

高温ガス炉設計のための解析解によるキセノン安定性 判別に関する研究

Study on Stability Criterion of Xenon Oscillation based on
Analysis Solution for HTGR Design

深谷 裕司 徳原 一実 西原 哲夫

Yuji FUKAYA, Kazumi TOKUHARA and Tetsuo NISHIHARA

原子力科学研究部門
高温ガス炉水素・熱利用研究センター
小型高温ガス炉研究開発ディビジョン
Small-sized HTGR Research and Development Division
HTGR Hydrogen and Heat Application Research Center
Sector of Nuclear Science Research

June 2016

Japan Atomic Energy Agency

日本原子力研究開発機構

JAEA-Research

本レポートは国立研究開発法人日本原子力研究開発機構が不定期に発行する成果報告書です。
本レポートの入手並びに著作権利用に関するお問い合わせは、下記あてにお問い合わせ下さい。
なお、本レポートの全文は日本原子力研究開発機構ホームページ (<http://www.jaea.go.jp>)
より発信されています。

国立研究開発法人日本原子力研究開発機構 研究連携成果展開部 研究成果管理課
〒319-1195 茨城県那珂郡東海村大字白方2番地4
電話 029-282-6387, Fax 029-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

This report is issued irregularly by Japan Atomic Energy Agency.
Inquiries about availability and/or copyright of this report should be addressed to
Institutional Repository Section,
Intellectual Resources Management and R&D Collaboration Department,
Japan Atomic Energy Agency.
2-4 Shirakata, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195 Japan
Tel +81-29-282-6387, Fax +81-29-282-5920, E-mail:ird-support@jaea.go.jp

© Japan Atomic Energy Agency, 2016

高温ガス炉設計のための解析解によるキセノン安定性判別に関する研究

日本原子力研究開発機構 原子力科学研究部門 高温ガス炉水素・熱利用研究センター
小型高温ガス炉研究開発ディビジョン

深谷 裕司、徳原 一実^{*}、西原 哲夫

(2016年4月4日 受理)

高温ガス炉のキセノン振動に対する安全性を定量的に検討するため、高温ガス炉のための解析解によるキセノン安定性判別に関する研究を行った。解析解によるキセノン安定性判別法は Randall により開発され軽水炉設計などに用いられている。一方で、高温ガス炉では Pu 炉心も検討されており、その特性も評価する必要がある。そこで、High Temperature engineering Test Reactor (HTTR)の安全評価でも採用された Randall の手法によるキセノン安定性評価法を再現し、安定性判別コード D-XESC/A の開発を行った。そして、多くの炉型のキセノン安定性を評価し、高温ガス炉のキセノン安定性の高さおよび、Pu 炉心などの新型高温ガス炉のキセノン安定性に関する成立性を見通しを確認した。

**Study on Stability Criterion of Xenon Oscillation
based on Analysis Solution for HTGR Design**

Yuji FUKAYA, Kazumi TOKUHARA* and Tetsuo NISHIHARA

Small-sized HTGR Research and Development Division,
HTGR Hydrogen and Heat Application Research Center,
Sector of Nuclear Science Research,
Japan Atomic Energy Agency
Oarai-machi, Higashiibaraki-gun, Ibaraki-ken

(Received April 4, 2016)

To investigate the xenon stability quantitatively, a study on stability criterion of xenon oscillation based on an analysis solution for High Temperature Gas-cooled Reactor (HTGR) design had been performed. Randall developed the stability criterion method of xenon oscillation based on an analysis solution. And, that have been employed for a LWR design. On the other hand, HTGRs are also planned to design new types of reactors, such as a Pu fueled reactor, and it is necessary to confirm the xenon stability of those new types of reactors. Then, we developed the criterion method based on the Randall's method, which was also used for the safety assessment of High Temperature engineering Test Reactor (HTTR), termed D-XESC/A, and high xenon stability of HTGR and feasibility for Pu fueled reactor are confirmed by comparing with xenon stability of other types of reactors.

Keywords: Xenon Oscillation, Analysis Solution, HTGR, D-XESC/A

*Collaborating Engineer

目 次

1. 序論	1
2. Randall の手法の導出と確認	2
2.1 中性子拡散方程式とモード展開	2
2.2 一群中性子拡散方程式とヘルムホルツ方程式の 固有関数によるモード展開	9
2.3 固有値間隔と高次モード発生について	17
2.4 安定性判別法	18
2.5 Randall の手法	19
2.6 評価に用いる炉物理パラメータの決定	25
3. 軽水炉との比較による高温ガス炉の安定性の確認	27
4. 結論	33
謝 辞	33
参考文献	34
付録 A バックリング決定のための中性子流の連続条件の解法について	36
付録 B 1 領域炉心と 2 領域炉心における高次モード中性子束形状の特徴	38
付録 C 評価手法の整備	47
付録 D 評価手法の検証	50

Contents

1. Introduction1

2. Derivation of Randall’s method and verification2

 2.1 Neutron diffusion equation and mode expansion2

 2.2 Mode expansion by eigenfunctions
 for one energy group neutron diffusion equation
 and Helmholtz equation9

 2.3 Eigenvalue separation and generation of higher harmonics mode17

 2.4 Stability criterion18

 2.5 Randall’s method19

 2.6 Determination of reactor constants for analysis25

3. Confirmation of stability of HTGR by comparing LWRs27

4. Concluding Remarks33

Acknowledgements33

References34

Appendix A Solution for neutron current continuity condition
 to determine buckling36

Appendix B Characteristics of higher neutron flux mode shape
 for 1-region core and 2-region core38

Appendix C Development of evaluation method47

Appendix D Verification of evaluation method50

List of tables

Table 3.1 Temperature conditions for power coefficient (K)28
 Table 3.2 Reactor constants for each type of reactor28
 Table 3.3 Xe reactivity and reactivity coefficient of power28
 Table 3.4 Xe stability for each type of reactor32

List of figures

Fig. 2.1 Profile of Bessel function J_n 12
 Fig. 2.2 Profile of Bessel function Y_n 12
 Fig. 2.3 Geometry of two-region cylindrical core13
 Fig. 2.4 Two-region model for axial direction15
 Fig. 3.1 Neutron spectrum and Xe absorption cross section29
 Fig. 3.2 Function related to Xe density30

This is a blank page.

1. 序論

原子炉が安全に運転されるためには、通常運転時の状態が安定に維持される必要がある。「実用発電用原子炉及びその附属施設の位置、構造及び設備の基準に関する規則」¹⁾によれば、

(炉心等)

第十五条

設計基準対象施設は、原子炉固有の出力抑制特性を有するとともに、発電用原子炉の反応度を制御することにより核分裂の連鎖反応を制御できる能力を有するものでなければならない。

としている。原子炉の安定性に関しては、核熱水力学安定性、プラント安定性、キセノン空間振動安定性等があり、ここでは、キセノン空間振動安定性を対象とする。キセノン空間振動安定性に関しては、軽水炉設計でも用いられている²⁾Randall^{3,4,5)}の安定性判別手法がある。この手法は HTTR の安全審査でも用いられ、同じ熱中性子炉で特性が似通った性質を持つとされる軽水炉の結果を参照することにより⁶⁾、キセノン空間振動が発生しないことが示された経緯がある。Randall の手法は解析解に基づく手法であり、複雑な炉心形状には適用できないという欠点があるものの、その機構論的な理論と少数の炉定数のみで示される安定性は信頼性を得やすい特徴がある。一方で、高温ガス炉は、Pu 燃焼炉心などの新たな展開⁷⁾が検討され、それらの炉心に対するキセノン振動安定性の評価法そのものが必要となっており、HTTR の安全性審査で用いた Randall の手法の再現は本研究の目的の一環でもある。

このような背景に基づき、本研究では、この Randall の安全性判別手法に基づく、キセノン空間振動安定性評価手法の整備をその導出を確認しつつ行い、Pu 燃料炉心の適用性、他の炉型と比較した際の高温ガス炉の安定性の高さを確認することを目的とする。

2. Randall の手法の導出と確認

本章では Randall の手法の導出を確認する。Randall の手法では、一群中性子拡散方程式をキセノン濃度、ヨウ素濃度の生成消滅方程式と共に解析的に解く。出力変動および、キセノン濃度、ヨウ素濃度が中性子束のモード展開で表せるものとし、それぞれの振幅が周期的に変化するものと仮定し、周波数領域で安定性を判断する。

具体的には、Randall の手法は以下のような手順で行われる。

- ・ 定常空間依存中性子拡散方程式、空間依存キセノン・ヨウ素生成消滅方程式の定式化
- ・ 一次摂動による摂動成分に関する問題への変換
- ・ 摂動成分が動的周波数で変化するものとし、問題を周波数領域へ変換
- ・ 摂動成分を中性子束の高次モードで展開、その直交性を利用した関係式の整理
- ・ モード間の線形結合係数およびキセノン濃度の連立方程式に関する解の条件より、動的周波数の2次方程式の導出
- ・ 振動が減衰から発散に至る条件から、振動の閾値となる中性子束強度を評価

これらの手順を理解するには、大別して、

- ・ 中性子拡散方程式とモード展開 (2.1 章に記載)
- ・ 中性子束形状の評価法 (2.2 章に記載)
- ・ 安定性判別法 (2.4 章に記載)

の3点について把握する必要がある。これらについて個別に把握したのち Randall の手法を確認する。なお、関連する原著は必ずしも現在用いられている炉物理に関する表記法と合致しておらず、原著の意味を損ねない範囲で表現を変更・統一する。

2.1 中性子拡散方程式とモード展開

中性子束モードに関しては、Kaplan⁸⁾により整理および定式化がなされている。空間時間依存のエネルギー二群拡散方程式は以下のように記述することができる。

$$\frac{1}{v_F} \dot{\phi}_F = \nabla \cdot D_F \nabla \phi_F - \Sigma_{aF} \phi_F - \Sigma_{sF \rightarrow T} \phi_F + (1 - \beta) v \Sigma_{fF} \phi_F + (1 - \beta) v \Sigma_{fT} \phi_T + \lambda C \quad (2.1 - 1)$$

$$\frac{1}{v_T} \dot{\phi}_T = \nabla \cdot D_T \nabla \phi_T - \Sigma_{aT} \phi_T + \Sigma_{sF \rightarrow T} \phi_F \quad (2.1 - 2)$$

$$\dot{C} = \beta v \Sigma_{fF} \phi_F + \beta v \Sigma_{fT} \phi_T - \lambda C \quad (2.1 - 3)$$

簡略化のため、熱群から高速群への上方散乱および熱群への核分裂による中性子の直接的な生成などは省略しているが、妥当な範囲の省略である。行列表示で表すと、

$$\mathbf{V}\phi = -\mathbf{L}\phi + (1 - \beta)\mathbf{P}\phi + \lambda\mathbf{C} \quad (2.1-4)$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \beta\mathbf{P}\phi - \lambda\mathbf{C} \quad (2.1-5)$$

となる。ここで、定常状態の炉心に摂動を加えた場合の中性子束を考える。式(2.1-4)、(2.1-5)に摂動が加わり、

$$\mathbf{V}\phi = -(\mathbf{L}_0 + \Delta\mathbf{L})\phi + (1 - \beta)(\mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P})\phi + \lambda\mathbf{C} \quad (2.1-6)$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \beta(\mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P})\phi - \lambda\mathbf{C} \quad (2.1-7)$$

となる。このときの、中性子束と遅発中性子先行核の変化を複数の基本的な空間分布関数の線形結合で表わす手法をモード展開法*と呼ぶ。展開するモードとして使用される固有関数は複数考えられ、Kaplanは3つのモード関数を提示している。λモード、ωモード、naturalモードである。λモード、ωモードは一般的に用いられているが、naturalモードはKaplan独自の提案であり、普及しているとは言い難い。

λモード：

λモードは空間固有値モードとも呼ばれるように、その基本モードの固有値は、増倍率に一致する。ここでは、モード展開の議論に入る前に、最近では最も一般的になりつつあるλモードを用いた空間固有値の考え方について説明する。

定常状態では式(2.1-4)は以下のようなようになるのが望ましい。

$$\mathbf{L}\phi = \mathbf{P}\phi \quad (2.1-8)$$

しかし、一般的に式(2.1-8)が成り立たない場合でも定常状態の中性子束が必要になることが多い。式(2.1-8)は物理的には、制御棒で臨界を保った状態においてのみ成り立つが、解析評価や炉物理に関する理論導出の過程では、必ずしも、完全に臨界状態を評価できないことが多く、左辺の中性子の損失、右辺の中性子の生成を合致させるためには、調整因子が必要となる。その場合には数学的な扱いで固有値問題と考え、(空間)固有値を導入する。

$$\mathbf{L}\phi = \frac{1}{k}\mathbf{P}\phi \quad (2.1-9)$$

この固有値 k については、以下のような式変形を行うとその物理的な意味が明白である。

$$k = \frac{\mathbf{P}\phi}{\mathbf{L}\phi} \quad (2.1-10)$$

*固有値問題では、複数の解(固有値・固有関数)が存在し、それらの線形結合で中性子束を表現する手法をモード展開と呼ぶ。負の中性子束を示す解もあるが合成形としては存在しない。

固有値 k は一般的に知られる増倍率であり、式(2.1-10)からは、単位時間当たりの中性子の消滅率に対する生成率の比という物理的意味が確認できる。この増倍率は、本来バランスが成り立つとは限らない消滅項と生成項をバランスさせるための修正因子と考えることもできる。超過臨界では、生成量が多いため、 k は1より大きな値を取り、結果として生成項の値を小さくしつり合いを取る。未臨界の場合は k は1より小さな値をとり、生成項の値を大きくしつり合いを取る。Duderstadt⁹⁾はこの補正された状態に対し、核分裂時に発生する中性子数 ν を ν/k に補正した仮想的な炉心であると表現している。

以降はモード展開に関し確認する。中性子束および、遅発中性子先行核がそれぞれの固有関数の線形結合で表わすことができるものとする。

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \Psi_n(\mathbf{r}) \quad (2.1-11)$$

$$C(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) P_0 \Psi_n(\mathbf{r}) \quad (2.1-12)$$

固有関数は

$$L_0 \Psi_n = \frac{1}{\lambda_n} P_0 \Psi_n \quad (2.1-13)$$

随伴固有関数は

$$L_0^T \Psi_n^* = \frac{1}{\lambda_n} P_0^T \Psi_n^* \quad (2.1-14)$$

のように表すことができる*。また、以下のような直交関係がある。

$$\langle \Psi_m^*, P_0 \Psi_n \rangle = 0 \quad m \neq n \quad (2.1-15)$$

式(2.1-10), (2.1-11)と任意のモードの随伴固有関数との内積を取り、この直交関係を用いることにより、

$$\langle \Psi_n^*, P_0 \Phi \rangle = a_n \langle \Psi_n^*, P_0 \Psi_n \rangle \quad (2.1-16)$$

$$\langle \Psi_n^*, C \rangle = c_n \langle \Psi_n^*, P_0 \Psi_n \rangle \quad (2.1-17)$$

の関係が得られる。

*複素共役演算をおこなうことにより、随伴固有関数を評価できる。実行列に対して複素共役は演算子行列をエネルギー群に対し転置することにより評価できる。また、随伴方程式の固有値は元の方程式の固有値と合致する。なお、エネルギー群方程式では随伴固有関数と固有関数は一致する。これを自己随伴と呼ぶ。

また、

$$\begin{aligned}\langle \Psi_n^*, \mathbf{L}_0 \Phi \rangle &= \langle \Phi, \mathbf{L}_0^T \Psi_n^* \rangle = \frac{1}{\lambda_n} \langle \Phi, \mathbf{P}_0^T \Psi_n^* \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \langle \Psi_n^*, \mathbf{P}_0^T \Phi \rangle = \frac{1}{\lambda_n} a_n \langle \Psi_n^*, \mathbf{P}_0 \Psi_n \rangle\end{aligned}\quad (2.1-18)$$

の関係が得られる。式(2.1-6),式(2.1-7)に随伴固有関数を掛け、内積を取り、式(2.1-18)の関係を
 利用し整理すると、

$$\begin{aligned}\langle \Psi_k^*, \mathbf{V} \Phi \rangle + a_k \left[\frac{1}{\lambda_k} - (1 - \beta) \right] \langle \Psi_k^*, \mathbf{P}_0 \Psi_k \rangle - \lambda c_k \langle \Psi_k^*, \mathbf{P}_0 \Psi_k \rangle \\ = \langle \Psi_k^*, [-\Delta \mathbf{L} + (1 - \beta) \Delta \mathbf{P}] \Phi \rangle\end{aligned}\quad (2.1-19)$$

$$[c_k + \lambda c_k - \beta a_k] \langle \Psi_k^*, \mathbf{P}_0 \Psi_k \rangle = \beta \langle \Psi_k^*, \Delta \mathbf{P} \Phi \rangle\quad (2.1-20)$$

となる。ここで、

$$\rho_k \equiv \frac{\langle \Psi_k^*, [-\Delta \mathbf{L} + (1 - \beta) \Delta \mathbf{P}] \Phi_0 \rangle}{\langle \Psi_k^*, \mathbf{P}_0 \Psi_k \rangle}\quad (2.1-21)$$

$$S_k \equiv \frac{\beta \langle \Psi_k^*, \Delta \mathbf{P} \Phi_0 \rangle}{\langle \Psi_k^*, \mathbf{P}_0 \Psi_k \rangle}\quad (2.1-22)$$

$$V_{kn} \equiv \frac{\langle \Psi_k^*, \mathbf{V} \Psi_n \rangle}{\langle \Psi_k^*, \mathbf{P}_0 \Psi_k \rangle}\quad (2.1-23)$$

と定義し、N 個の固有関数モード*を考慮すると、

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n V_{kn} + a_k \left[\frac{1}{\lambda_k} - (1 - \beta) \right] - \lambda c_k = \rho_k\quad (2.1-24)$$

$$c_k + \lambda c_k - \beta a_k = S_k\quad (2.1-25)$$

となる。これらの式を解くことにより各モードの展開係数が決定でき、中性子束のモード展開
 が可能となる。式(2.1-24)の第1項の存在により式(2.1-25)も含め 2N 個の方程式を同時に解く
 必要がある。また、有限個数モードで打ち切るにより、展開係数の精度を欠くことになる。
 加えて、λモードによる展開の特徴としては、式(2.1-15)の直交関係にあるように、固有関数
 同士は直接的には直交せず、生成演算子を通じて直交する点が挙げられる。

*N 個で 0 から数えるため、最高の高次モードは N-1 次となる。原著では誤解を招く誤記と思われる記述が見
 られる。

ωモード：

ωモードは時間固有値モードとも呼ばれように、動的周波数を固有値とする。

$$[(1 - \beta)\mathbf{P}_0 - \mathbf{L}_0]\boldsymbol{\psi}_k = \omega_k \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_k \quad (2.1 - 26)$$

$$[(1 - \beta)\mathbf{P}_0 - \mathbf{L}_0]^T \boldsymbol{\psi}_k^* = \omega_k \mathbf{V}^T \boldsymbol{\psi}_k^* \quad (2.1 - 27)$$

直交関係は、

$$\langle \boldsymbol{\psi}_m^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_n \rangle = 0 \quad m \neq n \quad (2.1 - 28)$$

これらの固有関数を用いて、中性子束および遅発中性子先行核を展開すると

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{r}) \quad (2.1 - 29)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{r}) \quad (2.1 - 30)$$

以下の関係より展開係数が求められる。

$$\langle \boldsymbol{\psi}_n^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\phi} \rangle = a_n \langle \boldsymbol{\psi}_n^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_n \rangle \quad (2.1 - 31)$$

$$\langle \boldsymbol{\psi}_n^*, \mathbf{C} \rangle = c_n \langle \boldsymbol{\psi}_n^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_n \rangle \quad (2.1 - 32)$$

式(2.1-6),式(2.1-7)に随伴固有関数を掛け、内積を取ると、

$$a_k' - \omega_k a_k - \lambda c_k = \frac{\langle \boldsymbol{\psi}_k^*, [-\Delta \mathbf{L} + (1 - \beta)\Delta \mathbf{P}]\boldsymbol{\phi} \rangle}{\langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_k \rangle} \quad (2.1 - 33)$$

$$[c_k' + \lambda c_k] \langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_k \rangle - \beta \langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\phi} \rangle = \beta \langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \Delta \mathbf{P} \boldsymbol{\phi} \rangle \quad (2.1 - 34)$$

ここで、摂動近似を用いられものとして、以下のように変数を定義すると、

$$\rho_k \equiv \frac{\langle \boldsymbol{\psi}_k^*, [-\Delta \mathbf{L} + (1 - \beta)\Delta \mathbf{P}]\boldsymbol{\phi}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_k \rangle} \quad (2.1 - 35)$$

$$S_k \equiv \frac{\beta \langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \Delta \mathbf{P} \boldsymbol{\phi}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_k \rangle} \quad (2.1 - 36)$$

$$M_{kn} \equiv \frac{\langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\psi}_n \rangle}{\langle \boldsymbol{\psi}_k^*, \mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_k \rangle} \quad (2.1 - 37)$$

式(2.1-33)、式(2.1-34)は、N個の固有モードを用いて、

$$\dot{a}_k - \omega_k a_k - \lambda c_k = \rho_k \quad (2.1-38)$$

$$\dot{c}_k + \lambda c_k - \beta \sum_{n=0}^{N-1} a_n M_{kn} = S_k \quad (2.1-39)$$

と整理できる。これを解くことにより各モードの展開係数が決定でき中性子束のモード展開が可能となる。

ω モードでも、式(2.1-39)の左辺第3項のために、 $2N$ 個の方程式を同時に解く必要がある。また、有限次数で打ち切ることにより、各展開係数の精度が低下することが予測される。ただし、遅発中性子を無視($\beta=0$)できる状況では、式(2.1-38)のみとなり(左辺第3項は無くなる)、展開係数はそれぞれのモードで閉じることとなる。 ω モードによる展開の特徴としては、式(2.1-28)の直交関係にあるように、固有関数同士は直接的には直交せず、中性子速度行列を通じて直交する点が挙げられる。

natural モード :

式(2.1-1)、(2.1-2)、(2.1-3)を以下のように、ひとつの関数ベクトルと演算行列で表わす形へと変形する。

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{O}\boldsymbol{\phi} \quad (2.1-40)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\phi}^T = (\phi_F, \phi_T, C) \quad (2.1-41)$$

となる。

式(2.1-40)の演算子を基準状態と摂動分に分解すると、

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = (\mathbf{O}_0 + \Delta\mathbf{O})\boldsymbol{\phi} \quad (2.1-42)$$

とし、関数ベクトルを以下のように基準状態の固有関数で展開できるものとする、

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{r}) \quad (2.1-43)$$

$$\mathbf{O}_0 \boldsymbol{\psi}_n = \beta_n \boldsymbol{\psi}_n \quad (2.1-44)$$

ここで、随伴固有関数を以下のように求める。

$$\mathbf{O}_0^T \boldsymbol{\psi}_n^* = \beta_n \boldsymbol{\psi}_n^* \quad (2.1-45)$$

この固有関数は以下のような直交関係を持つ。

$$\langle \Psi_m^*, \Psi_n \rangle = 0 \quad m \neq n \quad (2.1-46)$$

直交性から、

$$\langle \Psi_n^*, \Phi \rangle = a_n \langle \Psi_n^*, \Psi_n \rangle \quad (2.1-47)$$

の関係が得られる。式(2.1-42)に随伴固有関数を掛け内積を取ると、

$$a_k \langle \Psi_k^*, \Psi_k \rangle = \beta_k a_k \langle \Psi_k^*, \Psi_k \rangle + \langle \Psi_n^*, \Delta \mathbf{O} \Phi \rangle \quad (2.1-48)$$

ここで、以下のように変数を定義する。

$$\rho_k \equiv \frac{\langle \Psi_k^*, \Delta \mathbf{O} \Phi \rangle}{\langle \Psi_k^*, \Psi_k \rangle} \quad (2.1-49)$$

最終的には、以下のように整理される。

$$a_k = \beta_k a_k + \rho_k \quad (2.1-50)$$

ここで、**natural** モードでは、 λ モード、 ω モードと異なり、各モードのみで展開係数の方程式が完結していることが分かる。また、直交関係は演算子を用いることなく、直接的に固有関数同志のみで成立している。**Kaplan** は ω モードの導出後に $\beta=0$ とすることで、各モードで展開係数の式が完結することを発見し、完結性の高いモードとして**natural**モードを提案している。

このように、 λ モード、 ω モード、**natural**モードによるモード展開を確認したが、厳密には、動特性問題には ω モードの利用が物理的意味合いに合致しており適切である。しかし、一般的には、通常の臨界計算に相当する空間固有値モードである λ モードが利用¹⁰⁾されることが多い。解析コードの問題など、利便性を考えての対応であると推測される。各モードの固有関数は厳密には一致せず、その違いは“kinetic distortion”¹¹⁾と呼ばれ研究がなされているが、 ω モードの模擬に λ モードを用いることはよい近似であることが知られている。

なお、**Randall** はヘルムホルツ方程式の固有関数を用いてモード展開を行っている。この手法は、中性子束形状を評価する古典的な手法として知られ、基本モードは λ モードとの完全一致が期待できる。また、**natural**モードと同様に一般化固有値問題の $\lambda \cdot \omega$ モードと異なり、単純な固有値問題であり、固有関数同志が直接的に直交する。

2.2 一群中性子拡散方程式とヘルムホルツ方程式の固有関数によるモード展開
 定常状態における一群中性子拡散方程式は以下のように記述できる。

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi = v\Sigma_f\phi \quad (2.2-1)$$

変形すると

$$\nabla^2\phi + (k_\infty - 1)\frac{\Sigma_a}{D}\phi = 0 \quad (2.2-2)$$

となる。なお、一群方程式における無限増倍率は

$$k_\infty = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (2.2-3)$$

である。式(2.2-2)の形の方程式はヘルムホルツ方程式と呼ばれる。この方程式は固有値問題となり、複数の固有値とそれに対応した固有関数が中性子束となる。この固有値は中性子拡散方程式では形状バックリングとよばれ、

$$\nabla^2\phi + B_g^2\phi = 0 \quad (2.2-4)$$

と表記される。式(2.2-2)との比較により、以下のようなバックリングが存在することが自明である。

$$B_m^2 = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = (k_\infty - 1)\frac{\Sigma_a}{D} \quad (2.2-5)$$

これは、材料バックリングと呼ばれるものであり、臨界状態においては、基本モードに対する形状バックリングと一致する。式(2.2-4)の各モードの特徴としては、

$$\nabla^2\psi_i + B_{g,i}^2\psi_i = 0 \quad (2.2-6)$$

各モードの固有関数のノルムが1になるように規格化されている場合

$$\langle\psi_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij} \quad (2.2-7)$$

となり、異なる固有関数同志は直交する。正規直交系であり、各モードの線形結合によりどのような中性子束も合成できる。

上記は単純なケースであり、領域毎に断面積等が異なり空間分布を持つようなケースを考えると、

$$\nabla^2 \psi_i + (E_i + F(\mathbf{r}))\psi_i = 0 \quad (2.2-8)$$

となる。ここで、 $F(\mathbf{r})$ は断面積等の関数、 E_i は固有値とする。

$$B_i^2(\mathbf{r}) \equiv (E_i + F(\mathbf{r})) \quad (2.2-9)$$

と空間依存のバックリングを定義すると、

$$\nabla^2 \psi_i + B_i^2(\mathbf{r})\psi_i = 0 \quad (2.2-10)$$

式(2.2-8)は式(2.2-6)と同じ形になる。式(2.2-9)より、異なるモード間のバックリングの差は、

$$B_j^2(\mathbf{r}) - B_i^2(\mathbf{r}) = E_j - E_i \quad (2.2-11)$$

となる¹²⁾。このことは、モード毎のバックリングが空間に分布していても、任意の空間位置におけるバックリングのモード間の差は不変であることを示している。このことは、2領域炉心であれば、

$$B_j^{1^2} - B_i^{1^2} = B_j^{2^2} - B_i^{2^2} \quad (2.2-12)$$

のように2領域のそれぞれにおけるバックリングのモード間の差は一致する。また、式(2.2-12)を変形すると、

$$B_j^{2^2} - B_j^{1^2} = B_i^{2^2} - B_i^{1^2} \quad (2.2-13)$$

となる。ここで、各モードに対するバックリングの領域間の差は一定であることが分かる。さらに、任意のモードに対しこの関係が成り立つことから、バックリングの差はモードに対し独立であり、全モードに共通して一定であることが分かる。

円筒2領域炉心の各モードの固有関数は以下のように評価している。円筒座標系におけるラプラシアンは、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2-14)$$

と記載できる。固有関数は以下のように変数分離できるものとする。

$$\psi_i = u(r, \theta)Z(z) \quad (2.2-15)$$

これにより、式(2.2-6)は、

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{ur} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{ur^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + B^2 = 0 \quad (2.2-16)$$

バックリングを径方向・角度方向および軸方向に分解すると、

$$B^2 = B_{r\theta, kn}^2 + B_{z, m}^2 \quad (2.2-17)$$

以下のように、2つの方程式に分割できる。

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{ur} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{ur^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + B_{r\theta, kn}^2 = 0 \quad (2.2-18)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + B_{z, m}^2 = 0 \quad (2.2-19)$$

さらに、式(2.2-18)については固有関数を以下のように変数分離することにより、

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.2-20)$$

以下のように変形できる。

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + B_{r\theta, kn}^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \quad (2.2-21)$$

両辺が定数であることから、その定数を n^2 とし分離すると、

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(B_{r\theta, kn}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.2-22)$$

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + n^2 = 0 \quad (2.2-23)$$

のように、2つの式に分離できる。解くべき式は、式(2.2-22)、式(2.2-23)および式(2.2-19)の3式となる。ここで、式(2.2-23)、式(2.2-19)は共に三角関数を解として持ち、

$$\Theta = \Theta_0 \cos(n\theta) \quad (2.2-24)$$

$$Z = Z_0 \sin(B_{z, m} z) \quad (2.2-25)$$

となる*。ここで、 $B_{z,m}$ は以下のように与えられる。

$$B_{z,m}^2 = \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2 \tag{2.2-26}$$

式(2.2-22)については、径方向の式については、

$$B_{r\theta,kn}^2 r = x \tag{2.2-27}$$

と変数変換し、派生する以下の関係を利用すると、

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} = B_{r\theta,kn} \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.2-28}$$

$$\frac{\partial}{\partial r^2} = B_{r\theta,kn}^2 \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.2-29}$$

最終的に、以下のようにベッセル方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0 \tag{2.2-30}$$

解として、ベッセル関数を用い以下のようにあらわすことができる。

$$R = AJ_n(B_{r\theta,kn}r) + CY_n(B_{r\theta,kn}r) \tag{2.2-31}$$

ここで、ベッセル関数の特徴を把握するために、関数の概形を Fig. 2.1 及び Fig.2.2 に示す。

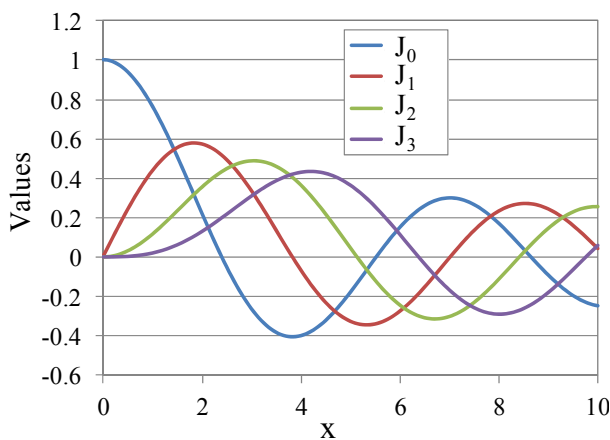


Fig. 2.1 Profile of Bessel function J_n

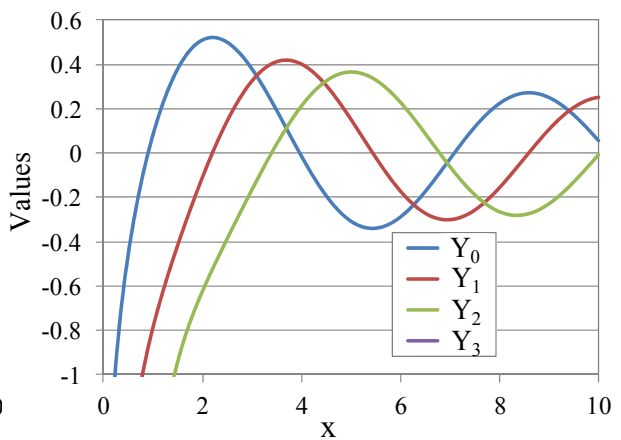


Fig. 2.2 Profile of Bessel function Y_n

*解は同じ三角関数であるが、角度関数に関しては、 $n=0$ モードにおいて 1 となるのが都合がよく \cos 関数、軸方向関数については、 $z=0$ の炉心下端において 0 となるのが望ましく \sin 関数を選択している。

Y_n 関数では $x=0$ が特異点になっていることに留意すべきである。式(2.2-24)、式(2.2-25)および式(2.2-31)の結果より最終的な一般解は、

$$\psi_i = \{A_i J_n(B_{r\theta, kn} r) + C_i Y_n(B_{r\theta, kn} r)\} \cos(n\theta) \sin(B_{z,m} z) \quad (2.2 - 32)$$

となる。

ここで、Fig. 2.3 に示すような径方向 2 領域炉心を考える。半径 r_b を境に内側と外側の 2 領域とし、それぞれに異なる燃料を与える。ヘルムホルツ方程式はそれぞれの領域に成立し、バックリングもそれぞれの領域に個別に与えることにより、以下のような関係式が成り立つ。

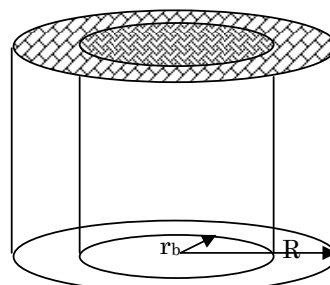


Fig.2.3 Geometry of two-region cylindrical core

$$\nabla^2 \psi_i^{in} + B_i^{in 2} \psi_i^{in} = 0 \quad (2.2 - 33)$$

$$\nabla^2 \psi_i^{out} + B_i^{out 2} \psi_i^{out} = 0 \quad (2.2 - 34)$$

ここで、それぞれの固有関数は、

$$\psi_i^{in} = J_n(B_{r\theta, kn}^{in} r) \cos(n\theta) \sin(B_{z,m} z) \quad (2.2 - 35)$$

$$\psi_i^{out} = \{A_i J_n(B_{r\theta, kn}^{out} r) + C_i Y_n(B_{r\theta, kn}^{out} r)\} \cos(n\theta) \sin(B_{z,m} z) \quad (2.2 - 36)$$

のようになる*。ここで、 $r=0$ を含む内側領域の式(2.2-35)には、 $x=0$ において特異点を持つ Y_n 関数を除外している。ここで、式(2.2-35)、式(2.2-36)は内部境界である r_b での連続性および、外部境界 R での中性子束をゼロとする境界条件の以下の式を満たす必要がある。

$$\psi_i^{in}(r = r_b) = \psi_i^{out}(r = r_b) \quad (2.2 - 37)$$

$$\psi_i^{out}(r = R) = 0 \quad (2.2 - 38)$$

これらの条件により、

$$A_i J_n(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) + C_i Y_n(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) = J_n(B_{r\theta, kn}^{in} r_b) \quad (2.2 - 39)$$

$$A_i J_n(B_{r\theta, kn}^{out} R) + C_i Y_n(B_{r\theta, kn}^{out} R) = 0 \quad (2.2 - 40)$$

の関係が得られ、それぞれの係数は、

*中性子束自体は規格化条件を与えない限りは固有の絶対値を持たない。この時点においては、関数形を検討する上での利便性から式(2.2-35)では絶対値規格化のための変数を設けていない。

$$A_i = \frac{\begin{vmatrix} J_n(B_{r\theta,kn}^{in} r_b) & Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) \\ 0 & Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} R) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) & Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) \\ J_n(B_{r\theta,kn}^{out} R) & Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} R) \end{vmatrix}}} \quad (2.2 - 41)$$

$$C_i = \frac{\begin{vmatrix} J_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) & J_n(B_{r\theta,kn}^{in} r_b) \\ J_n(B_{r\theta,kn}^{out} R) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) & Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) \\ J_n(B_{r\theta,kn}^{out} R) & Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} R) \end{vmatrix}}} \quad (2.2 - 42)$$

のように評価できる*。係数 A_i と C_i を展開・整理し、式(2.2-35)および式(2.2-36)に絶対値規格化のための係数を与えると次のように整理され、

$$\psi_i^{in} = A_i J_n(B_{r\theta,kn}^{in} r) \cos(n\theta) \sin(B_{z,m} z) \quad (2.2 - 43)$$

$$\psi_i^{out} = C_i \left\{ J_n(B_{r\theta,kn}^{out} r) - \frac{J_n(B_{r\theta,kn}^{out} R)}{Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} R)} Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} r) \right\} \cos(n\theta) \sin(B_{z,m} z) \quad (2.2 - 44)$$

となる**。また、式(2.2-37)の連続条件により、

$$A_i = \frac{C_i}{J_n(B_{r\theta,kn}^{in} r_b)} \left\{ J_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) - \frac{J_n(B_{r\theta,kn}^{out} R)}{Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} R)} Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) \right\} \quad (2.2 - 45)$$

炉心領域境界における中性子流の連続条件により、

$$D^{in} \frac{\partial \psi_i^{in}}{\partial r} \Big|_{r=r_b} = D^{out} \frac{\partial \psi_i^{out}}{\partial r} \Big|_{r=r_b} \quad (2.2 - 46)$$

の条件を満たす必要がある。

$$D^{in} B_{r\theta,kn}^{in} A_i J_n'(B_{r\theta,kn}^{in} r_b) = D^{out} B_{r\theta,kn}^{out} C_i \left\{ J_n'(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) - \frac{J_n(B_{r\theta,kn}^{out} R)}{Y_n(B_{r\theta,kn}^{out} R)} Y_n'(B_{r\theta,kn}^{out} r_b) \right\} \quad (2.2 - 47)$$

ここで、式(2.2-13)の関係より、

$$B_{r\theta,kn}^{out 2} - B_{r\theta,kn}^{in 2} = B_{r\theta,00}^{out 2} - B_{r\theta,00}^{in 2} = \text{const} \quad (2.2 - 48)$$

*クラメル公式によるもの、参考文献 12)の表記に合わせた。

**Randallの表記に合わせた。ただし、Randallは、半径 $R=1$ と規格化しており、若干、表現が異なる。なお、この係数 A_i, C_i は出力の規格化に用いられ、以降の関数形を決定する議論では既知のものとする。

の関係が得られる。式(2.2-48)の基本モードの形状バックリングは臨界体系における材料バックリングと一致し、バックリングの差は数値的に評価できる。式(2.2-47)、式(2.2-48)により、各モードのバックリングを求めることができる。この時点で各モードの関数形が決定できる。

Randall は 2 領域炉心を想定し内側の出力が完全に平坦化されたような炉心を想定した。実際の商用炉などでは、熱的制限を考慮して出力分布が平坦化された設計が行われ、それを想定したものである。この場合は、

$$B_{r\theta,00}^{in^2} = 0 \quad (2.2-49)$$

となり*、 J_n 関数は 1 となる。また、内側炉心の出力分布は完全に平坦であるため中性子流はゼロとなるが、連続条件より外側炉心の炉心領域境界における中性子流もゼロでなければならない。

$$D^{out} B_{r\theta,00}^{out} C_i \left\{ J_0'(B_{r\theta,00}^{out} r_b) - \frac{J_0(B_{r\theta,00}^{out} R)}{Y_0(B_{r\theta,00}^{out} R)} Y_0'(B_{r\theta,00}^{out} r_b) \right\} = 0 \quad (2.2-50)$$

最終的には以下のように整理**できる。

$$\frac{J_0(B_{r\theta,00}^{out} R)}{J_1(B_{r\theta,00}^{out} r_b)} = \frac{Y_0(B_{r\theta,00}^{out} R)}{Y_1(B_{r\theta,00}^{out} r_b)} \quad (2.2-51)$$

この関係から、基本モードの外側領域のバックリングも評価することができる。高次モードの評価については、式(2.2-47)、式(2.2-48)の関係を用い評価が行える。なお、バックリング決定の際の数値解法の詳細を付録 A に、各炉心形状に関する高次モードの形状と固有値間隔を付録 B に示す。

Randall は同様に、Fig. 2.4 に示すように軸方向にも平坦化を考慮している。初めに、基本モードを次のように想定する***。

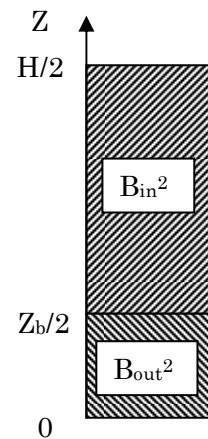


Fig.2.4 Two-region model for axial direction

$$\psi_1^{in} = A_1 \text{ (constant)} \quad (2.2-52)$$

$$\psi_1^{out} = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{z_b} z\right) \quad (2.2-53)$$

*空間分布が一定な条件におけるヘルムホルツ方程式を想定すれば自明である。

**ここで、 $J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$ 、 $Y_n'(x) = \frac{n}{x} Y_n(x) - Y_{n+1}(x)$ の関係を利用した。

***1 領域炉心では、軸方向モードと合わせ基本モードのモード次数を 1 とした。

また、固有値間には、

$$B_{z,m}^{\text{out}^2} - B_{z,m}^{\text{in}^2} = B_{z,1}^{\text{out}^2} - B_{z,1}^{\text{in}^2} = \text{const} \quad (2.2 - 54)$$

の関係があるため、Randall は高次モードに対し、各領域に同じ固有値間隔を与えることにより、以下のような関数形を想定した。

$$\psi_2^{\text{in}} = A_2 \sin\left(\mu_2 \left(\frac{H}{2} - z\right)\right) \quad (2.2 - 55)$$

$$\psi_2^{\text{out}} = C_2 \sin\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{z_b}\right)^2 + \mu_2^2} z\right) \quad (2.2 - 56)$$

ここで、係数 A_2 は

$$A_2 = C_2 \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{z_b}\right)^2 + \mu_2^2} \frac{z_b}{2}\right)}{\sin\left(\mu_2 \left(\frac{H}{2} - \frac{z_b}{2}\right)\right)} \quad (2.2 - 57)$$

となる。また、中性子流連続の条件により、

$$-D_{\text{in}} \mu_2 \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{z_b}\right)^2 + \mu_2^2} \frac{z_b}{2}\right)}{\sin\left(\mu_2 \left(\frac{H}{2} - \frac{z_b}{2}\right)\right)} \cos\left(\mu_2 \left(\frac{H}{2} - \frac{z_b}{2}\right)\right) = D_{\text{out}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{z_b}\right)^2 + \mu_2^2} \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{z_b}\right)^2 + \mu_2^2} \frac{z_b}{2}\right) \quad (2.2 - 58)$$

この条件に当てはまる固有値間隔を評価することにより、各モードの固有値間隔および、高次モードの関数形を確定できる。

ただし、この軸方向平坦化と径方向平坦化は現実的な炉心形状を考えるとそれぞれの端点の取り合いの関係で両立できない。このことと、軸方向の平坦化が現実的に実施されていないことが関係すると思われるが、参考文献 12) では、軸方向の平坦化を導入していない。しかし、Randall はその特性を比較する目的で両方向の平坦化を考慮しており、本研究でも整備する。

2.3 固有値間隔と高次モード発生について

一般的に固有値間隔が小さいとき、高次モードが発生しやすいといわれる。固有値間隔とは対象とする高次モードの固有値と基本モードの固有値との差を示すものである。その理由としては、Stacey 著, "Nuclear Reactor Physics"¹³⁾では、出力の偏差が起こる現象 flux tilt の説明として以下のような表現を用いている。

修正一群理論の関係により、高次モードの固有値の関係を表し、数学的に一番単純なスラブ炉心一次元体系のバックリング (円筒炉心の軸方向成分の式(2.2-26)と同じ) を用い整理する。

$$k_n = \frac{k_\infty}{1 + M^2 B_n^2} = \frac{k_\infty}{1 + M^2 [(n+1)\pi/H]^2} = \frac{1 + M^2 [\pi/H]^2}{1 + M^2 [(n+1)\pi/H]^2} \quad (2.3-1)$$

なお、式変形には、基本モードに対する修正一群方程式と基本モードの増倍率を 1 とする仮定を用いている。さらに、第一次高次モードとの固有値間隔として、以下のように整理している。

$$1 - k_1 = \frac{3[M\pi/H]^2}{1 + [2M\pi/H]^2} \approx 3 \left(\frac{M\pi}{H} \right)^2 \quad (2.3-2)$$

固有値としては、式(2.1-13)にあるように逆数を用いるべきだが、数学的な取り扱いの簡易さのために、そのままの差を比較している。定性的な議論には支障はない。結論として、移動距離で規格化された寸法が大きければ、高次モードが発生しやすい(very tilty)と結論付けている。ここで、寸法が大きいかは固有値間隔が小さいことが分かるが、固有値間隔が小さければ、なぜ、高次モードが発生しやすいかの説明は明示的になされていない。おそらく、固有値が増倍率であるため、高次モードの増倍率 (固有値) が大きければ、増倍率の性質上、励起されやすいモードであるとの暗黙の理解があると思われる。また、本研究では、他の複数の固有値についても説明してきた。バックリングに関しては、式(2.2-4)を見ても明らかなように、中性子勾配に関する固有値で、拡散係数を掛けると漏れの量として定義できる。固有値としての形状バックリング大きな値を取れば、漏れを促進し、増倍率とは逆に未臨界になる方に変化する。しかし、どの種類の固有値においても、高次モードの固有値がすでに顕現している基本モードの固有値に近づくことは、高次モードの励起のしやすさを表すことには違いない。ただし、固有値間隔自体は、あくまでも高次モードの発生しやすいさを表す指標であり、具体的な安定性は振動を励起する作用の力と、出力フィードバックなどの抑制力との兼ね合いで決まり、固有値間隔のみで、炉型間共通の制限値を設けることはできないことに留意すべきである。なお、一群修正理論から自然に整理できたように、安定性の特性は炉心の寸法を中性子の移動距離により規格化した値によって特徴づけられる。

2.4 安定性判別法

安定性判別法としては、一般的に特性方程式の解を代数的に求める方法、Routh 判別法・Hurwitz 判別法として知られる特性方程式の係数を操作し解と係数の関係から解の実部の符号を定める方法、ナイキスト判別法として知られる開ループ伝達関数のベクトル軌跡により安定性を判別する方法などがある。特性方程式の解を求める方法は、複雑なシステムでは高次の特性方程式が得られ根を求める作業が煩雑になるなどの欠点があるものの、直接的である。ここでは、Randall の用いた特性方程式の解を求める方法*を確認する。

初めにある関数を想定する。

$$F(x) = 0 \quad (2.4-1)$$

ここで、 x を動的周波数 ω で時間変化するものと仮定すると、

$$x = x_0 e^{\omega t} \quad (2.4-2)$$

式(2.4-1)から以下のような 2 次の特性方程式が得られるものとする。

$$\omega^2 + b\omega + c = 0 \quad (2.4-3)$$

解は、

$$\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (2.4-4)$$

となる。ここで、 $b^2 - 4c > 0$ の場合は実数解となり、

$$x = x_1 \exp\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} t\right) + x_2 \exp\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} t\right) \quad (2.4-5)$$

$b > 0$, $c \geq 0$ の場合は単調減少となる。 $b > 0$, $c < 0$ の場合は第 1 項が発散する。 $b < 0$ の場合も第 1 項が確実に発散する。 $b = 0$ の場合は $c < 0$ でなければならず第 1 項が発散する。

$b^2 - 4c = 0$ の場合は重解となり、

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{b}{2} t\right) \quad (2.4-6)$$

$b > 0$ で単調減少、 $b = 0$ (ただし $c = 0$) で一定、 $b < 0$ で発散となる。

*Randall の用いた方法は形式は異なるが、アプローチの仕方は一般的な制御工学で用いられるような、伝達関数のラプラス変換を行い特性方程式から解を求める手法と同等である。

$b^2 - 4c < 0$ の場合は虚数解となり、

$$x = e^{-\frac{b}{2}t} \left(x_1 \sin \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} t + x_2 \cos \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} t \right) \quad (2.4 - 7)$$

$b > 0$ で減衰振動、 $b = 0$ で振動が持続、 $b < 0$ で振動が発散する。

これらの結果より振動が減衰し安定である条件は $b > 0$ であることであり、その境界は $b = 0$ となる。なお、振動が持続する場合は $b = 0$, $c > 0$ の時でありその際の振動周期は $2\pi/\sqrt{c}$ となる。(式(2.4-7)において $b = 0$)

2.5 Randall の手法

中性子の基本方程式は

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \quad (2.5 - 1)$$

である。Xe のバランス方程式は

$$\frac{di}{dt} = \gamma_i \Sigma_f \phi - \lambda_i i \quad (2.5 - 2)$$

$$\frac{dx_e}{dt} = \gamma_{xe} \Sigma_f \phi + \lambda_i i - \lambda_{xe} x_e - \sigma_{xe} \phi x_e \quad (2.5 - 3)$$

となる。

平衡状態では Xe 濃度は、

$$Xe_{\infty} = \frac{(\gamma_{xe} + \gamma_i) \Sigma_f}{\frac{\lambda_{xe}}{\phi} + \sigma_{xe}} \quad (2.5 - 4)$$

中性子束の高い炉心では以下のように整理できる*。

$$Xe_{\infty} = \frac{(\gamma_{xe} + \gamma_i) \Sigma_f}{\sigma_{xe}} \quad (2.5 - 5)$$

* $\lambda_{xe} = 2.1 \times 10^{-5} s^{-1}$, 中性子束は動力炉ならば $\phi = 1.0 \times 10^{14} cm^{-2} s^{-1}$, 程度であり、 $\lambda_{xe}/\phi = 2.1 \times 10^{-19} cm^2$, 一方で、 $\sigma_{xe} = 2.8 \times 10^{-18} cm^2$ であり $\lambda_{xe}/\phi \ll \sigma_{xe}$ とするには 1 割程度断面積に誤差が与えられたと同等の影響がある。中性子束の低い炉心では成り立たない。なお、Randall は室温に対する Xe 断面積を用いており、実際の熱中性子炉における断面積は一桁程度小さい。その場合、式(2.5-5)の近似は使えない。しかし、これらの平衡濃度は式の規格化に用いられ、規格化された Xe 濃度のみを対象とするのであれば、式(2.5-4)、式(2.5-5)の区別は必要ない。安定性のみの議論は規格化された Xe 濃度のみで閉じており問題はない。

この平衡濃度で Xe のバランス方程式を規格化すると、

$$\frac{dI}{dt} = \gamma_I \sigma_{Xe} \phi - \lambda_I I \quad (2.5 - 6)$$

$$\frac{dXe}{dt} = \gamma_{Xe} \sigma_{Xe} \phi + \lambda_I I - \lambda_{Xe} Xe - \sigma_{Xe} \phi Xe \quad (2.5 - 7)$$

ここで、

$$I = \frac{i}{Xe_{\infty}} \quad (2.5 - 8)$$

$$Xe = \frac{xe}{Xe_{\infty}} \quad (2.5 - 9)$$

$$\gamma_I = \frac{\gamma_i}{\gamma_{Xe} + \gamma_i} \quad (2.5 - 10)$$

$$\gamma_{Xe} = \frac{\gamma_{Xe}}{\gamma_{Xe} + \gamma_i} \quad (2.5 - 11)$$

それぞれのパラメータを基準状態と摂動分で表わすと

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi \quad (2.5 - 12)$$

$$B^2 = B_0^2 + a_T \Delta\phi + a_{Xe} \Delta Xe \quad (2.5 - 13)$$

$$Xe = Xe_0 + \Delta Xe \quad (2.5 - 14)$$

$$I = I_0 + \Delta I \quad (2.5 - 15)$$

ここで、式(2.5-13)について考える。基準状態のバックリング： B_0^2 により作られた中性子束は、出力フィードバックによる反応度値の変化分： $a_T \Delta\phi$ とキセノン濃度変化により与えられる反応度値： $a_{Xe} \Delta Xe$ の影響を受けバックリングが変化し、高次モードが発生する原動力となる。これらの係数は、後の 2.6 節で述べるように、材料バックリングの変化として求められ、負の出力係数を持つ炉心では、 $a_T \Delta\phi \cdot a_{Xe} \Delta Xe$ のどちらの効果も基準状態に対し負の値を与える。そのため、現段階では不安定性に直結する要因を想像するのが難しい。しかし、出力フィードバックはドップラー効果、減速材温度係数の効果など、比較的瞬時の応答であるのに対し、キセノン濃度の変化は半減期 9 時間に代表される緩やかな変化である。一般的に、フィードバックシステムは、負の応答であっても、時間遅れが大きくなほどシステムは不安定になりやすいと言われ、キセノン振動はその典型的な例である。一方で、出力係数で表わされる出力フィードバックは、上記のように瞬時に現れ、負で大きな出力係数を持つ炉心では、その安定性が期待できる。これらの特性は、問題を周波数領域に変換し、その安定性を評価するのが定石であり、詳細は、これ以降の式導出に示す。

これらをバランス方程式に代入して二次の摂動項を無視すると、

$$\nabla^2 \Delta\phi + B_0^2 \Delta\phi + \phi_0 a_T \Delta\phi + \phi_0 a_{Xe} \Delta Xe = 0 \quad (2.5-16)$$

$$\frac{d\Delta I}{dt} = \gamma_I \sigma_{Xe} \Delta\phi - \lambda_I \Delta I \quad (2.5-17)$$

$$\frac{d\Delta Xe}{dt} = \gamma_{Xe} \sigma_{Xe} \Delta\phi + \lambda_I \Delta I - \lambda_{Xe} \Delta Xe - \sigma_{Xe} \Delta\phi Xe_0 - \sigma_{Xe} \phi_0 \Delta Xe \quad (2.5-18)$$

ここで、摂動分を以下に示すように、指数形で変化することを考えると、

$$\Delta\phi = \delta\phi e^{\omega t} \quad (2.5-19)$$

$$\Delta Xe = \delta Xe e^{\omega t} \quad (2.5-20)$$

$$\Delta I = \delta I e^{\omega t} \quad (2.5-21)$$

となり、これらを、式(2.5-16)から式(2.5-18)に代入して、問題を周波数領域へ変換する。

$$\nabla^2 \delta\phi + B_0^2 \delta\phi + \phi_0 a_T \delta\phi + \phi_0 a_{Xe} \delta Xe = 0 \quad (2.5-22)$$

$$\omega \delta I = \gamma_I \sigma_{Xe} \delta\phi - \lambda_I \delta I \quad (2.5-23)$$

$$\omega \delta Xe = \gamma_{Xe} \sigma_{Xe} \delta\phi + \lambda_I \delta I - \lambda_{Xe} \delta Xe - \sigma_{Xe} \delta\phi Xe_0 - \sigma_{Xe} \phi_0 \delta Xe \quad (2.5-24)$$

式(2.5-23)、式(2.5-24)よりヨウ素の項を消去すると、キセノンと中性子束のみの問題に簡略化でき、

$$(\omega + \lambda_{Xe} + \sigma_{Xe} \phi_0) \delta Xe - \sigma_{Xe} \left(\gamma_{Xe} + \frac{\lambda_I \gamma_I}{\omega + \lambda_I} \right) \delta\phi + \sigma_{Xe} \delta\phi Xe_0 = 0 \quad (2.5-25)$$

となり、解くべき式は式(2.5-22)、式(2.5-25)となる。

ここで、中性子束と Xe に関しモード展開をすると

$$\delta\phi = \sum_i a_i \psi_i \quad (2.5-26)$$

$$\delta Xe = \sum_i x_i \psi_i \quad (2.5-27)$$

$$(\nabla^2 + B_0^2) \psi_i + \mu_i^2 \psi_i = 0 \quad (2.5-28)$$

ここで、 $\mu_0 = 0$ 、 ψ_0 は摂動を受けない場合の中性子束、 μ_i^2 は固有値間隔である。

なお、ヘルムホルツ方程式の固有関数には以下の直交関係がある。

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad (2.5-29)$$

式(2.5-22)、式(2.5-25)の中性子束と Xe 濃度に対しモード展開し、固有関数 ψ_j と内積を取ると、

$$(-\mu_j^2 + a_T \bar{\Phi}_j) a_j + a_{Xe} \bar{\Phi}_j x_{ij} + \sum_{i \neq j} (a_T \bar{\Phi}_{ij} a_i + a_{Xe} \bar{\Phi}_{ij} x_i) = 0 \quad (2.5-30)$$

$$\sigma_{Xe} \left(\bar{X}e_j - \gamma_{Xe} - \frac{\lambda_I \gamma_I}{\lambda_I + \omega} \right) a_j + (\omega + \lambda_{Xe} + \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j) x_j + \sum_{i \neq j} (\sigma_{Xe} \bar{X}e_{ij} a_i + \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_{ij} x_i) = 0 \quad (2.5-31)$$

ここで、

$$\bar{\Phi}_j = \langle \psi_j, \phi_0 \psi_j \rangle \quad (2.5-32)$$

$$\bar{\Phi}_{ij} = \langle \psi_j, \phi_0 \psi_i \rangle \quad (2.5-33)$$

$$\bar{X}e_j = \langle \psi_j, \psi_j X e_0 \rangle \quad (2.5-34)$$

$$\bar{X}e_{ij} = \langle \psi_j, \psi_i X e_0 \rangle \quad (2.5-35)$$

$\bar{\Phi}_{ij}$ 、 $\bar{X}e_{ij}$ は出力分布がほぼ平坦の場合は、直交性によりゼロとみなせ、

$$(-\mu_j^2 + a_T \bar{\Phi}_j) a_j + a_{Xe} \bar{\Phi}_j x_j = 0 \quad (2.5-36)$$

$$\sigma_{Xe} \left(\bar{X}e_j - \gamma_{Xe} - \frac{\lambda_I \gamma_I}{\lambda_I + \omega} \right) a_j + (\omega + \lambda_{Xe} + \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j) x_j = 0 \quad (2.5-37)$$

と整理され、両係数がゼロ以外の解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} -\mu_j^2 + a_T \bar{\Phi}_j & a_{Xe} \bar{\Phi}_j \\ \sigma_{Xe} \left(\bar{X}e_j - \gamma_{Xe} - \frac{\lambda_I \gamma_I}{\lambda_I + \omega} \right) & \omega + \lambda_{Xe} + \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5-38)$$

でなければならない。この条件により以下のような特性方程式が得られる。

$$\omega^2 + b\omega + c = 0 \quad (2.5-39)$$

ここで、

$$b = \lambda_{Xe} + \lambda_I + \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j - \frac{a_{Xe} \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j (\bar{X}e_j - \gamma_{Xe})}{-\mu_j^2 + a_T \bar{\Phi}_j} \quad (2.5-40)$$

$$c = \lambda_I \left(\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j + \frac{a_{Xe} \sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j (1 - \bar{X}e_j)}{-\mu_j^2 + a_T \bar{\Phi}_j} \right) \quad (2.5 - 41)$$

特性方程式における安定性判別は 2.4 節で議論したように $b > 0$ である必要があり、その閾値は $b = 0$ となる。式(2.4-40)より、 $b = 0$ とすると、

$$\mu_j^2 = - \frac{a_{Xe} (\bar{X}e_j - \gamma_{Xe})}{1 + \frac{\lambda_{Xe} + \lambda_I}{\sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j}} + a_T \bar{\Phi}_j \quad (2.5 - 42)$$

ここで、Xe 濃度に関する関数を以下のように定義する。

$$f(\bar{\Phi}_j) = \frac{(\bar{X}e_j - \gamma_{Xe})}{1 + \frac{\lambda_{Xe} + \lambda_I}{\sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j}} \quad (2.5 - 43)$$

なお、この関数は、中性子束に対し単調増加する。その結果、

$$\mu_j^2 = -a_{Xe} f(\bar{\Phi}_j) + a_T \bar{\Phi}_j \quad (2.5 - 44)$$

と整理できる。この式は、必要な固有値間隔（左辺、正の値）に対し、右辺第 1 項の炉内スペクトル（1 群断面積）の特徴による Xe 振動の励起のしやすさを表す関数と (a_{Xe} は負、 $f(\bar{\Phi}_j)$ は基本的に正であるため第 1 項は正)、右辺第 2 項が出力フィードバック（負の出力係数を持つ炉心では、 a_T は負の値）による振動励起の阻害を表す項により収支関係を決定する問題であることを示している。この関係から中性子束強度を決定する問題に帰結できる。

Randall はさらに、

$$f(\bar{\Phi}_j) = - \frac{\mu_j^2}{a_{Xe}} + \frac{a_T}{a_{Xe}} \bar{\Phi}_j \quad (2.5 - 45) *$$

のように整理している。ここで、各変数を以下のように変換すると、

$$\Lambda_j^2 = \frac{\mu_j^2}{B_g^2} \quad (2.5 - 46)$$

$$\alpha_x = a_x M^2 \quad (2.5 - 47)$$

$$\alpha_T = a_T M^2 \quad (2.5 - 48)$$

*参考文献 3)では、符号の記載に間違いがあるが、参考文献 5)では正しい記載がみられる。また、 α_x は正の値となっているが、負の値でないと成立しない。

これらの関係により、以下のように整理される。

$$f(\bar{\Phi}_j) = -\frac{M^2 B_g^2}{\alpha_{Xe}} \Lambda_j^2 + \frac{\alpha_T}{\alpha_{Xe}} \bar{\Phi}_j \quad (2.5-49)$$

この関数値より式(2.5-43)の値(中性子束に対し単調増加)が上回ればキセノン振動が発生する。
式(2.5-43)については、式(2.5-6)、式(2.5-7)の平衡状態から得られる Xe 濃度を用いて、

$$f(\bar{\Phi}_j) = \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_{Xe}}{\sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j}} - \gamma_{Xe} \right)}{1 + \frac{\lambda_{Xe} + \lambda_I}{\sigma_{Xe} \bar{\Phi}_j}} \quad (2.5-50)$$

なお、基本モードの中性子束が平坦化され緩やかな場合は式(2.5-32)で表わされる中性子束は基本モードの平均中性子束で近似でき、式(2.5-49)、式(2.5-50)は以下のように評価できる。

$$f(\bar{\Phi}) = -\frac{M^2 B_g^2}{\alpha_{Xe}} \Lambda_j^2 + \frac{\alpha_T}{\alpha_{Xe}} \bar{\Phi} \quad (2.5-51)$$

$$f(\bar{\Phi}) = \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_{Xe}}{\sigma_{Xe} \bar{\Phi}}} - \gamma_{Xe} \right)}{1 + \frac{\lambda_{Xe} + \lambda_I}{\sigma_{Xe} \bar{\Phi}}} \quad (2.5-52)$$

これらの関数が一致する点が $b=0$ となり、振動が継続する。その際の周期は、式(2.4-7)、(2.5-40)、(2.5-41)より、

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_I \left(\lambda_{Xe} + \sigma_{Xe} \bar{\Phi} + (\lambda_{Xe} + \lambda_I + \sigma_{Xe} \bar{\Phi}) \frac{\left(1 - \frac{1}{1 + \lambda_{Xe}/\sigma_{Xe} \bar{\Phi}} \right)}{\left(\frac{1}{1 + \lambda_{Xe}/\sigma_{Xe} \bar{\Phi}} - \gamma_{Xe} \right)} \right)}} \quad (2.5-53)$$

のように評価できる。

これらの手法については、解析解ではあるものの、その手法の中に数値的なアプローチが必要な点があり、プログラムを作成する必要があった。そのため、C++言語によりプログラム D-XESC/A を作成し使用した。そのプログラムの詳細を付録 C に、その検証を付録 D に示す。

2.6 評価に用いる炉物理パラメータの決定

Randall の手法を用いるためには、キセノン平衡濃度に対する反応度価値、中性子束増加分に対する出力係数相当の反応度価値をバックリング相当で評価する必要がある。ここでは、材料バックリングの定義に基づき、これらの反応度価値を評価する。材料バックリングは式(2.2-5)で導出している。

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (2.2-5) \quad (\text{再提示})$$

この定義を元に数値的に評価も可能であるが、吸収断面積変化時のバックリング相当の反応度価値の関係を以下に示す。

$$\Delta B^2 = B^2 - B_0^2 = \frac{-\Delta\Sigma_a}{D} \quad (2.6-1)$$

となる、出力係数に関しては、

$$\frac{\Delta B^2}{\Delta\phi} = \frac{B^2 - B_0^2}{\Delta\phi} = \frac{-\Delta\Sigma_a}{D\Delta\phi} \quad (2.6-2)$$

ただし、厳密には、吸収断面積の変化以外にも発生するため、数値的に評価を行う。また、全エネルギーを対象とした一群拡散方程式*では移動距離は以下のように表すことができる。

$$M = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad (2.6-3)$$

一方で、出力係数は出力変化時の温度分布がその評価には必要となり、必ずしも必要な情報が得られるとは限らない。そこで、一般的な、 λ モードによる反応度価値が得られている場合のバックリング相当の反応度価値への変換については、以下のように行う。

$$\frac{d\rho}{dP} \times \frac{dB^2}{d\rho} \times \frac{dP}{d\phi} = \frac{dB^2}{d\phi} \quad (2.6-4)$$

λ モードによる反応度係数に対し、 λ モードの反応度価値をバックリングの反応度価値に変換する係数、出力変化量を中性子束変化量に変える係数である。2つの係数($dB^2/d\rho, dP/d\phi$)は代表的なセル計算モデルにおいて、温度反応度を λ モード、バックリングと両方に対し任意の温度点2点において評価し、その温度係数の比を取ることにより決定するものとする。

*熱群のみの1群方程式では、減速中の移動を表すフェルミ年齢が必要となる。

なお、Randall は 1 群方程式として、熱群のみを考慮している。一方で、本研究では、全エネルギーを対象とした 1 群方程式を想定しパラメータを評価している。これは、Randall らの時代は、評価手法が未発達であったため、熱群主体の評価が基本であり必要であれば高速核分裂効果などの補正を併用するということが慣例であったためである。さらに、Randall は Xe 断面積に室温相当の値を用いていた。熱群で限定する際も、もし、マックスウェル分布を考慮した熱群だけの断面積であればこの値も変わる。しかし、幸いにも、Randall の扱いは断面積を過剰に評価し、結果として安定性判断としては保守側の値を与える。一方で、本研究で用いた全エネルギーを範囲とした 1 群方程式では、核分裂スペクトル、 $1/E$ 減速領域からマックスウェル分布に至るまで、中性子スペクトルが精度よく評価されており、そのスペクトルを反映した精度の高い 1 群パラメータを評価し用いている。必要であれば比較の目的で、評価された中性子束に熱中性子束の割合を掛け、熱中性子束強度を評価する必要がある。しかし、どちらの場合においても、支配方程式(2.5-1)から式(2.5-3)の記載は変わらず、そこから導出される安定性判断に係る式及び、プログラムの記載は変わらない。ユーザーはこのことに留意してプログラムを使用すべきである。

3. 軽水炉との比較による高温ガス炉の安定性の確認

代表的な炉型のキセノン安定性の特性を比較するために、文献値およびセル計算による評価値により、キセノン安定性に関するパラメータを評価した。詳細な中性子バランスを要する達成燃焼度評価や出力ピーキング等の評価とは違い、キセノン安定性に関するパラメータはキセノン断面積やその平衡濃度による反応度価値、収率等のデータであり、セル計算でも十分である。これらのセル計算には高温ガス炉水素・熱利用研究センターにより二重非均質燃焼機能を拡張された SRAC-EX¹⁴⁾を用い、炉心の平均特性を代表できるよう多バッチ炉心については MOC、1バッチ炉心については MOL 相当の燃焼組成における特性を評価した。また、燃焼解析においては、形状バックリングを与え、B1 方程式によりバックリングを用い中性子の漏えいを考慮したスペクトルにより、1 群定数を算出し評価に用いた。

現行の代表炉型としては、PWR、BWR を選定した。PWR については、参考文献 15) に PWR 燃料温度係数 $-1.0 \times 10^{-5} \Delta k / k k' / ^\circ F$ 、BOC 時の減速材温度係数 $-2.0 \times 10^{-5} \Delta k / k k' / ^\circ F$ であり、ゼロ出力 (HZP) 時の温度が燃料、減速材共に $530^\circ F$ 、定格出力時に燃料温度 $1200^\circ F$ 、減速材温度 $572^\circ F$ 、である旨が示されている。ここから出力係数を求めると、 $-7.54 \times 10^{-5} \Delta k / k k' / \% power$ となり、これを用いた。PWR において、BOC 時の減速材温度係数を用いたのは、PWR ではケミカルシムによる余剰反応度制御を行うため、BOC の際の冷却材中のホウ素濃度が最も高く、減速材温度係数が最も小さくなり、キセノン振動が最も起こりやすいためである。BWR に関しては、文献 16) に、出力係数が $-1.64 \times 10^{-4} \Delta k / k k' / \% power$ である旨が示されている。なお、Randall の手法に用いられるのは、バックリング相当の反応度価値であるため、これらの λ モードの反応度価値は、式(2.6-4)の関係とセル計算により数値的に評価された換算係数により、バックリング相当の反応度価値に換算した。この換算係数評価および他のパラメータ評価には、PWR については、基準状態から燃料温度が 100K 増加、減速材温度が 50K 増加した状態、BWR については、定格時のボイド率 40%と 35%のバックリング相当の反応度価値の差と λ モード反応度価値の差との比を取り求めた。BWR は STEPIII 燃料、濃縮度 3.8wt%とし、PWR は STEPII 燃料、濃縮度 4.1wt%の燃料に対し、集合体等価単一ピンセルにより、取り出し平均燃焼度 45GWd/t に対し、MOC 炉心平均相当の 22.5GWd/t の燃焼を想定し評価を行った。収率データに関しては、SRAC 燃焼解析により評価された、Pu の核分裂効果も含むものであり、最新の評価済み核データ JENDL-4.0 のデータが反映された SRAC-MVP 用簡易燃焼チェーン ChainJ40¹⁷⁾によるものである。

高温ガス炉については、近年、開発途上国への導入を目的とした小型高温ガス炉システム HTR50S¹⁸⁾を対象とする。ただし、等温温度係数により出力係数が負になることは評価されているが、出力係数および、その評価に必要な、出力毎の温度分布などが評価されていないため、核特性に近い HTTR の温度分布を用いて出力係数を評価した。具体的には、Table 3.1 に示すように、25MW、30MW 出力時の温度分布を用い評価した。代表温度としては、炉心中心に当たる燃料ブロック 3 段目の値を用いた。HTR50S 前期炉心を想定し、取り出し燃焼度 33GWd/t に対し、MOL 相当の 16.5GWd/t 時の値を、等価単一ピンセルモデルにより評価した。出力係数は、 $-2.50 \times 10^{-3} \Delta k / k k' / MW$ と評価され、過去の評価値¹⁹⁾が定格出力近辺で $-2 \sim$

$3 \times 10^{-3} \Delta k / k k' / MW$ 程度の値が評価されていることと比べると妥当な値であることが分かる。

Table 3.1 Temperature conditions for power coefficient (K)

	Fuel compact	Sleeve	Block
25MW	1150	1040	1010
30MW (full power)	1300	1230	1160

また、GTHTR300にはMOX燃料炉心概念²⁰⁾があり、Pu 燃焼高温ガス炉 Clean Burn 高温ガス炉⁷⁾の研究が進んでいる。ここでは、HTR50S 体系で Pu を用いることを想定して Pu 炉心の特性を評価する。単一ピンセルの評価により、HTR50S 標準の U 炉心と同等のサイクル長を達成するには、Clean Burn と同様 U 母材を用いず、Pu のみで炉心を構成し Pu を YSZ により、1 割程度に希釈することで炉心を構成すれば良い見込みが得られた。今回は、この条件によって、Pu 炉心の特性を評価する。HTR50S の平均濃縮度は 6.1wt% であり、軽水炉取り出し Pu の組成は Puf/Pu が約 60wt%、これを、1 割程度に希釈するので、核分裂性物質の装荷量は同等である。なお、この炉心を HTR50S-Pu と呼称する。HTR50S-Pu の出力係数、その他パラメータの評価にも、Table 3.1 の条件を用いている。各炉型に対し評価された結果を Table 3.2、Table 3.3 に示す。また、炉内スペクトルと Xe の吸収断面積を Fig. 3.1 に示す。なお、評価に使用する崩壊定数は最新のもの $^{135}\text{Xe}: 2.1066\text{E}-5 \text{ s}^{-1}$, $^{137}\text{I}: 2.9262\text{E}-5 \text{ s}^{-1}$ に置き換えた。

Table 3.2 Reactor constants for each type of reactor

	PWR	BWR	HTR50S	HTR50S-Pu
Production cross section (cm^{-1})	2.821E-02	3.088E-02	2.746E-03	3.254E-03
Absorption cross section (cm^{-1})	2.543E-02	2.766E-02	2.380E-03	2.848E-03
Diffusion coefficient (cm)	1.186E+00	1.054E+00	1.203E+00	1.280E+00
Migration length (cm)	6.8	6.2	22.5	21.2
Material buckling (cm^{-2})	2.340E-03	3.062E-03	3.041E-04	3.174E-04
Flux level ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$)	3.207E+14	2.312E+14	1.143E+14	1.077E+14
Xe absorption cross section (cm^2)	2.014E-19	2.584E-19	2.428E-19	6.706E-20
Xe yield	5.031E-03	5.046E-03	4.720E-03	9.025E-03
I yield	6.428E-02	6.429E-02	6.351E-02	6.606E-02
Direct Xe yield fraction	7.260E-02	7.277E-02	6.918E-02	1.202E-01

Table 3.3 Xe reactivity and reactivity coefficient of power

	PWR	BWR	HTR50S	HTR50S-Pu
Xe reactivity ($\Delta k / k k'$)	-2.58E-02	-2.46E-02	-2.50E-02	-1.08E-02
Xe reactivity (cm^{-2})	-6.89E-04	-8.20E-04	-5.41E-05	-2.59E-05
Power coefficient ($\Delta k / k k' / \% \text{pow.}$)	-7.54E-05	-1.64E-04	-7.50E-04	-9.07E-04
Power coefficient (s)	-6.25E-19	-4.37E-18	-1.20E-18	-1.82E-18

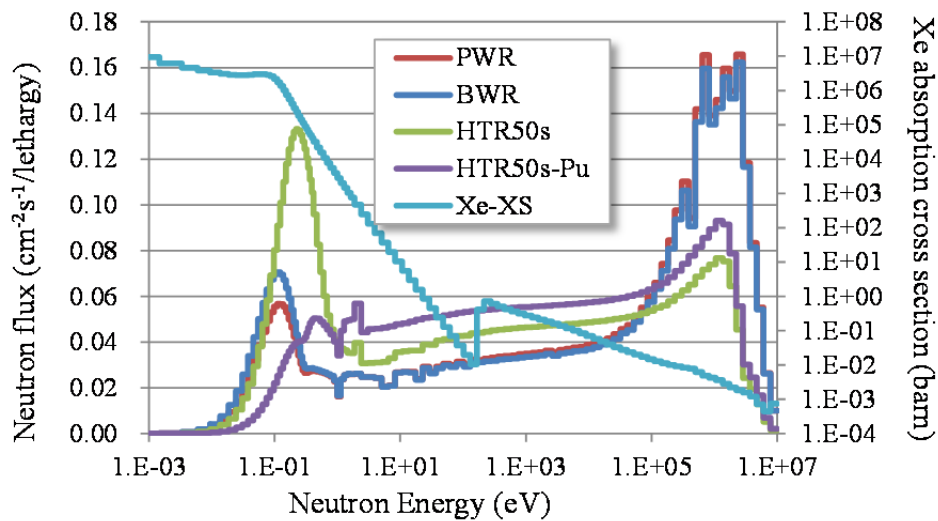


Fig. 3.1 Neutron spectrum and Xe absorption cross section

拡散係数はほぼ同じであるが、マクロ断面積については、生成断面積、吸収断面積は高温ガス炉のものが軽水炉のものより一桁小さい。その影響で、Xe の反応度値は、 $\Delta k/k'$ 単位では、U 燃料炉心では、どの炉型も大きく変わらないが、バックリング相当 (cm^{-2}) では、高温ガス炉のものが一桁小さい。これは、式(2.2-5)から分かるように増倍率が基本的に生成断面積と吸収断面積の比で表わされるのに対し、材料バックリングが、その差で表わされることに由来する。高温ガス炉では一桁小さい生成断面積、吸収断面積がバランスをとっているため、バックリング相当の反応度値が小さなものとなる。さらに、Pu 炉心では、キセノンの反応度値が半分程度に小さくなっている。しかしながら、Pu 炉心のほうが、Xe,I 共に核分裂収率が大きくなっており、キセノンの平衡濃度自体は、Pu 炉心のほうが高い。これは、Fig.3.1 の Pu 炉心の炉内スペクトルの硬さにより説明ができる。実際にキセノンの一群縮約断面積は Table 3.2 にあるように、Pu 炉心のものがウラン炉心のものより 1/3 程度の小さな値となっている。なお、U 炉心のスペクトルについては、BWR のものが PWR よりも柔らかい。高温ガス炉のスペクトルはマックスウェル分布のピークが、温度の高い黒鉛の熱運動により、若干、高エネルギー側にシフトしているが、マックスウェル分布自体の大きさにより、熱中性子の量は多い。Fig. 3.1 は中性子束の全量で規格化され、レサジー幅で割っているため*、単純にグラフ上の熱エネルギー領域の面積でスペクトルの柔らかさを判断できる。高温ガス炉のスペクトルは軽水炉より柔らかいと言える。代表的な $1/v$ 特性を持つ断面積と比較すると、一群断面積は高温ガス炉のものが、軽水炉のもの 2 倍程度の大きな値となる。しかし、Xe 断面積は 0.1eV 付近で一定の値をとる特異な形状をしており、その関係上、高温ガス炉と BWR の断面積が同程度の値であり、PWR の断面積がやや小さなものとなっている。出力係数は $\Delta k/k'$ 単位では、高温ガス炉のものが BWR に比べ 4 倍程度、絶対値が大きい。PWR は、上記のように、BOC 時のホウ素濃度の大きさにより、温度係数の絶対値が小さくなっている関係上、出力係数の絶対

*スペクトルの図は統計学で言うところの度数分布（ヒストグラム）である。中性子束はエネルギー群に割り当てられる積分量である。そして、その量をグラフ上の面積として表す。レサジー幅で割るのは、グラフのエネルギー軸が対数で表示されているためである。

値が小さくなっている。バックリング相当に換算すると、BWR のものが負の絶対値が最も高くなる逆転がみられるが、PWR の絶対値が最も小さい状況には変わりはない。

ここで、Randall が式(2.5-45)から式(2.5-49)の外性的なパラメータの与え方に対する式変形の意味と、これらの値により安定性の特徴を考慮する。物理的な意味自体は、式(2.5-44)が直接的で分かりやすい。一方で、関数 f が 0 から 1 近辺(厳密には負の値も取りうる)の値を取りうること、規格化された固有値間隔 Λ は Fig.D.1 に見られるように、寸法に依存せず一定の値を取る。この 2 つの値の範囲が容易に予測できる事実は、解析手法が未発達であった Randall らの時代には、非常に有益であったと思われる。固有値間隔を規格化するためには、外性的にバックリングを与える。また、このバックリングとバックリング相当の Xe 反応度値を無次元化するために、移動距離を導入している。ここで、この移動距離で無次元化されたバックリング相当の Xe 反応度値を各炉型について評価する。PWR,BWR,HTR50S,HTR50S-Pu の順に、 $-3.21\text{E-}02$ 、 $-3.13\text{E-}02$ 、 $-2.73\text{E-}02$ 、 $-1.16\text{E-}02$ となる。U 炉心に関しては、ほぼ同じ、値になっており、Randall が与えた $-3.68\text{E-}02$ と同程度の値となっている。付随して、形状バックリングも移動距離で無次元化されることになる。スラブ体系では、

$$B^2M^2 = \left(\frac{m\pi}{H/M}\right)^2 \quad (3-1)$$

となる。移動距離で規格化することにより、特性が整理されるのは、この式変形によるものであり、移動距離で規格化すること自体は、Xe 反応度値が U 炉心でほぼ同じ値となっていることから妥当であると思われるが、直接的な安定性の発現としては、規格化される前のバックリング相当の Xe 反応度値の小ささであると言える。なお、規格化された寸法により高次モード発生の特性を整理できるとする考え方は、Stacey が修正一群理論を利用してその特性を示した式(2.3-2)による帰結と合致する。高温ガス炉の移動距離は軽水炉の 3 倍程度あるため、軽水炉より 3 倍程度大きな体系でも許容できることが分かる。

さらに、キセノン安定性の特徴には、式(2.5-52)で表わされるキセノン濃度に関する関数 f の挙動が関係する。U 炉心と Pu 炉心との違いとしては、Xe 収率と断面積である。特に、Xe 断面積については、Randall は室温相当のものを用いていたこともあり、その違いは安定性判断の結果に大きく影響すると思われる。関数 f の特性を Fig. 3.2 に示す。

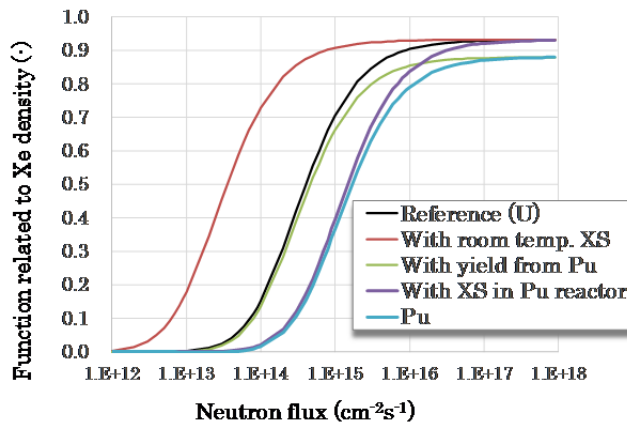


Fig. 3.2 Function related to Xe density

Fig.3.2には、U炉心を基準とし、室温相当の断面積に置き換えたもの、Pu収率に置き換えたもの、Pu炉心スペクトルで縮約した断面積に置き換えたもの、Pu炉心での関数の挙動を示している。一桁程度大きな室温相当の断面積に置き換えた場合は、低い中性子束でも関数 f が早めに立ち上がる傾向が確認できる。ある一定の関数 f に対してキセノン振動が励起される場合には、最大で、一桁程度小さな中性子束でも振動が発生し、不安定なシステムになると言える。次に、Pu収率に置き換えた場合の変化を確認する。Pu収率では、Xeの直接的な収率の割合が増大する。これは、関数 f の飽和値を低減させる。これは、式の記載からも自明の結果であるが、出力低下時のIからのXeのビルドアップが大きな時間遅れを持ち位相も逆であるとする物理的イメージからも直感的に理解できる。このPu燃料においてXeの直接的な収率の割合が増大する効果は、わずかではあるが、システムを安定させる方向に働く。最後に、Pu炉心スペクトルで縮約した断面積に置き換えた際の挙動について確認する。この場合は、中性子束強度の閾値が倍程度高くなり、システムは安定化する。Pu炉心では、この2つの安定化要素、Xe反応度値の小ささ、出力係数の負の絶対値の大きさなど、すべての項目において、U炉心よりもキセノン振動が発生しにくいと言える。ここで、負の出力係数が与えられた場合、Xe断面積の小ささによる関数 f の立ち上がりの遅さは単純に中性子束の閾値が大きくなるだけではない。中性子束が大きくなることにより、出力フィードバックによるキセノン振動の抑制が大きく働く効果も期待できる。これは、式(2.5-13)で中性子束の変化分に対して定義した出力係数が、周波数領域に問題を変換し、振動の発生する条件から得られた式(2.5-44)では、出力係数が中性子束の変化分ではなく、絶対値に対して作用することによる。

次に、実際にRandallの手法を用いた安定性解析によりキセノン安定性を評価する。偶然にも、ここで上げられた炉型はすべて縦長であり、高次モード発生は軸方向に発生しやすい傾向を持つ。炉心高さが360cm近辺であるため*、その結果に対する体系寸法の影響は少ない。ここでは、炉心毎の軸方向の安定性を確認する。その際、一般的に、安全評価では、重要なパラメータに安全係数を与え保守側の評価を用いるため、本研究でも、キセノン振動の発生しやすさに直接関係するXe反応度値および、Xeの中性子吸収断面積を1.2倍、キセノン振動を抑制する出力係数を0.8倍することとした。また、平坦化度合いとしては、0.5を想定した。結果をTable 3.4に示す。キセノン安定性判別の結果としては、大別して、いかなる中性子束強度でも安定、中性子束強度により安定性が変化の2ケースに分けられる。Fig.3.2に示されるように、中性子束強度により関数 f が大きな値を取り、キセノン振動が発生しやすくなる。しかし、関数 f は1近辺の値に飽和し、その飽和をした状態でもキセノン振動発生に至らない場合があり、前者に相当する。これは、想定される高次モードの固有値間隔が大きな場合、Xe反応度値が小さな場合である。後者に関しては、中性子束強度により関数 f が変化し、ある一定の中性子束強度を境にキセノン振動の安定・不安定の状態が分かれる。PWRの軸方向にキセノン振動が発生する以外には、他の炉型では、いかなる中性子束強度でも振動が発生しない完全な安定性が確認された。なお、PWRの軸方向振動では、中性子束強度の閾値は $1.63 \times 10^{14} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ となり、定格運転時の中性子束強度が $3.21 \times 10^{14} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ であることを考えると、

*本研究では各炉型に対しそれぞれ、炉心半径および高さを、PWR:R=168.5cm,H=366.0cm、BWR:R=273.5cm,H=371.0cm、HTR50s:R=115.0cm,H=350cmとしている。

Table 3.4 Xe stability for each type of reactor

	PWR	BWR	HTR50S	HTR50S-Pu
Radial	Stable	Stable	Stable	Stable
Axial	Unstable	Stable	Stable	Stable

定格運転時にキセノン振動が発生することが分かる。なお、このときの振動周期は 30.2 時間と評価された。

このことは、実機の原子炉においても、PWR がキセノン振動に対し制御棒によるアキシャル・オフセット制御²¹⁾を行うのに対し、BWR が一定の負の出力係数が得られればキセノン振動が起らない²²⁾としていること合致している。これは、言うまでもなく、BWR はボイド率変化により大きな負の値の出力係数が得られるのに対し、PWR では、ケミカルシム添加による影響により出力係数の負の値が低下する特性に由来している。高温ガス炉では、安定であることしか本手法ではわからないが、上記のように移動距離が軽水炉より 3 倍程度あることから、軽水炉よりも 3 倍大きな寸法が許容でき、Pu 炉心の特性は更なる安定化に寄与する。

4. 結論

新型高温ガス炉に対する安定性評価の要求に対応するため、キセノン振動に対する解析解に基づく Randall の安定性判別手法の導出の検証とプログラムの整備を行った。また、高温ガス炉のキセノン安定性を軽水炉と比較、さらに、Pu 燃料高温ガス炉の安定性の検討を行った。その結果、以下のような成果・結論を得た。

- ・ Randall の手法の導出を検証しその妥当性および物理的意味合いを確認した。
- ・ マルチプラットフォーム、GUI・CUI 両対応プログラム D-XESC/A を開発した。(付録 C 参照)
- ・ Randall の手法を用いて、PWR 実炉で運転対応をしているようにキセノン振動が起これば、BWR では起これないこと、同等の寸法では、高温ガス炉の U 燃料炉心、Pu 燃料炉心で起これないことを確認した。

このように、評価手法の整備および高温ガス炉のキセノン安定性の高さを確認した。また、本研究で開発したプログラムにより、今後、Pu 燃焼等が期待される高温ガス炉のキセノン安定性評価が可能となった。また、今後は、より精度が高く、複雑な炉心体系に対応できる手法を整備する予定である。

謝 辞

本研究を行う上で、安全設計グループの中川繁昭氏には、HTTR の安全審査時に用いた Randall の Xe 安定性判別手法の適用に関しての情報を提供していただきました。同グループの後藤 実氏には HTTR の出力係数についてご指導をいただきました。また、本研究を実施する機会を与えていただいた同グループの大橋弘史氏に、この場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

- 1) 原子力規制委員会: “実用発電用原子炉及びその附属施設の位置、構造及び設備の基準に関する規則,” 原子力規制委員会 (2016).
- 2) 株式会社日立製作所; “沸騰水型原子力発電所 キセノン安定性の解析手法について,” HLR-015, (1977).
- 3) D. Randall and D. S. St. John: “Xenon Spatial Oscillations”, *Nucleonics*, 16(3), pp. 82-86 and 129 (1958).
- 4) D. Randall and D. S. St. John: “Xenon Spatial Oscillations”, *Nucl. Sci. Eng.*, 14, pp. 204-206 (1962).
- 5) D. Randall: “Xenon Oscillation Calculation by Modal Analysis,” Savannah River Laboratory, DP-1239, (1972).
- 6) S. Saito, T. Tanaka, Y. Sudo et al. : “Design of High Temperature Engineering Test Reactor (HTTR),” *JAERI 1332*, (1994), 247p.
- 7) Y. Fukaya, M. Goto, H. Ohashi et al.: “Proposal of a plutonium burner system based on HTGR with high proliferation resistance,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, 51 (6), pp.818-831, (2014).
- 8) S. Kaplan : “The Property of Finality and the Analysis of Problems in Reactor Space-Time Kinetics by Various Modal Expansions,” *Nucl. Sci. Eng.*, 9, pp.357-361, (1961).
- 9) J. J. Duderstadt and Louis J. Hamilton : “Nuclear Reactor Analysis,” John Wiley & Sons, Inc., New York, (1976).
- 10) K. Hashimoto : “Linear Modal Analysis of Out-of-Phase Instability in Boiling Water Reactor Cores,” *Ann. Nucl. Energy*, 20(12), pp.789-797, (1993).
- 11) T. Gozani : “The concept of reactivity and its application to kinetic measurements,” *Nukleonik* 5(55), (1963).
- 12) K. Mochizuki: “Analysis of Neutron Flux Spatial Oscillation Due to Xenon Build-up in the British Large Power Reactor Core,” *JAERI 1006-C*, (1959), 28p.
- 13) W. M. Stacey : “Nuclear Reactor Physics,” John Wiley & Sons, Inc., (2001).
- 14) 後藤 実: “高温ガス炉の核特性解析手法と核設計に関する研究(学位論文),” *JAEA-Review* 2014-058 (2015). 103p.
- 15) N. E. Todreas, M. S. Kazimi: “Nuclear Systems II Elements of Thermal Hydraulic Design,” Taylor & Francis, (2001).
- 16) F. Reisch: “High Pressure Boiling Water Reactor,” IAEA, IAEA-CN-164-5S02, (2009).
- 17) 奥村 啓介, 小嶋 健介, 岡本 力: “JENDL-4.0 に基づく燃焼チェーンデータ ChainJ40 の開発”, 日本原子力学会 2012 年春の年会, 福井市, (2012).
- 18) 後藤 実, 関 靖圭, 稲葉 良知 他: “小型高温ガス炉システムの概念設計,2; 核設計,” *JAEA-Technology* 2012-017, (2012), 29p.

- 19) 山下 清信, 新藤 隆一, 村田 勲: “高温工学試験研究炉の反応度係数の評価”, JAERI-M 90-008, (1990). 49p.
- 20) 毛利 智聡; 西原 哲夫; 國富 一彦: “MOX 燃料を使用した高温ガス炉の核熱設計”, 日本原子力学会和文論文誌, 6(3), pp.253-261, (2007).
- 21) 関西電力株式会社: “大飯発電所原子炉設置変更許可申請書 (1号、2号、3号及び4号原子炉施設の変更) 平成14年8月 (平成15年3月一部補正) ”, 関西電力株式会社,(2002).
- 22) 中部電力株式会社: “ 浜岡原子力発電所原子炉設置変更許可申請書 (5号原子炉の増設) 平成9年4月 (平成10年2月一部補正) ”, 中部電力株式会社,(1997).

付録 A バックリング決定のための中性子流の連続条件の解法について

2 領域炉心では、バックリングの決定に式(2.2-47)、式(2.2-58)のような中性子流連続条件を用いる。解析解を得るのは困難なため数値解により決定する。ここでは、

$$f(B) = 0 \quad (A-1)$$

のような陰形式の関数に整理し、問題の性質に合わせてニュートン法や二分法を適用しバックリングの決定を行う。ここでは、問題ごとの関数形を記す。なお、径方向バックリングのみを決定するものとする。

燃料部を 2 領域に分割した炉心の中性子流の連続条件から得られる関数は以下のように整理される。

径方向：

$$\begin{aligned} f(B_{r\theta, kn}^{in}, B_{r\theta, kn}^{out}) = & D_{r\theta, kn}^{in} B_{r\theta, kn}^{in} \{ Y_n(B_{r\theta, kn}^{out} R) J_n(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) - J_n(B_{r\theta, kn}^{out} R) Y_n(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) \} \\ & \left\{ \frac{n}{r_b} J_n(B_{r\theta, kn}^{in} r_b) - J_{n+1}(B_{r\theta, kn}^{in} r_b) \right\} \\ & - D_{r\theta, kn}^{out} B_{r\theta, kn}^{out} J_n(B_{r\theta, kn}^{in} r_b) \left\{ Y_n(B_{r\theta, kn}^{out} R) \left\{ \frac{n}{r_b} J_n(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) - J_{n+1}(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) \right\} \right. \\ & \left. - J_n(B_{r\theta, kn}^{out} R) \left\{ \frac{n}{r_b} Y_n(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) - Y_{n+1}(B_{r\theta, kn}^{out} r_b) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (A-2)$$

軸方向：

$$f(B_{z, 2}^{in}, B_{z, 2}^{out}) = D_{in} B_{z, 2}^{in} \frac{\sin\left(B_{z, 2}^{out} \frac{z_b}{2}\right)}{\sin\left(B_{z, 2}^{in} \left(\frac{H}{2} - \frac{z_b}{2}\right)\right)} \cos\left(B_{z, 2}^{in} \left(\frac{H}{2} - \frac{z_b}{2}\right)\right) + D_{out} B_{z, 2}^{out} \cos\left(B_{z, 2}^{out} \frac{z_b}{2}\right) \quad (A-3)$$

となる。ただし、軸方向は出力平坦化の用途に限る。

なお、本研究において出力平坦化を考慮する際は、内側炉心と外側炉心の拡散係数が一致するものと仮定する。この仮定により、炉定数を与えることなく関数形を評価することが可能となる。

また、本研究では以下のような実装により、それぞれのバックリング値を評価した。2 領域問題に関しては、式(2.2-48)などの関係を用い、どちらかの領域一方を決定する問題とし、決

定後に同条件を用い残りの領域のバックリングを決定する。今回の問題では、半径依存モード k に対しては、複数ある解の内 k 番目の解を採用する。幸いに今回の関数は 0 における特異点を除けば緩やかな連続性のある変化を示す。そのため、バックリングを 0 近傍から一定間隔で大きなものとし連続的に関数値をサンプリングしていき、サンプリングされた関数値と前回のサンプリング値の積が負になった点を暫定的な解として記憶しておく。最終的に必要となる解に関しては、暫定解を起点としニュートン法を用いて高精度な解を算出し置き換えた。

付録 B 1 領域炉心と 2 領域炉心における高次モード中性子束形状の特徴

ここでは、各炉心における中性子束モード形状の特徴を確認する。炉心サイズは半径 272.8cm, 高さ 800cm とした。平坦化炉心については、軸方向に 60%、径方向に 67%の平坦化を行った。

1 領域炉心：

基本的な体系であり、その関数形および形状バックリングは直接的に評価できる。

$$\psi_i = J_n(B_{r\theta, kn}r) \cos(n\theta) \sin(B_{z, m}z) \tag{B-1}$$

$$B_{r\theta, kn}^2 = \left(\frac{\nu_{kn}}{R}\right)^2 \tag{B-2}$$

$$B_{z, m}^2 = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \tag{B-3}$$

ここで、

ν_{kn} : n 次の J_n 関数の k 番目のゼロ点

である。軸方向 sin 関数のみであり、そのモード形状は単純である。形状を Fig. B.1 に示す。なお、これらを Fig. B.2 のような記号で示すものとする。

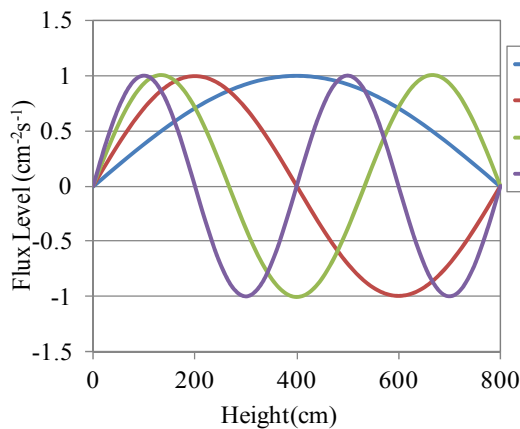


Fig. B.1 Axial mode

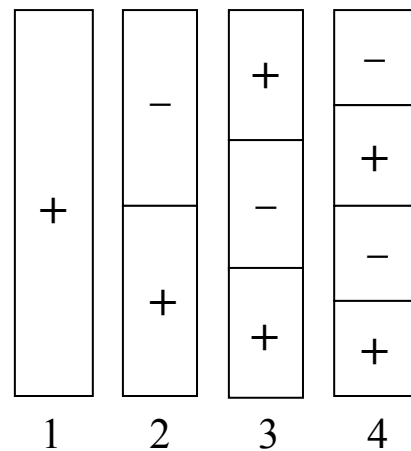


Fig. B.2 Symbol of mode shape

径方向は、半径を関数とする分布および角度を関数とする分布に分けられる。ここでは、単純な角度方向について確認する。Fig. B.3 にその形状を示す。

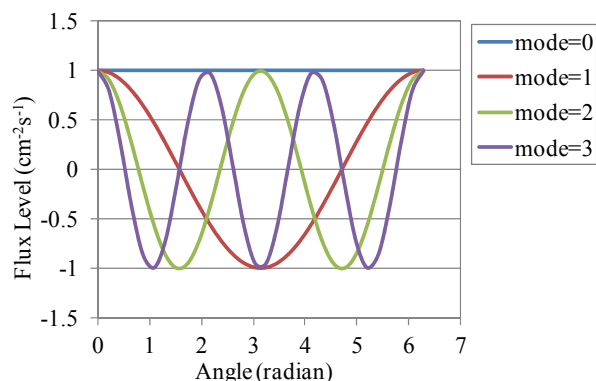


Fig. B.3 Azimuthal mode

径方向については、Fig. B.4 および Fig. B.5 に示す。径方向関数に関しては、角度モード n がベッセル関数の関数形 J_n と連動しており、モード形状も連動している。mode= k_n の記載は、径方向モード次数 k 、角度方向モード次数 n を表している。

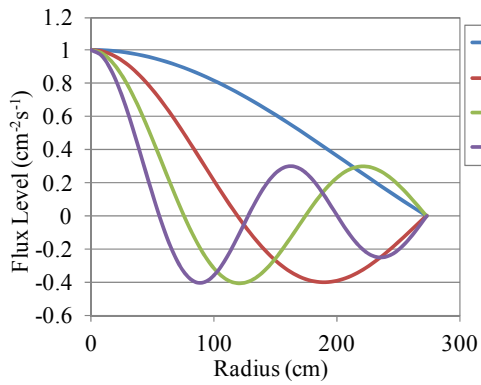


Fig. B.4 Radial mode ($n=0$)

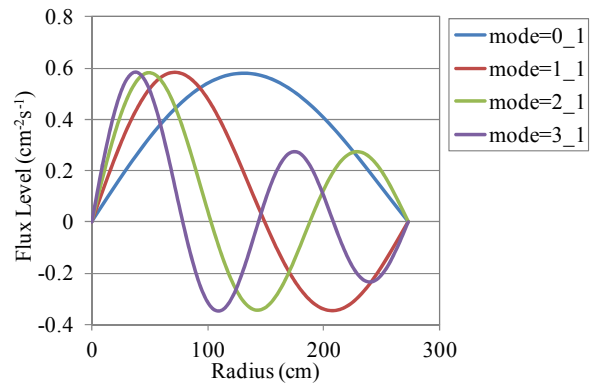


Fig. B.5 Radial mode ($n=1$)

最終的に径方向（水平方向）のモード形状は角度方向依存モード半径依存モードの積として表すことができる。その一部を Fig. B.6 に示す。

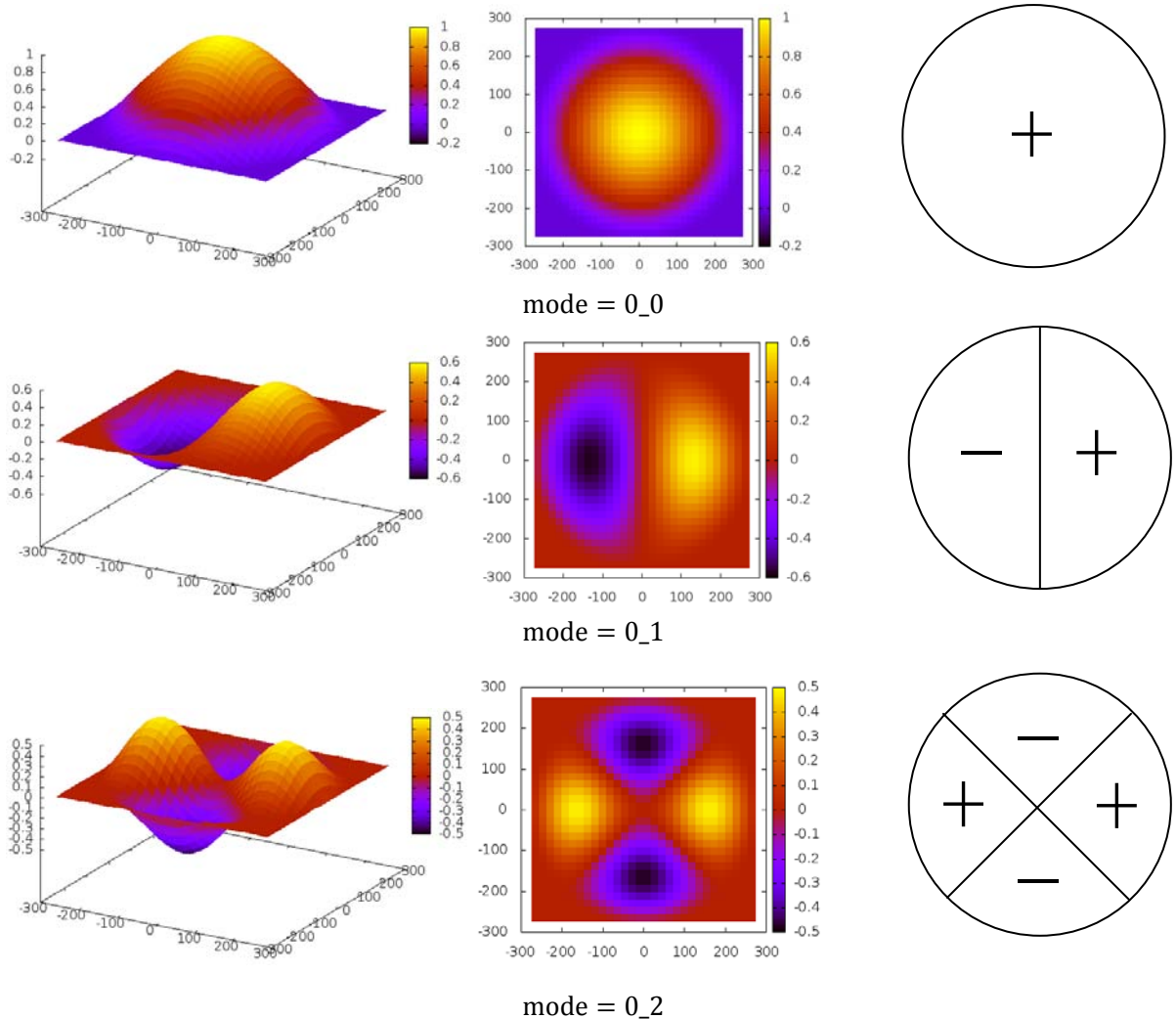


Fig. B.6 Shape of radial mode and symbols for one-region core (1/3)

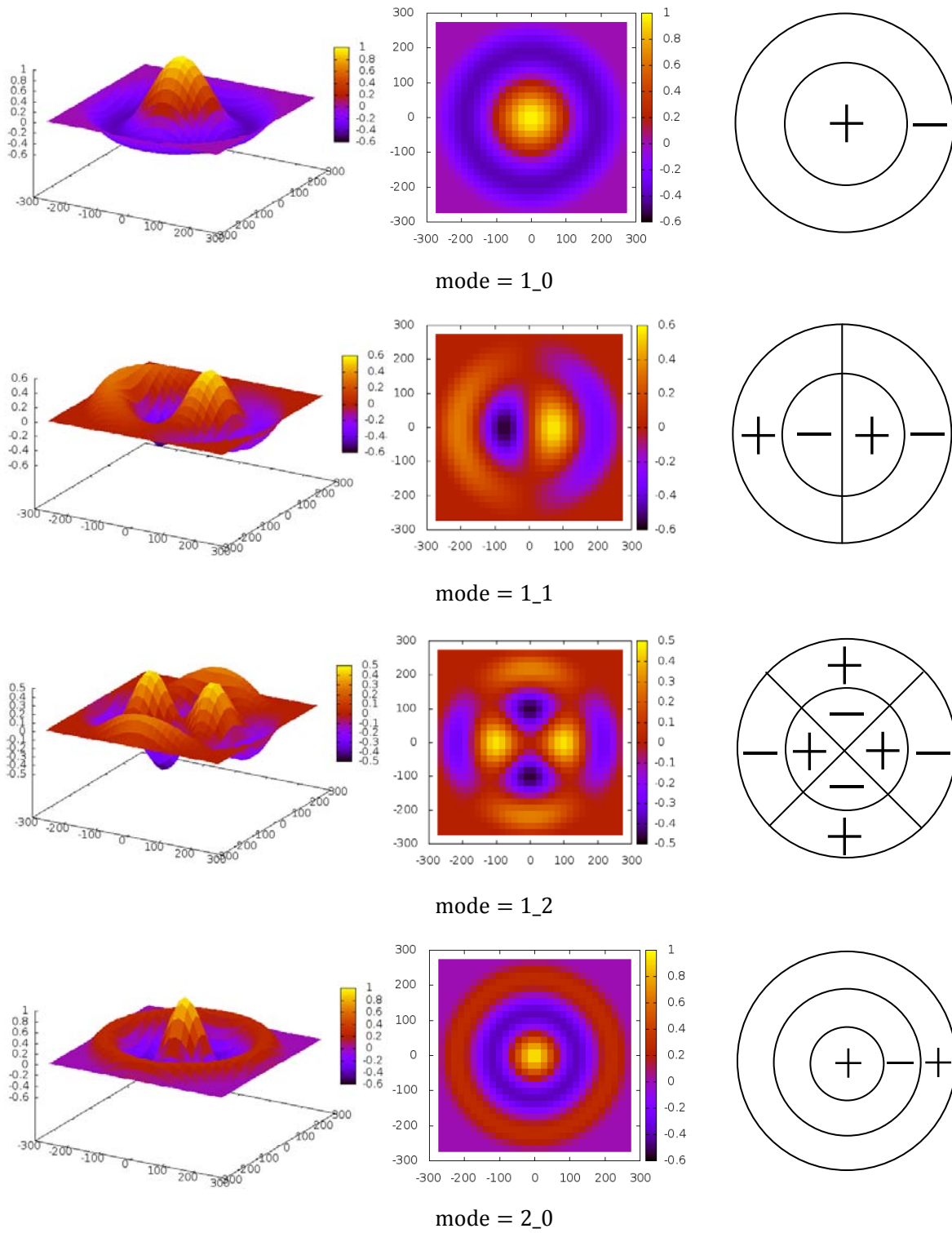


Fig. B.6 Shape of radial mode and symbols for one-region core (2/3)

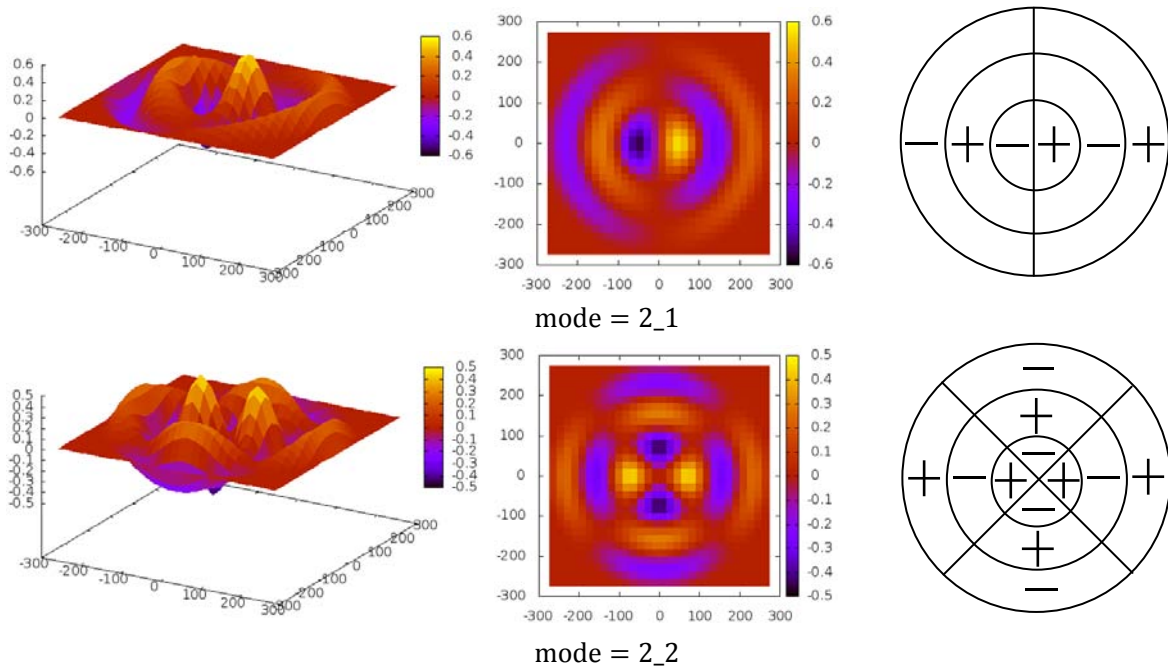


Fig. B.6 Shape of radial mode and symbols for one-region core (3/3)

これらのモードに関してはそれぞれのモードに対応した固有値が存在する。各モードの固有値と基本モードの固有値の間隔は、固有値間隔とよばれ、固有値間隔の小さなモードは顕在化し易く出力変動の要因となり不安定性の原因となりうる。ここで、各モードの固有値および固有値間隔を確認する。各モードと対応する固有値を Table B.1 に示す。軸方向では高次モードが励起し易く、次に角度依存のモードが発生し易く、径方向依存のモードは最も発生しにくいことが推測できる。

Table B.1 Eigenvalues for each mode in one-region core (cm⁻²)

	Reference	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
R-mode	0	0	0	0	1
θ -mode	0	0	0	1	0
Z-mode	1	2	3	1	1
Radial Buckling	7.7710E-05	7.7710E-05	7.7710E-05	1.9729E-04	4.0945E-04
Axial Buckling	1.5421E-05	6.1685E-05	1.3879E-04	1.5421E-05	1.5421E-05
Buckling	9.3132E-05	1.3940E-04	2.1650E-04	2.1271E-04	4.2487E-04
Eigen Value Separation	0.0000E+00	4.6264E-05	1.2337E-04	1.1958E-04	3.3174E-04
Eigen Value Separation (Ratio)	0.0000E+00	4.9676E-01	1.3247E+00	1.2839E+00	3.5621E+00

出力平坦化炉心（燃料 2 領域炉心）：

軸方向の関数形は、基本モードに関しては、

$$\psi_1^{\text{in}} = 1 \quad (\text{B-4})$$

$$\psi_1^{\text{out}} = \sin\left(\frac{\pi}{z_b} z\right) \quad (\text{B-5})$$

高次モードに関しては、

$$\psi_2^{\text{in}} = \frac{\sin\left(B_{z,2}^{\text{out}} \frac{z_b}{2}\right)}{\sin\left(B_{z,2}^{\text{in}} \left(\frac{H}{2} - \frac{z_b}{2}\right)\right)} \sin\left(B_{z,2}^{\text{in}} \left(\frac{H}{2} - z\right)\right) \quad (\text{B-6})$$

$$\psi_2^{\text{out}} = \sin(B_{z,2}^{\text{out}} z) \quad (\text{B-7})$$

径方向の関数形は以下のようになる。

$$\psi_i^{\text{in}} = \frac{1}{J_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{in}} r_b)} \left\{ \frac{J_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} R)}{Y_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} R)} Y_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} r_b) - J_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} r_b) \right\} J_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{in}} r) \cos(n\theta) \sin(B_{z,m} z) \quad (\text{B-8})$$

$$\psi_i^{\text{out}} = \left\{ \frac{J_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} R)}{Y_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} R)} Y_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} r) - J_n(B_{r\theta, \text{kn}}^{\text{out}} r) \right\} \cos(n\theta) \sin(B_{z,m} z) \quad (\text{B-9})$$

ただし、バックリングは数値的に評価する。

軸方向出力分布は Fig. B.7 及び Fig. B.8 以下のようになる。

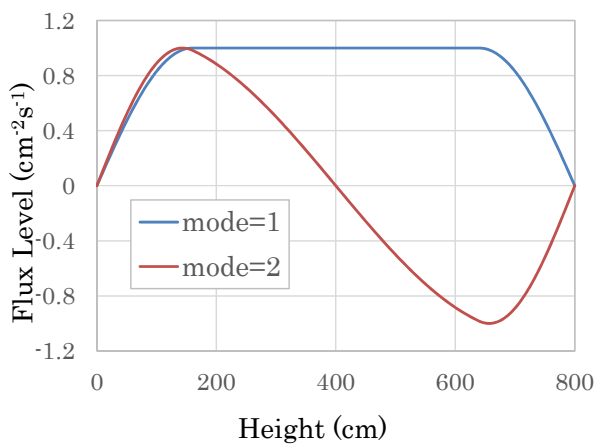


Fig. B.7 Axial mode for power flattened core

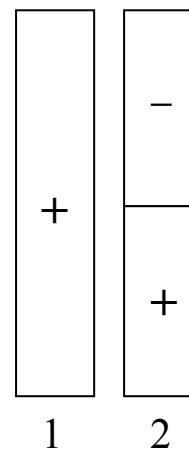


Fig. B.8 Symbol of axial mode shape for power flattened core

径方向の関数形に基づく出力分布の形状は Fig. B.9 のようになる。

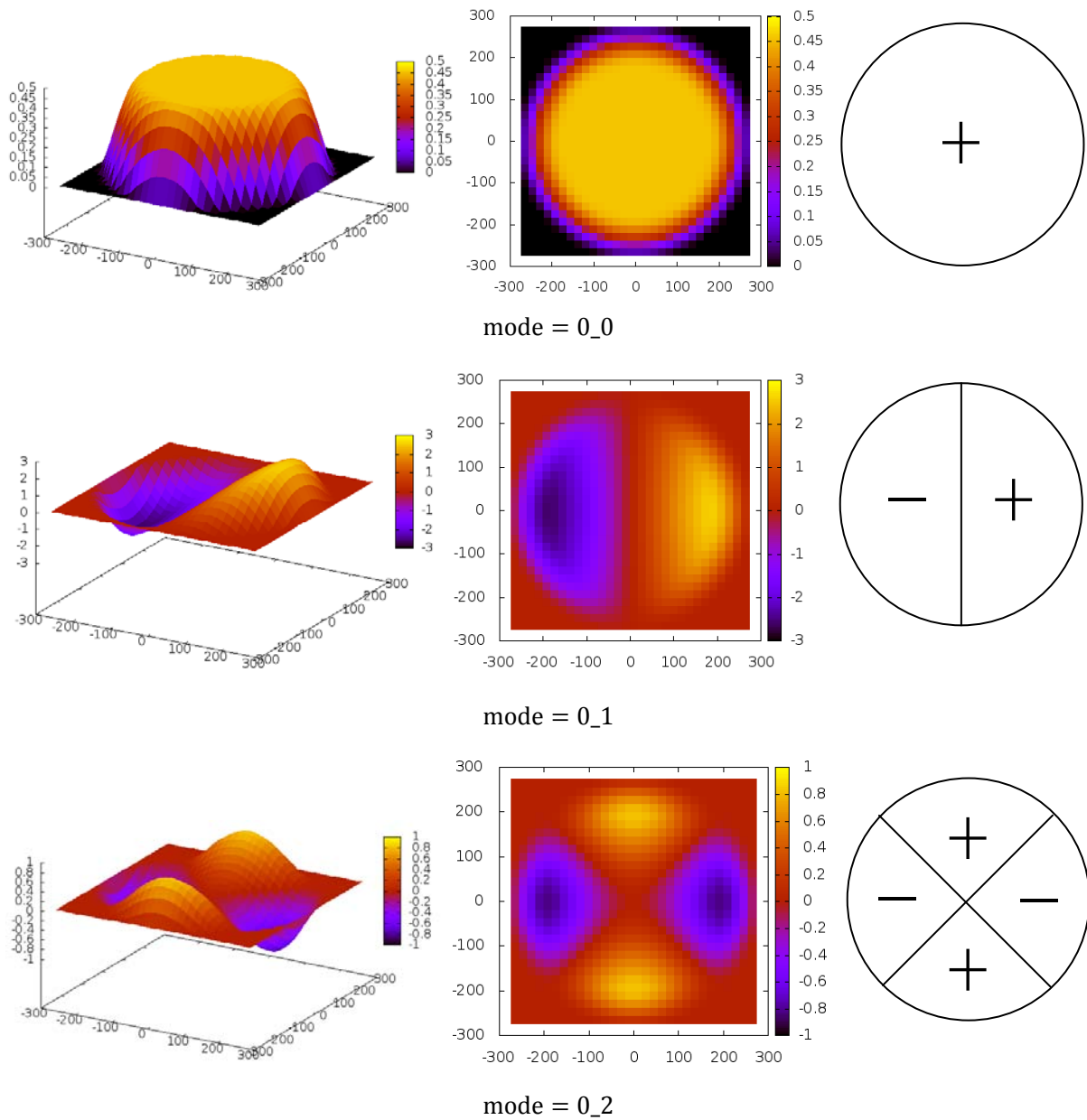


Fig. B.9 Shape of radial mode and symbols for power flattened core (1/3)

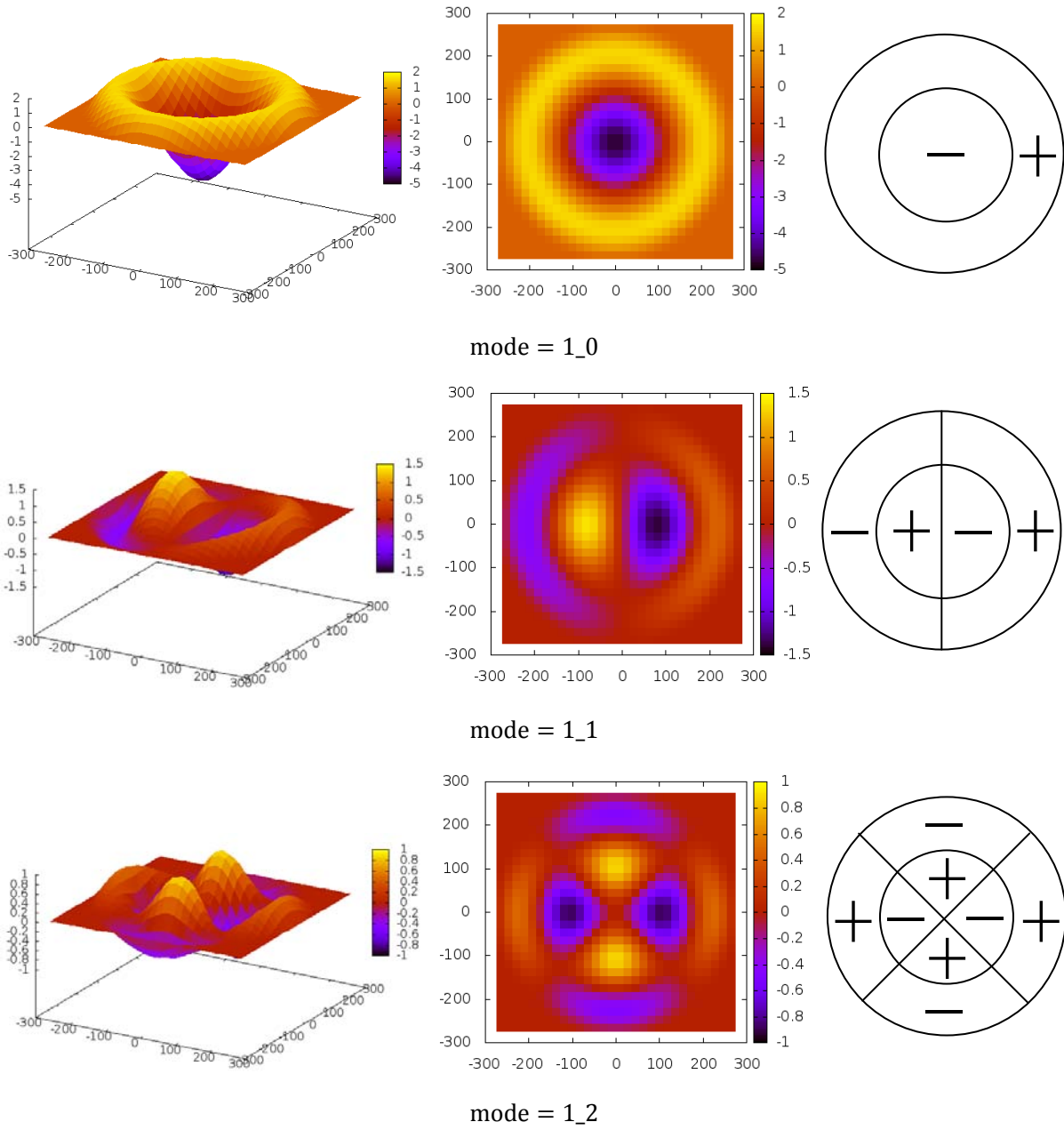


Fig. B.9 Shape of radial mode and symbols for power flattened core (2/3)

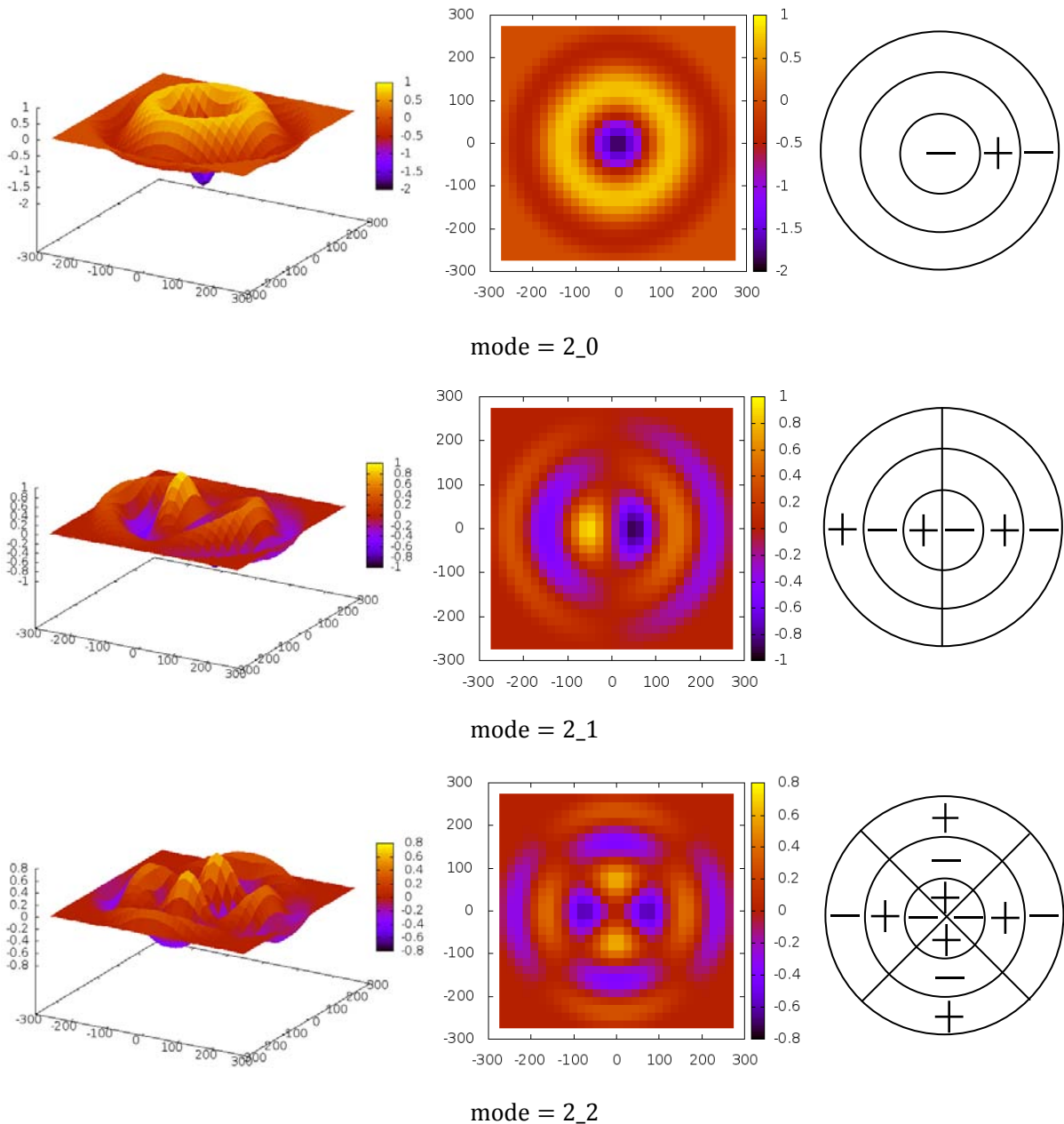


Fig. B.9 Shape of radial mode and symbols for power flattened core (3/3)

Fig. B.1 の 1 領域炉心の軸方向分布と比較すると、Fig. B.7 の軸方向出力分布は、平坦化するように関数形を想定した基本モードは当然であるが、高次モードについても平坦化の影響を受け、平坦化領域における曲率が減少している。径方向出力についても、Fig. B.6 に示した 1 領域炉心のモード形状と比較すると mode_1_0 と mode_2_0 の符号の逆転が観測される。これは、出力平坦化の影響であるが、内側炉心の半径を小さくすれば 1 領域炉心と合致することを考えればその変化は平坦化の度合いによるものであることは明らかである。その他の角度方向の符号の反転に関しては位相が異なるのみなので同一とみなせる。

Table B.2 には各モードの固有値を示した。径方向は 2 領域であるが内側領域のバックリングで代表させている。幸いなことに、安定性評価では固有値間隔が重要であるが、どの領域に

関してもモード間の固有値の差は一致するという性質があり、固有値間隔自体はどの領域に着目しても変わりはない。Table B.1 の 1 領域炉心と比較すると Case 1, Case 3 の固有値間隔が半減していることが分かる。このことは、出力平坦化によって角度依存の振動が発生しやすくなったことを示している。

Table B.2 Eigenvalues for each mode in power flattened core (cm⁻²)

	Reference	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
R-mode	0	0	-	0	1
θ-mode	0	0	-	1	0
Z-mode	1	2	-	1	1
Radial Buckling*	0.0000E+00	0.0000E+00	-	6.4297E-05	2.7983E-04
Axial Buckling*	0.0000E+00	2.3801E-05	-	0.0000E+00	0.0000E+00
Buckling	0.0000E+00	2.3801E-05	-	6.4297E-05	2.7983E-04
Eigen Value Separation	0.0000E+00	2.3801E-05	-	6.4297E-05	2.7983E-04
Eigen Value Separation (Ratio)**	0.0000E+00	2.5556E-01	-	6.9039E-01	3.0047E+00

*バックリングは内側領域で代表させた。

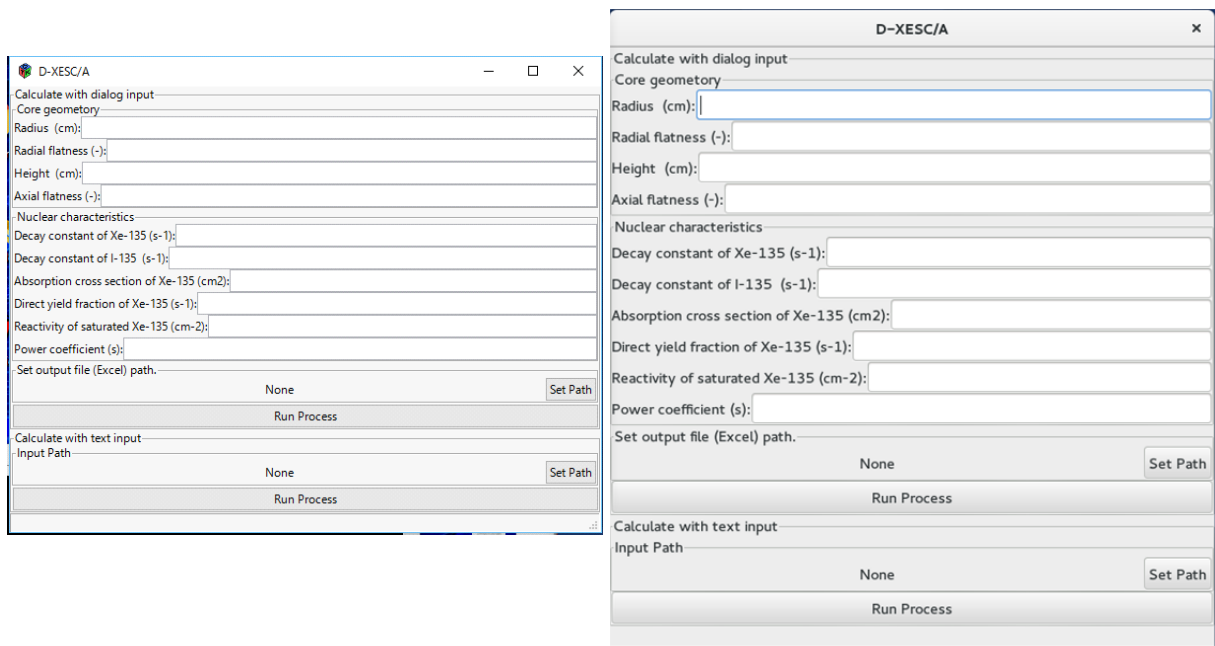
**基準のバックリングは 1 領域炉心のものとした。

付録 C 評価手法の整備

著者はこれまで、核燃料サイクル概念設計のための諸量評価システム DAMOCLES コードシステム（詳細は参考文献 C1）の付録 A を参照）を開発してきた。言語は C++を用い、そのオブジェクト指向の特性を生かし、独立性、再利用性、可読性の高いプログラムを記載している。本研究における開発も DAMOCLES コードシステムの一環として、過去の開発資源を利用しつつ開発することにより、最低限の労力で必要なプログラムを完成させることができた。名称は DAMOCLES コードシステムの一環であること、解析解(A analytical solution)ベースのキセノン安定性判別(Xe stability criterion)のコードであることから、D-XESC/A と命名した。

また、今回は利便性を考え、一般的な、テキスト入力による使用の他に、GUI(グラフィカル・ユーザー・インターフェース)によるプログラムの作成を行った。コマンドライン上で、実行ファイルの後に引数として入力ファイルを与えると解析が実行され、入力ファイルを与えないで、もしくはダブル・クリックで実行すると、GUI が立ち上がりデータ入力のダイアログが立ち上がる。GUI 上から、テキストファイルを選択することにより、GUI 上でもコマンドラインと同様の使用もできる。テキストファイルを選択すると、その内容がダイアログに展開されるため、ダイアログで値を修正しながら使用することも可能である。なお、出力は現在、解析作業で一般的に用いられるようになった EXCEL 形式としている。

コンパイラは GCC、GUI ライブラリとして Gtkmm を使用しており、基本的にプラットフォームに依存しないコーディングとなっている。本研究では、開発環境である Fedora22 (Linux) と Windows 10 でその動作を確認した。その際のインターフェースの外観を Fig. C.1 に示す。ただし、Windows 環境では日本語パスに対応していないため、日本語名のフォルダ以下に実行ファイルもしくは、入力ファイルを置くことは避けなければならない。



Windows 10 での外観

Fedora 22 での外観

Fig. C.1 プラットホーム毎の GUI の外観

なお、入力ファイルは直感的な操作ができるマークアップ言語の **YAML** を使用する。マークアップ言語としては、Web ページの記載言語である **HTML** が有名であり、それを一般化した **XML** などがある。しかし、これらの言語では、開始タグと終了タグをセットで用いるため、入力が煩雑で、人間が直接見て管理するデータとしての見栄えもよくない。この観点から **YAML** が開発され、本研究でも利用する。一方で、**YAML** では、改行とインデント（空白）が意味を持つため注意を要する。

以下に、**YAML** を用いたサンプル入力とその解説を以下に記載する。

```
##### サンプル入力 #####
# 炉心の寸法
radius: 649.0
半径(cm)

radial_flatness: 0.43
半径方向の平坦部分の比率(-)

height: 737.0
高さ(cm)

axial_flatness: 0.43
軸方向の平坦部分の比率(-)

# 核特性値
decay_constant_of_xe: 2.1066E-05
Xe-135 の崩壊定数(s-1)

decay_constant_of_i: 2.9262E-05
I-135 の崩壊定数(s-1)

absorption_cross_section_of_xe: 3.08E-18
Xe-135 の断面積(cm2)

direct_yield_fraction_of_xe: 0.0487
Xe-135 の直接的な核分裂収率の割合(-) (Xe 収率/(Xe 収率+I 収率))

reactivity_of_saturated_xe: -8.4481E-04
Xe-135 の平衡濃度によるバックリング相当の反応度価値(cm2) (負の値を用いる)

power_coefficient: 0.0
出力係数(s) (詳細は 2.6 節を参照。 )

output_file_path: ./out.xls
出力ファイル名(EXCEL 形式)
#####
```

このように、視覚から直感的に入力ファイルの内容が理解でき、変数名は処理内容を直接的に連想できるものとなっている。

なお、出力項目としては、径方向の基本モードの固有値（2 領域問題では、内側の基本モードがゼロ、固有値間隔は内側も外側も同じことから、外側の基本固有値を示す）、径方向、角方向の第1次モードの固有値間隔、軸方向の基本固有値と第一次モードの固有値間隔、それぞれに対して、Xe 振動が発生する中性子強度の閾値および、その振動周期が評価される。

また、固有値が決まってから中性子束強度の閾値を求める、式(2.5-44)の関係において、解を求める際、単純なニュートン法の実装では、Xe 濃度に関する関数（式(2.5-52)）が1 近辺に飽和しても高次モード固有値相当の反応度値を実現できない場合に、負の出力係数が与えられた際、負の中性子束を以って、閾値とする判断がなされる不具合があった。そのため、現実的な値を取る範囲を $1 \times 10^{12} \sim 1 \times 10^{18} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ とみなし、この範囲を適度にサンプリングし、振動発生の可能性を確認し、振動する場合のみ、そのサンプリングにより特定された範囲に対しニュートン法を適用し、中性子束強度の閾値を算出するようにルーチンを改良した。これにより、安定であることの明示的な確認と、不安定である際のニュートン法の探索開始点に依存する数値解法上の収束の問題を回避できるものとなった。

なお、本研究で開発したプログラムは付録 D にて検証を行っている。一方で、当初、この検証例から大きく寸法が外れる領域において数値的な不安定性が発生する問題が観測された。そこで、付録 D のグラフ Fig.D.1 に見られるように、平坦度を考慮した固有値の挙動が、形状バックリングで規格化すると寸法によらず一致するように、相対的な関係が共通している事実を利用して、いかなる入力が入力されても、実質的に計算に用いられるのは、付録 D で検証に用いた寸法とし、その後、形状バックリングの比を以って、入力された寸法に対する固有値に換算するようにルーチンを変更した。これにより、いかなる入力に対しても、すべて、検証された結果と同等の結果が得られるようになった。

参考文献：

C1) 深谷 裕司, 植田 祥平, 後藤 実, 他, “高温ガス炉設計のための核種生成消滅評価法の研究”, JAEA-Research 2013-035, (2013), 84p.

付録 D 評価手法の検証

本手法は大きく分けて、2つの部分に分けられる。一つは、与えられた体系に対する各高次モードに対する固有値間隔を評価すること、もう一つは、それを受けてのキセノン振動が発生する中性子強度の閾値および、その振動周期の評価がある。

初めに、高次モードの固有値間隔について確認する。参考文献 12) の Appendix 1 には出力平坦化炉心の固有値が評価されている。これを元に本研究のプログラムの確認を行う。さらに、Randall が、固有値間隔を形状バックリングで規格化したものを径方向、軸方向について示しており⁵⁾、その値を確認する。ただし、軸方向については、検証に用いることができる参照解が存在しなかったため、径方向とほぼ同様の考え方、同様の実装であることから、径方向の検証が軸方向の検証に代わるものとする。

参考文献 12)では、半径 649cm、平坦化割合 0.43(記載では、内側半径 279cm)の炉心に対し評価を行っている。なお、炉心高さは 737cm としている。比較結果を Table D.1 に示す。

	Fundamental	1st angular	1st radial
Reference	2.48E-05	4.01E-05	8.48E-05
This study	2.48E-05	4.00E-05	8.47E-05

このように、ほぼ完全な一致がみられた。次に、この体系を利用し、Randall の規格化された固有値間隔と比較する。Fig. D.1 に結果を示す。

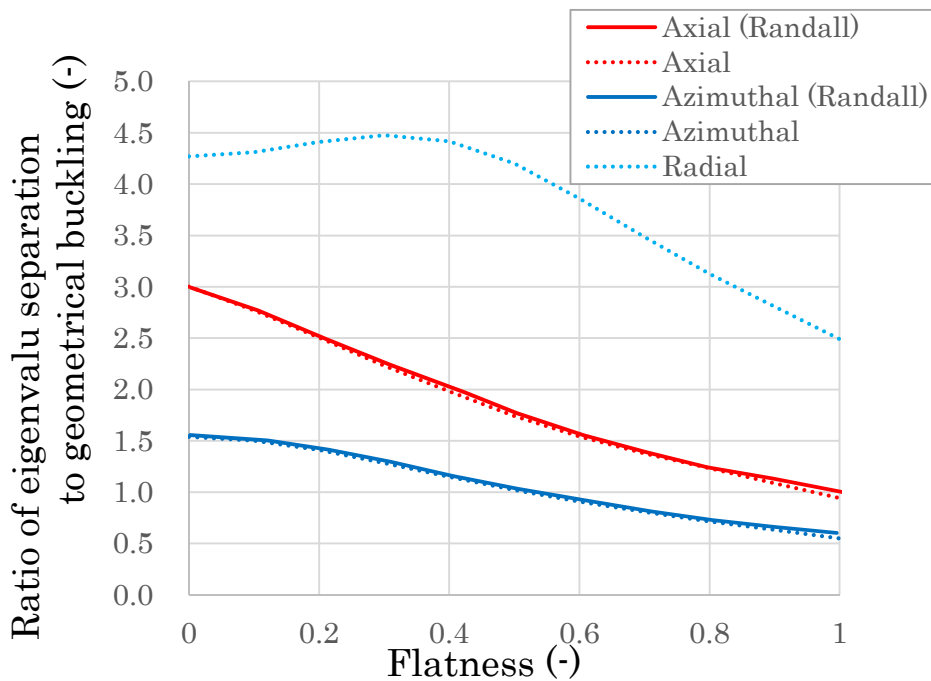


Fig. D.1 Relation of normalized eigenvalue separation to flattens

実線は Randall の文献から読み取ったグラフ読み取り値、点線は本研究で評価した値である。なお、本研究では、完全平坦化に対しモデル化を行っておらず、平坦化割合 0.8,0.9 の2点の外挿で完全平坦化の結果を表している。グラフから確認できるように、良い一致が見られる。なお、Randall の値には、グラフ読み取り時の読み取り誤差も含まれる。径方向モードには角度方向(Azimuthal)と半径上の振動 (Radial) が存在するが、Randall は径方向の振動を考慮していない。これは、グラフからわかるように、径方向の振動の固有値間隔が大きく、どのような体系を想定しても、先に角度方向振動が発生するためである。ただし、記載上は Radial と省略される点には注意を払わなければならない。本研究のツールでは、汎用性を高めるため、角度方向、径方向の両者について算出するものとした。これらの結果から、本手法の高次モード固有値評価ルーチンの実装の正しさが確認できた。

次に、キセノン振動が発生する中性子強度の閾値および、その振動周期の評価について確認する。参考文献 3)より Randal が用いた評価条件を Table D.2 に示す。

Table D.2 Values for verification

	Values
Decay constant of I (s ⁻¹)	2.94E-05
Decay constant of Xe (s ⁻¹)	2.10E-05
Direct yield fraction of Xe (-)	4.87E-02
Absorption cross section of Xe (cm ²)	3.08E-18
Migration area (cm ²)	50.0
Saturated reactivity worth of Xe (cm ⁻²)	-7.36E-04

なお、参考文献 13)には移動距離が PWR で 6.6cm, BWR で 7.3cm であり、軽水炉を想定したものである。Xe-135 の吸収断面積は室温状態(0.025eV)で代表させたものと思われ*、実際の熱中性子炉体系の炉内スペクトルで縮約するとその値は一桁程度小さくなる。ただし、キセノン断面積の大きさが不安定性を発生させる要因であることを考えると、大きく保守側の評価となっていると言える。また、飽和キセノンによる反応度価値は、参考文献 3)では、移動面積 (移動距離の自乗) で規格化されているものが与えられている。そのため、移動面積を掛け元のバックリング相当の反応度価値に戻した値を Table D.2 に示し、検証解析でも用いている。この値には、上記の Xe-135 吸収断面積の他に、定格出力時の平衡キセノン濃度、拡散係数など、他の炉心依存の核特性が含まれることに留意すべきである。

中性子強度の閾値および、その振動周期の評価については、純粹な算術演算であり、固有値間隔が正しく評価できることが確認できた以上、1 ケースに関し評価すればよい。参考文献 5)には、表に評価結果が記載されている。それによると、平坦化なし、H²/M² が 1250 の時、中性子強度の閾値が 5.3x10¹³cm⁻²s⁻¹、その振動周期が 22 時間であるが記載されている。このとき、移動面積を 50cm²とすると、炉心高さは 250.0cm となる。この条件において、それぞれ、

*JENDL-4 の値と比較すると、0.025eV における吸収断面積は 2.78E+6 barn、弾性散乱断面積 3.32E+5 barn、全断面積は 3.11E+6 barn である。用いるべきは吸収断面積である。

$5.4 \times 10^{14} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ 、その振動周期が 22 時間との結果が得られ良い一致が見られた。

このように、Randall の結果と良い一致が見られ、本研究で開発した評価ツールが妥当な結果を与えることが確認できた。

