用の連続モニタ装置の研究 開発が、実際の槽とプルトニウム原料溶液を用いて日本原燃向けに行われてきた^{10,11,12}。

今後、中性子計数による測定の対象は、高速中性子の検出器と不確かさの小さい高次多重 相関の計数技術の進歩により、従来とは異なる自発核分裂性核種(²⁴⁴Cm 等)を含む高質量 のウラン・プルトニウム混合二酸化物に拡がると思われる。そこで、中性子多重相関計数法 の数理的基礎について現場での経験を含め再考し、また基礎を拡充した。一つ目は多重相関 分布式の導出であり、確率母関数を用いた方法により、従来は三重相関に留まっていたの を、七重相関まで代数的に導出した。これにより理論計数値とその不確かさが、核分裂時の 中性子発生個数分布と漏れ増倍率及び測定条件から、七重相関まで解析的に評価できるよう になる。二つ目は試料内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離という新たな概念 を用いた漏れ増倍率の評価方法である。この平均距離と平均自由行程、組成及びエネルギー スペクトルで重み付けられた全断面積に対する核分裂反応断面積の比から、誘導核分裂反応 の確率と漏れ増倍率を評価した。(n, γ)吸収反応の確率も評価した。これにより漏れ増倍 率とその不確かさが、核的データと試料組成・形状から、モンテカルロ法に拠らずに評価で きるようになる。三つ目は Poisson 過程を renewal 過程と捉えた時に現れる二つの異なる時間 軸を同時計数の仕組みに対応させて理解する試みである。その結果、高バックグラウンド下 での同時計数値には、自発核分裂反応又は(α, n)反応とそれに続く誘導核分裂反応に由来 する同時中性子以外に、確率過程に由来するほぼ同時中性子 が現れることが判った。

この報告書では、数理的基礎全体を概観できるよう、従来の基礎を併せて紹介した。多重 相関分布式については、理解しやすい「組合せ」に基づく新しい表現を併記し、スペクトル や平均自由行程は、実際に取り扱ったウラン・プルトニウム混合二酸化物を組成や大きさの 例とした。また、代表的な自発核分裂性核種と誘導核分裂性核種について、中性子発生個数 分布その他の基礎データを調査・添付した。

Hoffmann (文献13) が論じた accidental pairs (異なる核分裂反応に由来し偶然にペアとなる)と(α, n)反応 に由来する accidental pairs がある。

2. 基礎入門

中性子同時計数法による計量装置の数理的基礎は、1949年に出版された The Science and Engineering of Nuclear Power, Volume II の Chapter 9、Frederic de Hoffmann によって書かれた Statistical Aspects of Pile Theory に遡ることができる¹³⁾。ここでは、中性子ペア(2個1組)と して、同一の核分裂に由来する双子のペア(coupled pair)と異なる核分裂に由来する偶然の ペア(accidental pair)があること、前者のようなペアが無い場合の中性子カウンタの計数値 の変動は確率過程の一つである Poisson 過程に従って現れると考えられるが、ペアの存在に よって Poisson 過程から外れることになるので、外れの指標として Y 値が提唱されている。 R.P. Feynman, F. de Hoffmann and R. Serber による 1956 年の文献¹⁴⁾では、極低出力炉を用い てY値とその不確かさを実験によって求めている。炉雑音理論がここから導かれるのはもち ろんであるが、S. Croft らが近年示した¹⁵ように、中性子同時計数法で用いられている中性子 計数率(Singles)と中性子ペア(2個1組)の計数率(Doubles)の公式もここから導くこと ができる。一方、中性子同時計数法を含む非破壊測定法全体に関する集約的な資料で、計量 管理に携わる者にとって教科書とも言える Los Alamos 国立研究所(DOE に所属)の Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials (PANDA)¹⁶⁾ や PANDA 2007 Addendum¹⁷⁾ 及び Application Guide to Neutron Multiplicity Counting¹⁸では、階乗モーメント(factorial moment)により 説明が行われる。しかしながらその物理的意味合いは高校の数学で教わる「組合せ」(combination) であり、中性子ペア(3個1組)の計数率(Triples) 以上になると、「組合せ」 を用いる方が式も簡素になる。本章では、Doubles までの数理的基礎について述べる。

なお本報告書では、単味の中性子や複数個の中性子ペアを singlet, doublet, triplet ... と呼び その計数値を Singles, Doubles, Triples ... と呼ぶ。また多重相関(multiple correlation²)とは、 複数個の中性子ペアを観測する際、観測者(計数装置)の側から見ると相関(correlation) があるという捉え方をする³ため、また次章で確率母関数を導入する際に相関という捉え方 をするため、そのように呼ぶことにした。

2.1 核分裂で生じる中性子数の初期分布と観測される分布、両者の変換則

ー般向けパンフレットや書籍では、核分裂の際に 2~3個の中性子が生じると書かれる が、生じる中性子の数 ν はガウス分布から得られる離散分布に従い¹⁹、7個(²⁵²Cf は 8 個) 程度までの拡がりを持つ。それ以上となる確率は小さい。核分裂直後(増倍の影響を受けて いない)の個数分布を初期分布 P_{ν} と呼ぶ。主な自発/誘導核分裂性核種(これまでに測定 対象に含まれていた核種と今後対象になると思われる核種)の P_{ν} を図1に示す。

図1は、Martin S. Zucker and Norman E. Holden (1984, 1985 and 1986)^{20), 21), 22), 23)}, Santi (2005)²⁴⁾ が集約・評価したデータから作成した。νの不確かさ(誤差棒)がこれら文献に記載されて いるのは自発核分裂性核種に限られる。

^{2.} 英語では多重度(multiplicity)を用いる場合が多い。

^{3.} 複数個の中性子が同時に到来するので、これらの中性子に相関があると捉える。



図1 自発/誘導核分裂性核種の核分裂で生じる中性子数の初期分布 P_{ν} (主要な核種) ν は生じる中性子の数、sf は自発核分裂、if は 1 MeV 及び 2 MeV 中性子による誘導核分裂(ウラン・ プルトニウム混合二酸化物中での中性子の減速は小さい)で、自発核分裂性核種の各 ν と $\overline{\nu}$ には文献 に基づく不確かさを示した (²⁴⁰Pu と ²⁴²Pu では小さい)。m,s はガウス近似の中心と中である。

²⁴⁰Pu と ²⁴²Pu は誤差棒が小さく見難いが、ガウス分布曲線は誤差棒の内側又は僅かに外側 を通過している。自発核分裂性核種の場合は、νの期待値 $\overline{\nu}$ の不確かさも文献に記載されて いるが、誘導核分裂性核種の場合は、文献には分布のみが与えられ不確かさは与えられてい ない。しかしながら、図1を見る限りガウス分布曲線で近似して問題はないと考えられる。 数値データは付録に記載した。

今後の測定対象では U/Pu 比が大きくなり Cm も含有されると思われるため、²³⁵U の誘導 核分裂と²⁴⁴Cm の自発核分裂も図1に含めた。同位体組成比が大きい²⁴⁰Pu 及び²⁴¹Pu の誘導 核分裂も図1に含めるべき(第4章で詳述するが1MeV 及び2MeV の中性子による核分裂 反応断面積の全断面積に対する比は核種による差が小さいため)と考えたが、文献から得ら れるものは両者とも $\overline{\nu}$ のみであり、図に含めることができなかった⁴。誘導核分裂性核種に ついて入射中性子を1MeV 及び2MeV としたのは、測定対象となったウラン・プルトニウ ム混合二酸化物に含まれる水分が少なく、中性子の減速の影響が小さいためである。

本題に戻る。観測される分布は、増倍の影響が無いと仮定できる理想的な場合であっても 初期分布とは大きく異なる。観測(測定)によって、分布形状が本質的に影響を受けるため である。図2は、試料から1回の核分裂で3個の中性子が生じた時の比喩で、投げた3個の うち何個が検出器に入る(観測される)のかを考える。



Sample

Detector

図2 試料から3個の中性子が生じた時に何個観測されるのかを考える

初期分布 P_{ν} 、中性子の検出効率 $\epsilon_n < 1$ 、観測される分布 Q_n 、観測される中性子数 n に は以下の関係がある(ν 個から選んだ n 個が入り $\nu - n$ 個が外れることを考える):

$$Q_n = \sum_{\nu=n}^{\max} \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} P_\nu \ \epsilon_n^n (1 - \epsilon_n)^{\nu-n} \tag{1}$$

但し $0 \le n \le \nu \le \max$ (max は核種により6又は7或いは8)で、観測される中性子数は 生じる中性子数よりも必ず小さい。左辺はnを離散変数とするが、総和は ν を変化させて行 うことに注意しなければならない。

^{4.} ガウス近似を仮定して分布を描くことは可能だが、そもそも図1ではガウス近似が妥当かどうかを確認して いるので、この近似で分布を描くことは適切ではない。

図2のように $\nu = 3$ ならば、1個も検出器に入らない場合、1個が検出器に入るが2個が入らない場合、2個が検出器に入るが1個が入らない場合、3個が検出器に入る場合、の計4通りがある。観測する側に立つと2個が検出器に入る確率は $\nu = 2, 3, 4, ...$ のそれぞれの場合に生じる。式(1)の総和はそのような意味を持つ。従って観測とは、初期分布によって重みづけられた ν 個からn個を選ぶ「組合せ」を観ている。冒頭に述べた、本質的に影響を受ける、とはそのような意味である。

観測が「組合せ」を観ているのは、増倍や偶然のペアの影響を受ける時でも同じである。 「組合せ」は以下のように式変形でき、singlet, doublet, triplet... に応じて分母の n! は定数と なるから、右辺は階乗モーメントを定数で除した形になっている。従って、これまで教科書 で用いられていた階乗モーメントの物理的な意味は「組合せ」である:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} = \frac{\nu \left(\nu - 1\right) \left(\nu - 2\right) \dots \left(\nu - n + 1\right)}{n!} \tag{2}$$

また、左辺は $(a \pm b)^{\nu}$ を展開した式の n+1 番目の項の係数、いわゆる二項係数であり、 二項変換の公式を式 (1) に適用すると、観測された分布から初期分布が再現できる。

与えられた P_{ν} (²⁴⁰Pu の自発核分裂の場合)から表計算を用いて Q_n を評価する例を図3 に示す。ここでは検出効率を 0.7 としたが、検出効率が 1 に近い(式 (1) から $\epsilon_n \neq 1$)と Q_n は P_{ν} に近づき、効率が低いと Q_n の分布は n の大きい側が低く小さい側が高くなる。



図3 与えられた P_{ν} (240 Pu の自発核分裂の場合)から表計算を用いて Q_n を評価する例

二項変換の公式を利用して観測された分布から初期分布を得るには以下の式を用いる:

$$P_n = \sum_{\nu=n}^{\max} \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} Q_\nu \ \epsilon_n^{-\nu} (\epsilon_n - 1)^{\nu - n}$$
(3)

結果的に P_{ν} ではなく P_n 、 Q_n ではなく Q_{ν} を用いたが、この式は Zucker and Holden の 文献中の式と異なり、また彼らの複数の文献中では $n \ge \nu$ の扱いに不一致が見られる。この 式は、 $0 \le n \le \nu \le \max$ の大小関係を維持し、かつ二項変換を介した写像関係⁵を表す式と して記号の用法が適切となるようにした結果である。写像では初期と観測は原因と結果では なく対等な関係なため、と理解することができる。

5. 公式としての二項変換式は $0 \le k \le n$ として:

$$b_n = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^{n-k} a_k \tag{f1}$$
$$a_n = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} b_k \tag{f2}$$

又は $0 \le j \le n$ として:

- t

max

$$g_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j f_j \tag{f3}$$

$$f_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j f_j \tag{f3}$$

$$J_n = \sum_{j=0}^{j} \binom{j}{j} \binom{(-1)^j}{(-1)^j} g_j \tag{f4}$$

であり(両者を比較すると式 (fl)の n-kは n+kとしても同じ)、総和の範囲が式 (l)及び式 (3)と異なる。 式 (l)と式 (3)の写像関係を証明するためには、 ϵ_n は後でどうにかするとして、まず総和の範囲を変更する。 最初に nを行, $\binom{n}{k}$ を列とする行列 T を用いて、式 (f2)と式 (fl)を:

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{b} \tag{f5}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{a} \tag{f6}$$

と書く。*n* を適当に選んで **T⁻¹** を求め、式 (fl) の通りに (-1)^{*n-k*} が現れることを確かめる。 次に転置行列 **T**^t を考えると:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}^{\mathbf{r}} \mathbf{p} \tag{f7}$$

$$q_n = \sum_{k=n}^{\max} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p_k \tag{f8}$$

と書くことができ、T, T⁻¹ は正方行列であるから:

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{T}^{\mathbf{t}}\right)^{-1} \mathbf{q} = \left(\mathbf{T}^{-1}\right)^{\mathbf{t}} \mathbf{q} \tag{f9}$$

$$p_n = \sum_{k=n} \binom{\kappa}{n} (-1)^{k-n} q_k \tag{f10}$$

ここで $0 \le n \le k \le \max$ であるから総和の範囲を変更できた。続いて:

$$q_n = Q_n \ \epsilon_n^{-n} \ (1 - \epsilon_n)^n \tag{f11}$$

$$p_n = P_n \left(1 - \epsilon_n\right)^n \tag{f12}$$

により変数変換し、式(f8)と式(f10)に代入すると:

$$Q_n = \sum_{\substack{k=n\\max}}^{\max} \binom{k}{n} P_k \epsilon_n^n (1 - \epsilon_n)^{k-n}$$
(f13)

$$P_n = \sum_{k=n}^{\max} \binom{k}{n} Q_k \epsilon_n^{-k} (\epsilon_n - 1)^{k-n}$$
(f14)

が得られる。最後に kを v に書き換えればよい。

図3の例の場合に、観測された分布から初期分布を再現し、比較した結果を図4に示す。 与えられた時点と観測結果を得た時点で分布値の小数点以下5桁目を丸めているため、再現 した分布には小数点以下4桁目に差が生じている。観測結果を得た時点で小数点以下4桁目 を丸めた場合は、再現した分布には小数点以下3桁目に差が生じる。粗い言い方になるが、 観測の際に生じた不確かさは、再現した分布では1桁大きく現れると考えてよい。



図4 $Q_n \rightarrow Q_\nu$ から表計算を用いて P_n を再現する例

核分裂で生じる中性子の数がガウス分布に従うことを示したのは James Terrell (1957)¹⁹ で 離散確率分布とガウス分布の関係式として次式を与えている:

$$\sum_{m=0}^{\nu} P_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\nu - \overline{\nu} + \frac{1}{2} + b)/\sigma} \exp\left(-t^2/2\right) \mathrm{d}t \tag{4}$$

 ν は1回の核分裂で生じる中性子数で $\overline{\nu}$ はその期待値、bは補正項で 10^{-2} よりも小さいと され、 σ はガウス分布の巾で²⁵²Cf以外の核種は 1.08 ± 0.01 、²⁵²Cfは 1.21 ± 0.01 とされる。 積分の上限はbを無視して $\left(\nu + \frac{1}{2}\right) - \overline{\nu}$ と見た方が判りやすい。図1のヒストグラムの階段 の右端までが積分範囲になるからである。式(4)とこれらの条件を用いると、 $\overline{\nu}$ を与えれば 離散確率分布を得ることができ、この方法はMCNPでも利用される。ガウス分布が現れる 物理的背景として、Terrell は中性子蒸発理論(neutron evapolation theory⁶)を挙げている。

^{6.} 原子核をフェルミ粒子ガスとみなし、井戸型ポテンシャルの高所にある中性子の飛び出しを考えるもの。

2.2 炉雑音理論との繋がり

核分裂連鎖反応では、臨界であれ未臨界であれ、その中性子強度は揺らいでいる。揺らぎ を含む出力変化の時定数(ペリオド T)は数秒~数十秒と比較的長いが、中性子数割合で 言えば~0.7%しかない遅発中性子の平均寿命(~13秒)が、即発中性子のそれ(~10⁻⁴ 秒)に比べて著しく長いためである。即発中性子のみならば T は極めて短く、原子炉の制御 は事実上困難となる。

Feynman の文献¹⁴⁾ によれば、中性子強度の揺らぎは、測定装置と測定時間の揺らぎを別に すれば、核分裂あたり放出される中性子数の揺らぎ(the fluctuation in ν , the number of neutrons per fission)と臨界の度合い(the absolute criticality of the system which is a measure of the average likelihood of starting and perpetuating a chain)に依存する。揺らぎが無い場合は完全な 確率事象となり測定装置への中性子の到来は Poisson 過程に従うので、中性子計数値 c(時間 t の関数)は Poisson 分布をとる。初期の炉雑音理論における Feynman- α 法では、揺らぎの 指標として Poisson 分布からの外れ Yを次式で定義しこれを測定する:

$$\frac{\overline{c^2} - (\overline{c})^2}{\overline{c}} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + Y \tag{5}$$

Poisson 分布ならば左辺は1(Y=0)となる。何故なら:

$$\overline{(c-\overline{c})^2} = \frac{1}{n} \sum (c-\overline{c})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum c^2 - 2\overline{c} \frac{1}{n} \sum c + (\overline{c})^2 \frac{1}{n} \sum 1$$

$$= \overline{c^2} - 2(\overline{c})^2 + (\overline{c})^2$$

$$= \overline{c^2} - (\overline{c})^2$$
(6)

式 (5) の左辺の分子は、式 (6) の式変形から分散であることが判る。一方、式 (5) の分母は 期待値であり、Poisson 分布では分散と期待値が等しいので左辺は 1 となる。Poisson 過程で は、長さ t の時間内に偶発的事象が n 回生じる確率が、パラメータ λt (λ は単位時間あたり の事象到来数で定数)の次の Poisson 分布 (離散分布)で与えられる²⁵⁾:

$$P_{\lambda t}(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$
(7)

分布形状を図5に示す。 λt が大きくなると、最も高い確率に対応するnは λt に近づき、 また分布形状はガウス分布に近づく。

Feynman の文献では、Water Boiler と呼ばれる液体燃料を用いた極低出力炉 LOPO が用いられ、Yの測定値は~4.2 であった。京都大学原子炉実験所の臨界集合体実験装置における Yの測定例²⁶⁾ などもある。Yは未臨界でも正の値で、臨界に近づくほど大きくなる。



図5 ポアソン分布の形状

Poisson 分布は以下の性質を持つ。放射線計測であれば、 λ を計数率に、tを観測時間に、 nを観測した計数値に置き換えると判りやすい⁷:

a. $0 \le n \le \infty$ で総和が 1 $\sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda t}(n) = 1$ $:: (\lambda t)^n / n!$ は $e^{\lambda t}$ の Taylor 展開になる。 b. 期待値が λt $\sum_{n=0}^{\infty} n P_{\lambda t}(n) = \overline{n} = \lambda t$ (証明は脚注のとおり⁸) c. 分散が λt $\sum_{n=0}^{\infty} (n - \overline{n})^2 P_{\lambda t}(n) = \lambda t$ (証明は脚注のとおり⁹)

7. 觀測した計数値 n の標準偏差が
$$\sqrt{n}$$
 で与えられるのは、分散 = 期待値という分布の性質を反映している
8.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n P_{\lambda t}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right) = 0 + \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \lambda t$$
9.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-\bar{n})^2 P_{\lambda t}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\lambda t)^2 P_{\lambda t}(n)$$

$$= e^{-\lambda t} \left[\frac{1}{0!} (0-\lambda t)^2 + \frac{\lambda t}{1!} (1-\lambda t)^2 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} (2-\lambda t)^2 + \frac{(\lambda t)^3}{3!} (3-\lambda t)^2 + \cdots \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \left[(\lambda t)^2 \left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cdots \right) - 2\lambda t \left(\frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} 2 + \frac{(\lambda t)^3}{3!} 3 + \cdots \right) + \left(\frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} 2^2 + \frac{(\lambda t)^3}{3!} 3^2 + \cdots \right) \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \left[(\lambda t)^2 e^{\lambda t} - 2\lambda t \lambda t e^{\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \left[(\lambda t)^2 e^{\lambda t} - 2\lambda t \lambda t e^{\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} (\lambda t)^n \right) \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \left[(\lambda t)^2 e^{\lambda t} - 2\lambda t \lambda t e^{\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} \right) \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \left[(\lambda t)^2 e^{\lambda t} - 2\lambda t \lambda t e^{\lambda t} + (\lambda t)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \left[(\lambda t)^2 e^{\lambda t} - 2\lambda t \lambda t e^{\lambda t} + (\lambda t)^2 e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} \right]$$

Feynman によれば、Y値は Hoffmann の文献¹³によって次のように定式化¹⁰されている:

$$Y = \frac{\epsilon \left(\overline{\nu^2} - \overline{\nu}\right)}{(\alpha \tau)^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t}\right)$$
(8)

 ϵ は検出効率(counts per fission)で $\overline{\nu}$ は 1 回の核分裂で生じる中性子数 ν の期待値、 $\overline{\nu}^2$ は ν の自乗の期待値、 τ は核分裂の平均的な時間間隔(the mean time between fissions)、t は 測定時間である。 ϵ はこれまで用いてきた検出効率 ϵ_n (counts per neutron)と異なる。

 α は即発中性子減衰定数と呼ばれ、Feynman の文献では ' α is defined by the statement that one primary neutron introduced into the boiler means that $e^{-\alpha t}$ will be the expected number of neutrons present at time *t* due to the primary neutron' と書かれている。右辺の $1 - (1 - e^{-\alpha t})/(\alpha t)$ は $t \to \infty$ で 1 に収束するので、定常状態では式 (8) は次のように書ける:

$$Y = \frac{\epsilon \left(\overline{\nu^2} - \overline{\nu}\right)}{(\alpha \tau)^2} \tag{9}$$

 α には次の二通りの表現がある。式 (10) は Feynman の文献による表現、式 (11) は炉雑音や 炉工学で用いられる表現である:

$$\frac{\overline{\nu}}{\alpha\tau} = \frac{1}{1 - K'} \tag{10}$$

$$\alpha = \frac{\beta_{eff} - \rho}{\Lambda} \tag{11}$$

式 (10) は、dt内に $e^{-\alpha t} dt/\tau$ の核分裂が生じるので、これを $0 \le t \le \infty$ で積分した $1/\alpha \tau$ が 1 個の中性子から連鎖反応により生じる核分裂の総数となり、 $\overline{\nu}$ を乗じるとこの連鎖反応により生じる中性子総数が得られるという考え方である。Kは Hoffmann の文献により次式で 定義される:

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d \tag{12}$$

ここで P_p は 1 個の中性子が即発中性子を生じる事象(誘導核分裂)の確率、 P_a は 1 個 の中性子が遅発中性子を生じる事象(2つの核分裂片それぞれから生じる)の確率で、 P_a は P_p よりやや大きい。 $\overline{v_p}$ は 1 事象あたりの即発中性子数の期待値、 $\overline{v_a}$ は 1 事象あたりの 遅発中性子数の期待値(又は平均値)で、 $\overline{v_a}$ は $\overline{v_p}$ よりも圧倒的に小さい。 $\overline{v_p}$ はこれまで 用いてきた \overline{v} と同じであるが、遅発中性子と区別するために添字が付けられている。

10. 炉雑音の分野(文献 26)では Y値を次のように表している:

$$Y = \frac{\epsilon \overline{\nu(\nu - 1)}}{(\alpha \tau)^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t} \right)$$

1 個の中性子から連鎖反応により生じる中性子総数は $\overline{\nu_p}P_p + \overline{\nu_d}P_d < 1$ (有限に収束する 条件)として次式でも表される:

$$1 + (\overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d) + (\overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d)^2 + (\overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d)^3 \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - (\overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d)}$$

$$= \frac{1}{1 - K}$$
(13)

Kは世代間の中性子数の比なので中性子増倍率であり、実際の炉を想定し、遅発中性子の 影響も含むので、実効増倍率 *k*_{eff} に対応する。式 (10) では K に代えて K' を用いている:

$$K' \stackrel{\text{def}}{=} K_p = \overline{\nu_p} P_p \tag{14}$$

Feynman は式 (10) の右辺と左辺を等号で結んでいるが、即発中性子数が遅発中性子数より も圧倒的に多いことを考慮したものであろう。従って *t* が十分大きいならば *Y* は次のように 近似できる:

$$Y \approx \frac{\epsilon \left(\overline{\nu_p^2} - \overline{\nu_p}\right)}{\overline{\nu_p^2} (1 - K_p)^2} \tag{15}$$

これは Hoffmann の文献の結論の式 (9-57) と同じである。また Hoffmann は f (Feynman に よれば the fraction of fission neutrons which are delayed) と γ (Feynman によれば their average effectiveness in the chain reaction as compared to prompt neutrons) を次式で定義している:

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{\nu_d}}{\overline{\nu}} = \frac{\overline{\nu_d}}{\overline{\nu_p} + \overline{\nu_d}} \tag{16}$$

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_d}{P_p} \tag{17}$$

これらを用いると次の関係が得られる:

$$K_p = K \frac{\overline{\nu_p} P_p}{\overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d} = K \frac{\overline{\nu_p}}{\overline{\nu_p} + \gamma \overline{\nu_d}} = K \frac{1}{1 + \frac{\gamma f}{1 - f}}$$
(18)

$$K_p \approx (1 - \gamma f) K \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{K_p}{K} \approx \gamma f$$
 (19)

 γ は遅発中性子の 6 群それぞれに定義される $\gamma_i = P_{d,i}/P_p$ $(1 \le i \le 6)$ を $r_i = \overline{\nu_{d,i}}/\overline{\nu_d}$ で重み づけした総和 $\gamma = \sum_{i=1}^{i=6} = r_i \gamma_i$ として得られる¹¹。最近は 8 群が用いられる。

^{11.} 詳しくは Hoffmann の文献の式 (9-5) から式 (9-12) を参照のこと。

一方、式(11)の炉雑音や炉工学27)で用いられる表現は、次の基礎方程式から導かれる:

$$\frac{n'}{n} = k_{eff} \ (1 - \beta_{eff}) \quad \to \quad \frac{\Delta n}{n} = k_{eff} \ (1 - \beta_{eff}) - 1 \tag{20}$$

nはある世代での中性子数、n'は次の世代の中性子数、 β_{eff} は遅発中性子数の全中性子数 に対する割合、 k_{eff} は実効増倍率である。即発中性子寿命をl(~ 10^{-4} 秒)とすると、単位 時間あたりの変化は:

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{k_{eff}\left(1 - \beta_{eff}\right) - 1}{l} \tag{21}$$

ここで反応度 ρ と即発中性子世代時間 Λ を次式で定義する:

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} \tag{22}$$

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l}{k_{eff}} \tag{23}$$

式(21)は:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho - \beta_{eff}}{\Lambda} \, n \tag{24}$$

 α はそもそも式 (8) で $n = n(0) e^{-\alpha t}$ として導入されたので、式 (11) の関係が得られる。 Feynman/Hoffmann の式の諸量と炉雑音や炉工学の式の諸量の対応関係を以下に示す:

$$k_{eff} = \overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d, \qquad k_p = \overline{\nu_p} P_p \tag{25}$$

$$f = \beta = \frac{\overline{\nu_d}}{\overline{\nu_p} + \overline{\nu_d}} = \frac{1}{\overline{\nu_p} + \overline{\nu_d}} \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \overline{\nu_{d,i}}, \qquad 1 - \frac{k_p}{k_{eff}} \approx \gamma \beta$$
(26)

$$\beta_{eff} = \frac{\overline{\nu_d} P_d}{\overline{\nu_p} P_p + \overline{\nu_d} P_d} = 1 - \frac{k_p}{k_{eff}} \quad \rightarrow \quad \beta_{eff} \approx \gamma \beta$$
(27)

$$\tau = \overline{\nu_p} \, l \tag{28}$$

最近の文献値^{28),29),30),31),32)}に基づき、熱中性子領域で $\overline{\nu_p} = 2.423$ (主に ²³⁵U), $\overline{\nu_d} = 0.016$, $\beta_{eff} = 0.00732, \ l \approx \Lambda = 75 \times 10^{-6} \text{ s}$ (:: $k_{eff} \approx 1$) とすれば、 $\tau = 0.000182 \text{ s}, \ f = \beta = 0.00665$, $\gamma = P_d/P_p \approx \beta_{eff}/\beta = 1.101, \ k_p/k_{eff} = 0.9927$ などが得られる。この β_{eff} が、本節の冒頭に 述べた遅発中性子数割合に対応する。 同じ *α* を表すのに、Feynman と Hoffmann の式 (10) と炉工学の式 (11) は全く異なる諸量と 方法を用いるが、式 (28) の関係に気付けば、両者が等しいことを示すことができる:

$$\alpha = \frac{\beta_{eff} - \rho}{\Lambda} = \frac{k_{eff} - k_p - k_{eff} + 1}{k_{eff}} \frac{k_{eff}}{l} = \frac{1 - k_p}{l} = \frac{\overline{\nu_p}}{\tau} \left(1 - k_p\right)$$
(29)

式 (10) で述べたように $1/\alpha\tau$ は 1 個の中性子から生じる核分裂の総数なので、 $k_{eff} = 1$ で $k_p = 0.9927$ ならば、1 個の中性子から約 56 回の核分裂が生じ、 $\overline{\nu_p}$ を乗じれば約 137 個の 中性子が生じることがわかる。参考までに、 β_{eff} と β 、遅発中性子の平均寿命 τ_a と中性子 全体の平均寿命 τ_{pd} は、炉の動特性を評価する上で重要なパラメータである(τ は Feynman/ Hoffmann の式では核分裂の平均的な時間間隔を意味するが、炉工学では中性子寿命を意味 し記号の統一性がない)。 β_{eff} 等に文献値を用い、 β , τ_d , τ_{pd} を評価した例を表 1 に示す。

Group Index	Major nuclei ª	Half-life [s] ^a	Decay constant [s ⁻¹]	Relative abundance ^a	Yields in delayed neutrons	Fraction of delayed neutrons	Mean life of delayed neutrons [s]				
i		$T_{i1/2}$	λ_i	$a_i = \frac{\beta_i}{\beta}$	$\overline{ u_{d,i}}$	$\beta_i = \frac{\overline{\nu_{d,i}}}{\overline{\nu_p} + \overline{\nu_d}}$	$\tau_i = \frac{1}{\lambda_i}$	$a_i au_i$			
1	⁸⁷ Br	55.6	0.01247	0.033	0.000535	0.000219	80.21	2.647			
2	¹³⁷	24.5	0.02829	0.154	0.002496	0.001023	35.35	5.443			
3	⁸⁸ Br	16.3	0.04252	0.091	0.001475	0.000605	23.516	2.140			
4	⁸⁹ Br, ¹³⁸ I, ⁹³ Rb	5.21	0.13304	0.197	0.003193	0.001309	7.516	1.481			
5	⁹⁴ Rb, ⁸⁵ As, ^{98m} Y	2.37	0.29247	0.331	0.005366	0.002200	3.419	1.132			
6	¹⁴⁴ Cs, ¹⁴⁰ I, ⁹³ Kr	1.04	0.66649	0.090	0.001459	0.000598	1.500	0.135			
7	⁹⁵ Rb, ⁹¹ Br	0.424	1.63478	0.081	0.001313	0.000538	0.612	0.050			
8	⁹⁶ Rb, ⁹⁷ Rb	0.195	3.55460	0.023	0.000373	0.000153	0.281	0.006			
Yields in prompt neutrons ^b		Effective total fraction of delayed neutrons °		Gamma	Total yields in delayed neutrons ^d	Total fraction of delayed neutrons	Total mean life of delayed neutrons [s]				
$\overline{ u_p}$		$eta_{e\!f\!f}$		$\gamma = \frac{P_d}{P_p}$	$\overline{\nu_d} = \sum_{i=1}^8 \overline{\nu_{d,i}}$	$\beta = \frac{1}{\overline{\nu_p} + \overline{\nu_d}} \sum_{i=1}^8 \overline{\nu_{d,i}}$	$\tau_d = \frac{1}{\lambda_d} = \sum_{i=1}^8 a_i \tau_i = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^8 \frac{\beta_i}{\lambda_i}$				
	2.4229	0.00732		1.10	0.01621	0.00665	13.0				
	± 0.0066	± 0.0	0017	± 0.03	± 0.00029	± 0.00012					
Refere	ences	Mean life of total neutrons [s]									
a. G.E Pro). Spriggs, J.M. C gress in Nuclear I	$\tau_{pd} = \tau_d \beta = \frac{\beta}{\lambda_d}$									
b. J. L bas	ewins, Nuclear R ed on G.C. Hann										
c. <mark>M.</mark> Sci	Carta, S. Dulla, V. ence and Techno	0.007									
d. E. F Pro	E. Fort, V. Zammit-Averlant, M. Salvatores, A. Filip and J.F. Lebrat, Progress in Nuclear Energy, Vol.41, No.1-4, pp.317-359 (2002).										

表1 遅発中性子を8群として、熱中性子領域で β, τ_d, τ_{pd} を評価した例

動特性では、 α の逆数に相当する時定数(ペリオド) T_{pd} が重要となる。式 (29)から $\alpha = (1 - k_p)/l$ 、ペリオドは $T_{pd} = \tau_{pd}/(1 - k_{eff})$ で表される。出力が揺らいで $k_{eff} = 1.001$ となる場合、表1の例ならば $T_{pd} = -87$ s で上昇方向、即発中性子は $\alpha = +84$ s⁻¹ で下降方向 なので揺らぎは収束する¹²。

^{12.} 遅発中性子によって中性子全体の平均寿命が大きく延び、これによって制御可能な動特性が得られる。

2.3 Hoffmann による双子の又は偶然の中性子ペアの概念

式 (8) の導出過程では次の重要な式(Hoffmann の文献 13 の式 (9-53))が現れる。観測される中性子ペア(2個1組)又は doublet を理解する上で、この式は避けては通れない:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Expected number of} \\ \text{pairs in interval } t \end{array} \right\} = \frac{F^2 \epsilon^2 t^2}{2} + \frac{F \epsilon^2 (\overline{\nu^2} - \overline{\nu}) t}{2 \, \alpha^2 \tau^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t} \right)$$
(30)

F は単位時間あたりの平均的な核分裂数、その他は式 (8) と同じ(ϵ は counts per fission) である。左辺の 'Expected number of pairs in interval t' については、以下のように説明されて いる(誤解を避けるために原文をそのまま引用した)。中性子ペアの概念として、Hoffmann の文献 13 の Fig. 9-5 を図6として転載する。



図6 中性子ペアの概念(文献 13 の Fig. 9-5 を転載)

'Next let us select two arbitrary times t_1 and t_2 (where $t_1 < t_2$), with corresponding intervals dt_1 and dt_2 , and let us ask what the expected number of pairs of counts is, i.e., a count at t_1 in dt_1 and also a count at t_2 in dt_2 .

If we remember that there are a certain number of primary neutrons born every second due to such things as spontaneous fission, cosmic rays, etc., then we may draw the schematic picture as in Fig. 9-5.

Note that the drawing is purely schematic and no inference should be drawn regarding the number of neutrons per fission.

This shows us that we may have two different kinds of pairs of counts at t_1 and t_2 . The first type we shall call "accidental" pairs. These are due to a count registering at t_1 due to one primary source neutron and a count registering at t_2 due to an entirely separate family from another independent primary neutron. The pair of counts A and D represents such a situation. The second type we shall call "coupled" pairs. These are pairs of counts which in the last analysis can be traced back to some common ancestor, i.e., one fission. Such a situation would be represented by A and C. We shall regard X as the "common ancestor", because it is the most recent, although, of course, every ancestor of X is equally one of A and C'. 時刻 t_1, t_2 それぞれに微小時間 dt_1, dt_2 を考え、 dt_1 と dt_2 で同時に中性子が観測される場合 にこれをペアと考える。中性子ペアには、先祖(primary)が異なるにも拘わらず偶然にペア となる場合(accidental pair)と、同じ先祖に由来する双子のペアの場合(coupled pair)とが ある。式 (30) の右辺第一項は accidental pair に、第二項は coupled pair に対応する。その後の 文献(W. Hage and D.M. Cifarelli³³、K. Böhnel^{34),35}、N. Ensslin^{36),37),38)} など)には "overlapping fission" 或いは "superfission" と呼ばれる概念が登場するが、これらと Hoffmann の coupled pair は同じである(導き方は違うが同一の式が得られる)。原著に沿って式 (30) を導出する。 Overlapping fission や superfission における式の導出は、次章(Triples 以上)で行う。

第一項の導出では、 dt_1 で中性子1個を観測する確率と、これとは異なる fission に由来し dt_2 で中性子1個を観測する確率の積を考える。 $0 \le t_1 \le t_2 \le t$ で次の積分を行う。 $F \epsilon dt_1$ は dt_1 にある中性子の観測数だが、 t_1 で中性子1個を観測する確率に等しい:

$$\int_{t_2=0}^{t_2=t} \int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \left(F\epsilon \,\mathrm{d}t_1\right) \left(F\epsilon \,\mathrm{d}t_2\right) = \frac{F^2 \epsilon^2 \,t^2}{2} \tag{31}$$

第二項の導出では、primary が生じた時刻 Tと微小時間 dTを考え、 $0 \le t_1 \le t_2 \le t$ かつ $-\infty \le T \le t_1$ の範囲で次の積分を行う(記号は原著のまま):

- (i) dT にある primary fission 数 F dT (32)
- (ii) primary fission の ν の初期分布 l_{ν} (33)
- (iii) fission 1回あたり生じる中性子の t_1 における数 $\nu e^{-\alpha(t_1-T)}$ (34)
- (iv) t_1 で中性子 1 個を観測する確率 $\nu e^{-\alpha(t_1-T)} \frac{\epsilon}{\tau} dt_1$ (35)
- (v) fission 1回あたり生じる中性子の t_2 における数 $(\nu 1)e^{-\alpha(t_2 T)}$ (36)
- (vi) t_2 で中性子1個を観測する確率 $(\nu-1)e^{-\alpha(t_2-T)}\frac{\epsilon}{\tau} dt_2$ (37)
- (vii) 観測される coupled pair 数:

$$\int_{t_{2}=0}^{t_{2}=t} \int_{t_{1}=0}^{t_{1}=t_{2}} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{t_{1}} F l_{\nu} \left[\nu e^{-\alpha(t_{1}-T)} \frac{\epsilon}{\tau} dt_{1} \right] \left[(\nu-1) e^{-\alpha(t_{2}-T)} \frac{\epsilon}{\tau} dt_{2} \right] dT$$

$$= \int_{t_{2}=0}^{t_{2}=t} \int_{t_{1}=0}^{t_{1}=t_{2}} \frac{F \epsilon^{2}}{2 \alpha \tau^{2}} e^{-\alpha(t_{2}-t_{1})} dt_{1} dt_{2} \sum_{\nu} l_{\nu} \left(\nu^{2} - \nu \right)$$

$$= \frac{F \epsilon^{2} \left(\overline{\nu^{2}} - \overline{\nu} \right) t}{2 \alpha^{2} \tau^{2}} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t} \right)$$
(38)

式 (31) は二重積分の中に Fの積(異なる先祖を意味する)があるが、式 (38) は二重積分の 中に Fの積が無い(同じ先祖を意味する)。両者は重ならないので式 (30) が得られる。 次に、同時計数法で用いる Singles 及び Doubles との関係を説明する。Singles はペアである か否かにかかわらず単位時間あたり観測された中性子数、即ち相関の有無を考えない単味 (singlet) 計数率なので次式で表される:

$$S = F\epsilon \tag{39}$$

Sは Singles(cps)、その他は式 (30) と同じである。一方、Doubles は単位時間あたり観測 された coupled pair 数、即ち二重相関(doublet)計数率であり、通常は定常状態を観測する ので式 (38) の右辺の $(1 - e^{-\alpha t})/(\alpha t)$ を $t \to \infty$ として 0 に収束させると、次式で表される:

$$\frac{D}{f_d} = \frac{F\epsilon^2(\overline{\nu^2} - \overline{\nu})}{2\,\alpha^2\tau^2} = \frac{1}{2}\,F\epsilon\,Y \quad \to \quad D = \frac{1}{2}\,f_d\,S\,Y \tag{40}$$

*D*は Doubles (cps)、*Y*は式 (8) において $(1 - e^{-\alpha t})/(\alpha t)$ を 0 に収束させたもの、 f_d は 二重相関計測時のゲートの有効割合 (doubles gate fraction)で、次節で詳述する Rossi-alpha 分布の指数曲線においてゲートを開放して計数した部分の曲線全体に対する割合である。

従って、同時計数法の Singles, Doubles は、式 (40) により Y値と対応付けられる。中性子 同時計数法による非破壊計量装置の検出器形状や感度等に手を加えれば、未臨界度の指標と しての Y値は測定できると考えられるが、中性子同時計数法での計量経験から言えば、設備 や装置の未臨界度を測定する場合、測定器の大型化は避けられない。図7はウラン・プルト ニウム混合二酸化物粉末が少量残るグローブボックスを中性子同時計数法で計量する大型の 装置 (文献 49) で、測定対象から 4π 空間に放射される中性子をできるだけ多く拾い上げる ためにこのような形となっているが、これでも検出効率 ϵ は 0.08 程度に過ぎない¹³。





図7 グローブボックスを中性子同時計数法で計量する大型装置の例

^{13.} 検出器は5段階の高さでグローブボックス(巾3m高さ4m奥行き1m)を囲む。板状高密度ポリエチレンに ³He 管 12本を埋め込んだ検出器を両側で4枚同時に使用する。検出効率 $\epsilon \approx 0.08$ ($\epsilon_n \approx 0.04$)、増倍を無視 し得る少量の試料を測定した時の $D/S \approx 0.01$ 、 $f_d \approx 0.7$ なので、 $Y \approx 0.03$ と求まる。Yは検出効率に比例 し、炉雑音を測定する場合の検出効率は更に低いので、 $Y \approx 0.03$ は実際に非常に深い未臨界である。

次に、S. Croft の文献¹⁵⁾ に沿って Singles と Doubles の公式を導く。これらは従来、overlapping fission 或いは superfission と呼ばれる概念によって導かれており、同時計数法に関連する 多くの文献に頻出する:

$$S = F_p \, m_{eff} \, \epsilon_n \left(1 + \alpha_r \right) \overline{\nu_{s1}} \, M_L \tag{41}$$

$$D = \frac{F_p \, m_{eff} \, \epsilon_n^2 \, f_d}{2} \left[\overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{i2}} \left(1 + \alpha_r \right) \overline{\nu_{s1}} \, \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \right] \, M_L^2 \tag{42}$$

但し
$$\overline{\nu_m} \stackrel{\text{def}}{=} m! \overline{\binom{\nu}{m}} = \sum_{\nu=m}^{\max} \nu (\nu - 1) \cdots (\nu - m + 1) P_{\nu}$$
 (43)

Sは相関の有無を考えない単味(singlet)計数率 Singles(cps)、Dは coupled pair 或いは 二重相関(doublet)計数率 Doubles(cps)、 $\overline{\nu_{s1}}$, $\overline{\nu_{i1}}$, $\overline{\nu_{s2}}$, $\overline{\nu_{i2}}$ の添字 s, iは自発核分裂或いは 誘導核分裂を、m = 1, 2は単味或いは二重相関を指す。式 (43) は階乗モーメント(factorial moment)で、その物理的な意味は式 (2) で述べた「組合せ」である。 F_p は単位重量・時間 あたりの²⁴⁰Pu 自発核分裂数¹⁴、 m_{eff} は実効²⁴⁰Pu 重量(effective ²⁴⁰Pu mass)、 ϵ_n ($\neq \epsilon$) は 検出効率(counts per neutron)、 f_d は二重相関計測時のゲートの有効割合(doubles gate fraction)、 α_r は (α , n)反応由来中性子数の自発核分裂反応由来中性子数に対する比(alpha ratio)である。 f_d と α_r は同時計数装置の設定等や試料の組成に依存し、プルトニウム転換 技術開発施設におけるウラン・プルトニウム混合二酸化物粉末の計量測定では、 $f_d = 0.6 \sim$ 0.75、 $\alpha_r \approx 0.7$ である。 f_d については次節で、 m_{eff} , ϵ_n , α_r については 2.5 節で詳述する。

 M_L は漏れ増倍率(leakage multiplication)と呼ばれ、全増倍率 M_T に中性子が試料或いは 体系から漏れる確率 p_l を乗じたものである。 M_T は式 (12) の P_p , K, $\overline{\nu_p}$ により表すことが でき、 M_L , M_T , p_l , $P_p = p$, $K = k_{eff}$, $\overline{\nu_p} = \overline{\nu_{i1}}$ には次の関係がある:

$$M_T = \frac{1}{1 - P_p \,\overline{\nu_p}} = \frac{1}{1 - p \,\overline{\nu_{i1}}} \approx \frac{1}{1 - K} = \frac{1}{1 - k_{eff}} \tag{44}$$

$$M_L = p_l M_T = \frac{1 - p - p_c}{1 - p \overline{\nu_{i1}}}$$
(45)

 p_c は誘導核分裂反応以外の吸収反応、特に 6 MeV 以下では (n, γ) 反応 (中性子捕獲) が主体、を生じる確率であるが p に比較し小さい (第5章にて詳述する)。増倍を無視し 得る極めて小さな試料では $p = p_c = 0$, $M_L = M_T = p_l = 1$ となる。無視し得ない場合でも M_L は 1 よりやや大きい程度である。 M_L の意味・解釈については次章で詳述する。なお、 同時計数法では通常、遅発中性子は考慮しない。

^{14.} 自発核分裂の半減期 1.14E+11 y から壊変定数 1.93E-19 s⁻¹、質量数 240 として 483 g⁻¹s⁻¹ と求まるが、計量管理 と保障措置では従来より 474 g⁻¹s⁻¹ が標準的に用いられている。

まず、単位時間あたりの全中性子数 S_T 、単位時間あたりの (α , n) 反応由来中性子数 S_α を導入する。F は式 (36) と同じ単位時間あたりの平均的な核分裂数で、添字 s, i は式 (41), (42) と同じである:

$$S_T = S_\alpha + F_s \overline{\nu_{s1}} + F_i \overline{\nu_{i1}} \tag{46}$$

 F_i は(直感的だが)次のように書くことができる:

$$F_i = F_s \,\overline{\nu_{s1}} \,(1 + \alpha_r) \,\times\, p \,\times\, M_T \tag{47}$$

 $F_s \overline{\nu_{s1}} (1 + \alpha_r)$ は自発核分裂由来及び (α , n)反応由来の中性子数の和であるから、これ に 1 個の中性子が誘導核分裂反応を生じる確率 pを乗じ、更に全増倍率 M_T を乗じると、 誘導核分裂数が得られる、という意味になっている。また α_r の意味から:

$$S_{\alpha} = F_s \,\overline{\nu_{s1}} \,\times\, \alpha_r \tag{48}$$

であるから、式(46)は次のように書くことができる:

$$S_T = F_s \overline{\nu_{s1}} \left(1 + \alpha_r \right) \left(1 + p M_T \overline{\nu_{i1}} \right) \tag{49}$$

単味計数率 S (Singles) と S_T には以下の関係が成り立つ:

$$S = \epsilon_n \, p_l \, S_T \tag{50}$$

式(44)を書き直す:

$$1 + p M_T \overline{\nu_{i1}} = M_T \tag{51}$$

式 (51) を式 (49) に代入し、式 (45) と $F_s = F_p m_{eff}$ を用いて式 (50) を書き直す:

$$S = F_p m_{eff} \epsilon_n \left(1 + \alpha_r\right) \overline{\nu_{s1}} M_L \tag{52}$$

従って、式 (41) が得られた。なお、Hoffmannの式 (30)の変数との間に次の関係がある:

$$S_T = F \,\overline{\nu} = S_\alpha + F_s \,\overline{\nu_{s1}} + F_i \,\overline{\nu_{i1}} \tag{53}$$

$$\epsilon = \epsilon_n \, p_l \, \overline{\nu} \tag{54}$$

式 (54) は、1回の核分裂で生じる中性子数に体系から漏れる確率と検出効率を乗じると、 1回の核分裂で観測される中性子数になる、という意味になっている。 続いて、二重相関計数率 D (Doubles) と対応させるために次の変数を導入する:

$$S_P = F_s \, \frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} + F_i \, \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2} \tag{55}$$

 S_P と Hoffmann の式 (30) の変数との間には次の関係がある:

$$S_P = F\left(\begin{array}{c}\nu\\2\end{array}\right) = F\frac{\overline{\nu^2} - \overline{\nu}}{2} = F_s\frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} + F_i\frac{\overline{\nu_{i2}}}{2} \tag{56}$$

また、式(40)を次のように書き直す:

$$\frac{D}{f_d} = \frac{F\epsilon^2(\overline{\nu^2} - \overline{\nu})}{2\,\alpha^2\tau^2} = S_P \,\frac{\epsilon^2}{\alpha^2\tau^2} \tag{57}$$

これに式 (54) を代入し、式 (10), (14) の関係を用いると:

$$D = f_d S_P \epsilon_n^2 p_l^2 \frac{1}{(1 - p \,\overline{\nu_{i1}})^2} \tag{58}$$

続いて、式 (44), (45)の関係を代入すると:

$$D = f_d S_P \epsilon_n^2 M_L^2 \tag{59}$$

が得られる。一方、式(56)に式(47)を代入すると以下の式が得られる:

$$S_P = F_s \frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} + (F_s \overline{\nu_{s1}} (1 + \alpha_r) p M_T) \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2}$$

$$= \frac{F_s}{2} (\overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{s1}} \overline{\nu_{i2}} (1 + \alpha_r) p M_T)$$
(60)

次の式変形を行う:

$$p M_{T} = \frac{p}{1 - p \overline{\nu_{i1}}} = \frac{p \overline{\nu_{i1}} - p}{(\overline{\nu_{i1}} - 1)(1 - p \overline{\nu_{i1}})}$$
$$= \frac{1 - p - 1 + p \overline{\nu_{i1}}}{(\overline{\nu_{i1}} - 1)(1 - p \overline{\nu_{i1}})} = \frac{p_{l} - (1 - p \overline{\nu_{i1}})}{(\overline{\nu_{i1}} - 1)(1 - p \overline{\nu_{i1}})} = \frac{M_{L} - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1}$$
(61)

式 (61) を式 (60) に代入し、 $F_s = F_p m_{eff}$ を用いて式 (59) を書き直す:

$$D = \frac{F_p m_{eff} \epsilon_n^2 f_d}{2} \left[\overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{i2}} \left(1 + \alpha_r \right) \overline{\nu_{s1}} \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \right] M_L^2$$
(62)

従って、式(42)が得られた。

結論として、overlapping fission 或いは superfission と呼ばれる概念(次章で詳しく説明する が、同じ先祖に由来する coupled pair の確率分岐を数え上げてゆく複雑な方法)を用いるこ となく、Hoffmann の式 (30) の右辺第二項の $t \to \infty$ での定常状態から、現在用いられている Doubles の公式を導くことができた。式 (32) から式 (38) のHoffmann の素朴・直感的な捉え方 の中に overlapping fission 或いは superfission の概念は含まれている。もう一つの重要な結論と して、現在用いられている Doubles の公式には「Hoffmann の式の右辺第一項の accidental pair は含まれていない」ことが明らかになった。この点については、第6章(Poisson 過程 における時間軸と同時計数の仕組み)で再び論じる。

2.4 二重相関(観測される中性子ペア)の計数

本章の冒頭で説明したように、複数個の中性子ペアを観測する際、観測者(計数装置)の 側から見ると相関があるという捉え方をするため、中性子ペア(2個1組)の観測で得られ るものを二重相関と呼ぶ。先の 2.1 節で述べたが、観測で得られるものは初期分布の P_2 で はなく、初期分布によって重みづけられた ν 個から 2 個を選ぶ「組合せ」であり、かつ overlapping fission 或いは superfission による増倍の影響を受けた結果である。

ウラン・プルトニウム混合二酸化物から発生する中性子には起源の異なる二種類がある。 ²³⁸Pu, ²³⁹Pu, ²⁴⁰Pu, ²⁴¹Am 等からの α 粒子と ¹⁷O, ¹⁸O との (α , n) 反応で生じる中性子¹⁵と、 ²³⁸Pu, ²⁴⁰Pu, ²⁴²Pu 等の自発核分裂性核種から生じる中性子で、増倍が無いなら coupled pair が 観測されるのは後者のみである。単味の中性子は両者で観測される¹⁶。ここから生じる誘導 核分裂反応による増倍は、試料中での中性子の減速が僅かなため、²³⁸U, ²³⁹Pu, ²⁴⁰Pu, ²⁴¹Pu 等 の寄与が大きい¹⁷。Hoffmann の説明には (α , n) 反応は明確には出てこないが、primary な 核分裂反応とその増倍から coupled pair と accidental pair が観測されるので (α , n) 反応由来 の中性子も含めて pair が観測されると考えなければならない。炉では (α , n) 反応の寄与は 核分裂反応に比較して小さいが、ウラン・プルトニウム混合二酸化物ではそうではない。

この他に、検出器にすぐに入射せずに測定環境の床や壁その他で減速された後に検出器に 入射する場合(特に検出効率が低い場合)、もともと中性子ペアであったにもかかわらず、 同時性が失われて単味の中性子と変わらなくなった中性子が生じる。従って、多数の単味の 中性子に少数の中性子ペアが混じった中性子パルス列が得られる。

17. 高速中性子、特に1 MeV を超える場合、中性子による核反応の全断面積に対する誘導核分裂反応断面積の比 は、核種による違いが小さい(第5章を参照)。従って、存在比が大きい核種の寄与が大きくなる。

^{15.} アクチノイド元素の多くは α 核種である (²³⁶Np, ²⁴¹Pu, ^{242m}Am を除く)が、半減期が長い又は存在比が小さい 核種の寄与は小さくこの4 核種の寄与が 99% を占める。¹⁷O と ¹⁸O の天然存在比はそれぞれ 0.00038 と 0.0021 と小さいが、殆どを占める ¹⁶O は (α, n)反応を生じない。4 核種の α 粒子のエネルギーは 5–5.5 MeV (付録 を参照)、¹⁷O の (α, n)反応の閾値は 0 MeV、¹⁸O の場合は 0.852 MeV (文献 45 を参照) であるから、この 2 核種は (α, n)反応を生じる。閾値が 5.5 MeV 以下の (α, n)反応核種は他に ⁷Li, ⁹Be, ¹⁰B, ¹¹B, ¹³C, ¹⁹F, ²³Na, ²⁵Mg, ²⁶Mg, ²⁷Al, ²⁹Si, ³⁰Si, ³⁷Cl などがあり (文献 45, 47 を参照) 天然存在比の高い核種も多い。これらが不純物 として含まれる場合、その影響を無視できない場合もあり得る。

^{16. (}α, n) 反応による中性子は 2 MeV 強, 核分裂反応による中性子は約 2 MeV (第4章を参照) である。

Feynman によれば(2.2節)、揺らぎが無い場合(Y値が 0)は完全な確率事象となり、 測定装置への中性子の到来は Poisson 過程に従う。前節で見たように Y値は coupled pair を 意味しており、核分裂反応由来であれ(α , n)反応由来であれ accidental pair は Poisson 過程 に従う中性子パルス列の中に見出されることになる。Los Alamos の文献(文献 36)中にこの ことを示す証拠を見いだすことができる。図8は、任意のパルスについて、隣り合うパルス との時間間隔を横軸に、出現頻度を縦軸にとったもので、図8 a)の縦軸は対数、図8 b)の 縦軸はリニアである。A は確率事象に由来する計数、R は coupled pair に由来する計数で、A は対数グラフ上では理論的に右下がりの直線になる(第6章)ので、R と A の境界が点直線 で描かれているのは正しい。縦軸をリニアにするとこの境界は下に凸の点曲線となり、原著 に描かれている水平線(一点鎖線)にはならない。

図 8 b) の時間巾 P (pre-delay) は検出器と回路の不感時間及びパイルアップ(単位時間の パルス数が過大で正しく計数できない状態)を避けるための時間で、時間間隔 P 以上の計数 値変化を時定数 τ_{di} (die-away time) の指数関数で近似する。こうして得られた R+A の推定 計数値(指数曲線)と、 $t \rightarrow \infty$ での A の推定計数値(水平線)との差を $0 \le t \le \infty$ で積分す ると、 (α , n) 反応由来を含む accidental pair とcoupled pair の和が得られる。







図8 中性子パルス列のパルス間隔と出現頻度の関係(左)と Rossi-alpha 分布(右) (文献 36 の Fig. 16.2 と Fig. 16.3 を転載し説明を付加)

従って、Doubles の公式に対応する coupled pair を求めるには、測定結果から accidental pair の寄与を差し引かなければなければならないが、この差し引きは普通行われない。図 8 b) のパルスの時間間隔とその出現頻度の関係は Rossi-alpha 分布と呼ばれ、そもそも炉雑音理論 における概念であった。この場合、核分裂反応が(α, n)反応よりも圧倒的に多く水平線を 仮定しても問題なかったと考えられるが、ウラン・プルトニウム混合二酸化物の計量作業で は、現場での経験・測定データの蓄積と解析からみて(測定条件にもよるが)accidental pair の寄与が無視できない。この点については、第6章で評価方法も含めて詳述する。 なお、 $0 \le t \le \infty$ で積分するのは、t = 0 で検出器に入射した pair が、検出器内部の減速材 で熱中性子化する際に互いに時間差を生じ、時定数を持つ計数値の変化として現れるためで ある(試料内での散乱によって生じる時間差は僅かである)。 τ_{di} は検出器の特性である が、試料と検出器の間に減速材が存在するような特殊な条件下ではこの減速材も寄与する。 R+A の計数が行われるのは、時定数 τ_{di} よりもやや長い図 8 b) の時間間隔 G (gate-width) の部分である。従って、式 (40) の f_d (doubles gate fraction) は次の式で定義される:

$$f_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_P^{P+G} e^{-t/\tau_{di}} dt}{\int_0^\infty e^{-t/\tau_{di}} dt} = \frac{\tau_{di} \left[e^{-P/\tau_{di}} - e^{-(P+G)/\tau_{di}} \right]}{\tau_{di}} = e^{-P/\tau_{di}} \left(1 - e^{-G/\tau_{di}} \right)$$
(63)

グローブボックスや低放射性固体廃棄物容器内部の少量・不定形のウラン・プルトニウム 混合二酸化物を計量する装置の場合、Pは 2–4.5 μ s、Gは 64–128 μ s、 f_a は 0.6–0.75 に設定 されている。図8 b)の時間間隔 D (long-delay)は、 $t \rightarrow \infty$ と見做すことができるための十分 な時間間隔で、これを経た後に再度同じ時間間隔 Gで A の計数が行われる。時間間隔 Gで 計数を行うことをゲートを開けるとも言う。

ウラン・プルトニウム混合二酸化物を中性子同時計数法で計量する際に用いられる検出器 としては、³He 管と呼ばれる棒状の管を減速材としての高密度ポリエチレンで覆ったものが 用いられてきた³⁹⁾。³He は ¹⁰B とともに熱中性子に対する感度が極めて高い。また、ガス比例 計数管と同様に構造が単純である。熱中性子の検出に用いられる代表的な核種の反応断面積 のエネルギー依存性を図9に示す⁴⁰⁾。³He は (n, p)反応により765 keV の ³H + p イオン対 となり、比例計数領域で増幅 (10³ ~ 10⁵ 倍)されて電気信号として検出される。図7の装置 では、巾145 cm 高さ 50 cm 厚さ 13 cm の高密度ポリエチレンに、直径 1 inch 内圧 6 atm の ³He 管 12 本が並列に埋め込まれ、 τ_{di} は 46 μ s である。³He は需要の急増によって枯渇しつつ あり、追加供給の見込みも立たないため、代替検出器の開発が急がれている^{40,41,42,43}。



図9 熱領域の中性子の検出に用いられる代表的な核種の反応断面積のエネルギー依存 (文献 40 の Fig. 1 を転載, Figure used with permission of the INMM. Copyright 2013. All rights reserved.)

検出器の出力(複数の場合は並列化)を増幅し、弁別回路により波形整形すると、中性子 1個がパルス1個に対応するパルスの列が得られる。このパルス列から R+A 計数値を得る ための同時計数回路(coincidence circuit)の仕組みを図10に示す。



circuit that measures real + accidental (R+A) events.

図10 R+A 計数値を得る仕組み(文献 36 より Fig. 16.8 を転載)

Shift resister は、クロックを送る度に入力の論理値(パルスの有無に対応)が出力の論理値 に送られる flip-flop 回路を多数直列にしたもので、クロック周期×n(n は直列回路数)だけ 以前の入力状態を保持することができる。クロック周期は 0.5 μ s、R +A ゲートの時間 G は 8, 16, 32, 64, 128 μ s から選択する(回路数はこの倍)。Shift resister ではクロックを送る度、 パルスに相当する論理値が次の論理回路に送られる。Up-down counter では、shift resister の 入口にパルスが到着すれば counter を +1 し、出口にパルスが到着すれば counter を -1 する。 その結果、counter は時間 G 内に存在するパルスの数を示す。Shift resister 内の様子を模式的 に描いた様子を図11に示す。このような動的な状態で、図10の input にパルスが到来し た時をトリガ(図10では strobe)として、それ以前に到来していたパルスによる counter の 値(≤99)を読み取る。また、全てのパルスがトリガとなる。従って、パルスの到来間隔よ りもクロックの周期が十分に短いことが条件となる。このようにして、全てのパルスの到来 毎に読み取られた counter の値 が R + A scaler に蓄積(cps ならば 1 秒間)される。



図11 Shift resister 内の様子を模式的に描いた様子(全てのパルスがトリガとなる)

このような回路の仕組みから、R + A 計数値は着目する任意のパルスよりも前に到来した パルスによって求められているので、図 8 b)の横軸を時間経過と誤解してはならない。横軸 はパルスの時間間隔であり、前後関係は問題にならない。

中性子ペア(doublet, triplet, quadruplet)が到着した時、R+A scaler に現れる数を図12に 示す。複数個中性子ペア(m 個1組)によりR+A scaler に現れる数はm(m-1)/2となる。 従って、パルスの到来間隔が密でなく、かつ doublet のみが到着するならば、R+A scaler に 現れる数は doublet の組数になるが、1回の核分裂反応で生じる triplet は doublet に比較して 無視し得る程小さい訳ではない。従って、R+A scaler に現れる数は自発及び誘導核分裂反応 の数に対応しているが、doublet の組数よりも大きい。



図12 中性子ペア(doublet, triplet, quadruplet)が到着した時、R+A scaler に現れる数

到着した triplet, quadruplet から 2 個を選んだ結果を doublet として数えても問題ないので はないか、と思われるかもしれない。しかしながら、自発或いは誘導核分裂反応で生じた triplet, quadruplet ... から 2 個を選んだ結果は doublet であるが (2.1 節) 、検出器に到着した triplet, quadruplet ... から 2 個を選んだ結果は本来の doublet ではない。公式の式 (42) の D の 定義には ϵ_n^2 が含まれ、図 1 において試料から生じた中性子が 2 個共に検出器に入ることを 意味している。検出器に triplet, quadruplet ... として到着したものは式 (42) の ϵ_n^2 を ϵ_n^3 , ϵ_n^4 と して Triples, Quadruples として数えたいが、回路はそうなっておらず、本来の doublet でない ものまで R+A scaler に現れる。混乱しないように、図 1 3 に accidental pair と coupled pair, doublet 及び D or Doubles の本来の意味を整理する。



図13 Accidental pair と coupled pair, doublet 及び D or Doubles の意味の整理

次に、A 計数値を得る仕組みを図14と図15に示す。A 計数値のために設けられている 1024 μ s delay は、極めて多数の flip-flop 回路を用いた shift resister によってパルスを保持して いるのではなく、トリガの 1024 μ s 後に counter の値を読み取る仕組みである。



Block diagram of a complete shift register coincidence circuit including totals, R+A, and A scalers.

図14 A計数値を得る仕組みその他(文献 36 より Fig. 16.9 を転載)



図15 R+AゲートとAゲートの shift resister 内の様子を模式的に描いた様子

このため、図14の1024 μ s delay は図8b)の long-delay に正確には対応しないが、 $t \rightarrow \infty$ と見做す上では問題にならない。なお、図15で単位時間あたり試料から到来する中性子の 数が一定(時間軸上でパルスの密度が同じ)ならば、R+AゲートとAゲートの時間平均に に差は生じないのではないかと思われるかもしれない。しかしながら、読み取り時にR+A ゲートの時刻0には必ずパルスがあるが、Aゲートには時刻1024 μ s にパルスがあるとは限 らないという違いがある。この違いは Poisson 過程を数学的に取り扱う際の二つの時間軸の 違いに対応し、Aゲートは通常の時刻(arrival time)を確率変数とするが、R+Aゲートは パルスの時間間隔(interarrival time)を確率変数とする。これらの理解から accidental pair の 理論値を導くことができる。この点については、第6章で説明を行う。 図14には、R+A scaler と A scaler 以外に T scaler が存在し、中性子パルス列のパルスの 数を重複なしに数えている(cps ならば1秒間)。R+A scaler と A scaler は、全てのパルス の到来毎に counter の値を蓄積した結果であるからパルスを重複して数えている。A scaler と T scaler の関係は次の式で与えられる:

$$A_s = G \times T_s \times T_s = G T_s^2 \tag{64}$$

 $G はゲート時間(s)、A_s は A scaler(cps)、T_s は T scaler(cps)で、ゲート内部にある$ $パルス数 <math>G \times T_s$ に、これを数える回数 T_s を乗じるという意味になっている。 $GT_s \ge 1$ な らば $A_s \ge T_s$ が成立する。 T_s , A_s を Totals, Accidentals と呼ぶ。相関の有無を考えない単味 計数率 Singles は、 T_s とバックグラウンド計数率 B_G の差で与えられる。また、R + A scaler と A scaler の差から次の量を与える:

$$S = T_s - B_G \tag{65}$$

$$R_s = \frac{[R+A]_s - A_s}{e^{-P/\tau_{di}} \left(1 - e^{-G/\tau_{di}}\right) \left[1 - e^{-(D+G)/\tau_{di}}\right]}$$
(66)

 $[R + A]_s$ は R + A scaler (cps) で、 R_s を Reals と呼ぶ。式 (66) の分母は式 (63) と同じ考え 方で、図 8 b) の時間間隔に基づいて A ゲート内の R の僅かな寄与を考慮したゲートの有効 割合である。図 1 5 の時間間隔に基づく場合は別の式となるが、A ゲートが開くのは時定数 τ_{di} の 10 倍以上の時間の後であるから、A ゲート内の R の僅かな寄与は問題にならない。

この Reals が、図 8 で述べた (α , n) 反応由来を含む accidental pair と coupled pair の和に 対応する。ここで accidental pair を無視できるならば、Realsは 単位時間あたりの coupled pair 数又は二重相関計数率 D に対応する。実際、図 8 b) の下に凸の点線の時定数を τ_{di} と別に 求めること (A の推定計数値を指数関数近似する) は行われておらず¹⁸、結果的に $R_s \approx D$ と 見做されている。しかしながら、図 1 2 で述べたように doublet 以上の複数個中性子ペアも Reals として計数されるため、Reals は自発又は誘導核分裂反応の数に対応しているものの、 両者の対応関係は簡単ではない。実際の計量測定では、組成等が測定対象に近く増倍が無視 し得ると見做せる試料について T_s , A_s , $[R+A]_s$ を測定し、S と D の比をパラメータ ρ_0 と して利用する。次節で詳細を述べる。

同時計数回路の理解は容易とは言えない。もっとも、Poisson 過程に従う中性子のパルス列 に coupled pair 由来の中性子ペアが混じると、任意の中性子(トリガ)に着目した時、その 近く(R+A ゲート)で別の中性子を見いだす確率が、遠く(A ゲート)で別の中性子を見い だす確率よりも高い、という直感的な理解はできる。

^{18.} 時定数 τ_{di} (die-away time) は図 8 a) で R+A の傾き (A の傾きを含む R の傾き) に相当し、実測もできるが A の推定計数値を指数関数で近似することは、図 8 a) で A の傾きを求めることに相当し、実測は難しい。
2.5 測定装置の例

本節では、測定装置の例として、不定形のウラン・プルトニウム混合二酸化物粉末を少量 含む低放射性固体廃棄物(カートン用)を中性子同時計数法で計量する装置⁴⁴⁾を紹介すると ともに ϵ_n , τ_{di} 等の定数、検出器の動作電圧の決定や数え落としの補正(dead-time 補正)を 具体的にどのように決定するのか、測定された T_s , A_s , $[R + A]_s$ から漏れ増倍率と試料中の プルトニウム量をどのように評価するのか、等について説明する。

装置の外観と検出器本体(高密度ポリエチレンの減速材を取り外した状態)及び縦断面図 を図16に示す。検出器本体の上部にはプリアンプと波形整形用の弁別回路が置かれ、装置 と同時計数装置は、³He 管用高圧電源、アンプ及び弁別回路用電源及び出力信号の3本の ケーブル(本装置の場合は検出器が2バンクに分かれているため5本)で結ばれる。中央の 試料室の直径は400 mm で、56本の³He 管が試料室を取り囲むように二重リング状に配置 され、中性子は上方と下方を除いて大部分が高密度ポリエチレンに入射する。検出効率は $\epsilon_n \approx 0.40$ である。測定を行う作業員の被ばく低減のため、全体が鉛板で覆われている。









検出効率 ϵ_n (counts per neutron)の決定には、NPL 等¹⁹によって値付けされた ²⁵²Cf 線源を 使用する。購入時の強度は 10⁴ ~ 10⁵ n/s (20~ 100 μ Ci)が多いが、半減期が 2.645 y なので 定期的に廃棄²⁰し再購入しなければならない。検出効率は、これを求める時点での放射能を 計算し、²⁵²Cf の $\overline{\nu_{s1}}$ = 3.76 と Singles 測定値 (バックグラウンドを差し引いた値)から計算 する。図16の装置の検出効率 $\epsilon_n \approx 0.40$ は、プルトニウム転換技術開発施設で使用されて いる計量装置の中では最も高い。大型の低放射性固体廃棄物計量装置(ドラム缶用)では $\epsilon_n \approx 0.19$ 、図7や類似のグローブボックス計量装置では $\epsilon_n \approx 0.04$ -0.05 である。この線源 は、校正(Initial Source Measurement)や性能確認(Normalization)にも使用される。

時定数 τ_{di} (die-away time)の決定は、同一試料・条件で時間間隔 G (gate-width)のみを 2 通り ($32 \mu s, 64 \mu s$)として得られた D の比と式 (63)から、初期値を次式で求める:

$$\frac{D_{64}}{D_{32}} = \frac{1 - e^{-64/\tau_{di}}}{1 - e^{-32/\tau_{di}}} \quad \to \quad \tau_{di} = \frac{-32}{\log\left(D_{64}/D_{32} - 1\right)} \tag{67}$$

ここで log は $e \epsilon E \epsilon c s^{21}$ 。これを初期値として、Dのばらつきが最も小さくなるように 調整した結果(初期値の約 1.2 倍になる)を採用する。低放射性固体廃棄物計量装置では $\tau_{di} = 49 \ \mu s$ 、大型の低放射性固体廃棄物計量装置では $\tau_{di} = 80 \ \mu s$ 、グローブボックス計量装置 では $\tau_{di} = 46 \ \mu s$ (図 7 の装置)又は 61 μs (最新型を含むそれ以外)である。前節で述べた 理由から、高密度ポリエチレン減速材中の ³He 管の配置が密であるほど τ_{di} は小さい。

時間間隔 Pは f_d を大きくするためにできれば短い方がよい。²⁵²Cf 線源又は Am-Li 線源を 用い、Pを 0.5 μ s 刻みで変化させながら図 8 の R と A の比の変化を求めると、Pが短かすぎ る時は比が大きく変化する。低放射性固体廃棄物計量装置、大型の低放射性固体廃棄物計量 装置とグローブボックス計量装置(最新型を除く)では $P = 4.5 \,\mu$ s、グローブボックス計量 装置(最新型)では $P = 2.0 \,\mu$ s が採用されている。 f_d はそれぞれ 0.665, 0.754, 0.681(図 7 の 装置)又は 0.604(最新型を除くそれ以外)又は 0.746(最新型)である。

時間間隔 *G* は、低放射性固体廃棄物計量装置とグローブボックス計量装置(最新型を除 く)では *G* = 64 μ s、グローブボックス計量装置(最新型)では *G* = 90 μ s、大型の低放射性 固体廃棄物計量装置では *G* = 128 μ s が採用されている(本装置では τ_{di} = 80 μ s と Rossi-alpha 分布の時定数が大きい)。時間間隔 *D* は 1024 μ s(τ_{di} の10 倍以上)に固定されている。

³He 管を比例計数管として動作させるための高電圧には、装置によるが 1500 ~ 1680 V が 採用されている。³He 管は比例計数領域(増幅度 10³ ~ 10⁵)で使用され¹⁸、出力は電圧変化 として取り出される。動作用の高電圧の変化に対し計数値の変化が最も小さくなる電圧領域 (プラトー領域)があり、この中程の電圧を採用する。

^{19.} NPL は United Kingdom Accreditation Service のもとにある National Physical Laboratory。値付けを行い証明書を 発行する機関としては他に Isotope Products Laboratories (USA), Eckert & Ziegler Isotope Products (USA) がある。

^{20.} 日本アイソトープ協会に廃棄を委託する。

^{21.} 近年、eを底とする対数は \log 、10 を底とする対数は \log_{10} として \ln は用いない傾向がある。

³He 管の出力電圧変化は、立ち上がりこそ鋭いものの減衰は緩やか²²で、次の中性子入射 まで 1 μ s 程度を必要とする(不感時間ともいう²³)。中性子の平均入射時間間隔がこれより 長くても、確率的には入射時間間隔がこれを下回ることがあるため、数え落としが生じる。 Poisson 過程の場合、単位時間あたりの事象到来数を λ (定数)とすると(2.2 節)、事象が 到来した後の時間 x内に次の事象が到来する確率密度関数(Probability Distribution Function)と累積確率分布関数(Cumulative Distribution Function)は次式で与えられる²⁴:

$$PDF: \lambda e^{-\lambda x} \tag{68}$$

$$CDF: 1 - e^{-\lambda x} \tag{69}$$

不感時間中の数え落としの確率の積分は CDF で与えられる。従って、Totals 計数率の数え落とし補正前の値を T_s ,補正後の値を T_s^* とすれば:

$$T_s^* = \frac{T_s}{1 - (1 - e^{-\lambda x})} = T_s \, e^{\lambda x} = T_s \, e^{xT_s}$$
(70)

Singles ではなく Totals なのはバックグラウンド計数率も含めて数え落としが生じるからで ある。同様の数え落としは B_G , A_s , $[R + A]_s$ においても生じるので、結果的には:

$$B_G^* = B_G e^{xT_s} \quad \to \quad S^* = S e^{xT_s} \tag{71}$$

$$\begin{pmatrix}
[R+A]_s^* = [R+A]_s e^{xT_s} \\
A_s^* = A_s e^{xT_s}
\end{pmatrix} \rightarrow R_s^* = R_s e^{xT_s}$$
(72)

不感時間 x が 1 μ s の時、 T_s が 10⁶ を超えると数え落としは数割に達する。上述の式の xT_s をどのように与えるのかについては、異なる T_s を持つ2つのチェックソースを用いる 方法などにより実際には $x = a + bT_s$ の形で与える。従って、 xT_s は T_s の二次式になる。

高計数率では、このような検出器に起因する不感時間とは別に回路の各所での容量に伴う 立ち上がり時間、パイルアップ、弁別回路におけるデジタル化、OR 回路におけるクロック との関係でも数え落としが生じる。このため、式 (70), (71) の x と式 (72) の x では異なる値と なり、チェックソースを用いた実証的な(empirical)方法によって、前者は後者の 1/4 倍が 適切とされている。前述の時間間隔 P (pre-delay) もまた、チェックソースを用いた実証的 な方法で決定されている。

^{22.} 減衰が緩やかなのは比例計数管の性質ではあるが、カソードとアノード間のどの位置で(n, p)反応を生じた のかまたその際の向きによって増幅度が異なり、出力電圧変化の減衰時間が変化する。

^{23.} 回路の不感時間は検出器の不感時間に比較して短い。

^{24.} Poisson 過程に関する教科書(文献 76 など)を参照すること。

続いて、Puの計量測定で理解しておくべき known-alpha 法について述べる。測定した B_G , T_s , A_s , $[R + A]_s$ に数え落とし補正を行い、式 (65) により単味の計数率 Singles を、式 (66) に より R_s を求めて R_s を二重相関計数率 Doubles と見做す。次に、式 (41), (42) にこれらを代入 して未知数 m_{eff} を決定するが、もう一つ未知数 M_L がある。式 (41), (42) から次式を導く:

$$\frac{D}{S} = \epsilon_n f_d \left\{ \left[\frac{1}{2(1+\alpha_r)} \frac{\overline{\nu_{s2}}}{\overline{\nu_{s1}}} - \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2(\overline{\nu_{i1}}-1)} \right] M_L + \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2(\overline{\nu_{i1}}-1)} M_L^2 \right\}$$
(73)

これを M_L の二次方程式の形にする:

$$\frac{\overline{\nu_{s1}}\ \overline{\nu_{i2}}}{\overline{\nu_{s2}}\left(\overline{\nu_{i1}}-1\right)}\left(1+\alpha_r\right)M_L^2 + \left[1-\frac{\overline{\nu_{s1}}\ \overline{\nu_{i2}}}{\overline{\nu_{s2}}\left(\overline{\nu_{i1}}-1\right)}\left(1+\alpha_r\right)\right]M_L - \frac{2D}{S}\ \frac{1+\alpha_r}{\epsilon_n\ f_d}\ \frac{\overline{\nu_{s1}}}{\overline{\nu_{s2}}} = 0$$
(74)

組成及び測定条件が同じで、増倍を無視し得る小さな質量の試料 ($M_L = 1$) に関して、 次の ρ_0 を定義する:

$$\rho_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D_0 \left(1 + \alpha_r\right)}{S_0} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\nu_{s2}}}{\overline{\nu_{s1}}} \epsilon_n f_d \tag{75}$$

対象核種が既知ならば $rac{\overline{
u_{s1}} \ \overline{
u_{i2}}}{\overline{
u_{s2}} \ (\overline{
u_{i1}} - 1)}$ を定数 Cとすることができるので式 (74) は:

$$C(1+\alpha_r)M_L^2 + [1-C(1+\alpha_r)]M_L - \frac{D}{S}\frac{1+\alpha_r}{\rho_0} = 0$$
(76)

従って、測定対象と組成が同じと見做せる小質量の代表試料を用い予め ρ_0 を決めておく と、例えば C = 2.062 として、D, Sの測定結果から、二次方程式を解いて M_L が求まる。 α_r はウラン・プルトニウム混合二酸化物中では、例えば次の式で与えられる:

$$\alpha_r = \frac{13400 f_{238} + 38.1 f_{239} + 141 f_{240} + 1.3 f_{241} + 2.0 f_{242} + 2690 f_{\text{Am}241}}{1020 \left(2.52 f_{238} + f_{240} + 1.68 f_{242}\right)}$$
(77)

 f_i は質量数 iの Pu 同位体又は ²⁴¹Am の Pu 全体に対する原子個数比であるが、実用的に は重量比でも大きな違いは生じない。式 (77)の分母の 1020 s⁻¹ は単位時間・単位重量あたり の ²⁴⁰Pu の自発核分裂由来中性子数で、²³⁸Pu, ²⁴²Pu は ²⁴⁰Pu のそれぞれ 2.52 倍, 1.68 倍の自発 核分裂由来中性子を生じる。分子の各係数は単位時間・単位重量あたりの各核種の二酸化物 中における (α , n)反応由来中性子数である。式全体として、(α , n)反応由来中性子数の 自発核分裂反応由来中性子数に対する比を意味する。このような手順で、未知数 M_L は推定 される。但し、この方法の限界として、試料に含まれる不純物や水分の影響(既知ではない もの)は計算に含めることができないので、実際の α_r はもう少し大きい。 ウラン・プルトニウム混合二酸化物中での (α , n) 反応は、²³⁸Pu, ²³⁹Pu, ²⁴⁰Pu, ²⁴¹Am などの α 核種と ¹⁷O と ¹⁸O (天然存在比はそれぞれ 0.00038 と 0.0021) との反応になる。酸素の殆ど を占める ¹⁶O は (α , n) 反応に寄与しない。反応エネルギー閾値は、¹⁷O (α , n) ²⁰Ne の場合 で 0 MeV、 ¹⁸O (α , n) ²¹Ne の場合は 0.852 MeV であり⁴⁵、上記 4 核種の α 粒子のエネル ギーは最大で 5–5.5 MeVである⁴⁶。そもそもアクチノイド元素の多く (²³⁶Np, ²⁴¹Pu, ^{242m}Am を 除く) は α 核種であるが、半減期が長いか存在比が小さい核種の寄与は小さく、この 4 核種 が全体の 99% を占める。閾値が 5.5 MeV 以下の (α , n) 反応核種は他に ⁷Li, ⁹Be, ¹⁰B, ¹¹B, ¹³C, ¹⁹F, ²³Na, ²⁵Mg, ²⁶Mg, ²⁷Al, ²⁹Si, ³⁰Si, ³⁷Cl 等があり^{45), 47}、反応断面積はオーダーとしてはいずれも 同程度であるが、天然存在比が 100% の核種 (Be, B, F, Na, Al) がある。いずれかが不純物 として含まれる場合、その影響を無視できない場合もあり得る。

式 (77) の分母にある 2.52 $f_{238} + f_{240} + 1.68 f_{242}$ を実効 ²⁴⁰Pu 重量比と呼ぶ。プルトニウム の自発核分裂性核種の中では ²⁴⁰Pu が最も同位体組成比が高いが、同位体組成比の低い ²⁴⁰Pu, ²⁴²Pu の寄与 (²⁴⁰Pu に対する倍数) が ²⁴⁰Pu 相当として加えられており、単位重量の Pu から 生じる自発核分裂由来中性子数は実効 ²⁴⁰Pu 重量比に比例する。また、任意の重量の Pu から 生じる自発核分裂由来中性子数は実効 ²⁴⁰Pu 重量 m_{eff} に比例する。これまで何度も出てきた m_{eff} は判りやすく説明するのが難しいが、計量対象に含まれる Pu 量と実効 ²⁴⁰Pu 重量比の 積であるとするのが正確な言い方であろう。プルトニウム転換技術開発施設で 2007 年迄に 取り扱ったプルトニウムの同位体組成比と ²⁴¹Am 含有率の範囲では、実効 ²⁴⁰Pu 重量比²⁵ は 0.3~0.4 程度⁴⁸、計算上の α_r は~ 0.6 (水分を僅かに含む粉末状の混合二酸化物の実際の α_r は~ 0.7) である。

ウラン・プルトニウム混合二酸化物中の α_r 値に関しては、プルトニウム原子1個あたり の酸素原子数がウランとプルトニウムの原子個数比によって変化するにもかかわらず、 α_r 値 がこの比に影響されないことを理解しておかねばならない。プルトニウム原子1個あたりの 酸素原子数が変化すると (α , n) 反応の確率が変化するように思われるが、そうではない。 全体ではなくミクロを見てプルトニウム原子1個を取り囲む酸素の原子数を考えると、その 数はウランとプルトニウムの原子個数比にかかわらず一定になっているからである。例えば 最密充填を仮定すると、プルトニウム原子1個を取り囲む12個のうち8個が酸素で一定、 残り4個をウランとプルトニウムが分け合っている。¹⁷Oと¹⁸Oの (α , n) 反応の断面積は 0.5 barn 未満と低い (α 線は5.5 MeV 未満)ので、残り4個に含まれる或いは近接する別の プルトニウム原子によって酸素が消費される確率は小さく、 α_r 値はウランとプルトニウム の原子個数比の影響を受けない。式 (77)の分子にウランが入っていないのは、半減期が長く α 粒子の放出率が低いこともあるが、 α_r 値がこのような性質を持つためである。

^{25. 1983~2006}年に東海再処理工場からプルトニウム転換技術開発施設に移送された硝酸プルトニウム溶液の受入 計量分析値(質量分析法による)から求められた実効²⁴⁰Pu 重量比の度数分布(n=123)が文献 48 に示され ている。²³⁸Puは 0.7~1.6wt%,²⁴⁰Puは 21~28wt%,²⁴²Puは 2.4~5.6wt% の範囲にあり(大きく外れる僅かの例外 を除く)、実効²⁴⁰Pu 重量比の平均は 0.35 としてよい。

なお、定数 C や式 (77)の各係数は、各核種の P_{ν} や自発核分裂反応の半減期としてどの値 を採用するかによって異なる。C = 2.062 や式 (77)の各係数は Los Alamos の文献(文献 36) から引用したが、同文献の同じ章で式 (77)の分母の係数 2.52, 1.68 が 2.54, 1.69 となっていた り、別の章(chapter 14)では 2.43, 1.69 となっていたりする。これらを改めて求めるために 必要な核データ・文献値は付録にまとめた。

ところで、式 (41), (42) の Singles, Doubles は、同じ組成の試料でも形状等の増倍条件が変化 すると、試料に含まれる実効²⁴⁰Pu 重量に対して直線的に変化しない。特に Doubles は M_L が自乗で効いてくるので、実効²⁴⁰Pu 重量の増大に対して下に凸のカーブを描いて Doubles が 増大する。実効増倍を補正した S_c (corrected Singles), D_c (corrected Doubles) を次の式で 与えられる (ρ は反応度ではなく $D(1 + \alpha_r)/S$ である):

$$S_c = \frac{S}{M_L} = F_p \, m_{eff} \, \epsilon_n \, (1 + \alpha_r) \, \overline{\nu_{s1}} \tag{78}$$

$$D_c = \frac{D}{r M_L} = F_p m_{eff} \epsilon_n \rho_0 \overline{\nu_{s1}}$$
(79)

$$(\texttt{B0}) \quad \texttt{(H)} \quad r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{D}{S} \frac{1+\alpha_r}{\rho_0} = \frac{\epsilon_n f_d}{2\rho_0 \overline{\nu_{s1}}} \left[\overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{i2}} \left(1+\alpha_r\right) \overline{\nu_{s1}} \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \right] M_L$$

 S_c , D_c は m_{eff} に対して直線的に変化し、その傾きは $D_c < S_c$ となる。また:

$$m_{eff} = \frac{D}{r M_L F_p \epsilon_n \rho_0 \overline{\nu_{s1}}}$$
(81)

このように r を経由すると D から実効 ²⁴⁰Pu 重量 m_{eff} を求めるのが容易になる。Pu 重量 は m_{eff} を実効 ²⁴⁰Pu 重量比 2.52 $f_{238} + f_{240} + 1.68 f_{242}$ で除して得られる。試料組成が既知で α_r を式 (77) で与えることから一般にこれを known-alpha 法と呼ぶ。三重相関計数率 Triples があると α_r を実測することができる(第5章の脚注 86 で説明する)。

プルトニウムの計量測定で主流となっているのは、もっと実証的な(empirical)方法で、 Pu 重量や Pu 同位体組成比を秤量と通常の化学分析で決定した代表試料を、異なる実効²⁴⁰ Pu 重量で2つ以上(同じもので数を変えてもよい)準備し、測定結果の D 又は D_c と実効 ²⁴⁰ Pu 重量との関係を校正式として得る方法である。例として、グローブボックス計量装置⁴⁹⁾ の校正曲線を図17に示す。この例は、グローブボックス内の機器内部に残留し、クリーン アップが困難で、計量も査察官による検認も難しいウラン・プルトニウム混合二酸化物粉末 に対して、中性子同時計数法によりプルトニウムを計量するための校正式で、実効²⁴⁰ Pu 重量 の範囲は最大 2.5 kg である(実際にはこの半分程度迄)。この例では実効²⁴⁰ Pu 重量で 350 g 以上になると増倍による校正曲線の曲がりが顕著となるが、実用的には原点を通る二次式で 十分と論じている。不確かさは数%と評価されている。



図17 グローブボックス計量装置の校正曲線の例(文献 49 より転載)

中性子同時計数法によるプルトニウムの計量に関して必ず理解しておかねばならないこと として、試料が検出器内部で相応の大きさを持つため、試料内部に視点を置いた時に、視点 から見て検出器がどの位の大きさに見えるか、即ち検出器の立体角が試料内部の視点の位置 によって大きく変化することが挙げられる。検出効率はこの立体角に比例し、特に二重相関 計数率は検出効率の自乗、即ち立体角の自乗に比例するので、試料内部で視点を動かした時 の立体角の変化ができるだけ小さくなるように、試料と検出器の距離及び位置関係の設計を 行う。プルトニウムの計量装置の開発に関わる論文では、このポイントに関する記述が必ず 含まれている。図16の低放射性固体廃棄物計量装置の場合の、試料室中央での水平方向の 検出効率の変化と垂直方向の検出効率の変化をそれぞれ図18のa)とb)に示す:





図18 a) では試料室中央から外れて検出器に接近するにつれて検出効率が増大し、図18 b) では検出器の端に接近するにつれて検出効率が減少しているが、カートン寸法(直径 280 mm 高さ 300 mm)の範囲での変化は数%となっている。 図16に類似した装置の場合、試料に対し試料室を大きめにする(試料との距離を離す) ことや、試料室内壁の高さ方向の中心付近に薄い円筒状の中性子吸収材を取り付けるなどの 方法によって、立体角に依存する検出効率の変化を抑制することができる。図7に類似した グローブボックス計量装置の場合、グローブボックスからの距離をとり(検出効率の低下は 許容する)、検出器同士も上下左右で一定の距離をとることにより、立体角に依存する検出 効率の変化を抑制している。グローブボックス内部の視点 Pから検出器を見た時の立体角 Ω はグローブボックスを挟んで置かれる 2つの検出器の距離を 2a、検出器の巾を 2b、高さを 2cとする時(図19)次の式で表される。 Ω は P(x,y,z)の関数になる²⁶:

$$\varphi_{\text{start}} = -\arctan\left(\frac{b-x}{a-y}\right), \quad \varphi_{\text{end}} = \arctan\left(\frac{b+x}{a-y}\right)$$
(82)

$$\theta_{\text{high}}(\varphi) = \arctan\left[\frac{c-z}{a-y}\cos\left(\varphi\right)\right], \quad \theta_{\text{low}}(\varphi) = -\arctan\left[\frac{c+z}{a-y}\cos\left(\varphi\right)\right]$$
(83)

$$\Omega = \iint_{S} \cos\left(\theta\right) d\theta \, d\varphi = \int_{\varphi_{\text{start}}}^{\varphi_{\text{end}}} \left\{ \sin\left[\theta_{\text{high}}\left(\varphi\right)\right] - \sin\left[\theta_{\text{low}}\left(\varphi\right)\right] \right\} \, d\varphi \tag{84}$$



図19 グローブボックス計量装置の設計で用いた立体角計算式(文献 49 より転載)

その他、バックグラウンド中性子の影響を低減するために外側に中性子吸収材を取り付け るなど、検出器の設計では様々な工夫が行われる。それでも、実際のプルトニウムの計量、 特にバックグラウンドが高い場所で計量を余儀なくされる場合、校正曲線が原点を通らない という現実があり、数 m しか離れていない近隣のグローブボックスに残留するウラン・プル トニウム混合二酸化物粉末の影響であると考えられていた。しかしながら、現場での経験・ 測定データの蓄積と解析からそれだけではないと見ており、図8で述べた R と A の境界と して水平線を仮定していることが問題の一つであろうと認識している。

^{26.} 検出効率の変化が、測定対象のグローブボックス内の場所の関数として得られるので、この変化ができるだけ 小さくなるように、検出器の配置や間隔を設計する。

3. 七重相関までの多重相関分布式

本章では、Singles と Doubles の公式とともに三重相関(triplet)計数率 Triples の公式を、 従来の overlapping fission 或いは superfission と呼ばれる概念によって導いた後、Böhnel による 確率母関数を用いた相関分析でも同じ公式が得られることを確かめ、この方法によって七重 相関までの各相関の公式を代数的に導出し、多重相関分布式を得る。

ウラン・プルトニウム以外の自発核分裂性核種、例えばキュリウムを少量含有する高質量 のウラン・プルトニウム混合二酸化物を中性子の計数により計量しようとすれば、単位重量 あたりのキュリウムの自発核分裂反応由来中性子数がプルトニウムのそれの 10000 倍もある ので、キュリウム重量がプルトニウム重量の 1/1000 であっても、二重相関計数率はキュリウ ムが9割以上を占める。両者の重量割合を試料毎に正確に推定できない限り、プルトニウム の計量はできない。査察官又は査察用機材による検認は、計量は勿論、この推定に対しても 必要とされる。そのような推定をせずにプルトニウムを直接計量しようとすれば、試料から 生じる中性子数の分布を観測する、多重相関計数技術又はマルチプリシティー計数法と呼ば れる方法が考えられるが、従来は検出器内で中性子を減速・熱化して検出効率を上げていた ため三重相関の計数が限度であり、また overlapping fission 又は superfission と呼ばれる概念を 用いて計数率の公式を導く方法も三重相関が限度であった。しかしながら、中性子を減速・ 熱化せず、低い検出効率で高質量の試料を計量するならば、低放射性固体廃棄物への適用は 無理でも、高質量のプルトニウムは直接計量できるかもしれない。そこで、技術的成立性は 後で検討するとして、先ずは四重相関計数率の公式を導く壁を越えることを目的とした。

3.1 核分裂で生じる複数個ペアの数

図1の核分裂で生じる中性子数の初期分布から図2の考え方によって得られる、中性子の 複数個ペア(m個1組)の組数の期待値について、次の二通りの定義を行う:

$$\overline{\nu_m} \stackrel{\text{def}}{=} m! \overline{\binom{\nu}{m}} = \sum_{\nu=m}^{\max} \nu \left(\nu - 1\right) \cdots \left(\nu - m + 1\right) P_{\nu}$$
(85)

$$\overline{\eta_m} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\left(\begin{array}{c}\nu\\m\end{array}\right)} = \sum_{\nu=m}^{\max} \left(\begin{array}{c}\nu\\m\end{array}\right) P_{\nu} \tag{86}$$

式 (85) は階乗モーメントを用いた現在の公式で式 (43) と同じ、式 (86) は「組合せ」を用いた提案式で $\overline{\eta_m} = \overline{\nu_m}/m!$ になっている。複数個ペア (m個1組)の組数の期待値を素直に表現しているのは式 (86)の提案式の方で、式 (43) に基づく式 (56) で $\overline{\nu_{s2}}/2$ と $\overline{\nu_{i2}}/2$ を用いたのはこのような理由による。以降の説明及び式では、自発核分裂なのか誘導核分裂なのかを区別して、 $\overline{\nu_{s1}}, \overline{\nu_{i1}}, \overline{\nu_{s2}}, \overline{\nu_{i2}}, \overline{\eta_{s1}}, \overline{\eta_{i1}}, \overline{\eta_{s2}}, \overline{\eta_{i2}}$ のように添字付きで用いる。m = 1の場合は中性子ペアではないので単味の中性子と呼ぶ。炉雑音や Hoffmannの概念で既出の $\overline{\nu}, \overline{\nu_p}, \overline{\nu_a}$ は単味の中性子を考えているので、上記の二通りの定義の影響を受けない。

 $\overline{\nu_{sm}}$ と $\overline{\eta_{sm}}$ の具体例として、²⁴⁰Pu の自発核分裂の計算の過程と ²³⁸Pu, ²⁴²Pu, ²⁴²Cm, ²⁴⁴Cm, ²⁵²Cf の自発核分裂の計算結果を表2に示す。これらは文献^{19, 20, 21, 22, 23)}により $P_{\nu s}$ がそのまま 確認できる²⁷核種であり、 $P_{\nu s}$ の値と不確かさ(1%~10%)については付録に記載した。 $\overline{\nu_{sm}}$ の定義では、複数個ペアの組数の期待値として値が大きすぎることがわかる。



表2 自発核分裂性核種の単味の中性子数又は中性子ペアの組数の期待値

27. 核データのライブラリの $\overline{\nu}$ と Terrell の式 (4) によって分布を求める方法ではない。

また、1 MeV と 2 MeV の中性子による²³⁵U, ²³⁸U, ²³⁹Pu の誘導核分裂の計算結果と熱中性子 による²³⁵U, ²³⁹Pu, ²⁴¹Pu の誘導核分裂の計算結果を表 3 に示す。これらも同じ文献によって *P_{vi}* が確認できる核種であり、*P_{vi}* の値と不確かさ(~数%)については付録に記載した。

	<i>m</i>	1	2	3	4	5	6	7
1 MeV	$\overline{\nu_{im}} = m ! \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right)$	2.5237	5.1022	8.0070	9.3840	7.9800	4.9680	2.5200
235 U	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	2.5237	2.5511	1.3345	0.3910	0.0665	0.0069	0.0005
	m	1	2	3	4	5	6	7
$^{238}\mathrm{U}~1\mathrm{MeV}$	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)}$	2.4292	4.8868	8.0844	10.7304	11.4480	8.8560	3.5280
	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	2.4292	2.4434	1.3474	0.4471	0.0954	0.0123	0.0007
	m	1	2	3	4	5	6	7
1 MeV	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right)}$	3.0064	7.3932	14.4852	21.8112	23.8560	17.2800	6.0480
$^{239}\mathrm{Pu}$	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	3.0064	3.6966	2.4142	0.9088	0.1988	0.0240	0.0012
	m	1	2	3	4	5	6	7
2 MeV	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right)}$	2.6372	5.6242	9.4794	12.3216	12.2760	9.5760	5.5440
²³⁵ U 2	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	2.6372	2.8121	1.5799	0.5134	0.1023	0.0133	0.0011
	m	1	2	3	4	5	6	7
MeV	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)}$	2.5826	5.4944	9.4980	13.1256	14.4600	11.5200	4.5360
²³⁸ U 2	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	2.5826	2.7472	1.5830	0.5469	0.1205	0.0160	0.0009
	m	1	2	3	4	5	6	7
2 MeV	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right)}$	3.1591	8.2116	17.1498	27.9672	34.2240	29.3040	13.1040
²³⁹ Pu 2	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	3.1591	4.1058	2.8583	1.1653	0.2852	0.0407	0.0026
	m	1	2	3	4	5	6	7
nermal	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)}$	2.4135	4.6354	6.8046	7.2696	5.3280	2.3760	0.5040
²³⁵ U tJ	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	2.4135	2.3177	1.1341	0.3029	0.0444	0.0033	0.0001
	m	1	2	3	4	5	6	7
$^{239}\mathrm{Pu}\mathrm{thermal}$	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right)}$	2.8760	6.7422	12.5358	17.6472	17.2320	10.0080	3.0240
	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right) P_{\nu i}$	2.8760	3.3711	2.0893	0.7353	0.1436	0.0139	0.0006
	m	1	2	3	4	5	6	7
hermal	$\overline{\nu_{im}} = m ! \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array} \right)}$	2.9210	6.9658	13.1514	18.8280	18.9240	11.6640	3.5280
$^{241}\mathrm{Pu}\mathrm{th}$	$\overline{\eta_{im}} = \overline{\left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right)} = \sum_{\nu_i = m}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_i \\ m \end{array}\right) P_{\nu i}$	2.9210	3.4829	2.1919	0.7845	0.1577	0.0162	0.0007

表3 誘導核分裂性核種の単味の中性子数又は中性子ペアの組数の期待値

 $P_{\nu i}$ が文献で確認できなくとも、 $\overline{\nu_{s1}}$, $\overline{\nu_{i1}}$ ならば多くの核種が文献(又は計算コード)に 収められている。表2を補うために²³⁸U,²⁴⁶Cm の自発核分裂による $\overline{\nu_{s1}}$ ^{19,20)}を、表3を補う ために²⁴¹Pu の1 MeV と2 MeV の中性子による $\overline{\nu_{i1}}$ ⁵⁰⁾を、その他ウラン・プルトニウム混合 二酸化物に多く含まれている²⁴⁰Pu,²⁴¹Am,²³⁷Np とウラン同位体として量的に無視できない ²³⁶U の熱中性子及び1 MeV と2 MeV の中性子による $\overline{\nu_{i1}}$ ^{51),52)}を表4に示す²⁸。

ν		ν	<i>i</i> 1]				
238 U 246 Cm		$^{241}\mathrm{Pu}\:1\mathrm{MeV}$	$^{241}\mathrm{Pu}\ 2\mathrm{MeV}$					
1.990	2.930	3.047	3.195					
	$\overline{ u_{i1}}$			$\overline{\nu_{i1}}$				
240 Pu thermal	⁰ Pu thermal 240 Pu 1 MeV 240 Pu 2 MeV		$^{241}\mathrm{Amthermal}$	$^{241}\mathrm{Am}\;1\mathrm{MeV}$	$^{241}\mathrm{Am}\; 2\mathrm{MeV}$			
2.906	2.906 3.054 3.202		3.111	3.256	3.401			
	$\overline{ u_{i1}}$		$\overline{\nu_{i1}}$					
$^{237}\mathrm{Npthermal}$	$^{37}\mathrm{Np}\mathrm{thermal} \qquad ^{237}\mathrm{Np}\;1\mathrm{MeV} \qquad ^{237}\mathrm{Np}\;2\mathrm{MeV}$		236 U thermal	$^{236}\mathrm{U}\;1\mathrm{MeV}$	236 U 2 MeV			
2.632	32 2.777 2.921		2.359	2.495	2.631			

表4 その他の核種の単味の中性子数の期待値

表3と表4から、中性子のエネルギーの増大(熱中性子 → 1 MeV → 2 MeV)に比例して $\overline{\nu_{i1}}$ が変化することがわかる。 $\overline{\nu_{i1}}$ を原子番号 Zと質量数 A 及び中性子のエネルギー E_N の 関数で近似する試みも行われている^{45),46)}。文献値と近似式を²⁴¹Pu で比較してみると、その差 は 0.01~0.03 程度で、文献値の不確かさと同程度であった。この近似式を仮定できるとする ならば、原子番号と質量数及び中性子のエネルギーから $\overline{\nu}$ を求め、次いで Terrell の式 (4)を 変形して得られる次の式から、誤差関数を用いて P_{ν} を求めることができる²⁹:

$$P_{\nu} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\nu - \overline{\nu} + 0.5}{\sigma \sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\nu - \overline{\nu} - 0.5}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right]$$
(87)

 σ はガウス分布の巾で²⁵²Cf 以外の核種は 1.08 ± 0.01 とされる¹⁹ が、良く適合させるには 付録の mean と width を用いた方がよい。 $\overline{\nu_{i1}}$ を中性子と核分裂片の平均運動エネルギー等 から導く議論^{53,54} は大変興味深いものがあるが、本報告書の範囲を超える。

28. νと直接関係はないが、²⁴¹Am は²³⁵U,²³⁹Pu,²⁴¹Pu ほどではないものの、熱中性子に対する核分裂反応断面積が やや大きい(3 barn)。²³⁶U,²³⁷Np,²⁴⁰Pu は²³⁸U ほどではないものの、熱中性子に対する核分裂反応断面積が やや小さい(10⁻² barn)。²⁴¹Am,²³⁷Np が保障措置上の理由で着目されるのは、(n, γ)反応によって生じる ^{242m}Am,²³⁸Np の熱中性子に対する核分裂反応断面積が極めて大きい(²⁴¹Pu を超える)からである。

29.
$$P_{\nu} = \sum_{m=0}^{\nu} P_m - \sum_{m=0}^{\nu-1} P_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\nu-\overline{\nu}-0.5)/\sigma}^{(\nu-\overline{\nu}+0.5)/\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$
 に、
 $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-z^2\right) dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{2x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ を適用して導出する。式 (4) の項 b は無視した。

3.2 Hage による重畳的核分裂の概念

式 (85) で定義した $\overline{\nu_{s1}}$, $\overline{\nu_{i1}}$, $\overline{\nu_{s2}}$, $\overline{\nu_{i2}}$... を用い、Hage による overlapping fission の概念³³⁾ が 登場した同年の文献⁵⁵⁾ に沿って公式 (88), (89), (90) を導く。*S*, *D* は式 (41), (42) の再掲である:

$$S = F_p m_{eff} \epsilon_n \left(1 + \alpha_r\right) \overline{\nu_{s1}} M_L \tag{88}$$

$$D = \frac{F_p \, m_{eff} \, \epsilon_n^2 \, f_d}{2} \left[\, \overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{i2}} \left(1 + \alpha_r \right) \overline{\nu_{s1}} \, \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \, \right] \, M_L^2 \tag{89}$$

$$T = \frac{F_p \, m_{eff} \, \epsilon_n^3 \, f_t}{6} \left\{ \overline{\nu_{s3}} + \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \left[(1 + \alpha_r) \, \overline{\nu_{s1}} \, \overline{\nu_{i3}} + 3 \, \overline{\nu_{s2}} \, \overline{\nu_{i2}} \right] + 3 \, (1 + \alpha_r) \, \overline{\nu_{s1}} \, \left(\frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \right)^2 \, \overline{\nu_{i2}}^2 \right\} \, M_L^3$$
(90)

Sはペアであるか否かにかかわらず単位時間あたり観測された中性子数、即ち相関の有無 を考えない単味 (singlet) 計数率 Singles (cps) 、Dは単位時間あたり観測された二重相関 (doublet) 計数率 Doubles (cps) 、Tは単位時間あたり観測された三重相関 (triplet) 計数 率 Triples (cps) で、 F_p , m_{eff} , ϵ_n , f_d と $f_t \approx f_d^2$ を除いた部分が、1回の自発核分裂あたり 漏れる singlet, doublet, triplet の組数を意味する。漏れる確率 p_l として Hage は lを用いたの で、式 (45) の漏れ増倍率 M_L を式 (91) に書き直す³⁰。 M_L の意味を図20に模式的に示す:

$$M_L = l M_T = l \left[1 + p \overline{\nu_{i1}} + (p \overline{\nu_{i1}})^2 + \dots \right] = \frac{l}{1 - p \overline{\nu_{i1}}} = \frac{1 - p - p_c}{1 - p \overline{\nu_{i1}}}$$
(91)



図20 M_L の意味の模式図

この概念では、試料から漏れて装置に到達する中性子の確率分岐を数え上げてゆくことに より singlet, doublet, triplet の漏れを導く。図21に singlet と doublet、図22に triplet の導出 過程を示すが、誘導核分裂反応の連鎖の中での漏れをそれぞれ、一次元、二次元、三次元で 想像する必要があり、四重相関計数率(Quadruples)まで拡張することは難しい。

30. 有用な式変形として、 $\frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} = \frac{p}{1 - p\overline{\nu_{i1}}} = p M_T, \quad \frac{M_L - 1}{M_L \overline{\nu_{i1}} - 1} = p, \quad \frac{M_L \overline{\nu_{i1}} - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} = M_T \quad など.$

Source of singlets and doublets の部分は、1回の自発核分裂反応で生じた中性子と(α , n) 反応で生じたその α_r 倍の中性子が誘導核分裂反応の連鎖を生じる様を示し、p はこれまで 通り1個の中性子が誘導核分裂反応を生じる確率である。誘導核分裂反応の後に $\overline{\nu_{i1}}$ と $\overline{\nu_{i2}}/2$ ($\overline{\nu_{i2}}$ を2で除する理由は前節を参照)を分岐しているのは、観測者が単味に着目する のか、中性子ペア(2個1組)に着目するのか、の違いであって確率の分岐ではない。

Leakage from a singlet の部分は、誘導核分裂反応の連鎖の単味に着目した場合の中性子の 漏れの確率分岐を示す。lは1個の中性子が体系から漏れる確率である。中性子が体系から 漏れればそこで連鎖は終了する。出発点に1個の中性子を考えると、誘導核分裂反応0回で 漏れる場合の中性子はl個、誘導核分裂反応1回で漏れる場合の中性子は $lp\overline{\nu_{i1}}$ 個(0回目 で漏れない確率はpに含まれている)、誘導核分裂反応2回で漏れる場合の中性子は $l(p\overline{\nu_{i1}})^2$ 個…で、これらの総和は等比級列の公式によって lM_T 即ち M_L である。出発点 に1回の自発核分裂反応で生じた中性子と(α , n)反応で生じたその α_r 倍の中性子を考え ると、singletの漏れは $(1 + \alpha_r)\overline{\nu_{s1}}M_L$ となる。

Leakage from a doublet の部分は、誘導核分裂反応の連鎖の途上で各々の中性子ペアに着目 した場合の中性子2個の漏れの確率分岐を示す。中性子ペアが起源であれば、中性子2個は 連鎖途上のどこで漏れてもよい(図6の coupled pair と同じ)。第二象限は誘導核分裂反応 0回で2個とも漏れる場合で、第一及び第三象限は誘導核分裂反応0回で1個が漏れて残り の1個は Singlet leakage 上で漏れる場合、第四象限内部の第二象限は誘導核分裂反応1回で 2個とも漏れる場合、第四象限内部の第一及び第三象限は誘導核分裂反応1回で1個が漏れ て残りの1個は Singlet leakage 上で漏れる場合、第四象限内部の第四象限は誘導核分裂反応 が2回以上である。出発点に1回の自発核分裂反応で生じた $\overline{\nu_{s2}}/2$ 組の中性子ペアを考える と、2個とも漏れる場合の総和は:

$$\frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} \left[1 + (p\,\overline{\nu_{i1}})^2 + (p\,\overline{\nu_{i1}})^4 + (p\,\overline{\nu_{i1}})^6 + \dots \right] l^2 = \frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} \frac{l^2}{1 - (p\,\overline{\nu_{i1}})^2}$$
(92)

1 個が漏れて残りの1 個は Singlet leakage 上で漏れる場合(2 通り)の総和は:

$$2\frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} \left[1 + (p\,\overline{\nu_{i1}})^2 + (p\,\overline{\nu_{i1}})^4 + \dots\right] l\,p\,\overline{\nu_{i1}} \left[1 + p\,\overline{\nu_{i1}} + (p\,\overline{\nu_{i1}})^2 + \dots\right] l$$

$$= 2\frac{\overline{\nu_{s2}}}{2}\,\overline{\nu_{i1}}\,\frac{1}{1 - (p\,\overline{\nu_{i1}})^2}\,\frac{p\,l^2}{1 - p\,\overline{\nu_{i1}}}$$
(93)

式 (92) と式 (93) の和は:

$$\frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} \frac{l^2}{1 - (p\,\overline{\nu_{i1}})^2} \left(1 + \overline{\nu_{i1}} \,\frac{2\,p}{1 - p\,\overline{\nu_{i1}}}\right) = \frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} \,\frac{l^2}{1 - (p\,\overline{\nu_{i1}})^2} \,\frac{1 + p\,\overline{\nu_{i1}}}{1 - p\,\overline{\nu_{i1}}} = \frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} \,M_L^2 \tag{94}$$

式 (94) を Source of singlets and doublets の各中性子ペアに適用し、これらの総和を求める(図の最下段)と doublet の漏れが求まる。脚注 30 を適用して式 (89)の doublet を得る。



For singlet : $(1 + \alpha_r) \overline{\nu_{s1}} M_L$

For doublet :
$$\begin{pmatrix} \overline{\nu_{s2}}/2 \\ + (\overline{\nu_{i2}}/2) \ p \ \overline{\nu_{s1}} \ \left[1 + p \overline{\nu_{i1}} + (p \ \overline{\nu_{i1}})^2 + (p \ \overline{\nu_{i1}})^3 \dots \right] \\ + (\overline{\nu_{i2}}/2) \ p \ \alpha_r \ \overline{\nu_{s1}} \ \left[1 + p \overline{\nu_{i1}} + (p \ \overline{\nu_{i1}})^2 + (p \ \overline{\nu_{i1}})^3 \dots \right] \end{pmatrix} M_L^2$$
$$= \frac{1}{2} \left[\overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{i2}} \left(1 + \alpha_r \right) \overline{\nu_{s1}} \ \frac{p}{1 - p \overline{\nu_{i1}}} \right] M_L^2$$

図21 試料から漏れて装置に到達する singlet と doublet の確率分岐 †の式の説明は本文を参照。 Source of singlets. doublets and triplets の部分は、図21と同じく、1回の自発核分裂反応で 生じた中性子と (α , n) 反応で生じたその α_r 倍の中性子が誘導核分裂反応の連鎖を生じる 様を示す。 $\overline{\nu_{s3}}$ は前節で述べた理由により 3! = 6 で除した。

Leakage from a triplet の部分は Leakage from a doublet の部分と同じ方法で、誘導核分裂反応 の連鎖の途上で各々の中性子ペア(3個1組)に着目した場合の、中性子3個の漏れの確率 分岐を示す。誘導核分裂反応0回の場合は、3個とも漏れる場合(1通り)、2個が漏れて 残りの1個は singlet leakage 上で漏れる場合(3通り)、1個が漏れて残りの2個は doublet leakage 上で単味で漏れる場合(3通り)となり、誘導核分裂反応が1回以上の場合も同じ 確率分岐が続く(Leakage from a doublet 第四象限と同じ)。出発点に1回の自発核分裂反応 で生じた $\overline{\nu_{s3}}/6$ 組の中性子ペアを考えると、ここでの triplet の漏れは次式で表され(導出は 後述する)、Leakage from a doublet での doublet の漏れと同じ形をしている:

$$\frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} M_L^3 \tag{95}$$

Triple leakage from a doublet の部分では、連鎖の途上にある各々の中性子ペア(2個1組) の Leakage from a doublet に見いだされる中性子ペア(3個1組)に着目する³¹。このような 場合に該当するのは、Leakage from a doublet の第一及び第三象限において1個が漏れて残り の1個が Singlet leakage 上で中性子ペアと Leakage from a doublet を生じる場合と、第四象限 内部の第一及び第三象限(誘導核分裂反応1回)で1個が漏れて残りの1個が Singlet leakage 上で中性子ペアと Leakage from a doublet を生じる場合である。 $\overline{\nu_{i2}}/2$ 組の中性子ペアを考え ると、Leakage from a doublet での doublet の漏れは ($\overline{\nu_{i2}}/2$) M_L^2 なので、前者の総和は:

$$2lp \left[1 + (p\overline{\nu_{i1}}) + (p\overline{\nu_{i1}})^2 + \cdots\right] \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2} M_L^2 = 2p \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2} M_L^3$$
(96)

後者の総和は:

$$2 p \,\overline{\nu_{i1}} \, l \, p \, \left[1 + (p \,\overline{\nu_{i1}}) + (p \,\overline{\nu_{i1}})^2 + \cdots \right] \, \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2} \, M_L^2 = 2 \, p^2 \,\overline{\nu_{i1}} \, \frac{\overline{\nu_{i2}}}{2} \, M_L^3 \tag{97}$$

式 (96) と式 (97) の和の Triple leakage from a doublet での総和は:

$$2p \, \overline{\frac{\nu_{i2}}{2}} \, M_L^3 \, (1+p\overline{\nu_{i1}}) \left[1+(p\,\overline{\nu_{i1}})^2+(p\,\overline{\nu_{i1}})^4+\dots \right] = 2 \, \overline{\frac{\nu_{i2}}{2}} \left(\frac{p}{1-p\overline{\nu_{i1}}}\right) M_L^3 \tag{98}$$

式 (98) を Source of singlets. doublets and triplets の各中性子ペアに適用して、これらの総和を 求める (図の最下段) と triplet の漏れが求まる。脚注 30 を適用して式 (90) の triplet を得る。

^{31.} 図21で同様の場合(単味の中の2個)は考慮する必要がない。中性子ペアはあくまで観測者の見方である から、単味の中の2個は、中性子ペアとして考慮されている。同様に、図22で単味の中の3個も、中性子 ペア(3個1組)として考慮されている。



Source of singlets, doublets and triplets



特筆すべき点として、Leakage from a singlet/doublet/triplet での singlet/doublet/triplet の漏れ は、1個の中性子又は1組の中性子ペア(2個1組又は3個1組)あたりそれぞれ M_L 個, M_L^2 組, M_L^3 組となる。後述するとした Leakage from a triplet での triplet の漏れについては、 $\overline{\nu_{s3}}/6$ 組の中性子ペア(3個1組)を考え、以下の確率分岐を数えてゆく。

3個とも漏れる場合(1通り)の Leakage from a triplet での総和は:

$$\frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} \left[1 + (p \,\overline{\nu_{i1}})^3 + (p \,\overline{\nu_{i1}})^6 + (p \,\overline{\nu_{i1}})^9 + \dots \right] l^3
= \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} \frac{l^3}{1 - (p \,\overline{\nu_{i1}})^3} = \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} \frac{l^2}{1 + p \,\overline{\nu_{i1}} + (p \,\overline{\nu_{i1}})^2} M_L$$
(99)

2個が漏れて残りの1個は Singlet leakage 上で漏れる場合(3通り)は:

$$3 \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} l^2 p \,\overline{\nu_{i1}} \left[1 + p \,\overline{\nu_{i1}} + (p \,\overline{\nu_{i1}})^2 + (p \,\overline{\nu_{i1}})^3 + \dots \right] l = 3 \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} \, l^2 \, p \,\overline{\nu_{i1}} \, M_L \tag{100}$$

これの Leakage from a triplet での総和は:

$$3 \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} l^2 p \overline{\nu_{i1}} M_L \left[1 + (p \overline{\nu_{i1}})^3 + (p \overline{\nu_{i1}})^6 + (p \overline{\nu_{i1}})^9 + \dots \right] = 3 \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} \frac{l p \overline{\nu_{i1}}}{1 + p \overline{\nu_{i1}} + (p \overline{\nu_{i1}})^2} M_L^2$$
(101)

1個が漏れて残りの2個は Doublet leakage 上で単味で漏れる場合(3通り)は:

$$3\frac{\overline{\nu_{s3}}}{6}l\left\{p\overline{\nu_{i1}}\left[1+p\overline{\nu_{i1}}+(p\overline{\nu_{i1}})^{2}+(p\overline{\nu_{i1}})^{3}+\ldots\right]l\right\}^{2}=3\frac{\overline{\nu_{s3}}}{6}l\left(p\overline{\nu_{i1}}\right)^{2}M_{L}^{2}$$
(102)

これの Leakage from a triplet での総和は:

$$3 \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} l (p \overline{\nu_{i1}})^2 M_L^2 \left[1 + (p \overline{\nu_{i1}})^3 + (p \overline{\nu_{i1}})^6 + (p \overline{\nu_{i1}})^9 + \dots \right] = 3 \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} \frac{(p \overline{\nu_{i1}})^2}{1 + p \overline{\nu_{i1}} + (p \overline{\nu_{i1}})^2} M_L^3$$
(103)

式 (99) と式 (101) 及び式 (103) の和は:

$$\frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} \frac{l^2 M_L + 3 l p \overline{\nu_{i1}} M_L^2 + 3 (p \overline{\nu_{i1}})^2 M_L^3}{1 + p \overline{\nu_{i1}} + (p \overline{\nu_{i1}})^2} = \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} M_L^3 \quad \because l = (1 - p \overline{\nu_{i1}}) M_L$$
(104)

このようにして式 (95) が得られる。しかしながらこの方法では、確率分岐の数え方が複雑で、四重相関(quadruplet)以上の漏れを誤りなく導出するのは難しいと考えられた。

 $M_L = 1$ で(α , n)反応が無い場合、例えばチェックソース(重量~0.1 μ g の²⁵²Cf 線源) を測定する場合、導出した公式(88), (89), (90)は、最初に提示した式(1)とどのような関係に あるのか。この点を確認する。式(1)との比較なので、計数装置の条件は $f_d = f_t = 1$ とし、 確率を意味するように自発核分裂1回あたりとして、公式を次の式に還元する:

$$S_{cs} = \epsilon_n \,\overline{\nu_{s1}} = \epsilon_n \,\overline{\eta_{s1}} = \sum_{\nu_s=1}^{\max} \begin{pmatrix} \nu_s \\ 1 \end{pmatrix} P_{\nu_s} \epsilon_n \tag{105}$$

$$D_{cs} = \epsilon_n^2 \, \frac{\overline{\nu_{s2}}}{2} = \epsilon_n^2 \, \overline{\eta_{s2}} = \sum_{\nu_s=2}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_s \\ 2 \end{array} \right) P_{\nu_s} \, \epsilon_n^2 \tag{106}$$

$$T_{cs} = \epsilon_n^3 \, \frac{\overline{\nu_{s3}}}{6} = \epsilon_n^3 \, \overline{\eta_{s3}} = \sum_{\nu_s=3}^{\max} \left(\begin{array}{c} \nu_s \\ 3 \end{array} \right) P_{\nu_s} \, \epsilon_n^3 \tag{107}$$

最初に提示した式 (1) では、 ϵ_n^m に $(1 - \epsilon_n)^{\nu-m}$ を乗じている³² が、式 (105), (106), (107) には (1 - ϵ_n)^{$\nu-m$} が含まれない。違いはこの点だけである。式 (1) は、 ν 個のうち m 個が検出器に 入り、残り $\nu - m$ 個は検出器に入らないことを意味する。ところが、式 (105), (106), (107) で は残り $\nu - m$ 個のうち 1 個以上が検出器に入ってもこれを排除しない。例えば、試料から 5 個の中性子が生じ 4 個 1 組が検出器に入った時、式 (1) では $Q_3 \approx Q_5$ にはカウントされ ず、 Q_4 にのみカウントされる (Q_4 には 4 個の中性子が生じ 4 個 1 組が検出器に入った時、 5 個の中性子が生じ 4 個 1 組 (5 通 り) が検出器に入った時、6 個の中性子が生じ 4 個 1 組 が検出器に入った時 (15 通 り) … がカウントされる)。これに対して、式 (105), (106), (107) は残り $\nu - m$ 個に無関心であるから、4 個 1 組が検出器に入った時、S (単味に着目) にも D (二重相関に着目) にも T (三重相関に着目) にもカウントされる。何個 1 組でも同様で あり、図 1 2 で述べた「到着した triplet, quadruplet から 2 個を選んだ結果を doublet として 数えても問題ないのではないか」に対し、問題ないと答える場合に相当する。同時計数回路 の仕組みとは合致し、特に単味計数値は式 (105) の考え方がむしろ自然なのだが、式 (105), (106), (107) の S_{cs} , D_{cs} , T_{cs} は Q_1 , Q_2 , Q_3 と異なる量で、 $M_L = 1$ で (α , n) 反応が無い場合 であっても、 S_{cs} , D_{cs} , T_{cs} …は、観測される分布 Q_n にはならない。

結論として、観測者が同時計数回路を使って計数しているものは、核分裂によって生じる 中性子の複数個ペア(初期分布)でもなく、初期分布から「組合せ」によって得られる分布 (観測される分布)でもなく、検出器にほぼ同時³³に到達した中性子の相関(correlation) と言うべきものである。Hage³³も次節で詳述する Böhnel³⁵⁾もタイトルを correlation analysis としている。このような理解からも、確率事象に由来してほぼ同時に到達する accidental pair と、検出器の減速材により時定数 *τ*_{di} の時間的拡がりを持つ coupled pair は区別できない。

^{32.} 式 (1) では変数名を参考文献に合わせて *m* ではなく *n* を用いているが、式 (43), (85), (86) 及び以降の記述と整合 させるために、ここでは *m* を用いた。

^{33.} ほぼ同時とは、図8 b)の Rossi-alpha 分布の R の範囲である。

3.3 Böhnel による確率母関数を用いた相関分析

Hage が overlapping fission の概念³³⁾を発表した同じ年に、Böhnel は複数個の中性子ペアの 漏れの組数を求める方法として、確率母関数(PGF: Probability Generating Function)を用い た相関分析³⁵⁾を発表している。まず。確率母関数について説明する。

離散確率変数 X (正の整数で、核分裂の際に生じる中性子数 ν は離散確率変数になる) に 対し、収束条件 |z| < 1 を満たす zを用い、Xの確率母関数 G_X を次の式で与える³⁴:

$$G_X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{z^X} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_X(X=n) \quad \text{(ID8)}$$

 $P_X(X=n)$ は X が n に一致する確率という意味で、 P_X は X の確率分布にあたる。離散 変数なので P(X)とは書かない。 $G_X(z)$ の k 階微分 $G_X^{(k)}(z)$ は以下のように表される:

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_X(X=n) = P_X(X=0) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_X(X=n)$$
(109)

$$G'_{X}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, z^{n-1} \, P_{X}(X=n) = 1 \, P_{X}(X=1) + \sum_{n=2}^{\infty} n \, z^{n-1} \, P_{X}(X=n)$$
(110)

$$G_X''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} P_X(X=n) = 2 P_X(X=2) + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} P_X(X=n)$$
(111)

$$G_X^{(3)}(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3} P_X (X=n)$$

$$= 6 P_X (X=3) + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3} P_X (X=n)$$
(112)

$$G_X^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \, z^{n-k} \, P_X(X=n)$$
(113)

z = 0では初項以外が零になるので式 (114)が、z = 1では式 (115)が得られる:

$$G_X^{(k)}|_{z=0} = k! P_X (X=k) \rightarrow P_X (X=k) = \frac{G_X^{(k)}|_{z=0}}{k!}$$
 (114)

$$G_X^{(k)}|_{z=1} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) P_X (X=n)$$

$$= \overline{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}$$
(115)

^{34.} もっと簡略化した表記も見られるが、混乱を生じ易いので、簡略化した表記は避けた。

式 (114) から、Xの確率分布は確率母関数を z = 0 で微分することにより得られることが 判る。また、式 (115) は確率分布 P_X の k次の階乗モーメント $M_{P_X}^{(k)}$ と呼ばれる:

$$M_{P_X}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} G_X^{(k)}|_{z=1} = \overline{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}$$
(116)

0 次は $M_{P_X} = G_X|_{z=1} = 1$ となり、1 次は $M_{P_X}^{'} = G_X^{'}|_{z=1} = \overline{X}$ で Xの期待値、2 次は $M_{P_X}^{''} = G_X^{''}|_{z=1} = \overline{X(X-1)} = \overline{X^2} - \overline{X}$ を表す。Xの分散は $\overline{(X-\overline{X})^2} = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$ である から、階乗モーメントを用いると分散は次の式で表される:

$$M_{P_{X}}^{''} + M_{P_{X}}^{'} - \left(M_{P_{X}}^{'}\right)^{2}$$
(117)

次に、互いに独立な複数の離散確率変数 $X_1, X_2, \dots X_N$ を考える。例えば、昆虫が 1 回の産卵で生む卵の数 N がある確率分布に従い、卵 iの孵化する確率が $X_i = \{0,1\}$ で与えられる場合³⁵を考える (N の確率分布と X の確率分布は別)。卵全体としての和の確率母関数は、各確率母関数の積で表される:

$$G_{X_1+X_2+\cdots X_N}(z) = G_{X_1}(z) G_{X_2}(z) \cdots G_{X_N}(z)$$
(118)

$$:: G_{X+Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_{X+Y}(X+Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[z^k \sum_{x=0}^k P_X(X=x) P_Y(Y=k-x) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{x=0}^k z^{X+Y} P_X(X=x) P_Y(Y=k-x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{x=0}^k z^X P_X(X=x) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{x=0}^k z^Y P_Y(Y=k-x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} z^x P_X(X=x) \sum_{y=0}^{\infty} z^y P_Y(Y=y)$$

$$= G_X(z) G_Y(z)$$

$$(119)$$

この例が、誘導核分裂反応の連鎖、つまり核分裂反応(産卵)と生じる中性子(卵)の数 及び次の核分裂反応への生き残り(孵化)に置き換えられることは、容易に想像できるであ ろう。但し、着目すべきは中性子の試料内での増倍ではなく、試料外への漏れである。

35. 卵の比喩は沼津工業高等専門学校の松澤寛先生のアイデアである。

式 (119) の
$$P_{X+Y}(X+Y=k) = \sum_{x=0} P_X(X=x) P_Y(Y=k-x)$$
は、文献 25 など確率論では良く知られている。

もしも、 $X_1, X_2, \dots X_N$ が互いに独立でありながら同一の確率分布 P_X と確率母関数 $G_X(z)$ を持つ(数学的には特別な場合であるが卵に対しては妥当な仮定)ならば、卵全体 としての $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ の確率母関数 $G_S(z)$ は、次の式で表される:

$$G_{S}(z) = [G_{X}(z)]^{N} = \overline{[G_{X}(z)]^{N}} = G_{N}(G_{X}(z))$$
(120)

また、一般的に、階乗モーメントと確率母関数の間には次の関係が成り立つ:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{P_X}^{(k)}}{k!} (z-1)^k$$
(121)

Böhnel の文献では $z \approx 1$ での Taylor 展開とされているが、二項級数を利用する方が証明は 容易である³⁶。

36. 二項級数は k, n を整数とする級数 $(1+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k$ だが、n を非整数とした無限級数も成り立つ: $(1+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} y^k \quad k: \text{integer}, |\alpha| < 1, \ k \ge \alpha$ でも計算可能。 この級数を利用して $(1+y)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1) \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \cdots (2k-3)}{2 \bullet 4 \bullet 6 \cdots 2k} y^k$ $(1+y)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 1 \bullet 3 \bullet 5 \cdots (2k-1)}{2 \bullet 4 \bullet 6 \cdots 2k} y^k$ $(1-y)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \bullet 3 \bullet 5 \cdots (2k-1)}{2 \bullet 4 \bullet 6 \cdots 2k} y^k$

などの有用な公式が導かれる。但し、式 (121) の証明には通常の二項級数を用いる。 通常の二項級数で $1 + y \rightarrow z$ とすると $z^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z-1)^k$ これを式 (108) に代入すると:

これを式 (108) に代入すると:
$$\infty \begin{bmatrix} n \\ - n \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} G_X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z-1)^k \right] P_X(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} (z-1)^k \right] P_X(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[P_X(X=n) + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} P_X(X=n) (z-1)^k \right] \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} P_X(X=n) (z-1)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} P_X(X=n) (z-1)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{P_X}^{(k)}}{k!} (z-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{P_X}^{(k)}}{k!} (z-1)^k \end{split}$$

確率分布が条件によって分岐する場合は、全ての条件を網羅する確率母関数は、各分岐に おける確率母関数の重み付き(分岐の確率が重みになる)和になる:

$$P_X(X=n) = \sum_{\text{all } j} p_j P_X(X=n \mid j) \quad \textcircled{\square } \bigcup \quad \sum_{\text{all } j} p_j = 1$$
(122)

$$G_X(z) = \sum_{\text{all } j} p_j G_X(z) | j$$
(123)

式 (120) は特別な場合であるが、式 (121), (122), (123) は確率母関数の一般的な性質である。 Böhnel の論文では、(P1) が式 (115)、(P2) が式 (119)、(P3) が式 (122) と (123)、(P4) が式 (121) に 対応する。実際にどのような式になるのか、幾つかの確率分布とその確率母関数を示す。

二項分布(生起確率 p, 試行回数 m, 生起回数 n が確率変数 X)の場合^{37,38}:

$$P_X(X=n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$$
(124)

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} z^n = [(1-p)+pz]^m \quad \therefore \ 0 \le n \le m$$
(125)

負の二項分布(生起確率 p, 生起回数 n, 試行回数 m が確率変数 X)の場合^{39,40}:

$$P_X(X=m) = \binom{m-1}{n-1} p^n (1-p)^{m-n}$$
(126)

$$G_{X}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} {\binom{m-1}{n-1}} p^{n} (1-p)^{m-n} z^{m} \quad \therefore \ 0 \le n \le m$$

$$= p^{n} z^{n} \sum_{r=0}^{\infty} {\binom{n+r-1}{r}} (1-p)^{r} z^{r} \qquad \text{where } r = m-n$$

$$= p^{n} z^{n} \sum_{r=0}^{\infty} {\binom{-n}{r}} (p-1)^{r} z^{r}$$

$$= p^{n} z^{n} [1+(p-1)z]^{-n}$$

(127)

37. m回の試行(mを与える)で n回の生起が実現するような nの確率分布

38. Gx は二項級数の展開式そのままの形をしている。

39. n回の生起(nを与える)が m回の試行で実現するような mの確率分布

$$\begin{pmatrix} m-1\\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1\\ (m-1)-(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+r-1\\ r \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} n+r-1\\ r \end{pmatrix} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!} = \frac{(-n-r+1)(-n-r+2)\cdots (-n)}{r!} (-1)^r = \begin{pmatrix} -n\\ r \end{pmatrix} (-1)^r$$

Poisson 分布(単位時間あたりの事象の生起回数 λ ,時間t)の場合:

$$P_{\lambda t}(\lambda t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
(128)

$$G_{\lambda t}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} z^n = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda tz)^n}{n!} = e^{-\lambda t + \lambda tz} = e^{\lambda t (z-1)}$$
(129)

Böhnel の文献では *z* ではなく*u* が、確率分布として q_s , q, r, R が、確率母関数として f_s , f, h_1 , h_n , H が用いられており、やや混乱するので、式 (129) までは数学の一般的な表記 方法(確率母関数は $G_{\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{F} \mathfrak{K}}(z)$, 確率は $P_{\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{F} \mathfrak{K}}(\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{F} \mathfrak{K})$, 確率は $P_{\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{K} \mathfrak{K}}(\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{K})$, 確率分布は $P_{\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{K} \mathfrak{K}}(z)$, 確率は $P_{\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{K} \mathfrak{K}}(z)$, 確率分布は $P_{\mathfrak{m} * \mathfrak{F} \mathfrak{K} \mathfrak{K}}(z)$, 2 階微分は '', 3 階微分以上は '') を用いて説明した。以下、Böhnel の論文と変数名の 整合をとって説明を行う。Böhnel は以下の確率母関数を用いている。

自発核分裂反応又は (α, n) 反応による source 中性子数の確率分布 q_s と確率母関数 f_s :

$$f_s(u) = \sum_{i=0}^{\infty} q_s(i) \, u^i$$
(130)

誘導核分裂反応による induced 中性子数の確率分布 q と確率母関数 f:

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} q(i) u^i \tag{131}$$

1 個の中性子 (source/induced を問わない)から生じる singlet leakage chain (図21)の中から漏れる中性子数の確率分布 r と確率母関数 h_1 :

$$h_1(u) = \sum_{i=0}^{\infty} r(i) \, u^i \tag{132}$$

n 個の中性子(source/induced を問わない)から生じる singlet leakage chain(図21)の中から漏れる中性子数の確率母関数 h_n :

$$h_n(u) = [h_1(u)]^n \tag{133}$$

自発核分裂反応又は (α, n) 反応の1中性子あたり生じる overlapping fission の中から漏れ る中性子ペアの組数の確率分布 Rと確率母関数 H:

$$H(u) = \sum_{i=0}^{\infty} R(i) u^{i}$$
(134)

式 (133) は式 (132) に式 (118) を適用して得られる。最終的に求めたいものは R(i) である。 産卵と孵化の例に置き換えると、産卵=核分裂における $N = \nu$ の確率分布が q_s, q 、孵化は 誘導核分裂ではなく試料又は体系からの漏れで X = l となる。 まず $h_1(u)$ について、1 個の中性子が誘導核分裂を起こす確率 p と漏れる確率 l = 1 - p(中性子が体系内で誘導核分裂反応以外の吸収反応を生じる確率 p_c は p に比較して小さい ので多くの場合考慮されない)に関して式 (123)の確率母関数の和の法則を用い、式 (120)の 確率母関数の z が別の確率母関数となる場合の法則を用いて、以下の関係を仮定する:

$$h_1(u) = (1-p) \sum_{i=1}^{1} 1 u^i + p \sum_{i=0}^{\infty} q(i) [h_1(u)]^i$$
(135)

右辺第一項は直ちに漏れる(分岐確率 1-p)確率母関数(確率は 1 のみ)、右辺第二項 は誘導核分裂(分岐確率 p)で生じた i 個の中性子(確率分布 q)の各々が確率母関数 h_1 に従って漏れてくるような確率母関数という意味になる。Böhnel は式 (135)を仮定とは言っ ていないが、筆者には自明と言うには不安が残るので、仮定とした。

式 (135) の右辺第二項についてイメージを描くことができたら、誘導核分裂ではなく自発 核分裂の場合、式 (130) は:

$$f_{sp}[h_1(u)] = \sum_{i=0}^{\infty} q_{sp}(i) [h_1(u)]^i$$
(136)

と書けることがわかる。この式では自発核分裂反応に由来する source 中性子だけを考える ので、式 (130) の *s* を *sp* に置き換えた。

Source 中性子には (α , n) 反応に由来するものもあり、着目する Source 中性子が (α , n) 反応に由来する確率と自発核分裂反応に由来する確率の比はそれぞれ $\alpha_r \overline{\nu_{s1}}/(1 + \alpha_r \overline{\nu_{s1}})$ と $1/(1 + \alpha_r \overline{\nu_{s1}})$ である (分岐確率と同様の捉え方であるが、中性子数の比ではなく事象数 の比になる) から、確率母関数は以下のように仮定できる:

$$H(u) = f_s[h_1(u)] = \frac{\alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \sum_{i=1}^1 1 \, h_1(u) + \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \sum_{i=0}^\infty \frac{f_{sp}[h_1(u)]}{q_{sp}(i) \, [h_1(u)]^i} \tag{137}$$

式 (135)の右辺第一項の u が式 (137)の右辺第一項で $h_1(u)$ に置き換わったのは、前者 が「漏れるのみ」の確率母関数であるのに対し、後者は同じ 1 個の中性子でも「漏れるか漏 れないか両方の確率を持つ」確率母関数だからである。最終的に求めたい R(k) は、式 (114) を用いて次式で与えられる:

$$R(k) = \frac{H^{(k)}|_{u=0}}{k!}$$
(138)

R(k)は、自発核分裂反応又は(α , n)反応の1中性子あたり生じる overlapping fission の 中から漏れる中性子ペアの組数の確率分布を意味することになる。 また $u \ge 0$ でなく 1 とすれば、この確率分布の k次の階乗モーメント $M_R^{(k)}$ が得られる。 以上、Böhnel の論文の第 III 節 Derivation of the basic equation について、筆者の解釈を含め、 また一部ではあるが式表現を若干調整して説明を行った。

このようにして得られた 1 次/ 2 次/ 3 次の階乗モーメントは、式 (88), (89), (90) の *S*, *D*, *T* から F_p , m_{eff} , ϵ_n , $f_d \geq f_t \approx f_d^2$ を除いた部分に相当すると考えられるが、階乗モーメントは source 中性子 1 個あたり、式 (88), (89), (90) は 1 回の自発核分裂あたりとなる。

続く第 IV 節 Evaluation では式 (135) を変形して、 $h_1(u)$ の k 階微分 $h_1^{(k)}$ を p と式 (131) の f(u) の 1 ~ k 階微分 f', f'', … f^(k) (これらは induced 中性子数の k次の階乗モーメントにな る) で表している。続いて式 (137) を変形して H(u) の k 階微分 $H^{(k)}$ を p と f', f'', … f^(k) 及び $f_s(u)$ の 1 ~ k 階微分 $f'_s, f''_s, \dots f^{(k)}_s$ (これらは soutree 中性子数の k次の階乗モーメン トになる) で表している。Bönel が論文で触れているのは k=3 までであり、実際、これ以上 になると式変形が容易でない。そこで、Bönel が用いた表現を一般的な表現に書き換えた上 で、kを7までとして数式処理ソフトウエア *Mathematica*⁴¹ を用いて解いた。

3.4 確率母関数を用いた多重相関分布式の代数的な導出

ここからは、添字 *i* を総和の index ではなく誘導核分裂の意味で用いる。また *u* に代えて 一般的表現の *z* を用いる。最初に、式 (135) を次のように書き直す:

$$G_{h}(z) = (1-p) z + p G_{i}(G_{h}(z))$$
(139)

式 (139) の両辺を z について 1~6 階微分(偏微分)すると、以下の式が得られる。両辺に 同じ $G_h^{(k)}$ が含まれるがこの段階では整理しない。なお、 $G_i^{(k)} = \partial^k G_i / \partial G_h^k$ である:

$$\begin{split} G_{h}^{'} &= 1 - p + p \, G_{i}^{'} G_{h}^{'} \\ G_{h}^{''} &= p \left[G_{i}^{''} (G_{h}^{'})^{2} + G_{i}^{'} G_{h}^{''} \right] \\ G_{h}^{(3)} &= p \left[G_{i}^{(3)} (G_{h}^{'})^{3} + 3 \, G_{i}^{''} G_{h}^{''} G_{h}^{'} + G_{i}^{'} G_{h}^{(3)} \right] \\ G_{h}^{(4)} &= p \left\{ G_{i}^{(4)} (G_{h}^{'})^{4} + 6 \, G_{i}^{(3)} G_{h}^{''} (G_{h}^{'})^{2} + G_{i}^{''} \left[4 \, G_{h}^{(3)} G_{h}^{'} + 3 \, (G_{h}^{''})^{2} \right] + G_{i}^{'} G_{h}^{(4)} \right\} \\ G_{h}^{(5)} &= p \left\{ G_{i}^{(5)} (G_{h}^{'})^{5} + 10 \, G_{i}^{(4)} G_{h}^{''} (G_{h}^{'})^{3} + G_{i}^{(3)} \left[10 \, G_{h}^{(3)} (G_{h}^{'})^{2} + 15 \, (G_{h}^{''})^{2} G_{h}^{'} \right] \right. \\ &+ G_{i}^{''} \left[5 \, G_{h}^{(4)} G_{h}^{'} + 10 \, G_{h}^{(3)} G_{h}^{''} \right] + G_{i}^{'} G_{h}^{(5)} \right\} \end{split}$$

^{41.} Wolfram 社の市販の汎用数学ソフトウエアで Mathematica ver.5.0を用いた。

$$\begin{split} G_{h}^{(6)} &= p \, \left\{ \, G_{i}^{(6)}(G_{h}^{'})^{6} + 15 \, G_{i}^{(5)}G_{h}^{''}(G_{h}^{'})^{4} + G_{i}^{(4)} \left[\, 20 \, G_{h}^{(3)}(G_{h}^{'})^{3} + 45 \, (G_{h}^{''})^{2}(G_{h}^{'})^{2} \right] \right. \\ &+ G_{i}^{(3)} \left[\, 15 \, G_{h}^{(4)}(G_{h}^{'})^{2} + 60 \, G_{h}^{(3)}G_{h}^{''}G_{h}^{'} + 15 \, (G_{h}^{''})^{3} \right] \\ &+ G_{i}^{''} \left[\, 6 \, G_{h}^{(5)}G_{h}^{'} + 15 \, G_{h}^{(4)}G_{h}^{''} + 10 \, (G_{h}^{(3)})^{2} \right] + G_{i}^{'}G_{h}^{(6)} \right\} \\ G_{h}^{(7)} &= p \, \left\{ \, G_{i}^{(7)}(G_{h}^{'})^{7} + 21 \, G_{i}^{(6)}G_{h}^{''}(G_{h}^{'})^{5} + G_{i}^{(5)} \left[\, 35 \, G_{h}^{(3)}(G_{h}^{'})^{4} + 105 \, (G_{h}^{''})^{2}(G_{h}^{'})^{3} \right] \\ &+ G_{i}^{(4)} \left[\, 35 \, G_{h}^{(4)}(G_{h}^{'})^{3} + 210 \, G_{h}^{(3)}G_{h}^{''}(G_{h}^{'})^{2} + 105 \, (G_{h}^{''})^{3}G_{h}^{'} \right] \\ &+ G_{i}^{(3)} \left[\, 21 \, G_{h}^{(5)}(G_{h}^{'})^{2} + 105 \, G_{h}^{(4)}G_{h}^{''}G_{h}^{'} + 105 \, G_{h}^{(3)}(G_{h}^{''})^{2} + 70 \, (G_{h}^{(3)})^{2}G_{h}^{'} \right] \\ &+ G_{i}^{(2)} \left[\, 7 \, G_{h}^{(6)}G_{h}^{'} + 21 \, G_{h}^{(5)}G_{h}^{''} + 35 \, G_{h}^{(4)}G_{h}^{(3)} \right] + G_{i}^{'}G_{h}^{(7)} \right\} \end{split}$$

続いて、 $G'_{h} = 1 - p + pG'_{i}G'_{h} & G'_{h}$ について解き、結果を $G''_{h} = p\left[G''_{i}(G'_{h})^{2} + G'_{i}G''_{h}\right]$ に代入して G''_{h} を解き、これを繰り返して $G^{(3)}_{h}, G^{(4)}_{h}, G^{(5)}_{h}, G^{(6)}_{h}, G^{(7)}_{h} & e$ 解くと、式(135)の $h_{1}(u)$ の偏微分が得られる。Böhnel は 3 階偏微分まで明示しており、本解と一致している。数式処理ソフトウエアによる求解の例を脚注に示す⁴²:

$$\begin{split} G_{h}^{\,\prime} &= \frac{1-p}{1-p\,G_{i}^{\,\prime}} \\ G_{h}^{\,\prime\prime} &= \frac{(1-p)^{2}\,p}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{3}}\,G_{i}^{\,\prime\prime} \\ G_{h}^{(3)} &= \frac{(1-p)^{3}\,p}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{4}}\,\left[\,G_{i}^{(3)} + \frac{p}{1-p\,G_{i}^{\,\prime}}\,3\,(G_{i}^{\,\prime\prime})^{2}\,\right] \\ G_{h}^{(4)} &= \frac{(1-p)^{4}\,p}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{5}}\,\left[\,G_{i}^{(4)} + \frac{p}{1-p\,G_{i}^{\,\prime}}\,10\,G_{i}^{(3)}\,G_{i}^{\,\prime\prime} + \frac{p^{2}}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{2}}\,15\,(G_{i}^{\,\prime\prime})^{3}\,\right] \end{split}$$

42. Mathematica ver.5.0 による求解の例:

$$\begin{split} G_{h}^{(5)} &= \frac{(1-p)^{5} p}{(1-p \, G_{i}^{\,\prime})^{6}} \, \left\{ \, G_{i}^{(5)} + \frac{p}{1-p \, G_{i}^{\,\prime}} \left[15 \, G_{i}^{(4)} G_{i}^{\,\prime\prime} + 10 \, (G_{i}^{(3)})^{2} \right] \right. \\ &+ \frac{p^{2}}{(1-p \, G_{i}^{\,\prime})^{2}} \, 105 \, G_{i}^{(3)} (G_{i}^{\,\prime\prime})^{2} + \frac{p^{3}}{(1-p \, G_{i}^{\,\prime})^{3}} \, 105 \, (G_{i}^{\,\prime\prime})^{4} \right\} \end{split}$$

$$\begin{split} G_{h}^{(6)} &= \frac{(1-p)^{6} p}{(1-p \, G_{i}^{\,\prime})^{7}} \; \left\{ \, G_{i}^{(6)} + \frac{p}{1-p \, G_{i}^{\,\prime}} \left[21 \, G_{i}^{(5)} G_{i}^{\,\prime\prime} + 35 \, G_{i}^{(4)} G_{i}^{(3)} \right] \right. \\ &+ \frac{p^{2}}{(1-p \, G_{i}^{\,\prime})^{2}} \left[210 \, G_{i}^{(4)} (G_{i}^{\,\prime\prime})^{2} + 280 \, (G_{i}^{(3)})^{2} G_{i}^{\,\prime\prime} \right] \\ &+ \frac{p^{3}}{(1-p \, G_{i}^{\,\prime})^{3}} \; 1260 \, G_{i}^{(3)} (G_{i}^{\,\prime\prime})^{3} + \frac{p^{4}}{(1-p \, G_{i}^{\,\prime})^{4}} \; 945 \, (G_{i}^{\,\prime\prime})^{5} \right\} \end{split}$$

$$\begin{split} G_{h}^{(7)} &= \frac{(1-p)^{7}p}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{8}} \; \left\{ \, G_{i}^{(7)} + \frac{p}{1-p\,G_{i}^{\,\prime}} \left[28\,G_{i}^{(6)}G_{i}^{\,\prime\prime} + 56\,G_{i}^{(5)}G_{i}^{(3)} + 35\,(G_{i}^{(4)})^{2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{p^{2}}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{2}} \left[378\,G_{i}^{(5)}(G_{i}^{\,\prime\prime})^{2} + 1260\,G_{i}^{(4)}G_{i}^{(3)}G_{i}^{\,\prime\prime} + 280\,(G_{i}^{(3)})^{3} \right] \right. \\ & \left. + \frac{p^{3}}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{3}} \left[3150\,G_{i}^{(4)}(G_{i}^{\,\prime\prime})^{3} + 6300\,(G_{i}^{(3)})^{2}(G_{i}^{\,\prime\prime})^{2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{p^{4}}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{4}} \; 17325\,G_{i}^{(3)}(G_{i}^{\,\prime\prime})^{4} + \frac{p^{5}}{(1-p\,G_{i}^{\,\prime})^{5}} \; 10395\,(G_{i}^{\,\prime\prime})^{6} \right\} \end{split}$$

右辺は $p \ge G_i(z)$ の 1 ~ 7 階微分のみで表される。 $G_i(z)$ は式 (131)の induced 中性子数の 確率母関数であるから、z = 1における微分は式 (85)の誘導核分裂の場合と同じになる:

$$G_{i}^{(k)}|_{z=1} = \sum_{\nu_{i}=k}^{max} \nu_{i}(\nu_{i}-1)(\nu_{i}-2)\cdots(\nu_{i}-k+1) P_{i\nu}$$

$$= \overline{\nu_{i}(\nu_{i}-1)(\nu_{i}-2)\cdots(\nu_{i}-k+1)}$$

$$= \overline{\nu_{ik}}$$
(140)

また、右辺に繰り返し現れる以下の式は、式 (91)と脚注 30 から:

$$\frac{1-p}{1-p\,G_i'} = \frac{1-p}{1-p\,\overline{\nu_{i1}}} = M_L \tag{141}$$

$$\frac{p}{1 - pG'_i} = \frac{p}{1 - p\overline{\nu_{i1}}} = \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1}$$
(142)

式 (135), (139) では中性子が体系内で誘導核分裂反応以外の吸収反応、例えば (n, γ)反応 を生じる確率 p_c を考えていないので、式 (141), (142) でもこの項は考えない。第4章で詳述 するが、確率 p_c は確率 pの数 % 程度なので、必要ならば不確かさとして取り扱う。 続いて、式 (137) を式 (139) と同様に次のように書き直す。誘導核分裂を意味する添字 *i* に 対し自発核分裂を意味する添字を *sp* ではなく *s* に戻す⁴³:

$$G_H(z) = \frac{\alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \,G_h(z) + \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \,G_s\left(G_h(z)\right) \tag{143}$$

式 (139) と同様、両辺を z について 1~7 階微分(偏微分)する。両辺に同じ関数は含まれ ないので求解する必要はない。数式処理ソフトウエアによる導出の例を脚注に示す⁴⁴。また 式 (140) と同じ理由で次の式が成り立つ:

$$G_s^{(k)}|_{z=1} = \sum_{\nu_s=k}^{max} \nu_s(\nu_s - 1)(\nu_s - 2) \cdots (\nu_s - k + 1) P_{s\nu} = \overline{\nu_{sk}}$$
(144)

得られた偏微分 $G_H^{(k)}$ の右辺に、先に求めた $G_h^{(k)}$ 、式 (140) の $G_i^{(k)}|_{z=1} = \overline{\nu_{ik}}$ と式 (144) の $G_s^{(k)}|_{z=1} = \overline{\nu_{sk}}$ を代入すると、右辺は $\frac{(1-p)^k}{(1+\alpha_r \overline{\nu_{s1}})(1-p \overline{\nu_{i1}})^{2k-1}}$ で括られ、括られた部分は $\overline{\nu_{ik}}, \overline{\nu_{sk}}, (1+\alpha_r), p, (1-p \overline{\nu_{i1}})$ で構成されていた。更に式 (141) を用いて 1-p を、式 (142) を用いて p を消去し、繰り返し現れる後者を次の変数名で置換する。数式処理ソフトウエア による代入・置換の例を脚注に示す⁴⁵:

$$\frac{p}{1-p\,\overline{\nu_{i1}}} = \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \stackrel{\text{def}}{=} M_{L\nu} \tag{145}$$

44.
$$H[u_{-}] := \frac{at \ln 31}{1 + ar ns1} h[u] + \frac{1}{1 + ar ns1} x[h[u]]$$

 $dH1 = Simplify[H^{(1)}[u] /. dh1];$
 $dH2 = Simplify[H^{(2)}[u] /. dh1 /. dh2];$
 $dH3 = Simplify[H^{(3)}[u] /. dh1 /. dh2 /. dh3];$
 $dH4 = Simplify[H^{(4)}[u] /. dh1 /. dh2 /. dh3 /. dh4];$
 $dH5 = Simplify[H^{(5)}[u] /. dh1 /. dh2 /. dh3 /. dh4 /. dh5];$
 $dH6 = Simplify[H^{(6)}[u] /. dh1 /. dh2 /. dh3 /. dh4 /. dh5 /. dh6];$
 $dH7 = Simplify[H^{(7)}[u] /. dh1 /. dh2 /. dh3 /. dh4 /. dh5 /. dh6];$
 $dH7 = Simplify[H^{(7)}[u] /. dh1 /. dh2 /. dh3 /. dh4 /. dh5 /. dh6 /. dh7];$
45. $y^{(1)}[h[u]] := ni1; y^{(2)}[h[u]] := ni2; y^{(3)}[h[u]] := ni3; y^{(4)}[h[u]] := ni4;$
 $y^{(5)}[h[u]] := ni5; y^{(6)}[h[u]] := ni6; y^{(7)}[h[u]] := ni7; (* ni# means $\overline{v_{ift}} *)$
 $x^{(1)}[h[u]] := ns1; x^{(2)}[h[u]] := ns2; x^{(3)}[h[u]] := ns3; x^{(4)}[h[u]] := ns4;$
 $x^{(5)}[h[u]] := ns5; x^{(6)}[h[u]] := ns6; x^{(7)}[h[u]] := ns7; (* ns# means $\overline{v_{ift}} *)$
 $ML[p_{-}, ni1_{-}] := \frac{1 - p}{1 - p ni1}; MLn[p_{-}, ni1_{-}] := \frac{p}{1 - p ni1}; PtoC[ar_{-}, ns1_{-}] := 1 + ar ns1;$$$

4.4

ar ne 1

^{43.} 式 (137) では Böhnel の式 (130) の添字 s と区別するために sp としていたが、3.2 節以前に用いた添字に戻す。

最終的に求めたい R(k) は、式 (114), (138) により $G_H^{(k)}$ を k!で除して得られる⁴⁶:

$$R(1) = \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \, M_L \left(1 + \alpha_r\right) \overline{\nu_{s1}} \tag{146}$$

$$R(2) = \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \,\frac{M_L^2}{2} \left[\overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{i2}} \,M_{L\nu} \left(1 + \alpha_r \right) \overline{\nu_{s1}} \right] \tag{147}$$

$$R(3) = \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \, \frac{M_L^3}{6} \left[\overline{\nu_{s3}} + 3 \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s2}} + \left(\overline{\nu_{i3}} \, M_{L\nu} + 3 \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^2 \right) \, (1 + \alpha_r) \,\overline{\nu_{s1}} \right]$$
(148)

$$R(4) = \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \, \frac{M_L^4}{24} \left[\overline{\nu_{s4}} + 6 \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s3}} + \left(4 \,\overline{\nu_{i3}} \, M_{L\nu} + 15 \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^2 \right) \,\overline{\nu_{s2}} + \left(\overline{\nu_{i4}} \, M_{L\nu} + 10 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu}^2 + 15 \,\overline{\nu_{i2}}^3 \, M_{L\nu}^3 \right) \, (1 + \alpha_r) \,\overline{\nu_{s1}} \, \right]$$

$$(149)$$

$$R(5) = \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \, \frac{M_L^5}{120} \left\{ \overline{\nu_{s5}} + 10 \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s4}} \right. \\ \left. + \left(10 \,\overline{\nu_{i3}} \, M_{L\nu} + 45 \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^2 \right) \,\overline{\nu_{s3}} \right. \\ \left. + \left(5 \,\overline{\nu_{i4}} \, M_{L\nu} + 60 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu}^2 + 105 \,\overline{\nu_{i2}}^3 \, M_{L\nu}^3 \right) \,\overline{\nu_{s2}} \right.$$

$$\left. + \left[\overline{\nu_{i5}} \, M_{L\nu} + \left(15 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}} + 10 \,\overline{\nu_{i3}}^2 \right) \, M_{L\nu}^2 \right. \right.$$

$$\left. + 105 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^3 + 105 \,\overline{\nu_{i2}}^4 \, M_{L\nu}^4 \right] \, (1 + \alpha_r) \,\overline{\nu_{s1}} \right\}$$

$$\left. \left. + 105 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^3 + 105 \,\overline{\nu_{i2}}^4 \, M_{L\nu}^4 \right] \, (1 + \alpha_r) \,\overline{\nu_{s1}} \right\}$$

$$R(6) = \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \, \frac{M_L^6}{720} \left\{ \overline{\nu_{s6}} + 15 \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s5}} \right. \\ \left. + \left(20 \,\overline{\nu_{i3}} \, M_{L\nu} + 105 \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^2 \right) \,\overline{\nu_{s4}} \right. \\ \left. + \left(15 \,\overline{\nu_{i4}} \, M_{L\nu} + 210 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu}^2 + 420 \,\overline{\nu_{i2}}^3 \, M_{L\nu}^3 \right) \,\overline{\nu_{s3}} \right. \\ \left. + \left[6 \,\overline{\nu_{i5}} \, M_{L\nu} + \left(105 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}} + 70 \,\overline{\nu_{i3}}^2 \right) \, M_{L\nu}^2 \right. \\ \left. + 840 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^3 + 945 \,\overline{\nu_{i2}}^4 \, M_{L\nu}^4 \right] \,\overline{\nu_{s2}} \right.$$

$$\left. + \left[\overline{\nu_{i6}} \, M_{L\nu} + \left(21 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i2}} + 35 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i3}} \right) \, M_{L\nu}^2 \right. \\ \left. + \left(210 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}}^2 + 280 \,\overline{\nu_{i3}}^2 \,\overline{\nu_{i2}} \right) \, M_{L\nu}^3 \right. \\ \left. + 1260 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^3 \, M_{L\nu}^4 + 945 \,\overline{\nu_{i2}}^5 \, M_{L\nu}^5 \right] \, (1 + \alpha_r) \,\overline{\nu_{s1}} \right\}$$

^{46.} 式 (114) はz = 0、式 (115) は z = 1を条件とする。R(k)を求める過程では両方を利用する。

$$\begin{split} R(7) &= \frac{1}{1 + \alpha_r \,\overline{\nu_{s1}}} \, \frac{M_L^7}{5040} \left\{ \overline{\nu_{s7}} + 21 \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s6}} \right. \\ &+ \left(35 \,\overline{\nu_{i3}} \, M_{L\nu} + 210 \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^2 \right) \,\overline{\nu_{s5}} \\ &+ \left(35 \,\overline{\nu_{i4}} \, M_{L\nu} + 560 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu}^2 + 1260 \,\overline{\nu_{i2}}^3 \, M_{L\nu}^3 \right) \,\overline{\nu_{s4}} \\ &+ \left[21 \,\overline{\nu_{i5}} \, M_{L\nu} + \left(420 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}} + 280 \,\overline{\nu_{i3}}^2 \right) \, M_{L\nu}^2 \right. \\ &+ 3780 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^2 \, M_{L\nu}^3 + 4725 \,\overline{\nu_{i2}}^4 \, M_{L\nu}^4 \right] \,\overline{\nu_{s3}} \\ &+ \left[7 \,\overline{\nu_{i6}} \, M_{L\nu} + \left(168 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i2}} + 280 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i3}} \right) \, M_{L\nu}^2 \right. \\ &+ \left(1890 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}}^2 + 2520 \,\overline{\nu_{i3}}^2 \,\overline{\nu_{i2}} \right) \, M_{L\nu}^3 \\ &+ \left[12600 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^3 \, M_{L\nu}^4 + 10395 \,\overline{\nu_{i2}}^5 \, M_{L\nu}^5 \right] \,\overline{\nu_{s2}} \\ &+ \left[\overline{\nu_{i7}} \, M_{L\nu} + \left(28 \,\overline{\nu_{i6}} \,\overline{\nu_{i2}} + 56 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i3}} + 35 \,\overline{\nu_{i4}}^2 \right) \, M_{L\nu}^2 \\ &+ \left(378 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i2}}^2 + 1260 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} + 280 \,\overline{\nu_{i3}}^3 \right) \, M_{L\nu}^3 \\ &+ \left(3150 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}}^3 + 6300 \,\overline{\nu_{i3}}^2 \,\overline{\nu_{i2}}^2 \right) \, M_{L\nu}^4 \\ &+ 17325 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^4 \, M_{L\nu}^5 + 10395 \,\overline{\nu_{i2}}^6 \, M_{L\nu}^6 \, \left] \left(1 + \alpha_r \right) \,\overline{\nu_{s1}} \, \right\} \end{split}$$

自発核分裂反応又は (α , n)反応の1中性子あたり生じる overlapping fission の中から漏れ る中性子ペアの組数の確率分布は、このようにして得られる。なお、式 (146)から式 (152)の 右辺の1/(1+ $\alpha_r \overline{\nu_{s1}}$)は、自発核分裂反応と (α , n)反応の事象数の合計に対する自発核分裂 反応の事象数⁴⁷を意味するので、自発核分裂反応1事象(1回)あたりとするには、式全体 に 1 + $\alpha_r \overline{\nu_{s1}}$ を乗じればよい。式 (146)~(148)を自発核分裂反応1回あたりに直すと、式 (88), (89), (90)で F_p , m_{eff} , ϵ_n , $f_d \geq f_t \approx f_d^2$ を除いた部分、即ち1回の自発核分裂あたり漏れ る singlet, doublet, triplet の組数と完全に一致した。従って、確率母関数を用いれば、公式を 四重相関計数率 (Quadruples)以上に拡張できること、中性子の複数個ペア(m 個 1 組)の 組数の期待値について式 (85)の定義を用いる場合、自発核分裂1回あたり漏れる singlet, doublet, triplet …の組数は、式 (146)~(152)の1/(1+ $\alpha_r \overline{\nu_{s1}}$)を1と置換して得られること、七重 までの多重相関計数率は、得られた組数に $F_p m_{eff} \epsilon_n^m f_m$ ($f_1 = 1, f_2 = f_d, f_3 = f_t \cdots$)を 乗じればよいことが判る。自発核分裂1回あたり漏れる singlet, doublet, triplet …の組数を式 (153)~(159)に示す。

複数個ペアの組数の期待値をより素直に表現している式 (86)の定義を用いる場合、変数を 変換して解き直せばよい。数式処理ソフトウエアによる変数変換の例を脚注に示す⁴⁸。

^{47.} 自発核分裂反応1事象(1回)から ν_{s1} 個の中性子が生じ、(α,n)反応から α_r ν_{s1} 個の中性子が生じる。
(α,n)反応1事象(1回)から1個の中性子が生じるので、(α,n)反応の事象数は α_r ν_{s1} 回であり、自発 核分裂反応と(α,n)反応の事象数の合計は、式(137)で述べたとおり、1+α_r ν_{s1} になる。

^{48.} 次のリストを /.convlist の形で解くべき式に作用させる。

convlist = {ni7 → 7 ! ei7, ni6 → 6 ! ei6, ni5 → 5 ! ei5, ni4 → 4 ! ei4, ni3 → 3 ! ei3, ni2 → 2 ! ei2, ni1 → ei1, ns7 → 7 ! es7, ns6 → 6 ! es6, ns5 → 5 ! es5, ns4 → 4 ! es4, ns3 → 3 ! es3, ns2 → 2 ! es2, ns1 → es1};

中性子の複数個ペア(m 個 1 組)の組数の期待値として、式 (85)の階乗モーメントによる 定義を用いる場合、1回の自発核分裂あたり試料或いは体系から漏れる singlet, doublet, triplet, quadruplet, quintuplet, sextuplet, septuplet の組数 S^f , D^f , T^f , Q^f_r , Q^f_t , S^f_x , S^f_p (添字 f は factorial moment) 即ち m 重相関の組数は次の式で与えられる:

$$S^{f}(m=1) = M_{L}(1+\alpha_{r})\overline{\nu_{s1}}$$
(153)

$$D^{f}(m=2) = \frac{M_{L}^{2}}{2} \left[\overline{\nu_{s2}} + \overline{\nu_{i2}} M_{L\nu} (1+\alpha_{r}) \overline{\nu_{s1}} \right]$$
(154)

$$T^{f}(m=3) = \frac{M_{L}^{3}}{6} \left[\overline{\nu_{s3}} + 3\,\overline{\nu_{i2}}\,M_{L\nu}\,\overline{\nu_{s2}} + \left(\overline{\nu_{i3}}\,M_{L\nu} + 3\,\overline{\nu_{i2}}^{2}\,M_{L\nu}^{2}\right)\,(1+\alpha_{r})\,\overline{\nu_{s1}} \right]$$
(155)

$$Q_{r}^{f}(m=4) = \frac{M_{L}^{4}}{24} \left[\overline{\nu_{s4}} + 6 \,\overline{\nu_{i2}} \,M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s3}} + \left(4 \,\overline{\nu_{i3}} \,M_{L\nu} + 15 \,\overline{\nu_{i2}}^{2} \,M_{L\nu}^{2} \right) \,\overline{\nu_{s2}} + \left(\overline{\nu_{i4}} \,M_{L\nu} + 10 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \,M_{L\nu}^{2} + 15 \,\overline{\nu_{i2}}^{3} \,M_{L\nu}^{3} \right) \,(1+\alpha_{r}) \,\overline{\nu_{s1}} \,\right]$$
(156)

$$Q_{t}^{f}(m=5) = \frac{M_{L}^{5}}{120} \left\{ \overline{\nu_{s5}} + 10 \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s4}} + \left(10 \,\overline{\nu_{i3}} \, M_{L\nu} + 45 \,\overline{\nu_{i2}}^{2} \, M_{L\nu}^{2} \right) \,\overline{\nu_{s3}} + \left(5 \,\overline{\nu_{i4}} \, M_{L\nu} + 60 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu}^{2} + 105 \,\overline{\nu_{i2}}^{3} \, M_{L\nu}^{3} \right) \,\overline{\nu_{s2}} + \left[\overline{\nu_{i5}} \, M_{L\nu} + \left(15 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}} + 10 \,\overline{\nu_{i3}}^{2} \right) \, M_{L\nu}^{2} + 105 \,\overline{\nu_{i2}}^{4} \, M_{L\nu}^{4} \right] \, (1+\alpha_{r}) \,\overline{\nu_{s1}} \, \right\}$$

$$(157)$$

$$S_{x}^{f}(m=6) = \frac{M_{L}^{6}}{720} \left\{ \overline{\nu_{s6}} + 15 \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s5}} + \left(20 \,\overline{\nu_{i3}} \, M_{L\nu} + 105 \,\overline{\nu_{i2}}^{2} \, M_{L\nu}^{2} \right) \,\overline{\nu_{s4}} + \left(15 \,\overline{\nu_{i4}} \, M_{L\nu} + 210 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \, M_{L\nu}^{2} + 420 \,\overline{\nu_{i2}}^{3} \, M_{L\nu}^{3} \right) \,\overline{\nu_{s3}} + \left[6 \,\overline{\nu_{i5}} \, M_{L\nu} + \left(105 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}} + 70 \,\overline{\nu_{i3}}^{2} \right) \, M_{L\nu}^{2} + 840 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^{2} \, M_{L\nu}^{3} + 945 \,\overline{\nu_{i2}}^{4} \, M_{L\nu}^{4} \right] \,\overline{\nu_{s2}} + \left[\overline{\nu_{i6}} \, M_{L\nu} + \left(21 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i2}} + 35 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i3}} \right) \, M_{L\nu}^{2} + \left(210 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}}^{2} + 280 \,\overline{\nu_{i3}}^{2} \,\overline{\nu_{i2}} \right) \, M_{L\nu}^{3} + 1260 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^{3} \, M_{L\nu}^{4} + 945 \,\overline{\nu_{i2}}^{5} \, M_{L\nu}^{5} \right] \, (1 + \alpha_{r}) \,\overline{\nu_{s1}} \right\}$$

$$\begin{split} S_{p}^{f}(m=7) &= \frac{M_{L}^{T}}{5040} \left\{ \overline{\nu_{s7}} + 21 \,\overline{\nu_{i2}} \,M_{L\nu} \,\overline{\nu_{s6}} \right. \\ &+ \left(35 \,\overline{\nu_{i3}} \,M_{L\nu} + 210 \,\overline{\nu_{i2}}^{2} \,M_{L\nu}^{2} \right) \,\overline{\nu_{s5}} \\ &+ \left(35 \,\overline{\nu_{i4}} \,M_{L\nu} + 560 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} \,M_{L\nu}^{2} + 1260 \,\overline{\nu_{i2}}^{3} \,M_{L\nu}^{3} \right) \,\overline{\nu_{s4}} \\ &+ \left[21 \,\overline{\nu_{i5}} \,M_{L\nu} + \left(420 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}} + 280 \,\overline{\nu_{i3}}^{2} \right) \,M_{L\nu}^{2} \right. \\ &+ 3780 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^{2} \,M_{L\nu}^{3} + 4725 \,\overline{\nu_{i2}}^{4} \,M_{L\nu}^{4} \right] \,\overline{\nu_{s3}} \\ &+ \left[7 \,\overline{\nu_{i6}} \,M_{L\nu} + \left(168 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i2}} + 280 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i3}} \right) \,M_{L\nu}^{2} \right. \\ &+ \left(1890 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}}^{2} + 2520 \,\overline{\nu_{i3}}^{2} \,\overline{\nu_{i2}} \right) \,M_{L\nu}^{3} \\ &+ \left(1890 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}}^{2} + 2520 \,\overline{\nu_{i3}}^{2} \,\overline{\nu_{i2}} \right) \,M_{L\nu}^{3} \\ &+ \left[\overline{\nu_{i7}} \,M_{L\nu} + \left(28 \,\overline{\nu_{i6}} \,\overline{\nu_{i2}} + 56 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i3}} + 35 \,\overline{\nu_{i4}}^{2} \right) \,M_{L\nu}^{2} \\ &+ \left(378 \,\overline{\nu_{i5}} \,\overline{\nu_{i2}}^{2} + 1260 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}} + 280 \,\overline{\nu_{i3}}^{3} \right) \,M_{L\nu}^{3} \\ &+ \left(3150 \,\overline{\nu_{i4}} \,\overline{\nu_{i2}}^{3} + 6300 \,\overline{\nu_{i3}}^{2} \,\overline{\nu_{i2}}^{2} \right) \,M_{L\nu}^{4} \\ &+ 17325 \,\overline{\nu_{i3}} \,\overline{\nu_{i2}}^{4} \,M_{L\nu}^{5} + 10395 \,\overline{\nu_{i2}}^{6} \,M_{L\nu}^{6} \left[(1 + \alpha_{r}) \,\overline{\nu_{s1}} \right] \right\} \end{split}$$

これら S^{f} , D^{f} , T^{f} , Q_{r}^{f} , Q_{t}^{f} , S_{x}^{f} , S_{p}^{f} から Singles, Doubles, Triples, Quadruples, Quintuples, Sextuples, Septuples 計数率 S, D, T, Q_{r} , Q_{t} , S_{x} , S_{p} を求めるには次式を用いる。先に述べたよう に $f_{1} = 1, f_{2} = f_{d}, f_{3} = f_{t} \cdots$ である:

$$\underbrace{S/D/T/Q_r/Q_t/S_x/S_p}_{m=1,2,3,4,5,6,7} = F_p \, m_{eff} \, \epsilon_n^m \, f_m \times \underbrace{S^f/D^f/T^f/Q_r^f/Q_t^f/S_x^f/S_p^f}_{m=1,2,3,4,5,6,7} \tag{160}$$

なお、R(k) (又は S^f , D^f , T^f , Q^f_r , Q^f_t , S^f_x , S^f_p) を数式処理ソフトウエアによって直接的 に求めると非常に長い式になるため、項の括り方について規則性を見出した後は、その規則 性に基づいて、括る項の係数マトリックスを求めるようにした方がよい。具体的な例を脚注 に示す⁴⁹。

49. R(4)を例にとる。 $G_{H}^{(4)}$ (dH4) に $\frac{(1 + \alpha_{r} \overline{\nu_{s1}})(1 - p\overline{\nu_{i1}})^{4}}{(1 - p)^{4}} = \frac{(1 + \alpha_{r} \overline{\nu_{s1}})}{M_{L}^{4}}$ (ML[p,ni1]^(-4) PtoC[ar,ns1]) を乗じ、p→MLn/(1+ni1 MLn) でpを消去し、ns4, ns3, ns2, ns1 で括った結果の係数マトリックスを求める。 coefdH4 = Factor[CoefficientList[dH4 ML[p, ni1]^(-4) PtoC[ar, ns1] /. p→MLn / (1+ni1 MLn), {ns4, ns3, ns2, ns1}]]; MatrixForm[coefdH4] $\begin{pmatrix} 0 & (1 + ar) MLn (15 MLn^{2} ni2^{3} + 10 MLn ni2 ni3 + ni4) \\ MLn (15 MLn ni2^{2} + 4 ni3) & 0 \\ & (\frac{1 & 0}{0 & 0}) \end{pmatrix}$

coefdH4list = {coefdH4[[2, 1, 1, 1]], coefdH4[[1, 2, 1, 1]], coefdH4[[1, 1, 2, 1]], coefdH4[[1, 1, 1, 2]]}
{1, 6 MLn ni2, MLn (15 MLn ni2² + 4 ni3), (1 + ar) MLn (15 MLn² ni2³ + 10 MLn ni2 ni3 + ni4)}

中性子の複数個ペア(m個1組)の組数の期待値として、式 (86)の「組合せ」による定義 を用いる場合、1回の自発核分裂あたり試料或いは体系から漏れる singlet, doublet, triplet, quadruplet, quintuplet, sextuplet, septuplet の組数 S^c , D^c , T^c , Q_r^c , Q_t^c , S_x^c , S_p^c (添字 c は combination)即ち m 重相関の組数は次の式で与えられる。 $\eta_{i1} = \nu_{i1}$ なので形式的な置き換えに 過ぎないが、 $M_{L\eta} = M_{L\nu}$ である:

$$S^{c}(m=1) = M_{L}(1+\alpha_{r})\overline{\eta_{s1}}$$
(161)

$$D^{c}(m=2) = M_{L}^{2} \left[\overline{\eta_{s2}} + \overline{\eta_{i2}} M_{L\eta} \left(1 + \alpha_{r} \right) \overline{\eta_{s1}} \right]$$
(162)

$$T^{c}(m=3) = M_{L}^{3} \left[\overline{\eta_{s3}} + 2 \overline{\eta_{i2}} M_{L\eta} \overline{\eta_{s2}} + \left(\overline{\eta_{i3}} M_{L\eta} + 2 \overline{\eta_{i2}}^{2} M_{L\eta}^{2} \right) (1+\alpha_{r}) \overline{\eta_{s1}} \right]$$
(163)

$$Q_{r}^{c}(m=4) = M_{L}^{4} \left[\overline{\eta_{s4}} + 3 \,\overline{\eta_{i2}} \,M_{L\eta} \,\overline{\eta_{s3}} + \left(2 \,\overline{\eta_{i3}} \,M_{L\eta} + 5 \,\overline{\eta_{i2}}^{2} \,M_{L\eta}^{2} \right) \,\overline{\eta_{s2}} + \left(\overline{\eta_{i4}} \,M_{L\eta} + 5 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}} \,M_{L\eta}^{2} + 5 \,\overline{\eta_{i2}}^{3} \,M_{L\eta}^{3} \right) \,(1+\alpha_{r}) \,\overline{\eta_{s1}} \, \right]$$
(164)

$$Q_{t}^{c}(m=5) = M_{L}^{5} \left\{ \overline{\eta_{s5}} + 4 \,\overline{\eta_{i2}} \, M_{L\eta} \,\overline{\eta_{s4}} \right. \\ \left. + \left(3 \,\overline{\eta_{i3}} \, M_{L\eta} + 9 \,\overline{\eta_{i2}}^{2} \, M_{L\eta}^{2} \right) \,\overline{\eta_{s3}} \right. \\ \left. + \left(2 \,\overline{\eta_{i4}} \, M_{L\eta} + 12 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}} \, M_{L\eta}^{2} + 14 \,\overline{\eta_{i2}}^{3} \, M_{L\eta}^{3} \right) \,\overline{\eta_{s2}} \right.$$

$$\left. + \left[\overline{\eta_{i5}} \, M_{L\eta} + \left(6 \,\overline{\eta_{i4}} \,\overline{\eta_{i2}} + 3 \,\overline{\eta_{i3}}^{2} \right) \, M_{L\eta}^{2} \right. \\ \left. + 21 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}}^{2} \, M_{L\eta}^{3} + 14 \,\overline{\eta_{i2}}^{4} \, M_{L\eta}^{4} \right] \, (1 + \alpha_{r}) \,\overline{\eta_{s1}} \right\}$$

$$\left. \left. + 21 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}}^{2} \, M_{L\eta}^{3} + 14 \,\overline{\eta_{i2}}^{4} \, M_{L\eta}^{4} \right] \, (1 + \alpha_{r}) \,\overline{\eta_{s1}} \right\}$$

 $S_x^c (m=6) = M_L^6 \{ \overline{\eta_{s6}} + 5 \overline{\eta_{i2}} M_{L\eta} \overline{\eta_{s5}} \}$

$$+ \left(4\,\overline{\eta_{i3}}\,M_{L\eta} + 14\,\overline{\eta_{i2}}^{2}\,M_{L\eta}^{2}\right)\,\overline{\eta_{s4}} \\ + \left(3\,\overline{\eta_{i4}}\,M_{L\eta} + 21\,\overline{\eta_{i3}}\,\overline{\eta_{i2}}\,M_{L\eta}^{2} + 28\,\overline{\eta_{i2}}^{3}\,M_{L\eta}^{3}\right)\,\overline{\eta_{s3}} \\ + \left[2\,\overline{\eta_{i5}}\,M_{L\eta} + \left(14\,\overline{\eta_{i4}}\,\overline{\eta_{i2}} + 7\,\overline{\eta_{i3}}^{2}\right)\,M_{L\eta}^{2} \\ + 56\,\overline{\eta_{i3}}\,\overline{\eta_{i2}}^{2}\,M_{L\eta}^{3} + 42\,\overline{\eta_{i2}}^{4}\,M_{L\eta}^{4}\right]\,\overline{\eta_{s2}} \\ + \left[\overline{\eta_{i6}}\,M_{L\eta} + \left(7\,\overline{\eta_{i5}}\,\overline{\eta_{i2}} + 7\,\overline{\eta_{i4}}\,\overline{\eta_{i3}}\right)\,M_{L\eta}^{2} \\ + \left(28\,\overline{\eta_{i4}}\,\overline{\eta_{i2}}^{2} + 28\,\overline{\eta_{i3}}^{2}\,\overline{\eta_{i2}}\right)\,M_{L\eta}^{3} \\ + 84\,\overline{\eta_{i3}}\,\overline{\eta_{i2}}^{3}\,M_{L\eta}^{4} + 42\,\overline{\eta_{i2}}^{5}\,M_{L\eta}^{5}\right]\,(1+\alpha_{r})\,\overline{\eta_{s1}}\,\Big\}$$

$$S_{p}^{c}(m=7) = M_{L}^{7} \left\{ \overline{\eta_{s7}} + 6 \,\overline{\eta_{i2}} \, M_{L\eta} \, \overline{\eta_{s6}} \right. \\ \left. + \left(5 \,\overline{\eta_{i3}} \, M_{L\eta} + 20 \,\overline{\eta_{i2}}^{2} \, M_{L\eta}^{2} \right) \, \overline{\eta_{s5}} \right. \\ \left. + \left(4 \,\overline{\eta_{i4}} \, M_{L\eta} + 32 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}} \, M_{L\eta}^{2} + 48 \,\overline{\eta_{i2}}^{3} \, M_{L\eta}^{3} \right) \, \overline{\eta_{s4}} \right. \\ \left. + \left[3 \,\overline{\eta_{i5}} \, M_{L\eta} + \left(24 \,\overline{\eta_{i4}} \, \overline{\eta_{i2}} + 12 \,\overline{\eta_{i3}}^{2} \right) \, M_{L\eta}^{2} \right. \\ \left. + 108 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}}^{2} \, M_{L\eta}^{3} + 90 \,\overline{\eta_{i2}}^{4} \, M_{L\eta}^{4} \right] \, \overline{\eta_{s3}} \right. \\ \left. + \left[2 \,\overline{\eta_{i6}} \, M_{L\eta} + \left(16 \,\overline{\eta_{i5}} \,\overline{\eta_{i2}} + 16 \,\overline{\eta_{i4}} \,\overline{\eta_{i3}} \right) \, M_{L\eta}^{2} \right. \\ \left. + \left(72 \,\overline{\eta_{i4}} \,\overline{\eta_{i2}}^{2} + 72 \,\overline{\eta_{i3}}^{2} \,\overline{\eta_{i2}} \right) \, M_{L\eta}^{3} \right. \\ \left. + 240 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}}^{3} \, M_{L\eta}^{4} + 132 \,\overline{\eta_{i2}}^{5} \, M_{L\eta}^{5} \right] \, \overline{\eta_{s2}} \right. \\ \left. + \left[\overline{\eta_{i7}} \, M_{L\eta} + \left(8 \,\overline{\eta_{i6}} \,\overline{\eta_{i2}} + 8 \,\overline{\eta_{i5}} \,\overline{\eta_{i3}} + 4 \,\overline{\eta_{i4}}^{2} \right) \, M_{L\eta}^{2} \right. \\ \left. + \left(36 \,\overline{\eta_{i5}} \,\overline{\eta_{i2}}^{2} + 72 \,\overline{\eta_{i4}} \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}} + 12 \,\overline{\eta_{i3}}^{3} \right) \, M_{L\eta}^{3} \right. \\ \left. + \left(120 \,\overline{\eta_{i4}} \,\overline{\eta_{i2}}^{3} + 180 \,\overline{\eta_{i3}}^{2} \,\overline{\eta_{i2}}^{2} \right) \, M_{L\eta}^{4} \\ \left. + 330 \,\overline{\eta_{i3}} \,\overline{\eta_{i2}}^{4} \, M_{L\eta}^{5} + 132 \,\overline{\eta_{i2}}^{6} \, M_{L\eta}^{6} \right] \, (1 + \alpha_{r}) \,\overline{\eta_{s1}} \, \right\}$$

次の式 $(f_1 = 1, f_2 = f_d, f_3 = f_t \cdots)$ により、計数率 $S, D, T, Q_r, Q_t, S_x, S_p$ を求める:

$$\underbrace{S/D/T/Q_r/Q_t/S_x/S_p}_{m=1,2,3,4,5,6,7} = F_p \, m_{eff} \, \epsilon_n^m \, f_m \times \underbrace{S^c/D^c/T^c/Q_r^c/Q_t^c/S_x^c/S_p^c}_{m=1,2,3,4,5,6,7} \tag{168}$$

 $S^{f}, D^{f}, T^{f}, Q_{r}^{f}, Q_{t}^{f}, S_{x}^{f}, S_{p}^{f}$ を用いた式と比較すると、各係数の値が大幅に簡素化され、 右辺の冒頭にあった 1/m!が消去されている。これは表2に関して述べたように、式 (85)の 階乗モーメントを用いた定義 $\overline{\nu_{m}}$ では複数個ペアの組数の期待値として値が大きすぎるが、 式 (86)の「組合せ」を用いた定義 $\overline{\eta_{m}}$ ならば、複数個ペアの組数の期待値として適切な値に なるためである。 $\overline{\eta_{m}} = \overline{\nu_{m}}/m!$ により両者は変換できる。これら m 重相関の式には、共通 して以下の特徴がある:

- $\overline{\nu_{s(m-1)}}$ は $\overline{\nu_{i2}}M_{L\nu}$ との積として現れ;
- $\overline{\nu_{s(m-2)}}$ は $\overline{\nu_{i3}} M_{L\nu}$ と $\overline{\nu_{i2}}^2 M_{L\nu}^2$ の多項式との積として現れ;
- $\overline{\nu_{s(m-3)}}$ は $\overline{\nu_{i4}} M_{L\nu}$ と $\overline{\nu_{i3}} \overline{\nu_{i2}} M_{L\nu}^2$ と $\overline{\nu_{i2}}^3 M_{L\nu}^3$ の多項式との積として現れ;
- $\overline{\nu_{s1}}$ は必ず $(1 + \alpha_r)\overline{\nu_{s1}}$ の形で現れる。

ここで α_r がいずれの式にも含まれているのは accidental pair を意味しているのではない。 自発核分裂の $\overline{\nu_{s2}}$, $\overline{\nu_{s3}}$... に由来する doublet, triplet ... の確率分岐の中に singlet leakage chain (図21と図22) があり、ここに (α , n) 反応由来の中性子が含まれるためである。 最後に、自発核分裂性核種と誘導核分裂性核種がそれぞれ²⁴⁰Pu,²³⁹Pu (2 MeV)の場合について、表5の P_{ν} を用い、簡単のため $F_{p}m_{eff}f_{m} = 1$, $\alpha_{r} = 0.7$ とし⁵⁰、 ϵ_{n} と M_{L} を変化させて、 $S, D, T, Q_{r}, Q_{t}, S_{x}, S_{p}$ の相対的な変化の傾向を求めた結果を表6に示す。図16の装置は $\epsilon_{n} = 0.4$ 、プルトニウム転換技術開発施設で実測されたウラン・プルトニウム混合二酸化物の M_{L} は 1.0~1.1 であるから、表6の条件は現実的な範囲である。

		,		. =		41.0 1	• /	
ν	0	1	2	3	4	5	6	7
²⁴⁰ Pu	0.0632	0.2320	0.3333	0.2528	0.0986	0.0180	0.0020	
²³⁹ Pu 2MeV	0.0063	0.0612	0.2266	0.3261	0.2588	0.0956	0.0225	0.0026

表5 ²⁴⁰Pu, ²³⁹Puの P_ν (表2及び表3と同じ文献に基づく)

表6 $S, D, T, Q_r, Q_t, S_x, S_p$ の相対的な変化の傾向 ($F_p m_{eff} f_m = 1, \alpha_r = 0.7$)

Condition		Evaluation								
ϵ_n	M_L	$S_{(m=1)}$	D(m=2)	T(m=3)	$Q_{r(m=4)}$	$Q_{t(m=5)}$	$S_{x(m=6)}$	$S_{p(m=7)}$		
	1	1.098	0.170	0.023	0.002	< 0.001	< 0.001	< 0.001		
0.2	1.05	1.153	0.222	0.048	0.010	0.002	0.001	< 0.001		
0.5	1.10	1.208	0.282	0.084	0.028	0.010	0.004	0.002		
	1.15	1.263	0.350	0.134	0.060	0.030	0.017	0.010		
	1	1.464	0.303	0.056	0.006	< 0.001	< 0.001	< 0.001		
0.4	1.05	1.538	0.395	0.114	0.032	0.010	0.004	0.001		
0.4	1.10	1.611	0.501	0.199	0.088	0.044	0.024	0.014		
	1.15	1.684	0.622	0.318	0.190	0.128	0.093	0.072		
	1	1.830	0.473	0.108	0.014	0.001	< 0.001	< 0.001		
	1.05	1.922	0.618	0.222	0.078	0.032	0.014	0.007		
0.5	1.10	2.013	0.783	0.389	0.214	0.135	0.091	0.067		
	1.15	2.105	0.971	0.622	0.464	0.392	0.355	0.342		
	1.20	2.196	1.183	0.936	0.884	0.942	1.076	1.297		

 ϵ_n 或いは M_L が大きくなると結果が大きくなるのは式からみて当然ではあるが、多重に なればなるほど (*m* が大きいほど) M_L の増大に対して結果は急上昇した。 ϵ_n が大きいと この傾向は特に著しく、 $\epsilon_n = 0.5$, $M_L = 1.20$ では $S > D > T > Q_r < Q_t < S_x < S_p$ と 大小関係が逆転する予想外の結果が得られた。PSMC (Plutonium Scrap Multiplicity Counter) と呼ばれる高性能な装置は $\epsilon_n = 0.55$ を実現しており³⁸、高質量のウラン・プルトニウム混合 二酸化物に不純物 (軽元素が主体) が多く含まれる場合は中性子が試料内で減速されて誘導 核分裂の確率が大きくなり M_T, M_L が大きくなるため、 $M_L = 1.20$ は条件次第で起こり得る 範囲である。但し、PSMC は高質量の試料を目的としたものではなく、従来の範囲であれば $S > D > T > Q_r > Q_t > S_x > S_p$ の関係は保たれる。

^{50.} この α_r は不純物の少ないウラン・プルトニウム混合二酸化物の実測値にほぼ相当する。
表 6 のうち、 $\epsilon_n = 0.5$ で M_L を変化させる時の $S, D, T, Q_r, Q_t, S_x, S_p$ の相対的な変化を 図 2 3 に示す。m が大きいと M_L の増大に対して結果が急上昇することが判る。



図23 $\epsilon_n = 0.5$ の場合の M_L の変化に対する $S, D, T, Q_r, Q_t, S_x, S_p$ の相対的な変化

金属プルトニウムについて、 $D > T > Q_r$ の関係が実際に崩れることを示した LANLの 文献⁵⁶⁾ があり、図24にその様子を示す。正確には形状によると考えられるが、 $m_{eff} > 20$ g で大小関係の逆転が生じている。まず Q_r が T, D を追い越し、次に T が D を追い越す。 多重になればなるほど M_L の増大(m_{eff} の増大によって生じる)に対し結果が急上昇する 傾向が確かに現れている。なお、図24は Figure of Merit code と呼ばれる方法⁵⁷⁾で得られて いる⁵¹。図23を右方向から眺めると、追い越しの様子を想像することができる。



図24 $D > T > Q_r$ の関係が実際に崩れる例(文献 56 の Fig. 1 を転載し加筆)

大変面白い傾向であるが、本報告書は中性子多重相関計数法の数理的基礎の記述を目的と しているので、傾向の詳しい分析は今後の報告書で取り扱うこととしたい。

^{51.} 文献 57 によれば、MCNP ではなく $m \le 5$ の代数的解法であるが m = 4, 5 の式は明示されていない。

4. U-Pu 混合二酸化物における平均自由行程, エネルギースペクトルとその変化

本章では、第5章への準備として、純粋なウラン・プルトニウム混合二酸化物中における 中性子の平均自由行程をエネルギーの関数として表す。また、自発核分裂反応と誘導核分裂 反応で生じる中性子のエネルギースペクトル式を紹介するとともに、(α, n)反応で生じる 中性子のエネルギースペクトルを関数として表す。次に、1つの線スペクトルから散乱1回 で1つの矩形スペクトルが生じるという炉工学の知見を用いて、N-1回目のスペクトルから N回目のスペクトルを求めるという手順を繰り返し、単体内で弾性散乱を繰り返す中性子の スペクトルの遷移を描く。これを、線スペクトルの集合である連続スペクトルに適用する。

4.1 仮定した組成と各核種の断面積

ウランとプルトニウムの同位体組成比をプルトニウム転換技術開発施設で実際に取り扱った代表的な値とし、Pu/U比が1で真密度のウラン・プルトニウム混合二酸化物を考える。 Pu/U比を1としたのは、同比率のウラン・プルトニウム混合二酸化物の中性子エネルギー スペクトルを旧動燃の安全管理部が過去に測定しており⁵⁸、比較可能だからである。同位体 組成比と真密度及び式 (77) による計算上の α_r を表7に示す。

衣子 阪足したサブシーブルドーブム混日一酸比切の組成比					
組成比			金属重量比	真密度	計算上の α_r
²³⁵ U	1.10	wt% of U			
²³⁶ U	0.35	wt% of U	1		
²³⁸ U	98.55	wt% of U			0.56
²³⁷ Np	1 wt% of Pu				粉末状のウラン・
²³⁸ Pu	1	wt% of Pu		11.014	プルトニウム混合
²³⁹ Pu	60	wt% of Pu		11.214 g/ cm	二酸化物の場合、
²⁴⁰ Pu	25	wt% of Pu	1		含有水分等により
²⁴¹ Pu	9	wt% of Pu			0.7 程度になる
²⁴² Pu	5	wt% of Pu			
²⁴¹ Am	0.5	wt% of Pu			

表7 仮定したウラン・プルトニウム混合二酸化物の組成比

体積ベースの PuO₂/(U+Pu)O₂ 比を r とすると、1 cm³ 中の PuO₂ は r cm³、UO₂ は 1-r cm³ になる。PuO₂ と UO₂ の真密度はそれぞれ 11.48 g/cm³ と 10.96 g/cm³ であり⁵²、Pu, U, O の 平均原子量はそれぞれ 239.6, 238.0, 16.0 なので、金属重量ベースの Pu/U 比を k とすると:

$$k = \frac{r \times 11.48 \times (239.6/(239.6 + 32.0))}{(1 - r) \times 10.96 \times (238.0/(238.0 + 32.0))}$$

k=1の時、r=0.4882、真密度 = 11.48 r + 10.96 (1-r) = 11.214 g/cm³ と求まる。

52. 臨界安全ハンドブック (JAERI 1340, 1999)の表 3.5 (天然 U)と表 3.6 (75% fissile)を使用。

平均自由行程をエネルギーの関数として導くためには、表7の各核種が持つ様々な散乱・ 吸収断面積の合計=全断面積のデータが必要である。断面積の種類³³を図25に、全断面積 を含む様々な断面積の核種毎のエネルギー依存性を図26-1~図26-11に示す。



図25 散乱・吸収断面積の種類

エネルギー範囲は、4.3 節で詳述する自発核分裂と(α ,n)反応由来の中性子のエネルギー から6 MeV まで考えれば十分であるが、傾向を知るため20 MeV とした。2nd-chance 核分裂 とは、核分裂直前の複合核から中性子が1つ放出される場合⁵⁴を指す。これらの断面積は Brookhaven National Laboratory (BNL)の National Nuclear Data Center (NNDC)が提供する Evaluated Nuclear Data File (ENDF)のプロットサービス⁵⁵から得られるデータを利用した。 図25の断面積の種類のうち、(n,2n)以下と非弾性散乱は共鳴領域以下では殆ど生じない ため、図26-1~図26-11では(n,non)と(n,γ)又は(n,f)が重なって見える場合 がある。弾性散乱断面積が小さいと更に(n,tot)と重なって見えたり、逆に弾性散乱断面積 が大きいと(n,tot)と(n,el)が重なって見える場合もある。

表7の同位体のうち、²³⁶U は同位体比が小さく、プルトニウム転換技術開発施設で取り 扱った Pu/U 比 = 1 のウラン・プルトニウム混合二酸化物ではあまり関心を呼ばない核種で あったが、今後、ウランが大半を占め、プルトニウム以外の自発核分裂性核種を含む高質量 の試料を測定対象とする場合、²³⁶U は無視できない量となるため、表7と図26に含めた。 ²³⁷Np もまたあまり関心を呼ばない核種であったが、核分裂反応断面積が小さいにも拘らず 保障措置では核分裂性物質と同程度の関心が持たれる。²³⁷Np は共鳴領域以下で (n,γ)反応 が大半を占め、この反応で生じる ²³⁸Np が核分裂性となる⁵⁶ ためである。

^{53.} 弾性散乱以外(nonelastic)と非弾性散乱(inelastic)を混同しないこと。

^{54.} IAEAの解説用資料(https://www-nds.iaea.org/fycrp/)などを参照。

^{55.} 核種と断面積の種類を指定すれば断面積とそのデータが得られる(http://www.nndc.bnl.gov/exfor/endf00.jsp)

^{56. &}lt;sup>238</sup>Np は熱中性子に対し 2200 barn の断面積を持ち、²³⁵U の 585 barn、²³⁹Pu の 748 barn、²⁴¹Pu の 1012 barn より も大きい。²³⁷Np の (n,γ) 反応断面積は熱中性子に対し 175 barn あり、また ²³⁸Np の半減期は 2.1 日である。



図26-1 中性子と¹⁶Oの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

¹⁶O は~3 MeV では全断面積と弾性散乱断面積が殆ど重なり、~6 MeV でも差は小さい。 自発核分裂と(α,n)反応由来の中性子のエネルギースペクトルは 6 MeV まで考えれば十分 なので、中性子と¹⁶O の衝突は弾性散乱のみと見做してよい。また、0.1 MeV 以下ではスペ クトルに凹凸が無く、0.1 MeV 以上で細かな凹凸が現れているが、これは図26-2以降の アクチノイド元素には見られない特徴である。



図26-2 中性子と²³⁵Uの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²³⁵Uは、共鳴領域未満では核分裂反応が優勢だが、共鳴領域~1 MeV 未満では弾性散乱が 優勢、1 MeV 以上では弾性散乱とそれ以外が拮抗する。後二者は、以降のアクチノイド元素 に共通する特徴である。1 MeV 以上で拮抗する二者のうち弾性散乱以外では、非弾性散乱が 核分裂より優勢であるが、この点は同位体により異なる。また 0.01 ~ 0.1 MeV で(n,inl) が 立ち上がり、6 MeV 手前で(n,2n)や(n,n+f)が立ち上がる。



図26-3 中性子と²³⁶Uの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²³⁶Uは、核分裂反応断面積が小さく、冷中性子領域では弾性散乱以外、主に(n,γ)反応 が優勢で、熱~共鳴領域では弾性散乱が優勢である。核分裂反応断面積が小さいため、0.01 ~0.1 MeVで(n,inl)が立ち上がると、弾性散乱以外と(n,γ)反応が分離する。以降のアク チノイド元素で核分裂反応断面積が小さい同位体には、この特徴が共通して現れる。1 MeV 以上で拮抗する二者のうち弾性散乱以外では、非弾性散乱が核分裂より優勢である。



図26-4 中性子と²³⁸Uの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²³⁸Uは、²³⁶Uと似た傾向を示す。1 MeV から 2 MeV にかけて立ち上がった後の核分裂反応 断面積は 1 barn 前後で落ち着き、6 MeV にかけて (n,n+f) の立ち上がりに伴いやや大きく なって再び落ち着く。この領域ではいずれのアクチノイドも同じ傾向で核分裂反応断面積も 数倍の違いしかない。全断面積にも大きな違いがない。なお、核のエネルギー順位の変化 L1, L2, L3 は 0.05 ~ 0.3 MeV で、非弾性散乱のエネルギー損失は著しくない。



図26-5 中性子と²³⁷Npの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²³⁷Np は、共鳴領域未満では、冷~熱~熱外領域を通じて弾性散乱以外、主に(n,γ)反応 が優勢である。共鳴領域以上では²³⁶U,²³⁸U と似た傾向を示し、共鳴領域~1 MeV 未満では 弾性散乱が優勢、1 MeV 以上で弾性散乱とそれ以外が拮抗する。しかしながら 1 MeV 以上 で拮抗する二者のうち弾性散乱以外では、U とは傾向が異なり、非弾性散乱と核分裂が拮抗 する。なお、この核種には(n,n+f)反応の断面積のデータが含まれていなかった。



図26-6 中性子と²³⁸Puの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²³⁸Pu は、全体に ²³⁶U, ²³⁸U と良く似た傾向を示し、冷~熱中性子領域では弾性散乱以外、 主に (n,γ) 反応が優勢で、熱外~共鳴領域では弾性散乱が優勢である。核分裂反応断面積 がこれらよりも大きいため、冷中性子領域で核分裂反応が弾性散乱よりも優勢となるほか、 共鳴領域以上で弾性散乱以外と (n,γ) が重なる領域が無い。1 MeV 以上で拮抗する二者の うち弾性散乱以外では、U, Np とは傾向が異なり、核分裂が非弾性散乱より優勢となる。



図26-7 中性子と²³⁹Puの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²³⁹Pu は、全体に ²³⁵U と良く似た傾向を示す。1 MeV 以上で拮抗する二者のうち弾性散乱 以外では、²³⁷Np と同様、非弾性散乱と核分裂が拮抗する。6 MeV 以上では(n,n+f)の立ち 上がりに伴い核分裂が優勢となるが、これはいずれのアクチノイド元素にも共通する特徴で ある。(n,f)は(n,n+f)を含む形で描かれている。他の同位体に見られない特徴として (n,inl)の立ち上がりが 0.01 MeV 手前にある。



図26-8 中性子と²⁴⁰Puの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²⁴⁰Pu は、1 eV 前後での共鳴によって形が乱れているものの、全体に ²³⁷Np と良く似た傾向 を示し、冷~熱~熱外領域を通じて弾性散乱以外、主に (n,γ) 反応が優勢である。但し、 ²³⁶U, ²³⁸U, ²³⁸Pu と同様に共鳴領域の手前では弾性散乱が優勢となる。1 MeV 以上で拮抗する 二者のうち弾性散乱以外では、²³⁷Np や ²³⁹Pu と同様、非弾性散乱と核分裂が拮抗する。他の 同位体に見られない特徴として、共鳴領域から離れた 0.1 MeV 手前に (n,f) の凹凸がある。



図26-9 中性子と²⁴¹Puの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²⁴¹Pu, ²⁴²Pu, ²⁴¹Am に関しては、ENDF のプロットサービスに、弾性散乱以外 (n,non)の データが含まれていないが、非弾性散乱と核分裂反応及び (n, γ)反応を合わせて (n,non) としてみると、1 MeV 以上では弾性散乱と同程度で、弾性散乱とそれ以外が拮抗する特徴は 保たれている。²⁴¹Pu は、共鳴領域直後で核分裂反応が (n, γ)反応より明らかに優勢である 点は ²³⁵U に似るが、1 MeV 以上で非弾性散乱と核分裂反応が拮抗する点は ²³⁹Pu に似る。



図26-10 中性子と²⁴²Puの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²⁴²Pu は、数 eV 前後での共鳴によって形が乱れているものの、核分裂反応断面積が小さい Pu 同位体としては ²³⁸Pu よりもむしろ ²⁴⁰Pu と似た傾向を示す。即ち、共鳴領域直後では (n,γ)反応が核分裂反応がより明らかに優勢で、非弾性散乱と核分裂反応及び (n,γ)反応 を合わせて (n,non) として見れば、共鳴領域の手前で弾性散乱がそれ以外 (n,non) よりも 優勢となる (²³⁶U, ²³⁸U, ²³⁸Pu, ²⁴⁰Pu に共通) 闘エネルギーは ²⁴⁰Pu と同様に 1 eV より大きい。



図26-11 中性子と²⁴¹Amの散乱・吸収断面積のエネルギー依存性

²⁴¹Am は、いわゆる核分裂性物質ではないものの、核分裂反応断面積が比較的大きい点で ²³⁸Pu と似た傾向を示し、冷中性子領域では核分裂反応が弾性散乱よりも優勢である。また 非弾性散乱と核分裂反応及び (n,γ)反応を合わせて (n,non)として見れば、共鳴領域未満 では冷~熱~熱外を通じて弾性散乱以外、主に (n,γ)反応が殆どで、この点は²³⁷Npと似て いる。1 MeV 以上で非弾性散乱と核分裂反応が拮抗する点は²⁴²Pu を除く Pu に似る。 各核種の説明は定性的であり、物理的な背景を意識したものではない。¹⁶Oは6MeV以下 では弾性散乱(n, el)である。¹⁶O以外では、核分裂性核種と呼ばれる核種もそれ以外も、 共鳴領域以上では次の傾向がある:

i) 1 MeV 以上では弾性散乱 (n,el) とそれ以外 (n,non) が拮抗する;

ii) 拮抗する二者のうち弾性散乱以外では、非弾性散乱(n,inl) と核分裂反応(n,f) が大半で(n,γ) は小さく、Uは(n,inl) が優勢、Np, Pu, Am は(n,inl) と(n,f) が拮抗する;
iii) 6 MeV 以上では(n,n+f) の立ち上がりに伴い(n,inl) より(n,f) が優勢となる;
iv) 6 MeV 以下では(n,f) 以外の吸収反応は(n,γ) 反応が主で(n, 2n) 等はごく小さい;
v) 1 MeV 未満では共鳴領域又は共鳴領域の少し上まで弾性散乱(n,el) が優勢である;
vi) 全断面積は概ね 10 barn 前後で、中性子エネルギーの増大に対して僅かに減少する;
vii) 全断面積の概ね 3/4 以上を弾性散乱と非弾性散乱が占める。

4.2 平均自由行程の評価

平均自由行程 l_m は核種 iの全断面積 σ_i と原子個数密度 n_i を用い、次式で定義される:

$$l_m = \frac{1}{\sum \sigma_i \, n_i} \tag{169}$$

全断面積の単位を barn = 10^{-24} cm²、原子個数密度の単位を cm⁻³ で与えると平均自由行程 は cm で与えられる。分母はマクロ断面積と呼ばれる。原子個数密度は中性子のエネルギー に依存しないから、エネルギーの関数としての平均自由行程 $l_m(E)$ は次式で表される:

$$l_m(E) = \frac{1}{\sum \sigma_i(E) n_i} \tag{170}$$

ENDF プロットサービスから得たデータは核種によっては非常に大きい。そこで、現実的 な時間内で計算できるよう、データ数が最大で 284397 (²³⁸U の場合)あるのを 600 程度まで 圧縮した。断面積が鋭く上下する共鳴領域のデータが多いため、共鳴領域未満、共鳴領域、 共鳴領域以上の三領域でそれぞれ圧縮率を変化させ、領域毎に対数軸上で等間隔に近くなる ように 201 点のサンプリングを行い、各点を直線で結んでエネルギーの関数として導いた。 数式処理ソフトウエア Mathematica による処理の例を脚注に示す⁵⁷。

^{57.} 共鳴領域以上(図26-2から選んだ第3領域)について対数軸上で等間隔に近くなるように 201 点のサンプ リングを行い、各点を直線で結んで内挿関数(Interpolating Function)を求める例。この例は ²³⁵U で **U235BP2** は第2領域と第3領域の境界データの位置、**U235TOTLen** は全データ長、**TOTData3** は圧縮前データを示す:

TOTData3s := Table[TOTData3[[Floor[U235BP2 * 10^	$\left(\frac{k \text{ Log10}\left[\frac{U235 \text{ TOTLen}}{U235 \text{ BP2}}\right]}{200}\right)$	$] - U235BP2 + 1]], \{k, 0, 200\}];$
U235TOTIF3 = Interpolation[TOTData3s, Interpolat	$ionOrder \rightarrow 1]$	
<pre>InterpolatingFunction[{{0.00280274, 20.}}, <>]</pre>		

導いた関数は、数式処理ソフトウエア内部の関数の形をとるため、普通の式の形に外部に 書き出すことはできないものの、核種間での演算が可能になる。表7の組成比から原子個数 密度を求め、式 (170) を評価すると、図27に示すエネルギーの関数としての平均自由行程 が得られる。但し、データを圧縮しているため、共鳴領域の鋭い上下は見かけ上残っている ものの正確ではない。得られた平均自由行程は次の特徴を有していた:

- i) 10 eV ~10 MeV の広い範囲で 1~5 cm と概ね一定である;
- ii) 10 eV 未満では中性子のエネルギーの減少に応じて平均自由行程は短くなり、熱中性子 では 1 mm 程度となる;
- iii) 4.3 節で詳述する核分裂反応と(α, n)反応による中性子のエネルギー範囲の主要部分
 0.01 MeV ~4 MeV では、平均自由行程は 1.8 ~ 4.5 cm となる。

また、MeVのエネルギー領域では、いずれの核種も全断面積に大きな違いは無いので、 同位体組成比が表7から変化しても、平均自由行程は殆ど変化しない。図27を3つの領域 に分け、フィッティングにより得られた式を表8に、式の計算結果を表9に示す。

ウラン・プルトニウム混合二酸化物の実際の密度(粉末の嵩密度)では、粒子間隙の空気の原子個数密度が粒子の原子個数密度よりも著しく小さいので、空気が平均自由行程に与える影響は無視できると仮定する。この場合、原子個数密度が希薄になったと考えればよく、得られた平均自由行程に真密度と嵩密度の比を乗じればよい。嵩密度が 2.2 g/cm³ の場合、表8 或いは表9の値を 5.1 倍(=11.214/2.2)すればよく、核分裂反応と(α , n)反応による中性子の平均的なエネルギー 2 MeV(次節で詳述する)における平均自由行程は 4.07 × 5.1 = 20.8 cm になる⁵⁸。



図27 表7のウラン・プルトニウム混合二酸化物内での中性子の平均自由行程

^{58.} 密度がn倍の時、原子間距離は $n^{-1/3}$ 倍、断面積の逆数は $n^{-2/3}$ 倍になり、平均自由行程は1/n倍になる。

	約田			係数	
	甲已四		a	b	с
領域1	$\sim 5.2 \text{ eV}$	$y = ax^b$	649.1	0.5021	
領域2	$5.2 \text{ eV} \sim 5 \text{ keV}$		2.043	0.02826	
領域3	$5 \text{ keV} \sim 10 \text{ MeV}$	$y = a + b e^{-x/c}$	4.617	-2.870	1.202

表8 図27の3領域のフィッティング結果

表9 表8の式の計算結果

		平均自由行程 [cm]		
	Energy [Mev]	領域1	領域2	領域3
熱中性子	2.53E-08	0.10		
	1.0E-6	0.63		
aV	5.2E - 6	1.44	1.45	
τv	1.0E-5		1.48	
	1.0E-4		1.57	
	1.0E-3		1.68	
le e V	5.0E-3		1.76	1.76
Ke v	0.01			1.77
	0.1			1.98
	1			3.37
MeV	2			4.07
	3			4.38
	4			4.51
	10			4.62

マクロ断面積は各核種の寄与の線形結合であり、寄与を元素毎にまとめて図28に示す。



図28 表7のウラン・プルトニウム混合二酸化物内での中性子のマクロ断面積

嵩密度 2.2 g/cm³ のウラン・プルトニウム混合二酸化物粉末の場合、スペクトルの主要部 分である 0.01 MeV~4 MeV の中性子の平均自由行程は 9.0 cm~23.0 cm となるので、通常の 寸法の試料(直径・長さとも 10 cm 程度まで)ならば衝突回数は零から数回であり、大部分 の中性子は試料内部で散乱・吸収されることなく外に漏れる。ペレットの場合、焼結密度が 真密度の 95% として、2 MeV の中性子の平均自由行程は 4.3 cm となり、通常の寸法の試料 (直径・長さとも数 cm)ならばやはり衝突回数は零から一桁であることが判る。

4.3 自発核分裂反応と(α,n)反応によるエネルギースペクトル

核分裂によるエネルギースペクトルは、1950 年代の Maxwell 近似⁵⁹と Watt 近似⁵⁹に始ま り、1980 年代に Madland and Nix 近似⁶⁰が提唱されて、ENDF ではこの3種類が用意されて いる。Madland and Nix 近似は複雑なため、次式で表される Watt 近似^{61,62}を用いる:

$$P_E \left\{ E = E' \right\} = \frac{\exp\left(-\frac{E_f}{T_w}\right)}{\sqrt{\pi E_f T_w}} \exp\left(-\frac{E'}{T_w}\right) \sinh\left(\frac{2\sqrt{E_f E'}}{T_w}\right)$$
(171)

左辺の $P_E \{E = E'\}$ は Eが E'に一致する確率で、式 (108) と同様の表記を用いた。確率 分布の表記は様々で、等号に代えて→が使われることも多い。 E', E_f, T_w はそれぞれ、観測 者座標系における中性子エネルギー,核子あたりの核分裂片の平均エネルギー,実効 Watt 温度である。ENDF ではもう少し厳密な定義が与えられている⁶⁰。²³⁵U と熱中性子の場合、 文献 62 では Watt 近似を次式で与えている (E, E'の単位は MeV) :

$$P_E \{ E = E' \} = 0.453 \exp\left(-1.036E'\right) \sinh\sqrt{2.29E'}$$
(172)

逆算すると $T_w = 0.965$, $E_f = 0.533$ が得られる。式 (172) で与えられる確率分布を図29 に示す(いずれの図も利用されるので x軸と y軸をそれぞれリニアスケールと対数スケール としてくどいようでも計4通りを示した)。式 (172) のピーク位置は 0.724 MeV、数値積分に よって求めた重み付き平均は 1.97 MeV であった。また、0.01 MeV ~4 MeV の面積が全体の 面積の 89.5% を占めていた。縦軸は確率であるが無次元ではなく 1/MeV 単位となる。この 方法でスペクトルの面積は 1 に規格化される。

60. ENDF-6 Format Manual のページ 113 では:

$$\begin{split} f(E \to E') &= \frac{e^{-E'/a}}{I} \sinh\left(\sqrt{bE'}\right), \ a = T_w, \ b = \frac{4E_f}{T_w^2} \\ \text{where } I &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi a^3 b}{4}} \exp\left(\frac{ab}{4}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E-U}{a}} - \sqrt{\frac{ab}{4}}\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E-U}{a}} + \sqrt{\frac{ab}{4}}\right) \right] - a \exp\left(-\frac{E-U}{a}\right) \sinh\sqrt{b\left(E-U\right)}, \\ \lim_{E-U \to \infty} \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E-U}{a}} - \sqrt{\frac{ab}{4}}\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E-U}{a}} + \sqrt{\frac{ab}{4}}\right) \right] = 2, \ \lim_{E-U \to \infty} \exp\left(-\frac{E-U}{a}\right) \sinh\sqrt{b\left(E-U\right)} = 0 \\ \text{係数 } a, b \, \mathfrak{sightan, } \mathbf{I}(171) \, \mathfrak{sightan Control of Sintermatical Control of Sintermati$$

^{59.} 中性子蒸発理論に基づく。



図29 ²³⁵Uと熱中性子の場合のWatt スペクトル(式 (172) による)

²³⁵U と高速中性子の場合や、²³⁵U 以外の核種と熱/高速中性子との場合に、 E_f, T_w をどの ように与えるのかについては、Lawrence Livermore 研究所の文献⁶³⁾の page 7 に 'For neutroninduced fission, the coefficients $a (= 1/T_w)$ and $b (= 4E_f/T_w^2)$ not only vary weakly from one isotope to another, but they also vary weakly with the incident neutron energy' とあり、Watt 近似を次式⁶¹ で 与えている:

$$W(a, b, E') = C \exp^{-aE'} \sinh(\sqrt{bE'})$$

where $C^{-1} = \sqrt{\pi \frac{b}{4a}} \frac{\exp^{b/4a}}{a}, \ a = \frac{1}{T_w}, \ b = \frac{4E_f}{T_w^2}$ (173)

誘導核分裂性核種の場合には $b \ge 1 \ge 0^{62}$ 、 $a \ge 0$ ($a \ge 0$) ($a \ge 0$ ($a \ge 0$) (

- 61. 文献 63 では $C = (1/a)\sqrt{\pi b/(4a)} \exp^{b/4a}$ と逆数になっていないが、逆数の式 (173) が正しい。
- 62. 式 (172) から、一見すると b=2 ではないかと思えるが、実際に計算を行ってみると、a は確かに bを 1 として与えられている。

	入射中性子	ピーク位置 MeV	重み付き平均 MeV	0.01 MeV ~4 MeV が占める割合 %
	熱	0.658	1.91	90.0
235т т	0.1 MeV	0.658	1.91	89.9
	1 MeV	0.666	1.93	89.6
	2 MeV	0.674	1.96	89.3
236т т	1 MeV	0.659	1.92	89.9
U	2 MeV	0.668	1.94	89.6
	1 MeV	0.662	1.92	89.8
²³⁸ U	2 MeV	0.671	1.95	89.4
	4 MeV	0.690	2.00	88.7
237	1 MeV	0.684	1.98	88.9
np	2 MeV	0.693	2.01	88.5
	熱	0.687	1.99	88.8
²³⁹ Pu	0.1 MeV	0.688	1.99	88.7
	1 MeV	0.697	2.01	88.4
	2 MeV	0.706	2.04	88.0
	熱	0.691	2.00	88.6
241	0.1 MeV	0.692	2.00	88.6
Pu	1 MeV	0.702	2.03	88.2
	2 MeV	0.712	2.05	87.7
2380	1 MeV	0.695	2.01	88.5
Pu	2 MeV	0.704	2.03	88.1
240 0	1 MeV	0.695	2.01	88.5
Pu	2 MeV	0.705	2.04	88.0
2420	1 MeV	0.694	2.01	88.5
Pu	2 MeV	0.704	2.03	88.1
²⁴¹ Am	1 MeV	0.712	2.05	87.7
	2 MeV	0.722	2.08	87.3

表10 誘導核分裂性核種のエネルギースペクトルのピーク位置と重み付き平均その他

前頁の引用部分の通り、エネルギースペクトルは核種にも入射エネルギーにもあまり依存 しないが、入射エネルギーが小さい方が分布は鋭くなり(0.01 MeV ~4 MeV が占める割合 大きく)、ピーク位置と重み付き平均は低くなる傾向がある。また、Am \rightarrow Pu \rightarrow Np \rightarrow U の順で分布は鋭くなり、ピーク位置と重み付き平均は低くなる傾向がある。熱中性子と²³⁵U の場合に式 (172)の結果とやや合わないのは、文献 62 と 63 で係数が異なるためである。

自発核分裂性核種の場合には核種毎に係数 a, b が与えられている。具体的なパラメータは 文献 63 の Table 5 を参照することとし、ここでは省略する。エネルギースペクトルのピーク 位置と重み付き平均及び 0.01 MeV ~4 MeV が占める割合を計算した結果を表11に示す。 同じ重み付き平均で比較すると、自発核分裂性核種は誘導核分裂性核種よりも分布が鋭く ピーク位置が明らかに高い。

	ピーク位置 MeV	重み付き平均 MeV	0.01 MeV ~4 MeV が占める割合 %
²³⁸ Pu	0.826	2.01	89.3
²⁴⁰ Pu	0.804	1.93	90.7
²⁴² Pu	0.805	1.95	90.2

表11 自発核分裂性核種のエネルギースペクトルのピーク位置と重み付き平均その他

誘導核分裂性核種と自発核分裂性核種のスペクトルの代表例を図30に、式(173)による Watt 近似の定数 *a*, *b* を表12に示す。²⁴⁰Pu は²³⁹Pu よりも分布がやや鋭くピーク位置が高い ものの、重み付き平均が²³⁹Pu よりも低い(>4 MeV の影響)ことが特徴である。

表12²³⁹Puと²⁴⁰PuのスペクトルのWatt 近似の定数(桁数は原著どおり)

	<i>b</i>	$a(E) = a_0 + a_1 E + a_2 E^2$ (Elt MeV)		
		a_0	a_1	a_2
²³⁹ Pu	1	0.887305	-0.0101099	8.50642E-05
²⁴⁰ Pu	4.68927		1.25797	



図30²³⁹Pu (2 MeV) と²⁴⁰Pu のスペクトルの比較(上:リニア軸,下:対数軸)

続いて、²³⁸Pu, ²³⁹Pu, ²⁴⁰Pu, ²⁴¹Am 等から生じた α 粒子と ¹⁷O, ¹⁸O との (α , n) 反応のスペク トルについて述べる。アクチノイド元素の多くは α 核種である(²³⁶Np, ²⁴¹Pu, ^{242m}Am を除く) が、半減期が長い又は存在比が小さい核種の寄与は小さいので、この4 核種の寄与が 99% を占める。¹⁷O と ¹⁸O の天然存在比はそれぞれ 0.00038 と 0.0021 と小さいが、殆どを占める ¹⁶O は (α , n) 反応を生じない⁶³。文献 45 の Fig. 36 と Fig. 39 には、0~15 MeV の α 粒子に 対する中性子のエネルギースペクトルが示されているが、低エネルギー側の特徴を読み取る のが却って難しい。そこで、1983 年の Jacobs らの文献⁶⁴ に基づいて中性子収率を評価・検討 した文献 46 から、5.0 MeV 及び 5.5 MeV の α 粒子に対する実際のエネルギースペクトルを 転載して図 3 1 に示す。実測なので、O の同位体組成比は天然の組成比である。



a) 5.0 MeV の α 粒子の場合 図 3 1 O との (α, n) 反応によるエネルギースペクトル (文献 46 から転載)

文献 46 の Table 3.4–4–8 と Table 3.4–4–9 から、*α* 核種ごとの *α* 粒子の平均エネルギーと UO₂ 中での中性子の生成率を引用して表 1 3 に示す。

	α 粒子の平均エネルギー MeV	UO_2 中での中性子生成率 $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{g}^{-1}$		
²³⁸ Pu	5.49	$1.38 imes 10^4$		
²³⁹ Pu	5.15	$3.97 imes 10^1$		
²⁴⁰ Pu	5.16	$1.46 imes 10^2$		
²⁴¹ Am	5.48	2.75×10^{3}		

表13 α 核種の α 粒子のエネルギーと UO₂ 中での中性子生成率

表7の組成比での α 粒子のエネルギーの重み付け平均は、表13から5.39 MeVとなる。 図31の基の数値データは文献46のp.159のTable 3.5-1(前後関係からTable 3.5-2の誤り であろう)にあり、これら数値データから内挿により5.39 MeVの α 粒子とOとの(α , n) 反応によるエネルギースペクトルを求めた結果を図32に示す。

 ^{63. &}lt;sup>17</sup>Oの(α, n)反応の閾値は0 MeV、¹⁸Oの場合は0.852 MeV(文献45を参照)であるから、この2核種は(α, n)反応を生じる。閾値が6 MeV以下の(α, n)反応核種は他に⁷Li, ⁹Be, ¹⁰B, ¹¹B, ¹³C, ¹⁹F, ²³Na, ²⁵Mg, ²⁶Mg, ²⁷Al, ²⁹Si, ³⁰Si, ³⁷Cl などがあり(文献45, 47を参照)天然存在比の高い核種も多い。これらが不純物として含まれる場合、その影響を無視できない場合もあり得る。

図31の縦軸の単位は n/ α ·MeV であるが、確率を明確に意味するよう、図32では縦軸 の単位を n/ α [MeV⁻¹] として Jacobs らの文献に揃えた(スペクトルの積分値は 1 となる)。 図32のピーク位置は 2~2.5 MeV にあるが、0.5 MeV 未満のスペクトル、特にゼロエネル ギーの切片がどうなるのか、疑問が残る。図31と図32では、横軸がリニアであるためか 切片が存在するように見えるが、ゼロエネルギーの α 粒子は反応しない(¹⁷O, ¹⁸O の原子核 と同じ+電荷のため)と思われ、文献 45 では実際、原点を通るように見える。



図32 5.39 MeV の α 粒子と O との (α , n) 反応によるエネルギースペクトル (内挿法)

原点を通りかつ立ち上がりが急になるよう、近似関数を定めた結果を図33に示す。この 関数は、矩形波をフーリエ級数展開し、両端を異なる時定数の指数関数で丸めたもの⁶⁴を フィッティングのベースとし、5つの Gauss 分布曲線(主ピークに3つ、副ピークに2つ) をこのベースに重ねて得られた。この関数は、平均自由行程の場合と同様、数式処理ソフト ウエア内部の関数の形をとるため、普通の式の形に外部に書き出すことはできない。



64. Fstep[m_, L_, x_] := $\sum_{n=1}^{m} \frac{4}{\pi (2 n - 1)} \sin \left[\frac{2 \pi (2 n - 1)}{L} x \right];$

Plot[0.142Fstep[50, 9, x] (HeavisideTheta[x] - HeavisideTheta[x - 4.5]) (1 - Exp[-40 x]) (1 - Exp[-0.9 (4.5 - x)]), {x, 0, 5.1}, PlotRange → {0, 0.2}, AspectRatio → 0.25] 0.15 0.16 0.16 0.05 フィッティングのベースとした関数は 4.5 MeV を上限とするが、このスペクトルが上限を 持つという仮定は、文献 45 の Fig. 36 と Fig. 39 から見て問題はないであろうと考えている。 また、内挿法により求めた結果と近似関数との外れについては、基になった Jacobs らの文献 値が NE-213 有機液体シンチレータにより測定されているので、測定の不確かさ⁶⁵ を考える とこの外れは許容されない程ではない。重み付き平均エネルギーは 2.04 MeV である。

続いて、ウラン・プルトニウム混合二酸化物について実測されたスペクトルを紹介する。 旧動燃の安全管理部では、MOX 缶(プルトニウム転換技術開発施設で扱っている粉末缶) の中性子スペクトル及び実際の作業場を模擬して MOX 缶を含鉛アクリル遮蔽体で遮蔽した 時の中性子スペクトルを、3種類の検出器を使用して 1991 年に測定している⁵⁸。遮蔽しない 時の測定条件と測定結果を図34に転載する。使用された検出器は次の3種類であった:

- i) 多減速材付き³He 型スペクトロメータ (Bonner Ball)
- ii) 反跳陽子比例計数管(Proton Recoil Proportional Counter)
- iii) NE-213 有機液体シンチレータ(Liquid Scintillator, 高速中性子用として頻出する⁶⁵⁾)



図34 旧動燃の安全管理部が測定を行った時の条件と結果(文献 58 から転載)

65. 図34の右上の図を見ると、NE-213のデータ(太い1本線)に誤差棒が付いているのが判る。

Bonner Ball は熱中性子 ~ MeV 領域を、PRC は keV ~ MeV 領域を、NE-213 は MeV 領域 を精度良く測定するために使用された。1 MeV 付近では 3 者を比較可能でその差は小さい。

この実測されたスペクトルと比較するため、核分裂反応のエネルギースペクトルに対する Watt 近似式と(α , n)反応のエネルギースペクトルに対する近似関数(図33)を、以下の 手順で合成した。核分裂反応のエネルギースペクトルは 90% 以上が自発核分裂反応に由来 し、大部分の中性子は試料内部で散乱・吸収されることなく外に漏れるため、誘導核分裂は 考慮しなかった。 α_r 値を 0.7 (計算値ではなく実測値)として求めた結果を図35に示す:

i) 表7の組成に応じて自発核分裂性核種²³⁸Pu,²⁴⁰Pu,²⁴²PuのWatt近似式を重ね合わせる;
 ii) i)の重ね合わせと図33の近似関数の α_r 倍を重ね合わせる。



図35 Watt 近似式と図33の近似関数を $\alpha_r = 0.7$ で合成(上:リニア軸、下:対数軸)

図35において、(α, n)反応のエネルギースペクトル(図33の近似関数)が0.1 MeV 付近で上下しているのは、級数展開の際の次数の影響である。次数を上げると立ち上がりが 鋭くなるが、図31の基の数値データが0.1 MeV 刻みのため確かなことが判らない。また、 文献45の Fig. 36 と Fig. 39 もエネルギー軸がリニアで、低エネルギー側の細部が判らない。 図35の対数軸の図には、任意性の残る立ち上がりの不確かさの範囲も示した。 図35の縦軸に関しては、自発核分裂反応の面積が1、(α ,n)反応の面積が0.7、重ねて 得られるスペクトルの面積が1.7なので、面積を規格化するには高さを1/1.7倍する必要が ある。リニア軸では1MeV弱から2MeV強にかけて台地状になるのが特徴で、重み付きの 平均エネルギーは1.97MeVである(²⁴⁰Puより僅かに高い)。6MeV以下が面積の99%を 占めており、スペクトルの上限は6MeVと考えてよい。

次に、図34の実測されたスペクトルと比較するためには、縦軸を確率ではなく中性子の 相対的な強度に対応させなければならない。スペクトルを表す関数 *y*(*x*) に *x* を乗じることに よってこの処理を行った。結果を図36に示す。横軸のスケールは図35と同じとした。



図36 図35の縦軸を確率ではなく中性子の相対的な強度に対応させた結果

槍ケ岳に似たピークが2~3 MeV にあるのが特徴である。図34の実測されたスペクトル と比較するために縦軸と横軸の範囲とグラフの縦横比を合わせた結果を図37に示す。コブ がやや高いが、α_r 値を 0.6 に変えて計算してみると、コブの高さの外れは α_r 値の不確かさ の程度であることが判った。



図37 旧動燃の安全管理部が測定したスペクトルとの比較(文献 58 から転載し加筆)

図37ではまた、1 MeV 弱に実測では僅かに上に凸の傾向があり、図33の(α,n)反応 スペクトルの1 MeV 弱のサブピークがもう少し高いか、或いは低エネルギー側に裾野が広い ように見える。またコブより低エネルギー側の傾斜が全体にやや急であるが、これは試料内 での散乱・減速を考慮していないためと考えられる。

INL(Idaho National Laboratory)では組成の異なる2種類の MOX 燃料ピン(ピンが1本 と複数本の場合)のスペクトルを実測するとともに最新の MCNP-PoliMi で計算しており⁶⁶、 ピン1本の場合、図35のリニア軸のスペクトルで高さを 1/1.7 倍にした場合に近い結果が 得られている。ピンが複数本の場合、平均自由行程からみて試料内での散乱の確率が大きく なる結果、平均エネルギーがほぼ指数関数に従って低下してゆく様子が現れている。前者を 図38 a)、後者を図38 b)として転載する⁶⁶。Pin #2 が表7の Pu 同位体比に近い。Pin #1 は自発核分裂性核種の同位体比が小さく (α ,n)反応に由来するコブが高い。a)の Pin #2 の 傾向から見ても、図33の(α ,n)反応スペクトルの1 MeV 弱のサブピークはもう少し高い と思われる。b)は Pin #1 の場合で、ピン1本の時の 2.14 MeV は図34の重み付き平均エネ ルギー 1.97 MeV よりもやや高い。



図38 MOX 燃料ピンのエネルギースペクトル(文献 66 から転載)

結論として、表7のウラン・プルトニウム混合二酸化物について、関数形として得られた 中性子のエネルギースペクトルは、旧動燃の安全管理部の実測データと比較しても、INLの 実測及び計算データと比較しても大きな問題はなく、以降の節及び章で利用することができ ると判断した。なお、図35のスペクトル(対数軸の場合)に切片が存在する場合をあえて 示したのは、¹⁷OのQ値が+(文献 45)であることを鑑みたためである。自発核分裂反応 は 0.05 MeV 未満の低エネルギー側にも広い確率分布を持っており、エネルギースペクトル の不確かさを抑制するには、(α,n)反応のサブピーク及び 0.05 MeV 未満の確度を高めたい ところである。

^{66.} 図38 a) の縦軸は normalized probability で面積が1になる筈なので、実際の数値は1桁大きい(0.03→0.3) のではないかとと思われる。

4.4線スペクトルの場合のエネルギースペクトルの変化

前節のエネルギースペクトルが、試料或いは体系の中での散乱に伴うエネルギーの減衰に より、どのように形状を変えてゆくのかを次節で考える。その準備として本節では、前節の スペクトルの任意のエネルギー(線スペクトル)を考え、1つの線スペクトルから散乱1回 で1つの矩形スペクトルが生じるという炉工学の知見⁶⁷⁾を用い、*N*-1回目のスペクトルから *N*回目のスペクトルを求めるという手順を繰り返して、単体中で弾性散乱を繰り返す中性子 のスペクトルの遷移を描く。

平均自由行程に関して述べたように、粉末であれペレットであれ、ウラン・プルトニウム 混合二酸化物の場合、スペクトルの主要部分である 0.01 MeV ~ 4 MeV の中性子の衝突回数 は、通常の寸法の試料ならば零から1桁である。その1桁台の衝突については:

i) O との衝突によるエネルギーの減衰が U, Pu との衝突による減衰より1桁大きい⁶⁷;

ii) MOX を構成する原子の 2/3 を占める O は 6 MeV 以下では弾性散乱 (n, el) である;

iii) 1/3 を占める U, Pu は共鳴領域以上 1 MeV 以下では弾性散乱(n, el)が優勢である;

iv) 1/3 を占める U, Pu は 1 MeV 以上で弾性散乱 (n, el) とそれ以外 (n, non) が拮抗する;

v) 拮抗する二者のうち弾性散乱以外では、非弾性散乱(n,inl)と核分裂反応(n,f)が大半

で (n,γ) は小さく、U は (n,inl) が優勢、Np, Pu, Am は (n,inl) と (n,f) が拮抗する。

非弾性散乱における核のエネルギー準位の変化は ²³⁸UのLl で 45 keV, L2 で 148 keV, L3 で 307 keV、偶数質量数の ²⁴⁰Pu では ²³⁸U と同程度、奇数質量数の ²³⁹Pu ではLl で 8 keV, L2 で 57 keV, L3 で 76 keV である(Table of Isotopes から引用)から、核分裂で生じた中性子が 非弾性散乱によって失うエネルギーは著しくない。一方、中性子が吸収されて次の核分裂が 生じる割合は概ね 1/6(二酸化物中の Pu 原子数割合)×1/2(弾性散乱とそれ以外が拮抗) × 1/2(非弾性散乱と核分裂反応が拮抗)≈4% となる(5.2 節~5.3 節で詳しく述べる)。

従って、定式化のための条件として、中性子は酸素単体(但しガスではない)の中で弾性 散乱を繰り返すと見做すこととし、この条件からの外れは不確かさとして扱うことにした。 条件からの外れとして最も影響が大きいのは試料中の水分と考えている。この影響を含めた 定式化は今後の報告書で取り扱うこととしたい。

まず最初に、散乱・吸収の理論で用いられる2つの座標系、観測者座標系(laboratory coordinate)と重心座標系(center-of-mass coordinate)について説明する。重心座標系とは2つ の粒子(点とみなす)の重心を原点とする座標系で、観測者から見ると衝突の前後で座標系 は等速度で運動しており、中性子と標的原子核は正面から衝突する。観測者座標系は普通に 考える座標系であり、中性子は静止している標的原子核に衝突する。

^{67.} 衝突によるエネルギーの減衰は(良く知られているが) $\overline{E_N}/E_0 = e^{-\xi N}$ で表される。Nは衝突回数、 E_0 は 衝突前の中性子のエネルギー、 $\overline{E_N}$ は N回衝突後の中性子の平均エネルギーであり、相手が酸素原子の場合 は $\xi = 0.12$ 、相手が U, Pu 原子の場合は $\xi = 0.0084$ (式 195)なので、1 桁の違いとした。

2つの粒子が弾性衝突する場合の、質量 m、速度 \vec{v} 、散乱前後の粒子が含まれる平面での 速度ベクトルの向き ϕ , θ を図39に示す。



図39 観測者座標系と重心座標系における変数の定義

質量 m_2 の静止した標的に質量 m_1 の中性子が速度 $\vec{v_0}$, エネルギー E_0 で衝突し、標的と 中性子の速度がそれぞれ $\vec{v_2}$, $\vec{v_1}$, エネルギーがそれぞれ E_2 , E_1 , 衝突方向に対し射出方向が それぞれ ϕ , θ となる場合(観測者座標系)、以下の式が成り立つ:

$$m_1 |\vec{v_0}| = m_1 |\vec{v_1}| \cos \theta + m_2 |\vec{v_2}| \cos \phi \tag{174}$$

$$0 = m_1 |\vec{v_1}| \sin \theta - m_2 |\vec{v_2}| \sin \phi \tag{175}$$

$$\frac{1}{2}m_1|\vec{v_0}|^2 = \frac{1}{2}m_1|\vec{v_1}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v_2}|^2$$
(176)

これらから以下の関係が得られる。高校物理の範囲であるから結果のみを記す:

$$\frac{|\vec{v_1}|}{|\vec{v_0}|} = \frac{\sin\phi}{\sin(\phi+\theta)} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{\cos\phi}{\cos(\phi+\theta)}$$
(177)

$$\frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_0|} = \frac{m_1}{m_2} \frac{\sin\phi}{\sin(\phi+\theta)} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cos\phi$$
(178)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin\left(2\phi + \theta\right)}{\sin\theta} \quad \forall l \ddagger \quad \sin^2\left(\phi + \theta\right) = \sin^2\phi + \frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta \tag{179}$$

重心座標系では衝突前の運動量の和=衝突後の運動量の和=0となり、等速度運動の方向 は中性子の速度方向と同じである:

$$\vec{v_c} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \, \vec{v_0} \tag{180}$$

重心座標系では式(174),(175),(176)に代えて、以下の式が成り立つ:

$$m_1 \left| \vec{v_0} - \vec{v_c} \right| - m_2 \left| \vec{v_c} \right| = 0 \tag{181}$$

$$m_1 |\vec{v_1} - \vec{v_c}| \cos \theta_c + m_2 |\vec{v_2} - \vec{v_c}| \cos (\pi - \theta_c) = 0$$
(182)

$$m_1 |\vec{v_1} - \vec{v_c}| \sin \theta_c - m_2 |\vec{v_2} - \vec{v_c}| \sin (\pi - \theta_c) = 0$$
(183)

$$\frac{1}{2}m_1|\vec{v_0} - \vec{v_c}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v_c}|^2 = \frac{1}{2}m_1|\vec{v_1} - \vec{v_c}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v_2} - \vec{v_c}|^2$$
(184)

これらから以下の関係が得られる:

$$|\vec{v_0} - \vec{v_c}| = \frac{m_2}{m_1} |\vec{v_c}| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v_0}|$$
(185)

$$|\vec{v_1} - \vec{v_c}| = \frac{m_2}{m_1} |\vec{v_2} - \vec{v_c}|, \quad |\vec{v_0} - \vec{v_c}| = |\vec{v_1} - \vec{v_c}|, \quad |\vec{v_c}| = |\vec{v_2} - \vec{v_c}|$$
(186)

従って、重心座標系ではそれぞれの粒子について、衝突前後で速度の方向だけが変化し、 速度の大きさと運動エネルギーは変化しない。続いて、 $\vec{v_1} = (\vec{v_1} - \vec{v_c}) + \vec{v_c}$ の両辺の内積を とり、観測者座標系での粒子1の運動エネルギーの変化を重心座標系の θ_c によって簡単に 表す:

$$|\vec{v_1}|^2 = |\vec{v_1} - \vec{v_c}|^2 + |\vec{v_c}|^2 + 2|\vec{v_1} - \vec{v_c}||\vec{v_c}|\cos\theta_c$$
(187)

式(187)から:

$$|\vec{v_1}|^2 = |\vec{v_0} - \vec{v_c}|^2 + |\vec{v_c}|^2 + 2|\vec{v_0} - \vec{v_c}||\vec{v_c}|\cos\theta_c$$
(188)

式 (185) ~式 (186) から:

$$|\vec{v_1}|^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 |\vec{v_0}|^2 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 |\vec{v_0}|^2 + \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} |\vec{v_0}|^2 \cos\theta_c$$
(189)

従って、観測者座標系での粒子1の運動エネルギーの変化 E1 / E0 について:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{|\vec{v_1}|^2}{|\vec{v_0}|^2} = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2\,m_1\,m_2\,\cos\theta_c}{(m_1 + m_2)^2} \tag{190}$$

 E_1/E_0 が最大と最小をとるのは:

最大
$$heta_c \to 0$$
 で $\frac{E_1}{E_0} \to 1$ (衝突する以上 $heta_c$ は零ではない) (191)

最小
$$\theta_c = \pi \ \mathfrak{C} \frac{E_1}{E_0} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$
 (192)

中性子 $(m_1 = 1)$ が単体 $(m_2 = A)$ 中で弾性散乱を繰り返す場合、散乱 N 回目 (衝突前 k = 0)のスペクトルの上限値/下限値は次の式で表される $(\log k e \delta k \in \delta)$:

上限
$$E_N^{max} \to E_0$$
 (193)

下限
$$E_N^{min} = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^{2N} E_0$$
(194)

重み付き平均
$$\overline{E_N} = E_0 e^{-\xi N}$$
 (195)
where $\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \log \frac{A+1}{A-1} \simeq \frac{2}{A+2/3}$

式 (195) を導出する前に、式 (190) の θ_c の性質を明らかにする⁶⁸⁾。図40は重心座標系の 原点に置いた単位球と散乱角度 θ_c 及び微小散乱角度 $d\theta_c$ 並びに微小立体角 $d\omega_{\theta_c}$ を表す。



図40 重心座標系の原点に置いた単位球と散乱角度その他

この $d\omega_{\theta_c}$ への散乱の確率を dW とすると:

$$dW = \frac{d\omega_{\theta_c}}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta_c \, d\theta_c}{4\pi} = -\frac{1}{2} d\cos \theta_c \tag{196}$$

重心座標系では散乱は等方的(¹H では厳密、文献 67 の p.148 によると ¹⁶O との衝突では $10 \times 16^{-2/3}$ MeV 迄等方的)なので $dW \ge d\cos\theta_c$ は一定、則ち $\cos\theta_c$ は確率一定である。

式 (190) の $\cos \theta_c$ が確率一定であること、等方的とは θ_c が確率一定であることを意味しな い (脚注にイメージ⁶⁸ を示すが $\theta_c \to 0$ と $\theta_c \to \pi$ で θ_c の確率は疎になる) ことが判った。 この時、 E_1 / E_0 が最大と最小の間をとる確率も一定になるため、図41に示すように1つ の線スペクトルから散乱1回で1つの矩形スペクトル (横軸はエネルギーで縦軸は確率) が 生じることになる。なお、 E_1 の添字1は粒子1ではなく N=1を意味する。



図41 1つの線スペクトルから散乱1回で1つの矩形スペクトルが生じる この矩形スペクトルの高さ *P*(*E*) は、面積が1であるから:

$$P(E) = \frac{1}{E_0 \left(1 - \alpha_d\right)} \quad \text{(III)} \quad \alpha_d = \left(\frac{A - 1}{A + 1}\right)^2 \tag{197}$$

 ξ (average logarithmic energy decrement) を次式で定義する:

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\log\left(\frac{E_0}{E}\right)} \tag{198}$$

この期待値の意味は:

$$\overline{\log\left(\frac{E_0}{E}\right)} = \frac{\int_{\alpha_d E_0}^{E_0} \log\left(\frac{E_0}{E}\right) P(E) dE}{\int_{\alpha_d E_0}^{E_0} P(E) dE}$$
(199)



分母は 1、分子に式 (197) を代入し、 $F = E/E_0$ で変数変換すると:

$$\xi = -\frac{1}{1 - \alpha_d} \int_{\alpha_d}^1 \log F \, dF = \frac{1}{1 - \alpha_d} \int_1^{\alpha_d} \log F \, dF \tag{200}$$

公式 $\int \log x \, dx = x \log x - x$ を用いると、式 (195) が導出される:

$$\xi = \frac{1}{1 - \alpha_d} \left(\alpha_d \log \alpha_d - \alpha_d + 1 \right) = 1 - \frac{(A - 1)^2}{2A} \log \frac{A + 1}{A - 1}$$
(201)

観測者座標系では $\theta_c \ge \theta$ となり、中性子がより前方向に散乱される (forward scattering) ことに関して重要な公式がある。静止した標的に単位球を置き、 $\overline{\cos \theta}$ を次式で定義する:

$$\overline{\cos\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^{\pi} \cos\theta \, d\omega_{\theta}}{\int_0^{\pi} d\omega_{\theta}}$$
(202)

分母は 4π 、分子は幾何的に $d\omega_{\theta} = d\omega_{\theta_c} = 2\pi \sin \theta_c d\theta_c$ であるから:

$$\overline{\cos\theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta_c \,d\theta_c \tag{203}$$

$$(\vec{v_1} - \vec{v_c}) = \vec{v_1} - \vec{v_c}$$
の内積 $|\vec{v_1} - \vec{v_c}|^2 = |\vec{v_1}|^2 + |\vec{v_c}|^2 - 2|\vec{v_1}||\vec{v_c}|\cos\theta$ から次式を得る⁶⁹:

$$\cos\theta = \frac{1 + A\cos\theta_c}{\sqrt{A^2 + 1^2 + 2A\cos\theta_c}} \tag{204}$$

式 (204) を式 (203) に代入して、 $t = \cos \theta_c$ の変数変換をすると次式が得られる:

$$\overline{\cos\theta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1+At}{\sqrt{A^2+1^2+2At}} dt$$
(205)

積分下限 $(1 - A \circ x < A - 1)$ に注意し $\sqrt{A^2 + 1^2 + 2At} = u > 0$ の変数変換を行う:

$$\overline{\cos\theta} = \frac{2}{3A} \tag{206}$$

良く知られた公式、式(206)は近似ではなく厳密解である。

69. 式 (189) と式 (180)より $|\vec{v_1}|^2 = \frac{1}{(A+1)^2} \left(A^2 + 1^2 + 2A\cos\theta_c\right) |\vec{v_0}|^2 = \left(A^2 + 1^2 + 2A\cos\theta_c\right) |\vec{v_c}|^2$ 、 式 (186) より $|\vec{v_1} - \vec{v_c}|^2 = A^2 |\vec{v_c}|^2$ を内積の式に代入する。 以上、1つの線スペクトルから散乱1回で1つの矩形スペクトルが生じるという炉工学の 知見について関連する公式も含めて述べた。この知見に基づき、Nが1→2→3となる時の スペクトル変化と $N \ge 3$ での積分の考え方を図42に示す。

線エネルギー E_0 の中性子が最初にターゲットに 衝突した後(N=1)、エネルギー E は次式の 範囲に同じ確率で拡がり、エネルギー分布は矩形 となる。A はターゲットの質量数、縦軸は確率で ある。

$$E_0 \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \le E < E_0$$

次の衝突(N=2)では、N=1のエネルギーの 範囲にある各々の線エネルギーが同様の矩形分布 を形作る(高さは微小)。これらの重ね合わせ が、N=2のエネルギー分布になる。

次の衝突(N=3)では、N=2のエネルギーの 範囲にある各々の線エネルギーが同様の矩形分布 を形作る。この時、積分範囲の横方向では、同じ 線エネルギーに由来するので重みが変わらない が、縦方向では確率に由来するので重みが変化す る。これらの重ね合わせが、N=3のエネルギー 分布になる。

 $N \geq 3$ では積分範囲が台形(但し $t_{m1} \leq t_{m2}$)に 落ち着くので、N-1 回衝突後のエネルギー範囲 を $0 \leq t \leq 1$ とする変数 tを導入する。積分領域 を 3つに分けて積分をおこなう。







Nが1→2となる時のスペクトル変化の考え方は難しくないであろう。積分領域の4頂点 のうち2点が同じエネルギーに対応し、スペクトルが平坦なため積分領域の重みが同じなの で、矩形スペクトルから三角スペクトルに変化すると想像ができる。しかしながら、2→3 及びそれ以降では積分領域の4頂点が全て異なるエネルギーに対応しかつ積分領域の重みが 同じでない(スペクトルが平坦でないため)ので、三角スペクトルが丸みを帯びるであろう こと以上は想像ができない。

そこで、*N*-1 → *N* (*N* ≥ 3) では図42の下段の図に示す積分の考え方を用い、*N*-1 回目 のスペクトルの上限 *E*₀ と下限 $\alpha_d^{N-1} E_0$ がそれぞれ *t* = 0 と *t* = 1 に対応するような変数 *t* (*E*に比例する) を導入した。この時、*N*回目の上限 *E*₀ は変化しないが、下限 $\alpha_d^N E_0$ は $t_{mx} = (1 - \alpha_d^N)/(1 - \alpha_d^{N-1}) > 1$ となる。また*N*回目のスペクトルのエネルギー *E*の高さ= 確率は、積分領域において積分経路を縦方向にとって積分した結果なので、積分経路の始点 と終点をそれぞれ *t_{st}* と *t_{en}* する。計算の都合上、*t_{st}* と *t_{en}* が固定されるか否かにより積分 領域を 3 つに分ける。積分領域 1 では *t_{st}* は 0 に固定され *t_{en}* は 2 では *t_{st}* も *t_{en}* も変数、積分領域 3 では *t_{st}* は 2 で*t_{en}* は 1 に固定される。積分領域 1 での *t_{en}* の 最大を *t_{m1}、積分領域 3 での t_{st}* の最小を *t_{m2} とする。*

積分経路を縦方向にとって積分する意味は、N回目のスペクトルのエネルギー Eの確率は Eを含むような多数の矩形スペクトルの重み付き重ね合わせで与えられ、それぞれの矩形ス ペクトルの上限=N-1回目のスペクトルを構成する線スペクトルの高さ(確率)が重ね合わ せの際の重みとなっているからである。これら多数の矩形スペクトルの上限の最大が t_{st} に、上限の最小が t_{en} に対応する。

式 (193) から式 (195) で明らかなように、エネルギー変化 E_N / E_0 の対数が衝突回数に比例 する。計算には数式処理ソフトウエアを使用したが、この積分を代数的に行うことは不可能 なので、tに関する次の数列を用いて離散化を行った:

$$t_N(n) = \frac{1 - \alpha_d^{Nn/k}}{1 - \alpha_d^N}, \quad 0 \le n \le k$$
(207)

この数列は Nが大きい時でもピーク付近の計算の刻みが粗くならないよう試行錯誤した 結果で、エネルギー下限に向かって $(t \rightarrow 1)$ 離散化のサンプリングが急激に密になる。この 数列を用いて $0 \le t \le 1$ を k 個 (k は 400 としたが高性能パソコンならば更に大きな値でも よい)の区間に区切り、(t, $P_N(t)$)の数列を直線で結んで各世代のスペクトルを表現した。 曲線で結ぶと、繰り返し計算の際に小さな負の確率が現れて増幅してゆくことが試行錯誤の 結果判ったため、直線で結ぶ方法とした。式 (207)を導入した効果は、Nが小さい図43-1 では目立たないが、Nが大きい図43-2や Nが更に大きくピークの位置がエネルギー下限 に近い図43-3では、サンプリング密度が低下しない特徴が現れている。なお、この数式 処理ソフトウエアは、微分の不連続点を避けたり、その付近では自動でサンプリング密度を 変えたりと能力には定評があるため、精度の設定はデフォルトとした。 横軸を Eの対数とする時のスペクトル形状は、予想通り N=2 は左右対称の二等辺三角形 となり、N=3 は N=2 が丸みを帯びたものとなった。また、世代間の比較や解析を別ソフト で行うため、式 (207)の数列とは別に、 10^{-3} eV ~ 10^{7} eV の対数軸上に等間隔に 1000 個(対数 1 目盛あたり 100 個)のサンプリングポイントを設けて外部出力(単位は eV)とした:

$$E(n) = 10^{k+n/100}, \quad 1 \le n \le 100, \quad -3 \le k \le 7$$
 (208)

6x10⁻⁶ Log-normal PD for Ge=9 Ge=9 Ge=3 (dots) (dots) Log-normal PD (curve) Ge=2 for Ge=3 5 Probability normalized to be the are is one (curve) Ge=1 4 A=16 3 · 2 · Lower limit of spectrum 1 . for Ge=9 0 8899889988988 0000 8 10⁵ 10⁶ Energy [eV] 標的¹⁶O、 $E_0 = 1$ MeV の場合 ($1 \le N \le 9$) 図43-1 $4x10^{-3}$ Ge=70 (dots) and Probability normalized to be the area is one Log-normal PD (curve) 3 2 A=16 Ge=60 1 Ge=50 0 10^{6} 10⁰ 10³ Energy [eV] 10¹ 10² 10⁴ 10⁵

標的¹⁶O、*E*₀ = 1 MeV として *N*=160 まで求めた結果を、図43-1~図43-3に示す。

図43-2 標的¹⁶O、 $E_0 = 1$ MeV の場合 (N=30, 40, 50, 60, 70)


図43-3 標的 16 O、 $E_0 = 1$ MeV の場合(N=120, 130, 140, 150, 160)

数値計算の結果は 〇 の連なり、 $N \ge 3$ において対数正規分布(log-normal distribution)で フィッティングした確率密度(probability density)は曲線で示されている。Ge(generation) は N と同じ意味である。図から、横軸を Eの対数とする時のスペクトル形状は左右対称で あること、矩形→二等辺三角形を経て Nの増大に伴いすみやかに対数正規分布に限りなく 近づくこと(上限と下限があるので対数正規分布ではない)、Nの増大に伴いピークは狭く 高くなること、熱中性子(0.0253 eV)を過ぎてもエネルギーが低下することが判る。横軸は Eの対数なので重み付き平均値はピークの右側にある。縦軸は確率で単位は 1/eV(面積が 1)である。¹²C, ¹⁴N についても計算を行い、同じ傾向が現れることを確認した。

熱中性子領域を過ぎてもエネルギーが低下し続けるのは、格子の熱振動の影響(フォノン とのエネルギー授受)を考慮していないからである。格子の熱振動はフォノンとして量子 化⁷⁰され、直感的には次のように理解される:

- i) 温度が高い→フォノンの密度が高い;
- ii) 熱が伝わって温度が均一になる→フォノンの密度のむらが無くなる;
- iii) フォノンは固体中を音速で移動するが途中で散乱されて平均自由行程が生じる。

固体物理学では、フォノンを用いて固体の比熱を論ずる際、デバイ温度よりも温度が上か下かによってモル比熱の近似式が異なる。ThO₂のデバイ温度については 253K との文献値⁷¹がある。フォノンとのエネルギー授受を含めた計算は今後の報告書で取り扱いたい。

70. エネルギーは $\hbar\omega$, 運動量は $\hbar \vec{k}$ である ($\hbar = h/2\pi, \omega, \vec{k}$ はそれぞれディラック定数, 角振動数, 波数)。

^{71.} J. James ほか J. Chem. Thermodynamics, 3, pp.61-76 (1971). 化学便覧改訂 4 版の表 9.35 を見ると、室温の UO₂ のモル比熱は 63 J/(mol K)、ThO₂ は 55 J/(mol K) であり、純金属よりも値が大きいのは回転の自由度が加わる ためと思われる。UO₂ や MOX と ThO₂ のデバイ温度がそれほど乖離しているとは考え難い。

数値積分から得られた重み付き平均値(〇)とピーク位置(+)及びピーク巾(青線)の N依存性を図44に示す。式(195)による $\overline{E_N}$ (緑線)は、数値積分から得られた重み付き 平均値よりもやや小さい傾向があった。計算は、 $N = 136 \sim 138$ で一時的に不安定を生じた ものの、その後は安定していた。また $E_0 = 2$ MeV, 3 MeV についても計算を行い、同じ傾向 が現れることを確認した。



図44 標的¹⁶O、*E*₀ = 1 MeV の場合の重み付き平均値とピーク位置及びピーク巾

数値積分から得られた重み付き平均値が式 (195)の $\overline{E_N}$ と一致しない理由は、式 (195)の 導出過程でスペクトルを矩形としているためと思われる。次式で与える $\overline{E_N}$ の方が近い⁷²:

$$\overline{E_N} = \left[\frac{A^2 + 1}{(A+1)^2}\right]^N E_0$$
(209)

面積を1としているのでピーク高さの逆数としてピーク幅を定義すると、興味深いことに ピーク幅は Nが小さい時は重み付き平均値と離れているが、Nの増大と共に重み付き平均値 に接近し、ほぼ同じ値に収束することが判った(対数正規分布の一般的な性質という訳では ない)。ピークの幅と重み付き平均値が一致するとはどういうことなのか、十分に収束した 状態(N=70)について図45-1と図45-2を用いて示す。縦軸の単位は1/eVである。 図45-1は図43と同じく、横軸を Eの対数とする時のスペクトル形状で、左右対称かつ 対数正規分布に限りなく近い。一方、図45-2は横軸をリニアにして描いた結果である。 ピークの幅と重み付き平均値が一致するという意味は、エネルギーをリニアスケールにして 眺めると、スペクトル形状として理解できるようになる。

^{72.} 矩形スペクトルの重み付き平均値が上限値と下限値の算術平均で与えられ、面スペク トルが無限個の線スペクトルの集合と考えることから右式を導く。 $(1 + \alpha_d)/2 = \frac{A^2 + 1}{(A+1)^2}$



図45-1 ピークの幅と重み付き平均値が一致する例(¹⁶O, N=70):対数スケール



図45-2 ピークの幅と重み付き平均値が一致する例(¹⁶O, N=70):リニアスケール

平均自由行程(4.2節)で述べたように、スペクトルの主要部分である 0.01 MeV ~ 4 MeV の中性子の衝突回数は、通常の寸法の試料ならば零から 1 桁である。従って、4.3 節の連続 スペクトルに本節のエネルギースペクトルの遷移をあてはめる際は、図43-1の Nが1桁の場合について評価すれば十分と言える⁷³。

^{73.} 熱中性子領域までの減速は、含水率が十分に小さいならば無限大の大きさの試料でしか生じ得ないが、計算 方法の妥当性とスペクトルの遷移の傾向を確かめる目的で計算を行った。含水率が無視できない試料では、 水素原子との衝突で $\alpha_d = 0$ となるため、図42の積分計算の方法が異なる。

4.5 連続スペクトルの場合のエネルギースペクトルの変化

得られた知見を、4.3 節の連続エネルギースペクトル(線スペクトルの集合)に適用し、 試料或いは体系の中での散乱に伴うエネルギーの減衰により、スペクトルがどのように形状 を変えてゆくのかを考える。但し、前節の計算方法を連続スペクトルに適用することは困難 であったので、*N* = 1 は矩形、*N* = 2 は対数軸上での二等辺三角形、*N* = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 は 対数軸上での正規分布(対数正規分布)として、次の関数で置き換えた:

$$P_D^{N=1}(E) = \frac{c_1}{E_0} \chi_{[E_0 \alpha_d, E_0)}$$
(210)

$$P_D^{N=2}(E) = -\frac{c_2}{E_0} \log\left(\frac{E}{E_0 \alpha_d^2}\right) \chi_{[E_0 \alpha_d^2, E_0 \alpha_d)} + \frac{c_2}{E_0} \log\left(\frac{E}{E_0}\right) \chi_{[E_0 \alpha_d, E_0)}$$
(211)

$$P_D^{N\geq 3}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} E \,\sigma} \,\exp\left[-\frac{\left(-\mu + \log\frac{E \times 10^6}{E_0}\right)^2}{2 \,\sigma^2}\right]$$
(212)

但し
$$c_1 = \frac{1}{1 - \alpha_d}, \quad c_2 = \frac{2}{(1 - \alpha_d^2) \log \alpha_d}$$
 (213)

log は *e* を底とし、 $\chi_{[E_1, E_2)}$ は、 $E_1 \leq E < E_2$ で 1、それ以外の区間では 0 となるような ステップ関数である。 α_d は式 (197)、エネルギー *E*, E_0 の単位は eV である。 μ , σ (¹⁶O の 場合) は表 1 4 で与えられる。

Ν	σ	μ
3	0.133595	13.4545
4	0.150189	13.3348
5	0.167103	13.2148
6	0.182149	13.0948
7	0.195810	12.9749
8	0.209071	12.8549
9	0.220973	12.7350

表14 μ, σ (¹⁶O の場合)の値

表14の値は、対数正規分布を式 (212) で表す時、ピーク位置とピーク高さ及び重み付き 平均がそれぞれ、 $e^{\mu-\sigma^2}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ 、 $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ と表されるので、ピーク高さの逆数として 定義したピーク幅と重み付き平均の関係(図44の3 ≤ N ≤ 9 での両者の比を数値化した) から σ を求め、次にピーク位置から μ を求める方法で計算した。 c_1, c_2 については、式(197) や図42から面積を1として求めた。近似式で求めたスペクトルを図46に示す。



図46 近似式で求めた $1 \le N \le 9$ のスペクトル(上: $E_0 = 1$ MeV、下: $E_0 = 3$ MeV)

スペクトルの上端と下端を決めている簡単な原理(図42)から、対数軸で見る場合は E_0 が変化しても形状は変わらなが、高さは底辺の長さが変化するので変化する(図46の 場合は底辺の長さが3倍で高さが1/3倍)。重み付き平均値、ピーク位置、ピーク巾等は E_0 に比例する。スペクトルの上限はいずれの分布も E_0 であるが、 E_0 での確率は零なので 矩形の右辺は描いていない。

連続エネルギースペクトルにこの近似式を適用するため、図35の近似関数の高さを 1/1.7 倍し(面積を1とするため)、適用範囲を0.01 MeV~6 MeV(0.01 MeV 未満の立ち 上がりの不確かさの影響の大きい範囲を除き、面積の99%に相当する範囲)として、この エネルギー範囲(単位 eV)を次の式⁷⁴で離散化(対数軸上で等間隔)した:

$$E(j) = 10^{4+j/100}, \quad 0 \le j \le 278$$
(214)

離散化したエネルギースペクトルの各々に式 (210) を適用し、これらを重ね合わせ、数式 処理ソフトウエア内部の内挿関数で表すことにより、N=1の連続エネルギースペクトルの 近似関数が得られる。式 (211) を適用すれば N=2の連続エネルギースペクトルの近似関数 が、式 (212) を適用すれば $N \ge 3$ の連続エネルギースペクトルの近似関数が得られる。但し この関数は普通の式の形に外部に書き出すことはできない。

^{74. 6} MeV = $6 \times 10^{6} \text{ eV} = 10^{\log_{10} 6} \times 10^{6} \text{ eV} = 10^{6.78} \text{ eV}$

 $0 \le N \le 9$ について求めた結果を図47に示す。図はあくまで全ての中性子が ¹⁶O と N回 衝突する場合であり、平均自由行程から見れば、1回衝突する中性子が数割、2回衝突する 中性子がその数割 ... となるので、これまで仮定してきたように、水分の影響が無視し得る 場合、このような大きなエネルギーの減衰が生じることはない。



図47 全ての中性子が¹⁶O と N 回衝突する場合の連続エネルギースペクトルの遷移 (上:リニア軸、下:対数軸)

いずれのスペクトルも、エネルギーを eV として面積が 1 になるよう規格化した。リニア 軸は図35(上)及び図38の Pin #2 と比較、対数軸は図35(下)と比較して遷移の様子 が判るようにした。重み付きの平均エネルギーの遷移を表15に示す。

N = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.97	1.76	1.58	1.42	1.28	1.15	1.03	0.93	0.84	0.75

表15 図47の重み付きの平均エネルギー(MeV)の遷移

試料又は体系の形状・寸法と平均自由行程との関係に依存するが、中性子の 20% が ¹⁶O と衝突するならば、1回衝突する確率が 20%、2回衝突する確率が 4% … となるので N=0 のスペクトル + N=1のスペクトルの 0.2 倍 + N=2のスペクトルの 0.04 倍 … と重ね合わせ ると実際に近い連続エネルギースペクトルの遷移が得られる。結果を図48に示す。



図48 中性子の20% 又は30%が¹⁶Oと衝突する場合の連続エネルギースペクトルの遷移 (上:リニア軸、下:対数軸)

重み付きの平均エネルギーの遷移は、20%の時に 1.97 MeV \rightarrow 1.92 MeV、30%の時に 1.97 MeV \rightarrow 1.89 MeV と大変小さかった。図38b)の横軸はピン本数であるが、中性子が ¹⁶O と衝突する確率の増加でもあり、重み付きの平均エネルギーの遷移は実際、この程度に 留まる。非弾性散乱について考慮しなかった理由は 4.4 節の最初に述べた。次章では、ここ で 20%, 30% と仮定した衝突確率を正確に求めるため、試料内部の任意の点から表面の任意 の点までの平均距離という新しい概念を提案し、全断面積に対する核分裂反応断面積の比と この概念とを用いて漏れ増倍率を計算する。

5. 非モンテカルロ法による漏れ増倍率の評価

第3章で述べた多重相関分布式には、漏れ増倍率 M_L が主たる変数として含まれている。 この変数は、 $\overline{\nu_{sm}}$, $\overline{\nu_{im}}$ や $\overline{\eta_{sm}}$, $\overline{\eta_{im}}$ のように核的データから求められる訳ではなく、 α_r の ように式 (77) によって試料の組成から求められる訳でもなく、1 個の中性子が試料又は体系 から漏れる確率 l、漏れずに誘導核分裂反応を生じる確率 p、この時に生じる中性子数 $\overline{\nu_{i1}}$ と、式 (91) により結びつけられている。漏れ増倍率は、実際に試料を測定し式 (76) を解いて 求めることもできるが、MCNP を用いて測定前に値を予想することもできる。実際、確率 pと確率 l については、試料又は体系の形状・寸法・密度、元素と同位体の組成比、中性子の エネルギースペクトルに応じてどのように求めればよいのか、MCNP 以外の方法が知られて いなかった。しかしながら MCNP は三次元での多数の試行の結果であり、巨視的な物理的 描像或いは数理を必要としない。理解としては微視的な相互作用の積み上げに留まる。この 章では、試料の内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離 \overline{L} という新たな概念を 用いれば、解くべき問題が 1 次元に帰着することを説明し、球と円柱の場合について \overline{L} を 導き、その意外な特徴を説明した後、平均自由行程と \overline{L} を用いて散乱の都度漏れる確率を 求める。続いて、核分裂反応断面積の全断面積に対する比を断面積と前章のスペクトルから 求める。最後に M_L を評価し、過去の実測値と比較する。

5.1 球と円柱の試料内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離

Los Alamos の文献⁶⁸ Neutron Interactions with Matter には、試料に入射した中性子が試料内 で散乱された後、試料外に漏れる様子が、モンテカルロ法を用いて図49のように描かれて いる。試料の寸法は書かれていないが、平均自由行程からすると小さな試料ではない。



calculated using a Monte Carlo technique.

図49 試料に入射した中性子が試料内で散乱される様子(文献 68 より転載)

我々が測定対象とするプルトニウムを含む試料の場合、中性子は試料内で発生するという 違いはあるが、試料内で散乱され試料外に漏れる様子はこの図と変わらず、散乱される方向 にせよ走っている間に衝突する確率にせよ、本質的にランダムな現象である。 図49は、観測者の視点から見た散乱の様子であるが、視点を中性子に置いてみることも できる。この場合、散乱によって試料の方がくるくると向きを変えているだけで、中性子は 表面の存在を知らずに無限大の試料中を走っており、たまたま表面に達した最後のランだけ を考えればよい。散乱と散乱の間或いは散乱と漏れとの間、中性子が散乱されるのか或いは 走り続けられるか、物体は3次元でも、解くべき問題は1次元にすぎない。また、この間の エネルギーの減衰と平均自由行程の変化は、前章で示したようにごく小さい。



図50 厚いターゲットに対する散乱の基礎式

散乱される方向は、A=16 (¹⁶O) ならば重心座標系ではほぼ等方的、観測者座標系でも 式 (206) から前方散乱の程度は $\bar{\theta} = 87.6^{\circ}$ であるから等方的と見做して差し支えない。従って 中性子が走り始めた場所から表面までの距離 x がわかれば、厚いターゲットに対する散乱の 基礎の1次元の公式 $I(x) = I(0) e^{-x}$ が適用できる(図50)。しかしながら、走り始めた 場所も試料の向きも散乱の都度に異なるので xが決まらない。

そこで「物体の内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離」を考える。走り始めた場所も試料の向きも散乱の都度に異なるが、それらは特定の場所や特定の方向に偏らない(:・中性子は表面がどこにあるかを知らないので漏れるまでは無限大の物体と同じ)ので、平均自由行程 *l_m*(*E*)とこの平均距離を用い、散乱の都度、中性子が漏れる確率を次式によって求めることができる:

$$P_E\left(E=E'\right) = \exp\left[-\frac{r\,\overline{\overline{L}}}{l_m\left(E'\right)}\right] \tag{215}$$

左辺の確率表記は式 (108) と同じで Eが E'に一致する確率、右辺の \overline{L} は半径 1 の球又は 半径 1 で長さ h の円柱の場合の平均距離、右辺の rはこの単位球又は単位円柱に対する試料 寸法の倍率である。角柱の場合、同体積の円柱と同じと見做して大差ないであろう⁷⁵。

^{75.} 平均距離の計算が思ったより複雑であったため、今後の報告書で取り扱いたい。

このように考えると、自発核分裂反応及び(α ,n)反応で生じた中性子が、試料中で N回 散乱され N+1回目には散乱されずに試料外に漏れる確率は単純計算⁷⁶ で $(1 - P_E)^N P_E$ と なる。 $0 \le N \le \infty$ で総和をとれば、試料外に漏れる確率は 1 となる(いつか必ず漏れる):

$$\sum_{N=0}^{\infty} (1 - P_E)^N P_E = \frac{1}{1 - (1 - P_E)} P_E = 1$$
(216)

半径1の球の場合、中性子が走るパスと球の中心を含む平面を考える。散乱の都度、この 平面は変わるが、球の表面とこの平面の交線が大円で、走り始める点が半径上のどこかであ ることは変わらない。従って、平均距離を考えるには、半径上の任意の点 *P_i*(内部の任意 の点)から円周上の任意の点 *P_s*(表面の任意の点)までの距離 *L* の平均を考えればよい。



図51 球の場合の座標系(左側は誤りで右側は正しい)と考えるべき距離 L

図51には2種類の座標系を示した。どちらでもLの二重積分($x \ge \theta = \nabla t = \theta = 0$) ができるが左側は誤りである。散乱は等方的であり、 P_i が表面に近ければ P_s の密度はその 付近が高くなる。左側の座標系のように表面のどこでも P_s の密度が同じではない。 P_s は P_i を原点とする球座標で考えなければならない。一方、 P_i は半径方向の直線座標で考えな ければならない"。Lの平均 \overline{L} は次式で与えられる(対称性から $0 \le \theta \le \pi$ とする):

$$\overline{\overline{L}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi L \, d\theta \, dx \tag{217}$$

$$L = -x\cos\theta + \sqrt{1 - x^2\sin^2\theta} \quad \leftarrow 右側の図の場合 \tag{218}$$

^{76.} 吸収反応(核分裂反応を含む)の確率や中性子の半減期を無視しているが、平均自由行程は試料寸法と同等 かそれ以上なので漏れる確率は1に近く、散乱される場合でも¹⁶Oは6MeV以下では弾性散乱、¹⁶O以外で も全断面積の概ね3/4以上を弾性散乱と非弾性散乱が占めるので、吸収反応の確率は小さい。

^{77.} 試料の密度が均一と仮定する。

式 (216) の θ に関する積分には解析解が存在する⁷⁸が、xに関する積分も考えると θ も含めて素直に数値積分するのが良い。ここで \overline{L} ではなく $\overline{\overline{L}}$ としたのは、次の円柱の場合に \overline{L} に別の意味を与えるためである。結果は次の値になる:

$$\overline{\overline{L}} = 0.9014 \tag{219}$$

参考までに、図51の左側の座標系で式(217)を求める(式(218)が異なる)と、次の値が 得られる。これは誤りであるが、座標系の取り方でこのような大きな差が生じる:

 $\overline{\overline{L}} = 1.087 \tag{220}$

続いて、半径 1 で長さ h の円柱を考える。 P_i をまず底面の半径上に限定し、 P_s が円柱側 面にある場合と P_s が円柱上面にある場合を考える。図52に、座標系と導出に用いる変数 の定義を示す。 $x \ge \theta$ は球の場合と同じであるが、 ϕ は $\theta = \pi$ 方向の Lの垂直角度とし、そ れ以外の方向の θ に対しては $\phi_{x\phi\theta}$ (x, θ, ϕ の関数となる)を考える。具体的に想像するに は、次のように考えるとよい:

i) 最初に $x \ge \phi$ を固定して θ を動かす ($0 \le \theta \le \pi$)。

ii) 次にxを固定して ϕ を動かす。

Lはφに対し連続的に変化するが側面と上面の境界では折れ線⁷⁹となる。

iii) 最後に xを動かす $(0 \le x \le 1)$ 。

ここで $\phi_{x\phi\theta}$ を定義するのは、 $x \ge \phi$ を固定して θ を動かす時に、Lによって形作られる ホーンと円柱との交線が、楕円ではなく円になるようにするためである。 P_i が底面の半径 上に限定されているので、Lの三重積分(x, ϕ, θ に関して)の結果はまだ \overline{L} ではなく、 \overline{L} と 表記する。この P_i を含む底面を、円柱内で高さ方向に直線座標によって移動させて積分を 行えば \overline{L} が得られる。

78. $\int_{0}^{\pi} L d\theta = E(x^{2}) + \sqrt{1 - x^{2}} E\left(\frac{x^{2}}{-1 + x^{2}}\right) \quad \text{ここで } E(x) \text{ は完全楕円積分である}.$ 79. 側面では $0 \le \phi \le \tan^{-1} \frac{h}{1 + x}$ 、上面では $\tan^{-1} \frac{h}{1 + x} \le \phi \le 0$ 、それぞれの ϕ に異なる L i x定義される。 数式処理ソフトの入門書には意外と出ていないため、このような折れ点を持つ関数の定義を以下に示す: $L[\theta_{-}, \phi_{-}, x_{-}, h_{-}] := \text{Sqrt}[(1 + x)^{2} \tan[\phi]^{2} + 1 + x^{2} (1 - 2 \sin[\theta]^{2}) - 2 x \cos[\theta] \sqrt{1 - x^{2} \sin[\theta]^{2}}] /;$ $0 \le x \le 1 /; 0 \le \phi \le \arctan[\frac{h}{1 + x}] /; 0 \le \theta \le \pi$ $L[\theta_{-}, \phi_{-}, x_{-}, h_{-}] := h \text{ Sqrt}[1 + \frac{1 + x^{2} (1 - 2 \sin[\theta]^{2}) - 2 x \cos[\theta] \sqrt{1 - x^{2} \sin[\theta]^{2}}}{(1 + x)^{2} \tan[\phi]^{2}}] /;$ $0 \le x \le 1 /; \operatorname{ArcTan}[\frac{h}{1 + x}] \le \phi \le \frac{\pi}{2} /; 0 \le \theta \le \pi$





注意:z は独立変数ではなく補助変数である。

$$L_{x\theta}^2 \sin^2 \theta + (L_{x\theta} \cos \theta + x)^2 = 1$$

 $\rightarrow L_{x\theta} = -x \cos \theta + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}$
 $L = \sqrt{(1+x)^2 \tan^2 \phi + L_{x\theta}^2}$
 $0 \le \phi \le \tan^{-1} \frac{h}{1+x}$
 $\phi_{x\phi\theta} = \cos^{-1} \frac{L_{x\theta}}{L} = \tan^{-1} \frac{(1+x) \tan \phi}{L_{x\theta}}$

この少し複雑な座標系を理解するには次のように考えるとよい: ・まず $x \ge \phi$ を固定して $\theta \ge 0$ から π まで動かす; ・次に x を固定して $\phi \ge 0$ から $\tan^{-1} \frac{h}{1+x}$ まで動かす; ・最後に $x \ge 0$ から 1 まで動かす。

where $L = \sqrt{(1+x)^2 \tan^2 \phi + 1 + x^2 (1-2\sin^2 \theta) - 2x\cos\theta \sqrt{1-x^2\sin^2 \theta}}$



図52 円柱の場合の座標系(上側は円柱側面で下側は円柱上面)と考えるべき距離 L



図53 円柱上面に関する補足説明

円柱上面の $L_{x\phi\theta}$ は、 $L_{x\theta}$ との比が θ に依存しないよう定められた。補足説明を図53に示す。この比は内円の半径 r (式 (215) の r とは異なる)と一致するほか、このように定めた $L_{x\phi\theta}$ は正しく円を描く。図53にはその証明も含む。

円柱側面に関する積分は h=0 で極限を持ち、図52の式では計算できないが、球の場合 と同じであるから $\overline{L} = 0.9014$ になる。また円柱上面に関する積分は(自明だが)h=0 で $\overline{L} = 0$ になる。極限について補足しておくと、 $\phi & \epsilon & \theta = 0$ 方向の Lの垂直角度とした場合 (球座標としてはむしろ自然であり筆者も最初はこうしていた)、図53の $h \cot \phi/(1+x)$ は $h \cot \phi/(1-x)$ に置き換えられる。しかしながらこの場合、x=1 で極限が生じ、x=1 で 内円が存在し想像できるにもかかわらず、内円が定義できなくなる。 $\phi & \epsilon & \theta = \pi$ 方向の Lの 垂直角度とすることにより、この極限を避けることができた。

得られた \overline{L} を積分して $\overline{\overline{L}}$ を得るには以下の積分を行えばよい:

$$\overline{\overline{L}} = \int_0^h \frac{\overline{L}(x) + \overline{L}(h-x)}{2} \, dx \tag{221}$$

2で除しているのは平均という意味ではない。図52の底面を円柱の断面と考え、断面上の任意の点を試料内部の任意の点と考えるので、断面から上側に中性子が飛ぶ確率 1/2 と、下側に中性子が飛ぶ確率 1/2 を、それぞれ $\overline{L}(x)$, $\overline{L}(h-x)$ に乗じるという意味である。

平均距離 L が h, x, θ, ϕ の関数としてどのように変化するのか、L が ϕ に対し側面と上面の 境界で折れ線になる様子がどのようなものか、 $h=1, 2, 0 \le x \le 1$ の場合について図54に示 す。x=1では $0 \le \theta \le \pi/2$ で L が変化しない特徴がある。



図54 平均距離 $L o h, x, \theta, \phi$ に対する変化

得られた \overline{L} は次式でフィッティング (log は $e \& e \& b \& 0 \le h \le 50$) できた。この曲線は $y = a \log(1 + bx)$ に非常に近い形で、右辺第二項によって hが小さい場所での僅かな膨らみ を持たせている。数値計算結果からの外れは h=0.05 で 0.0012 (2.3%) 、 $h \ge 0.1$ では 0.5% 未満であった。hに対する \overline{L} の 変化を図55、フィッティング式の \overline{L} からの外れを図56 に示す:



 $\overline{\overline{L}} = 0.9511 \log(1 + 0.9280 \, h^{1.006}) + 0.08982 \, \exp(-4.857 \, h) \, \sinh(3.984 \, h) \tag{222}$

図56 フィッティング式の \overline{L} からの外れ(h > 5では \overline{L} に対する割合は無視し得る)

 $\overline{L} = 0.9014$ (球と同じ)になるような h を求めてみると h = 1.616 が得られる。この円柱 の体積は 1.616 π であり、単位球の体積 1.333 π の 2 割増になる。同じ体積ならば、表面積の 小さい形の方が \overline{L} が小さくなるので、この結果は合理的と考えられた。 ところで、体積一定で円盤状から鉛筆状に形状を変化させた時、円盤も鉛筆も極限(厚み が零又は長さが無限大)では実平均距離 $r \overline{L}$ が零になるので、 $r \overline{L}$ が最大になる形状が存在 する筈である。例としてプルトニウム転換技術開発施設の粉末缶を仮定する。粉末缶の内径 は 12 cm(半径 6 cm)、標準的な充填量は 2.5 kg(1 kgPu + 1 kgU)で嵩密度は 2.2 g/cm³ で あるから、粉末の体積は 1136 cm³、高さは 10 cm となる(実際には放熱用フィンがあるので もう少し高いがここではフィンの影響は考慮しない)。この半径 r=6 cm で高さ rh=10 cm の状態、すなわち (r,h) = (6,10/6)を基準とする。式 (222) に h=10/6を代入して $\overline{L}=0.901$, 実平均距離 $r \overline{L}=5.41$ cm を得る。

体積一定で $r \rightarrow r_c$, $h \rightarrow h_c$ に変化させる時、 $h_c = (r_c/r)^{-3}h$ の関係があるので、変化後の $\overline{L_c}$ は式 (222)の $h \epsilon h_c$ で置換すれば得られる。変化後の実平均距離 $r_c \overline{L_c}$ は r, r_c, h の 関数となる。r = 6、 $0 \le r_c \le 20$ 、 $0.1 \le h \le 2$ における $r_c \overline{L_c}$ の変化を図57に示す。 $\Delta h = 0.1$ として $0.1 \le h \le 2$ を離散的に与えているので、h = 10/6 は上から4本目と5本目の曲線の間 になる。 h_c をこの図から直接読むことはできない。



図57 r=6 cm に固定して r_c を変化させた時の実平均距離 $r_c \overline{\overline{L_c}}$ の変化

図57で、右に向かうと形状はより円盤的、左に向かうと形状はより鉛筆的である。左に向かうと h_c は小さくなり、プロットの左端が h_c の上限(h = 50)に対応している。ピーク位置には印が付けてあり、これより右側でより円盤的になるほど実平均距離が短くなるのは、変形による拡大が二次元的で、試料中に存在する「長い距離」が急速に失われるためと理解することができる。同じ体積ならば、変形による拡大が一次元的で、より鉛筆的な方が立体角を考えると「長い距離」をより多く含む。しかしながら針のように細くなると「長い距離」は再び失われる(ピーク位置よりも左側)。

予想外だったのは、ピーク位置に対する h_c が非常に大きかったことである。ピーク位置 では r_c = 2.76, h_c = 17.1 となりクレヨンの形状に近い。試料内で発生する中性子が試料内で 散乱・吸収を起こす確率は、実平均距離が最大になるこの条件で最大となるから、中性子の 漏れは最小になる。漏れが最小になるのは疑いもなく球だと思われているが、平均自由行程 が試料寸法と同程度かそれ以上の場合、そう簡単ではないことが判る。 基準とした (r,h) = (6,10/6) について、 r_c を変化させた時の具体的な形状変化を図58に 示す。先の「長い距離」がこの図から感覚的に把握可能なのではないかと思う。



図58 r=6 cm に固定して r_c を変化させた時の具体的な形状変化

この中で実平均距離が最も長く、試料中で散乱・吸収を起こす確率が最も高いのは上から 2番目のケース($r_c \overline{L_c} = 7.46 \text{ cm}$)であって、単位体積あたりの表面積が最も小さい上から 3番目のケース($r \overline{L} = 5.42 \text{ cm}$)ではなかった。嵩密度 2.2 g/cm³、平均自由行程 20.8 cm の 場合、上から2番目のケースでは式 (215)から $P_E = 0.70$ となる。中性子が N 回散乱した後 に漏れる確率は単純計算で $(1 - P_E)^N P_E$ 、 N = 0, 1, 2, 3の総和は 0.992 となるから、中性子 の 99.2% は散乱なし又は散乱 3 回以内に漏れることが判る。上から 3 番目のケースの場合 $P_E = 0.77$ となり、中性子の 99.7% が散乱なし又は散乱 3 回以内に漏れることが判る。散乱 の都度漏れる確率 P_E と式 (91) の l の関係については 5.4 節で説明する。 なお、実平均距離 $r_c \overline{L_c}$ が最大となる形状 $h_c = 17.1$ は、物理的な意味合いを前述のように 捉えるならば、初期条件 (r,h) = (6,10/6) にかかわらず一定なのではないかと期待される。 ここまで $r_c \overline{L_c}$ を r, r_c, h の関数と考えてきたが、 $r_c \overline{L_c}$ が最大になれば $(r_c/r) \overline{L_c}$ も最大に なり、 $\overline{L_c}$ は式 (222) の hを $h_c = (r_c/r)^{-3}h$ で置換して得られるので、初期条件が変わって も変数は r_c/r と hの2つに還元される。数値計算を行ってみると、初期条件にかかわらず 確かに h_c は 17.1 で一定であった。数式処理ソフトウエア *Mathematica* による処理例を脚注³⁰ に示す。試料中で散乱・吸収を起こす確率が最も高くなるのは、半径 1 長さ 17.1 の円柱又は その相似形であり、平均距離は 2.70 又はその半径倍であることが判った。

5.2 核分裂反応断面積の全断面積に対する比

誘導核分裂反応を生じる確率 p は、漏れない確率に核分裂反応断面積 (n,f) の全断面積 (n,tot) に対する比 r_{f/t} を乗じることにより得ることができる。図26-1~図26-11 の場合と同じく、断面積のデータは BNLの NNDC が提供する ENDF プロットサービスから 得られるデータを利用した。現実的な時間内で計算できるようエネルギー範囲を 0.01 MeV ~ 20 MeV (10 MeV で十分だが念のため)に絞り、平均自由行程を求めた時のような圧縮は 行わなかった。但し、重複データ (同じ又は極めて接近したエネルギーで断面積が複数ある もの)を取り除く処理を行い、各点を直線で結んでエネルギーの関数として表現した。数式 処理ソフトウエアによる処理の例を脚注⁸¹に示す。

80. (*rR=rc/r*) $rRhc[rR_{, h_{]}} := rR(0.9511 log[1+0.9280 x^{1.006}] + 0.08982 Exp[-4.857 x] Sinh[3.984 x] /. x \rightarrow rR^{-3} h)$ $(\star First derivative of the above. The result is difficult to solve analytically <math display="inline">\star)$ DrRhc[rR_, h_] := D[rRhc[rR, h], rR]; Expand[DrRhc[rR, h]] $2.66375 \ h \ \left(\frac{h}{\pi R^3}\right)^{0.006} \qquad \qquad 1.07353 \ e^{-\frac{4.857 \ h}{\pi R^3}} \ h \ Cosh \left[\frac{3.984 \ h}{\pi R^3}\right]$ $\left(1 + 0.928 \left(\frac{h}{r^{3}}\right)^{1.006}\right) rR^{3}$ rR^3 $0.9511 \log \left[1 + 0.928 \left(\frac{h}{2\pi^3}\right)^{1.006}\right] + 0.08982 e^{-\frac{4.857h}{2R^2}} \sinh \left[\frac{3.984 h}{2\pi^3}\right] + \frac{1.30877 e^{-\frac{4.857h}{2R^2}} h \sinh \left[\frac{3.984 h}{R^3}\right]^{1.006} + \frac{1.30877 e^{-\frac{4.857h}{2R^3}} h \sinh \left[\frac{3.884 h}{R^3}\right]^{1.006} + \frac{1.30878 e^{-\frac{4.857h}{2R^3}} h \sinh \left[\frac{3.884 h}{R^3}\right]^{1$ (*Solve numerically the points $(h, \frac{rc}{r})$ corresponding the maximum of $rc\overline{Lc}$ *) $\texttt{RLbarsMaxPoints = Table[{0.01 n, rR /. FindRoot[Evaluate[DrRhc[rR, h] /. h \rightarrow 0.01 n] = 0, {rR, 0.1}]}, {n, 5, 500}];$ AccountingForm[RLbarsMaxPoints, 4]; (*Confirm $hc = \left(\frac{rc}{r}\right)^{-3}h$ of the above table*) Short Table RLbarsMaxPoints [[n]] [[2]]⁻³ RLbarsMaxPoints [[n]] [[1]], {n, 1, 496}] $\{17.1096, 17.1096, \ll 492 \gg, 17.1096, 17.1096\}$ 8] U235TOTData = Take[First[Import[ToString[U235TOTLoc]]], {U235TOTL + 2, U235TOTH + 2}]; {U235TOTLen = Length [U235TOTData], First [Take [U235TOTData, 1]], First [Take [U235TOTData, -1]]} $\{494, \{0.01, 15.5462\}, \{20., 6.16968\}\}$ {L1 = Length[Transpose[U235TOTData][[1]]], L2 = Length[Union[Transpose[U235TOTData][[1]]]], L1 - L2} $\{494, 491, 3\}$ U235TOTDataDif = Table[k, {k, 1, Length[U235T0TData] - 1}]]; U235T0TDataDifDup = Select[U235T0TDataDif, #[[2]] ≤ 0 &] $\{\{97, 0., -0.0003\}, \{418, 0., -0.00002\}, \{485, 0., 0.\}\}$ U235TOTDataR = Delete[U235TOTData, Partition[Transpose[U235TOTDataDifDup][[1]], 1]]; U235TOTIF = Interpolation [U235TOTDataR, InterpolationOrder \rightarrow 1];

得られた核種毎の核分裂反応断面積の全断面積に対する比を図59に示す。1 MeV の前後 からどの核種も(いわゆる核分裂性核種以外も)この比が立ち上がり、最も大きい²³⁸Pu と 最も小さい²³⁸U でも数倍の違いしかなくなる。いずれの核種も6 MeV 付近で再び立ち上が るのは、(n,f)に 2nd-chance 核分裂反応(核分裂直前の複合核から中性子が1 個放出された 後に核分裂が起こる)が含まれるためである。含まない場合を(n,f')とする例もある。



図59 核種毎の核分裂反応断面積の全断面積に対する比

表7の組成比に従って、核種毎の核分裂反応断面積の全断面積に対する比から、ウラン・ プルトニウム混合二酸化物としての当該比を求める式は次のようになる。ここで*i*は各核種 (O:0,U:1~3,Np:4,Pu:5~9,Am:10) に対応する index で $0 \le i \le 10$ 、*Pu/U*は Pu の U に対する原子個数比だが重量比と同じと見做して 1、*ri* は核種 *i* の U 又は Pu に対する原子 個数比だが重量比と同じと見做して表7 (Np,Am は Pu に対する比で与えている)の値の 1/100、*O/M* は O の U+Np+Pu+Am に対する原子個数比で 2 と見做した⁸²。(*n*,tot)_i, (*n*, *f*)_i はそれぞれ核種 *i* の全断面積と核分裂反応断面積であり、記法としては省略しているがエネ ルギーの関数である:

全断面積の合成:

$$(n, tot)_{MOX} = \frac{O/M}{1 + O/M} (n, tot)_0 + \frac{1}{1 + O/M} \frac{1}{1 + Pu/U (1 + r_4 + r_{10})} \left[\sum_{i=1}^3 r_i (n, tot)_i + Pu/U \sum_{i=4}^{10} r_i (n, tot)_i \right]$$
(223)

各係数の総和が1になることの検証:

$$\frac{O/M}{1+O/M} + \frac{1}{1+O/M} \frac{\sum_{i=1}^{3} r_i + Pu/U \sum_{i=4}^{10} r_i}{1+Pu/U (1+r_4+r_{10})} = 1$$
(224)

核分裂反応断面積の全断面積に対する比:

$$\frac{(n,f)_{MOX}}{(n,tot)_{MOX}} = \frac{1}{(n,tot)_{MOX}} \sum_{i=1}^{10} R(n,f)_i$$
(225)

U ICOVIC
$$R(n,f)_i = \frac{1}{1 + O/M} \frac{r_i}{1 + Pu/U(1 + r_4 + r_{10})} \times (n,f)_i$$
(226)

Np, Pu, Am について
$$R(n, f)_i = \frac{1}{1 + O/M} \frac{Pu/U \times r_i}{1 + Pu/U (1 + r_4 + r_{10})} \times (n, f)_i$$
 (227)

得られたウラン・プルトニウム混合二酸化物の核分裂反応断面積の全断面積に対する比を 図60に示す。主な核種の寄与は縦軸をリニアとしたが、各核種の寄与は縦軸を対数として 寄与の小さい部分も核種ごとの差が見えるようにした。この比は核種によって数倍の差しか ない(図59)ので組成比の寄与が大きく、2MeV以上では²³⁸Uが第二位となる。

^{82.} Am は二三酸化物だが組成比がが小さいので、全体としては二酸化物と見做した。



図60 ウラン・プルトニウム混合二酸化物の核分裂反応断面積の全断面積に対する比

式 (225) ~ (227) は (n, γ) 反応に対しても利用することができる:

$$\frac{(n,\gamma)_{MOX}}{(n,tot)_{MOX}} = \frac{1}{(n,tot)_{MOX}} \sum_{i=0}^{10} R(n,\gamma)_i$$
(228)

O について
$$R(n,\gamma)_0 = \frac{O/M}{1+O/M} \times (n,\gamma)_0$$
(229)

U ICOVIC
$$R(n,\gamma)_i = \frac{1}{1 + O/M} \frac{r_i}{1 + Pu/U(1 + r_4 + r_{10})} \times (n,\gamma)_i$$
(230)

Np, Pu, Am
$$\mathcal{KOVVC}$$
 $R(n,\gamma)_i = \frac{1}{1+O/M} \frac{Pu/U \times r_i}{1+Pu/U(1+r_4+r_{10})} \times (n,\gamma)_i$ (231)

図59に対応する核種毎の(n,γ)反応断面積の全断面積に対する比を図61に⁸³、図60 に対応する混合二酸化物の(n,γ)反応断面積の全断面積に対する比を図62に示す。



^{83.} 核分裂反応断面積の全断面積に対する比ほど重要ではないため、レイアウト上、やむを得ず縮小している。



図62 ウラン・プルトニウム混合二酸化物の(n, γ)反応断面積の全断面積に対する比

5.3 組成及びエネルギースペクトルで重み付けた比の積分値

ウラン・プルトニウム混合二酸化物の核分裂反応断面積の全断面積に対する比を、前章で 求めた中性子のスペクトルにより重みづけすると図63が得られ、積分値(面積)として $r_{f/t} = 0.0875$ (8.75%)が得られた。1 MeV 以上の寄与が大きいことを判り易くするため、 縦軸・横軸ともリニアにした場合も示した。



図63 ウラン・プルトニウム混合二酸化物の核分裂反応断面積の全断面積に対する比 (重み付け後、主な核種のみ)

図26について述べた定性的傾向からも、1 MeV 以上に関しては、1/3 (MOX 中の金属 割合)×1/2 (金属中 Np, Pu, Am 割合)×1/2 (el と non が拮抗)×1/2 (inl と f が拮抗) = 4% と核分裂反応断面積の全断面積に対する比を概略ながら計算できるので、この積分値は 合理的と考えられた。また (n, γ)反応断面積の全断面積に対する比の場合の結果を図64 に示す。積分値 (面積) は $r_{c/t}$ = 0.0043 (0.43%) で、 $r_{f/t}$ の 4.9% であった。



図64 ウラン・プルトニウム混合二酸化物の(n,γ)反応断面積の全断面積に対する比 (重み付け後、主な核種のみ)

先の p と同様、 p_c は 漏れない確率に (n,γ) 断面積の全断面積に対する比 $r_{c/t}$ を乗じる ことにより得られる。 $r_{c/t}$ を $r_{f/t}$ で除した結果、則ち p_c/p が 4.9% であるという結果は、 Los Alamos の文献⁶⁹ における仮定(核分裂反応に比べて中性子捕獲反応の確率は小さい)を 裏付ける。もし M_L の不確かさが現在の水準で十分ならば、式 (45) 又は式 (91) において p_c を考慮する必要性は乏しい。しかしながら今後、高速中性子の検出器^{70),71),72),73),74)} と不確かさ の小さい多重相関計数技術の開発により、従来とは異なる自発核分裂性核種を含む高質量の ウラン・プルトニウム混合二酸化物に測定の対象を拡大する場合⁸⁴、 M_L の不確かさを低減 しなければならないと考えられるので、この結果は、無視し得ると言える程小さくはない。 この場合、測定対象の組成比を用いて $r_{c/t}$, $r_{f/t}$ を評価し、式 (45) 又は式 (91) において p_c を 考慮することになる。

^{84.} 現在の同時計数用 NDA では中性子を熱化して検出感度を高めている(Pu 廃棄物を測定するため)が、廃止 措置に伴う計量管理に用いる NDA では、中性子の熱化を抑えて *τ_{di}*を小さくすることで、時間分解能を向上 させ、高速中性子に感度を有する検出器を用いて多重相関を測定することを想定している。検出感度のある 程度の低下は、試料中の Pu 量が大きいので許容されると思われる。

5.4 平均自由行程と平均距離及び積分値による漏れ増倍率の評価

例としてプルトニウム転換技術開発施設の粉末缶を仮定する。この粉末缶(内径 12 cm) に表7の MOX 製品粉末(嵩密度 2.2 g/cm³)を MOX 重量で 2.5 kg(1 kgPu + 1 kgU)充填 した場合の粉末の高さは 10 cm であり、r = 6 cm、h = 1.667、 $\overline{L} = 0.901$ 、実平均距離 $r\overline{L} =$ 5.41 cm となる。ここで平均自由行程 $l_m = 20.8$ cm とすれば、 $P_E = 0.771$ 、 $1 - P_E = 0.229$ が得られる。衝突なしで直接漏れる場合のみを考えるならば $l = P_E$ 、衝突 1 回目で核分裂 反応を生じる場合のみを考えるならば $p = (1 - P_E)r_{f/t}$ となる。原理としては判りやすいが 不十分である。図65に、散乱3回(N ≤ 3)までの $l \ge p$ を示す。



図65 散乱3回 ($N \leq 3$) までの $l \geq p$

 $N \rightarrow \infty$ とした方が式は簡単になる:

$$l = P_E + \sum_{N=1}^{\infty} (1 - P_E)(1 - P_E - r_{f/t})^{N-1} P_E$$

= $P_E + \frac{(1 - P_E) P_E}{P_E + r_{f/t}}$ (232)

$$p = \sum_{N=1}^{\infty} (1 - P_E)(1 - P_E - r_{f/t})^{N-1} r_{f/t}$$

$$= \frac{(1 - P_E) r_{f/t}}{P_E + r_{f/t}}$$
(233)

l + p = 1が式 (232) と式 (233) について成り立つ。先の粉末缶で $P_E = 0.771$ 、 $r_{f/t} = 0.0875$ の場合は、l = 0.977、p = 0.0232が得られる。更に $\overline{\nu_{i1}} = 3.16$ (²³⁹Pu の誘導核分裂の場合)とすると漏れ増倍率 $M_L = 1.054$ が得られる。 $N \leq 3$ に限っても l = 0.976であり、この段階で漏れも核分裂反応も殆ど尽きていることが判る。



図66 漏れ増倍率 M_Lを得るまでの変数とその意味の整理

漏れ増倍率を得るまでに使用する変数とその意味を図66に整理する。従来の中性子同時 計数法や多重相関計数法では、漏れ増倍率の変化の幅や分布があまり議論されていないが、 このように見てみると、従来の漏れ増倍率の値は $\overline{M_L}$ と書くべきもので、 M_L は大きな幅を 持つことが判る。図66の変数で変化の幅が大きく、その分布を明らかにしないと漏れ倍率 の幅を評価できないものとして、図50に示した中性子が試料から漏れる際の最後のランの 距離の分布がある。単位球の場合は図51(右側)から簡単に求めることができ、図67の 分布形状になる。本分布形状は $0 \le x \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$ を各々 200等分して得られた⁸⁵もので、 x = 1, $0 \le \theta \le \pi/2$ でL = 0となるため、分割数 $\rightarrow \infty$ の極限ではL = 0の確率は零以外の値 に収束する。単位円柱の分布形状については今後の報告書で取り扱いたい。



^{85.} LT = Table [L[x, θ], {x, 0, 1, 0.005}, { θ , 0, π , 0.005 π }];

 $[\]texttt{Histogram[Flatten[LT], Automatic, "Probability", AxesLabel \rightarrow \{"L", "Prob."\}, ImageSize \rightarrow \{400, 250\}]}$

平均自由行程や核分裂反応断面積の全断面積に対する比の積分値の分布形状については、 数回の散乱を考慮しても中性子の平均エネルギーは 1.9 MeV から 2.0 MeV で、スペクトルの 分布は 0.01 MeV から 4 MeV で面積の 9 割(~ 6 MeV で 99%)であるから、平均自由行程に ついては図 2 7、積分値については図 6 3 からおよその分布を想像することができる。

最後に、過去の実測値と比較を行う。文献 44 には、プルトニウム重量を 0.1 g, 1.5 g, 5.0 g, 10 g, 100 g, 500 g, 1321 g として M_L の実測結果が整理されている。実測値の粉末の組成比は 表 7 と僅かに (²⁴⁰Pu が 26wt%、²⁴¹Pu が 7wt%) 異なるが、平均自由行程や核分裂反応断面積 の全断面積に対する比の積分値の変化は僅かなため、見直しは行わなかった。比較の結果を 表 1 6 と図 6 8 に示す。プルトニウム重量と二酸化物重量の比は 0.42 (Pu/U 比が 1 の粉末 の実績値)、 $l_m = 20.8$ cm、 $r_{f/t} = 0.0875$ 、 $\overline{\nu_{i1}} = 3.16$ とした。

Pu 重量	嵩密度	半径	高さ	$r \overline{\overline{L}}$	$P_{\rm P}$	P_E p		M_L	
g	g/cm ³	cm	cm	cm	1 E		計算值	実測値 A	実測値 B
1321	1.78^{\dagger}	6	15.62	7.06	0.712	0.0314	1.075	1.074	1.076
500	2.2	4.5	8.51	4.39	0.810	0.0185	1.042	1.039	1.041
100	2.2	4.5	1.70	1.42	0.934	0.0056	1.012	1.012	1.014
10	2.2	1	3.44	1.37	0.936	0.0054	1.012	1.008	1.012
5	2.2	1	1.72	0.92	0.957	0.0036	1.008	1.005	1.010
1.5	2.2	1	0.52	0.40	0.981	0.0016	1.003	1.001	1.005
0.1	2.2	1	0.03	0.04	0.998	0.0002	1.000	0.994	1.000

表16 MLの計算値と実測値との比較

†粉末缶内部に放熱用フィンがあるので、見掛け上、嵩密度が2割減少するとした。



図68 *M_L*の計算値と実測値との比較 (実測値Aは Pu 重量が小さい時に低すぎるため点線とした)

文献によれば、実測値Aは known-alpha法、実測値B は α_r , M_L ともに実測値で、計算値 と実測値B の差は実測値A と実測値B の差と同程度に収まっている。 α_r の実測値は、S, Dから式 (76) を解いて M_L を求めたように、S, D, Tから式を解いて⁸⁶ 求めることができる⁷⁵。 しかしながら、粉末量が少ない場合(1.5 g, 5.0 g, 100 g のケース)、計算値が実測値B より 低くなる傾向があるように見え、粉末量が極めて少ない 0.1 g の場合や、高さが 3 cm 以上も ある場合を除いて、高さが 0.5 cm や 1.7 cm の場合にこの傾向が現れている。もしも容器中 で粉末が平らでない場合、同じ体積の円柱よりも平均距離が伸びるため、このような可能性 が生じるものと考えられる。

なお、本節の最初で、粉末缶に表7の MOX 製品粉末(嵩密度 2.2 g/cm³)を MOX 重量 で 2.5 kg(1 kgPu + 1 kgU)充填した場合の粉末の高さを放熱用フィンの影響を考慮せずに 10 cm とし、 $r\overline{L}$ = 5.41 cm、 P_E = 0.771、p = 0.0232、 M_L = 1.054 としたが、実測値との比較 から、放熱用フィンの影響は無視できないことが判った。見掛け上、嵩密度が2割減少する と考えると、粉末の高さは 11.83 cm、 $r\overline{L}$ = 6.00 cm、 P_E = 0.749、p = 0.0261、 M_L = 1.061 が得られる。文献 44 には含まれていないが、MOX 製品粉末は査察用を兼ねた NDA 装置で 多数測定されており、1.06 という漏れ増倍率は妥当な値と言うことができる。

86. 文献 75 は難解なので、式 (73) から 式 (76) で
$$M_L$$
 を解いたのと同じ方法で α_r を解く。

文献 18 の式 (5-55) にも α_r を表す式があるが、これは $M_L = 1$ の場合である(導出は自明であろう)。

まず式 (75)の ρ_0 と同様に、増倍を無視し得る小さな質量の試料 ($M_L = 1$)に関して次の ω_0 を定義する:

 $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_0 \left(1 + \alpha_r\right)}{S_0} = \frac{1}{6} \frac{\overline{\nu_{s3}}}{\overline{\nu_{s1}}} \epsilon_n^2 f_t$

次に
$$\frac{T(1+\alpha_r)}{S}$$
 を展開し、 $\frac{M_L^2(M_L-1)}{\overline{\nu_{s3}}(\overline{\nu_{i1}}-1)}$ を定数 Bとする (M_L は既に解いてある) と:
 $\frac{T(1+\alpha_r)}{S} = \left[B\omega_0\overline{\nu_{s1}}\overline{\nu_{i3}} + 3B\omega_0\frac{M_L-1}{\overline{\nu_{s1}}-1}\overline{\nu_{s1}}\overline{\nu_{i2}}^2\right](1+\alpha_r) + M_L^2\omega_0 + 3B\omega_0\overline{\nu_{s2}}\overline{\nu_{i2}}$

これを式変形して α_r を得る:

$$\alpha_r = \frac{M_L^2 + 3 B \overline{\nu_{s2}} \overline{\nu_{i2}}}{\frac{1}{\omega_0} \frac{T}{S} - B \overline{\nu_{s1}} \overline{\nu_{i3}} - 3 B \frac{M_L - 1}{\overline{\nu_{i1}} - 1} \overline{\nu_{s1}} \overline{\nu_{i2}}^2} - 1$$

数式処理ソフトウエアによる解法例を示す:

SS[A_, M_] :=
$$F_p \in_n M \vee_{s1} A$$

$$TT[A_{, M_{]}} := \frac{1}{6} F_{p} \epsilon_{n}^{3} M^{3} f_{t} \left(v_{s3} + \left(\frac{M-1}{v_{i1}-1} \right) \left(3 v_{s2} v_{i2} + v_{s1} v_{i3} A \right) + 3 v_{s1} v_{i2}^{2} \left(\frac{M-1}{v_{i1}-1} \right)^{2} A \right)$$

$$CT = CoefficientList \left[\frac{A TT[A, M]}{SS[A, M]}, A \right] / . f_{t} \epsilon_{n}^{2} \rightarrow \frac{6 \omega z v_{s1}}{v_{s3}} / . \frac{(-1+M) M^{2}}{(-1+v_{i1}) v_{s3}} \rightarrow B$$

$$\left\{ M^{2} \omega z + 3 B \omega z v_{i2} v_{s2}, B \omega z v_{i3} v_{s1} + \frac{3 (-1+M)^{2} M^{2} \omega z v_{i2}^{2} v_{s1}}{(-1+v_{i1})^{2} v_{s3}} \right\}$$

 $\begin{aligned} & \text{Solve}\left[\text{CT}\left[\left[2\right]\right] \, x + \text{CT}\left[\left[1\right]\right] - x \, \text{rTS} = 0, \, x\right] \, /. \, \frac{3 \, \left(-1 + M\right)^2 \, M^2 \, \omega z \, \nu_{12}^2 \, \nu_{s1}}{\left(-1 + \nu_{11}\right)^2 \, \nu_{s3}} \rightarrow 3 \, B \, \frac{M - 1}{\nu_{11} - 1} \, \omega z \, \nu_{12}^2 \, \nu_{s1} \\ & \left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-M^2 \, \omega z - 3 \, B \, \omega z \, \nu_{12} \, \nu_{s2}}{- \text{rTS} + \frac{3 \, B \, (-1 + M) \, \omega z \, \nu_{12}^2 \, \nu_{s1}}{2} + B \, \omega z \, \nu_{13} \, \nu_{s1}} \right\} \right\} \end{aligned}$

6. Poisson 過程における時間軸とほぼ同時中性子の評価

Poisson 過程については第2章でごく基本的な性質を述べた。Poisson 過程は renewal 過程⁸⁷ (直訳すると再生過程だが馴染みがないので英語のままとする)と呼ばれる確率過程(時間 的に変化する離散確率現象)の中で、*rate*(単位時間あたりの平均事象到来数)が時間的に 変化せず、事象到来間隔が指数分布に従う特別な場合と見ることができる²⁵⁾。放射性壊変で は単位重量・時間あたりの壊変数が一定でこれが *rate*にあたる。Renewal 過程の例としては 渋滞しないで走行している車両の車間距離(*rate*が変動する)などがある。放射性壊変でも 観測時間が半減期に対して十分短いと言えない場合は Poisson 過程ではない。

本章ではまず、Poisson 過程を記述するために用いられる6つの確率変数、確率密度関数、 確率重み関数、累積確率分布関数、特に2通りの時間軸(時間に関する2つの確率変数)に ついて説明する。次に、2.4節で説明した二重相関の計数の仕組みを2通りの時間軸の観点 から捉え、同時計数法や多重相関計数法は勿論、本報告書でも第3章以降は対象外となって いた accidental pair について、Poisson 過程の式から理解を試みる。続いて、Rossi-alpha 分布 (図8 b))において R と A の境界として水平線が仮定され accidental pair が考慮されていな いことに関して、accidental pair がどのような条件下で大きくなるのか、現場での同時計数の 経験・測定値の蓄積と解析からこの問題を具体的に取り上げ、第2章で説明した 1949年の Hoffmann の論文を基礎として、問題をどのように評価するのかを考える。

6.1 Renewal 過程としての Poisson 過程と2つの異なる時間軸

確率論に入る前に、偶発性の中性子パルス列の例(平均 1000 パルス/秒で、1 秒間に到来 するパルス列の例)を図69に示す。確率的性質によりこの例では、1000 個が到来した時点 で1秒に僅かに達していない。当然ながら1秒に僅かに超える場合もあり、多数回の平均が 1秒となる。このパルス列は、ポアソン過程の定義に基づいて、パルスの到来時間間隔又は 確率論で言う「待ち時間」の確率密度関数(PDF: Probability Density Function)が、式 (234) を満たすとして求められた。作図のための一様疑似乱数は mersenne twister 法⁸⁸ を用いた:

$$f_{X_n}(x) = \lambda \, e^{-\lambda x} \tag{234}$$

ここで λ は *rate* と呼ばれ、経過時間 *t* での到達パルス数の期待値が λt となる。単位時間 あたりの平均パルス到来数である 1000 /秒と考えればよい。*x* は任意のパルスの到来時刻を 時刻 = 0 とする経過時間、 X_n は n-1 個目と n 個目のパルスの時間間隔(図 7 0)である。 思ったほど「ばらけていない」印象を受けるが、ポアソン過程の本質の一端が現れている。

^{87.} 事象の到来間隔がランダム、正確には独立同分布(IID: Independent and Identically Distributed)な確率変数で あるような確立過程を指し、事象の到来毎に新たな始まりを迎えたかのように見える。

^{88.} 市販の波形解析ソフトに用意されている expNoise (1/λ) という関数を利用した。ある確率分布に従う乱数は、 その累積確率分布の範囲が0~1、一様疑似乱数の範囲が同じ0~1であることを利用して、累積確率分布の 逆関数に一様疑似乱数を代入して発生させることができる(逆関数法)。



図69 偶発性の中性子パルス列の例

(平均 1000 パルス/秒で、パルスが 1000 個に到達するまでを 0.1 秒ごとに分割表示した例)

Renewal process で用いる変数を図70 (傾き $\lambda = rate$ が一定として描いた場合)に示す。 表17の6つの確率変数が定義され⁷⁰、時間に関する2つの確率変数 $x \ge t$ がある。時間軸 をxとすることも tとすることもできるので、2つの時間軸と呼ぶ。

n	事象の到来回数(number of arrivals)	離散値
x	事象の到来時を時刻 = 0 とする事象毎の経過時間 (interarrival time)	連続値
t	任意の事象の到来時を時刻 = 0 とする経過時間、即ち時刻(arrival time)	連続値
N(t)	時刻 t における事象の到来回数	離散値
X _n	n-1 個目の到来事象とn 個目の到来事象の時間間隔	連続値
S_n	n 個目の到来事象までの経過間隔	連続値

表17 Renewal process の確率変数

N_t ではなく N(t) と表記するのは、tが連続値だからである。確率変数が離散値なのか連 続値なのかの違いは大きく、連続値の場合の確率密度関数は、離散値の場合は確率重み関数 (PMF: Probability Mass Function)となる。確率変数について PDF を積分する或いは PMF の総和を求めると、累積確率分布関数(CDF: Cumulative Distribution Function)になる。 PMF と CDF は1以上の値をとらず単位もないが、PDF は1以上の値をとり単位も異なる。 Renewal process の中でポアソン過程の場合の PDF, PMF, CDF を表18に整理する:

確率変数	PDF	PMF	CDF
n		$p_{N(t)}(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$	<i>t</i> に無関係に 1
x	n に無関係に $f_{Xn}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$		$1 - e^{-\lambda x}$
t	$f_{Sn}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$		$1 - \frac{\Gamma(n,\lambdat)}{\Gamma(n)}$

表18 Renewal process の中でポアソン過程の場合の PDF, PMF, CDF

xの PDF は式 (234)の指数分布であるが、nの PMF はポアソン分布、tの PDF はアーラン 分布 (Erlang's distribution) と呼ばれる。アーラン分布の形状を図 7 1 に示す。ポアソン過程 は xの PDF で定義され、nがポアソン分布をとるのはその結果となっている。tの CDF に は分母側にガンマ関数、分子側に第二種不完全ガンマ関数が含まれる。ガンマ関数は 階乗 (factorial)を実数に拡張したもので、ガンマ関数は ($0,\infty$)、第一種不完全ガンマ関数は ($0,\lambda t$)、第二種不完全ガンマ関数は ($\lambda t,\infty$) における積分で定義される⁸⁹。

^{89.} 機械工学便覧 基礎編 A2 数学のガンマ関数(A2-22)等を参照。









アーラン分布は、 λ が与えられた時にn個目のパルスが時間軸t上のどのあたりに来るの かを意味する確率と捉えると判り易い。確率が最大となるtは、 $df_{Sn}(t)/dt = 0$ を解いて $t = (n-1)/\lambda$ で与えられる。

Renewal process では次の等式が成り立つことが知られている:

- i) 時刻 t に対応する到来事象の回数 nの期待値 $\overline{N(t)} = \lambda t$
- ii) 到来事象の回数 n に対応する時刻 tの期待値 $\overline{S_n} = n/\lambda$
- iii) $\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$
- iv) $\{S_n > t\} = \{N(t) < n\}$
- v) $\lambda p_{N(t)}(n) = f_{S_{n+1}}(t)$

i), ii) は図70の傾き線(期待値に対応する)に関する $t \ge n$ の関係である。v) は、時刻 tにおける到来事象数 N(t) が n となる確率重みに $\lambda = rate$ を乗じると n+1 回目の到来事象 が生起した時刻 S_{n+1} が t となる確率密度に等しい、という意味になる。図的に捉えること は難しい⁹⁰ が、表 18の式を見れば証明は容易である。iii) は、n 回目の到来事象が生起した 時刻 S_n が t以前であるような集合は、時刻 tにおける事象の到来回数 N(t) が n以上である ような集合と等しい、という意味になり、図70の S_n よりも tが大きい場合(右上側)を 指している。iv) は iii) の補集合となる。式による証明は次のとおり:

$$\{N(t) \ge n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$
(235)

$$\{S_{n} \leq t\} = \int_{0}^{t} \frac{\lambda^{n} \tau^{n-1} e^{-\lambda \tau}}{(n-1)!} d\tau = \frac{\lambda^{n}}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda^{n}} \int_{0}^{\lambda t} y^{n-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \gamma(n, \lambda t)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+k}}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k} e^{-\lambda t}}{k!}$$
(236)

この証明では、 γ (第一種不完全ガンマ関数)の積分表示と総和表示の関係、及び τ から yへの変数変換を利用した。式 (236) は表 1 8 の t の PDF の積分なので表 1 8 の t の CDF に 式変形できる:

$$\frac{1}{(n-1)!}\gamma(n,\lambda t) = \frac{\gamma(n,\lambda t)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n) - \Gamma(n,\lambda t)}{\Gamma(n)} = 1 - \frac{\Gamma(n,\lambda t)}{\Gamma(n)}$$
(237)

要は、第一種不完全ガンマ関数を、第二種不完全ガンマ関数で置き換えている。

^{90.} あえて図70で捉えようとするならば、座標 (t, n)での事象の生起確率はt, nによらず同じはずであり、 $\lambda = 1$ ならば、tの確率密度とnの確率重みは同じはずである。tの確率密度は λ が小さいと薄く λ が大きいと濃く なるので、このような関係が現れると捉えることができる。



時間軸 x の PDF と CDF は図 7 2 で表される単純な指数関数である。確率密度は x = 0 に おいて最大 λ であり、x > 0 では急速に減少する。一方、x = 0 において確率はゼロである。

図72 確率変数 $x \circ PDF$ (左) と CDF (右)

時間軸 xの確率密度が x=0 において最大、同じ x=0 において確率がゼロという性質を CDF の微分が PDF であるという抽象的理解に留めず、具体的に考えてみる。xはパルス間隔 であるから、図69の偶発性のパルス列の場合、決して重なり合うことがなく、パルス間隔 は詰まっている場合が圧倒的に多く、平均的なパルス間隔(図72の場合は $1/\lambda = 0.01$)の 周りに Gauss 分布的にばらついているのではない。図69について思ったほど「ばらけて」 おらず、ポアソン過程の本質の一端が現れていると述べた理由はこの点にある。Poisson 過程 はランダムに生起する事象によく見られるが、ランダムネスから容易に想像できるのはもう 一つの時間軸 tの方であることに注意しなければならない。

xの PDF の縦軸を対数にすると、言うまでもなく確率密度の変化は傾きが $-\lambda$ の右下がり の直線となり切片は λ である。図8 a)と比較してみると、確率事象に由来する A は確かに 対数グラフで右下がりの直線となっており、coupled pairに由来する R と重なり合った部分 において R と A の境界として点直線が仮定されているのは正しい。縦軸をリニアにすると、 この境界は下に凸の点曲線となり、図8 b)に描かれている水平線(一点鎖線)にはならな い。R と A の境界として水平線を仮定する現在の同時計数法では、下に凸の点曲線と水平な 一点鎖線の間の領域が、確率事象に由来するにもかかわらず、coupled pairに由来する R と 見做される。この領域がまさしく accidental pairに由来する部分であり、PDFの性質によっ て意外に多くのパルスがほぼ同時に到来する(λ が大きいほどこの影響は大きい)。実際の プルトニウムの計量、特にバックグラウンドが高い場所で計量を余儀なくされる場合、校正 曲線が原点を通らないという現実が生じていた。2.5 節では、R と A の境界をどのように仮 定するかが問題の一つであると認識していることを述べたが、次節では Poisson 過程におけ る時間軸 xと時間軸 tの PDFを使ってこの問題を定量的に扱ってゆく。

6.2 同時計数の仕組みと2つの異なる時間軸

Poisson 過程には時間軸 x と時間軸 tの2つの時間軸があることを理解した上で同時計数の 仕組みを見てみると、図10又は図14の input にパルスが到来した時をトリガとして counter の値を読み取る R+A scaler と、そこから 1024 μ s 離れた時間軸上で counter の値を読 み取る A scaler の違いは、時間軸 x と時間軸 tの違いに対応していることが判る。もっとも 時間軸 x は次のパルスが到来した時点で終わるので、2個ペアには当てはまるが、3個以上 の複数個ペアには2つ目のパルスが到来した時点までの時間軸 x_2 、3つ目のパルスが到来 した時点までの時間軸 $x_3 \dots$ を考えなければならない⁹¹。これらの PDF は $f_{S2}(t), f_{S3}(t) \dots$ で与えられ、時間軸 t とは区別される。捉え方として A (相関の有無にかかわらず中性子の 到来を見る) は時間軸 t 上で、R (coupled pair, accidental pair を含む中性子の相関を見る) は時間軸 $x, x_2, x_3 \dots$ 上で計数される。もっとも、実際の時間の流れはひとつであるから、 R+A scaler は 2 つの時間軸が重なった状態を見ている(従って R scaler とは呼ばれない)。

R+A scaler と A scaler で、時間軸 t上で同じ時間幅で計数を行った結果は同じになるのか どうか、時刻 t = P, P+Gにおける確率変数 n の PMF を求めてみる:

$$p_{N(P)}(n) = \frac{(\lambda P)^n e^{-\lambda P}}{n!}$$
(238)

$$p_{N(P+G)}(n) = \frac{[\lambda (P+G)]^n e^{-\lambda (P+G)}}{n!}$$
(239)

R+A scaler の n の期待値は、n についての重み付き平均で与えられる:

$$\overline{n}_{R+A} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ \frac{\left[\lambda \left(P+G\right)\right]^n e^{-\lambda \left(P+G\right)}}{n!} - \frac{(\lambda P)^n e^{-\lambda P}}{n!} \right\}$$
(240)

結果は予想どおり次式で与えられる⁹²:

$$\overline{n}_{R+A} = \lambda G \tag{241}$$

A scaler の n の期待値も同様に $\bar{n}_A = \lambda G$ であり、時間軸 t上での R+A scaler と A scaler の 計数値は、renewal process として考えても厳密に等しいことが証明された。従って、図 8 b) の水平な一点鎖線の下の領域は、相関の有無にかかわらず中性子の到来を見る A に対応して いる。一方、一点鎖線の上の領域は coupled pair, accidental pair を含む中性子の相関を見る R に対応している。

91. ちなみに $f_{S1}(t)$ は $f_{Xn}(x)$ に一致し、かつ t と x には差がない(次のパルスが到来するまで)。 92. $\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t$ の式変形を利用する。
式 (241) について (**R**+A でも A でも同じ)、*t*の PDF から *n*に対する *t*の期待値を求めて 検算してみる。結果は式 (241) と同様に予想どおりである:

$$\bar{t} = \int_0^\infty t \, \frac{\lambda^n \, t^{n-1} \, e^{-\lambda \, t}}{(n-1)!} = \int_0^\infty \frac{(\lambda \, t)^n \, e^{-\lambda \, t}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y^n \, e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda} \Gamma(n+1) = \frac{1}{\lambda} \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n}{\lambda}$$
(242)

また、Poisson 分布の性質として各時刻の n の分散は n の期待値と同じである:

$$\begin{split} \sum_{n=0}^{\infty} (n-\overline{n})^2 \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\lambda t)^2 \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} - 2\lambda t \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} + (\lambda t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} - (\lambda t)^2 \\ &= 0 + \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} - (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \right] - (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t (\lambda t+1) - (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t \end{split}$$

難しく考えなくても、図70や renewal process の等式 i), ii) を見れば明らか、との見方も あると思うが、任意のパルスとそれに続くパルスの時間間隔の平均が $1/\lambda$ で表されるような パルス列において、図72の PDF にかかわらず、時間軸 t上ではパルスの密度が変わらない ことが直感的にはやはり理解し難いため、式 (238) ~式 (241) による証明を行った。時間軸 xと時間軸 tを峻別し、R+A scaler での両者の重なり、A scaler での時間軸 tの現れを理解する 必要がある。

このように、図8b)の水平な一点鎖線の下の領域は時間軸tにおける計数、一点鎖線の上 の領域は時間軸xにおける計数で、後者は中性子の相関の到来を見るRに対応している。そ して時間軸xでは Poisson 過程も無相関ではなくパルス間隔は詰まっている場合が圧倒的に 多い。このほぼ同時の(Poisson 過程では同時はあり得ない)中性子ペアが、核分裂反応に 由来する非 Poisson 過程の中性子を計数するためのRに含まれる形(点曲線と一点鎖線の 間)で accidental pair として現れると考えられる。この accidental pair が Poisson 過程に属す ることは、炉雑音理論のY値に関する式(8)と式(30)の比較から明らかである。この現象 は、2個ペアに限らず原理的には複数個ペアに共通に生じると考えられる。

6.3 確率過程に由来するほぼ同時中性子の導出と評価

Poisson 過程に従って到来する中性子としては、図73に示すように、 (α, n) 反応由来の 中性子の他、核分裂反応由来でも同時性を失った中性子(作業者の被ばく低減を目的に設置 されているグローブボックスの外側遮蔽体93 内で散乱の間に互いの同時性を失った元複数個 ペアの中性子)や測定室の床・壁・天井で散乱された中性子があり、Poisson 過程の中性子 も非 Poisson 過程の中性子も、試料に由来するものと近隣にある別のウラン・プルトニウム 混合二酸化物に由来するものの両方がある。Rossi-alpha 分布はそもそも炉雑音理論における 概念であり、非 Poisson 過程の中性子が Poisson 過程の中性子よりも圧倒的に多く、また近隣 に別の中性子源は無かったため、僅かな accidental pair が R に含まれていても問題なかった と思われる。しかしながら実際のプルトニウムの計量、特にバックグラウンドが高い場所で 計量を余儀なくされる場合に校正曲線が原点を通らないという現実があり、数 m しか離れ ていない近隣のグローブボックスに残留するウラン・プルトニウム混合二酸化物粉末からの 非 Poisson 過程の中性子 (cross-talk) の影響と考えられていた。LANL と議論を重ねた結果、 現在は cross-talk 成分を差し引くようなデータ処理が講じられている(文献 6)。現在の計量 測定で主流となっているのは、Pu 重量及び Pu 同位体組成比を秤量と通常の化学分析で決定 した代表試料を異なる実効²⁴⁰Pu 重量で2つ以上準備し、測定結果の D 又は D_c と実効²⁴⁰Pu 重量との関係を校正式として求める極めて empirical な方法である(2.5節)。実際にこの データ処理は有効で、IAEA による厳格な保障措置において採用されている。しかしながら Poisson 過程に属する accidental pair (試料とバックグラウンドに由来する)、則ちほぼ同時 中性子もまた、このバイアスをもたらす要因となる。以下、評価の方法を述べる。



図73 バックグラウンドが高い場所でのプルトニウムの計量の例

93. γに対する鉛遮蔽と中性子に対する高密度ポリエチレン遮蔽の二重構造になっている。

第2章の Hoffmann の式 (30) に立ち返って、相関の有無を考えない単味(singlet)計数率 *S* と accidental pair の関係を考える。式 (30) の accidental pair は 2 個ペアであり、*m* 個のペアの 場合の組数は $0 \le t_1 \le t_2 \cdots \le t_m \le t$ として次式で与えられる:

$$\int_{t_m=0}^{t_m=t} \cdots \int_{t_2=0}^{t_2=t_3} \int_{t_1=0}^{t_1=t_2} (F\epsilon \,\mathrm{d}t_1) \,(F\epsilon \,\mathrm{d}t_2) \,\cdots \,(F\epsilon \,\mathrm{d}t_m) = \frac{F^m \epsilon^m t^m}{m!} \tag{244}$$

Fは単位時間あたりの平均的な核分裂数、 ϵ ($\neq \epsilon_n$) は検出効率 (counts per fission) である。この式の物理的描像をそのままにして、式 (41) の (α , n) 反応を含む計数率 Sにバック グラウンド計数率 B_G を加えた T scaler の値 T_s で $F\epsilon$ を置換すると、accidental な m 個ペア の組数 C_m^P は次式で与えられる:

$$C_m^P = \frac{T_s^m t^m}{m!} \tag{245}$$

記号 C^P は Poisson 過程の見掛けの correlation の意味である。この accidental pair の組数は 式 (244) にせよ式 (245) にせよ、単位時間あたりという捉え方が出来ないことに注意する必要 がある。 C_m^P には (α , n) 反応由来の correlation と核分裂反応由来の correlation が含まれる が後者は異なる先祖に由来するので coupled pair ではなく、計数率 D, T...とは重複しな い。D, T...は同じ先祖に由来する複数個ペアで非 Poisson 過程であるが、式 (64) 及び式 (65) に示したように S は A scaler に対応し Poisson 過程に従う。また T_s は単位時間あたりの事象 到来数 λ と同じ意味を持つから、式 (245) は次のように書き直すことができる:

$$C_m^P = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \tag{246}$$

得られた式 (246) は、Poisson 過程の離散変数 n のPMF(表18)に $e^{\lambda t}$ を乗じ、 $n \in m$ で 置き換えた形をしている。この PMF は長さ t の時間内に偶発的事象が n 回生じる確率分布 であるが、PMF の $e^{-\lambda t}$ は事象数の和 ($\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda t}$)を面積 1 に規格化する意味を 持つので、式 (246) は長さ t の時間内に偶発的事象が m 回生じる事象数を意味する。従って $C_A(m)$ は、観測時間 t (図 6 の Hoffmann の概念でも同時計数の仕組みでも t は短時間)の 間に偶然に m 個の中性子が到来する事象数、という物理的にはごく自然な意味に落ち着く ことが判る。観測時間が同時計数回路の $G = 64 \mu s$ の時の C_m^P の値を表 1 9 に示す:

m	$T_s = 5000 \text{ cps}$	$T_s = 10000 \text{ cps}$	$T_s = 20000 \text{ cps}$	$T_s = 30000 \text{ cps}$	$T_s = 40000 \text{ cps}$	$T_s = 50000 \text{ cps}$
1	0.320	0.640	1.28	1.92	2.56	3.20
2	0.051	0.205	0.819	1.84	3.28	5.12
3	0.005	0.044	0.350	1.18	2.80	5.46
4	0.000	0.007	0.112	0.57	1.79	4.37

表19 観測時間が同時計数回路の $G = 64 \mu s$ の時の C_m^P の値

m = 2の場合、言い換えるとほぼ同時中性子、或いは Poisson 過程の見掛けの correlation が 実際のプルトニウムの計量にどの程度の影響を与えるのか、バックグラウンドが高い場所で 計量を余儀なくされる場合の、 C_2^P の Doubles に対する比を計算条件と共に表20に示す。 自発核分裂性核種は²⁴⁰Pu、誘導核分裂性核種は²³⁹Pu で代表し、グローブボックス計量装置 は図7の装置を代表とした。実効²⁴⁰Pu 量は 350 g 又は 525 g(1 kgPu 又は 1.5 kgPu 相当)と し、試料が1ヶ所に集中していないため漏れ増倍率は1とした。 B_G の値は測定経験から T_s が 20000 cps, 50000 cps になるように設定した。

表20 B_G が高い場所で計量を余儀なくされる場合の C_2^P の Doubles に対する比 [計算条件]

$F_p { m g}^{-1} { m s}^{-1}$	$\overline{\nu_{s1}}$	$\overline{ u_{i1}}$	$\overline{\nu_{s2}}$	$\overline{ u_{i2}}$	ϵ_n	f_d	$G~\mu { m s}$	$ ho_0$	α_r	M_L
474	2.15	3.16	3.79	8.21	0.04	0.68	0.000064	0.024	0.7	1.0

[計算結果1:実効²⁴⁰Pu量が350g]

Counts on a	$B_G =$	= 0 cps	$B_G = 17571 \text{ cps}$	$B_G = 47571 \text{ cps}$				
Counts cps	遮蔽体なし	遮蔽体あり(実	^{ぼ効 240} Pu 量が見かけ上 10% になる)					
Singles	24293	2429						
Doubles	341.7	34.2						
Totals	24293	2429	20000	50000				
Accidentals	37769	378	25601	160002				
C_2^P	1.21	0.012	0.819	5.120				
C_2^P /Doubles	0.35 %	0.035%	2.3%	15%				

[計算結果2:実効²⁴⁰Pu量が525g]

Counts one	$B_G =$	0 cps	$B_G = 16356 \text{ cps}$	$B_G = 46356 \text{ cps}$					
Counts eps	遮蔽体なし	遮蔽体なし 遮蔽体あり(実効 ²⁴⁰ Pu 量が見かけ上 10% にな							
Singles	36439	3644							
Doubles	512.6	51.3							
Totals	36439	3644	20000	50000					
Accidentals	84981	850	25600	160000					
C_2^P	2.72	0.027	0.819	5.12					
C_2^P /Doubles 0.53 %		0.053%	1.6%	10%					

バックグラウンドが 0、遮蔽体がない場合の Singles, Doubles, Totals, Accidentals の計算は、 式 (41), (42), (64), (65) の通りである。グローブボックスに残留するウラン・プルトニウム混合 二酸化物粉末を測定する場合、外側の中性子遮蔽体により実効 ²⁴⁰Pu 量が見かけ上、減じて いるように測定される。図17に示したこの装置の校正曲線では、実効 ²⁴⁰Pu 量 350 g で実際 の Doubles は 35 程度であり、遮蔽体がない場合の Doubles の 10% 程度になる。 図7の装置は、このような高バックグラウンド下で測定に用いられることは実際には無い が、類似の装置はバックグラウンドが高い場所で計量を余儀なくされ、 C_2^P の Doubles に対 する比として数% ~ 10% 強の影響があることが判る。試料に対してバックグラウンドが高 い程、この影響は大きくなる。また表には示していないが、漏れ増倍率が大きくなると Doubles が大きくなるので、この影響は小さくなる。念のため、図16の低放射性固体廃棄 物計量装置(カートン用)及び大型の低放射性固体廃棄物計量装置(ドラム缶用)について 同様の計算を行ったところ、バックグラウンドを無視できる場所で計量する場合、 C_2^P の Doubles に対する比は 1% 未満であることを確認した。

 C_2^P の Doubles に対する比を減じる方法としては、 B_G を下げ T_s を減じることが第一では あるが、次善の策として時定数 τ_{di} と Gを小さくする方法がある。但し、検出器の減速材が 薄くなって検出効率が低下し、Doubles の値が大幅に小さくなる問題を生じるので、実際に は困難を伴うと思われる。仮に、検出効率を維持し、 τ_{di} を 23 μ s に、Gを 32 μ s に半減した 場合 (f_d を維持するように Pも半減する)、実効 ²⁴⁰Pu 量が 525 g の場合の試算を表 2 1 に 示す。検出効率が半減した場合(同時に T_s も半減すると仮定する)の試算も同じ表 2 1 に 示す。検出効率を維持できる/できないにかかわらず、 C_2^P の Doubles に対する比は 1/4 に 低下することが判る。Doubles の減少が許容できるならば、この方法は有効である。

表21 実効²⁴⁰Pu 量が 525 g で *てdi* と G を半減する場合の試算

Counts one	$B_G =$	0 cps	$B_G = 16356 \text{ cps}$	$B_G = 46356 \text{ cps}$				
Counts cps	遮蔽体なし	遮蔽体あり(実効 ²⁴⁰ Pu 量が見かけ上 10% にな						
Singles	36439	3644						
Doubles	512.6	51.3						
Totals	36439	3644	20000	50000				
Accidentals	42491	425	12800	80000				
C_2^P	0.680	0.007	0.205	1.280				
C_2^P /Doubles	0.13%	0.014%	0.40%	2.5%				

[検出効率を維持できる場合]

[検出効率が半減する場合]

Counta ong	$B_G =$	= 0 cps	$B_G = 8178 \text{ cps}$	$B_G = 23178 \text{ cps}$				
Counts cps	遮蔽体なし	遮蔽体あり(実効 ²⁴⁰ Pu 量が見かけ上 10% になる)						
Singles	18220	1822						
Doubles	128.2							
Totals	18220	1822	10000	25000				
Accidentals	10623	106	3200	20000				
C_2^P	0.170	0.002	0.051	0.32				
C_2^P /Doubles	0.13%	0.015%	0.40%	2.5 %				

式 (244) から式 (246) の時間の変数名が t であり x でないことに対して、補足説明しなけれ ばならない。2.2 で証明した通り、ポアソン過程では観測時間 t の間に到来する事象の数の 期待値と分散は λt であり、 $\lambda = T_s = 20000 \text{ cps}, t = G = 64 \, \mu s$ ならば 1.28 になる。この値が 時間軸 t 上で観測される事象数で表 1 9 の m = 1 にあたる。一方、時間軸 x 上で観測される 2 個ペアの組数は表 1 9 の m = 2 であり、 $\lambda = T_s = 20000 \text{ cps}, t = G = 64 \, \mu s$ ならば 0.819 に なる。このように両者は区別されるが、時間軸 x は次の事象が到来した時点で再定義される ので、2 個ペアを考える限り、時間軸 t と時間軸 x に差は生じない (n = 1 では表 1 8 の t の PDF と CDF は、x の PDF と CDF に一致する)。3 個ペア以上を考える場合は S_n を時間軸 としなければならないと思われる。ちなみに x の CDF は表 1 8 から 1 – $e^{-\lambda x}$ であるが、 これは確率分布の面積なので事象数の和 ($\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda t}$)を乗じて次式を得る:

$$e^{\lambda x} - 1 = \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} \dots = C_1^P + C_2^P + C_3^P \dots$$
(247)

これは単味中性子数、2個ペアの組数、3個ペアの組数 ... の総和であり、時間軸 x上で 積分、則ち事象数の和を求める=計数すると、2個ペアの組数だけでなく単味中性子が計数 に含まれることを意味する。図8 b)の Rossi-alpha 分布で Correlation not observed とした部分 (単味中性子)はこのような理由で生じるのではないかと思われる。時間 Pを無視している 点や、3個ペア以上の組数は十分小さいと見做している点を含めていささか厳密性に欠ける ので、詳しくは今後の報告書で取り扱いたい。

プルトニウム転換技術開発施設では、図73の環境でバックグラウンドの変動を 10 時間 以上にわたって測定し、その周波数特性を調査したことがある。時系列データ(*B_G*の毎分 の計測値×900回)を数式処理ソフトによってフーリエ変換した結果を図74に示す。





横軸はバックグラウンドの変動を波とみた時の波長(1~900)、縦軸はその頻度を表す。 これはいわゆるホワイトノイズであり、自己相関が非常に小さいことを示している。極めて 多数の事象(中性子の到来)を観測した結果であるから、もとの確率過程が Poisson 過程で ある証明にはならない⁹⁴ が、ランダムに事象が到来していることは確かである。このように バックグラウンドには短い波長から長い波長までが同じ頻度又は強さで含まれており、長い 波長により計数値がゆっくり揺らぐという現象が実際に現れる。このため、長時間測定して その平均を求める或いは繰り返し測定してその平均を求める、といった通常のノイズ低減策 では限界がある。極めてゆっくりと揺らぐデータの一部から揺らぎの中心を推定する場合に 用いられる方法が無いではない⁹⁵ が、これも今後の課題である。

最後に、減速材で熱中性子化される前、coupled pair と accidental pair が補集合の関係に あったことを図75に示す。熱化の際、同時だった coupled pair に互いの時間差(時定数 τ_{di} の指数関数で近似される)が生じるのに対し、accidental pair は確率的に生じるほぼ同時中性 子ペアであるからこのような新たな時間差は生まれず、熱化の前後で時間軸 x上の指数関数 の時定数は $1/\lambda$ のまま変化しない。図8 b)の分布はこのようにして生じる。



図75 検出器内の減速材で熱中性子化される前後の時間軸 x 上の確率分布

また、本報告書の範囲で定量的に導くことは難しいが、純(α , n)線源、特に Am-Li 線源 において Doubles が明瞭に測定されるのは、見掛けの correlation = ほぼ同時中性子の影響が あるのではないかと筆者は考えている。この現象は、Pu-Be 線源では僅かに含まれる核分裂 性核種の影響ではないかと考えられており、Am-Li 線源でも同じ影響を推定している文献⁷⁷⁾ がある。これらを否定するものではないが、文献 18 の Fig. 5.3 のような明瞭な多重相関分布 を実際に持つとは考えにくく、見掛けの correlation と見た方が自然ではないかと思われる。 Poisson 過程を renewal 過程として眺めると、このような新たな見方ができる。

^{94.} 中心極限定理によって、極めて多数の事象を観測すれば Poisson 過程以外でもガウス分布に限りなく近づく。

^{95.} 例えば MEM: Maximum Entropy Method など。

7. まとめ

プルトニウム転換技術開発施設では、グローブボックスの一部と低放射性固体廃棄物容器 の内部に残留する少量・不定形のウラン・プルトニウム混合二酸化物に対し、米国エネル ギー省(DOE)の支援を受けて、約20年前から中性子同時計数法によるプルトニウム計量 装置の開発・設置・改良がおこなわれ、計量管理及び保障措置対応に用いられてきた。この 方法では二重相関と Rossi-alpha 分布の概念が説明に用いられるが、数式が多用されること や、確立された方法を正しく適用/改良/発展できるならば問題とされないこともあって、 概念の基礎的な理解はあまり進んでいなかった。しかしながら近年、測定条件が従来の同時 計数法の前提の限界に近づいているのではないかとの認識が筆者には強く、また炉を含めた 今後の原子力施設の廃止措置を考えた時、従来とは異なる自発核分裂性核種(²⁴⁴Cm 等)を 含む高質量のウラン・プルトニウム混合二酸化物に測定対象が拡がると思われた。そこで、 中性子多重相関計数法(同時計数法を含む)の数理的基礎について現場での経験を含め再考 した。その際、多数回の試行の結果である MCNP は用いず、明確な物理的描像を得ること を目的として、基となる核データや理論式を調査し、得られた描像について数式処理ソフト ウエアの助けを借りてこれを確認し、また発展させて、数理的基礎に関する拡充を行った。

第2章では、従来の数理的基礎を概観した。最初に核分裂時の中性子発生個数の初期分布 と観測される分布及び両者の変換則を説明し、また炉雑音理論の一つである Feynman-α 法 の Y 値、炉工学における諸量との関係、1949 年の Hoffmann の重要な論文に遡って二種類の 中性子ペア(coupled pair と accidental pair)との関係、同時計数法の単味計数率 S 及び二重 相関計数率 D と Y 値との関係を説明した。続いてこれらの関係から、従来は superfission と 呼ばれる考え方から導出されていた S と D の公式が、そのような考え方に拠らずとも導出で きることを Croft の文献を参考にして説明した。また従来用いられていた階乗モーメントの 物理的な意味合いは高校の数学で教わる「組合せ」であること、従来 Rossi-alpha 分布上に 水平線を引いてその上側が coupled pair と見做されていたがここに accidental pair が含まれる こと、現場での経験としてこの点を問題と認識していることを説明した。更に、二重相関の 計数方法と測定装置について、主体的に計量管理及び保障措置対応を進める上で理解すべき 式とパラメータ等を、実際に用いられている装置を例として詳しく説明した。

第3章では、最初に主な自発核分裂性核種と誘導核分裂性核種(熱領域,1 MeV,2 MeV) の、核分裂1回あたりの単味中性子の個数と複数個ペアの組数の期待値を、従来の階乗モー メントによる表現と、新たな「組合せ」による表現の両方により示した。続いて superfission と呼ばれる考え方によって S と D 及び三重相関計数率 T の公式を導く手順を、Hage の文献 を参考にして説明した。しかしながら、この手順では四重相関の公式を導くことは、著しく 困難である。このため、Böhnel の文献を参考にして確率母関数を用いる方法を習得し、数式 処理ソフトウエアを利用して、七重相関までの公式を代数的に初めて導いた。「組合せ」に よる表現を用いると係数が簡素になり、また物理的な意味が判りにくい項が消去されるの で、筆者はこの方が好ましいと考えている。

第4章では、第5章への準備として、最初に中性子と¹⁶O,²³⁵U,²³⁶U,²³⁸U,²³⁷Np,²³⁸Pu,²³⁹Pu, ²⁴⁰Pu, ²⁴¹Pu, ²⁴²Pu, ²⁴¹Am の散乱・吸収断面積のエネルギー依存性を、全断面積、弾性散乱断面 積、弾性散乱以外の断面積、核分裂反応断面積、(n,γ)反応断面積、(n, 2n)等反応断面 積、非弾性散乱断面積に区分し、かつ高速中性子領域について詳細に示した。またその傾向 について説明した。次にプルトニウム転換技術開発施設で実際に取り扱った代表的な組成の ウラン・プルトニウム混合二酸化物を仮定し、中性子の平均自由行程をエネルギーの関数と して導いた。結果は 10 eV から 10 MeV の範囲で 1~5 cm と概ね一定であり、cm で一桁台 の寸法の試料ならば衝突回数は零から数回となる(正確な評価は第5章の平均距離による) ため、大部分の中性子は試料内部で散乱・吸収されることなく外へ漏れることが確かめられ た。続いて自発核分裂反応或いは誘導核分裂反応で生じる中性子のエネルギースペクトルの 近似式を文献に基づいて示し、また(α, n)反応で生じるスペクトルの近似式を Jacob らの 文献値に基づいて導き、この混合二酸化物の中性子スペクトルを計算した。結果は旧動燃の 安全管理部が同じ混合二酸化物を過去に測定した結果や Chichester らが MCNP-PoliMi から 求めた結果と良く一致し、1 MeV 弱から 2 MeV 強まで台地状(ほぼ平坦)となり、平均は 1.97 MeV で、6 MeV 未満が面積の 99% を占めていた。続いて1つの線スペクトルから散乱 1回で1つの矩形スペクトルが生じるという炉工学の知見を用いて、N-1回目のスペクトル から N回目のスペクトルを求めるという手順を繰り返し、¹⁶O 単体内で弾性散乱を繰り返す 中性子のスペクトルが、矩形→三角形→対数正規分布様と変化する様子を近似式として初め て導いた。『O 単体としたのは、U, Pu による中性子の減速がごく僅かなためである。'H は 考慮したかったが、計算が複雑になるため見送った。更にこの近似式を用いて、先に求めた 連続エネルギースペクトルが変化する様子を描いた。衝突回数が零から数回ならばスペクト ルの変化が僅かであることを確認した。

第5章では、最初に試料内部の任意の点から表面の任意の点までの平均距離という新たな 概念を説明し、座標系の選択に留意してその導出方法を説明した。半径1の球の平均距離は 0.901と求まり、球以外の場合の平均距離の計算は予想外に複雑であったが、半径1の円柱 の平均距離を高さの関数として導出するとともに、体積を維持して円柱のまま形を変えた時 に平均距離/半径が最大 2.70(高さ/半径が 17.1の時)となることを導いた。中性子が試料 内で散乱・吸収を起こす確率はこの条件が最大で、中性子の漏れは最小になる。漏れが最小 になるのは疑いもなく球だと思われているが、平均自由行程が試料寸法と同程度かそれ以上 の場合はそれ程簡単ではないことが判った。続いて先に仮定したウラン・プルトニウム混合 二酸化物について核分裂反応断面積の全断面積に対する比をエネルギーの関数として導き、 エネルギースペクトルで重みづけして、核分裂反応断面積の全断面積に対する比の積分値と して 0.0875を導いた。平均自由行程と平均距離から、中性子が試料内で散乱・吸収を起こす 確率を求め、この積分値との積(衝突1回の場合)又は簡単な式(衝突が複数回の場合)に よって誘導核分裂の確率を求めることにより、モンテカルロ法に拠らずに初めて漏れ増倍率 を評価した。結果はウラン・プルトニウム混合二酸化物の製品粉末を収納する缶の場合でも その他の容器の場合でも、測定結果(簡易法ではなく *s*, *D*に加えて*T*も測定した場合)と 0.1 gPu ~ 1 kgPu の範囲で良く一致した。評価値からの小さな外れは、測定時の試料形状の 円柱形状からの外れと考えられた。併せて (n,γ) 吸収反応断面積の全断面積に対する比を エネルギーの関数として導出し、エネルギースペクトルで重みづけし、 (n,γ) 吸収反応断面 積の全断面積に対する比の積分値として 0.0043 を導いた。従って、核分裂反応の確率に比べ て中性子捕獲反応の確率は小さいという従来の暗黙の前提を確認することができた。しかし ながら今後、漏れ増倍率の精度を上げてゆく時、無視し得るとは言える程には小さくない。 本章の記述は、モンテカルロ法に疑念を呈するものではない。複雑な系ではモンテカルロ法 は極めて有用である。但し、得られた結果の解釈、特に未経験の条件での計算結果の解釈を 誤らないためには、明確な物理的描像を持つことが大事であると考えている。

第6章では、最初に Poisson 過程の上位概念である renewal 過程について、通常の時間軸と 事象毎の経過時間の二つの異なる時間軸があること、Poisson 過程は事象到来 "*rate*" が定数 となる場合であること、また各確率変数の PDF, PMF, CDF について説明した。同時計数の 仕組みには R+A scaler と A scaler があり、読み取り時に前者の時刻 0 には必ずパルスがある が、後者はそうとは限らないという違いがあり、この違いがまさしく二つの時間軸の違いに 対応していること、R + A scaler はパルスの時間間隔(interarrival time)を確率変数とするが A scaler は通常の時刻(arrival time)を確率変数とすることを説明した。続いてバックグラウ ンドが高い場所でプルトニウムの計量測定を余儀なくされる実際の例を示し、第2章で問題 と認識していると述べた点について詳しく説明するとともに、accidental pair = 見掛けの相関 を持つ中性子ペアを「ほぼ同時中性子」と呼んだ。更に 1949 年の Hoffmann の重要な論文に 戻って accidental pair の理論値を導き、Poisson 過程に関する理解と式の上でも整合すること を確認した上で、具体的な測定条件下でのほぼ同時中性子の影響を初めて評価した。

廃止措置を考えた時、Cmを少量含むウラン・プルトニウム混合二酸化物を中性子計数に より計量しようとすれば、単位重量あたりのCmの自発核分裂中性子数はPuのそれの1万 倍もあるので、Cm重量がPu重量の1/1000でも二重相関計数率はCmが9割強を占める。 Cmの影響を排除しない限りPuの計量管理・保障措置対応はできないので、米国の次世代 保障措置行動計画(NGSI)の使用済燃料非破壊測定プロジェクトに挙げられたDifferential Die-Away Self-Interrogation (DDSI)などは候補の一つと思われる。この方法の数理としては Anderson らの文献⁷⁸がある。筆者は、多重相関分布の測定結果からガウス分布を仮定して Cmの影響を排除する方法を考えているが、このためには、中性子を減速せずに短い*τ_{di}* で、高次の多重相関まで正確に計数することが必要となる。このための検出装置としては Chichester らの文献⁷⁹が参考になる。一方、中性子共鳴濃度分析(Neutron Resonance Densitometry)を発展させる方法は既に実験が始まっているが、多重相関計数技術が成立するなら ば、PuとCm以外の元素の影響を原理的に受けない点、機器が小型で簡素な点、保障措置 における独立検認の容易さ等の特徴を生かして、設計や設置が比較的容易で、査察側が受け 入れ易い実用的な計量装置を実現できる可能性がある。得られた基礎的知見を生かし、その ような装置の成立可能性を見極めてゆきたいと考えている。

謝辞

本報告の基となった現場での測定経験の積み重ね、装置の設置・改良・開発、査察官立ち 会いのもとでの校正作業等は、再処理センター処理部転換技術課の課員による安全かつ注意 深い現場作業と、IAEA から信頼される技術力を持つ LANL の研究者による支援・助言に よって達成されたものであり、ここに深く感謝の意を表します。また、査察官との率直かつ 正確な意見交換、同じ技術者としての信頼関係の醸成等は、同センター技術部核物質管理課 の課員及び技術導入当時のプルトニウム燃料工場管理課の課員による的確かつ丁寧な助言・ 調整によって達成されたものであり、ここに深く感謝の意を表します。

また公開文献からの図版の転載については、日本原子力学会、核物質管理学会日本支部、 Journal of Nuclear Materials Management、PEARSON(ADDISON-WESLEY PRESS, INC.)、 Los Alamos National Laboratory、Idaho National Laboratory より快く承諾を頂きました。 ここに深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Hosoma T., Ichige K., Takahashi Y., マイクロ波加熱直接脱硝法による混合転換プロセスの実証20年 の歩み、サイクル機構技報, no.24, 2004, pp.11-26.
- 2) Nakamura H., Hosoma T., Tanaka I., 設備更新時のグローブボックス内在庫検認における保障措置技術開発, サイクル機構技報, no.16, 2002, pp.27-36.
- 3) Wenz T., Menlove H.O., Vo D., Polk P., Abhold M., Hosoma T., Conceptual Design for the Improved Plutonium Canister Assay System (iPCAS) at PCDF, LA-CP-03-0081, 2003.
- 4) Nakamura H., Beddingfield D.H., Nakamichi H., Kurita T., Concept of a New GloveBox Cleanout Assistance Tool (BCAT) by Using Distributed Source-Term Analysis (DSTA), Proc. INMM, 2010.
- Nakamura H., Nakamichi H., Mukai Y., Yoshimoto K., Beddingfield D.H., Feasibility Study of Neutron Multiplicity Assay for a Heterogeneous Sludge Sample Containing Na, Pu and Other Impurities, Proc. IAEA Symposium, 2010.
- Nakamura H., Beddingfield D.H., Montoya J.S., Nakamichi H., Mukai Y., Kurita T., Implementation of Dynamic Cross-Talk Correction for MOX Holdup Assay Measurements Among Multiple Gloveboxes, Proc. INMM, 2012.
- Lafleur A.M., Nakamura H., Menlove H.O., Marlow J., Swinhoe M., Mukai Y., Kurita T., Design and Implementation of a Passive Neutron Counter to Continuously Monitor Holdup in Glove Boxes, Proc. INMM, 2012.
- Nakamura H., Lafleur A.M., Mukai Y., Hayashi H., Menlove H.O., Marlow J.B., Kurita T., Proposal of Direct Alpha Estimation Technique by Using Ring Ratio in the Continuous Neutron Monitor (CNM), Proc. INMM, 2013.
- 9) Makino R., Swinhoe M.T., Suzuki Y., Mukai Y., Menlove H.O., Marlow J.B., Nakamura H., Improvement of INVS Measurement Uncertainty for Pu and U-Pu Nitrate Solution, Proc. INMM, 2014.
- 10) Nakamura H., Takaya A., Mukai Y., Hosoma T., Yoshimoto K., Tamura T., Iwamoto T., First Trial to Study the Feasibility of Direct Plutonium Mass Measurement in a Process Tank by a New NDA, Proc. INMM, 2009.
- 11) Takaya A., Mukai Y., Nakamura H., Hosoma T., Yoshimoto K., Tamura T., Iwamoto T., Technical Challenge and Demonstration of Advanced Solution Monitoring and Measurement System (ASMS), Proc. IAEA Symposium, 2010.
- 12) Nakamura H., Mukai Y., Yoshimoto K., Tamura T., Iwamoto T., Development and Future Challenge for Advanced Solution Measurement and Monitoring System (ASMS), Proc. INMM, 2011.
- 13) Hoffmann F., Chapter 9 : Statistical Aspects of Pile Theory, The Science and Engineering of Nuclear Power Volume II, Addison-Wesley Press, Inc., 1949, pp.103-119.
- 14) Feynman R.P., Hoffmann F., Serber R., Dispersion of the Neutron Emission in U-235 Fission, J. Nuclear Energy, vol.3, 1956, pp.64-69.
- 15) Croft S., Favalli A., Hauck D.K., Henzlova D., Santi P.A., Feynman Variance-to-mean in the context of passive neutron coincidence counting, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, vol.686, 2012, pp.136-144.
- 16) Reilly D., Ensslin E., Smith H, Jr., Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials, Kreiner S. editor, NUREG/CR-5550, LA-UR-90-732, 1991.

- Reilly D. editor, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials 2007 Addendum, Los Alamos National Laboratory.
- 18) Ensslin N., Harker W.C., Krick M.S., Langner D.G., Pickrell M.M., Stewart J.E., Application Guide to Neutron Multiplicity Counting, Skiby J. editor, LA-13422-M, 1998.
- 19) Terrell J., Distributions of Fission Neutron Numbers, Physical Review, vol.108, no.3, 1957, pp.783-789.
- 20) Holden N.E., Zucker M.S., A Reevaluation of the Average Prompt Neutron Emission Multiplicity (Nubar) Values from Fission of Uranium and Transuranium Nuclides, BNL-NCS-35513, 1984.
- Holden N.E., Zucker M.S., Prompt Neutron Multiplicities for the Transplutoniurn Nuclides, BNL-NCS-36379, 1985.
- 22) Zucker M.S., Holden N.E., Energy Dependence of the Neutron Multiplicity Pν in Fast Neutron Induced Fission of ^{235,238}U and ²³⁹Pu, BNL-38491, 1986.
- 23) Holden N.E., Zucker M.S., Prompt Neutron Multiplicities for the Transplutonium Nuclides, Radiation Effects: Incorporating Plasma Science and Plasma Technology, vol.96:1-4, 1986, pp.289-292.
- 24) Santi P., Beddingfield D.H., Mayo D.R., Revised Prompt Neutron Emission Multiplicity Distributions for ^{236,238}Pu, Nuclear Physics A, vol.756, 2005, pp.325-332.
- 25) Durrett R., Essentials of Stochastic Processes, Springer, 1999. (今野紀雄ほか訳, 確率過程の基礎, 丸善出版, 2005)
- 26) 「炉雑音計測の高度化と新しい応用」研究専門員会、ノイズザリバイバル、日本原子力学会、2001.
- 27) Duderstadt J.J., Hamilton L.J., Nuclear Reactor Analysis, John Wiley & Sons, 1976. (成田正邦/藤田文行 共訳, 原子炉の理論と解析(上,下),現代工学社, 1980)
- 28) Spriggs G.D., Campbell J.M., Piksaikin V.M., An 8-Group Delayed Neutron Model Based on a Consistent Set of Half-Lives, Progress in Nuclear Energy, vol.41, no.1-4, 2002, pp.223-251.
- 29) Lewins J., Chapter 2 : Neutron and Precursor Equation, Nuclear Reactor Kinetics And Control, Pergamon Press, 1978.
- 30) Carta M., Dulla S., Peluso V., Ravetto P., Bianchini G., Calculation of the Effective Delayed Neutron Fraction by Deterministic and Monte Carlo Methods, Science and Technology of Nuclear Installations, ID 584256, 2011.
- 31) Fort E., Zammit-Averlant V., Salvatores M., Filip A., Lebrat J-F., Recommended Values of the Delayed Neutron Yield for : U-235 ; U-238 and Pu-239, Progress in Nuclear Energy, vol.41, no.1-4, 2002, pp.317-359.
- 32) Hainoun A., Khamis I., Determination of Neutron Generation Time in Miniature Neutron Source Reactor by Measurement of Neutronics Transfer Function, Nuclear Engineering and Design, vol.195, 2000, pp.299-305.
- 33) Hage W., Cifarelli D.M., Correlation Analysis with Neutron Count Distributions in Randomly or Signal Triggered Time Intervals for Assay of Special Fissile Materials, Nuclear Science And Engineering, vol.89, 1985, pp.159-176.
- 34) Böhnel K., Determination of Plutonium in Nuclear Fuels Using the Neutron Coincidence Method, KFK2203, 1975.
- 35) Böhnel K., The Effect of Multiplication on the Quantitative Determination of Spontaneously Fissioning Isotopes by Neutron Correlation Analysis, Nuclear Science and Engineering, vol.90, 1985, pp.75-82.

- 36) Ensslin N., Chapter 16 : Principles of Neutron Coincidence Counting, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials, NUREG/CR-5550, LA-UR-90-732, 1991, pp.457-492.
- 37) Ensslin N., Krick M.S., Langner D.G., Pickrell M.M., Reilly T.D., Stewart J.E., Chapter 6 : Passive Neutron Multiplicity Counting, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials 2007 Addendum, Los Alamos National Laboratory.
- 38) Ensslin N., Harker W.C., Krick M.S., Langner D.G., Pickrell M.M., Stewart J.E., Application Guide to Neutron Multiplicity Counting, Skiby J. editor, LA-13422-M, 1998.
- 39) Crane T.W. and Barker M.P., Chapter 13 : Neutron Detectors, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials, NUREG/CR-5550, LA-UR-90-732, 1991, pp.379-406.
- 40) Pickrell M.M., Lavietes A.D., Gavron V., Henzlova D., Menlove H.O., Joyce M.J., Kouzes R.T., The IAEA Workshop on Requirements and Potential Technologies for Replacement of ³He Detectors in IAEA Safeguards Applications, JNMM, vol.XLI, no.2, 2013, pp.14-29.
- 41) Kureta M., Soyama K., Seya M., Ohzu A., Haruyama M., Takase M., Sakasai K., Nakamura T., Toh K., Development Plan of Pu NDA System Using ZnS Ceramic Scintillator, Proc. INMM, 2012.
- 42) Nakamura H., Kureta M., Ohzu A., Soyama K., Nakamura T., Mukai Y., Seya M., Demonstration Plan of Pu NDA System Using ZnS Ceramic Scintillator, Proc. INMM, 2012.
- 43) Nakamura H., Ohzu A., Kobayashi N., Mukai Y., Sakasai K., Nakamura T., Soyama K., Kureta M., Kurita T., Seya M., Development and Demonstration of a Pu NDA System Using ZnS/¹⁰B₂O₃ Ceramic Scintillator Detectors, Proc. INMM, 2014.
- 44) Nakamura H., Tanaka H., Hosoma T., Ichige K., Takahashi Y., Tanaka I., バッグアウト廃棄物中のプル トニウム量の迅速測定その2, 第22回核物質管理学会年次大会論文集, 2001.
- 45) Murata T., Matsunobu H., Shibata K., Evaluation of the (*α*,xn) Reaction Data for JENDL/AN2005, JAEA-Research 2006-052, 2006.
- 46) Matsunobu H., Oku T., Iijima S., Naito Y., Masukawa F., Nakasima R., (α, n) 反応と自発核分裂による 中性子収率を計算するためのデータブック, JAERI 1324, 1999.
- 47) Ensslin N., Chapter 11 : Origin of Neutron Radiation, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials, NUREG/CR-5550, LA-UR-90-732, 1991, pp.337-356.
- 48) Hosoma T., Nakamura H., Mukai Y., Fujisaku S., 製品MOX粉末のPu同位体組成比を高分解能γ分光 分析により測定する際の不確かさを低減する試み, 第28回核物質管理学会年次大会論文集, 2007.
- 49) Tanaka H., Nakamura H., Hosoma T., Design of Geometrical Detector Arrangement for Extensive Holdup Measurement, Proc. IAEA Symposium, 2001.
- 50) D'yachenko N.P., Kolosov N.P., Kuz'minov B.D., Sergachev A.I., Surin V.M., Energy Dependence of Average Number of Prompt Neutrons in Pu²⁴¹ Fission, Translated from Atomnaya Energiya, vol. 36, no.4, pp. 321-322, April, 1974.
- 51) Nakagawa T., Estimation of Covariance Matrices for Nuclear Data of ²³⁷Np, ²⁴¹Am and ²⁴³Am, Journal of Nuclear Science and Technology, vol.42, no.11, 2005, pp.984-993.
- 52) Ohsawa T., Empirical Formulas for Estimation of Fission Prompt Neutron Multiplicity for Actinide Nuclides, Journal of Nuclear and Radiochemical Sciences, vol.9, no.1, 2008, pp.19-25.
- 53) Pauli H.C., Ledergerber T., Fission Threshold Energies in the Actinide Region, Nuclear Physics, vol.A175, 1971, pp.545-555.

- 54) Vladuca G., Tudora A., Improved Los Alamos Model Applied to the Neutron Induced Fission of ²³⁹Pu and ²⁴⁰Pu and to the Spontaneous Fission of Pu Isotopes, Annals of Nuclear Energy, vol.28, 2001, pp.689-700.
- 55) Hage W., Cifarelli D.M., On the Factorial Moments of the Neutron Multiplicity Distribution of Fission Cascades, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, vol.236, 1985, pp.165-177.
- 56) Ensslin N., Gavron A., Harker W.C., Krick M.S., Langner D.G., Miller M.C., Pickrell M.M., Expected Precision for Neutron Multiplicity Assay using Higher Order Moments, LA-UR-97-2716, 1997.
- 57) Ensslin N., Dytlewski N., Krick M.S., Assay Variance as a Figure of Merit for Neutron Multiplicity Counters, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, vol.290, 1990, pp.197-207.
- 58) Nakao N., Tsujimura N., Nakamura T., Momose T., Ninomiya K., Ishiguro H., PuO₂-UO₂ 混合燃料およ び含鉛アクリル遮蔽体透過後の中性子スペクトル測定, 日本原子力学会誌, vol.35, no.12, 1993, pp.1103-1114.
- 59) Watt B.E., Energy Spectrum of Neutrons From Thermal Fission of U²³⁵, Physical Review, vol.87, no.6, 1952, pp.1037-1041.
- 60) Madland D.G., New Fission-Neutron-Spectrum Representation for ENDF, LA-9285-MS (ENDF-321), 1982.
- 61) Cullen D.E., Sampling ENDL Watt Fission Spectra, UCRL-TR-203351, Lawrence Livermore National Laboratory, 2004.
- 62) Aziz M., Shaker M.O., Aboanber A., Massoud E., Slama M., Improved Formula For Prompt Fission Neutron Spectrum, Journal of Nuclear and Radiation Physics, vol.6, no.1, 2011, pp.31-41.
- 63) Verbeke J.M., Hagmann C., Wright D., Simulation of Neutron and Gamma Ray Emission From Fission and Photofission, UCRL-AR-228518, 2010.
- 64) Jacobs G.J.H., Liskien H., Energy Spectra of Neutrons Produced by α-Particles in Thick Targets of Light Elements, Ann. nucl. Energy, vol.10, no.10, 1983, pp.541-552.
- 65) Frame K., Clay W., Elmont T., Esch E., Karpius P., Macarther D., Mckigney E., Santi P., Smith M., Thron J., Williams R., Development of a Liquid Scintillator Neutron Multiplicity Counter (LSMC), Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, vol.579, 2007, pp.192-195.
- 66) Chichester D.L., Pozzi S.A., Dolan J.L., Flaska M., Johnson J.T., Seabury E.H., Grantz E.M., Neutron Emission Characteristics of Two Mixed-Oxide Fuels: Simulations and Initial Experiments, INL/ EXT-09-16566, 2009.
- 67) Liverhant S.E., Chapter 6 : Thermal Neutrons, Elementary Introduction to Nuclear Reactor Physics, 1960, pp.134-169.
- 68) Rinard P.M., Chapter 12 : Neutron Interactions with Matter, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials, NUREG/CR-5550, LA-UR-90-732, 1991, pp.357-378.
- 69) Stewart J.E., Chapter 14 : Principles of Neutron Counting, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials, NUREG/CR-5550, LA-UR-90-732, 1991, pp.407-434.
- 70) Miller M.C., Byrd R.C., Ensslin N., Feldman W.C., Krick M.S., Prettyman T.H., Russo P.A., Design of a Fast Neutron Coincidence Counter, Appl. Radiat. lsot., vol.48, no.10-12, 1997, pp.1549-1555.
- 71) Chichester D.L., Pozzi S.A., Dolan J.L., Kinlaw M.T., Kaplan A.C., Flaska M., Enqvist A., Johnson J.T., Watson S.M., MPACT Fast Neutron Multiplicity System Design Concepts, INL/EXT-12-27619, 2012.
- 72) Naeem S.F., Clarke S.D., Pozzi S.A., Validation of Geant4 and MCNPX-PoliMi Simulations of Fast Neutron Detection with the EJ-309 Liquid Scintillator, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, vol.714, 2013, pp.98-104.

- 73) Ocherashvili A., Mosconi M., Crochemore J.-M., Beck A., Roesgen E., Mayorov V., Pedersen B., Fast Neutron Coincidences From Induced Fission As a Method for Detection of SNM, ESARDA Bulletin, no.49, 2013, pp.18-26.
- 74) Pickrell M.M., Veal K and Ensslin N, Chapter 8 : Fast and Epithermal Neutron Multiplicity Counters, Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials 2007 Addendum, Los Alamos National Laboratory.
- 75) Cifarelli D.M., Hage W., Models for a Three-Parameter Analysis of Neutron Signal Correlation Measurements for Fissile Material Assay, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, vol.251, 1986, pp.550-563.
- 76) Gallager R.G., Chapter 2 : Poisson processes, Stochastic Processes, Cambridge University Press, 2013.
- 77) Nguyen C.T., Determining the "doubles" Count Rate for AmLi Sources, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, vol.580, 2007, pp.289-292.
- 78) Anderson J., Chernikova D., Pázsit I., Pál L., Pozzi S.A., Two-point theory for the differential selfinterrogation Feynman-alpha method, Eur. Phys. J. Plus, vol.127 : 90, 2012.
- 79) Chichester D.L., Thompson S.J., Kinlaw M.T., Johnson J.T., Dolan J.L., Flaska M., Pozzi S.A., Statistical estimation of the performance of a fast-neutron multiplicity system for nuclear material accountancy, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 784, 2015, pp.448-454.

付録

- ・ Zucker と Holden による P_{ν} の詳細データ
- ・ 自発核分裂性核種の詳細データと使用済燃料取出し 7, 10, 15 年後の中性子の Yield
- ・ 誘導核分裂性核種の詳細データと使用済燃料取出し 7, 10, 15 年後の中性子の Yield
- ・(*a*,n)反応に関わる核種の詳細データと使用済燃料取出し 7, 10, 15 年後の中性子の Yield
- ・ 上記の表で用いた使用済燃料の燃焼条件と含まれる核種の量(0~20年間)

This is a blank page.

Recommended Pv distributions consolidated/proposed by S. Zucker and E. Holden (1984, 1985 and 1986) and supplements

Pu 235U 238U 239Pu 241Pu
D'YACHENKO, UDC NAKA
539.173, 1974 ***
2 MeV 1 MeV 2 MeV Ther
v Pv Pv Pv Pv Pv Pv
84842 0.0183989 0.0226651 0.0062555
90030 0.1384891 0.1624020 0.0611921
36175 0.3062123 0.2957263 0.2265608
89870 0.3217566 0.3119098 0.3260637
28111 0.1628673 0.1528786 0.2588354
00161 0.0455972 0.0434233 0.0956070
55581 0.0055694 0.0097473 0.0224705
11760 0.0011093 0.0009318 0.0025946
03469 0.0003159 0.0005205
.0000 1.0000 1.0000 1.0001
3.047 3.195
3.009 2.637 2.586 3.163 ± 0.026 ± 0.048 \pm
2.963 2.584 2.520 3.118
0.023 ±0.018 ±0.029 ±0.022
1.153 1.120 1.167 1.158
0.019 ±0.015 ±0.025 ±0.019

s.f.	Nucleus	2380	J	238P	'u	240P	u	242P	u	2420	Cm	244C	m	246C	m	2520	ſ
Pof	oronco	DNI NCS 255	12 (100/1)	SANTI, Nuclea	r Physics A	DNI NCS 255	12 (1094)	DNI NCS 255	12 (1094)	BNL-NCS-355	513 (1984)	BNL-NCS-355	13 (1984)	BNL-NCS-355	13 (1984)	Radiation Effe	ects, 198
Nei	erence	DIVE-INCS-555	13 (1904)	756 (2005) p	p.325-332	DIVE-INCS-555	13 (1904)	bite ites 55515 (1504)		BNL-NCS-36379 (1985)		BNL-NCS-36379 (1985)		BNL-NCS-36379 (1985)		vol. 96/1-4, pp.289-29	
n Da	ata sets	Two data	sets	One dat	a set	Seven dat	ta sets	One dat	a set	Three da	ta sets	Four dat	a sets	Two data	a sets	One data	a set
	ν	Ρv	σ	Pv	σ	Pv	σ	Ρv	σ	Pv	σ	Pv	σ	Ρv	σ	Ρv	σ
	0	0.0481677	0.0054	0.0562929	0.009	0.0631852	0.0033	0.0679423	0.0010	0.0212550	0.0040	0.0150050	0.0093	0.0152182	0.0031	0.00217	0.00
	1	0.2485215	0.0403	0.2106764	0.026	0.2319644	0.0019	0.2293159	0.0021	0.1467407	0.0123	0.1161725	0.0169	0.0762769	0.0088	0.02556	0.00
	2	0.4253044	0.0839	0.3797428	0.026	0.3333230	0.0061	0.3341228	0.0024	0.3267531	0.0118	0.2998427	0.0104	0.2627039	0.0162	0.12541	0.00
	3	0.2284094	0.0263	0.2224395	0.027	0.2528207	0.0060	0.2475507	0.0027	0.3268277	0.0121	0.3331614	0.0162	0.3449236	0.0103	0.27433	0.00
	4	0.0423438	0.0108	0.1046818	0.021	0.0986461	0.0031	0.0996922	0.0032	0.1375090	0.0102	0.1837748	0.0117	0.2180653	0.0110	0.30517	0.01
	5	0.0072533	0.0011	0.0261665	0.009	0.0180199	0.0017	0.0182398	0.0015	0.0373815	0.0100	0.0429780	0.0110	0.0755895	0.0139	0.18523	0.00
	6					0.0020406	0.0018	0.0031364	0.0006	0.0025912	0.0007	0.0087914	0.0066	0.0072227	0.0027	0.06607	0.00
	7									0.0007551	0.0007	0.0002744	0.0005			0.01414	0.00
	8									0.0001867	0.0003					0.00186	0.00
	9															0.00006	0.00
:	sum	1.0000		1.0000		1.0000		1.0000		1.0000		1.0000		1.0000		1.0000	
	7/ +	1.990		2.187		2.154		2.149		2.540		2.720		2.930		3.757	
	ν _{s1} +	± 0.195	± 9.78%	± 0.130	± 5.96%	± 0.029	± 1.33%	± 0.018	± 0.84%	± 0.079	± 3.11%	± 0.099	± 3.65%	± 0.095	± 3.26%	± 0.078	± 2.0
+	Maan	1.964		2.079		2.092		2.083		2.493		2.681		2.911		3.709	
s fit	wear	± 0.008		± 0.078		± 0.024		± 0.019		± 0.016		± 0.016		± 0.025		± 0.014	
sne	Width	0.892		1.065		1.150		1.158		1.063		1.096		1.107		1.229	
Ö	width	± 0.007		± 0.066		±0.021		± 0.016		± 0.013		± 0.013		± 0.021		± 0.012	

Explanation regarding the references :

• BNL-NCS-35513 (1984) and BNL-NCS-36379 (1985) are equivalent to or renewal of "Parameters for Several Plutonium Nuclides and 252Cf of Safeguards Interest" quoted as "Zucker 84" in LA13422-M.

• BNL-38491 (1986) is equvalent to "Energy Dependence of the Neutron Multiplicity Pv in Fast Neutron Induced Fission of 235,238U and 239Pu" quoted as "Zucker 86" in LA13422-M.

• σ of 252Cf Pv is quoted from ESAEDA Proceedings, Venice, 1984 by Zucker and Holden which is same as "Parameters for Several Plutonium Nuclides and 252Cf of Safeguards Interest" quoted as "Zucker 84" in LA13422-M. Remark :

Remark : + Distribution of Pv was fitted by : $P(\nu) = \frac{1}{2} \left[erf\left(\frac{\nu - m + 0.5}{s\sqrt{2}}\right) - erf\left(\frac{\nu - m - 0.5}{s\sqrt{2}}\right) \right]$ because $\sum_{n=0}^{\nu} P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\nu - m + \frac{1}{2})/s} \exp(-t^2/2) dt$ was given by Terrell (1957) where *m* and *s* are mean and width of Gaussian distribution.

† Uncertainties of $\overline{\nu_{i1}}$ and $\overline{\nu_{s1}}$ (where *i* and *s* means induced and spontaneous, respectively) are calculated as : $\sigma_{\overline{\nu_1}} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\text{all}} \nu^2 \sigma_{P(\nu)}^2}$ if $\sigma_{P(\nu)}$ is given, because $\overline{\nu_1}$ is defined as : $\overline{\nu_1} = \sum_{\nu=1}^{\text{all}} \nu P(\nu)$

* Weight of 241Pu becomes smaller than that of 241Am after 12~13 years later from the accident.

*** Translation of Atomnaya Energiya, 36 (4), pp.321-322, 1974. ******* Proposing a linear equation.

2	241Am #		242mAm	243Cm	245Cm
AWA, J.I	Nucl.Sci.Tech.	, 42 (11),	JAFFY and	LERNER, A	NL-7625,
pp.98	34-993, 2005			1969	
	1 MeV	2 MeV		Thermal	
	Pv	Pv	Ρv	Pv	Pv
	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-
	_	_	_	_	_
	_	_	_	_	_
	-	_	_	_	_
	_	-	-	_	_
	_	_	-	_	_
	-	-	-	-	-
.11	3.256	3.401	3.264	3.430	3.832
)16	± 0.021	± 0.025	± 0.024	± 0.047	± 0.034
	-	-	-	_	_
	-	-	-	-	-
_	if Nucleus	23511	23811	239Pu	241Am
6.		OHSAWA	. J.Nucl.Ra	diochem.S	ci 9 (1).
)2	Reference		, pp.19-25. 2	2008 ***	, , , ,,
	n. Energy		Ther	mal	
		Ρv	Pv	Pv	Ρv
12		2 250	2 250	2 004	2 1 7 0
42	$ u_{i1}$	2.358	2.359	2.894	3.179
85					
97	i.f. Nucleus	235U	238U	239Pu	241Am
.05	Reference		(same as	above)	
93	n. Energy		1 M	eV	
35		Ρv	Ρv	Ρν	Ρv
30	$\overline{\nu_{i1}}$	2.499	2.507	3.040	3.327
13	- /				
01					
01	i.f. Nucleus	235U	238U	239Pu	241Am
01	i.f. Nucleus Reference	235U	238U (same as	239Pu above)	241Am
01	i.f. Nucleus Reference n. Energy	235U	238U (same as 2 M	239Pu above) eV	241Am
01 7%	i.f. Nucleus Reference n. Energy	235U Pv	238U (same as 2 M Pv	239Pu above) eV Pv	241Am Pv
001 7%	i.f. Nucleus Reference n. Energy $\overline{\nu_{i1}}$	235U Pv 2.639	238U (same as 2 M Pv 2.655	239Pu above) eV Pv 3.185	241Am Pv 3.475

	Spontaneous fission data									n one metric t	on of fuel	Neutron vield by SE [s-1]					
				opontaneo					Fla	asped time [v]				Flasped tir	ne [v]		
Nucleus	SF <i>t</i> 1/2 [y]		Ref.	λ ^{sϝ} [s-1]	Fission yield [s-1 g-1]	$\overline{\nu_{s1}}$	Ref.	Neutron yield [s-1 g-1]	7	10	15	7		10		15	
TH230	> 2.00E+18		а	< 1.10E-26	< 2.87E-05	2.13	b	< 6.12E-05	4.75E-05	8.24E-05	1.61E-04	2.91E-09		5.04E-09		9.83E-09	
TH232	1.20E+21	± 33%	а	1.83E-29	4.75E-08	2.13	b	1.01E-07	7.87E-04	1.08E-03	1.56E-03	7.96E-11		1.09E-10		1.58E-10	
PA231	> 2.00E+17		а	< 1.10E-25	< 2.86E-04	1.92	b	< 5.50E-04	1.63E-04	2.19E-04	3.11E-04	8.97E-08		1.20E-07		1.71E-07	
U232	> 6.80E+15		а	< 3.23E-24	< 8.38E-03	1.70	b	< 1.42E-02	3.31E-04	3.53E-04	3.57E-04	4.72E-06		5.04E-06		5.09E-06	
U233	> 2.70E+17		а	< 8.14E-26	< 2.10E-04	1.75	b	< 3.68E-04	9.04E-04	1.16E-03	1.59E-03	3.32E-07		4.28E-07		5.83E-07	
U234	1.50E+16	± 13%	а	1.46E-24	3.77E-03	1.80	b	6.78E-03	3.62E+00	4.72E+00	6.49E+00	2.45E-02		3.20E-02		4.40E-02	
U235 †	1.00E+19	± 30%	а	2.20E-27	5.63E-06	1.85	b	1.04E-05	1.91E+04	1.91E+04	1.91E+04	1.98E-01		1.98E-01		1.98E-01	
U236	2.50E+16	± 4.0%	а	8.79E-25	2.24E-03	1.90	b	4.26E-03	3.31E+03	3.31E+03	3.31E+03	1.41E+01		1.41E+01		1.41E+01	
U238	8.20E+15	± 1.2%	а	2.68E-24	6.78E-03	1.99	С	1.35E-02	9.50E+05	9.50E+05	9.50E+05	1.28E+04	0.05%	1.28E+04	0.06%	1.28E+04	0.07%
NP236																	
NP237	> 1.00E+18		а	< 2.20E-26	< 5.58E-05	2.04	b	< 1.14E-04	2.62E+02	2.64E+02	2.67E+02	2.98E-02		3.00E-02		3.04E-02	
PU236	1.50E+09	± 20%	а	1.46E-17	3.74E+04	2.07	e	7.73E+04	6.36E-05	3.07E-05	9.10E-06	4.92E+00		2.37E+00		7.04E-01	
PU238	4.75E+10	± 1.9%	а	4.62E-19	1.17E+03	2.19	е	2.56E+03	4.76E+01	4.65E+01	4.47E+01	1.22E+05	0.47%	1.19E+05	0.51%	1.15E+05	0.59%
PU239	8.00E+15	± 25%	а	2.75E-24	6.92E-03	2.15	b	1.49E-02	4.76E+03	4.76E+03	4.76E+03	7.08E+01		7.08E+01		7.08E+01	
PU240	1.14E+11	± 0.9%	а	1.93E-19	4.83E+02	2.15	С	1.04E+03	1.21E+03	1.21E+03	1.21E+03	1.26E+06	4.88%	1.26E+06	5.42%	1.26E+06	6.47%
PU241	> 6.00E+16		а	< 3.66E-25	< 9.14E-04	(2)		< 1.83E-03	5.95E+02	5.15E+02	4.05E+02	1.09E+00		9.41E-01		7.40E-01	
PU242	6.77E+10	± 1.0%	а	3.24E-19	8.07E+02	2.15	С	1.74E+03	1.37E+02	1.37E+02	1.37E+02	2.38E+05	0.92%	2.38E+05	1.03%	2.38E+05	1.22%
PU244	6.60E+10	± 3.0%	а	3.33E-19	8.21E+02	2.29	С	1.88E+03	2.57E-03	2.57E-03	2.57E-03	4.84E+00		4.84E+00		4.84E+00	
AM241	1.20E+14	± 25%	а	1.83E-22	4.57E-01	2.26	b	1.03E+00	2.59E+02	3.37E+02	4.44E+02	2.67E+02		3.49E+02		4.59E+02	
AM242M	> 3.00E+12		а	< 7.32E-21	< 1.82E+01	2.33	b	< 4.24E+01	8.18E-01	8.07E-01	7.89E-01	3.47E+01		3.42E+01		3.35E+01	
AM243	2.00E+14	± 25%	а	1.10E-22	2.72E-01	2.41	b	6.56E-01	1.72E+01	1.72E+01	1.72E+01	1.13E+01		1.13E+01		1.13E+01	
CM242	7.00E+06	± 2.9%	а	3.14E-15	7.81E+06	2.54	c, d	1.98E+07	2.06E-03	1.96E-03	1.91E-03	4.07E+04	0.16%	3.88E+04	0.17%	3.78E+04	0.19%
CM243	5.50E+11	± 16%	а	3.99E-20	9.89E+01	(2.5)		2.47E+02	5.56E-02	5.17E-02	4.58E-02	1.38E+01		1.28E+01		1.13E+01	
CM244	1.32E+07	± 1.5%	а	1.66E-15	4.11E+06	2.72	c, d	1.12E+07	2.16E+00	1.93E+00	1.59E+00	2.41E+07	93.41%	2.15E+07	92.69%	1.78E+07	91.31%
CM245	1.40E+12	± 14%	а	1.57E-20	3.86E+01	(2.5)		9.64E+01	7.63E-02	7.63E-02	7.63E-02	7.35E+00		7.35E+00		7.35E+00	
CM246	1.81E+07	± 1.1%	а	1.21E-15	2.97E+06	2.93	c, d	8.70E+06	3.34E-03	3.34E-03	3.34E-03	2.91E+04	0.11%	2.91E+04	0.13%	2.91E+04	0.15%
BK249	1.80E+09	± 5.6%	а	1.22E-17	2.95E+04	3.40	d	1.00E+05	1.47E-11	1.37E-12	2.62E-14	1.47E-06		1.37E-07		2.63E-09	
CF252	8.60E+01	± 1.2%	а	2.55E-10	6.10E+11	3.76	d	2.29E+12	6.44E-12	2.93E-12	7.87E-13	1.48E+01		6.72E+00		1.81E+00	
Ref. a :	N.E. HOLDEN and D.	C. HOFFM	AN, Pure	Appl. Chem., Vol.	.72, No.8, pp.1525-1	1562, 200	0.					2.58E+07	100.0%	2.32E+07	100.0%	1.94E+07	100.0%
Ref. D:		VVILSUN, I		-ivis, Table VIII, 19	OL.	(1005)						Curra e	99.08%	loi (grou ha al	99.05%	achas 00 007	99.59% 70/
	IN.E. HOLDEN and M.	S. ZUCKER	, BINL-IN	L3-33313 (1984) a	110 BINL-INCS-303/9	(1985). 202						Sum of fer	r seven nuc	iei (gray back	kground) re	aches 99.997	00 E9/
Ref. d :	IN.E. HULDEN and M.	S. ZUCKER	, Radiat	ion Effects, 1986, \	voi. 96/1-4, pp.289-	292						Sum of four major nuclei (gray background+bold) reaches 99.5%					99.5%.

Summary of spontaneous fission nuclei and their physical data, and estimated yield of SF neutrons in one metric ton of used fuel (9×9) as a function of elasped time

Ref. e: P. SANTI, D.H. BEDDINGFIELD and D.R. MAYO, Nuclear Physics A 756 (2005) 325-332.

† Spontaneous fission half-life of U235 in LA-13422-M (Table 5.1) is ~ 30 times shorter (fission yield is ~ 30 times larger) than the one in Reference b. ORIGEN2 result of 235U SF neutron is also quite different. The half-life of U235 in this table was quoted from H.R. GUNTAN, et.al., Physical Review C, 23(3), 1981 via the Reference b. The former data reported in 1951 by SERGRÉ was ~ 50 times shorter, the data in 1966 by ALEKSANDROV was ~ 30 times shorter, and the data in 1973 by GRÜTTER was ~ 5 times shorter than the quoted one.

Summary	of induced	fission nuc	clei and their	physical dat	ta, and estimate	d relative y	ield of IF I	neutrons in one	e metric ton c	of used fuel	(9×9) a	is a
											• •	

	Induced fission data						Neutron energy spectra in dioxide Weight [g] in one met		n one metric t	on of fuel	uel Neutron vield by IF [relative †]					
	Cros	s section [ba	arns] by the	Ref. a				Ela	sped time [y]				Elasped tir	ne [y]		
Nucleus		•	- /		$\overline{ u_{i1}}$	- (Representative cross section in dioxide		,.				·	.,.		
	Thermal	1 MeV	2 MeV	3 MeV	at 2	Ref.	was assumed to be given at 2 MeV	7	10	15	7		10		15	
					MeV		-									
TH230	too small	1.28E-01	2.94E-01	2.62E-01	(2.1)		Duefile of the even costien in recorded to	4.75E-05	8.24E-05	1.61E-04	1.28E-07		2.21E-07		4.31E-07	
TH232	too small	1.46E-03	1.14E-01	1.30E-01	(2.1)		Prome of the cross section in response to	7.87E-04	1.08E-03	1.56E-03	8.11E-07		1.11E-06		1.61E-06	
							0.5-2 MoV and very small at thermal region									
PA231	2.09E-02	7.45E-01	1.03E+00	9.66E-01	(2.3)		as shown below .	1.63E-04	2.19E-04	3.11E-04	1.67E-06		2.24E-06		3.19E-06	
					<i>(</i>)		®									
U232	7.68E+01	1.95E+00	2.35E+00	2.25E+00	(2.6)		Calculated Plutonium Dioxide Spectrum A ²²¹ Po- ¹³ 0 (o, n) Spectrum	3.31E-04	3.53E-04	3.57E-04	8.71E-06		9.30E-06		9.41E-06	
U233	5.31E+02	1.84E+00	1.96E+00	1.85E+00	(2.6)		60 - B Fission Spectrum 50 - C Sum d Fission and e, n Spectra	9.04E-04	1.16E-03	1.59E-03	1.98E-05		2.54E-05		3.47E-05	
U234	6.71E-02	1.09E+00	1.52E+00	1.51E+00	(2.6)		A1 50	3.62E+00	4.72E+00	6.49E+00	6.11E-02		7.97E-02		1.10E-01	
0235	5.85E+02	1.20E+00	1.29E+00	1.22E+00	2.64	b	in Ξ 40 − Ξ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1.91E+04	1.91E+04	1.91E+04	2.76E+02	4.59%	2.76E+02	4.59%	2.76E+02	4.59%
0236	4.71E-02	3.60E-01	8.19E-01	8.69E-01	(2.6)		e c	3.31E+03	3.31E+03	3.31E+03	2.99E+01	0.50%	2.99E+01	0.50%	2.99E+01	0.50%
0238	1.68E-05	1.36E-02	5.34E-01	5.24E-01	2.59	b	20	9.50E+05	9.50E+05	9.50E+05	5.52E+03	91.87%	5.52E+03	91.87%	5.52E+03	91.86%
ND236	3 01F±03	2 00F±00	1 Q0F±00	1 70F±00	(2.0)			1 86F-04	1 86F-04	1 86F-04	1 33E-06		1 33E-06		1 33E-06	
NP230	2 0/F-02	2.00L+00	1.30L+00	1.75L+00	2.5)	c	0 1 2 3 4 5 Neutron Energy in MeV	2.62E+02	2.64F+02	2.67F+02	4.33L-00	0 09%	4.33L=00	0 09%	4.33L-00	0 09%
NI 237	2.042 02	1.402.00	1.702.00	1.002.00	2.07	C	(reprinted from the Ref. e)	2.021.02	2.040.02	2.072.02	5.402.00	0.0570	5.452.00	0.0570	5.452.00	0.0570
PU236	1.65E+02	2.11E+00	2.20E+00	2.20E+00	(3.2)		0.035	6.36E-05	3.07E-05	9.10E-06	1.90E-06		9.15E-07		2.71E-07	
PU238	1.70E+01	2.05E+00	2.15E+00	2.24E+00	(3.2)		0.03 -	4.76E+01	4.65E+01	4.47E+01	1.37E+00		1.34E+00		1.29E+00	
PU239	7.48E+02	1.73E+00	1.98E+00	1.86E+00	3.16		₹0.025Pin #2	4.76E+03	4.76E+03	4.76E+03	1.24E+02	2.07%	1.24E+02	2.07%	1.24E+02	2.07%
PU240	6.40E-02	1.52E+00	1.75E+00	1.70E+00	(3.2)		100 0.02 -	1.21E+03	1.21E+03	1.21E+03	2.83E+01	0.47%	2.82E+01	0.47%	2.82E+01	0.47%
PU241	1.01E+03	1.55E+00	1.68E+00	1.52E+00	3.20		B 0.015 -	5.95E+02	5.15E+02	4.05E+02	1.32E+01	0.22%	1.15E+01	0.19%	9.01E+00	0.15%
PU242	1.04E-03	1.43E+00	1.43E+00	1.36E+00	(3.2)			1.37E+02	1.37E+02	1.37E+02	2.59E+00		2.59E+00		2.59E+00	
PU244	too small	1.29E+00	1.28E+00	1.21E+00	(3.2)		2	2.57E-03	2.57E-03	2.57E-03	4.32E-05		4.32E-05		4.32E-05	
							0								_	
AM241	3.14E+00	1.32E+00	1.89E+00	1.83E+00	3.40	С	0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 Neutron Energy (MeV)	2.59E+02	3.37E+02	4.44E+02	6.91E+00	0.12%	9.01E+00	0.15%	1.19E+01	0.20%
AM242M	6.40E+03	1.77E+00	1.88E+00	1.87E+00	(3.5)		2.2	8.18E-01	8.07E-01	7.89E-01	2.22E-02		2.19E-02		2.14E-02	
AM243	7.39E-02	9.80E-01	1.50E+00	1.49E+00	3.50	С	S ^{2.15} 2.14	1.72E+01	1.72E+01	1.72E+01	3.71E-01		3.71E-01		3.71E-01	
CN 42 42	2.025.00		4	4.465.00	(2.7)				4 005 00	1 015 02	4 075 05				4 535 05	
CM242	3.02E+00	5.19E-01	1.55E+00	1.46E+00	(3.7)			2.06E-03	1.96E-03	1.91E-03	4.87E-05		4.64E-05		4.52E-05	
CIVI243	6.14E+02	1.88E+00	1.85E+00	1.83E+00	(3.7)	-1		5.56E-02	5.1/E-02	4.58E-02	1.57E-03		1.46E-03		1.29E-03	
	1.04E+00	1.92E+00	1./8E+00	1.95E+00	3.70	a	2 1.92 Bit 1.9	2.16E+00	1.93E+00	1.59E+00	5.92E-02		5.28E-02		4.36E-02	
CIVIZ45	2.14E+03	1.55E+00	1.81E+00	1.69E+00	(3.8)		1.85	7.03E-02	7.03E-02	7.03E-02	2.14E-03		2.14E-03		2.14E-03	
CIVIZ40	1.44E-01	1.34E+00	1.576+00	1.05E+00	(3.8)		1.8	3.34E-03	3.34E-03	3.34E-03	8.09E-05		8.09E-05		8.08E-05	
BK249	3 99F+00	5 13F-01	1 55F+00	1 53F+00	(4 0)		0 20 40 60 80 100 120 Number of Pins	1 47F-11	1 37F-12	2 62F-11	3 65F-13		3 40F-1/		6 51F-16	
CF252	3.22F+01	1.95F+00	2.46F+00	2.37F+00	(4.3)		(reprinted from the Ref. f)	6.44F-12	2.93F-12	7.87F-13	2.70F-13		1.23F-13		3.30F-14	
Ref. a :	Results of aue	ry to ENDF v	veb page (ht	tp://www.ni	ndc.bnl.	gov/exfo	or/endf00.jsp) based on ENDF/B-VII.1 released De	cember 22, 201	.1.		6.01E+03	99.93%	6.01E+03	99.93%	6.01E+03	99.93%
Ref. b :	S. Zucker and	E. Holden, Bl	NL-38491, 19	986.	,						_	98.53%	_	98.53%		98.52%
Ref. c : T. Nakagawa, J. Nucl. Sci. Tech., 42 (11), pp.984-993, 2005.						1	Calculated as : Cross section at 2 MeV × $\overline{\nu_{i1}}$ × V	Veight / Mass n	number		Sum o	of eight nuc	lei (gray bacl	kground) re	aches 99.93%	%.
Ref. d :	ef. d : T. Ohsawa, J. Nucl. Radiochem. Sci., 9 (1), pp.19-25, 2008											Sum of three major nuclei (gray background+bold) reaches 98.5%.				

Ref. e: L.W. Brackenbush and L.G. Faust, Neutron spectra of plutonium compounds, BNWL-1262, Figure 9, 1970.

Ref. f: D.L. Chichester, S.A. Pozzi, J.L. Dolan, et al., Neutron emission characteristics of two mixed-oxide fuels, INL/EXT-09-16566, 2009.

Isotopic composition of Pin #1: 238Pu, 239Pu, 240Pu, 241Pu, 242Pu, 241Am, 235U, 238U and O are 0.01, 11.42, 1.53, 0.17, 0.02, 0.06, 0.17, 74.78 and 11.85 wt. %. the fuel in the Ref. c : Pin #2 : 238Pu, 239Pu, 240Pu, 241Pu, 242Pu, 241Am, 235U, 238U and O are 0.01, 10.98, 4.10, 0.58, 0.02, 0.16, 0.16, 72.13 and 11.86 wt. %. These are equivalent to U enrichment 2.2% and Pu/U ratio ~ 0.2. Weight % of oxigen is very normal as dioxide.

function of elasped time

					(α,n) react	ion data					Weight [g] ir	one metric t	on of fuel		Neutror	n yield by (α,ι	n) reaction	[s-1]	
							Alaba		in UO2	2	Ela	sped time [y]				Elasped tir	ne [y]		
Nucleus	α branch	Total <i>t</i> 1/2	Alpha <i>t</i> 1/2	Dof	λα	Alpha yield	Alpha	Neutron		Neutron									
	ratio [%]	[y]	[y]	Rei.	[s-1]	[s-1 g-1]		yield	Ref.	yield	7	10	15	7		10		15	
							[IVIEV]	[α-1]		[s-1 g-1]									
TH230	100	7.538E+04	7.538E+04	a,b	2.91E-13	7.63E+08	4.67	1.23E-08	С	9.38E+00	4.75E-05	8.24E-05	1.61E-04	4.46E-04		7.73E-04		1.51E-03	
TH232	100	1.405E+10	1.405E+10	a,b	1.56E-18	4.06E+03	4.00	4.91E-09	С	1.99E-05	7.87E-04	1.08E-03	1.56E-03	1.57E-08		2.14E-08		3.10E-08	
PA231	100	3.276E+04	3.276E+04	a,b	6.70E-13	1.75E+09	4.97	1.54E-08	с	2.69E+01	1.63E-04	2.19E-04	3.11E-04	4.39E-03		5.89E-03		8.37E-03	
U232	100	6.890E+01	6.890E+01	a,b	3.19E-10	8.27E+11	5.30	1.90E-08	с	1.57E+04	3.31E-04	3.53E-04	3.57E-04	5.20E+00		5.55E+00		5.62E+00	
U233	100	1.592E+05	1.592E+05	a,b	1.38E-13	3.56E+08	4.82	1.39E-08	С	4.96E+00	9.04E-04	1.16E-03	1.59E-03	4.48E-03		5.76E-03		7.85E-03	
U234	100	2.455E+05	2.455E+05	a,b	8.95E-14	2.30E+08	4.76	1.33E-08	С	3.06E+00	3.62E+00	4.72E+00	6.49E+00	1.11E+01		1.44E+01		1.99E+01	
U235	100	7.038E+08	7.038E+08	а	3.12E-17	7.99E+04	4.39	8.96E-09	С	7.16E-04	1.91E+04	1.91E+04	1.91E+04	1.37E+01		1.37E+01		1.37E+01	
U236	100	2.342E+07	2.342E+07	a,b	9.38E-16	2.39E+06	4.48	1.01E-08	С	2.42E-02	3.31E+03	3.31E+03	3.31E+03	7.99E+01		7.99E+01		7.99E+01	
U238	100	4.468E+09	4.468E+09	a,b	4.92E-18	1.24E+04	4.18	6.52E-09	С	8.11E-05	9.50E+05	9.50E+05	9.50E+05	7.70E+01		7.70E+01		7.70E+01	
NP236	0.16	1.540E+05	9.625E+07	а	2.28E-16	5.82E+05	4.94	1.50E-08	с	8.73E-03	1.86E-04	1.86E-04	1.86E-04	1.62E-06		1.62E-06		1.62E-06	
NP237	100	2.144E+06	2.144E+06	a,b	1.02E-14	2.60E+07	4.77	1.34E-08	С	3.49E-01	2.62E+02	2.64E+02	2.67E+02	9.14E+01		9.19E+01		9.30E+01	
PU236	100	2.858E+00	2.858E+00	а	7.69E-09	1.96E+13	5.75	2.59E-08	с	5.08E+05	6.36E-05	3.07E-05	9.10E-06	3.23E+01		1.56E+01		4.62E+00	
PU238	100	8.770E+01	8.770E+01	a,b	2.50E-10	6.34E+11	5.49	2.18E-08	С	1.38E+04	4.76E+01	4.65E+01	4.47E+01	6.57E+05	34.19%	6.42E+05	30.51%	6.17E+05	26.31%
PU239	100	2.411E+04	2.411E+04	a,b	9.11E-13	2.29E+09	5.15	1.73E-08	С	3.97E+01	4.76E+03	4.76E+03	4.76E+03	1.89E+05	9.84%	1.89E+05	8.99%	1.89E+05	8.06%
PU240	100	6.563E+03	6.563E+03	а	3.35E-12	8.39E+09	5.16	1.74E-08	С	1.46E+02	1.21E+03	1.21E+03	1.21E+03	1.77E+05	9.20%	1.77E+05	8.40%	1.77E+05	7.53%
PU241	0.00245	1.435E+01	5.857E+05	a,b	3.75E-14	9.37E+07	4.89	1.46E-08	С	1.37E+00	5.95E+02	5.15E+02	4.05E+02	8.13E+02		7.04E+02		5.53E+02	
PU242	100	3.733E+05	3.733E+05	а	5.88E-14	1.46E+08	4.89	1.46E-08	С	2.14E+00	1.37E+02	1.37E+02	1.37E+02	2.93E+02		2.93E+02		2.93E+02	
PU244	99.9	8.080E+07	8.088E+07	а	2.72E-16	6.70E+05	4.58	1.13E-08	С	7.57E-03	2.57E-03	2.57E-03	2.57E-03	1.95E-05		1.95E-05		1.95E-05	
AM241	100	4.322E+02	4.322E+02	a,b	5.08E-11	1.27E+11	5.48	2.17E-08	с	2.75E+03	2.59E+02	3.37E+02	4.44E+02	7.13E+05	37.08%	9.29E+05	44.16%	1.22E+06	52.15%
AM242M	0.46	1.410E+02	3.065E+04	а	7.17E-13	1.78E+09	5.21	1.79E-08	С	3.19E+01	8.18E-01	8.07E-01	7.89E-01	2.61E+01		2.57E+01		2.52E+01	
AM243	100	7.370E+03	7.370E+03	a,b	2.98E-12	7.38E+09	5.27	1.86E-08	С	1.37E+02	1.72E+01	1.72E+01	1.72E+01	2.36E+03	0.12%	2.36E+03	0.11%	2.36E+03	0.10%
CM242	100	4.457E-01	4.457E-01	a,b	4.93E-08	1.23E+14	6.10	3.31E-08	с	4.06E+06	2.06E-03	1.96E-03	1.91E-03	8.34E+03	0.43%	7.94E+03	0.38%	7.75E+03	0.33%
CM243	99.7	2.910E+01	2.919E+01	а	7.53E-10	1.86E+12	5.81	2.68E-08	С	5.00E+04	5.56E-02	5.17E-02	4.58E-02	2.78E+03	0.14%	2.58E+03	0.12%	2.29E+03	0.10%
CM244	100	1.810E+01	1.810E+01	a,b	1.21E-09	2.99E+12	5.80	2.65E-08	С	7.93E+04	2.16E+00	1.93E+00	1.59E+00	1.71E+05	8.91%	1.53E+05	7.26%	1.26E+05	5.38%
CM245	100	8.500E+03	8.500E+03	а	2.58E-12	6.35E+09	5.36	1.97E-08	С	1.25E+02	7.63E-02	7.63E-02	7.63E-02	9.54E+00		9.54E+00		9.54E+00	
CM246	99.9	4.730E+03	4.735E+03	а	4.64E-12	1.14E+10	5.38	1.99E-08	С	2.26E+02	3.34E-03	3.34E-03	3.34E-03	7.55E-01		7.55E-01		7.55E-01	
BK249	0.00145	8.761E-01	6.042E+04	а	3.64E-13	8.79E+08	5.40	(2E-08)		1.76E+01	1.47E-11	1.37E-12	2.62E-14	1.29E-02		1.20E-03		2.30E-05	
CF252	96.9	2.645E+00	2.730E+00	a,b	8.05E-09	1.92E+13	6.11	(3E-08)		5.77E+05	6.44E-12	2.93E-12	7.87E-13	1.24E+02		5.63E+01		1.51E+01	
Ref. a : R	B. Firestone,	Table of Isoto	pes, 8th edition	on, Wi	ley-Interscie	ence, 1996. If	some dif	ference is fo	ound be	etween Ref. a	and Ref. b, Ref. a	was adopted	1.	1.92E+06	99.92%	2.10E+06	99.93%	2.35E+06	99.95%
Ref. b : T	he Japan Ra	dioisotope As	sociation, Rac	lioisot	ope Pocket	Data Book,	11th editi	ion, 2011.							99.22%		99.32%		99.42%
Ref. c : H	. Matsunobu,	T. Oku, S. lijir	na, et al., JAEI	RI-132	4 (Table 3.4	-4-6, -7, -8,	-9, -10),	1992.						Sum o	of eight nuc	lei (gray bacl	(ground) re	aches 99.92%	%.
				Sum of five major nuclei (gray background+bo										old) reaches 9	99.2%.				

Summary of (α, n) reactive nuclei and their physical data, and estimated yield of (α, n) neutrons in one metric ton of used fuel (9×9) as a func

Conversion of day to year :

365.24 days = one year

 $t_{1/2}^{\alpha} = \frac{100}{\alpha \text{ branch ratio } [\%]} t_{1/2}^{\text{total}} \quad \because \frac{\lambda^{\text{total}}}{\lambda^{\alpha}} = \frac{t_{1/2}^{\alpha}}{t_{1/2}^{\text{total}}} = \frac{100}{\alpha \text{ branch ratio } [\%]}$ Conversion of Total to Alpha t 1/2 :

ction	of	elasp	ed	time
-------	----	-------	----	------

| Spontaneous Fission Neutron Source | Induced Fission Neutron Source
(Alaha. N) Neutron Source | Bold ones are major nuclei | | | | |

 | |
 |

 | |

 |

 |

 |

 |

 | | |
 | | | | | |

 |
 | | | |
 |

 |

 |

 |
 |

 |

 | | | | | | | | | | | | | • |
 | | | | | | | | | - | |
|--|---|--|--|---|---|---
--
--
--
--
--
---|---|---
--
--
--
--
--|--
--
--
--
--

--
--
--
--

--
--
--
--
--
--
--
--
--

--
--|--
--|---|---|---
--|---|---
--
--

--|---
--|---|---
--
--
--
--
--
--
--
--
--
--
--
--
--
--|--------------------------------------|---|---|---|---
---|---|----------------|---------------------|----------------------|---|---|---------------------|---|------------------------|---|-----------|------------------------|---------------------|---|---------------------
---|-----------|---|
| | | | | | | TE+05 |

 | |
 |

 | |

 |

 |

 | 1E+04

 |

 | | |
 | | | | | 1E+03 |

 |
 | | | |
 |

 |

 | 1E+02

 |
 |

 |

 | [8] p | ləiY | | | | 1E+01 | | | | | | | 1 | 1E+00
 | | | | | | | | 1E-01 | | |
| 2.2/E-U1
8.19E-29
2.80E-14 | 9.18E-12
1.47E-18
5 255 25 | 5.43E-12
1.64E-08
4.60E-05 | 4.000-00
6.11E-15
3 57E-11 | 3.5/E-11
2.16E-13
5.15 00 | 5.41E-09
5.28E-16 | 5.20E-18
1.22E-10 | 3.16E-17
2.19E-14

 | 2.13E-14
1.28E-14 | 5.14E-10
1.44E-15
 | 3.92E-16

 | 6.06E-13
0 | u
1.57E-19

 | 2.72E-20

 | 5.40E-23

 | 1.81E-19
2 16E-14

 | 6.12E-17

 | 1.72E-20 | 0
4.10E-16 | 8.16E-12
1 13E 13
 | 1.57E-16 | 1.90E-15
0 | 0
1.04E-10 | 4.72E-08 | 7.08E-13
1.75E-08 | 5.68E-13

 | 4.78E-13
7 37E-08
 | 5.93E-17 | 0 | 1./1E-10
9.17E-06 | 1.30E-07
 | 2.03E-04
7.75E-08

 | 2.04E-03
0

 | 1.38E-05

 | 4.U3E-U4
0
 | 9.19E-06
4.65E-10

 | 2.08E-10

 | 0 0 | 0
3.47E-04 | 2.01E-03 | 5.19E+00
1.91E+04 | 3.31E+03
9.85E-06 | 9.50E+05 | 0
4.92E-14 | 0
4.91E-12 | 0
1.86E-04 | 2.71E+02
1 45E-07 | 1.47E-05 | 4.31E-16
0 | 0
2.70E-06 | 0
 | 4.30E+U1
4.76E+03 | 1.21E+03
2 18F+02 | 1.37E+02 | 6.87E-16
2.57E-03 | 0
3.12F-22 | 0 | 0
5.27E+02 | 7.71E-01
¤ フフ₣-06 | J | 1.72E+01
î |
| 4.00E-01
8.19E-29
1.75E-14 | 9.18E-12
1.03E-18 | 1.96E-12
7.81E-09
2.07E-05 | 4.30E-15
1 4.3E-11 | 1.42E-11
1.35E-13
5 425 50 | 5.42E-09
2.49E-16 | 5.20E-18
7.47E-11 | 3.16E-17
8.72E-15

 | 7.97E-15 | 5.14E-10
1.01E-15
 | 1.85E-16

 | 2.41E-13
0 | u
9.77E-20

 | 2.72E-20

 | 2.55E-23

 | 1.13E-19
2 16E-14

 | 2.89E-17

 | 1.21E-20 | 0
2.56E-16 | 8.16E-12
E 22E-14
 | 1.10E-16 | 1.19E-15
0 | 0
6.51E-11 | 4.73E-08 | 4.98E-13
8.27E-09 | 3.76E-13

 | 3.36E-13
4.60E-08
 | 4.00E-00
3.92E-17 | 0 | 1.0/E-10
9.17E-06 | 9.18E-08
 | 1.75E-04
7.75E-08

 | 1.56E-03
0

 | 1.38E-05

 | 3.11E-04
0
 | 9.06E-06
4.65E-10

 | 2.08E-10

 | 0 0 | 0
3.57E-04 | 1.59E-03 | 0.49E+00 | 3.31E+03
1.25E-05 | 9.50E+05 | 0
4.92E-14 | 0
1.20E-10 | 0
1.86E-04 | 2.67E+02 | 1.48E-05 | 4.31E-16
0 | 0
9.10E-06 | 3.06E-41
 | 4.47E+U1 4.76E+03 | 1.21E+03
1 05E+02 | 1.37E+02 | 6.87E-16
2.57E-03 | 0
3.12F-22 | 0 | 0
4.44E+02 | 7.89E-01
0.44E-06 | 22-1-1-10 | 1.72E+01 |
| 8.19E-29
9.09E-15 | 5.30E-12
5.98E-19 | 5.93E-13
2.83E-09
1.61E-05 | 2.91E-15 | 4./9E-12
7.03E-14 | 4.90E-09
9.05E-17 | 5.20E-18
4.19E-11 | 3.16E-17
2.95E-15

 | 4.15E-15 | 4.65E-10
5.84E-16
 | 5.72E-17

 | 7.23E-14
N | и
5.09Е-20

 | 2.46E-20

 | 9.24E-24

 | 5.89E-20
1 96E-14

 | 1.05E-17

 | 3.21E-21 | 0
1.33E-16 | 7.38E-12
 | 7.46E-17 | 5.19E-16
0 | 0
3.39E-11 | 4.27E-08 | 3.37E-13
3.00E-09 | 2.06E-13

 | 2.28E-13
 | 2.15E-17 | 0 | 8.29E-06 | 5.22E-08
 | 5.24E-U3
7.75E-08

 | 1.08E-03
0

 | 1.38E-05

 | 2.19E-04
0
 | 3.95E-06
4.65E-10

 | 2.08E-10

 | 0 0 | 0
3.53E-04 | 1.16E-03 | 72E+00 | 1.59E-05 | | 0
4.92E-14 | 0
2.93E-09 | 0
1.86E-04 | :.64E+02 | 1.48E-07 | 4.31E-16
0 | 0
3.07E-05 | 3.48E-29
 | 76E+03 4 | 21E+03 | 37E+02 | 5.87E-16
2.57E-03 | 0
8.12F-22 | 0 | 0
1.37E+02 4 | 3.07E-01
65E-06 | 2.001 00 | 72E+01 |
| 8.19E-29
5.25E-15
5.25E-15 | 0.83E-12
5.48E-19 | 8.99E-13
L.22E-09 | 2.28E-15 | 1.06E-14 | 1.03E-09 | 5.20E-18
2.77E-11 | 3.16E-17

 | 2.40E-15 | 3.82E-10 .
5.37E-16 .
 | 2.91E-17

 | 1.09E-14 . | 0
2.94E-20

 | 2.02E-20

 | 1.01E-24

 | 3.40E-20

 | 1.55E-18

 | 5.45E-21 | 0
7.70E-17 | 5.07E-12
 | 5.86E-17 | 3.57E-16 | 0
L.96E-11 | 3.52E-08 | 2.65E-13
L.30E-09 | L.20E-13

 | L.79E-13
 | L.26E-17 | 0 | 5.22E-11
5.82E-06 | 1.88E-08
 | 1.75E-08

 | 7.87E-04
0

 | L.38E-05

 | b3E-04
 | 3.90E-06

 | 2.08E-10

 | 0 0 | 0
3.31E-04 | 9.04E-04 | .91E+04 1 | .31E+03 3
L.84E-05 | .50E+05 | 0
1.92E-14 | 0
80-366-1 | 0
L.86E-04 | .62E+02 2 | L.48E-05 | 1.31E-16 | 0
5.36E-05 | 5.95E-22
 | 76E+U1 - | 21E+03 1
95F+02 5 | .37E+02 | 5.87E-16
2.57E-03 | 0
8.12E-22 | 0 | 0
.59E+02 3 | 3.18E-01 | | .72E+01 1 |
| .19E-29 8
.40E-15 5 | .28E-12
.36E-19
.37 19 | .71E-13 3
.71E-10 1
87E-06 9 | .82E-15 2 | .85E-14 4
.85E-14 4 | .52E-09 4 | .20E-18 5 | .15E-17 3

 | .09E-15 2 | .39E-10 3
.26E-16 5
 | .97E-18

 | .08E-14 4
0 | U
.34E-20 2

 | .27E-20 2

 | .23E-24 4

 | .55E-20 3
01E-14 1

 | .40E-18 4

 | .12E-21 (| .52E-17 7 | .80E-12 6
 | .65E-17 | .63E-16 3 | .90E-39
.94E-12 1 | .20E-08 | .10E-13 2
.01E-10 1 | .32E-14

 | .42E-13 1
.32E-09 1
 | .55E-18 1 | .94E-37 | .27E-06 6 | .88E-08 4
 | .75E-08 7

 | .98E-04 7
0

 | .38E-05 1

 | .U8E-040
 | .87E-06 8
.65E-10 4

 | .08E-10

 | 0
.91E-34 | 0
.73E-04 | .45E-04 9 | 91E+04 1 | .31E+03 3
.13E-05 1 | 50E+05 9 | 0
.92E-14 4 | 0
.36E-07 1 | 0
.86E-04 1 | 61E+02 2 | .48E-05 | .31E-16 4
0 | 0
.32E-04 6 | .02E-14
 | 87E+U1 4
76E+03 4 | 21E+03 1
87F+02 5 | 37E+02 1 | .87E-16 6 | 0
12F-22 | 0 | 0
.68E+02 2 | .29E-01 8 | | 72E+01 1 |
| 196-29 8
196-29 8
106-15 2 | .09E-12 4
.81E-19 4 | .03E-13 2
.15E-10 3
.65E-07 7 | 59E-15 1 78E-12 1 | 47E-15 1
47E-15 1 | .23E-09 2
.72E-18 1 | 20E-18 5
.03E-11 1 | .16E-17 3
10E-15 1

 | 00E-16 1 | .17E-10 2
.73E-16 4
 | 76E-18 8

 | .96E-14 3
0 | U
13E-21 1

 | 18E-21 1

 | 80E-25 1

 | .10E-21 1
91E-15 1

 | 31E-19 1

 | 49E-21 5 | .32E-31 3.61E-17 3 | 85E-12 3
 | 07E-17 4 | 45E-17 1 | .46E-28 3.08E-12 8 | 07E-08 2 | .84E-13 2
.23E-10 4 | 18E-14 5

 | 24E-13 1
89E-09 6
 | 28E-13 0 | 26E-27 1 | ./1E-12 1
.08E-06 4 | 40E-08 3
 | .75E-08 7

 | .06E-04 4
0

 | 38E-05 1

 | 0 IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
 | 86E-06 8
65E-10 4

 | 08E-10 2

 | 0
.13E-24 1 | 0
96E-04 2 | 70E-04 6 | /4E+00 2.
91E+04 1. | 31E+03 3.
34E-05 2 | 50E+05 9 | 0
.92E-14 4 | 0.
87E-07 1 | 0
86E-04 1 | 61E+02 2. | .48E-05 1 | .31E-16 4
0 | 0
15E-04 1 | 77E-10 1
 | 93E+U1 4.
76E+03 4. | 21E+03 1. | 37E+02 1 | .87E-16 6
.57E-03 2 | 0
17F-22 3 | 0 | 0
85E+01 1. | 37E-01 8 | - | 72E+01 1. |
| 20E-01 1
19E-29 8
36E-16 1
36E-16 1 | 05E-12 2
61E-19 3 | 99E-14 1
16E-11 1
5AE-07 7 | 50E-15 1
80E-17 1 | 92E-12 1
92E-15 8 | 18E-10 1
61E-18 3 | 20E-18 5
43E-12 1 | 16E-17 3
11E-15 1

 | 90E-16 5 | 86E-11 1
53E-16 3
 | 20E-18 2

 | 76E-14 2
0 | u
56E-21 6

 | 10E-21 6

 | 65E-25 3

 | 12E-21 7
47E-15 4

 | 87E-19 4

 | 24E-21 4 | 33E-18 1 | 31E-13 1
 | 85E-17 4 | 33E-17 7
82E-22 1 | 82E-23 1
37E-12 4 | 39E-09 1 | 74E-13 1
34E-11 1 | 10E-14 2

 | 18E-13 1
68E-00 2
 | 15E-18 2 | 40E-21 7 | 90E-12 6
05E-06 2 | 21E-08 3
 | 84E-06 1
75E-08 7

 | 09E-04 3
0

 | 38E-05 1

 | 24E-U5 /
0
 | 85E-06 8
65E-10 4

 | 03E-10 2

 | 0
38E-18 7 | 0
40E-04 1 | 78E-04 4 | 35E+00 I.
91E+04 1. | 31E+03 3.
46E-05 2 | 50E+05 9. | 0
92E-14 4 | 0
23E-07 4 | 0
86E-04 1 | 51E+02 2. | 48E-05 1 | 31E-16 4
0 | 0
74E-04 2 | 75E-07 6
 | 91E+U1 4.
76E+03 4. | 21E+03 1. | 37E+02 1. | 87E-16 6
57E-03 2 | 0
18F-20 3 | 0 | 0
L3E+01 9. | 41E-01 8
01E-05 1 | | 72E+01 1. |
| 19E-29 E.
19E-29 8.
86E-16 6. | /9E-13 1.
14E-18 3. | Z7E-15 4.
77E-11 5.
сэс-ов э | 74E-15 1. | 21E-12 I.
21E-15 4. | 55E-10 6.
00E-19 1. | 20E-18 5.
09E-12 7. | 16E-17 3.
53E-16 1.

 | 31E-16 2. | 56E-11 5.
11E-15 3.
 | 71E-19 1.

 | 25E-14 2. | 48E-27
60E-21 3.

 | 27E-22 3.

 | 27E-23 1.

 | 85E-21 4.
57E-16 2

 | 80E-20 1.

 | 34E-20 4. | 92E-21 2.
20E-18 9. | 48E-13 9.
 | 21E-16 3. | 11E-17 4. | 44E-18 2.
07E-12 2. | 44E-09 5. | 91E-13 1.
69E-11 5. | 89E-15 1.

 | 71E-13 1.
18E-10 1
 | D7E-10 1. | 71E-16 1. | 81E-12 3.
86E-07 1. | 07E-08 3.
 | 97E-08 7.

 | 13E-04 2.
57E-10

 | 38E-05 1.

 | 59E-US 5.
 | 07E-06 8.
58E-10 4.

 | 09E-09 2.

 | 26E-15
56E-13 1. | 47E-11
64E-05 1. | 87E-04 3. | /8E-01 1.
91E+04 1. | 31E+03 3.
53E+00 2. | 50E+05 9. | 89E-01
65E-06 4. | 75E-06 9. | 41E-06
86E-04 1. | 54E+02 2.1 | 50E+01 1. | 72E-05 4.
43E-04 | 06E-13
47E-04 2. | 50E-05 1.
 | 51E+U1 4. | 21E+03 1. | 37E+02 1. | 94E-02 6.
57E-03 2. | 98E-08
57E-10 1. | 96E-10 | 23E-07
22E+01 6. | 45E-01 8. | | 72E+01 1. |
| | 0 0 0 | | , 4, - | | 0 0 | 00 | т.
С
С

 | 0 |
 | , O

 | -i m
0 c | й (
о о

 | 0 c

 | 5 F

 | -i u
0 c

 | 00

 | 00 | 0 0
4 4 | 00
 | | 0 0 | , <u>-</u> | -i i
0 (| 0 0 | 0

 | α
ο ο
 | 5
0
0 | 0 0 | 6 6
0 0 | ю́с
Ос
 |

 |
0 0

 | 00

 | ni eë
D O
 | 00

 | f -i
0 0

 | 5 N | 00 | 000 | 0E+04 1.5 | 0 3.3 | 3E+05 9.1 | ສ່ ດີ ເ
ວ ວ ເ | 0 0 | 0 0
4 1 | 0 2.5 | | 00 | й й
оо | 0 0
 | 0 4 | 0 1 | 0 | 6 0
0 0 | 0 C | | 0 4. | 0 C | ;
> | 0 |
| | | | | | | |

 | |
 |

 | |

 |

 |

 |

 |

 | | |
 | | | | | |

 |
 | | | | 1.001
 | T+OT

 | 10^-5

 | 1.001

 | 1+~01
 |

 |

 | | 10^+4 | 10^0 | 10^-3 3.7 | 10^-2 | 10^-4 9.6 | | | 10^-2 | 10^-1 | | | 10^+5 |
 | 10^+4 | 10^+2 | 10^0 | 10^-2 | | | 10^+3 | 10^+1 | | 10^+2 |
| | | | | | | |

 | |
 |

 | |

 |

 |

 |

 |

 | | |
 | | | | | |

 |
 | | | |
 |

 |

 |

 |
 |

 |

 | | 2 | 101 | 1 | 1 | 1 | | | 2 | 2 | | | 2 | ć
 | 7 | 2 | | ч | | | 2 | 2 | | 2 |
| | | | | | | |

 | |
 |

 | |

 |

 |

 |

 |

 | | |
 | | | | | |

 |
 | | | |
 |

 |

 |

 |
 |

 |

 | | 77 2 | 31 2 | 85 | <1 <1 | <1 <1 | | | 11 2 | < 1 1 | | | 65 2 | į
 | 17 4
48 2 | < 1 2 | <1 1
1 | ata 1 | | | 14 1 | 199 2 | | <1 1 |
| | | | | | | |

 | |
 |

 | |

 |

 |

 |

 |

 | | |
 | | | | | |

 |
 | | | | L 407
 | CT

 | 10^-7

 | , voi

 | 10^-4
 |

 |

 | | 10^-2 | 10^-4 | 10^-2 | 10^-3 | 10^-2 <· | | | 30 | 10^-4 | | | 10^+5 1 |
 | 10^+3
10^-2 7 | 10^+3
10^-3 | 10^+3 | 10^+3 no d | | | 10^0 3. | 10^+1 62 | | 10^0 |
| TE 4 0 0.7.0E-0.7 1.20E-0.7 1.20E-0.1 1.40E-0.1 1.01E-0.1 2.30E-0.1 2.30E-0.1 4.00E-0.1 0.2.7E-0.1 | T1206 0 8.19E-29 8.19E | T1266 0 8.19E-29 8.19E-29 8.19E-29 8.19E-29 8.19E-29 8.19E-29 8.19E-29 8.19E-29 T1207 1 2.86E-16 6.36E-16 1.06E-15 2.40E-15 5.25E-14 2.80E-14 2.80E-14 T1208 0 2.86E-16 6.36E-16 1.0E-15 2.40E-15 5.25E-15 9.09E-12 9.18E-12 9.18E-12 9.18E-12 11208 0 2.79E-13 1.05E-12 2.09E-12 4.38E-12 9.18E-12 9.18E-12 9.18E-12 9.18E-12 11209 0 1.14E-18 3.61E-19 3.81E-19 4.36E-19 6.98E-10 1.05E-18 1.47E-18 11209 0 1.14E-18 3.61E-19 3.81E-19 4.36E-19 6.98E-19 1.05E-18 1.47E-18 | T1206 0 8.19E-29 9.18E-12 2.80E-14 2.80E-14 2.80E-14 2.80E-12 2.81E-12 2.80E-14 2.80E-14 2.80E-12 2.81E-12 2.80E-12 2.81E-12 2.80E-12 2.81E-12 2.80E-12 2.81E-12 2.81E-12 | T1206 0 8.19E-29 8.19E-29< | T1206 0 8.19E-29 9.00E-15 1.00E-15 2.00E-15 2.00E-15 2.00E-15 2.00E-15 2.00E-15 2.00E-15 2.00E-15 2.00E-15 2.00E-12 2.00E-12< | T1206 11206 11206 8.19E-29 8.10E-29 1.10E-20 1.10E-20 2.12E-13 3.29E-13 1.29E-20 2.34E-10 3.34E-10 3.34E-10 3.34E-10 3.34E-10 3.34E-10 3.34E-10 3.34E-10 | 11206 11206 11206 11206 11206 11206 11206 11206 11206 112077 11207 11207 <t< td=""><td>Tion Tion Super-29 Sup</td><td>1206 112610 112610</td><td>T1205 T1205 <th< td=""><td>T206 T206 S195-29 S155-29 S155</td><td>T1206 T1206 T1206 T1207 T1206 T1207 <th< td=""><td>TUDD TUDD <th< td=""><td>U100 U100 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U10000 U100000 U100000 U10000<!--</td--><td>11206 <th< td=""><td>11200 <th< td=""><td>11205 <th< td=""><td>1700 <th< td=""><td>100 100
100 100</td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>11/10 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>110 110</td></td></td></th<><td>1100 <th< td=""><td>1100 <th< td=""><td>100 100
 100 100</td></th<><td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>100 100</td></td></td></th<><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100
0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<></td></td></td></td></th<></td></th<></td></th<></td></t<> | Tion Tion Super-29 Sup | 1206 112610 112610 | T1205 T1205 <th< td=""><td>T206 T206 S195-29 S155-29 S155</td><td>T1206 T1206 T1206 T1207 T1206 T1207 <th< td=""><td>TUDD TUDD <th< td=""><td>U100 U100 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U10000 U100000 U100000 U10000<!--</td--><td>11206 <th< td=""><td>11200 <th< td=""><td>11205 <th< td=""><td>1700 1700
 1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>11/10 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>110 110</td></td></td></th<><td>1100 <th< td=""><td>1100 1100
1100 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>100 100</td></td></td></th<><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 0000
 0000 0000 0000 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1
 1 1 1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<></td></td></td></td></th<></td></th<></td></th<> | T206 T206 S195-29 S155-29 S155 | T1206 T1206 T1206 T1207 T1206 T1207 T1207 <th< td=""><td>TUDD TUDD <th< td=""><td>U100 U100 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U10000 U100000 U100000 U10000<!--</td--><td>11206 <th< td=""><td>11200 <th< td=""><td>11205 <th< td=""><td>1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700
 1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>11/10 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>110 110</td></td></td></th<><td>1100 <th< td=""><td>1100 1100
1100 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>100 100</td></td></td></th<><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 0000
 0000 0000 0000 0000 0000 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1
 1 1 1 1 1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<></td></td></td></td></th<></td></th<> | TUDD TUDD <th< td=""><td>U100 U100 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U10000 U100000 U100000 U10000<!--</td--><td>11206 <th< td=""><td>11200 <th< td=""><td>11205 <th< td=""><td>1700 1700
1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>11/10 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>110 110</td></td></td></th<><td>1100 <th< td=""><td>1100 1100
 1100 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>100 100</td></td></td></th<><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 0100 0100 0100 0100 0100
0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<></td></td></td></td></th<> | U100 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U1000 U10000 U100000 U100000 U10000 </td <td>11206 <th< td=""><td>11200 <th< td=""><td>11205 <th< td=""><td>1700 1700
1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>11/10 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>110 110</td></td></td></th<><td>1100 <th< td=""><td>1100 1100
 1100 1100 1100 1100 1100 1100 1100 1100 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>100 100</td></td></td></th<><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 0100
0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<></td></td></td> | 11206 11206 <th< td=""><td>11200 <th< td=""><td>11205 <th< td=""><td>1700 1700
1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>100 100</td></td></th<><td>11/10 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>110 110</td></td></td></th<> <td>1100 <th< td=""><td>1100 <th< td=""><td>100 100
100 100</td></th<><td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>100 100</td></td></td></th<><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 0100
 0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<></td></td> | 11200 11200 <th< td=""><td>11205 <th< td=""><td>1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>100 100
100 100</td></td></th<><td>100 100</td></td></th<> <td>11/10 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>110 110</td></td> | 11205 11205 <th< td=""><td>1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>100 100
100 100</td></td></th<> <td>100 100</td> | 1700 1700 <th< td=""><td>100 100</td></th<> <td>100 100</td> | 100 100 | 100 100 | 100 100 | 11/10 11/10 <th< td=""><td>110 110 110 110 110 110 110 110 110 110 110 110 110 110 110
 110 110</td></th<> <td>110 110</td> | 110 110 | 110 110 | 1100 1100 <th< td=""><td>1100 <th< td=""><td>100 100</td></th<><td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110
110 110</td></th<><td>100 100</td></td></td></th<> <td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0
0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<></td> | 1100 1100 <th< td=""><td>100 100</td></th<> <td>1100 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<><td>100 100</td></td> | 100 100 | 1100 1110
 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 1110 <th< td=""><td>110 110</td></th<> <td>100 100</td> | 110 110 | 100 100 | 1000 1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100
 0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<></td></th<> | 1000 1000 <th< td=""><td>1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 0100
0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1 1 1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<></td></th<> | 1000 1000 <th< td=""><td>0000 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0
 0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1
1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<></td></th<> | 0000 0000 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0
 0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<></td></td<> | 0100 0100
 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 0100 <td< td=""><td>0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1
1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<></td></td<> | 0100 0100 <td< td=""><td>000000000000000000000000000000000000</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>0 0</td><td>1 1 1 1
1 1</td><td>0 0</td><td></td><td></td><td></td><td>1 1</td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td><td></td><td></td><td></td><td>Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<></td></td<> | 000000000000000000000000000000000000 | 0 0 | 0
0 0 | 0 0 | 0 0 | 1 1 | 0 0 | | | | 1 1 | 1 1 | | 1 1 | | 1 1 | | | | Note Note <th< td=""><td></td><td>1 1
 1 1</td><td></td><td>1 1</td></th<> | | 1 1 | | 1 1 |

JAEA-Research 2015-009



表1.	SI 基本単位	Ĭ.
甘大昌	SI 基本ì	单位
盔半里	名称	記号
長さ	メートル	m
質 量	キログラム	kg
時 間	秒	s
電 流	アンペア	А
熱力学温度	ケルビン	Κ
物質量	モル	mol
光度	カンデラ	cd

表2. 基本単位を用いて表されるSI組立	単位の例
an de La SI 組立単位	<u>f</u>
名称	記号
面 積 平方メートル	m ²
体 積 立方メートル	m ³
速 さ , 速 度 メートル毎秒	m/s
加 速 度メートル毎秒毎秒	m/s^2
波 数 毎メートル	m ⁻¹
密度,質量密度キログラム毎立方メート/	
面積密度キログラム毎平方メート/	ν kg/m ²
比体積 立方メートル毎キログラ」	m ³ /kg
電 流 密 度 アンペア毎平方メート/	ν A/m ²
磁 界 の 強 さ アンペア毎メートル	A/m
量 濃 度 ^(a) , 濃 度 モル毎立方メートル	mol/m ³
質量濃度 キログラム毎立方メート/	
輝 度 カンデラ毎平方メート/	ν cd/m ²
屈 折 率 ^(b) (数字の) 1	1
比 透 磁 率 ^(b) (数字の) 1	1
(a) 量濃度 (amount concentration) は臨床化学の分野	では物質濃度

(substance concentration)ともよばれる。
 (b) これらは無次元量あるいは次元1をもつ量であるが、そのことを表す単位記号である数字の1は通常は表記しない。

表3. 固有の名称と記号で表されるSI組立単位

			SI租工申位	
組立量	名称	記号	他のSI単位による 表し方	SI基本単位による 表し方
平 面 隹	ラジアン ^(b)	rad	1 (в)	m/m
立 体 催	ステラジアン ^(b)	sr ^(c)	1 (b)	m^2/m^2
周 波 数	ヘルツ ^(d)	Hz	1	s ^{·1}
力	ニュートン	Ν		m kg s ⁻²
压力,応力	パスカル	Pa	N/m ²	m ⁻¹ kg s ⁻²
エネルギー,仕事,熱量	ジュール	J	N m	$m^2 kg s^2$
仕事率, 工率, 放射束	ワット	W	J/s	$m^2 kg s^{-3}$
電荷,電気量	クーロン	С		s A
電位差(電圧),起電力	ボルト	V	W/A	$m^2 kg s^{\cdot 3} A^{\cdot 1}$
静電容量	ファラド	F	C/V	$m^{-2} kg^{-1} s^4 A^2$
電気抵抗	オーム	Ω	V/A	$m^2 kg s^{-3} A^{-2}$
コンダクタンス	ジーメンス	s	A/V	$m^{2} kg^{1} s^{3} A^{2}$
磁東	ウエーバ	Wb	Vs	$m^2 kg s^2 A^{-1}$
磁束密度	テスラ	Т	Wb/m ²	$\text{kg s}^{2} \text{A}^{1}$
インダクタンス	ヘンリー	Н	Wb/A	$m^2 kg s^{-2} A^{-2}$
セルシウス温度	セルシウス度 ^(e)	°C		K
光東	ルーメン	lm	cd sr ^(c)	cd
照度	ルクス	lx	lm/m^2	m ⁻² cd
放射性核種の放射能 ^(f)	ベクレル ^(d)	Bq		s ⁻¹
吸収線量,比エネルギー分与, カーマ	グレイ	Gy	J/kg	$m^2 s^{-2}$
線量当量,周辺線量当量, 方向性線量当量,個人線量当量	シーベルト ^(g)	Sv	J/kg	$m^2 s^{-2}$
酸素活性	カタール	kat		s ⁻¹ mol

酸素活性(カタール) kat [s¹ mol
 (a)SI接頭語は固有の名称と記号を持つ組立単位と組み合わせても使用できる。しかし接頭語を付した単位はもはや ュヒーレントではない。
 (b)ラジアンとステラジアンは数字の1に対する単位の特別な名称で、量についての情報をつたえるために使われる。 実際には、使用する時には記号rad及びsrが用いられるが、習慣として組立単位としての記号である数字の1は明 示されない。
 (c)測光学ではステラジアンという名称と記号srを単位の表し方の中に、そのまま維持している。
 (d)へルツは周頻現象についてのみ、ペラレルは放射性核種の統計的過程についてのみ使用される。
 (e)センシウス度はケルビンの特別な名称で、セルシウス温度を表すために使用される。やレシウス度とケルビンの
 (d)ペルジは周頻現象についてのみ、ペラレルは放射性核種の統計的過程についてのみ使用される。
 (e)センシウス度はケルビンの特別な名称で、1、組定差で建度問題を表す数値はどもらの単位で表しても同じである。
 (f)放射性核種の放射能(activity referred to a radionuclide)は、しばしば誤った用語で"radioactivity"と記される。
 (g)単位シーベルト(PV,2002,70,205)についてはCIPM勧告2(CI-2002)を参照。

表4.単位の中に固有の名称と記号を含むSI組立単位の例

	S	I 組立単位	
組立量	名称	記号	SI 基本単位による 表し方
粘度	パスカル秒	Pa s	m ⁻¹ kg s ⁻¹
カのモーメント	ニュートンメートル	N m	m ² kg s ⁻²
表 面 張 九	ニュートン毎メートル	N/m	kg s ⁻²
角 速 度	ラジアン毎秒	rad/s	m m ⁻¹ s ⁻¹ =s ⁻¹
角 加 速 度	ラジアン毎秒毎秒	rad/s^2	$m m^{-1} s^{-2} = s^{-2}$
熱流密度,放射照度	ワット毎平方メートル	W/m ²	kg s ⁻³
熱容量、エントロピー	ジュール毎ケルビン	J/K	$m^2 kg s^{-2} K^{-1}$
比熱容量, 比エントロピー	ジュール毎キログラム毎ケルビン	J/(kg K)	$m^2 s^{-2} K^{-1}$
比エネルギー	ジュール毎キログラム	J/kg	$m^{2} s^{2}$
熱伝導率	ワット毎メートル毎ケルビン	W/(m K)	m kg s ⁻³ K ⁻¹
体積エネルギー	ジュール毎立方メートル	J/m ³	m ⁻¹ kg s ⁻²
電界の強さ	ボルト毎メートル	V/m	m kg s ⁻³ A ⁻¹
電 荷 密 度	クーロン毎立方メートル	C/m ³	m ⁻³ s A
表 面 電 荷	「クーロン毎平方メートル	C/m ²	m ² s A
電 束 密 度 , 電 気 変 位	クーロン毎平方メートル	C/m ²	m ⁻² s A
誘 電 卒	コァラド毎メートル	F/m	$m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2$
透磁 率	ペンリー毎メートル	H/m	m kg s ⁻² A ⁻²
モルエネルギー	ジュール毎モル	J/mol	$m^2 kg s^2 mol^1$
モルエントロピー,モル熱容量	ジュール毎モル毎ケルビン	J/(mol K)	$m^2 kg s^{-2} K^{-1} mol^{-1}$
照射線量(X線及びγ線)	クーロン毎キログラム	C/kg	kg ⁻¹ s A
吸収線量率	グレイ毎秒	Gy/s	$m^{2} s^{-3}$
放 射 強 度	ワット毎ステラジアン	W/sr	$m^4 m^{-2} kg s^{-3} = m^2 kg s^{-3}$
放 射 輝 度	ワット毎平方メートル毎ステラジアン	$W/(m^2 sr)$	m ² m ⁻² kg s ⁻³ =kg s ⁻³
酵素活性濃度	カタール毎立方メートル	kat/m ³	$m^{-3} s^{-1} mol$

	表 5. SI 接頭語										
乗数	名称	記号	乗数	名称	記号						
10^{24}	э 9	Y	10 ⁻¹	デシ	d						
10^{21}	ゼタ	Z	10 ⁻²	センチ	с						
10^{18}	エクサ	Е	10^{-3}	ミリ	m						
10^{15}	ペタ	Р	10^{-6}	マイクロ	μ						
10^{12}	テラ	Т	10 ⁻⁹	ナノ	n						
10^{9}	ギガ	G	10^{-12}	ピコ	р						
10^{6}	メガ	М	10^{-15}	フェムト	f						
10^{3}	+ 1	k	10^{-18}	アト	а						
10^{2}	ヘクト	h	10^{-21}	ゼプト	z						
10^1	デ カ	da	10^{-24}	ヨクト	У						

表6.SIに属さないが、SIと併用される単位										
名称	記号	SI 単位による値								
分	min	1 min=60 s								
時	h	1 h =60 min=3600 s								
日	d	1 d=24 h=86 400 s								
度	٥	1°=(π/180) rad								
分	,	1'=(1/60)°=(π/10 800) rad								
秒	"	1"=(1/60)'=(π/648 000) rad								
ヘクタール	ha	1 ha=1 hm ² =10 ⁴ m ²								
リットル	L, 1	1 L=1 l=1 dm ³ =10 ³ cm ³ =10 ⁻³ m ³								
トン	t	$1 \pm 10^3 \text{ kg}$								

表7. SIに属さないが、SIと併用される単位で、SI単位で

	表表	きれ	る数値	が実験的に得られるもの
4	る称		記号	SI 単位で表される数値
電子	ボル	ŀ	eV	1 eV=1.602 176 53(14)×10 ⁻¹⁹ J
ダル	ŀ	\sim	Da	1 Da=1.660 538 86(28)×10 ⁻²⁷ kg
統一原于	子質量単	单位	u	1 u=1 Da
天 文	単	位	ua	1 ua=1.495 978 706 91(6)×10 ¹¹ m

表8. SIに属さないが、SIと併用されるその他の単位

名称	記号	SI 単位で表される数値
バール	bar	1 bar=0.1MPa=100 kPa=10 ⁵ Pa
水銀柱ミリメートル	mmHg	1 mmHg≈133.322Pa
オングストローム	Å	1 Å=0.1nm=100pm=10 ⁻¹⁰ m
海 里	М	1 M=1852m
バーン	b	$1 \text{ b}=100 \text{ fm}^2=(10^{\cdot 12} \text{ cm})^2=10^{\cdot 28} \text{m}^2$
ノット	kn	1 kn=(1852/3600)m/s
ネーパ	Np	の単位しの教徒的な問題は
ベル	В	31単位との数値的な関係は、 対数量の定義に依存。
デシベル	dB -	

表9. 固有の名称をもつCGS組立単位

名称	記号	SI 単位で表される数値
エルグ	erg	1 erg=10 ⁻⁷ J
ダイン	dyn	1 dyn=10 ⁻⁵ N
ポアズ	Р	1 P=1 dyn s cm ⁻² =0.1Pa s
ストークス	St	$1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{\cdot 1} = 10^{\cdot 4} \text{ m}^2 \text{ s}^{\cdot 1}$
スチルブ	sb	$1 \text{ sb} = 1 \text{ cd cm}^{-2} = 10^4 \text{ cd m}^{-2}$
フォト	ph	1 ph=1cd sr cm ⁻² =10 ⁴ lx
ガル	Gal	1 Gal =1cm s ⁻² =10 ⁻² ms ⁻²
マクスウエル	Mx	$1 \text{ Mx} = 1 \text{ G cm}^2 = 10^{-8} \text{Wb}$
ガウス	G	$1 \text{ G} = 1 \text{Mx cm}^{-2} = 10^{-4} \text{T}$
エルステッド ^(a)	Oe	1 Oe ≙ (10 ³ /4 π)A m ⁻¹
(a) 3 元系のCGS単位系	とSIではi	直接比較できないため、等号「 ≦ 」

は対応関係を示すものである。

表10. SIに属さないその他の単位の例						
	4	名利	5		記号	SI 単位で表される数値
キ	ユ		IJ	-	Ci	1 Ci=3.7×10 ¹⁰ Bq
$\scriptstyle u$	\sim	ŀ	ゲ	\sim	R	$1 \text{ R} = 2.58 \times 10^{-4} \text{C/kg}$
ラ				ĸ	rad	1 rad=1cGy=10 ⁻² Gy
$\scriptstyle u$				ム	rem	1 rem=1 cSv=10 ⁻² Sv
ガ		$\boldsymbol{\mathcal{V}}$		7	γ	$1 \gamma = 1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{T}$
フ	T.		N	Ξ		1フェルミ=1 fm=10 ⁻¹⁵ m
メー	ートル	/系	カラゞ	ット		1 メートル系カラット= 0.2 g = 2×10 ⁻⁴ kg
ŀ				N	Torr	1 Torr = (101 325/760) Pa
標	準	大	気	圧	atm	1 atm = 101 325 Pa
力			IJ	-	cal	1 cal=4.1858J(「15℃」カロリー), 4.1868J (「IT」カロリー), 4.184J(「熱化学」カロリー)
3	ク			~	ц	$1 \mu = 1 \mu m = 10^{-6} m$