JAEA-Technology
2006-014

JP0650301

JAEA-Technology

逆問題手法による表面温度の推定

ー(第1報)2次元・円筒体系の定常解析ー

Estimation of Surface Temperature by Using Inverse Problem
-Part1. Steady State Analyses of Two-dimensional Cylindrical System-

高橋 才雄　寺田 敦彦

Toshio TAKAHASHI and Atsuhiko TERADA

原子力基礎工学研究部門
ISプロセス技術開発グループ

IS Process Technology Group
Nuclear Science and Engineering Directorate

March 2006

Japan Atomic Energy Agency　日本原子力研究開発機構

本レポートは日本原子力研究開発機構が不定期に刊行している研究開発報告書です。
本レポートの全部または一部を複写・複製・転載する場合は下記にお問い合わせ下さい。
〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根2-4
日本原子力研究開発機構 研究技術情報部 研究技術情報課
Tel.029-282-6387, Fax.029-282-5920

This report was issued subject to the copyright of Japan Atomic Energy Agency.
Inquiries about the copyright and reproduction should be addressed to :
Intellectual Resources Section,
Intellectual Resources Department
2-4, Shirakata-shirane, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, 319-1195, JAPAN
Tel.029-282-6387, Fax.029-282-5920

©日本原子力研究開発機構, Japan Atomic Energy Agency, 2006

JAEA-Technology 2006-014

逆問題手法による表面温度の推定

－（第１報）２次元・円筒体系の定常解析－

日本原子力研究開発機構
原子力基礎工学研究部門　核熱応用工学ユニット
高橋　才雄※、寺田　敦彦

（2006 年 1 月 26 日受理）

熱化学法 IS プロセスにおいては、腐食性の高い硫酸やヨウ化水素水溶液を取り扱うので、温度センサーを溶液中に直接設置することは困難である。このような場合には、構造物の温度を計測することにより、接液する機器の表面温度を推定する逆問題手法が有効である。本報告書では、衝突噴流による冷却を伴う２次元的な円筒体系内の定常温度場を逆問題により解析し、工学的な精度の観点から必要な評価関数の次数を明らかにした。

原子力科学研究所（駐在）：〒319-1195　茨城県那珂郡東海村白方白根 2-4
※外来研究員

Estimation of Surface Temperature by Using Inverse Problem
— Part1. Steady State Analyses of Two-dimensional Cylindrical System —

Toshio TAKAHASHI ※ and Atsuhiko TERADA

Nuclear Applied Heat Technology Division
Nuclear Science and Engineering Directorate
Japan Atomic Energy Agency
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received January 26, 2006)

In the corrosive process environment of thermochemical hydrogen production Iodine-Sulfur process plant, there is a difficulty in the direct measurement of surface temperature of the structural materials. An inverse problem method can effectively be applied for this problem, which enables estimation of the surface temperature using the temperature data at the inside of structural materials. This paper shows analytical results of steady state temperature distributions in a two-dimensional cylindrical system cooled by impinging jet flow, and clarifies necessary order of multiple-valued function from the viewpoint of engineeringly satisfactory precision.

Keywords : Iodine-Sulfur Process, Inverse Problem, Analytical Result, Steady State Temperature Distribution, Two-dimensional Cylindrical System, Multiple-valued Function

---

※ On leave from ADVANCED REACTOR TECHNOLOGY Co, Ltd.

目　　次

1. まえがき …… 1
2. モデルの説明 …… 1
3. 基礎方程式と逆問題解 …… 2
3.1 基礎方程式 …… 2
3.2 径方向方程式に対する検討 …… 3
3.3 軸方向方程式に対する検討 …… 6
3.4 逆問題解 …… 7
4. 上面温度及び熱流束の推定 …… 9
4.1 上面温度及び熱流束の推定式 …… 9
4.2 試計算 …… 10
5. 逆問題解に基づく内部温度の計算 …… 12
6. 逆問題解の確からしさを確認するための計算 …… 19
6.1 順問題解（多項式分布）に基づく確認計算（ケース 1） …… 19
6.2 順問題解（ベッセル関数分布）に基づく確認計算（ケース 2） …… 20
6.3 逆問題解に基づく確認計算（ケース 3） …… 21
7. 考察 …… 22
7.1 上面温度変動幅と推定誤差について …… 22
7.2 温度測定レベルと推定誤差について …… 23
7.3 入力温度の小数点以下の桁数と推定誤差について …… 25
8. まとめ …… 26

謝辞 …… 26
参考文献 …… 27
付録 1 Mathematica の計算プログラム
（上面の温度及び熱流束の推定：逆問題解） …… 40
付録 2 円筒座標・2 次元・定常状態の熱伝導方程式の順問題解 …… 46

Contents

1. Introduction ····· 1
2. Outline of the model system ····· 1
3. Solution by the inverse problem of fundamental equation ····· 2
3.1 Fundamental equation ····· 2
3.2 Consideration toward the diameter direction equation ····· 3
3.3 Consideration toward the shaft direction equation ····· 6
3.4 Solver of the inverse problem ····· 7
4. Estimation of surface temperature and heat flux ····· 9
4.1 Equations for the estimation of surface temperature and heat flux ····· 9
4.2 An attempt calculation ····· 10
5. Calculation of the inside temperature using inverse problem ····· 12
6. Confirmation calculation for inverse problem technique ····· 19
6.1 Case-1, Input of a polynomial expression ····· 19
6.2 Case-2, Input of a Bessel function ····· 20
6.3 Case-3, Input of a using inverse problem ····· 21
7. Consideration ····· 22
7.1 An influence by the temperature change width ····· 22
7.2 An influence by the temperature measurement position ····· 23
7.3 An influence by the precision of input temperature ····· 25
8. Concluding Remarks ····· 26
Acknowledgment ····· 26
References ····· 27
Appendix A, Calculation program using MATHEMATICA ····· 40
Appendix B, Solver of the order problem of steady state of two-dimensional cylindrical system ····· 46

1．まえがき

物体の温度を計測する場合、通常は温度センサー（熱電対、測温抵抗体、等）を計測したい箇所に取り付ける。しかしながら、温度センサーを取り付けることができない、あるいは、温度センサーを取り付けることにより、物体の表面に接する流体の流れの場が変わってしまい、直接、計測したい位置の温度を測定することができない場合がある。このような場合には、物体の内部温度を測定しその結果から表面温度を推定する方法（逆問題手法）が有効である[1]～[6]。

熱化学法 IS プロセスにおいては、腐食性の高い硫酸やヨウ化水素水溶液を取り扱う。温度センサーをこれらの溶液中に直接挿入すると、温度センサーの金属性シースが腐食しセンサーが破損する。これを回避するために、接液部にテフロンチューブ等を被せる等の対応を採ることが考えられる。小規模な試験装置の場合はこの対応で良いが、パイロットプラントや HTTR - IS システム等の大規模システムでは、測定精度や熱電対の交換時の処置に、問題が生じる可能性が考えられる。

これらを解決する一つの方策として、物体や構造物の内部温度を計測し、得られた温度データから表面の温度あるいは熱流束を推定する逆問題手法がある。

そこで、本報告書では第 1 段階として、円筒体系で熱の流れが 2 次元的な定常状態の表面温度を、逆問題を用いて推定する方法をまとめた。なお、本報告書のテーマとした熱伝導は拡散方程式であり、流れ場のない空間内での濃度分布等、拡散方程式で記述できる体系にも逆問題手法は適用可能である。

2．モデルの説明

熱化学法 IS プロセスの反応器では、表面温度及び熱流束が大きく変化することが想定されるので、本報告書では、衝突噴流場で熱の流れが 2 次元的な円筒の定常状態の温度分布について評価する。検討モデルを図 1 に示す。熱伝導率 λ が均一な金属（以降、銅とする）で、半径 a、高さ h の円筒がある。下面は電気ヒータにより加熱し、上面は冷却材（例えば水）をノズルから噴出し中心軸を対称にして冷却（衝突噴流）する。これにより、下面は熱流束が一定で、上面は径方向の距離 r の関数で表わされる温度分布を有する。銅ブロックの内部の 2 つの平面（z_1, z_2）の径方向に熱電対を取り付け、内部温度を測定する。なお、銅ブロックの側面は断熱する。

電気ヒータに通電し、所定の条件下で冷却水を注入し続けると、定常状態では銅ブロックの上面及び内部に温度分布が生じる。銅ブロックの上面に熱電対を取り付けた場合は、冷却水の流れの場が変わってしまうので、定常状態の上面温度を正確に測定することができない。そこで、内部に取り付けた熱電対の温度測定データに基づき、上面の温度（分布）及び熱流束を推定する逆問題手法が有効になる。

3．基礎方程式と逆問題解

3.1 基礎方程式

図１に示す円筒座標系の銅ブロック内部の温度分布を表す基礎方程式は、径方向の温度分布が中心軸に対して対称となる場合、次式で表される。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

あるいは、$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{1}'$$

ここで、Tは温度を示す。

式(1)に示す基礎方程式の解は、一般解を $T(r,z)=R(r)\cdot Z(z)$ と仮定すると、

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{dR}{dr}\cdot Z,\quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=\frac{d^2R}{dr^2}\cdot Z,\quad \frac{\partial T}{\partial z}=R\cdot\frac{dZ}{dz},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=R\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}$$

なので、これを式(1)に代入すると、

$$\frac{d^2R}{dr^2}\cdot Z+\frac{1}{r}\cdot\frac{dR}{dr}\cdot Z+R\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$ となり、両辺を（$R\cdot Z$）で除し、整理すると、

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \tag{2}$$

が得られる。式(2)の左辺は（r）に関して、右辺は（z）に関して各々独立であるので定数となる。この定数をλとして整理すると、次の式が得られる。

(2)式の左辺については、$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dr}=\lambda$$

整理すると、$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\lambda R=0 \tag{3}$$

（便宜上、以下において、式(3)を径方向方程式と称する。）

(2)式の右辺については、$$-\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=\lambda$$

整理すると、$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\lambda Z=0 \tag{4}$$

（便宜上、以下において、式(4)を軸方向方程式と称する）

3.2　径方向方程式に対する検討

径方向方程式(3)に対して、λは3ケース（ $\lambda>0$、 $\lambda=0$、 $\lambda<0$）取り得るので、各々のケースについてその解を求める。

（1）　$\lambda>0$ のケース

$\lambda>0$のケースでは、 $\lambda=m^2$ と置くと、式(3)は下記となる。

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-m^2R=0 \tag{5}$$

式(5)は変形されたベッセルの方程式であり、その一般解は、次式(6)となる。

$$R(r)=AI_0(m\cdot r)+BK_0(m\cdot r) \tag{6}$$

ここで、銅ブロックの中心軸に着目し、 $r=0$ を式(6)に代入すると、 $I_0(0)=1$、 $K_0(0)=\infty$ となるので、中心軸で有限な温度となるためには、 $B=0$ でなくてはならない。

また、側面の境界条件（＝断熱）から、 $\partial T/\partial r=0$ の条件を満足させるためには、$I_0'(m\cdot r)=0$ が必要である。このためには、$(m\cdot r=0)$が必要である。しかしながら、 $m>0$、$r>0$なので、結局、 $\lambda>0$の時は、解が無い。

（2）　$\lambda=0$ のケース

式(3)に $\lambda=0$ を代入すると、下記となる。

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}=0 \tag{7}$$

（補足）

$$I_0(x)=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}+\cdots \qquad \text{（定義）}$$

$$I_0'(x)=\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2\cdot4}+\cdots$$

$$K_0(x)=(\log2-\gamma)I_0(x)-\left\{I_0(x)\log x-\frac{x^2}{4}-\cdots\right\} \qquad \text{（定義）}$$

ここで、$r=e^u$（つまり$u=\ln(r)$）と変数変換すると、$du=(\ln r)'=(1/r)dr$ なので $\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}$ となり、

$$\frac{dR}{dr}=\frac{dR}{du}\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dR}{du} \tag{8}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dR}{dr}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR}{du}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{du}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{dR}{du}=-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{du}+\frac{1}{r}\frac{d}{rdu}\frac{dR}{du}$$

$$=-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{du}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{du^2} \tag{9}$$

これらを式(7)に代入すると、

$$\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dR(r)}{du}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2R(r)}{du^2}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{du}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d^2R(r)}{du^2}=0 \tag{10}$$

これを整理すると、下記となる。

$$\frac{d^2R(r)}{du^2}=0 \tag{11}$$

式(11)を、「u」についてラプラス変換すると、（便宜上、$d/du=s$ と置く）

$$s^2R(s)-s\cdot r(0)-r'(0)=0$$

（注：$r(0)$、$r'(0)$は初期値を示す。定常状態に到達する直前は、何らかの温度を有しているはずなので、初期値はゼロではない。）

$$R(s)=\frac{r(0)}{s}+\frac{r'(0)}{s^2} \tag{12}$$

これをラプラス逆変換すると、$R(u)=R(0)+R'(0)\cdot u=A+B\cdot u$ となる。
変数変換した「u」を元に戻す（つまり、$u=\ln(r)$ を代入する）と、式(7)の一般解は、

$$R(r)=A+B\cdot\log r \tag{13}$$

となる。ここで、銅ブロックの中心軸に着目し、$r=0$ を上式に代入すると、$\log 0=-\infty$ となるので、中心軸で有限な温度となるためには、$B=0$ でなくてはならない。

また、銅ブロック内の径方向温度は、径方向距離rの関数で得られるので、定数「A」ではあり得ない。

従って、$\lambda=0$ の時は、解が無い。

（補足）

ラプラス変換（表）　$a\Leftrightarrow\frac{1}{s}$、$t\Leftrightarrow\frac{1}{s^2}$　（注記：「a」は定数、「t」はd/dtのt）

(3) $\lambda < 0$ のケース

$\lambda < 0$のケースでは、$\lambda = -m^2$と置くと、式(3)は、

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + m^2R = 0 \tag{14}$$

となる。式(14)は、ベッセルの方程式であり、その一般解は、

$$R(r) = AJ_0(m \cdot r) + BY_0(m \cdot r) \tag{15}$$

ここで、銅ブロックの中心軸に着目し、$r = 0$ を上式に代入すると、$J_0(0) = 1$、$Y_0(0) = -\infty$ なので、中心部で有限な温度とするためには、係数 $B = 0$ でなくてはならない。

次に、$r = a$ （注記：aは銅ブロックの半径）を代入し、側面での条件（＝断熱）を満足させる（$\partial T / \partial r = 0$）ためには、次式を満足させる必要がある。

$$\frac{d}{dr}J_0(m \cdot r) = -J_1(m \cdot r)\Big|_{r=a} = -J_1(m \cdot a) = 0 \tag{16}$$

式(16)を満たすためには、$m \cdot a = \alpha$ （ただし、αは $J_1(x) = 0$ の正の根）が必要である。
従って、（$\lambda < 0$）のケースでの解の形は、下記となる。

$$R(r) = AJ_0\left(\frac{\alpha}{a}r\right) \tag{17}$$

（補足）

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \quad \text{（定義）}$$

$$Y_0(x) = J_0(x)\log x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdots \quad \text{（定義）}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots \quad \text{（定義）}$$

α は$J_1(x) = 0$ の根。つまり、$J_1(\alpha) = 0$であり、固有値である。はじめの数個の数値を下記に示す。

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 3.832\cdots, \alpha_2 = 7.016\cdots, \alpha_3 = 10.173\cdots, \alpha_4 = 13.323\cdots, \alpha_5, \cdots$$

α は $J_1(x)=0$ の根なので、その個数は無限にある。従ってもっと一般的な形で表すと、

$$R(r)=\sum_{i=0}^{\infty} AJ_0\left(\frac{\alpha_i \cdot r}{a}\right) \qquad (17)'$$

ここで、$\sum_{i=0}^{\infty}$ は、$J_1(x)=0$ を満足する全ての正の根についての和を表す。

なお、$m \cdot a = \alpha$ なので、式(17)'は、

$$R(r)=\sum_{i=0}^{\infty} AJ_0\left(\frac{\alpha_i \cdot r}{a}\right)=\sum_{i=0}^{\infty} AJ_0(m_i r) \qquad (18)$$

従って、式(18)が径方向方程式に対する一般解となる。

3.3 軸方向方程式に対する検討

径方向方程式では、$\lambda > 0$ 及び $\lambda = 0$ の時に解が無かったので、軸方向方程式(4)に対しては、$\lambda < 0$ のケースを検討する。$\lambda = -m_i{}^2$ （注記：式(17)から、$m_i = \alpha_i / a$ であり、式(18)で示した m_i と同値である）とおくと、

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - m_i{}^2 Z = 0 \qquad (19)$$

これを z についてラプラス変換すると、（便宜上、$d/dz = s$ と置く）

$$\left(s^2 Z(s) - s \cdot z(0) - z'(0)\right) - m_i{}^2 \cdot Z(s) = 0$$

（注記：$z(0)$、$z'(0)$ はいずれも初期値を示す。定常状態に到達する直前は、何らかの温度を示しているはずなので、初期値はゼロではない。）

$$Z(s)=\frac{s \cdot z(0)+z'(0)}{s^2 - m_i{}^2} \qquad (20)$$

となる。これをラプラス逆変換すると、次式となる。

$$Z(z)=C \cdot \sinh(m_i \cdot z)+D \cdot \cosh(m_i \cdot z) \qquad (21)$$

（補足）

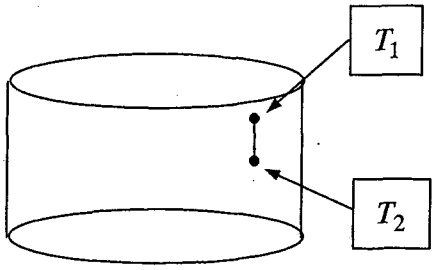
ラプラス変換（表）　$f(t)=\sinh(at) \Leftrightarrow \frac{a}{s^2 - a^2}$、　$f(t)=\cosh(at) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 - a^2}$

ここで、下図のように、同一軸上の2点（$z=z_1$、$z=z_2$）の測定温度が、（T_1,T_2）で得られたとする。

式(21)にこの関係を代入すると、

$$T_1 = C\sinh(m_i \cdot z_1) + D\cosh(m_i \cdot z_1) \qquad (22)$$

$$T_2 = C\sinh(m_i \cdot z_2) + D\cosh(m_i \cdot z_2) \qquad (23)$$



この式から、未定係数（C,D）を求める。

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sinh(m_i z_1) & \cosh(m_i z_1) \\ \sinh(m_i z_2) & \cosh(m_i z_2) \end{vmatrix} = \sinh(m_i z_1)\cosh(m_i z_2) - \cosh(m_i z_1)\sinh(m_i z_2)$$

$$= \sinh\{m_i(z_1 - z_2)\} = -\sinh\{m_i(z_2 - z_1)\}$$

$$C = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} T_1 & \cosh(m_i z_1) \\ T_2 & \cosh(m_i z_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{-\sinh\{m_i(z_2 - z_1)\}}\{T_1\cosh(m_i z_2) - T_2\cosh(m_i z_1)\}$$

$$D = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sinh(m_i z_1) & T_1 \\ \sinh(m_i z_2) & T_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-\sinh\{m_i(z_2 - z_1)\}}\{T_2\sinh(m_i z_1) - T_1\sinh(m_i z_2)\}$$

これらを、式(21)に代入し、整理すると、

$$Z(z) = \frac{\begin{array}{l} T_1\sinh(m_i z)\cosh(m_i z_2) - T_2\sinh(m_i z)\cosh(m_i z_1) \\ + T_2\cosh(m_i z)\sinh(m_i z_1) - T_1\cosh(m_i z)\sinh(m_i z_2) \end{array}}{-\sinh\{m_i(z_2 - z_1)\}}$$

$$= \frac{T_1\sinh\{m_i(z_2 - z)\} - T_2\sinh\{m_i(z_1 - z)\}}{\sinh\{m_i(z_2 - z_1)\}}$$

$$= A_i\sinh\{m_i(z_2 - z)\} + B_i\sinh\{m_i(z_1 - z)\} \qquad (24)$$

ただし、 $A_i = \dfrac{T_1}{\sinh\{m_i(z_2 - z_1)\}}$、 $B_i = \dfrac{-T_2}{\sinh\{m_i(z_2 - z_1)\}}$ とおいた。

3.4 逆問題解

基礎方程式の解は、$T(r,z) = R(r)\cdot Z(z)$ なので式(18)と式(24)から、次式で表わされる。

$$T(r,z) = \sum_{i=0}^{\infty} J_0(m_i r)\{A_i\sinh\{m_i(z_2 - z)\} + B_i\sinh\{m_i(z_1 - z)\}\} \qquad (25)$$

ここで、測定値として、 $z_1 = f_1(r)$、 $z_2 = f_2(r)$ が得られたとすると、下記となる。

$$f_1(r)=\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)\{A_i \sinh\{m_i(z_2-z_1)\}\} \tag{26}$$

$$f_2(r)=\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)\{B_i \sinh\{m_i(z_1-z_2)\}\} \tag{27}$$

そして、各平面（z_1, z_2）での温度分布を近似する評価関数として、次式に示すベッセル関数を選定する。

$$f_n(r)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{ni}J_0(m_i r)、\quad (n=1,2) \tag{28}$$

ここで、r：径方向距離（mm）

$m_i=\alpha_i/a$

a：半径（mm）

$\alpha_i=0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$

従って、式(26)、(27)は、下記となる。

$$\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)A_i \sinh\{m_i(z_2-z_1)\}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{1i}J_0(m_i r) \tag{29}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)B_i \sinh\{m_i(z_1-z_2)\}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{2i}J_0(m_i r) \tag{30}$$

この結果、未定係数（A_i, B_i）は、評価関数の係数（C_{ni}）を用いて下記で求まる。

$$A_i=\frac{C_{1i}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}} \tag{31}$$

$$B_i=\frac{C_{2i}}{\sinh\{m_i(z_1-z_2)\}}=\frac{-C_{2i}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}} \tag{32}$$

式(31)と(32)を、式(25)に代入すると、

$$T(r,z)=\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)\left\{\frac{C_{1i}\sinh\{m_i(z_2-z)\}-C_{2i}\sinh\{m_i(z_1-z)\}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}}\right\}$$

変数を入れ替えて、

$$T(r,z)=\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)\left\{\frac{C_{2i}\sinh\{m_i(z-z_1)\}-C_{1i}\sinh\{m_i(z-z_2)\}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}}\right\} \tag{33}$$

式(33)が、逆問題解の一般解である。

4. 上面温度及び熱流束の推定

4.1 上面温度及び熱流束の推定式

逆問題解を用いて上面温度及び上面の熱流束を求める。

上面温度は式(33)に $z=h$ を代入し、次式で求まる。

$$T_w(r)=\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)\left\{\frac{C_{2i}\sinh\{m_i(h-z_1)\}-C_{1i}\sinh\{m_i(h-z_2)\}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}}\right\} \tag{34}$$

ここで、$T_w(r)$：上面温度

$\sum_{i=0}^{\infty}$ ：α の全ての和を表わす

α ：$J_1(x)=0$ の根（α は、$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\cdots$）

m_i ：α_i/a

a ：銅ブロックの半径

r ：中心からの径方向距離

h ：銅ブロックの高さ

z_1 ：温度計測する銅ブロック内の平面（上面に近い側）

z_2 ：温度計測する銅ブロック内の平面（下面に近い側）

C_{1i} ：z_1 平面の評価関数の係数（式(28)を参照）

C_{2i} ：z_2 平面の評価関数の係数（式(28)を参照）

上面の熱流束は、次式で求まる。

$$q_w(r)=-\lambda\left.\frac{dT(r,z)}{dz}\right|_{z=h} \tag{35}$$

式(33)を z で微分すると、

$$\frac{d}{dz}T(r,z)=\frac{d}{dz}\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)\left\{\frac{C_{2i}\sinh\{m_i(z-z_1)\}-C_{1i}\sinh\{m_i(z-z_2)\}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}}\right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} J_0(m_i r)\left\{\frac{-C_{1i}m_i \cosh\{m_i(z-z_2)\}+C_{2i}m_i \cosh\{m_i(z-z_1)\}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}}\right\} \quad (36)$$

従って、上面の熱流束は、

$$q_w(r) = -\lambda \sum_{i=0}^{\infty} J_0(m_i r)\left\{\frac{-C_{1i}m_i \cosh\{m_i(z-z_2)\}+C_{2i}m_i \cosh\{m_i(z-z_1)\}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}}\right\}\Bigg|_{z=h}$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} m_i \cdot J_0(m_i r)\cdot \frac{C_{1i}\cosh\{m_i(h-z_2)\}-C_{2i}\cosh\{m_i(h-z_1)\}}{\sinh\{m_i(z_2-z_1)\}} \quad (37)$$

ここで、$q_w(r)$：上面の熱流束

λ：銅ブロックの熱伝導率

即ち、測定値の温度分布が式(28)に示す評価関数（ベッセル関数）で近似できる時、表面温度は式(34)で求まり、表面熱流束は式(37)で求まる。

4.2 試計算

(1) 試計算のモデル体系

逆問題手法を用いた試計算を行った。計算条件等を表 1 及び図 2 に示す。試計算では、半径 $a = 70$ mm、高さ $h = 100$ mmの円筒形状の銅ブロックでの衝突噴流実験体系を用いた[7]。銅ブロックの内部に温度計測用の熱電対が設けられており、その設置位置は、上面から 2mm深さ(z_1)及び 20mm深さ(z_2)の平面に各 8 本（中心部と 9mm間隔で 7 本）である。

銅ブロックの下面は、電気ヒータにより一様に加熱されている。上面は、冷却ノズルを銅ブロックの中心部の上方に取り付け、冷却水により冷却する（衝突噴流）。側面は断熱構造とする。

電気ヒータに通電し冷却水を流すと、定常状態では下面の熱流束が一定で、上面では径方向の距離 r の関数で表わされる温度分布が現れる。銅ブロックの内部でも径方向距離と、軸方向高さの位置に応じた温度分布が現れる。試計算では、定常状態で熱電対の温度測定値が、図 2 に示す値を示したと想定する。この銅ブロックの内部温度分布を入力として、銅ブロック上面の温度を逆問題解を用いて推定する。

(2) 計算の手順

銅ブロック内部の 2 平面の温度測定値（本例では想定値）及び銅ブロックの体系データを入力し、逆問題手法に基づき銅ブロック上面の温度及び熱流束を推定する計算手順を下記に示す。

① 温度を測定する 2 つの平面について、温度データを 3 次のスプライン関数を用いて補完する（仮想のデータを増やす）。

② 各補完データを、式(28)に示す評価関数（ベッセル関数）で近似し、係数を求める。具体

的には次式で近似し、係数（$C_{n0},C_{n1},C_{n2},\cdots,C_{ni}$）を求める。

$$f_n(r)=C_{n0}+C_{n1}\cdot J_0(m_1\cdot r)+\cdots+C_{ni}\cdot J_0(m_n\cdot r)、（n=1,2）\qquad(38)$$

③ 求まった係数を、前述の式(34)に代入し上面温度の推定値を計算する。また、式(37)に代入し上面の熱流束の推定値を計算する。

なお、以降においては、α の個数に関して下記と表記する。

・α の個数が 8 個 → $\sum_{i=1}^{8}\alpha_i$ を意味する。

・α の個数が 3 個 → $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i$ を意味する。

(3) 試計算の計算方法

試計算は、Mathematica を使用して行った。試計算で行った Mathematica の計算プログラムを付録 1 に示す。計算方法に関する特記事項を以下に示す。

a) α_0 について

α_0 の値は数学的には（＝0）である。上面温度を推定する式(34)及び上面の熱流束を推定する式(37)において、式中の分母に m_i（$m_i=\alpha_i/a$）が存在するので、α_0 は有限の値を入力する必要がある。式(34)の上面温度推定式に α_0 をパラメータにして計算すると、10^{-5} より小さな値を使用した場合は、計算結果の値に有意な差が生じない。付録 1 では、$\alpha_0=10^{-20}$ を使用した。

b) 3 次のスプライン関数による補完データの数について

試計算の体系では、温度測定点数を 1 平面あたり 8 点と想定した。温度測定値を式(28)に示す評価関数で近似する場合には、データ点数が 8 点では近似精度が悪くなるので、3 次のスプライン関数を用いてデータを補完する。Mathematica ではスプライン関数が内部組み込み関数として使えるので、容易にデータ補完が可能である。なお、付録 1 では 1mm 間隔でデータ補完した。

（補足）$J_0(0)=1$ なので、$C_{n0}\cdot J_0(0)=C_{n0}$ となり、式(38)の右辺の第 1 項は定数となる。

従って、α の個数には α_0 をカウントしない。

c) 評価関数のαの個数について

試計算においては、評価関数のαの個数は8個を使用した。具体的には次式の形で近似するように各係数を求めた。近似式の係数は、Mathematicaの内部組み込み関数のうち、フィット関数を用いることにより容易に求まる。

z_1平面に対して　　$f_1(r) = C_{10} + C_{11}J_0(m_1 \cdot r) + \cdots + C_{18}J_0(m_8 \cdot r)$　　(39)

z_2平面に対して　　$f_2(r) = C_{20} + C_{21}J_0(m_1 \cdot r) + \cdots + C_{28}J_0(m_8 \cdot r)$　　(40)

なお、αの個数については上面温度の推定誤差に関係する。詳細は7.1項で検討する。

(4) 試計算の結果

試計算の計算結果を図3（1/2～2/2）に示す。図3（1/2）は、計算結果の上面温度推定値と計算条件の2平面（z_1：2mm深さの平面、z_2：20mm深さの平面）の温度分布をまとめた。

なお、得られた上面温度推定値の温度分布を多項式（4次式）及びベッセル関数（αの個数は3個）で表わすと、各々、次式となった。

$$T_w = 30.0004 + 9.977x^2 - 9.94x^3 + 2.461x^4$$

$$T_w = 31.8331 - 1.6982J_0(\alpha_1 x) - 0.08647J_0(\alpha_2 x) - 0.04031J_0(\alpha_3 x)$$

図3（2/2）は、計算結果で得られた銅ブロック上面の熱流束分布を示す。なお、熱流束分布を円周で積分した総熱量は1,539.43（W）となった。なお、計算条件として入力した下面の熱流束は0.1（W/mm^2）一定であり、銅ブロックの半径は70（mm）なので、（熱流束）×（断面積）で求まる総熱量は1,539.38（W）となり、良い一致を示している。

5. 逆問題解に基づく内部温度の計算

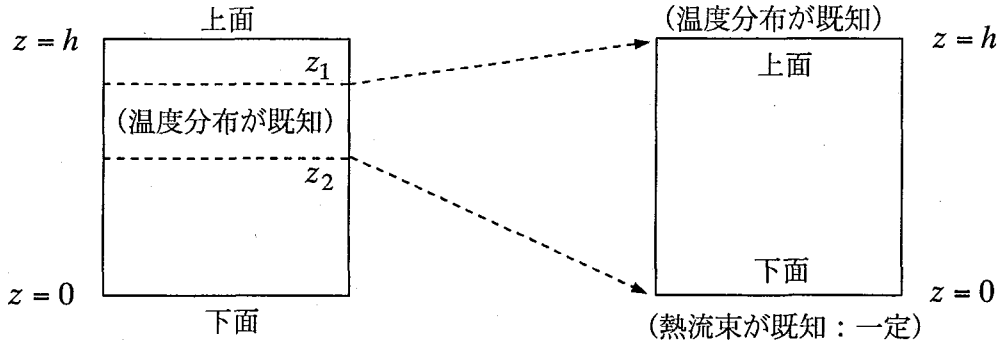
式(25)で表わされる逆問題解を用いて、銅ブロックの内部温度を求めることを検討する。

$$T(r,z) = \sum_{i=0}^{\infty} J_0(m_i r)\{A_i \sinh\{m_i(z_2 - z)\} + B_i \sinh\{m_i(z_1 - z)\}\}$$　　(25) 再掲

ここで、上面の温度及び下面での熱流束（一定）が既知の場合を想定する。つまり、測定データの得られる位置が上面と下面である。従って、式(25)で $z_1 = h$、$z_2 = 0$ となる。この模式図を下図に示す。

式(25)にこれらの条件を代入すると、

$$T(r,z) = \sum_{i=0}^{\infty} J_0(m_i r)\{-A_i \sinh(m_i z) + B_i \sinh(m_i(h - z))\}$$　　(41)



【逆問題解：内部温度を得て、上面温度を推定する】

【逆問題解に基づき内部温度を計算する】

ここで、上面（$z=h$）と下面（$z=0$）に、仮定した熱量と温度を与え、未定係数（A_i, B_i）を求める。つまり、

$z=h$ で、 $T(r,h)=f(r)$ （上面で仮定した温度）

$z=0$ で、 $q_0=-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial z}$ （下面で仮定した熱流束。 q_0 は一定。）

(1) 上面での検討

式(41)に、上面（$z=h$）の温度条件を代入する。$\sinh(0)=0$ なので、

$$f(r)=-\sum_{i=0}^{\infty}J_0(m_i r)A_i\sinh\{m_i h\} \tag{42}$$

半径方向の距離 r を無次元半径 x で表わし、また $m_i=\alpha_i/a$ なので、式(42)は、

$$f(ax)=-\sum_{i=0}^{\infty}J_0(\alpha_i x)A_i\sinh(m_i h) \tag{43}$$

なお、この式は、$\alpha=\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\cdots$ に基づき、下記のように展開できる。

$$f(ax)=-A_0\sinh(m_0h)J_0(\alpha_0x)-A_1\sinh(m_1h)J_0(\alpha_1x)-\cdots-A_i\sinh(m_ih)J_0(\alpha_ix)-\cdots \tag{44}$$

$\alpha_i=m_i\cdot a$ の関係を代入し、また、右辺の第2項以下を一般項で表わすと次式となる。

$$f(ax)=-A_0\sinh\left(\frac{\alpha_0}{a}h\right)J_0(\alpha_0x)-A_i\sinh\left(\frac{\alpha_i}{a}h\right)J_0(\alpha_ix) \tag{45}$$

式(45)の係数（A_0）を求めるために、両辺に xdx を掛けて、0から1まで積分すると、

$$\int_0^1 xf(ax)dx = -\int_0^1 A_0 \sinh\left(\frac{\alpha_0}{a}h\right)xJ_0(\alpha_0 x)dx - \int_0^1 A_i \sinh\left(\frac{\alpha_i}{a}h\right)xJ_0(\alpha_i x)dx \tag{46}$$

式(46)の右辺第1項の積分は、 $= -\frac{1}{2}A_0 \sinh\left(\frac{\alpha_0}{a}h\right)$、（ただし、$\alpha_0 \cong 0$） (47)

式(46)の右辺第2項の積分は、 $= 0$、（ただし、$\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$） (48)

従って、 $A_0 = \dfrac{-2}{\sinh\left(\frac{\alpha_0}{a}h\right)}\int_0^1 xf(ax)dx$、（ただし、$\alpha_0 \cong 0$） (49)

なお、$\sinh(\alpha_0) = \sinh(0) = 0$ となってしまうので、ここでは $\alpha_0 = 10^{-10}$ のような値を用いる。

次に、式(45)の係数（A_i）を求めるために、両辺に $xJ_0(\alpha_i x)dx$ を掛けて0から1まで積分すると、

$$\int_0^1 xf(ax)J_0(\alpha_i x)dx = -A_0 \sinh\left(\frac{\alpha_0}{a}h\right)\int_0^1 xJ_0(\alpha_i x)dx - A_i \sinh(m_i h)\int_0^1 xJ_0{}^2(\alpha_i x)dx \tag{50}$$

（補足）式(46)の右辺の積分 $\int_0^1 xJ_0(\alpha_n x)dx$ を求める。$\alpha_n x = t$ とおくと、

$$I = \int_0^{\alpha_n} \frac{t}{\alpha_n}J_0(t)\frac{dt}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_n{}^2}\int_0^{\alpha_n} tJ_0(t)dt = \frac{1}{\alpha_n{}^2}\left[tJ_1(t)\right]_0^{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_n{}^2}\cdot\alpha_n\cdot J_1(\alpha_n) = \frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n}$$

ここで、$\alpha_n \neq 0$ で $\alpha_n \cong 0 = 10^{-n}$ で n の値が大きくなると、積分は $I = \frac{1}{2}$ となる。

$$\left(I = \left.\frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n}\right|_{\alpha_n = 10^{-n}} = \frac{J_1(10^{-n})}{10^{-n}} = \frac{10^{-n}}{2\cdot 10^{-n}} - \frac{(10^{-n})^3}{2^2\cdot 4\cdot 10^{-n}} + \frac{(10^{-n})^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6\cdot 10^{-n}} - \cdots\right)$$

また、$\alpha_n = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots$ のとき、$J_1(\alpha_i) = 0$ なので、積分は $I = 0$ となる。

式(50)中の右辺第1項の積分は、$=0$ である。右辺第2項の積分は、

$$I_1 = \int_0^1 x J_0{}^2(\alpha_i x)dx = \frac{1}{2}\left\{J_0{}^2(\alpha_i) + J_1{}^2(\alpha_i)\right\} \quad \text{（ベッセル関数の公式）}$$

$$= \frac{1}{2}J_0{}^2(\alpha_i) \qquad \text{（注記：} J_1(\alpha_i) = 0\text{）} \tag{51}$$

従って、式(50)は、

$$\int_0^1 x f(ax) J_0(\alpha_i x)dx = \frac{-1}{2} A_i \sinh(m_i h) J_0{}^2(\alpha_i) \tag{52}$$

これより、 $A_i = \dfrac{-2 \cdot \int_0^1 x \cdot f(ax) \cdot J_0(\alpha_i x)dx}{J_0{}^2(\alpha_i) \cdot \sinh(m_i h)}$、（ただし、$\alpha_i \neq 0$） (53)

つまり、式(41)の係数A_iは、$\alpha \cong 0$に対しては式(49)で、$\alpha \neq 0$に対しては式(53)で求まる。

(2) 下面での検討

下面は熱流束が一定の条件である。熱流束は$q_0 = -\lambda \cdot \partial T / \partial z$なので、式(41)を z で微分する。なお、径方向は、無次元化半径を用いる。

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} J_0(\alpha_i x)\left\{-A_i \sinh(m_i z) + B_i \sinh(m_i(h-z))\right\}\right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} J_0(\alpha_i x)\left\{-A_i m_i \cosh(m_i z) - B_i m_i \cosh(m_i(h-z))\right\} \tag{54}$$

ここで、$z=0$ を代入すると、

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \sum_{i=0}^{\infty} J_0(\alpha_i x)\left\{-A_i m_i - B_i m_i \cosh(m_i h)\right\} \tag{55}$$

熱流束に関する条件は次式なので、

$$q = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = q_0 \tag{56}$$

式(56)に式(54)を代入すると、

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \sum_{i=0}^{\infty} J_0(\alpha_i x)\{-A_i m_i - B_i m_i \cosh(m_i h)\} = -\frac{q_0}{\lambda}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} J_0(\alpha_i x)\{A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h)\} = \frac{q_0}{\lambda} \tag{57}$$

なお、この式は、$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_i, \cdots$ に基づき、下記のように展開できる。

$$\begin{aligned}&\{A_0 m_0 + B_0 m_0 \cosh(m_0 h)\}J_0(\alpha_0 x) + \{A_1 m_1 + B_1 m_1 \cosh\{m_1 h\}\}J_0(\alpha_1 x)\\ &\quad + \cdots + \{A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h)\}J_0(\alpha_i x) + \cdots = \frac{q_0}{\lambda}\end{aligned} \tag{58}$$

ここで、 A_0、 A_i は、式(49)、(53)で与えられる。

また、$J_0(0) = 1$ を式(58)に代入し、左辺を一般項で表現すると、

$$\{A_0 m_0 + B_0 m_0 \cosh(m_0 h)\} + \{A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h)\}J_0(\alpha_i x) = \frac{q_0}{\lambda} \tag{59}$$

式(59)中の係数A_0, A_iは、前出である。未定係数はB_0, B_iである。

式(59)の未定係数（B_0）を求めるために、両辺に xdx を掛けて、0から1まで積分すると、

$$\int_0^1 \{A_0 m_0 + B_0 m_0 \cosh(m_0 h)\}x dx + \int_0^1 \{A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h)\}x J_0(\alpha_i x) dx = \int_0^1 \frac{q_0}{\lambda} x dx \tag{60}$$

式(60)の左辺第2項の積分は（$= 0$）である。従って、式(60)の左辺第1項及び右辺から、

$$A_0 m_0 + B_0 m_0 \cosh(m_0 h) = \frac{q_0}{\lambda} \tag{61}$$

従って、 $B_0 = \dfrac{1}{m_0 \cosh(m_0 h)}\left\{\dfrac{q_0}{\lambda} - A_0 m_0\right\}$、（ただし、$\alpha_0 \cong 0$） (62)

次に、式(59)の未定係数（B_i）を求めるために、両辺に $xJ_0(\alpha_i x)dx$ を掛けて、0から1まで積分すると、

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \{A_0 m_0 + B_0 m_0 \cosh(m_0 h)\}x J_0(\alpha_i x) dx\\ &\quad + \int_0^1 \{A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h)\}x {J_0}^2(\alpha_i x) dx = \int_0^1 \frac{q_0}{\lambda} x J_0(\alpha_i x) dx\end{aligned} \tag{63}$$

式(63)の左辺第１項の積分、及び右辺の積分は、いずれも（＝0）である。従って、

$$\int_0^1 \{A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h)\} x J_0{}^2(\alpha_i x) dx = 0 \tag{64}$$

ここで、 $\int_0^1 x J_0{}^2(\alpha_i x) dx = \frac{1}{2}\left\{J_0{}^2(\alpha_i) + J_1{}^2(\alpha_i)\right\}$ （ベッセル関数の公式） なので、式(64)は、

$$\frac{1}{2}\{A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h)\} J_0{}^2(\alpha_i) = 0$$

$$A_i m_i + B_i m_i \cosh(m_i h) = 0 \tag{65}$$

これより、 $B_i = \frac{-A_i m_i}{m_i \cosh(m_i h)} = \frac{-A_i}{\cosh(m_i h)}$、（ただし、$\alpha_i \neq 0$） (66)

つまり、式(41)の係数B_iは、$\alpha \cong 0$に対しては式(62)で、$\alpha \neq 0$に対しては式(66)で求まる。

以上を整理すると、次式により逆問題解に基づく内部温度が計算できる。

$$T(r,z) = \left\{-A_0 \sinh\left(\frac{\alpha_0}{a} z\right) + B_0 \sinh\left\{\frac{\alpha_0}{a}(h-z)\right\}\right\} + \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\alpha_i x)\left\{-A_i \sinh\left(\frac{\alpha_i}{a} z\right) + B_i \sinh\left\{\frac{\alpha_i}{a}(h-z)\right\}\right\} \tag{67}$$

なお、式(67)中の各係数は前出である。下記に再掲する。

$$A_0 = \frac{-2}{\sinh\left(\frac{\alpha_0}{a} h\right)} \int_0^1 x f(ax) dx \text{、}(\alpha_0 \cong 0) \tag{49}$$

$$A_i = \frac{-2 \cdot \int_0^1 x \cdot f(ax) \cdot J_0(\alpha_i x) dx}{J_0{}^2(\alpha_i) \cdot \sinh(m_i h)} \text{、}(\alpha_i \neq 0) \tag{53}$$

$$B_0 = \frac{1}{m_0 \cosh(m_0 h)} \left\{\frac{q_0}{\lambda} - A_0 m_0\right\} \text{、}(\alpha_0 \cong 0) \tag{62}$$

$$B_i = \frac{-A_i}{\cosh(m_i h)} \text{、}(\alpha_i \neq 0) \tag{66}$$

ここで、$T(r,z)$：径方向距離r、軸方向高さzの位置の温度

$f(ax)$：上面の温度分布を表わす関数

q_0 ：下面の熱流束（一定値）

α_i ：$J_1(x)=0$の根。（$\alpha=\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_i,\cdots$）

m_i ：α_i/a

a ：銅ブロックの半径

h ：銅ブロックの高さ

λ ：銅ブロックの熱伝導率

(3) 上面の温度分布に関する具体的な検討

上面温度$f(ax)$が多項式（4次式を例とする）で表されると仮定する。

$$f(ax)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 \tag{68}$$

この関数に対しては、下記の制限がある。

① 銅ブロックの側面は「断熱」。

② 銅ブロックの中心軸の温度は有界。

①の条件から、 $$\left.\frac{\partial T_w}{\partial x}\right|_{x=1}=0 \tag{69}$$

②の条件から、 $$\left.\frac{\partial T_w}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{70}$$

式(68)を微分すると、

$$\frac{df(ax)}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3 \tag{71}$$

この式に、式(69)及び式(70)の条件を代入すると、

$$a_1=0 \tag{72}$$

$$2a_2+3a_3+4a_4=0 \tag{73}$$

つまり、上面温度$f(ax)$を 4 次の多項式で表す場合には、式(72)と(73)を満足する係数としなければならない。

なお、Mathematica では、式(49)及び式(53)の積分は、多項式を項別に（次数毎に）分離して計算するのではなく、多項式をそのまま計算することができる。

6. 逆問題解の確からしさを確認するための計算

逆問題解の確からしさを確認するための計算を行った。確認計算は、順問題解（上面温度は多項式分布）に基づく確認計算（ケース 1)、順問題解（上面温度はベッセル関数分布）に基づく確認計算（ケース 2）及び逆問題解に基づく確認計算（上面温度は多項式分布：ケース 3）の 3 ケースを行った。

なお、円筒座標系で熱の流れが 2 次元的な定常状態の熱伝導方程式の順問題解を付録 2 に示す。

確認計算の手順は、各ケースとも下記で行った。

① 上面に温度分布、下面に熱流束を与える（入力とする)。

② 温度測定位置の温度（内部温度）を計算する。

（ケース 1、2 では順問題解により、ケース 3 では逆問題解に基づく手法（前記 5 章参照）による。）

③ 逆問題手法により、上面温度を推定する。

④ 推定した上面温度と、入力した上面温度を比較する（差を求める)。

各ケースの相違は内部温度を求める計算が異なるのみである。なお、入力する上面温度分布の関数は、ケース 1 とケース 3 では同じ多項式を用いている。ケース 2 では多項式を近似したベッセル関数を入力した。

内部温度を求めた以降の、温度データの補完、補完したデータに基づく評価関数設定、上面温度の推定、上面の熱流束の推定は、3 ケース共に逆問題手法により計算した。

計算体系は 3 ケース共に同じである。確認計算の計算条件を表 2 に示す。

6.1 順問題解（多項式分布）に基づく確認計算（ケース 1)

（1）計算条件

a）上面の温度分布（入力）　$f(r)=T_w(ax)=30+10x^2-10x^3+2.5x^4$（図 4(1/2) 参照）

（上面温度分布は、単調増加関数であり、温度変動幅は 2.5 ℃）

b）下面の熱流束（入力）　$q_0=0.1$（W/mm²）（図 4(2/2) 参照）

c）内部温度の計算手法　順問題解による。

なお、順問題解を以下に示す（詳細は付録 2 参照）

$$T(r,z)=A_{01}z+A_{02}(h-z)+\sum_{i=1}^{\infty}A_{i1}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i z)+\sum_{i=1}^{\infty}A_{i2}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i(h-z))$$

各係数は、$A_{01}=\frac{2}{h}\cdot\int_0^1 x\cdot f(ax)dx$

$$A_{02}=A_{01}+\frac{q_0}{\lambda}$$

$$A_{i1} = \frac{2}{{J_0}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)} \cdot \int_0^1 x \cdot f(ax) \cdot J_0(\alpha_i x) dx$$

$$A_{i2} = \frac{A_{i1}}{\cosh(m_i h)}$$

なお、ケース１においては、内部温度を計算するαの個数は８個（$\sum_{i=1}^{8} \alpha_i$）で計算した。

d）上面温度の推定方法　　逆問題手法による。なお、２平面の評価関数（ベッセル関数）の、αの個数はパラメータ（２個、３個、８個））

e）上面熱流束の推定方法　　逆問題手法による

(2) 計算結果

1）z_1平面、z_2平面、上面温度の推定値　　図５（1/3）に示す

2）上面の熱流束分布の推定値　　図５（2/3）に示す

3）上面温度の推定誤差　　図５（3/3）に示す

なお、上面温度の推定誤差は、上面温度推定値と入力した上面温度との差を図示したものである。

工学的に十分な精度を有する推定誤差を±0.05℃以内と設定すると、図５（3/3）に示すように、上面温度の推定誤差は、αの個数が２、３、８個の場合、いずれも±0.05℃以内に収まっている。ケース１のように上面の温度分布が単調増加関数で、温度変動幅が2.5℃程度の場合、評価関数（ベッセル関数）で用いるαの個数は、２個（$=\sum_{i=1}^{2} \alpha_i$）以上であれば工学的に十分な精度で計算できることが確認できた。

6.2　順問題解（ベッセル関数分布）に基づく確認計算（ケース２）

(1) 計算条件

a）上面の温度分布（入力）　　ケース１で使用した温度分布をベッセル関数で近似（次式）

$$T_w(ax) = 31.833 - 1.698J_0(\alpha_1 x) - 0.086J_0(\alpha_2 x) - 0.041J_0(\alpha_3 x)$$

b）下面の熱流束（入力）　　$q_0 = 0.1$（W/mm^2）：ケース１と同じ条件

c）内部温度の計算手法　　順問題解による。

順問題解はケース１で示した式と同一。ただし、各係数は下記を使用した。

$$A_{01} = 0$$

$$A_{02} = A_{01} + \frac{q_0}{\lambda}$$

$$A_{i1} = \frac{C_i}{\sinh(m_i h)}$$

（C_i は上面温度分布式の係数で、(31.833,–1.698,–0.086,–0.041）を使用）

$$A_{i2} = \frac{A_{i1}}{\cosh(m_i h)}$$

なお、ケース 2 における内部温度を計算するための α の個数については、入力とした上面の温度分布のベッセル関数と同じ数量とする必要があり、（$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i$）とした。

d）上面温度の推定方法　　ケース 1 と同じ逆問題手法による。なお、2 平面の評価関数（ベッセル関数）の、α の個数はケース 1 と同様にパラメータ（2 個、3 個、8 個））

e）上面熱流束の推定方法　　ケース 1 と同じ逆問題手法

(2) 計算結果

1）上面温度の推定誤差　　図 6 に示す

なお、内部温度、上面温度の推定値及び上面の熱流束は、ケース 1 とほとんど同じなので図示しない。

図 6 に示すように、上面温度の推定誤差は、α の個数が 2、3、8 個の場合、ケース 1 と同様にいずれも±0.05℃以内に収まっている。ケース 2 の場合もケース 1 と同様に、上面の温度分布が単調増加関数で、温度変動幅が 2.5 ℃程度の場合、評価関数（ベッセル関数）で用いる α の個数は、2 個（$= \sum_{i=1}^{2} \alpha_i$）以上であれば工学的に十分な精度（±0.05℃以内）で計算できることが確認できた。

6.3 逆問題解に基づく確認計算（ケース 3）

(1) 計算条件

a）上面の温度分布（入力）　　$T_w(ax) = 30 + 10x^2 - 10x^3 + 2.5x^4$（ケース 1 と同じ）

b）下面の熱流束（入力）　　$q_0 = 0.1$（W/mm²）（ケース 1 と同じ）

c）内部温度の計算手法　　逆問題解に基づく内部温度の計算手法による。

$$T(r,z) = \left\{ -A_0 \sinh\left(\frac{\alpha_0}{a} z\right) + B_0 \sinh\left\{\frac{\alpha_0}{a}(h-z)\right\}\right\} + \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\alpha_i x)\left\{ -A_i \sinh\left(\frac{\alpha_i}{a} z\right) + B_i \sinh\left\{\frac{\alpha_i}{a}(h-z)\right\}\right\} \quad (67)$$

各係数は、$A_0 = \dfrac{-2}{\sinh\left(\dfrac{\alpha_0}{a}h\right)} \cdot \int_0^1 xf(ax)dx$、$(\alpha_0 \cong 0)$ (49)

$$A_i = \frac{-2 \cdot \int_0^1 x \cdot f(ax) \cdot J_0(\alpha_i x)dx}{{J_0}^2(\alpha_i) \cdot \sinh(m_i h)}、(\alpha_i \neq 0) \quad (53)$$

$$B_0 = \frac{1}{m_0 \cosh(m_0 h)}\left\{\frac{q_0}{\lambda} - A_0 m_0\right\}、(\alpha_0 \cong 0) \quad (62)$$

$$B_i = \frac{-A_i}{\cosh(m_i h)}、(\alpha_i \neq 0) \quad (66)$$

なお、ケース3においては、上式で計算するαの個数は8個（$\sum_{i=1}^{8}\alpha_i$）を用いた。

d）上面温度の推定方法　　ケース1と同じ逆問題手法による。なお、2平面の評価関数（ベッセル関数）の、αの個数はケース1と同様にパラメータ（2個、3個、8個）

e）上面熱流束の推定方法　　ケース1と同じ逆問題手法

(2) 計算結果

1）上面温度の推定誤差　　図7に示す

なお、内部温度、上面温度の推定値及び上面の熱流束は、ケース1とほとんど同じなので図示しない。

図7に示すように、上面温度の推定誤差は、αの個数が2、3、8個の場合、ケース1と同様にいずれも±0.05℃以内に収まっている。ケース3の場合もケース1、ケース2と同様に、上面の温度分布が単調増加関数で、温度変動幅が2.5℃程度の場合、評価関数（ベッセル関数）で用いるαの個数は、2個（$=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i$）以上であれば工学的に十分な精度で計算できることが確認できた。

7．考　察

7.1　上面温度変動幅と推定誤差について

確認計算の各ケースでは、入力とした上面の温度分布が単調増加関数で、温度変動幅が2.5℃とした。この条件では、内部2平面の評価関数（ベッセル関数）のαの個数が2個（$=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i$）

以上であれば、推定誤差（上面温度推定値と入力した上部温度との差）が±0.05℃以内に収まり、工学的に十分な精度が得られることを示した。この時、α の個数が増えれば、推定精度は上昇する（図5（3/3）、図6、図7を参照）。

上面の温度分布が単調増加関数で、温度変動幅が大きくなった場合について、評価関数のα の個数と推定誤差の関係を検討した。

本検討の計算条件は下記とした。

a）計算手法　　順問題解（多項式分布）（ケース1と同じ）

b）上面の温度分布（入力）　　図8に示す。

1）ケース4　：　$T_w(ax) = 30 + 9x^2 - 10x^3 + 3x^4$　　（温度変動幅：2℃）

2）ケース5　：　$T_w(ax) = 30 + 17.5x^2 - 15x^3 + 2.5x^4$　　（温度変動幅：5℃）

3）ケース6　：　$T_w(ax) = 30 + 25x^2 - 10x^3 - 5x^4$　　（温度変動幅：10℃）

c）下面の熱流束（入力）　　0.1（W/mm^2）（ケース1と同じ）

d）内部温度の計算手法　　順問題解による（ケース1と同じ）

e）上面温度の推定方法　　逆問題手法による。（ケース1と同じ）

計算結果を図9（1/3～3/3）に示す。

図9（1/3）は、ケース4（温度変動幅：2℃）の計算結果である。ケース4では、評価関数のα の個数が2個、3個、8個のいずれの場合でも上面温度の推定誤差が±0.05℃以内に収まる。また、α の個数が増えると、推定精度も向上する傾向にあるが工学的に有意な差ではない。

図9（2/3）は、ケース5（温度変動幅：5℃）の計算結果である。ケース5では、評価関数のα の個数が3個以上の場合は上面温度の推定誤差が±0.05℃以内に収まり有意な差は無いが、2個の場合は±0.05℃の範囲を逸脱する。

図9（3/3）は、ケース6（温度変動幅：10℃）の計算結果である。ケース6では、評価関数のα の個数が4個以上のとき、上面温度の推定誤差が±0.05℃以内に収まる。2個の場合は、推定誤差が±0.05℃の範囲を逸脱する。3個の場合は、側面近傍において±0.05℃の範囲を逸脱する結果となった。

全般的に、銅ブロックの側面近傍で推定精度が悪くなる傾向がある。これは、内部温度の測定点に起因すると考えられる。つまり、内部温度は、中心と、中心から9mm間隔に7本の熱電対が設置されていると想定しており、3次のスプライン関数により中心から63mmまでを1mm間隔でデータ補完している。評価関数は補完データを基にベッセル関数で近似する。上面温度の推定は中心から半径（70mm）の側面までを計算するので、側面から7mmの範囲は評価関数を外挿することになる。このときの誤差が推定誤差に加わるので、側面近傍での推定精度が悪くなる。

7.2　温度測定レベルと推定誤差について

試計算及び確認計算では、銅ブロック（高さ100mm）の上面から2mm深さ（z_1 位置）及び20mm深さ（z_2 位置）の平面に温度測定点があるものとして計算した。上面からの深さを変えた

場合の上面温度の推定誤差について検討した。なお、ISプロセス反応器は銅以外の鉄又はニッケル基合金を用いるので、熱伝導率が低下するためz_2はz_1により近くなる。

温度測定レベルに関する検討の計算条件は、下記とした。

a）温度測定点の位置（レベル）　z_1平面：2mm、4mm、10mm
　　z_2平面：20mm、50mm

b）上面の温度分布（入力）　ケース1と同じ（4次の多項式）

$$T_w(ax) = 30 + 10x^2 - 10x^3 + 2.5x^4$$

c）下面の熱流束（入力）　0.1（W/mm^2）（ケース1と同じ）

d）内部温度の計算手法　順問題解による。（ケース1と同じ）

e）上面温度の推定法　逆問題手法による。（ケース1と同じ）

計算結果を図10（1/4～4/4）に示す。

図10（1/4）は、評価関数（ベッセル関数）のαの個数が2個のケースについて、z_2平面のレベルを20mmに固定し、z_1平面のレベルをパラメータ（2mm、4mm、10mm）として計算した上面温度推定誤差である。同図から、上面温度推定誤差はz_1平面のレベルにほとんど依存しないことがわかる。図示しないがz_2平面のレベルを50mmに固定した場合も、同図と同一である。

図10（2/4）は、評価関数（ベッセル関数）のαの個数が3個のケースについて、z_2平面を固定（20mm）、z_1平面をパラメータ（2mm、4mm、10mm）とした計算結果である。この場合も、上面温度推定誤差は、z_1平面のレベルにほとんど依存しない。また、z_2平面のレベルを50mmとした場合も、図示しないが、本図と同一である。

図10（3/4）は、評価関数（ベッセル関数）のαの個数が8個のケースについて、z_2平面を固定（20mm）、z_1平面をパラメータ（2mm、4mm、10mm）とした計算結果である。いずれも推定誤差が±0.05℃以内に収まるが、z_1が10mmの場合は、他のものより推定誤差が振動状のばらつきが見られる。z_2平面のレベルを50mmとした場合も図示しないが、本図と同様である。

図10（4/4）は、評価関数（ベッセル関数）のαの個数が15個のケースについて、z_2平面を固定（20mm）、z_1平面をパラメータ（2mm、4mm、10mm）とした計算結果である。なお、本図の縦軸のスケールは、図10の他のケースと異なっていることに注意。z_1平面が2mm及び4mmの場合は、上面温度推定誤差が±0.05℃以内に収まるが、z_1平面が10mmの場合は、±0.2℃程度となり、推定精度が大幅に悪化する。なお、z_2平面を50mmとした場合も図示しないが、本図と同様である。

上記を整理すると、下記となる。

① z_1平面は、上面から2mmから4mmであれば、十分な推定精度が得られる。

② z_2平面は、上面から20mm～50mmであれば、十分な推定精度が得られる。

③ 評価関数（ベッセル関数）のαの個数は2個～3個で近似するのが妥当である。

④ z_1平面が10mm深さで、αの個数を15個とした場合は、推定誤差が±0.2℃程度となり、大きな誤差を生じる。図示しないが、αの個数を20個とし、z_1平面を10mmとした場合、推定誤差は±1℃程度に悪化する。αの個数が多すぎても、推定精度は悪くなる。

7.3　入力温度の小数点以下の桁数と推定誤差について

上記の確認計算（考察で記述した計算も含む）では、内部温度を順問題あるいは逆問題による手法で求め、その結果に基づいて上面温度を推定した。計算はMathematicaを用いて実行した。この時、内部温度の有効桁数は小数点以下4桁で計算されている。実際問題として、銅ブロックの内部温度を計測するに際しては、小数点以下の桁数に注意が必要である。小数点以下の桁数が少ない場合は推定温度の精度が悪くなり、桁数が多い場合は推定温度の精度が向上するが、データそのものの信頼性が低下する。そこで、小数点以下の桁数と推定誤差に関して検討した。

小数点以下の桁数と推定誤差に関する検討の計算条件は、下記とした。

a）上面の温度分布（入力）　ケース1と同じ（4次の多項式）

$$T_w(ax) = 30 + 10x^2 - 10x^3 + 2.5x^4$$

b）下面の熱流束（入力）　0.1（W/mm^2）（ケース1と同じ）

c）内部温度の計算手法　順問題解による。（ケース1と同じ）

d）温度測定レベル　z_1：上面から2mm深さ

z_2：上面から20mm深さ

e）内部温度の数値　①小数点以下4桁

②小数点以下3桁

③小数点以下2桁

④小数点以下1桁

f）評価関数のαの個数　8個、2個

g）上面温度の推定法　逆問題手法による。（ケース1と同じ）

計算結果を図11（1/2～2/2）に示す。

図11（1/2）は、評価関数（ベッセル関数）のαの個数が8個の場合の上面温度推定誤差である。内部温度の数値（入力）が小数点以下1桁の場合は、推定誤差は±0.1℃以内、つまり、小数点以下1桁の精度となる。内部温度の数値を小数点以下2桁から4桁にすると、上面温度推定誤差は±0.05℃以内に収まる。厳密には小数点以下2桁の場合は±0.01℃以内、小数点以下3桁及び4桁の場合は±0.005℃以内に、それぞれ収まる。小数点以下3桁と4桁では、ほとんど同じ推定誤差である。

図11（2/2）は、評価関数（ベッセル関数）のαの個数が2個の場合の上面温度推定誤差である。内部温度の数値が小数点以下1桁の場合は、推定誤差は±0.1℃以内、つまり、小数点以下1桁の精度となる。内部温度の数値が小数点以下2桁から4桁にすると、どの場合でも上面温度推定誤差は±0.05℃以内であり、ほとんど差異は無い。

8．まとめ

温度センサーの取付けが困難な場所の温度情報を得るために、逆問題手法に基づき推定する方法が効果的である。本報告書は円筒形状の銅ブロックの熱伝導に関するものであり、下面は加熱、上面は冷却、側面は断熱の体系である。銅ブロックの内部2平面の温度（分布）を測定する。この温度分布を近似する評価関数としてベッセル関数を選定し、係数を逆問題解の式に代入し、上面の温度（分布）及び上面の熱流束を推定する。

上面に温度分布を、下面に熱流束を入力し、順問題解により銅ブロックの内部温度を計算し、得られた内部温度を基に逆問題手法により上面の温度を推定した。上面温度の推定値と入力とした上面の温度とを比較することにより、逆問題手法の確からしさを検討した結果、下記が得られた。なお、検討した体系の緒言は下記のとおりである。

- 材質　　銅ブロック
- 半径　　70mm
- 高さ　　100mm
- 内部温度測定の2平面　　上面から2mm深さ、20mm深さ
- 温度測定点　　両平面とも、中心、以降9mm間隔で7点（8点/平面）
- 評価関数　　$f_n(r)=C_{n0}+C_{n1}J_0\left(\frac{\alpha_1}{a}r\right)+\cdots+C_{ni}J_0\left(\frac{\alpha_i}{a}r\right)$、（$n=1,2$平面）

このとき、上面の温度分布が単調増加関数で温度変動幅が2.5℃程度の場合、評価関数のαの個数は2個（$=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i$）以上であれば、上面温度の推定誤差は±0.05℃以内に収まり、工学的に十分な精度を有する。

また、上面の温度分布が単調増加関数で温度変動幅が大きい場合は、評価関数のαの個数を多くすれば良い。温度変動幅が5℃程度の場合はαの個数を3個以上、10℃程度の場合は、4個以上で計算すれば、推定誤差が±0.05℃以内に収まる。

謝　辞

逆問題手法の理論を展開するに当たり、佐賀大学海洋エネルギー研究センターの門出政則教授、佐賀大学の光武雄一助教授に貴重な助言と共に多大な支援をいただきました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

(1) 有馬博史、門出政則、光武雄一、" 逆問題解を用いた表面温度および表面熱流束の推定法（一次元熱伝導問題)"、Thermal Science & Engineering Vol.9 No.2 (2001)
(2) 門出政則、光武雄一、志岐隆浩、西本友哉、" ラプラス変換を用いた一次元熱伝導逆問題の解析的解法"、日本機械学会論文集（B 編）66 巻 642 号（2000-2）
(3) 門出政則、光武雄一、" 逆問題解を用いた物性値の推定法"、Netsu Bussei 15 [2]（2001）
(4) 有馬博史、門出政則、光武雄一、" ラプラス変換を用いた一次元非定常熱伝導逆問題の解析的解法"、日本機械学会論文集（B 編）67 巻 662 号（2001-10）
(5) 門出政則、有馬博史、光武雄一、劉維、Jaffar A HAMMAD、" ラプラス変換を用いた 2 次元非定常熱伝導の逆問題解析"、日本機械学会論文集（B 編）68 巻 666 号（2002-2）
(6) 門出政則、Jaffar A HAMMAD、有馬博史、光武雄一、" ラプラス変換を用いた 2 次元非定常熱伝導の逆問題解の応用"、日本機械学会論文集（B 編）68 巻 674 号（2002-10）
(7) 麻生智一、私信、

表１　試計算の計算条件

項　目	計　算　条　件			
モデル （図２参照）	半径a＝70 mm、高さh＝100 mmの円筒、銅ブロック 上面：冷却、下面：加熱、側面：断熱			
温度測定位置	z_1＝上面から2mmの深さ、z_2＝上面から20mmの深さ			
	両平面ともに、中心・以降9mm間隔で８点/平面			
z_1平面の温度℃	r_0＝30.7248	r_1＝30.8469	r_2＝31.1590	r_3＝31.5742
	r_4＝32.0137	r_5＝32.4129	r_6＝32.7217	r_7＝32.9054
z_2平面の温度℃	r_0＝36.4330	r_1＝36.4700	r_2＝36.5727	r_3＝36.7193
	r_4＝36.8825	r_5＝37.0349	r_6＝37.1538	r_7＝37.2239
下面の熱流束	0.1（W/mm^2）			
温度データの補完	両平面の温度を３次のスプライン関数で補完（1mm間隔）			
評価関数	ベッセル関数で近似（αの個数は８個）			
上面の温度・熱流束の推定	逆問題手法による			

表 2　確認計算の計算条件

項目	ケース 1	ケース 2	ケース 3
モデル	半径a = 70 mm、高さh = 100 mmの円筒、銅ブロック 上面：冷却、下面：加熱、側面：断熱		
温度測定位置	z_1 = 上面から 2mmの深さ、z_2 = 上面から 20mmの深さ 両平面ともに、中心・以降 9mm間隔で 8 点/平面		
入力（上面温度分布）(①)	多項式（注 1）	ベッセル関数(注 2)	多項式（注 1）
入力（下面：熱流束）	各ケース共に、熱流束 = 0.1 (W/mm^2)		
内部温度の計算手法	順問題手法	順問題手法	逆問題解に基づく手法
温度データの補完	両平面の温度を 3 次のスプライン関数で補完（1mm間隔）		
評価関数	ベッセル関数で近似（α の個数はパラメータ）		
上面の温度・熱流束の推定	逆問題手法 (②)		
確認方法	入力した上面温度 (①) と、逆問題手法により推定した上面温度 (②) との差を評価する		

注 1：入力した多項式は　$T_w(ax) = 30 + 10x^2 - 10x^3 + 2.5x^4$　（ケース 1 と 3 で同じ式）

注 2：入力した温度分布関数は、注 1 に示す式をベッセル関数で近似し、次式とした。

$$T_w(ax) = 31.833 - 1.698J_0(\alpha_1 x) - 0.086J_0(\alpha_2 x) - 0.041J_0(\alpha_3 x)$$

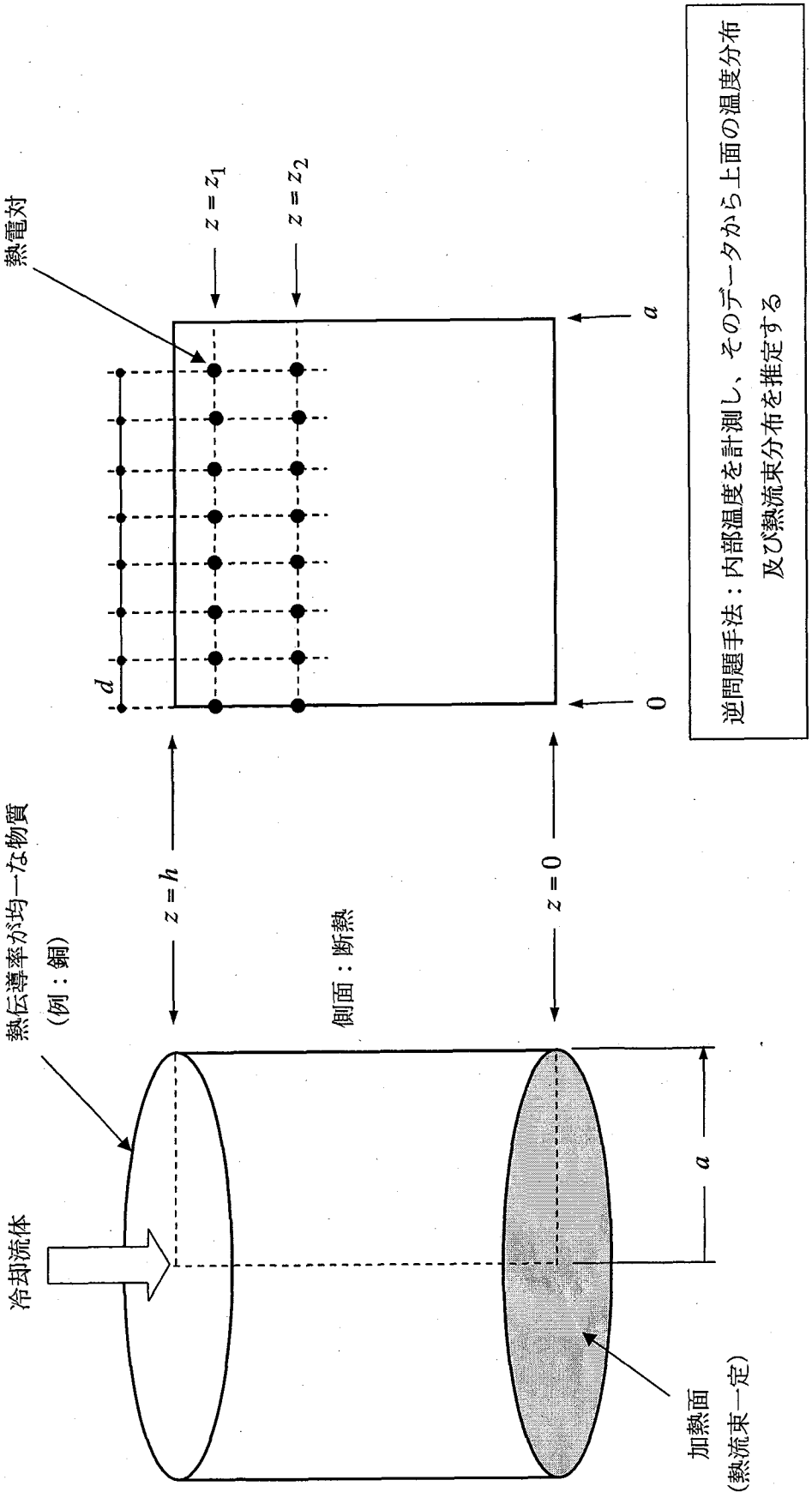


図1　逆問題手法による上面温度の推定　検討モデル

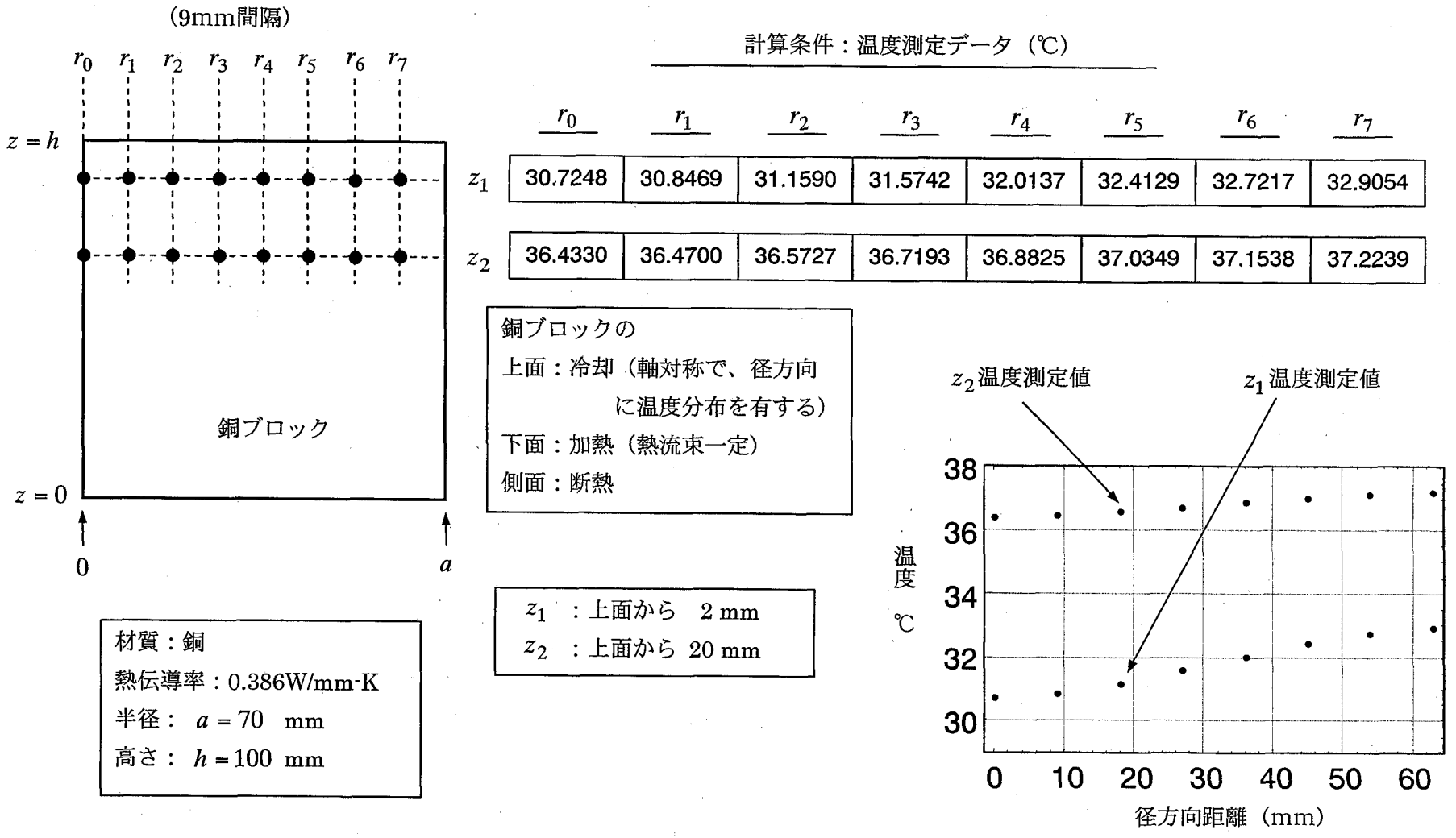

(9mm間隔)
r_0 r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7
$z = h$
銅ブロック
$z = 0$
0
a
材質：銅
熱伝導率：0.386W/mm-K
半径： $a = 70$ mm
高さ： $h = 100$ mm
計算条件：温度測定データ（℃）
z_1 30.7248 30.8469 31.1590 31.5742 32.0137 32.4129 32.7217 32.9054
z_2 36.4330 36.4700 36.5727 36.7193 36.8825 37.0349 37.1538 37.2239
銅ブロックの
上面：冷却（軸対称で、径方向に温度分布を有する）
下面：加熱（熱流束一定）
側面：断熱
z_1 ：上面から 2 mm
z_2 ：上面から 20 mm
z_2 温度測定値
z_1 温度測定値
温度 ℃
38
36
34
32
30
0 10 20 30 40 50 60
径方向距離（mm）

図 2　試計算の計算体系

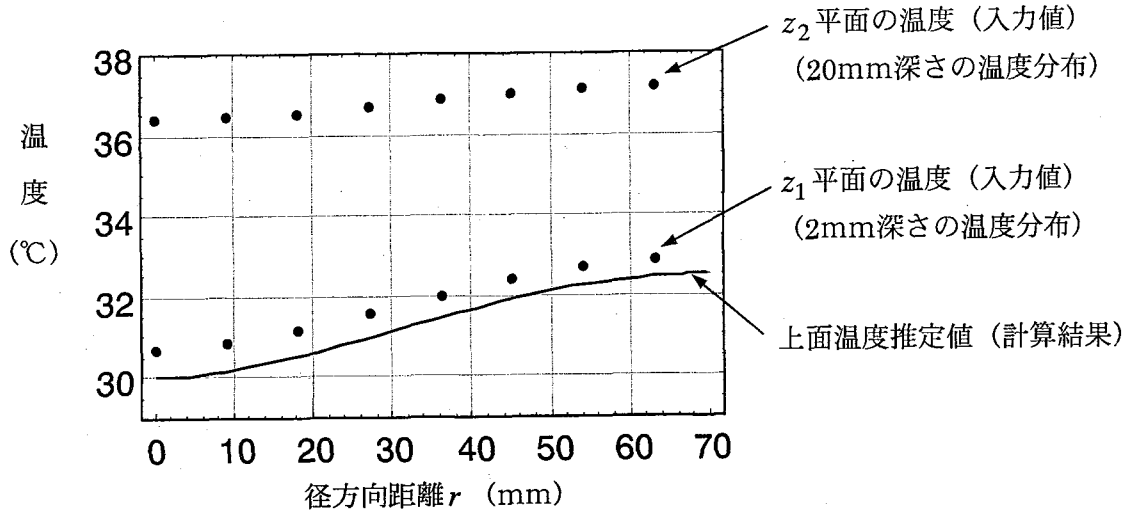


図３（1/2）試計算の計算結果　（上面温度）

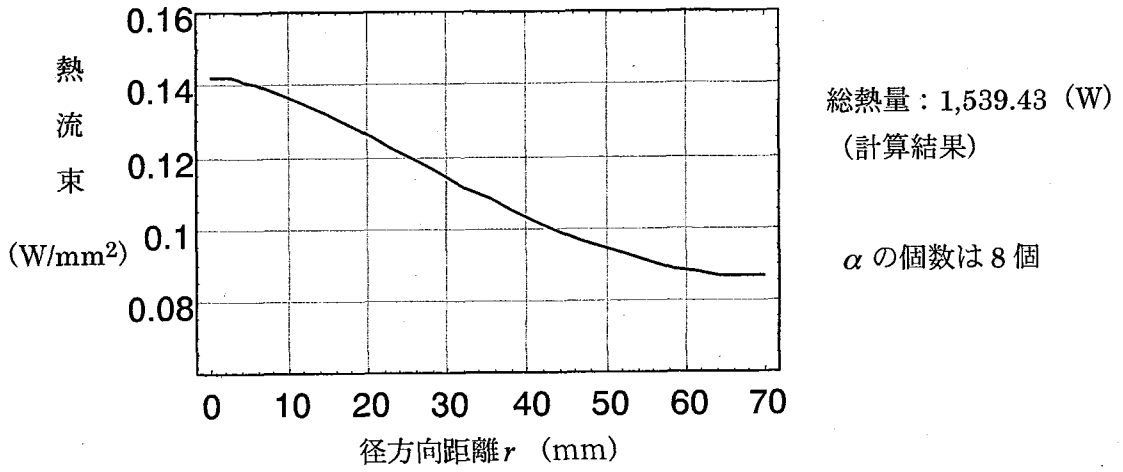
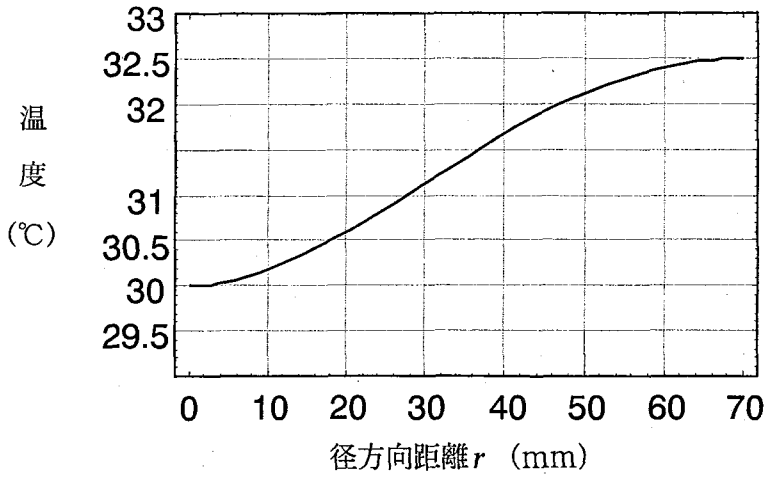


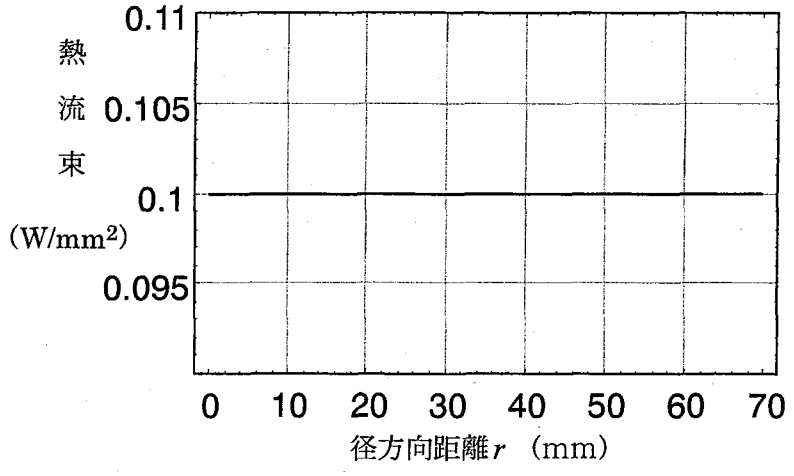
図３（2/2）試計算の計算結果　（上面熱流束）



ケース 1、ケース 3 ： $T_w(ax) = 30 + 10x^2 - 10x^3 + 2.5x^4$

ケース 2 ： $T_w(ax) = 31.833 - 1.698J_0(\alpha_1 x) - 0.086J_0(\alpha_2 x) - 0.041J_0(\alpha_3 x)$

図 4（1/2）確認計算の上面温度入力



ケース 1、2、3 で同じ

図 4（2/2）確認計算の下面熱流束入力

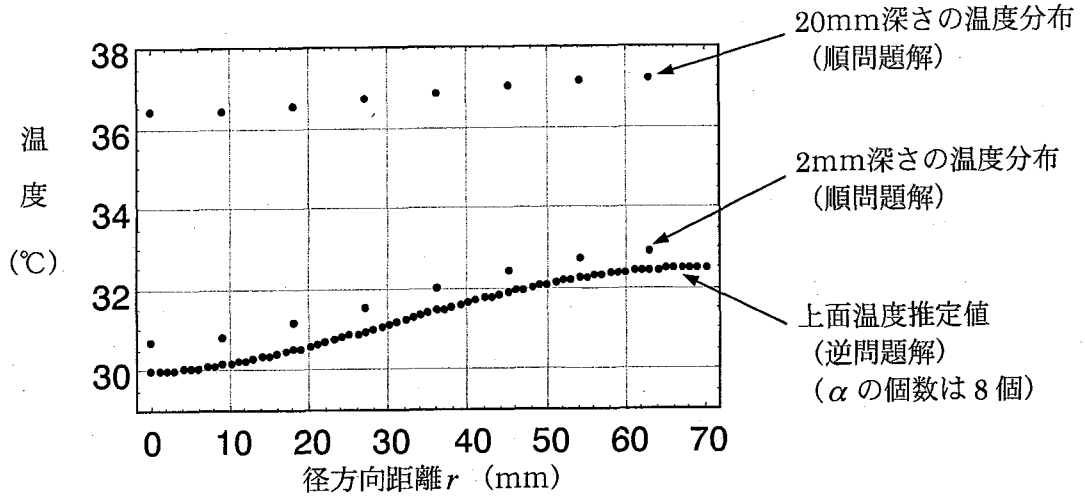
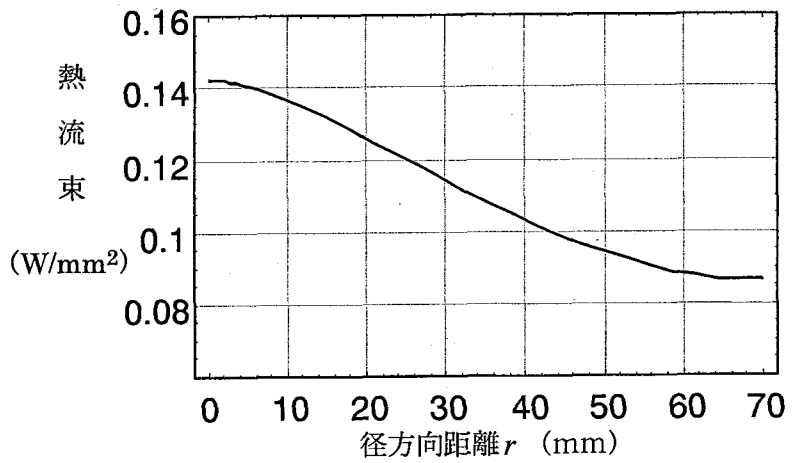


図 5（1/3）確認計算結果（ケース 1：多項式入力）　上面推定温度



α の個数は 8 個。
8 個、3 個、2 個で有意な差は無い。

積分した総熱量は、α が
8 個の時：1,539.43（W）
3 個の時：1,539.25（W）
2 個の時：1,540.46（W）

図 5（2/3）確認計算結果（ケース 1：多項式入力）　上面熱流束

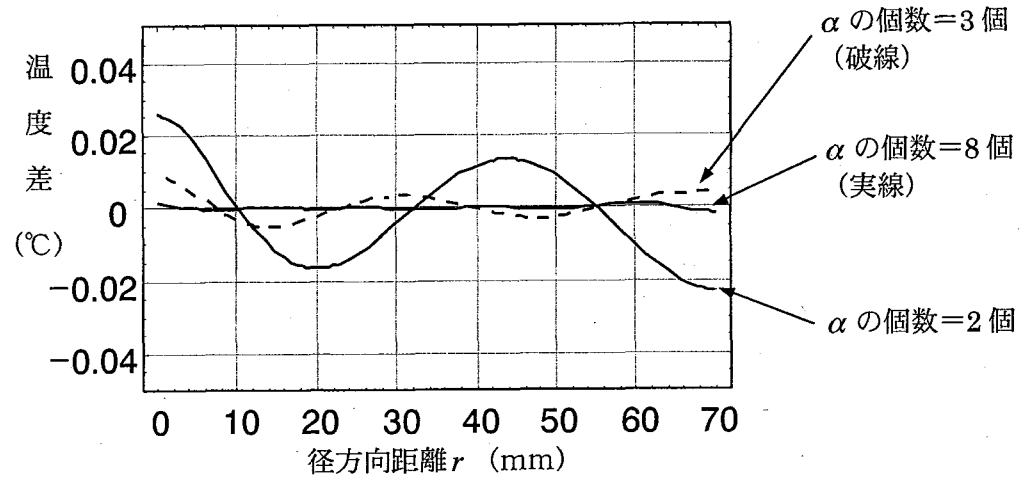


図 5（3/3）確認計算結果（ケース 1：多項式入力）　上面温度推定誤差

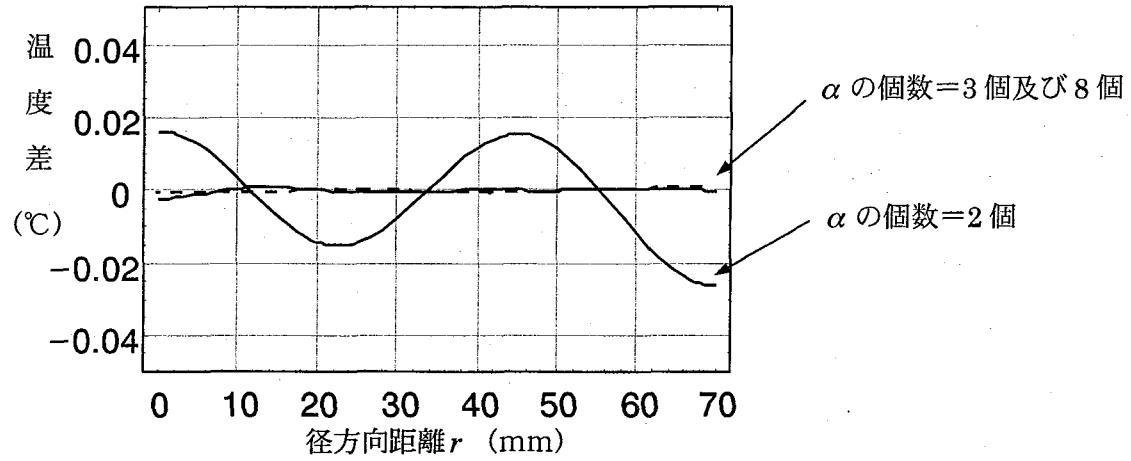


図 6　確認計算結果（ケース 2：ベッセル関数入力）　上面温度推定誤差

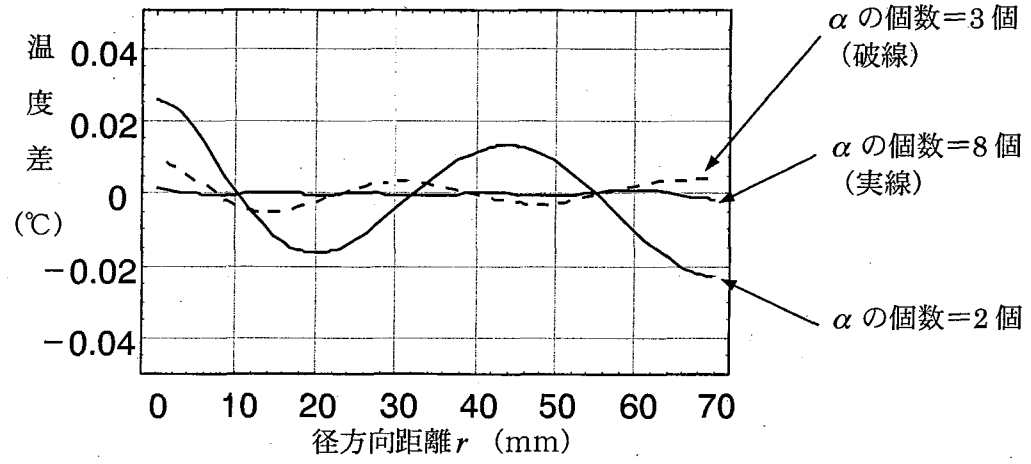
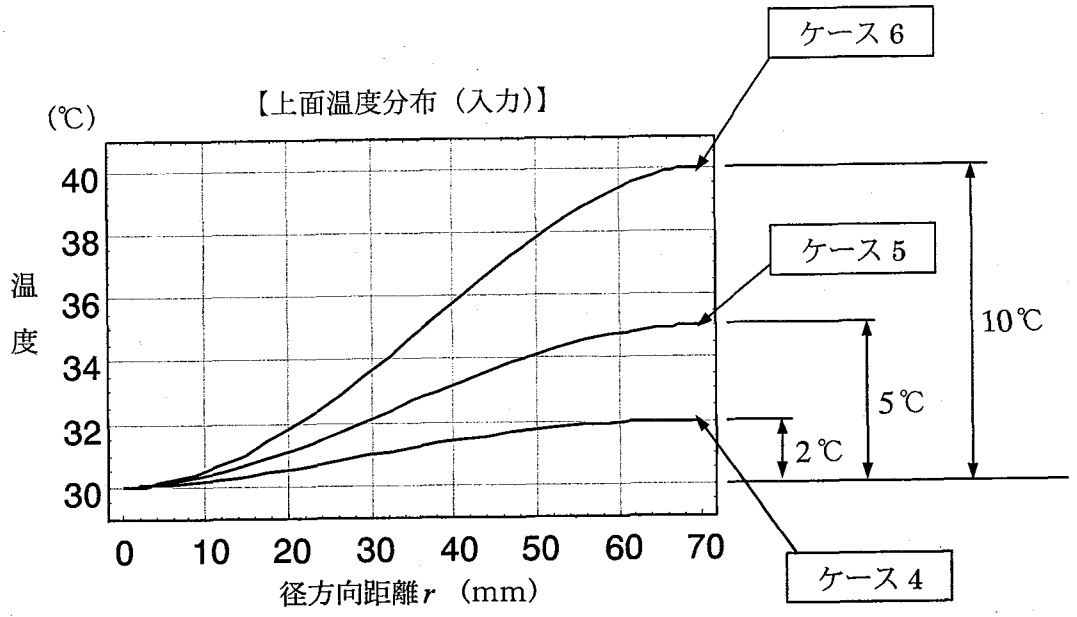


図 7　確認計算結果（ケース 3：逆問題解に基づく内部温度計算）　上面温度推定誤差



	上面温度の入力式	上面温度変動幅（℃）
ケース 4 ：	$T_w(ax) = 30 + 9x^2 - 10x^3 + 3x^4$	： $\Delta T = 2$
ケース 5 ：	$T_w(ax) = 30 + 17.5x^2 - 15x^3 + 2.5x^4$	： $\Delta T = 5$
ケース 6 ：	$T_w(ax) = 30 + 25x^2 - 10x^3 - 5x^4$	： $\Delta T = 10$

図 8　上面温度変動幅と推定誤差の計算条件

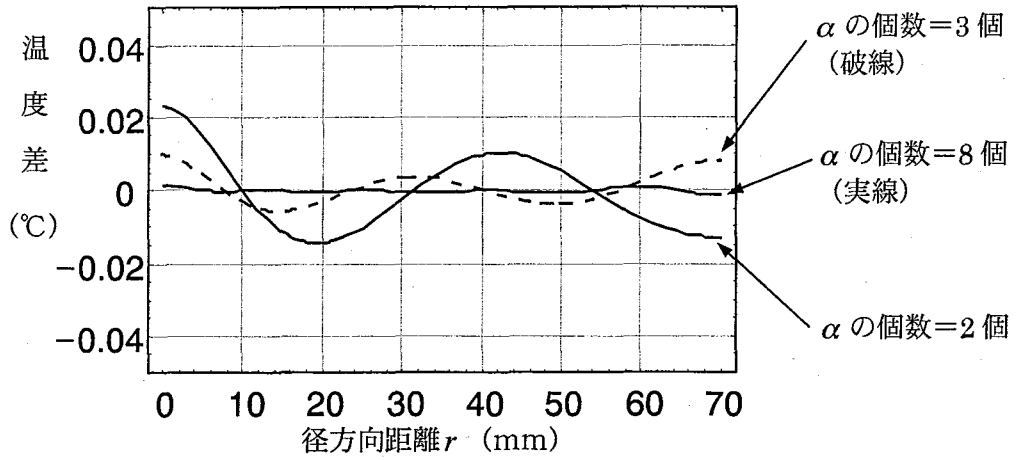


図 9（1/3）上面温度変動幅と推定誤差（ケース 4：上面温度変動幅△T＝2℃）

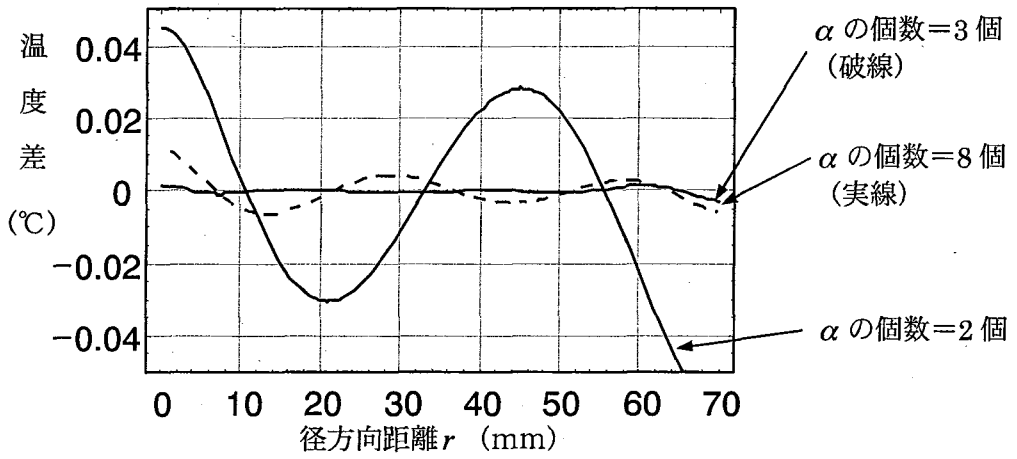


図 9（2/3）上面温度変動幅と推定誤差（ケース 5：上面温度変動幅△T＝5℃）

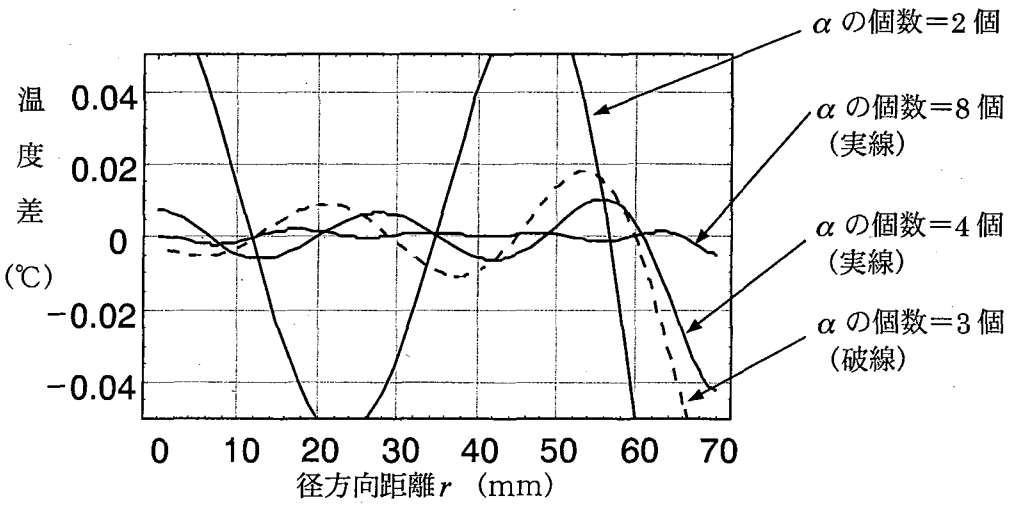


図 9（3/3）上面温度変動幅と推定誤差（ケース 6：上面温度変動幅△T＝10℃）

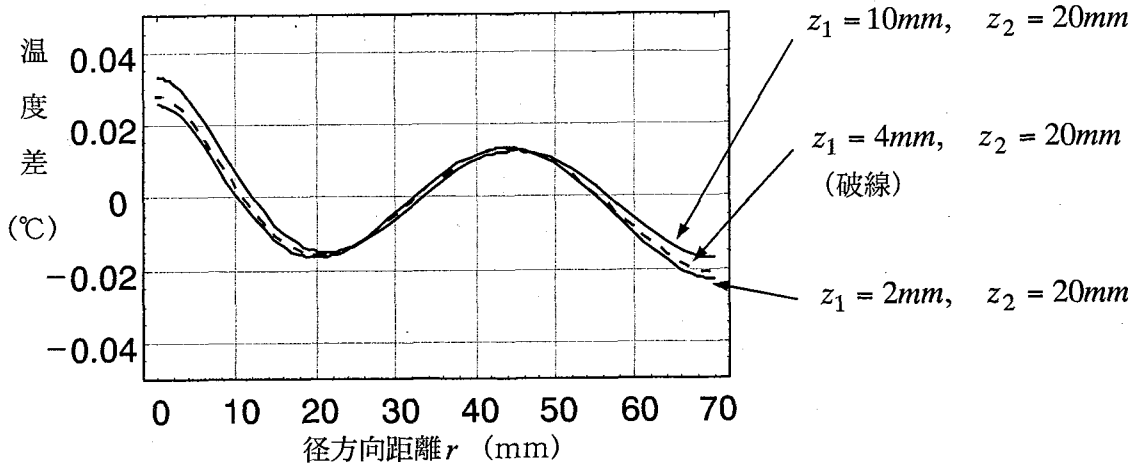


図 10 (1/4) 温度測定レベルと推定誤差 (α が 2 個のケース)

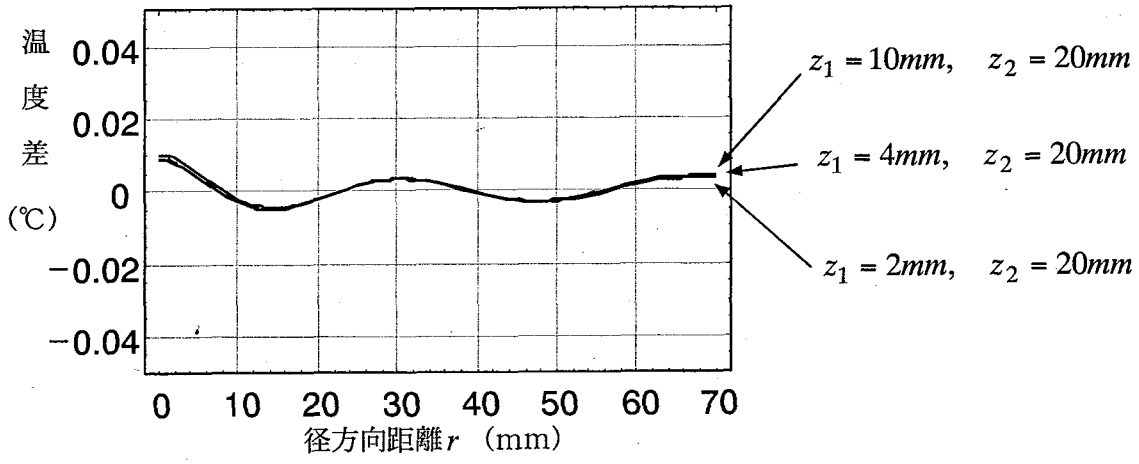


図 10 (2/4) 温度測定レベルと推定誤差 (α が 3 個のケース)

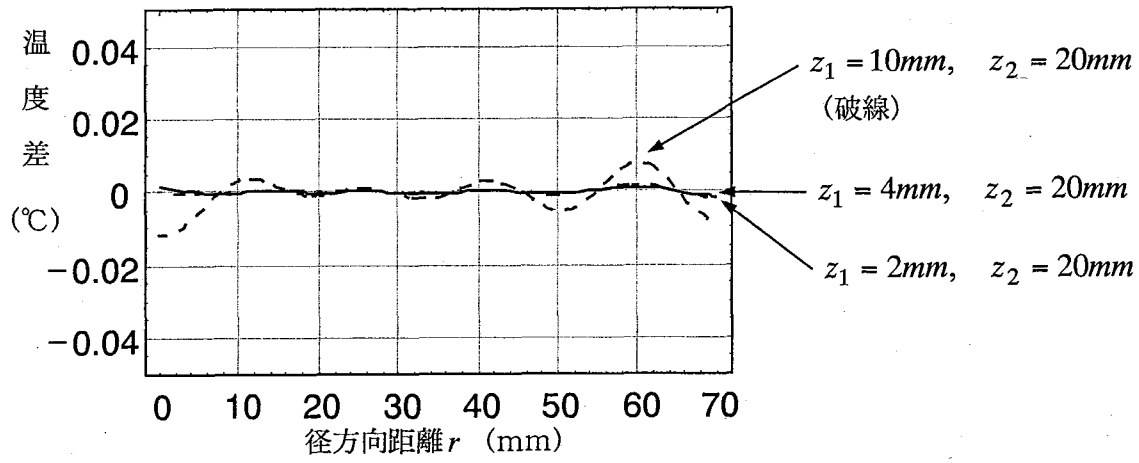


図 10 (3/4) 温度測定レベルと推定誤差 (α が 8 個のケース)

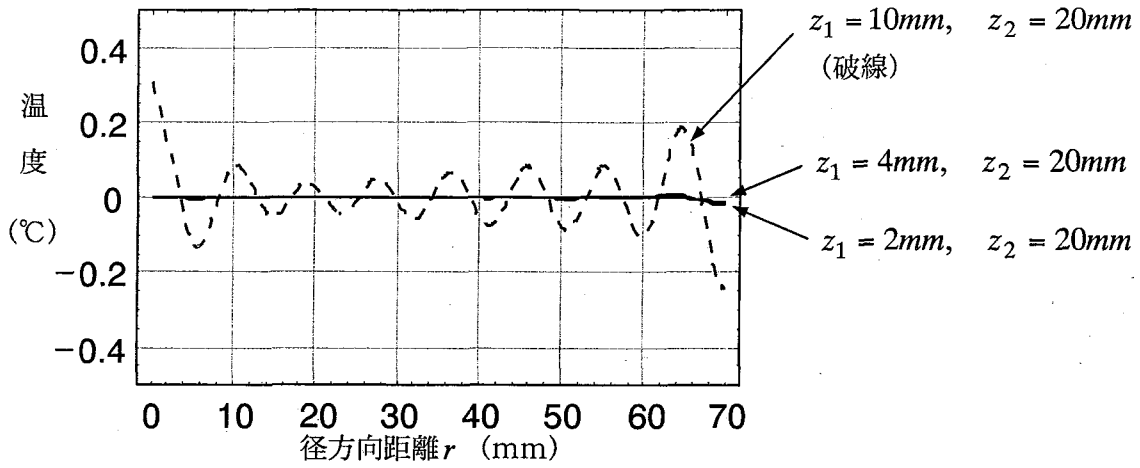


図 10 (4/4)　温度測定レベルと推定誤差 (α が 15 個のケース)

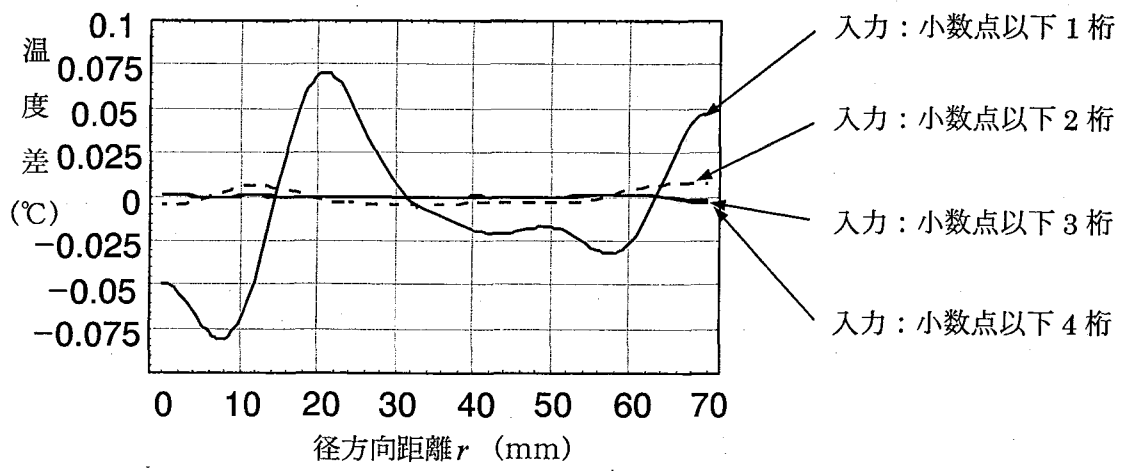


図 11 (1/2)　入力温度の小数点以下の桁数と推定誤差 (α が 8 個のケース)

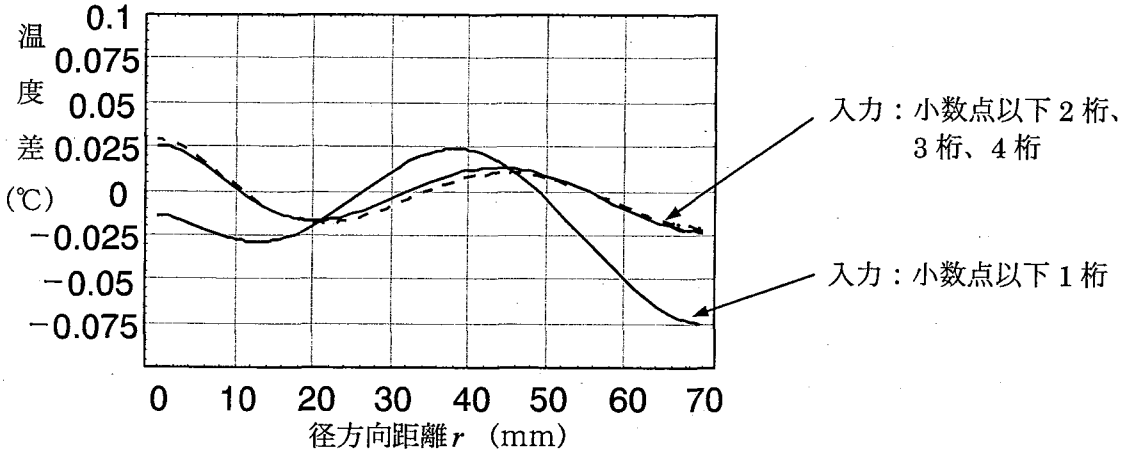


図 11 (2/2)　入力温度の小数点以下の桁数と推定誤差 (α が 2 個のケース)

付録 1

Mathematica の計算プログラム
（上面の温度及び熱流束の推定：逆問題解）

注記：太字は入力セルを表わす。

1. 上面の温度及び熱流束の推定（逆問題解）
   内部温度を入力し、逆問題解により上面温度及び熱流束を推定する。
   はじめに、全メモリをクリアする。

```
Quit
```

2. 形状データ：円筒（半径；a＝70（mm）、高さ；h＝100（mm））を入力する。

```
a=70;
h=100;
```

3. Bessel関数　J(x)＝0 の起動（組み込み関数の起動）

```
<< NumericalMath`BesselZeros`;
```

4. $J_1(x)=0$ の計算（αを計算し、リスト化する）　n は個数

```
n=8;
α=BesselJZeros[1,{1,n}]
{3.83171, 7.01559, 10.1735, 13.3237, 16.4706, 19.6159, 22.7601, 25.9037}
```

5.　α0 を 入力する。その他のαを個別に取り出し、定義する。

```
α0=10^-20;
α1=α[[1]];α2=α[[2]];α3=α[[3]];α4=α[[4]];α5=α[[5]];α6=α[[6]];α7=α[[7]];
α8=α[[8]];
```

6. $m=\alpha\times a$ の計算（ m を計算する）

```
m0=α0/a;
m1=α1/a; m2=α2/a; m3=α3/a; m4=α4/a; m5=α5/a; m6=α6/a; m7=α7/a; m8=α8/a;
```

7. 銅ブロックの熱伝導率（W/mm-K）を入力する

```
λ=386*10^-3;
```

8. 2mm 深さの、温度計測データ（例えば実験データ）を入力し、リスト化、グラフ作成する

```
t10=30.7248; t11=30.8469; t12=31.1590; t13=31.5742; t14=32.0137;
t15=32.4129; t16=32.7217; t17=32.9054;
```

```
LT98={{0,t10},{9,t11},{18,t12},{27,t13},{36,t14},{45,t15},{54,t16},
      {63,t17}}
{{0,30.7248},{9,30.8469},{18,31.1590},{27,31.5742},{36,32.0137},
 {45,32.4129},{54,32.7217},{63,32.9054}}

plotLT98=ListPlot[LT98,PlotStyle→{PointSize[0.015]},TextStyle→{FontFami
ly→"Arial",FontSize→12},Frame→True,GridLines→Automatic,PlotRange→{Auto
matic,{29,38}}]
```

＜グラフ：省略＞

9. 20mm 深さの、温度計測データ（例えば実験データ）を入力し、リスト化、グラフ作成する

```
t20=36.4330; t21=36.4700; t22=36.5727; t23=36.7193; t24=36.8825;
t25=37.0349; t26=37.1538; t27=37.2239;
LT80={{0,t20},{9,t21},{18,t22},{27,t23},{36,t24},{45,t25},{54,t26},
      {63,t27}}
{{0,36.433},{9,36.47},{18,36.5727},{27,36.7193},{36,36.8825},
 {45,37.0349},{54,37.1538},{63,37.2239}}

plotLT80=ListPlot[LT80,PlotStyle→{PointSize[0.015]},TextStyle→{FontFami
ly→"Arial",FontSize→12},Frame→True,GridLines→Automatic,PlotRange→{Auto
matic,{29,38}}]
```

＜グラフ：省略＞

10. 2mm深さと20mm 深さの、温度計測データ同一のグラフにまとめる

```
plotdata=Show[plotLT98,plotLT80]
```

＜グラフ：省略＞

11. 2mm 深さ及び20mm深さの温度データを3次のスプライン関数で補完する

```
Y1=Interpolation[LT98]
InterpolatingFunction[{{0.,63.}},<>]
Y2=Interpolation[LT80]
InterpolatingFunction[{{0.,63.}},<>]
```

12. 2mm 深さの補完データを1mm間隔で取り出し、リスト化する

```
Intp1=Table[{r,Y1[r]},{r,0,63,1}]
```

＜リスト：省略＞

13. 20mm 深さの補完データを1mm間隔で取り出し、リスト化する

```
Intp2=Table[{r,Y2[r]},{r,0,63,1}]
```

＜リスト：省略＞

14. 逆問題解に使用する m_i の定義（αの個数＝8で近似する場合）

```
m80={m0,m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8};
```

15. 2mm 深さ平面の温度分布の評価関数の形を入力

```
y18=c180+c181*BesselJ[0,m1*r]+c182*BesselJ[0,m2*r]+c183*BesselJ[0,m3*r]
      +c184*BesselJ[0,m4*r]+c185*BesselJ[0,m5*r]+c186*BesselJ[0,m6*r]
      +c187*BesselJ[0,m7*r]+c188*BesselJ[0,m8*r];
```

16. 2mm 深さの平面の評価関数の係数を求め、リスト化する

```
  ff18=FindFit[Intp1,y18,{c180,c181,c182,c183,c184,c185,c186,c187,c188},
       r];
  C18i={c180/.ff18,c181/.ff18,c182/.ff18,c183/.ff18,c184/.ff18,
       c185/.ff18,c186/.ff18,c187/.ff18,c188/.ff18}
  {32.3513, -1.52161, -0.0698806, -0.0253584, -0.00477616, -0.00217343,
   -0.00180942, 0.000215462, -0.00107719}
```

17. 2mm 深さ平面の評価関数による温度分布をグラフ化

（点：補完データ、線：評価関数）

```
plot18=Plot[y18/.ff18,{r,0,70},AxesOrigin→{0,0},PlotRange→{Automatic,{2
9,34}},PlotStyle→{Thickness[0.008]},TextStyle→{FontFamily→"Arial",FontS
ize→12},Epilog→Prepend[Point/@Intp1,PointSize[0.015]],Frame→True,GridLi
nes→Automatic]
```

＜グラフ：省略＞

18. 20mm 深さ平面の温度分布の評価関数の形を入力

```
y28=c280+c281*BesselJ[0,m1*r]+c282*BesselJ[0,m2*r]+c283*BesselJ[0,m3*r]
      +c284*BesselJ[0,m4*r]+c285*BesselJ[0,m5*r]+c286*BesselJ[0,m6*r]
      +c287*BesselJ[0,m7*r]+c288*BesselJ[0,m8*r];
```

19. 20mm深さの平面の評価関数の係数を求め、リスト化する

```
  ff28=FindFit[Intp2,y28,{c280,c281,c282,c283,c284,c285,c286,c287,c288},
       r];

C28i={c280/.ff28,c281/.ff28,c282/.ff28,c283/.ff28,c284/.ff28,
```

```
    c285/.ff28,c286/.ff28,c287/.ff28,c288/.ff28}
 {37.0147, -0.568136, -0.0114164, -0.0018395, -0.000463223, 0.000156114,
  -0.000561545, 0.000359532, -0.000198593}
```

20. 20mm深さ平面の評価関数による温度分布をグラフ化
（点：補完データ、線：評価関数）

```
plot28=Plot[y28/.ff28,{r,0,70},PlotStyle→{Thickness[0.008]},TextStyle→{
FontFamily→"Arial",FontSize→12},AxesOrigin→{0,0},PlotRange->{Automatic,
{35,38}},Epilog→Prepend[Point/@Intp2,PointSize[0.015]],Frame→True,GridL
ines→Automatic]
```

＜グラフ：省略＞

21. 逆問題解により上面温度を推定するための計算
（評価関数：αの個数＝8のBessel関数近似の場合）

$$G8 = \frac{C28i * \mathrm{Sinh}[m80 * (100 - 98)] - C18i * \mathrm{Sinh}[m80 * (100 - 80)]}{\mathrm{Sinh}[m80 * (80 - 98)]}$$

```
Tw8=Dot[BesselJ[0,m80*r],G8]
```

22. 逆問題解に基づく上面温度推定値を径方向1mm間隔で計算し、グラフ化する

```
LTw8=Table[{r,Tw8},{r,0,70,1}]
```

＜リスト化：省略＞

```
Twp8=Plot[Tw8,{r,0,70},Frame→True,GridLines→Automatic,PlotRange->{Autom
atic,{29,38}},PlotStyle→{Thickness[0.0085]},TextStyle→{FontFamily→"Aria
l",FontSize→12}]
```

＜グラフ：省略＞

23. 入力した2平面の温度分布と、上面温度推定値を同一のグラフにまとめる

```
Show[Twp9,plotdata]
```

＜グラフ：省略＞

24. 逆問題解に基づく上面熱流束推定値の計算（αの個数＝8のBessel関数近似の場合）

$$qG8 = \frac{C18i * \mathrm{Cosh}[m80 * (100 - 80)] - C28i * \mathrm{Cosh}[m80 * (100 - 98)]}{\mathrm{Sinh}[m80 * (80 - 98)]}$$

```
qTw8=BesselJ[0,m80*r]*qG8
qw8=λ*Dot[m80,qTw8]
```

25. 逆問題解による上面熱流束の計算結果をグラフ化

```
qwp8=Plot[qw8,{r,0,70},Frame→True,GridLines→Automatic,PlotRange→{Automa
tic,{0.06,0.16}},PlotStyle→{Thickness[0.008]},TextStyle→{FontFamily→"Ar
ial",FontSize→12}]
```

＜グラフ：省略＞

26. 逆問題解による上面熱流束の積分値（総熱量）（W）

$$QB8 = \int_0^a (qw8 * 2 * \pi * r)\, dr$$

```
1539.43
```

27. 得られた上面推定温度分布を関数で表わす。多項式（4次式）で表わす。

```
yp=kp0+kp2*r^2+kp3*r^3+kp4*r^4
fp=FindFit[LTw8,yp,{kp0,kp2,kp3,kp4},r]
ypr=yp/.fp
ypx=ypr/.{r→a*x}
```

$$30.0004 + 9.97668\,x^2 - 9.94\,x^3 + 2.46122\,x^4$$

```
pypr=Plot[ypr,{r,0,70},PlotStyle→{Thickness[0.005],Hue[2]},TextStyle→{F
ontFamily→"Arial",FontSize→12},AxesOrigin→{0,0},PlotRange->{Automatic,{
29,33}},Frame→True,GridLines→Automatic,Epilog→Prepend[Point/@LTw8,Point
Size[0.015]]]
```

＜グラフ：省略＞

```
pypx=Plot[ypx,{x,0,1},PlotStyle→{Thickness[0.005],Hue[2]},TextStyle→{Fo
ntFamily→"Arial",FontSize→12},AxesOrigin→{0,0},PlotRange->{Automatic,{2
9,33}},Frame→True,GridLines→Automatic]
```

＜グラフ：省略＞

28. 得られた上面推定温度分布を関数で表わす。Bessel関数で表わす。

```
yb=kb0+kb1*BesselJ[0,α1*r/a]+kb2*BesselJ[0,α2*r/a]
    +kb3*BesselJ[0,α3*r/a]+kb4*BesselJ[0,α4*r/a]
fb=FindFit[LTw8,yb,{kb0,kb1,kb2,kb3,kb4},r]
ybr=yb/.fb
ybx=ybr/.{r→a*x}
  31.8331 -1.6978 BesselJ[0,3.83171 x]-0.0858272 BesselJ[0,7.01559 x]
    -0.0345485 BesselJ[0,10.1735 x]-0.0105889 BesselJ[0,13.3237 x]
```

```
pybr=Plot[ybr,{r,0,70},PlotStyle→{Thickness[0.005],Hue[2]},TextStyle→{F
ontFamily→"Arial",FontSize→12},AxesOrigin→{0,0},PlotRange->{Automatic,{
29,33}},Frame→True,GridLines→Automatic,Epilog→Prepend[Point/@LTw8,Point
Size[0.015]]]
```

＜グラフ：省略＞

```
pybx=Plot[ybx,{x,0,1},PlotStyle→{Thickness[0.005],Hue[2]},TextStyle→{Fo
ntFamily→"Arial",FontSize→12},AxesOrigin→{0,0},PlotRange->{Automatic,{2
9,33}},Frame→True,GridLines→Automatic]
```

＜グラフ：省略＞

付録２

円筒座標・２次元・定常状態の熱伝導方程式の順問題解

1. 概要

物体の上面／下面の温度分布あるいは熱流束を与えることによる、物体の内部温度を求める順問題解を整理した。逆問題解との差異を明確にするためにまとめた。

モデルの形状は、順問題で検討したものと同じである。

2. 基礎方程式と順問題解

円筒座標系の銅ブロック内部の温度分布を表す基礎方程式は、径方向の温度分布が中心軸に対して対称となる場合、次式で表される。基礎方程式は、逆問題と同じである。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

ここで、T は温度を示す。

式(1)に示す基礎方程式の解は、一般解を $T(r,z)=R(r)\cdot Z(z)$ と仮定すると、

$$\frac{\partial T}{\partial r}=Z\frac{dR}{dr}、\quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=Z\frac{d^2R}{dr^2}、\quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=R\frac{d^2Z}{dz^2}$$

なので、これらを式(1)に代入すると、

$$Z\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}Z\frac{dR}{dr}=-R\frac{d^2Z}{dz^2}$$ となり、両辺を（$Z\cdot R$）で除し、整理すると、

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \tag{2}$$

が得られる。式(2)の左辺は（r）に関して、右辺は（z）に関して各々独立であるので定数となる。この定数をλとして整理すると、次式が得られる。

式(2)の左辺については、 $$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}=\lambda R \tag{3}$$

式(2)の右辺については、 $$\frac{d^2Z}{dz^2}=-\lambda Z \tag{4}$$

ここで、λは３ケース（$\lambda>0$、$\lambda=0$、$\lambda<0$）が取り得るので、各々のケースについてその解を求める。

（1） $\lambda>0$のケース

$\lambda > 0$ のケースでは、$\lambda = m^2$ と置くと、式(3)は、

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - m^2R = 0 \tag{5}$$

となる。式(5)は変形されたベッセルの方程式であり、その一般解は、次式となる。

$$R(r) = AI_0(mr) + BK_0(mr) \tag{6}$$

次に、式(4)については、$\lambda = m^2$ と置いてラプラス変換すると、(便宜上、$d/dz = s$ と置く)

$$s^2Z(s) - sZ(0) - Z'(0) = -m^2Z(s)$$

$$Z(s) = \frac{pZ(0)}{s^2 + m^2} + \frac{Z'(0)}{s^2 + m^2} \tag{7}$$

式(7)をラプラス逆変換すると、

$$Z(z) = C\sin(mz) + D\cos(mz) \tag{8}$$

となる。従って、一般解は、$T = R(r)\cdot Z(z)$ なので、式(6)と式(8)から、

$$T = \{AI_0(mr) + BK_0(mr)\}\{C\sin(mz) + D\cos(mz)\} \tag{9}$$

となる。なお、A, B, C, D は境界条件により求まる定数である。

(2) $\lambda = 0$ のケース

式(3)に($\lambda = 0$)を代入すると、下記となる。

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} = 0 \tag{10}$$

ここで、$r = e^u$ (つまり $u = \ln(r)$) と変数変換すると、$du = (\ln r)' = (1/r)dr$ なので

$du/dr = 1/r$ となり、

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{du}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dR}{du} \tag{11}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dR}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR}{du}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{du} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{dR}{du} = -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{du} + \frac{1}{r}\frac{d}{rdu}\frac{dR}{du}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{du} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{du^2} \tag{12}$$

これらを式(10)に代入すると、

$$\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{du}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{du^2}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{dR}{du}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{du^2}=0 \tag{13}$$

これを整理すると、式(10)は次式となる。

$$\frac{d^2R}{du^2}=0 \tag{14}$$

式(14)を、 u についてラプラス変換すると、(便宜上、$d/du=s$ と置く)

$s^2R(s)-sR(0)-R'(0)=0$ (注：$R(0)$、$R'(0)$は初期値)

$$R(s)=\frac{sR(0)}{s^2}+\frac{R'(0)}{s^2} \tag{15}$$

これをラプラス逆変換すると、

$R(u)=R(0)+R'(0)\cdot z=A+B\cdot u$

となる。 u を元に戻すことにより、式(10)の一般解は次式となる。

$$R(r)=A+B\log r \tag{16}$$

次に、式(4)については、$\lambda=0$ を代入して、下記となる。

$$\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \tag{17}$$

これをラプラス変換すると、式(17)の一般解は、下記となる。

$$Z(z)=Cz+D \tag{18}$$

従って、一般解は、$T=R(r)\cdot Z(z)$ なので、式(16)と式(18)から、

$$T=\{A+B\log r\}\{Cz+D\} \tag{19}$$

なお、A,B,C,D は境界条件により求まる定数である。

(3) $\lambda<0$の時

$\lambda<0$のケースでは、($\lambda=-m^2$) と置くと、式(3)は、下記となる。

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+m^2R=0 \tag{20}$$

式(20)は、ベッセルの方程式であり、その一般解は、下記となる。

$$R(r)=AJ_0(mr)+BY_0(mr) \tag{21}$$

次に、式(4)については、下記となる。

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-m^2Z=0 \tag{22}$$

式(22)を z についてラプラス変換すると、(便宜上、$d/dz = s$ と置く)

$$\left(s^2 Z(s) - pZ(0) - Z'(0)\right) - m^2 Z(s) = 0$$

$$Z(s) = \frac{sZ(0) + Z'(0)}{s^2 - m^2} \tag{23}$$

となる。これをラプラス逆変換すると、式(22)の一般解は、下記となる。

$$Z(z) = C\sinh(mz) + D\cosh(mz) \tag{24}$$

従って、一般解は、$T = R(r) \cdot Z(z)$ なので、式(21)と式(24)から、

$$T = \{AJ_0(mr) + BY_0(mr)\}\{C\sinh(mz) + D\cosh(mz)\} \tag{25}$$

となる。なお、A, B, C, D は境界条件により求まる定数である。

(4) 一般解のまとめ

上記 (1) から (3) までの一般解を、下記に整理する。

(1) $\lambda > 0$: $T = \{AI_0(mr) + BK_0(mr)\}\{C\sin(mz) + D\cos(mz)\}$ (9)

(2) $\lambda = 0$: $T = \{A + B\log r\}\{Cz + D\}$ (19)

(3) $\lambda < 0$: $T = \{AJ_0(mr) + BY_0(mr)\}\{C\sinh(mz) + D\cosh(mz)\}$ (25)

3. 境界条件

(1) 検討対象の体系から、境界条件を設定する。

① $T = f(r)$ ($z = h$、$0 < r < a$)

② $T = g(r)$ ($z = 0$、$0 < r < a$)

③ $\partial T / \partial r = 0$ ($r = a$、$0 < z < h$)

④ T は有界 ($0 < r < a$、$0 < z < h$)

(2) このままでは、解が求まらないので、境界条件を以下のように分割する。

①' $z = 0$、$0 < r < a$
②' $z = h$、$0 < r < a$
③' $r = a$、$0 < z < h$

の時、 $T_1 = \begin{cases} 0 \\ f(r) \\ \partial T / \partial r = 0 \end{cases}$ $T_2 = \begin{cases} g(r) \\ 0 \\ \partial T / \partial r = 0 \end{cases}$

の条件で、T_1 と T_2 を求め、$T = T_1 + T_2$ が求める解である。

3.1 (T_1) の解

(1) 境界条件④に関する検討

境界条件④を考慮して、$r = 0$ を一般解の各式に代入すると、

式(9)では、$I_0(0) = 1$、$K_0(0) = -\infty$ となるので、中心部で有界 (有限) な温度とするためには、$B = 0$ でなくてはならない。

式(19)では、$\log(0) = -\infty$ となるので、中心部で有限な温度とするためには、$B = 0$ でなく

てはならない。

式(25)では、 $J_0(0)=1$、 $Y_0(0)=-\infty$ となるので、中心部で有限な温度とするためには、$B=0$ でなくてはならない。

いずれの場合でも、$B=0$ が必要である。

(2) 境界条件③に関する検討

境界条件③を考慮して、$r=a$ を一般解の各式に代入すると、

式(9)では、$\partial T/\partial r = AI_0'(ma)=0$ が成立しなくてはならない。ベッセル関数の定理から、$I_0'(x)=0$ は、$x=0$ の他に実根を持たないので、$m\cdot a=0$が必要である。ところが、 $a>0$、$m>0$なので、この条件は成立しない。つまり、式(9)は成立しない。

式(19)では、(r) の項がないので、成立する。

式(25)では、境界条件を満足させるためには、$\frac{d}{dr}J_0(mr)=-J_1(mr)\Big|_{r=a}=-J_1(ma)=0$ が必要である。この式を満足させるためには、 $m=\alpha/a$ (ただし、 α は $J_1(x)=0$ の正の根)が必要である。

(3) 境界条件①'に関する検討

境界条件①'を考慮して、$z=0$を一般解の各式に代入すると、

式(19)では、$T=0$の条件を満足するためには、$D=0$でなければならない。

式(25)では、$\sinh(0)=0$、$\cosh(0)=1$となるので、$T=0$の条件を満足させるためには、$D=0$でなければならない。

(4) T_1に関するまとめ

上記 (1) から (3) までの結果を整理すると、(T_1) の解で取り得るものは、

$$T_1 = Az + AJ_0\left(\frac{r\alpha}{a}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{a}z\right) \tag{26}$$

となる。この式は、もっと一般的な解の形、つまり、

$$T_1 = A_{01}\cdot z + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1}J_0\left(\frac{\alpha_i}{a}\cdot r\right)\sinh\left(\frac{\alpha_i}{a}\cdot z\right) \tag{27}$$

についても言える。ただし、$\sum_{i=1}^{\infty}$ は、α_iに関する総和を表す。

(注記：α は、 $J_1(x)=0$ の正の根であり、$\alpha_0=0, \alpha_1=3.832, \alpha_2=7.016,\cdots$ である。α_0の時は、$J_1(0)=0$であるが、$\sinh(0)=0$なので、$\alpha=0$ は意味を持たない。式(27)右辺の定数項は、$\alpha=0$を表わしている。)

式(27)の形の中から、境界条件②'を満足するものを求めれば良い。
式(27)に、$z=h$の時、$T=f(r)$の条件を代入し、無次元化半径xで表わすと、

$$T_1 = f(r) = f(ax) = A_{01}\cdot h + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1} J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i h) \tag{28}$$

式(28)を展開すると、

$$\begin{aligned} f(ax) = A_{01}h + A_{11}J_0(\alpha_1 x)\sinh(m_1 h) + A_{21}J_0(\alpha_2 x)\sinh(m_2 h) + \cdots \\ \cdots + A_{i1}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i h) + \cdots \end{aligned} \tag{29}$$

式(29)の未定係数A_{01}を求めるために、両辺に xdx を掛けて0から1まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(ax)dx = \int_0^1 A_{01}hxdx + \int_0^1 A_{11}\sinh(m_1 h)xJ_0(\alpha_1 x)dx + \cdots \\ + \int_0^1 A_{i1}\sinh(m_i h)xJ_0(\alpha_i x)dx + \cdots \end{aligned} \tag{30}$$

式(30)の右辺第2項以降の積分は（$=0$）となるので、

$$\int_0^1 xf(ax)dx = \int_0^1 A_{01}hxdx = \frac{1}{2}A_{01}h \tag{31}$$

従って、 $A_{01} = \frac{2}{h}\cdot\int_0^1 x\cdot f(ax)dx$ (32)

次に、式(29)の未定係数A_{i1}を求めるために、両辺に $xJ_0(\alpha_i x)$ を掛けて0から1まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(ax)J_0(\alpha_i x)dx = \int_0^1 A_{01}hxJ_0(\alpha_i x)dx + \int_0^1 A_{11}\sinh(m_1 h)xJ_0(\alpha_1 x)J_0(\alpha_i x)dx + \cdots \\ + \int_0^1 A_{i1}\sinh(m_i h)xJ_0{}^2(\alpha_i x)dx + \cdots \end{aligned} \tag{33}$$

ここで、右辺第1項の積分は（$=0$）となる。
右辺の第2項以降は、（$n\neq i$）の時（$=0$）となり、（$n=i$）の時のみ解がある。

ベッセル関数の公式 $\int_0^1 xJ_0{}^2(\alpha_i x)dx = \frac{1}{2}\left\{J_0{}^2(\alpha_i)+J_1{}^2(\alpha_i)\right\}$ から、第2項以降の積分は、

$$\int_0^1 A_{i1}\sinh(m_i h)xJ_0{}^2(\alpha_i x)dx = \frac{1}{2}A_{i1}\sinh(m_i h)J_0{}^2(\alpha_i) \tag{34}$$

従って、式(33)は、

$$\int_0^1 xf(ax)J_0(\alpha_i x)dx = \frac{1}{2}A_{i1}\sinh(m_i h)J_0{}^2(\alpha_i) \tag{35}$$

これより、

$$A_{i1} = \frac{2\int_0^1 xf(ax)J_0(\alpha_i x)dx}{J_0{}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)} \tag{36}$$

3.2 （T_2）の解

（1） 境界条件の書き換え

3. 項で設定した境界条件を（$h - z = z'$）に書き換える。即ち、底面と上面を入れ替え、z 軸は下方で（+）とする。

新たな境界条件は、①" $u = g(r)$ （$z' = h$、$0 < r < a$）

②" $u = 0$ （$z' = 0$、$0 < r < a$）

この境界条件は、（T_1）で、$f(r) = g(r)$ と置いたものに等しい。

従って、一般解は式(27)を参照して、

$$T_2 = A_{02}\cdot z' + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i2}J_0\left(\frac{\alpha_i}{a}\cdot r\right)\sinh\left(\frac{\alpha_i}{a}\cdot z'\right) \tag{37}$$

$z' = h - z$ の置換を元に戻すと、

$$T_2 = A_{02}\cdot(h - z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i2}J_0(\alpha_i x)\sinh\left(\frac{\alpha_i(h - z)}{a}\right) \tag{38}$$

ここで、 $z = 0$（下面）で $u = g(ax)$ の条件を代入すると、

$$T_2 = g(ax) = A_{02}\cdot h + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i2}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i h) \tag{39}$$

式(39)は、式(28)と同じ形である。従って、式(39)の未定係数A_{02}, A_{i2}は、式(32)、式(36)と同じ形になる。即ち、

$$A_{02} = \frac{2}{h}\cdot\int_0^1 x\cdot g(ax)\cdot dx \tag{40}$$

$$A_{i2} = \frac{2\int_0^1 xg(ax)J_0(\alpha_i x)dx}{{J_0}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)} \tag{41}$$

3.3 $(T = T_1 + T_2)$ の解

求める解は、式(27)＋式(38)となる。

$$T(r,z) = A_{01}\cdot z + A_{02}\cdot(h-z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i2}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i(h-z)) \tag{42}$$

ただし、係数は、

$$A_{01} = \frac{2}{h}\cdot\int_0^1 x\cdot f(ax)dx \tag{32}$$

$$A_{i1} = \frac{2\cdot\int_0^1 xf(ax)J_0(\alpha_i x)dx}{{J_0}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)} \tag{36}$$

$$A_{02} = \frac{2}{h}\cdot\int_0^1 x\cdot g(ax)dx \tag{40}$$

$$A_{i2} = \frac{2\int_0^1 xg(ax)J_0(\alpha_i x)dx}{{J_0}^2(\alpha_i)\sinh\{m_i h\}} \tag{41}$$

4. 上面／下面での温度分布、熱流束に関する具体的な検討

4.1 上面での温度分布 $f(ax)$ が多項式で与えられる場合

上面での温度分布 $f(ax)$ が、下記のように4次式で与えられる場合の係数を以下にまとめる。

$$f(ax) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \tag{43}$$

ここで、x ：無次元化半径

a ：多項式係数

添字の数字：x の次数に対応

なお、上面での温度分布を多項式で表す場合には、下記の制限がある。

① $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ ： これは、中心軸における温度が有界である（連続である）ための条件

② $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$ ： これは、側面が断熱であるための条件

従って、式(43)を微分すると、

$$\frac{\partial f(ax)}{\partial x}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3 \tag{44}$$

①の条件を満足させるためには、 $a_1=0$ とする必要がある。

②の条件から、 $2a_2+3a_3+4a_4=0$ を満足する係数とすればよい。

なお、Mathematica では式(32)及び式(36)の積分が、多項式を入力するのみで計算できる。

4.2 上面での温度分布 $f(ax)$ がベッセル関数で与えられる場合

上面での温度分布 $f(ax)$ が、下記のように α の個数が 4 個（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$）のベッセル関数で与えられる場合を検討する。

$$f(ax)=\sum_{i=0}^{4}C_iJ_0(\alpha_i\cdot x)$$

$$=C_0J_0(\alpha_0x)+C_1J_0(\alpha_1x)+C_2J_0(\alpha_2x)+C_3J_0(\alpha_3x)+C_4J_0(\alpha_4x) \tag{45}$$

ここで、x ：無次元化半径

C_i ：係数（$C_0,C_1,C_2,\cdots$）

$\alpha_0=0$ （注記：$J_1(\alpha_i)=0$）、$J_0(0)=1$

式(45)の係数に関しては、4.1 項と同様の制限（① $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$、② $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$）がある。

式(45)を微分すると、

$$\frac{df(ax)}{dx}=C_0J_0'(\alpha_0x)+C_1J_0'(\alpha_1x)+C_2J_0'(\alpha_2x)+C_3J_0'(\alpha_3x)+C_4J_0'(\alpha_4x)$$

$$=-C_0\alpha_0J_1(\alpha_0x)-C_1\alpha_1J_1(\alpha_1x)-C_2\alpha_2J_1(\alpha_2x)-C_3\alpha_3J_1(\alpha_3x)-C_4\alpha_4J_1(\alpha_4x) \tag{46}$$

式(46)に $x=0$ を代入すると、$J_1(0)=0$ なので、制限条件の①は満足する。

式(46)に $x=1$ を代入すると、$J_1(\alpha_i)=0$ なので、制限条件の②も満足する。

(1) 上面の温度分布をベッセル関数で表す場合の係数A_{01}について

式(32)に式(45)を代入して、係数A_{01}を求める。

$$A_{01}=\frac{2}{h}\int_0^1 x\cdot C_i J_0(\alpha_i x)dx$$

ここで、 $\alpha_i x=t$ とおくと、 $x=t/\alpha_i$ なので、

$$A_{01}=\frac{2C_i}{h}\int_0^{\alpha_i}\frac{t}{\alpha_i}J_0(t)\frac{dt}{\alpha_i}=\frac{2C_i}{h\alpha_i{}^2}\left[tJ_1(t)\right]_0^{\alpha_i}=\frac{2C_i}{h\alpha_i{}^2}\alpha_i J_1(\alpha_i)=0 \qquad (47)$$

(2) 上面の温度分布をベッセル関数で表す場合の係数A_{i1}について

式(36)に式(45)を代入して、係数A_{i1}を求める。

$$A_{i1}=\frac{2\int_0^1 xC_i J_0{}^2(\alpha_i x)dx}{J_0{}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)}=\frac{2C_i}{J_0{}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)}\cdot\frac{1}{2}\left\{J_0{}^2(\alpha_i)+J_1{}^2(\alpha_i)\right\}$$

$$=\frac{C_i}{\sinh(m_i h)} \qquad (48)$$

4.3 下面での温度分布$g(ax)$が多項式で与えられる場合

下面での温度分布$g(ax)$が、下記のように4次式で与えられる場合の係数を以下にまとめる。

$$g(ax)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4 \qquad (49)$$

ここで、x：無次元化半径

b：多項式係数

数字の添字：xの次数に対応

なお、4.1項と同様の制限（① $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$、② $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$）があり、同じ要求、つまり、

①の条件を満足させるためには、$b_1=0$ とする必要がある。

②の条件から、 $2b_2+3b_3+4b_4=0$ を満足する係数とすればよい。

4.4　下面の温度分布$g(ax)$がベッセル関数で与えられる場合

下面での温度分布$g(ax)$が、下記のようにαの個数が4個（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\varepsilon_4$）のベッセル関数で与えられる場合を検討する。

$$g(ax)=\sum_{i=0}^{4}D_iJ_0(\alpha_i\cdot x)$$

$$=D_0J_0(\alpha_0x)+D_1J_0(\alpha_1x)+D_2J_0(\alpha_2x)+D_3J_0(\alpha_3x)+D_4J_0(\alpha_4x) \tag{51}$$

4.1項と同様の制限（① $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$、 ② $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$）があるが、ベッセル関数で表す場合には、4.2項と同様に、これらの制限を満足する。

（1）下面の温度分布をベッセル関数で表す場合の係数A_{02}について

式(40)に式(51)を代入して、係数A_{02}を求める。

$$A_{02}=\frac{2}{h}\int_0^1 x\cdot D_iJ_0(\alpha_ix)dx$$

この積分は、式(47)と同様であり、従って、　$A_{02}=0$ (52)

（2）下面の温度分布をベッセル関数で表す場合の係数A_{i2}について

式(41)に式(51)を代入して、係数A_{i2}を求める。

$$A_{i2}=\frac{2\int_0^1 xD_iJ_0(\alpha_ix)dx}{{J_0}^2(\alpha_i)\sinh(m_ih)} \tag{53}$$

式(53)は、式(48)と同じである。従って、

$$A_{i2}=\frac{D_i}{\sinh(m_ih)} \tag{54}$$

4.5　下面を熱流束一定の条件とする場合

下面を温度分布で与えるのではなく、熱流束一定の条件とする場合を検討する。

熱流束は、 $q = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = q_0 = const.$ である。

はじめに、式(42)を z で微分すると、

$$\frac{\partial T}{\partial z} = A_{01} - A_{02} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1} m_i J_0(\alpha_i x)\cosh(m_i z) - \sum_{i=1}^{\infty} A_{i2} m_i J_0(\alpha_i x)\cosh(m_i(h-z)) \tag{55}$$

この式に、 $z = 0$ を代入すると、

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = A_{01} - A_{02} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1} m_i J_0(\alpha_i x) - \sum_{i=1}^{\infty} A_{i2} m_i J_0(\alpha_i x)\cosh(m_i h) = -\frac{q_0}{\lambda} \tag{56}$$

$$(A_{01} - A_{02}) + \sum_{i=1}^{\infty} \{A_{i1} m_i - A_{i2} m_i \cosh(m_i h)\} J_0(\alpha_i x) = -\frac{q_0}{\lambda} \tag{57}$$

式(57)の添字の 1 は上面の温度条件に基づく係数であり、添字の 2 は下面の温度条件に基づく係数である。つまり、係数 A_{01} 及び A_{i1} は前出と同様である。未定係数は A_{02} 及び A_{i2} である。

式(57)の未定係数 A_{02} を求めるために、両辺に xdx を掛けて、0 から 1 まで積分すると、

$$\int_0^1 (A_{01} - A_{02}) x dx + \int_0^1 \{A_{i1} m_i - A_{i2} m_i \cosh(m_i h)\} x J_0(\alpha_i x) dx = -\int_0^1 \frac{q_0}{\lambda} x dx \tag{58}$$

式(58)の左辺第 2 項の積分は、(= 0) なので、

$$A_{01} - A_{02} = -\frac{q_0}{\lambda}$$

故に、 $A_{02} = A_{01} + \frac{q_0}{\lambda}$ (59)

即ち、A_{01} が多項式の場合あるいはベッセル関数の場合、各々、式(32)、式(47)で与えられるので、未定係数 A_{02} は、式(59)で計算できる。

式(57)の未定係数 A_{i2} を求めるために、両辺に $xJ_0(\alpha_i x)dx$ を掛けて、0 から 1 まで積分すると、

$$\int_0^1 (A_{01} - A_{02}) x J_0(\alpha_i x) dx + \int_0^1 \{A_{i1} m_i - A_{i2} m_i \cosh(m_i h)\} x J_0{}^2(\alpha_i x) dx = -\int_0^1 \frac{q_0}{\lambda} x J_0(\alpha_i x) dx \tag{60}$$

式(60)の左辺第１項、及び右辺の積分は、各々（＝0）となる。従って、

$$\int_0^1 \{A_{i1}m_i - A_{i2}m_i \cosh(m_i h)\} x J_0{}^2(\alpha_i x) dx = 0$$

$$\{A_{i1}m_i - A_{i2}m_i \cosh(m_i h)\} \frac{1}{2} J_0{}^2(\alpha_i) = 0 \quad \text{（注記：} J_1(\alpha_i) = 0\text{）}$$

$$A_{i1}m_i - A_{i2}m_i \cosh(m_i h) = 0$$

$$A_{i2} = \frac{A_{i1}}{\cosh(m_i h)} \tag{61}$$

即ち、A_{i1}が多項式の場合あるいはベッセル関数の場合、各々、式(36)、式(48)で与えられるので、未定係数A_{i2}は、式(61)で計算できる。

5. まとめ

順問題解に関して、以下に整理する。なお、まとめを付２－表１に示す

順問題解（上面／下面の温度／熱流束等の条件を与えて、内部温度を求める）は、

$$T(r,z) = A_{01} \cdot z + A_{02}(h - z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i1} J_0(\alpha_i x) \sinh(m_i z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i2} J_0(\alpha_i x) \sinh(m_i (h - z)) \tag{42}$$

各係数は、$A_{01} = \frac{2}{h} \cdot \int_0^1 x \cdot f(ax) dx$ (32)

$$A_{02} = \frac{2}{h} \cdot \int_0^1 x \cdot g(ax) dx \tag{40}$$

$$A_{i1} = \frac{2}{J_0{}^2(\alpha_i) \sinh(m_i h)} \int_0^1 x f(ax) J_0(\alpha_i x) dx \tag{36}$$

$$A_{i2} = \frac{2}{J_0{}^2(\alpha_i) \sinh(m_i h)} \int_0^1 x g(ax) J_0(\alpha_i x) dx \tag{41}$$

上面／下面での温度分布が多項式（４次式の例）で表される時、下記の条件がある。

上面 ： $f(ax) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

ただし、 $a_1 = 0$、 $2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0$

下面 ： $g(ax) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$

ただし、 $b_1 = 0$、 $2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 0$

上面／下面での温度分布がベッセル関数（α の個数が 4 個の例）で表される時、

上面 ： $f(ax) = C_1 J_0(\alpha_1 x) + C_2 J_0(\alpha_2 x) + C_3 J_0(\alpha_3 x) + C_4 J_0(\alpha_4 x)$

$$A_{01} = 0 \tag{47}$$

$$A_{i1} = \frac{C_i}{\sinh(m_i h)} \tag{48}$$

下面 ： $g(ax) = D_1 J_0(\alpha_1 x) + D_2 J_0(\alpha_2 x) + D_3 J_0(\alpha_3 x) + D_4 J_0(\alpha_5 x)$

$$A_{02} = 0 \tag{52}$$

$$A_{i2} = \frac{D_i}{\sinh(m_i h)} \tag{54}$$

下面で、熱流束を一定とする条件では、

$$A_{02} = A_{01} + \frac{q_0}{\lambda} \tag{59}$$

$$A_{i2} = \frac{A_{i1}}{\cosh(m_i h)} \tag{61}$$

付２－表１　熱伝導方程式の解（順問題解）

基礎方程式	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0$		
境界条件	上面：温度分布（$f(r)$）、下面：温度分布（$g(r)$）、側面：断熱		
一般解	$T(r,z)=A_{01}\cdot z+A_{02}(h-z)+\sum_{i=1}^{\infty}A_{i1}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i z)+\sum_{i=1}^{\infty}A_{i2}J_0(\alpha_i x)\sinh(m_i(h-z))$		
係数	$f(r)$と$g(r)$：多項式の場合	$f(r)$と$g(r)$：ベッセル関数の場合	下面が熱流束一定の場合
A_{01}	$A_{01}=\frac{2}{h}\cdot\int_0^1 x\cdot f(ax)dx$	$A_{01}=0$	左記
A_{02}	$A_{02}=\frac{2}{h}\cdot\int_0^1 x\cdot g(ax)dx$	$A_{02}=0$	$A_{02}=A_{01}+\frac{q_0}{\lambda}$
A_{i1}	$A_{i1}=\frac{2\cdot\int_0^1 x\cdot f(ax)\cdot J_0(\alpha_i x)dx}{J_0{}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)}$	$A_{i1}=\frac{C_i}{\sinh(m_i\cdot h)}$	左記
A_{i2}	$A_{i2}=\frac{2\cdot\int_0^1 x\cdot g(ax)\cdot J_0(\alpha_i x)dx}{J_0{}^2(\alpha_i)\sinh(m_i h)}$	$A_{i2}=\frac{D_i}{\sinh(m_i\cdot h)}$	$A_{i2}=\frac{A_{i1}}{\cosh(m_i\cdot h)}$

注記：　$f(r)=f(ax)=\sum_{i=0}^{\infty}C_i J_0(\alpha_i\cdot x)$、　$g(r)=g(ax)=\sum_{i=0}^{\infty}D_i J_0(\alpha_i\cdot x)$、　r：径方向距離、　a：半径、　x：無次元化半径