

MHD発電に応用する 放電電離の理論

1962年10月

日本原子力研究所

Japan Atomic Energy Research Institute

日本原子力研究所は、研究成果、調査結果の報告のため、つぎの3種の刊行物を、それぞれの通しナンバーを付して、不定期に発行しております。

1. 研究報告	まとまった研究の成果あるいはその一部における重要な結果の報告	JAERI 1001-3999
2. 調査報告	総説、展望、紹介などを含め、研究の成果、調査の結果をまとめたもの	JAERI 4001-5999
3. 資料	研究成果の普及、開発状況の紹介、施設共同利用の手引など	JAERI 6001-6999

これらの刊行物に関する版権、複写のお問合せは、日本原子力研究所図書館あてお申し越しください。

なお、上記3種の報告は、日本原子力研究所生活協同組合（茨城県那珂郡東海村）で実費頒布をいたしております。

Japan Atomic Energy Research Institute publishes the non-periodical reports with the following classification number.

1. JAERI 1001-3999 Research Reports.
2. JAERI 4001-5999 Survey Reports.
3. JAERI 6001-6999 Information and Guiding Booklets.

Any inquiries concerning copyright and reprint of the above mentioned reports should be addressed to the TECHNICAL LIBRARY of the Institute.
(Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun,
Ibaraki-ken, Japan)

MHD 発電に応用する放電電離の理論

要　　旨

非平衡電離を用いて電磁流体発電（MHD 発電）を原子炉による発電に応用する方法のうち、 $1000\sim2000^{\circ}\text{K}$ 程度の温度のシードされた稀ガスに、瞬間に電場を加えて電離度を上昇させる方法を理論的に検討した。

はじめに、電子系に加えられたエネルギーが原子系に緩和してゆく過程を調べ、短い時間间隔のパルス状電圧を加えるべきことを導びく。次に、電場印加後の電子密度の上昇を、電子のエネルギー分布が DRUYVESTEYN および HOLSTEIN 分布の場合について求める。さらに、このような応用が可能であるか否かを定める最も重要な再結合について検討し、再結合のもとでの電子密度の上昇の式を求めた。これらの計算では、今まで文献に得られている原子やイオンについてのデータを用いたが、GENERAL ELECTRIC 社でおこなわれた放電の実験を数值的によく説明することができた。したがって、その信頼度はかなり高いものと信じられる。

その結果から、シードをもつ稀ガスに電場をかけて、電離度が飽和するまでの短い時間の非平衡電離を、MHD 発電に応用しうる可能性が十分あることが結論できる。

37年6月

日本原子力研究所 核融合直接発電研究準備室

矢野淑郎、平本立躬

Theory of the Application of Electrical Ionization to the MHD Power Generator

Abstract

There seem to be several ways concerning the application of an MHD power generator using non-equilibrium ionization to a nuclear reactor. Among these, the method of increasing the ionization degree by applying electric field momentarily to the rare gases in temperature of 1000-2000°K seeded with gases of relatively low ionization potential has been investigated theoretically.

At first step, the relaxation process of energy to the atoms from the electrons is studied, and then it is derived that a pulse voltage of a short time duration is useful for this purpose. In the next step, the increase of electron density after the initiation of applied electric field is calculated in two cases: one assuming the DRUYVESTEYN distribution, the other assuming the HOLSTEIN distribution for electron energy. Then, the studies are carried out on the volume recombination of electrons with positive ions which is the most important factor on determining the applicability of the method, and the equation expressing the rise rate of electron density under the recombination process is derived.

In these calculation the numerical data of ions and atoms already appeared in literatures have been used, and it is found that our calauations agree well numerically with the results of experiments of electrical discharge carried out at the GENERAL ELECTRIC Co. Therefore, our calculation is believed to be sure.

Conclusively, it proves to be theoretically possible to make an MHD generator using the nonequilibrium ionization state, that is created from the initial stage of electrical discharge in short time duration between the initiation time of applied electric field to seeded rare gases and the time of the saturation of ionization degree.

June, 1962

SYUKURO YANO, TATSUMI HIRAMOTO

Interim Laboratoy for Nuclear Fusion and
Direct Conversion, Japan Atomic Energy
Research Institute

目 次

1 MHD 発電と原子力発電.....	1
2 放電によるイオン化の問題.....	3
2.1 非平衡電離の方法.....	3
2.2 電離状態のもつエネルギー.....	4
2.3 計算のための仮定.....	5
2.4 エネルギー緩和の式とその解.....	5
2.5 緩和時間の数値例.....	8
2.6 電子に加えられるエネルギーの値.....	9
3 電場中の非平衡電離.....	10
3.1 電子のエネルギー分布式.....	10
3.1.1 DRUYVESTEYN 分布.....	11
3.1.2 HOLSTEIN 分布.....	11
3.2 電離速度.....	16
3.2.1 DRUYVESTEYN 分布の場合の電離速度.....	17
3.2.2 HOLSTEIN 分布の場合の電離速度.....	18
3.2.3 混合ガスの電離速度.....	19
3.3 再結合過程について.....	24
3.4 再結合を考慮にいれた電離速度.....	26
3.5 電離度の時間変化.....	28
3.6 最適電離条件.....	31
3.6.1 電離度飽和時間.....	31
3.6.2 飽和電離度.....	33
3.6.3 電気伝導度.....	34
3.6.4 一般的な適当条件.....	34
3.7 G.E. の実験結果と数値計算の比較.....	35
3.7.1 G.E. の実験.....	35
3.7.2 計算例.....	36
4 まとめ.....	38
参考文献.....	38
付録 I.....	40
付録 II.....	41
付録 III.....	46

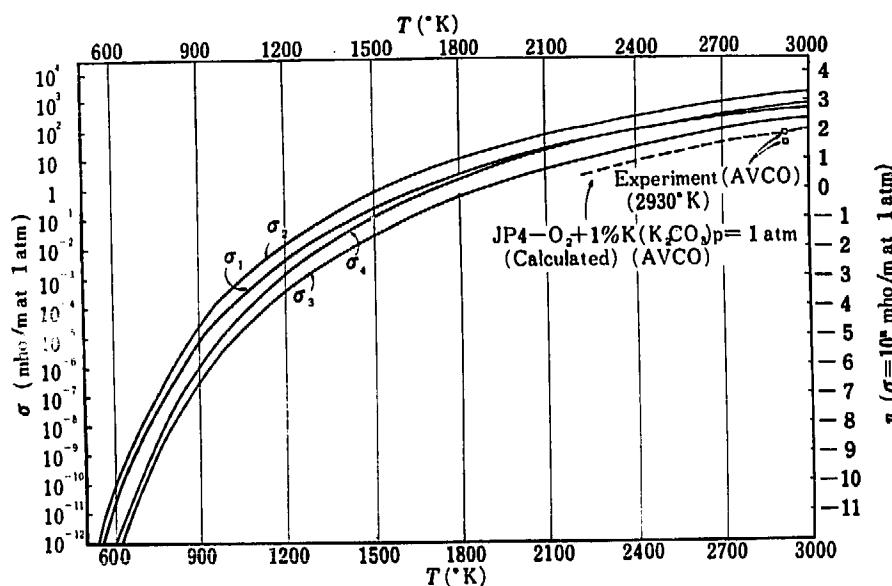
Contents

1 MHD generators and nuclear power generations.	1
2 Problems on the ionization by electrical discharges	3
2.1 Methods of the nonthermal ionization.....	3
2.2 Energy in the ionized states.....	4
2.3 Assumptions	5
2.4 Equation on the relaxation of energy and the solutions.....	5
2.5 Numerical examples of the relaxation time.....	8
2.6 Energy in the electron system.....	9
3 Nonthermal ionization in electric fields	10
3.1 Formulas for the electron energy distribution.....	10
3.1.1 The DRUYVESTEYN distribution.....	11
3.1.2 The HOLSTEIN distribution.....	11
3.2 Time rates of ionization.....	16
3.2.1 Time rates of ionization in the DRUYVESTEYN distribution.....	17
3.2.2 Time rates of ionization in the HOLSTEIN distribution.....	18
3.2.3 Time rates of ionization in the mixtures of gases.....	19
3.3 Recombination processes	24
3.4 Time rates of ionization when the recombination is considered.....	26
3.5 Time dependence of the ionization degree.....	28
3.6 Optimum condition for the ionization.....	31
3.6.1 Saturation time for the ionization.....	31
3.6.2 Saturated ionization degree.....	33
3.6.3 Electrical conductivity.....	34
3.6.4 General optimum conditions.....	34
3.7 Comparisons of the calculations with the experimental results obtained in the G. E. Co.	35
3.7.1 Experiments in the G. E. Co.	35
3.7.2 Examples of the calculations.....	36
4 Conclusions	38
References.....	38
APPENDIX I	40
APPENDIX II	41
APPENDIX III	46

1 MHD 発電と原子力発電

MHD 発電の従来の方法は、ガスの導電率をうるために熱イオン化を用いるものである。すなわち、ガスを熱源によって熱平衡の状態に加熱する。ガスは高温になると原(分)子、原(分)子の熱的な運動による衝突、電子、原(分)子の衝突、光電離などによって自然に電離し、導電性が生じる。このようなガスを高流速で磁場内に通じ磁场との相互作用によって生じる起電力を応用する。

ガスの導電率を増加させるためには、電離電圧の低いアルカリ金属の蒸気を主ガス中に少量の割合で混入する。現在までの報告ではすべてのガスの組合せのうちで、アルゴン中にセシウム原子を少量加えた場合の導電率が最もよく、1気圧、2000°Kで約50mho/mである。しかし、熱電離によるガスの導電率は温度とともに急激に減少するから、2000°K以下では一般にMHD発電は殆ど有効でなくなる。その他のガスの組合せでは、導電率はこれよりかなり低い値になる。ヘリウムとセシウムについての一例を Fig. 1 に示す。



Electrical conductivities calculated from CHAPMAU and COWLING equation

$$Q(\text{He}) = 5.24 \times 10^{-20} \text{ m}^3$$

$$\sigma_1; (1-\varepsilon)\text{He} + \varepsilon\text{Cs}, Q(\text{Cs}) = 300 \times 10^{-20} \text{ m}^3, \varepsilon_0pt = 0.0178$$

$$\sigma_2; (1-\varepsilon)\text{He} + \varepsilon\text{Cs}, Q(\text{Cs}) = 30 \times 10^{-20} \text{ m}^3, \varepsilon_0pt = 0.211$$

$$\sigma_3; (1-\varepsilon)\text{He} + \varepsilon\text{K}, Q(\text{K}) = 360 \times 10^{-20} \text{ m}^3, \varepsilon_0pt = 0.0149$$

$$\sigma_4; (1-\varepsilon)\text{He} + \varepsilon\text{K}, Q(\text{K}) = 36 \times 10^{-20} \text{ m}^3, \varepsilon_0pt = 0.171$$

Fig. 1 Electrical conductivities of gases in thermal equilibrium

ガスの導電率が低いと、発電機の出力密度が低下し、発電機の大きさが急激に増大するとともに、熱損失も増加し効率が低下する。したがって、経済的な発電をおこなうためには、ガスの導電率は数 mhos/m 程度以上が必要になる。このためには、火力発電方式では 2700°K 以上、稀ガスを用いる原子力発電方式では 2200°K 以上の高温ガスが発電機内の平均温度として必要になる。温度が高いための熱効率の増加は大であ

るが、しかし、このため耐熱材料の選定と、耐久性の保証に困難が増し、さらに一般的技術もむずかしくなる。

原子炉による MHD 発電では、作動ガスとして稀ガスを用いるため、火力方式の MHD で用いる石油や石炭の燃焼ガスによるものと同程度の電気伝導度をガスに付与するには、稀ガスの温度は燃焼ガスの場合にくらべて、かなり低い温度でよい。また、稀ガスには化学的反応性が殆んどないため発電機の高温材料にとっても、技術的困難が非常に少なくなり火力方式にくらべて有利となる。

現状では TURRET 炉がガス温度 1620°K で設計されているが、まだ高温材料の点で問題があるため、その実験計画は延期されている。したがって、 2000°K を越えるような高温ガスを原子炉でうることは現段階では直ちに実現可能ではない。

最近 KIWI の実験結果が報道され、かなりの高温ガス ($1000\sim2000^{\circ}\text{K}$ の間であろうと推定される) が原子炉によって瞬間に加熱されたもようであるので、TURRET や KIWI の進歩によって $1000\sim2000^{\circ}\text{K}$ の高温原子炉もきわめて近い将来実現可能となるものと思われる。その後の段階では 2000°K 以上の高温ガス炉へ発展してゆくであろう。

原子炉燃料としてはセラミック系燃料（たとえば、半均質グラファイト燃料または $\text{ZrC}+\text{UC}$ 燃料など）を用いれば、 2000°K 以上の温度を達成することも不可能ではなかろう。しかし、第一段階としてターピンの使用可能温度より高い 1000°K 以上においては、MHD 発電を用いることが望ましく、したがって、MHD 発電機を $2000\sim1000^{\circ}\text{K}$ 程度の間で実現することもきわめて大きな意義をもつものである。

このような温度に対して、熱平衡のイオン化のみにたよらず、さらに、非平衡の電離法を加えることにより、ガス温度をあまり高めることなく、ガスの導電率を高めることができれば、ターピン発電式にくらべて効率が増大できる上に、構造も比較的簡単な発電炉一発電機系が成立しうるものである。

また、 2000°K 以上の高温で原子炉を作動できるようになっても、ガスの導電率がガス温度の大きい上昇なしに高められるものであるならば、出力密度の増大となり、発電機は小型になるとともに大出力のものを建設することは容易となって、きわめて有効なものとなるであろう。

以上のような見地から、熱イオン化（熱平衡）によるガスの電離に加えて、非平衡のイオン化を併用し、ガスの導電率を高める試みを研究し、理論的にその可能性が十分あることを見出した。この方法が実現すれば MHD 発電は広い温度範囲にわたって用いられるものとなり、その見通しはきわめて明るいものとなると思われる。この報告ではその理論と適用方法について述べる。

2 放電によるイオン化の問題

2.1 非平衡電離の方法

熱平衡によらないイオン化によってガスの導電率を高める可能性をもつものとしては次の多くの方法が考えられる。

a) 放電を応用するもの (直流電圧印加, パルス, 高周波, 高周波パルスなど)

b) 光などによるイオン化 (可視, 紫外, X線)

c) 放射線によるイオン化 (isotope, 核分裂, α , β , γ 線)

d) 電子線の照射 (電子銃などによる打込み)

e) 化学反応を用いる方法

f) ガスの急激な状態変化による方法

b) は天然の線源を利用する以外には、熱、または電気エネルギーを人工的にその源として用いるので、それを輻射に変換するときの効率が問題となる。これについてはまだ十分な検討をおこなっていない。

c) は原子炉加熱の MHD 方式では作動ガス中に放射線源となる原子が混入し、あるいは核分裂の放射線により、必然的に起る可能性がある。しかし、アイソトープなどを併用したり、適当な工夫によって電離を高めることにより、さらに利得もえられるものと思われるが、この資料では取り扱わざ別に考慮する予定である。また、このような放射線による場合は、電子とイオンが放射線の経路に沿って密集して発生するため、再結合の度合が大きくその有効性は幾分減少するであろう。

d) の方法をうまくおこなうには、イオン化のおこる確率が最大であるようなエネルギーの電子線を発生させて、イオン化をおこなうことがよいと思われる。この値はおそらく 0.5~4 keV 程度の電子線が好ましいものとなるであろう。この方法についてはすでに検討をおこなっているが、詳細は別の機会に討議したい。

これに反して、a) の方法では、b), c), d) などにある欠点をかなりの程度さけることができる。

a) の放電を使用して電離を高める方法については、いくつかの有利な見通しが考えられる。第1は、放電をおこなう際には、最初からガス中に電離した自由電子が存在していることが必要であるが、MHD 発電をおこなう以上、ガスの温度は 1000°K 以上でアルカリ金属をシードしているのではじめから若干の電離が存在している。これらを有効に活用して放電させるもとに使うことができる。第2は、放電によってガス中に加えられたエネルギーは電離およびガスの加熱に使われるが、ガスの加熱になったエネルギーはガスのエントルピーとしてガス中に残存するため、後の系でその一部が回収される。第3には、MHD 発電の電極構造とかなり類似した構造でそのまま適用できるため、技術的に新しい問題をあまり提起しない。ただ、放電に高電圧が要求される状況であると高温の高周波絶縁物を必要とするであろうが、計算上ではそれほど高い電圧は必要とならない。第4に、使用する MHD 用ガスが稀ガスである場合には、その電子に対する原子的な性質がほかのガスに対して有利であるとともに、電極材料に対しても損傷が少なくてすむ。

以上のように 1000~2000°K の熱電離をおこしているガスに放電を併用することによって、ガスの導電率を高める方法は多くの利点をもっているが、これを最も効率よくおこなうにはどのようにすればよいであろ

うか。

2.2 電離状態のもつエネルギー

放電によりガスの導電率が高められることは、従来の放電の実験からも明らかであるが、MHD 発電の場合にはガスの圧力や種類、また温度、流れの条件などが従来の放電の実験の条件とはかなり異なったものである。すなわち、温度は 1000°K 以上、ガスの流速は $500\sim 5000 \text{ m/sec}$ 、圧力は 0.1 気圧以上数 10 気圧までが対象となる。また稀ガス中にアルカリ金属原子が少量加えられている点も新しい点である。

このような系において、筆者らの考え方の主眼となることは、放電に注入された電気入力がガスの加熱にできるかぎり使われないように工夫することである。電気入力を放電に注入してそのためガス温度が上昇し、熱イオン化がおこるものであれば、たとえそのジュール熱が後に再熱器などで回収されるとしても、電気源から電気をうる割合が増大することになり、有効さは少なくなってゆく。したがって、変換すべきエネルギーは原子炉などで加熱されたガスが持つエンタルピーであり、放電で加えるエネルギーはそれにくらべて十分小さく、しかも、導電率が高められるような方法をとらねばならない。

いま、この程度を知るために理想的な場合としてガスのエンタルピーと電離のエネルギーの割合をくらべてみる。質量流量を $m(\text{kg/sec})$ とすると、シードにつかわれる原子の数は主ガスにくらべて小さいから、その全エンタルピーは T_0 (高温) から T_1 (低温) の間では、

$$H = mc T_0 \left\{ \left(1 - \frac{T_1}{T_0} \right) + \frac{r-1}{2} \left(M_0^2 - \frac{T_1}{T_0} M_1^2 \right) \right\} (\text{joules/sec}) \quad (1)$$

となる。

一方、1 原子の電離電圧を $\phi(\text{eV})$ とすれば、 $m(\text{kg/sec})$ の質量流量中の原子数 $N(\text{箇/sec})$ は

$$N = \frac{m}{A} \times 6 \times 10^{26} (\text{箇/sec})$$

となる。ここに $A(\text{g})$ はシード原子 1 モルの重さである。したがって、ある導電率 σ をもたせるために必要な電離度を α とすれば、電離につかわれているエネルギー E は

$$E = 0.96 \times 10^3 \frac{m \phi \alpha}{A} (\text{joules/sec})$$

である。

たとえば、いま、 $H = 500 \text{ MW}$ 、 $T_0 = 2000^{\circ}\text{K}$ 、 $T_1 = 500^{\circ}\text{K}$ とするとき、 $\sigma = 100 \text{ mhos/m}$ の導電率に相当する E/H の値は、純粋な He, Ar では 3.44×10^{-3} 、および 1.45×10^{-4} すなわち、 $E = 1.72 \text{ MW}$ 、および 72.3 kW であり、He+0.01 モル Cs では、 $E/H = 7.40 \times 10^{-4}$ 、 $E = 370 \text{ kW}$ 、燃焼ガスに 0.02 モルの K を加えた場合は、 $E/H = 2.66 \times 10^{-3}$ 、 $E = 1.33 \text{ MW}$ となる。

このように電離に蓄えられたエネルギーは、 2000°K 程度では、ガスエンタルピーにくらべるとかなり小さいので、何らかの方法でガスの導電率を高めて、ガスエンタルピーから電力への転換を、MHD 発電機内で有効にできることがわかる。

熱イオン化の場合は、原子または分子の運動エネルギーが (3000°K で 0.25 eV 位)、MAXWELL 分布をとっており、その高エネルギー部分のごく一部でシード原子のイオン化エネルギー (たとえば Cs の ionization potential = 3.89 eV) を越えるものがあるためイオン化がおこる。このためにはガス全体が十分高温でなければならない。しかし、 1000°K 程度でも $10^{-8}\sim 10^{-10}$ の割合の、熱イオン化によって生じた電子が存在しているので、これに放電を併用して電子温度を高めれば、電子は容易にイオン化電圧を越えイオン化の断面積が増大し、ガスの導電性を高めることができる。しかし、この電子エネルギーはその大部分が、やはり中性原子との弾性または非弾性衝突 (excitation) に用いられるので、そのためガス温度をも高めることになる。

したがって、ここで求めたいものは、入力放電電力のうちどれだけの割合のエネルギーがイオン化につかわれ、そのために導電率がどれだけ増大して、出力密度が上昇するかということと、ガス温度を高めるにつ

かわされたエネルギーの割合はどの位かということである。そしてイオン化につかわれるエネルギーの割合を高めるには、どのような条件にすればよいかということである。

2.3 計算のための仮定

電子、イオン、中性原子（稀ガスおよび適量の seeding 用アルカリ原子を含む）からなる系をとる。イオンは重いので電場によるエネルギー増大は、電子のエネルギー増大にくらべて小さいとして省略する。このことは付録 I に証明する。

イオンと原子は常に熱平衡にあると仮定する。イオンと原子の衝突断面積はかなり大きく、また、その質量がたがいに等しいことから考えて、一回の衝突によってただちにエネルギーを交換し、熱平衡が確立されるものとする。

いま、三種の粒子間のエネルギー緩和の時間をそれぞれ、

τ_{ei} (電子—イオン間)

τ_{em} (電子—中性原子間)

τ_{im} (イオン—中性原子間)

とする。上の仮定により $\tau_{im} = 0$ である。

これらの量は後にその表示をあたえるように、温度（エネルギー）の関数であるが、微分方程式がとけるため、いまいずれも定数と仮定する。

次に 1 粒子当りの運動エネルギーを U とかき、電子に対しては U_e 、イオンおよび中性原子に対しては U_m とする。この U は $\frac{3}{2}KT$ に相当し、また $\frac{1}{2}mv^2$ に相当する。

単位系には MKS unit を用いる。

2.4 エネルギー緩和の式とその解

いま、system 中の電子 1 篓当たりに外部電場によって dt 時間に加えられるエネルギーを ds とする。 ds/dt は、実際には、 V_0 すなわち $\sqrt{U_0}$ に依存するが、第一近似としてこれも定数と仮定する。

外部電場のエネルギーは電子系のみに注入され、原子は電子との衝突によって間接に電場のエネルギーをうけるものとすると、電子およびイオン、中性原子の単位体積当りのエネルギーについては、

$$d/dt (n_e U_e + n_m U_m) = n_e ds/dt \quad (2)$$

が成立する。ただし、 n_e 、 n_m は電子および中性原子（イオンを含む）の数である。この節では n_e 、 n_m は t によらないと仮定する。つぎに、

$$n_e/n_m = f \quad (3)$$

とおくと、各系のエネルギー間には、

$$dU_e/dt = -\nu (U_e - U_m) + ds/dt \quad (4)$$

$$dU_m/dt = n_e/n_m \nu ((U_e - U_m) = \nu f (U_e - U_m) \quad (5)$$

が成立する。ここに、

$$\nu = 1/\tau = 1/\tau_{ei} + 1/\tau_{em} \quad (6)$$

である。(4) および (5) は (2) を満すものである。

いま、 $t = 0$ で外部から一定の電場が加えられ、 $t = T_0$ で電場が切れた場合の解を考える。 ds/dt 、 ν 、 f はいずれも t を含まないとして $t = 0$ における U_e 、 U_m の値をともに U_0 (熱平衡の値) として (4)、(5) をとくと、

$$U_e = U_0 + \nu f/p^2 ds/dt \{x + 1/f(1 - e^{-x})\} \quad (7)$$

$$U_m = U_0 + \nu f/p^2 ds/dt \{x - (1 - e^{-x})\} \quad (8)$$

となる。ここに、 $p = \nu(1+f)$ 、 $x = pt$ である。

全体のエネルギー W は,

$$W = n_e U_e + n_m U_m = n_e \{ (1+1/f) U_0 + \nu f/p^2 ds/dt (1+1/f) x \} \quad (9)$$

$$\text{ここで, } n_o = n_m + n_e \quad (10)$$

とおくと,

$$W = N_o \{ U_0 + \nu f/p ds/dt \cdot t \} = n_o U_0 + n_e ds/dt \cdot t \quad (11)$$

となる.

外部電場のない場合のエネルギーバランスは、明らかに,

$$dU_e/dt = -\nu (U_e - U_m) \quad (12)$$

$$dU_m/dt = \nu f (U_e - U_m) \quad (13)$$

である。この2式を $x \geq x_0$ の時間について解き、 $x = x_0$ での (11), (12) 式の値とつなぐとパルスが切れて以後の温度の変化が求められる。ここに、パルスの長さを T_0 とすれば、 $x_0 = pT_0$ である。(12) と式 (13) 式を加えて積分すると,

$$fU_e + U_m = U_e \text{ (一定)} \quad (14)$$

かつ,

$$U_e = c/p + D e^{-x} \quad (15)$$

$$U_m = c/p - f D e^{-x} \quad (16)$$

(15), (16) 式で $x = x_0$ とおいたものを、(7), (8) で $x = x_0$ とおいた値に等しいとおき、

$$U_e = U_0 + \nu f/p^2 ds/dt \{ x_0 - 1/f (1 - e^{x_0}) e^{-x} \} \quad (17)$$

$$U_m = U_0 + \nu f/p^2 ds/dt \{ x_0 + (1 - e^{x_0}) e^{-x} \} \quad (18)$$

が得られる。

したがって、 $t \rightarrow \infty$ において、 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_e = \lim_{t \rightarrow \infty} U_m = U_\infty(x_0)$ となり、

$$U_\infty(x_0) = U_0 + \nu f/p^2 \cdot ds/dt \cdot x_0 \quad (19)$$

が得られる。

そこで、放電のパルスを最も有効に使用する方法について調べる。

時間に対する U_e , U_m の変化は Fig. 2 のようになる。パルスをかけるまでは、電子も原子も熱平衡にあって、そのエネルギーは U_0 であったものとする。 $t = 0$ で一定の電場がかかり、 $t = T_0$ までつづき、 $t = T_0$ で切れるものとする。

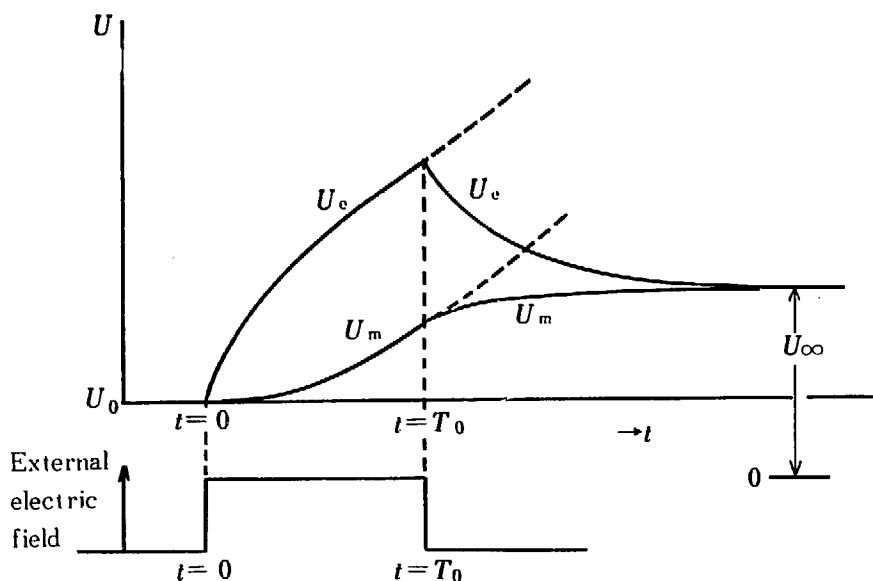


Fig. 2 Variations of U_e and U_m with time, t

電子は軽いので、原子にくらべて急速にエネルギーが上昇し、 $t = T_0$ 以後は原子にそのエネルギーを与えるのみで緩和してゆく。放電の電場が切れて後に一定の値、 U_∞ まで U_e は下降し、 U_m は U_∞ まで上昇しつづける。したがって、最も能率よく放電をおこなうには、

$$y = \frac{n_e (U_e(x_0) - U_0)}{(n_e + n_m) (U_\infty(x_0) - U_0)} \quad (20)$$

の値を最大にするような x_0 、すなわち、放電時間を知ることが必要となる。 y の値は $x_0 = 0$ で最大で、 x_0 とともに減少してゆく。したがって、できるかぎり短い放電を用いることが望ましい。 y の値の放電時間 x_0 との関係は、Fig. 3 に示してある。

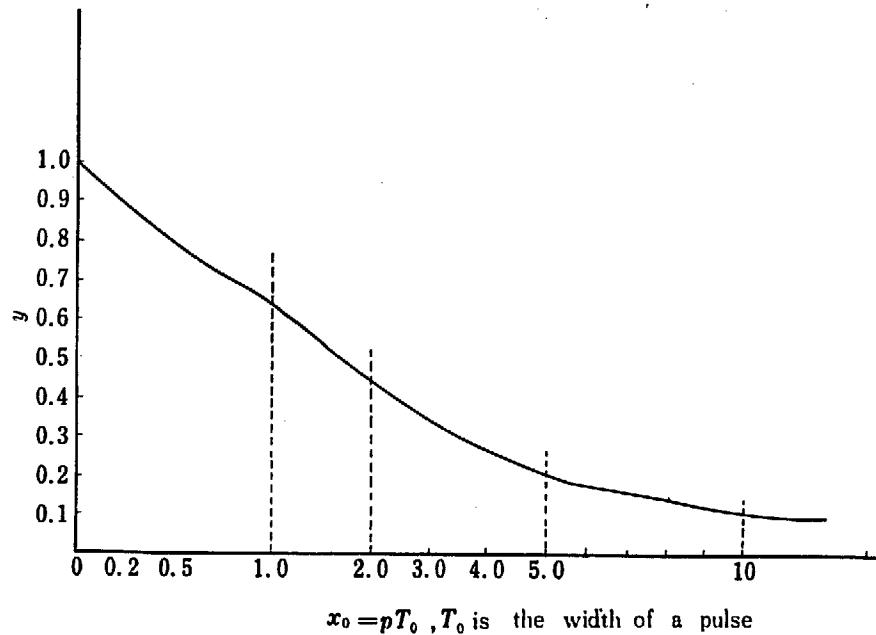


Fig. 3 Relation between $y = \frac{n_e (U_e(x_0) - U_0)}{(n_e + n_m) (U_\infty(x_0) - U_0)}$
 Maximum energy which all electrons get
 Energy which goes through all volume of the gas
 and width of a pulse, $T_0 x = pt$, $p = v(1+f)$

実際問題として、放電をあまり短い時間にすることは技術的にも問題があるのみならず、放電開始に必要な時間が存在するので適当な値を選ばなければならない。放電の開始時間はのもの計算で求めてある。だいたいの大きさは電圧とガス圧力、初期の電子密度に依存するが、マイクロ秒からミリ秒の間にとることができる。

y の値は、電子系全体がとることのできる最高の値を、放電に加えた全エネルギーで除した量であるから、当然 1 よりも小さいが、1 箇当たりの電子の温度の上昇は、 y/f で与えられるので、 U_∞ にくらべてきわめて高い値をとる。 f の値は電子密度の中性原子密度に対する割合であるから、たね原子の電離度 α と、たね原子を加えた割合 ϵ の積 $f = \alpha\epsilon$ で与えられ、一般に $10^{-4} \sim 10^{-3}$ の低い値である。

したがって、電子温度は原子温度にくらべて、100~10000 倍も高められ、これらの電子は原子を十分にイオン化することができる。

放電の時間をあまり長くとると、流れていらないガスの場合には電子温度の上昇にくらべて、ガス全体の温度上昇がしだいに増加してゆくから有効性は減少してゆく。ガスが速い速度で運動している際には加熱時間も短くなるので、放電電極時間をガスが通過するに要する時間とあわせて考えるべきである。

ガスの流速は一般に 1000 m/s 程度と考えられるから、流路に沿う長さ 10 cm 程度の放電電極時間を通過する時間は 10^{-4} sec で、これよりも短い時間放電をかけることが望ましい。したがって、このように短

い時間毎隔の放電をくり返して用いることができるためには、放電が定常になるまでの時間内と電子増倍の状態、またそれによる電離度の上昇、電離度の上昇による定常状態になったときのガスの導電率の上昇、それらに要する時間はどのくらいかを知ることが必要になる。この計算については、再結合を考慮して「3 電場中の非平衡電離」以下に示す。

2.5 緩和時間の数値例

1箇の電子が多くの中性原子と弾性衝突をおこないながら、エネルギーを失ってゆく割合を定める意味での緩和周波数 ν_{em} は、CRAVATH¹⁾によって与えられている。すなわち、

$$\tau_{\text{em}} = 1/\nu_{\text{em}} = (M/2m)^{3/2} / (4qn_m) (\pi m/8kT_e)^{1/2} \quad (21)$$

なお、この式は collision cross section q がエネルギーに対して一定であるような領域で導かれている。 M は中性原子の質量、 m は電子質量である。

数値例

(i) He+ ϵ K、または He+ ϵ Cs について。 ϵ は加えたたね原子の原子数での割合を示す。

$$T = 1800^{\circ}\text{K}, p = 1000 \text{ mmHg}.$$

ϵ の値としては、S. WAY²⁾ の最適値をとる。このとき、He+ ϵ (seeding) に対しては

$$q = 2q_{\text{He}} \quad \text{と書くことができるので*},$$

$$q = 1.13 \times 10^{-19} \text{ m}^2$$

$$T_e = 1800^{\circ}\text{K} \text{ とすると},$$

$$\therefore \tau_{\text{em}}(\text{He}) = 1.57 \times 10^{-8} \text{ sec} [\text{seeding の種類によらない。}] \text{ また, } T_e \text{ が } 1800^{\circ}\text{K} \text{ まで上昇すれば, } \tau_{\text{em}} = 4.97 \times 10^{-9} \text{ sec.}$$

(ii) Ar+ ϵ K または Ar+ ϵ Cs

$$p = 1000 \text{ mmHg}, \quad T = 1800^{\circ}\text{K} = T_e$$

optimum seeding のとき、

$$\tau_{\text{em}}(\text{Ar}) = 2.55 \times 10^{-6} \text{ sec}$$

一方、電子一イオンの緩和時間は SPITZER³⁾ によって、

$$\tau_{\text{ei}} = 1/\nu_{\text{ei}} = (M_i/2m) \frac{6\sqrt{2}\sqrt{m}\epsilon_0^2(\pi k T_e)^{3/2}}{n_i e^4 \ln(12A)} \quad (22)$$

$$A = \frac{\pi(k T_e \epsilon_0)^{3/2}}{e^3(n)^{1/2}} \quad (23)$$

で与えられている。

例

(i) He の場合、 1800°K , 1000 mmHg ,

$$n_i = n_e = \alpha \epsilon n_m = 0.59 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

ただし、 $\alpha = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-3}$ と仮定

$$\tau_{\text{ei}} = 1.60 \times 10^{-3} \text{ sec}$$

(ii) He を 2500°K , 1000 mmHg としたとき、 q は前と同じと仮定すると、

* $q = (1-\epsilon)Q_0 + \epsilon Q_s$ Q_0 : He の衝突断面積 Q_s : seeding 原子の衝突断面積 Saha による Optimum ϵ としては、

$$\epsilon_{\text{opt.}} = \frac{Q_0}{Q_s - Q_0}$$

この $\epsilon_{\text{opt.}}$ によって、 q の値は、

$$q = \frac{Q_s}{Q_s - Q_0} Q_0 + \frac{Q_0 Q_s}{Q_s - Q_0} = \frac{2Q_0 Q_s}{Q_s - Q_0}$$

$Q_s \gg Q_0$ として、

$$q = 2Q_0$$

$$\tau_{\text{em}} = 1.85 \times 10^{-8} \text{ sec}$$

$$\nu_{\text{el}} = 3.77 \times 10^{-5} \text{ sec} \quad \text{となる。}$$

2.6 電子に加えられるエネルギーの値

イオンおよび中性原子の運動速度は、電子の速度 v にくらべて小さいので、相対速度は v のみとみなす。電子がイオンまたは中性原子と衝突して運動量を失なう割合を

$$m\nu_e v$$

とおく。付録 I の取扱いによって、

$$ds/dt = \frac{e^2 |E_0|^2 (1/\nu_e)}{2 m \{1 + (\omega/\nu_e)^2\}} \quad (24)$$

前と同様に、この ν_e には electron-molecule, electron-ion の両 collision が含まれるから、

$$\nu_e = \nu_{\text{el}} + \nu_{\text{em}} \quad (25)$$

と書くことができる。(25) の ν_{el} , ν_{em} は、energy relaxation time τ_{el} , τ_{em} と次の関係にある。ただし ν_{el} と τ_{el} の関係は、数値的に少し相違する表示のとり方があるが、いずれにしても大した違いはない¹⁾

$$\begin{aligned} \nu_{\text{em}} &= (M/2m) 1/\tau_{\text{em}} \\ \nu_{\text{el}} &= (M_i/2m) 1/\tau_{\text{el}} \end{aligned} \quad (26)$$

したがって、たとえば数値例 (i) の He の値を用いると、

$$\nu_{\text{em}} = 5.78 \times 10^{11} \text{ sec}^{-1}$$

となる。もちろん、He, 1000 mmHg, 1800°K では $\nu_{\text{el}} \ll \nu_{\text{em}}$ となり $\nu_e \approx \nu_{\text{em}}$ とかいてよい。

ν_e にくらべてはるかに低い周波数の電場のときには、 $(\omega/\nu_e)^2 \ll 1$ であるから、(24) は、

$$ds/dt = \frac{e^2 |E_0|^2}{2 m} \frac{1}{\nu_e} = 1.41 \times 10^{-8} \frac{|E_0|^2}{\nu_e} \text{ (joules/sec)}$$

Argon の例について結果を整理しておくと次表のようになる。

TABLE 1 Examples of τ_{em} , ν_e and ds/dt of Argon at 1800°K

	1000 mmHg	100 mmHg
$\tau_{\text{em}} = 1/\nu$	$2.55 \times 10^{-6} \text{ sec}$	$2.55 \times 10^{-5} \text{ sec}$
ν_e	$1.44 \times 10^{10} \text{ sec}^{-1}$	$1.44 \times 10^{-9} \text{ sec}^{-1}$
ds/dt	$0.98 \times 10^{-18} E_0 ^2$	$0.98 \times 10^{-17} E_0 ^2$

3 電場中の非平衡電離

熱平衡にあるガスに突然電場 \mathbf{E} を印加したとき、熱電離で存在していた電子・イオンが加速され始める。電子・イオン・中性原子のエネルギーが \mathbf{E} と時間により、どのように変化してゆくかは前に調べた。ここでは電子・イオンの数が \mathbf{E} と時間に対してどのように変化してゆくかを調べる。

一般に電場内での電子のエネルギー分布は、熱平衡の場合と著しく異なる。突然電場を印加された熱平衡ガスは、ある条件下では時間とともに熱平衡状態から離れ、一定の時間経過するとエネルギー的に安定な状態に落着くものと思われる（グロー放電）。また、ある条件下では始めのうちは熱平衡から離れるが、時間が経過すると始めの状態とは異なった別の熱平衡状態に落着く（アーク放電）。

筆者らの興味のあるのはいずれにしても、非熱平衡にあるときの電離で生ずる（電離）電子の生成速度である。それを知るために非熱平衡状態での電子のエネルギー分布を求めなければならない。分布式は以前より多数の人達により BOLTZMANN の輸送方程式をいろいろな条件下で解くことにより得られている。

分布式を用いて電離速度を求めた後、再結合係数を考慮に入れて電離電子数の時間的変化を求める。電離度の時間変化より電離度飽和時間・最適電場電離条件などを調べる。

最後に数値計算例として G. E. の実験⁴⁾ 条件 (He+Cs) の数値を代入し、ここでの方法と実験結果がかなり良く一致していることを確認する。

3.1 電子のエネルギー分布式

電場内の電子のエネルギー分布式は、種々の条件のもとで BOLTZMANN の輸送方程式を解くことによって得られる。もちろん、場合によっては MAXWELL 分布（アーク放電の場合）であり、また、場合によっては筆者らの興味のある非熱平衡の場合となり、その解は種々の条件下で近似的にえられている^{5), 6), 7)}。

ここでは 5) と 6) の解を用いる。

いま、電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ 中での電離電子の速度分布 $f(\mathbf{v}, \mathbf{r})^*$ は次式を満足する。（BOLTZMANN 方程式）

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} f + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}}{m} f \quad (27)$$

C は衝突効果を表わす。 $\nabla_{\mathbf{r}}, \nabla_{\mathbf{v}}$ はおのおの配位・速度空間での勾配を表わす。

この方程式は分布関数を速度空間の球間数、時間の FOURIER 級数によって展開して解くことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^{\sigma} (\mathbf{v}, \mathbf{r}) P_{\sigma} (\cos \theta) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} t} \\ &= f_0^0 (\mathbf{v}, \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot (\mathbf{F}_0' + \mathbf{F}_1' e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (28)$$

ただし、最後の式は次の条件下でないと近似式として成立しない。

* この f は電子の数/cm³ と次の関係にある。いま、エネルギー ϵ と $\epsilon + d\epsilon$ にある電子数を $n_{\epsilon}(\epsilon) d\epsilon$ とすると、 $n_{\epsilon}(\epsilon)$ は、

$$n_{\epsilon}(\epsilon) \propto \frac{1}{\epsilon^{1/2}} f$$

- (1) 電子の平均自由距離は常に系の大きさより小である。
- (2) 周期 ω の間に電子はそれほどそのエネルギーを変化しない*。
- (3) 半周期の間に電子は系外へ飛び出さないほどその平均運動は小さい**。

3.1.1 DRUYVESTEYN 分布⁵⁾

次の条件・仮定下で求められた分布を DRUYVESTEYN 分布と呼ぶ**。

- (1) 電子と原子との衝突は弾性衝突だけである。
- (2) 電場は一定で電子が自由距離当たりにうるエネルギーはそのときもっているエネルギーに比し充分小さい。
- (3) 電流密度は一定である。すなわち、電子密度は一定とする。
- (4) イオンの存在は無視できるとする。

エネルギー ϵ と $\epsilon + d\epsilon$ の間にある電子数を $n_e(\epsilon)d\epsilon$ とすると、分布式は、

$$\begin{aligned} n_e(\epsilon)d\epsilon &= n_e \cdot \frac{2 \Gamma(5/4)^{3/2}}{\Gamma(3/4)^{5/2}} \frac{\epsilon^{1/2}}{\bar{\epsilon}^{3/2}} \bar{\epsilon} \left(\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \right)^2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}} \right)^2 d\epsilon \\ &= n_e \cdot 2 \times 0.5196 \frac{\epsilon^{1/2}}{\bar{\epsilon}^{3/2}} \bar{\epsilon}^{0.545} \left(\frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}} \right)^2 d\epsilon \end{aligned} \quad (29)$$

ただし、 $n_e = \int_0^\infty n_e(\epsilon)d\epsilon$: 電子密度

ϵ : 電子のエネルギー

$\bar{\epsilon}$: 電子の平均エネルギー

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \left(\frac{M}{3m} \right)^{1/2} \lambda |e \cdot E| = 0.427 E |e| \lambda \left(\frac{M}{m} \right)^{1/2}$$

E : 電場

e : 電子の電荷

$$\lambda: \text{電子の(弾性衝突)平均自由距離} = \frac{1}{\sum Q_n}$$

n : 原(分)子の数/cm³

Q : 衝突断面積

m : 電子質量

M : 中性原(分)子質量

3.1.2 HOLSTEIN 分布

電子が非弾性衝突をおこなっているときの分布であり、次の仮定・条件のもとに求める***。

- (1) イオン、電子、および、励起原(分)子の数は基底状態の中性原子の数に比し少ない。
- (2) 電子一原(分)子弾性衝突断面積は非弾性衝突断面積に比し大きい。
- (3) 電子の自由距離は放電管の大きさより非常に小さい。
- (4) 交流電場の場合には、その周波数は次の条件を満すこと。

$$\frac{\omega}{2\pi} \gg \text{励起 ひん度}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \gg \text{電離 ひん度}$$

$$\omega \gg v/\text{electrode spacing}$$

* この仮定は交流電場の場合である。

** 热平衡にあったガスに電場を印加して、電離度の時間的変化を見ようといういまの問題では、(1), (3) の仮定のもとで解かれた分布式は適当でないが、HOLSTEIN 分布との比較の意味で用いた。電場が弱いときにはよい近似になっているようである。(p.23 参照)

*** 直流電場の場合の解は交流電場の場合の解で、 $\omega=0$ としたものに等しい。なお、その場合には(4) の条件は不要である。

- (5) 弹性衝突断面積は電子エネルギーに無関係で一定とする。
 (6) 非弹性衝突断面積は、ある電子エネルギー以下では 0 でそれ以上では階段的に一定の 0 以上の値とする。

このような条件下では BOLTZMANN 方程式は次のように近似される*.

- (a) 電子は非弹性衝突でその全エネルギーを失うとすると、

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z \left(\frac{1 + \omega^2 \lambda^2 / u_1}{1 + \omega^2 \lambda^2 / u_1 z} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \right\} + \frac{2 m \gamma^2}{MK} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 f) \\ + \gamma^2 \left\{ \delta(z) \int_1^\infty z' f(z') dz' - S(z-1) z f(z) \right\}^{**} \quad (30)$$

- (b) 電子は非弹性衝突で第一次励起エネルギーだけを失うとすると、

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z \left(\frac{1 + \omega^2 \lambda^2 / u_1}{1 + \omega^2 \lambda^2 / u_1 z} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \right\} + \frac{2 m \gamma^2}{MK} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 f) \\ + \gamma^2 \{ (z+1) f(z+1) - S(z-1) z f(z) \} \quad (31)$$

ただし、

$$f = z^{-1/2} n_e(z) / R$$

R = 規格因子

$$z = \frac{\epsilon}{\epsilon_1}, \quad z_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}$$

ϵ_1 = 第一次励起エネルギー

ϵ_1 = 第一次電離エネルギー

$$\gamma = \frac{u_1}{a_0 \lambda} \left(\frac{3K}{2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\omega^2 \lambda^2}{u_1} \right)^{1/2}$$

$$K = \frac{Q_{inelastic}}{Q_{elastic}}$$

$$u_1 = (2/m) \epsilon_1$$

$$a_0 = |e| E_0 / m$$

$$E = E_0 \cos \omega t \text{ (電場)}$$

$$S(z) = \int_{-\infty}^z \delta(z') dz'$$

以上の基本式の導出は文献 6) に述べられている。

(a), (b) 2 式ともそのまま解くのはきわめて困難である。そこで、特別な場合のみの解を示す。

(1) $\omega^2 \lambda^2 / u_1 \ll 1^{***}$, $2 m \gamma^2 / MK \ll 1$ の場合 (Fig. 4 (a))

$z \geq 1$ で

$$f = \frac{k_0(\gamma z)}{k_0(\gamma)} \quad (32)$$

$\gamma \geq 0.5$ では次のように近似できる。

$$f = e^{-(\gamma+1/2)(z-1)} \quad (33)$$

$z \geq 1$ のときには (a), (b) によってその解は異なる。

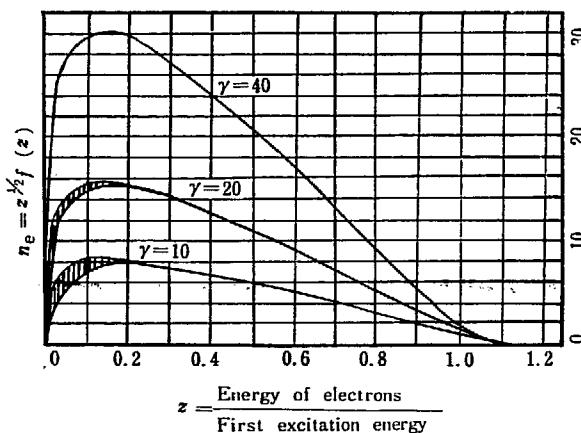
(a) の場合、

$$f = 1 + (\gamma + 1/2) \log z^{-1} \quad (34)$$

* (a), (b) といふ二つの仮定は実際の場合の両極端となっていると思われる。

** 直流電圧を印加した場合には、 $\omega = 0$ として γ の中に現われる a_0 の代りに $\sqrt{2} a_0$ をとれば、そのまま BOLTZMANN 方程式が成立することが証明される。

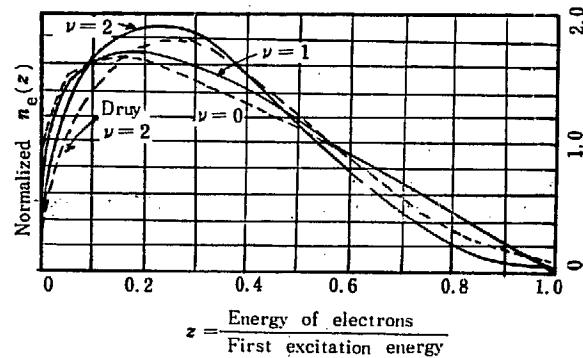
*** あとで見るよう普通の場合、この条件は電子一中性(分)子の衝突周波数程度以下なら成立する。すなわち、気圧が比較的高い場合にはかなり高周波までこの条件が成立する。



The functions for (33), (34) and (35) are plotted for $\gamma = 10, 20$ and 40 . For each value of γ the upper curve is (34).

The scale is chosen so that all the functions have the same values at $z=1$

Fig. 4 (a) HOLSTEIN distribution. The case of (1) in p. 12



The functions for (40) and (41) are plotted for $\nu = 0, 1$ and 2 .

$$\nu = \gamma \sqrt{\frac{m}{MK}}$$

Fig. 4 (b) HOLSTEIN distribution. The case of (2) in p. 14

Fig. 4 DRUYVESTEYN and HOLSTEIN energy distributions of electrons (ref 6)

$$(1) \quad \frac{2m\gamma^2}{MK} \ll 1$$

$$(2) \quad \frac{2m\gamma^2}{MK} = \text{order of } 1, \quad \gamma \gg 1$$

In this case, limiting $K \rightarrow 0$, HOLSTEIN distribution becomes DRUYVESTEYN distribution.

(b) の場合,

$$f = 1 + (\gamma + 1/2) \{ \log z^{-1} + E_1(-(\gamma + 1/2)z) - E_1(-\gamma + 1/2) \} + e^{-(\gamma + 1/2)} - e^{-(\gamma + 1/2)} \quad (35)*$$

$$\text{ただし, } E_1(x) = \int_{-\infty}^x -\frac{e^x}{x} dx$$

Fig. 4 (a) に見るように (a), (b) の違いは、 γ が大となるとほとんどなくなる。そこで lower estimate という意味で、今後 (a) の場合だけについて議論を進めるが、実際の現象とそれほどかけ離れた結果がでてくるとは思えない。

次に規格因子 R を求める。

$$R = \frac{n_0}{\int_0^\infty z^{1/2} f(z) dz} = \frac{n_0}{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 t + \frac{1}{t} \left(1 + e^t \sqrt{\frac{\pi}{t}} N(\sqrt{2t})\right)} \quad (36)$$

$$\text{ただし, } t^{**} = \gamma + \frac{1}{2}$$

$$N(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

また、平均エネルギー \bar{z} は

* (32), (35) 式の導出までは文献 6) に述べられていて、こゝでは γ の適用はんいの数値を定めて以下計算をすゝめた。

** この t は時間を表わす t とは異なる。

$$\bar{z} = \frac{\int_0^\infty z^{3/2} f(z) dz}{\int_0^\infty z^{1/2} f(z) dz} = R' \left[\frac{2}{5} \left(1 + \frac{2}{5} t \right) + \frac{1}{t} \right] \left\{ 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} \left(1 + e^t \sqrt{\frac{\pi}{t}} N(\sqrt{2}t) \right) \right\} \quad (37)$$

$$\text{ただし, } R' = \frac{R}{n_e}$$

$t \geq 3$ では次の式で充分近似できる。

$$z = \frac{\frac{2}{5} \left(1 + \frac{2}{5} t \right) + \frac{1}{t}}{\frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{3} t \right) + \frac{1}{t}} \quad (38)$$

さらに, $2m\gamma^2/MK \ll 1$ が成立する範囲で t を大きくしてゆけば, 平均エネルギーは,

$$\bar{z} \rightarrow 0.360 \quad (\bar{z} = \bar{e}/\varepsilon_1) \quad (39)$$

(2) $2m\gamma^2/MK$ が 1 の order, $\gamma \gg 1$, $\omega^2 \lambda^2/u_1 \ll 1$ Fig. 4 (b)

$$z \geq 1 \quad f(z) = e^{-z} (z-1) \quad (40)$$

$$z \leq 1 \quad f(z) = e^{-\gamma^2(z-1)} + 1/2 (\gamma + 1/2 - \nu^2) e^{-\gamma^2 z^2} \cdot \{ E_1(\nu^2) - E_1(\gamma^2 z^2) \} \quad (41)$$

$$\text{ただし, } \nu^2 = m\gamma^2/MK, \quad S = \gamma + \frac{1}{2} + \nu^2$$

R' の決定

R' を求める際に次の積分が現われる。

$$I = \int_0^{\nu^2} t^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} \log t - \log \nu \right) e^{-t} dt = \int_0^{\nu^2} F(t) dt \quad (42)$$

I を求めるため Integrand $F(t)$ を次のように近似する。

t の区間	$F(t)$
$[0, 0.5]$	$e^{-\frac{0.5}{2}} t^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} \log t - \log \nu \right)$
$[0.5, e]$	$e^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1+0.5}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+0.5}{2} - \log \nu \right)$
$[1, e]$	$e^{-1} \left(\frac{1+e}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} \log \frac{e+1}{2} - \log \nu \right)$
$[e, \nu^2]$	$e^{-t} \left(\frac{e+\nu^2}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} \log \frac{\nu^2+e}{2} - \log \nu \right)$

このように近似すると R' は次のように求まる。

$$R' = \frac{1}{A \nu^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} I^{(1)}_{11} + \log \nu I^{(2)}_{11} \right) + I_{12} + I_2 + I_3} \quad (43)$$

$$\text{ただし, } A = 1/2 \left(\gamma + \frac{1}{2} - \nu^2 \right)$$

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{11} &= 4/3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{4}{3} - \log 2^{-1} \right) + \log 0.75 \cdot 0.75^{-\frac{1}{4}} \cdot (e^{-1} - e^{-\nu^2}) \\ &\quad + \left(\frac{1+e}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \log \frac{1+e}{2} (e^{-e} - e^{-1}) + \left(\frac{e+\nu^2}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \log \frac{e+\nu^2}{2} (e^{-\nu^2} - e^{-e}) \\ I^{(2)}_{11} &= -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{4}} + 0.75^{-\frac{1}{4}} (e^{-0.5} - e^{-1}) + \left(\frac{1+e}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} (e^{-1} - e^{-e}) \\ &\quad + \left(\frac{e+\nu^2}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} (e^{-e} - e^{-\nu^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \frac{A}{2} \nu^{-\frac{3}{2}} \left[e^{-0.5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nn!} \left(\frac{4}{3} \nu^{2n} - \frac{1}{n + \frac{3}{4}} \right) + (e^{-1} - e^{-\nu^2}) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\frac{1+\nu^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nn!} \left\{ \nu^{2n} - \left(\frac{1+\nu^2}{2} \right)^n \right\} \right] \\
I_2 &= \frac{1}{2} \nu^{-\frac{3}{2}} e^{-\nu^2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4}} + 0.75^{-\frac{1}{2}} (e - e^{0.5}) + \left(\frac{1+e}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} (e^e - e) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{e+\nu^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} (e^{\nu^2} - e^e) \right] \\
I_3 &= \int_1^{\infty} e^s z^{1/2} e^{-sz} dz = \frac{1}{s} \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^s \cdot N(\sqrt{2s}) \right) ** \\
\end{aligned}$$

同様な近似方法で平均エネルギー \bar{z} は,

$$\bar{z} = \frac{A \nu^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} I^{(1)}_{11} + \log \nu I^{(2)}_{11} \right) + I_{12} + I_2 + I_3}{A \nu^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2} J^{(1)}_{11} + \log \nu J^{(2)}_{11} \right) + J_{12} + J_2 + J_3} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
\text{ただし, } J^{(1)}_{11} &= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5} - \log \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1}{4}} + \log 0.75 \cdot 0.75^{\frac{1}{4}} \cdot (e^{-1} - e^{-0.5}) \\
&\quad + \left(\frac{1+e}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \log \frac{1+e}{2} (e^e - e^{-1}) + \left(\frac{e+\nu^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \log \frac{e+\nu^2}{2} (e^{-\nu^2} - e^{-e}) \\
J^{(2)}_{11} &= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{5}} e^{-\frac{1}{4}} + 0.75^{\frac{1}{4}} (e^{-0.5} - e^{-1}) + \left(\frac{1+e}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (e^{-1} - e^{-e}) \\
&\quad + \left(\frac{e+\nu^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (e^{-e} - e^{-\nu^2}) \\
J_{12} &= \frac{A}{2} \nu^{-\frac{3}{2}} \left[e^{-0.5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nn!} \left(\frac{4}{5} \nu^{2n} - \frac{1}{n + 5/4} \right) \right. \\
&\quad \left. + (e^{-1} - e^{-\nu^2}) \cdot \left(\frac{1+\nu^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nn!} \left\{ \nu^{2n} - \left(\frac{1+\nu^2}{2} \right)^n \right\} \right] \\
J_2 &= \frac{1}{2} \nu^{-\frac{3}{2}} e^{-\nu^2} \left[-\frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4}} + 0.75^{\frac{1}{2}} (e - e^{0.5}) + \left(\frac{1+e}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (e^e - e) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{e+\nu^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (e^{\nu^2} - e^e) \right] \\
J_3 &= \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{s} \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^s N(\sqrt{2s}) \right) \right\} ***
\end{aligned}$$

(3) $2m\nu^2/MK$ が、1の order, あるいはそれ以上で r と同程度のとき、またかつ、 $(\omega\lambda)^2/u_1 \ll 1$ この場合もとの BOLTZMANN 方程式は次のようになる。

$$f''(z) + (z^{-1} + 2\nu^2 z) f'(z) - (\nu^2 - 4\nu^2) f(z) = 0 \quad (45)$$

これも直接解くより次の近似で求める。

f は $z = 1$ より z が大のところでは急激に減少するから、先ず、(45) 式で $z = 1$ とおくと、

$$f'' + (1 + 2\nu^2) f' (\nu^2 - 4\nu^2) f = 0 \quad (46)$$

$f = e^{-a'_1}(z-1)$ とおいて (46) 式に代入すると、

$$a'_1 = \frac{1 + 2\nu^2 + \sqrt{(1 + 2\nu^2)^2 + 4(\nu^2 - 4\nu^2)}}{2} \quad (47)$$

(45) 式で $2\nu^2$ は 1 に比しかなり大きいこともあるので、 z の少しの変化でも f' の係数の $(z^{-1} + 2\nu^2 z)$

* I の近似を求めるときに用いた近似は $\nu^2 > e$ と仮定した。 $\nu^2 < e$ のときは適宜適当なところで変数区間を打切り。

** $\nu^2 \gg 1$ のときには R' に寄与するものは I_{12} の ν^{2n} を含む級数だけとしてよい。

*** この場合にも $\nu^2 \gg 1$ の場合には I_{12}, J_{12} の ν^{2n} を含む級数だけとみなしてよい。

は大きく変化する。そこで f が $\frac{1}{e}$ になるとところの z でこの係数の z をおきかえると、

$$z = 1 + \frac{1}{a'_1} \quad (48)$$

すなわち、

$$f'' + \left(\frac{1}{1+a'^{-1}} + 2\nu^2(1+a'^{-1}) \right) f' - (\gamma^2 - 4\nu^2) f = 0 \quad (49)$$

$f = e^{-a'_2(z-1)}$ とおいて (49) 式に代入して、

$$a'^2 = \frac{1+2\nu^2(1+a'^{-1}) + \sqrt{(1+2\nu^2)(1+a'^{-1})^2 + 4(\gamma^2 - \nu^2)}}{2} \quad (50)$$

以下順次この操作をくり返し a'_n の極限値 a' を求める。この a' を (2) の s のかわりに用いると (2) の議論がそのまま成立する。すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} a' \rightarrow s \\ a' - 2\nu^2 \rightarrow A \end{array} \right\} \text{とおくと (2) の } R'_1 \bar{z} \text{ の式がそのまま成立する。}$$

以上の HOLSTEIN 分布の場合には、いずれも $z \geq 1$ に対しては n_e は次の型になる。

$$n_e = R z^{1/2} e^{-k(z-1)} \quad (51)$$

したがって、 $z \geq 1$ で \bar{z} を求めると

$$\bar{z} = \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{1}{k} \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^k N(\sqrt{2k}) \right)}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^k N(\sqrt{2k})} \quad (52)$$

k が 1 より比較的大きい場合には、

$$\bar{z} \approx 1 + \frac{1}{k} \quad (53)$$

すなわち、 k が大きくなると (1 の数倍程度でよい) $k \geq 1$ での平均エネルギーは 1 よりわずかだけ大きいところにある。すなわち、 $k \geq 1$ では分布関数は急激に減る。

3.2 電離速度

熱平衡にあるガス中には多少にかかわらず電離電子が必ず存在している。いま、この熱平衡状態のガスにある時刻に急激に電場を印加すると、電離電子は加速される。中性原子の電離エネルギー以上になって、その原子に衝突すると一定の確率で電離を起すようになる。すなわち、電離の α 作用といわれるものを営むようになる。このような電場中の電離電子の電子数の増倍の模様については、TOWNSEND らにより半経験的、かつ定量的に取り扱われており、電場の強さ、ガスの圧力および電流密度の間の関係がかなりはっきりしている。しかし、このような取扱いはすべて時間的には定常的な場合に限られていたようである。すなわち、例えば一定圧力のガス中で両極間の電圧を変化してゆく場合に、電圧と電流の間の関係を知るには非常に役立つ。

ここでは、これと違つて電場印加とともに電子数が時間的にどのように増加していくかを定量的に取り扱う。MHD 発電機の場合に問題になるのは、どのようなガス・圧力・温度に対して何秒後にどのくらい電離電子数が増加するかである。結局非定常電離の問題であり、前に求めた電子のエネルギー分布式は使えないようと思われる。しかし、よく考えてみると、エネルギー分布式は主に電子一中性原子の衝突（エネルギー輸送）によって定まる。一方、電離は電子一中性原子の電離衝突によって生ずる。ところが、一般にはエネルギー輸送衝突に比し電離衝突は、無視できる程度のひん度でしか起っていない*。すなわち、前に求めた分布式は電離によって増加する電子の効果を補正しなくとも、規格因子の n_e に時間因子を入れることによりそのまま使えるとみなして差支えない。

実際には電離した電子（イオン）は陽極（陰極）へ向って流れ、空間電荷を形成する。そのために放電管

中の電場は印加したものと著しく異なるであろう。また、イオンの陰極への衝突により二次電子が放出されることがわかっている (γ 作用)。

しかし、ここでは、放電のごく初期の状態を調べるので直流電圧印加の場合でも交流電圧の場合のように電子による大きな空間電荷はまだ形成されていないと仮定する**。また、 γ 作用もこれを無視できるものとする***。

前に求めた電子のエネルギー分布式は、電場印加から電子一中性原子のエネルギー輸送衝突時間の数倍程度以降で成立すると考えられるので、それ以後の（普通 $1 \mu \text{ sec}$ 以下）単位体積、単位時間に電離により生ずる電子の数は次式で与えられる。ただし、式中の $n_e(\varepsilon)$ は DRUYVESTEYN、または HOLSTEIN の分布式を使えばよい****。

$$\frac{dn_e}{dt} = \sum_j \int_{\varepsilon_{1j}}^{\infty} n_{sj} Q_{ij} v_e n_e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (54)$$

n_{sj} : j 番目の中性原(分)子の数/cm³

n_e : 電子の数/cm³

$n_e(\varepsilon) d\varepsilon$: 電子の ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ のエネルギー間にある数/cm³

ε : 電子のエネルギー

ε_{1j} : j 番目の原(分)子の(第1次)電離エネルギー

Q_{ij} : j 番目の原(分)子の電子に対する(第1次)電離衝突断面積 cm²

v_e : 電子の速さ cm/sec

(54) 式の右辺の積分は、 Q_i の ε に対する変化がわからないとできない。普通の場合、 $Q_i(\varepsilon)$ の曲線は ε_1 より直線的に 0 より増加し、ある点で極大となり、その後は増加と減少をくり返しながら減少していく。アルカリ原子の場合には、 ε_1 より 15~30 eV まで直線とみなしてさしつかえない (Fig. 5 参照)。それ以上ではむしろ減少するので Q_i としても減少するような近似を採用する方が望ましい。しかし、 $n_e(\varepsilon)$ の分布関数は前に見たように ε_1 (第1次励起エネルギー) 以上では急激に減少し、 Q_i が直線のままでも ε の大きいところではほとんどきいてこない。そこで、 Q_i としては次の近似式を採用する。

$$Q_i = \bar{Q} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) = \bar{Q} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right) \quad (55)$$

3.2.1 DRUYVESTEYN 分布の場合の電離速度

今後簡単のために (54) 式の j は 1だけ、すなわち、一成分のガスとする。(29) 式および (55) 式を (54) 式に代入すると、

$$\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dt} = n_s \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \bar{Q} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{m}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} (0.5196 \times 2) \cdot \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{3/2}} e^{-0.548 \left(\frac{\varepsilon}{x_1} \right)^2} d\varepsilon \quad (56)$$

いま、 $x = \sqrt{0.548} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ $x_1 = \sqrt{0.548} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ とおくと、

$$* \frac{\text{電離衝突数/cm}^3}{\text{エネルギー輸送衝突/cm}^3} \approx \frac{v_0 n_s \int Q_i n_e(\varepsilon) d\varepsilon}{v_0 n_s \frac{2m}{M} \int Q_s n_e(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{M}{2m} \frac{\int Q_i n_e d\varepsilon}{\int Q_s n_e d\varepsilon} \quad \text{ところが、例えば Fig. 5}$$

に見るように電子の大部分を占める中性原子の電離エネルギー(数 eV 以上)以下では $Q_i = 0$ となり、 $\int Q_i n_e d\varepsilon \ll \frac{2m}{M} \int Q_s n_e d\varepsilon$ となりこの条件が成立する。

** 電場中の電子の移動速度、平均自由距離および後で求める電離度飽和時間より推定してこの仮定はここでの取扱いでは正しいと思われる。

*** 3.3 で見るように電子・イオンの再結合はあとで考慮に入れる(ただし管壁との再結合は考えない)。

**** 二分布共電離衝突は無視できるとして求めたものである。とくに DRUYVESTEYN 分布では励起衝突も起らないという仮定になつてないので、その点実際のものと様子は異なつてゐるかも知れない。しかし、電場がいまの場合のように比較的弱い場合には、電子は大部分中性原子の第1次励起エネルギー以下にあると考えられるので、実際の分布と極端に異なつた分布になつてゐるとは考えられない。

$$\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dt} = n_s \bar{Q} \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{0.5196 \times 2}{0.548} \bar{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \int_{x_1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x_1} - x \right) e^{-x^2} dx \quad (57)$$

ところで、

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{x^2}{x_1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-x_1^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{x_1} N(\sqrt{2} x_1) \quad (58)$$

$$\int_{x_1}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-x_1^2} \quad (59)$$

したがって、 $\bar{\epsilon} = 0.548^{1/2} \epsilon_1/x_1$ とおくと、

$$\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dt} = n_s \bar{Q} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \times \frac{0.5196}{0.548^{3/4}} \frac{\epsilon_1^{1/2}}{x_1^{3/2}} N(\sqrt{2} x_1) \quad (60)$$

ここで、 $m = 9.11 \times 10^{-28}$ g

$1 \text{ eV} = 1.603 \times 10^{-12}$ erg

} (61) の数値を代入すると、

$$\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dt} = 0.855 \times 10^8 \bar{Q} \epsilon_1^{\frac{1}{2}} \frac{N(\sqrt{2} x_1)}{x_1^{3/2}} n_s \quad (62)$$

ただし、この ϵ_1 は eV 単位での数値である。

$$x_1 = \sqrt{0.548} \frac{\epsilon_1}{\bar{\epsilon}} \quad (63)$$

$$\bar{\epsilon} = 0.427 |\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}| \lambda \left(\frac{M}{m} \right)^{1/2} \quad (64)$$

の 2 式より、

$$x_1 = \frac{\sqrt{0.548} \epsilon_1}{0.427 |\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}| \lambda} \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \quad (65)$$

A を原子の原子量とすると、 $\left(\frac{m}{M} \right)^{1/2}$ は、

$$\left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} = \frac{1}{A^{1/2}} \left(\frac{1}{1836} \right)^{1/2} = \frac{1}{42.75} \cdot \frac{1}{A^{1/2}} \quad (66)$$

E : volt/m, λ : m, ϵ_1 : eV 単位で表わすと、

$$x_1 = \frac{\sqrt{0.548}}{0.427} \frac{\epsilon_1}{E \lambda A^{1/2}} \times \frac{1}{42.75} = 4.05 \times 10^{-2} \frac{\epsilon_1}{E \lambda A^{1/2}} \quad (67)$$

となる。

3.2.2 HOLSTEIN 分布の場合の電離速度

次に HOLSTEIN 分布を用いて電離速度を求める。

「3.2.1 DRUYVESTEYN 分布」の場合と同様に一成分ガスの場合 (54) 式は、

$$\frac{1}{n_s} \frac{dn_e}{dt} = \int_{z_1}^{\infty} n_e(z) v_e Q_1 dz \quad (68)$$

ただし、 $z_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1}$

$$n_e(z) = R z^{1/2} e^{-k(z-1)} \quad (69)$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2}{m}} \epsilon_1^{1/2} z^{1/2} \quad (70)$$

において Q_1 の直線近似を用いると (68) 式は次のようになる。

$$\frac{1}{n_s} \frac{dn_e}{dt} = R \bar{Q} \sqrt{\frac{2 \epsilon_1}{m}} e^k \int_{z_1}^{\infty} z \left(\frac{z}{z_1} - 1 \right) e^{-kz} dz \quad (71)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{z_1}^{\infty} \frac{z^2}{z_1} e^{-kz} dz \\ I_2 &= \int_{z_1}^{\infty} z e^{-kz} dz \end{aligned} \quad \left. \right\} (72) \text{ とおく。}$$

$$z_1 I_1 = \int_{z_1}^{\infty} z^2 e^{-kz} dz = -\frac{z_1^2}{k} e^{-kz_1} + \frac{2}{k^2} z_1 e^{-kz_1} + \frac{2}{k^3} e^{-kz_1} \quad (73)$$

$$I_2 = \int_{z_1}^{\infty} z e^{-kz} dz = \frac{z_1}{k} e^{-kz_1} + \frac{1}{k^2} e^{-kz_1} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dn_e}{dt} &= R \bar{Q} e^k \sqrt{\frac{2\varepsilon_1}{m}} \left(\frac{z_1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3 z_1} - \frac{z_1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) e^{-kz_1} n_s \\ &= R \bar{Q} e^{-k(z_1-1)} \sqrt{\frac{2\varepsilon_1}{m}} \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2}{k z_1} \right) n_s \end{aligned} \quad (75)$$

ここで $m = 9.11 \times 10^{-28}$ g とおき ε_1 を eV 単位で表わすと,

$$\frac{dn_e}{dt} = 0.594 \times 10^8 R \bar{Q} n_s \varepsilon_1^{1/2} \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2}{k} \frac{1}{z_1} \right) e^{-k(z_1-1)} = a n_e n_s \quad (76)$$

ただし,

$$a = 0.594 \times 10^8 R' \bar{Q} n_s \varepsilon_1^{1/2} \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2}{k} \frac{1}{z_1} \right) e^{-k(z_1-1)} \quad (77)$$

$$1) \text{ の場合 } k \rightarrow r + \frac{1}{2} \quad (78)$$

$$2) \text{ の場合 } k \rightarrow r + \frac{1}{2} + \nu^2 = S \quad (79)$$

$$3) \text{ の場合 } k \rightarrow a' \quad (80)$$

とおけばよい。

一般に a は時間に無関係な定数で (電離) 生成係数とよぶ。

3.2.3 混合ガスの電離速度

DRUYVESTEYN 分布の場合には, (54) 式で $j = 1, 2, \dots$ とすればよい。しかし, 電子の平均自由距離 λ は次式で求める。

$$\lambda^{-1} = \sum_j n_{sj} Q_{sj} \quad (81)$$

Q_{sj} : 弹性衝突断面積

この λ を使って平均のエネルギーを求める。

HOLSTEIN 分布の場合は少し面倒になる。そのため次の混合ガス模型を考える。

(1) 電子の平均自由距離は DRUYVESTEYN と同じとする。

(2) ガスの平均原子量 A は次式で与えられるとする。

$$A = \frac{\sum_j A_j n_{sj} Q_{sj}}{\sum_j n_{sj} Q_{sj}} \quad (82)$$

(3) $K = \frac{Q_{\text{excite}}}{Q_{\text{elastic}}}$ の値は次のように平均化する。

$j = 1, 2, \dots, r$ 種のガスの内 $j = 1, 2, \dots, f$ 種は第1次励起エネルギーは比較的接近し, かつ, g, \dots, r 種のどのガスよりも, その値は低いとすると, 模型ガスの K は,

$$K = \frac{\sum_{j=1}^f K_j n_{sj} Q_{sj}}{\sum_{j=1}^r n_{sj} Q_{sj}} = \left(\frac{\sum_{j=1}^f K_j n_{sj} Q_{sj}}{\sum_{j=1}^r n_{sj} Q_{sj}} \right) \quad (83)$$

ただし, $K_j = 0$, ($j = f, g, \dots, r$)

特に, He+Cs のように稀ガスにアルカリ原子を添加するような場合には, Cs の ε_1 が He のそれにくらべ極端に低く (TABLE 2 参照) 次のようにおける。

$$K = \frac{n_{\text{Cs}} Q_{\text{Cs}} K_{\text{Cs}}}{n_{\text{Cs}} Q_{\text{Cs}} + n_{\text{He}} Q_{\text{He}}} \quad (84)$$

また, 両分布の場合とも, ε_{1j} は比較的接近した最低の値をもつグループのガス以外はすべて ∞ と考える。

TABLE 2 First excitation energies (ϵ_1), ionization energies (ϵ_i)
and atomic (molecular) weights (A) of the gases
(Loeb; Gaseous Electronics etc.)

ガス	A	ϵ_1 (eV)	ϵ_i (eV)	$z_i - 1$	$\epsilon_i - \epsilon_1$ (eV)
H	1.0	10.16	13.595	0.34	3.46
He	4.0	19.81	24.58	0.240	4.75
Ne	20.2	16.53	21.559	0.300	4.93
A	39.9	11.62	15.755	0.353	4.10
Hg	200.6	4.89	10.434	1.14	5.57
Li	6.9	1.845	5.390	1.82	3.36
Na	23.0	2.11	5.138	1.43	3.02
K	39.1	1.61	4.339	1.69	2.72
Rb	85.5	1.56	4.176	1.68	2.62
Cs	132.9	1.38	3.893	1.82	2.51
C	12.0	1.263	11.264	7.92	10.0
H ₂	2.0	11.47	15.422	0.345	3.96
O ₂	32.0	1.635	12.2	6.47	10.57
N ₂	28.0	5.23	15.576	1.98	10.35
NO	30.0	5.38	9.25	0.720	3.88
H ₂ O	18.0	7.6	12.6	0.660	5.01

$$z_i = \epsilon_i / \epsilon_1$$

Alkali atoms have the large ($z_i - 1$)'s, but the least ($\epsilon_i - \epsilon_1$)'s, so they are very effective in discharge ionization.

電離度の増加とともに中性原子数が減少しイオン数が増加する。ここではそのための電子の平均自由距離の変化はないとする。

(4) 例 1) 次の混合ガスの電離速度*.

ガス He+Cs (120~200°C)

$$\left. \begin{array}{l} n_{\text{He}} = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3 \\ n_{\text{Cs}}/n_{\text{He}} \cong 10^{-4} \end{array} \right\} \quad (85)$$

$$\text{電場の強さ } E = 1, (1.1), 3, 6 \text{ および } 20 \text{ kV/m} \quad (86)$$

以上の外に種々の定数を次のように選ぶ (TABLE 2, Fig. 5, 6).

ただし, $\epsilon_{1\text{Cs}} \ll \epsilon_{1\text{He}}$, $\epsilon_{1\text{Cs}} \ll \epsilon_{1\text{H}_2}$ である。したがって、励起・電離を起すのは Cs 原子だけとする。

$$\left. \begin{array}{l} Q_{\text{He}} = 5.8 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad \epsilon_1 = 1.38 \text{ eV(Cs)} \\ Q_{\text{Cs}} = 400 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad \epsilon_1 = 3.89 \text{ eV(Cs)} \\ Q = 2.3 \times 10^{-16} \text{ cm}^2(\text{Cs}) \end{array} \right\} \quad (87)$$

K_{Cs} の値は測定値がなく不明である。Na の D line の Q_{excite} の値は実測されている (Fig. 5)。Na の $\epsilon_1 \sim \epsilon_1$ 付近での Q_{excite} と Q_{elastic} の比、すなわち, $K_{\text{Na(D)}}$ は, $K_{\text{Na(D)}} \cong \frac{3 \times 10^{-16}}{200 \times 10^{-16}} = 1.5 \times 10^{-2}$ 程度となる。

一方, TABLE 3 より $K_{\text{Na(D)}}$ の maximum は 0.2 となっており上の値よりももちろん大きい。そこで,

$$K_{\text{Cs}} \approx K_{\text{Na}} \approx K_{\text{Na(D)}} \quad (88)$$

と仮定する。実際には次の三つの数値を仮定して計算しておくが、実際の値は (b), (c) の間にはいるものと推定される。

* 文献 4) の実験条件である。

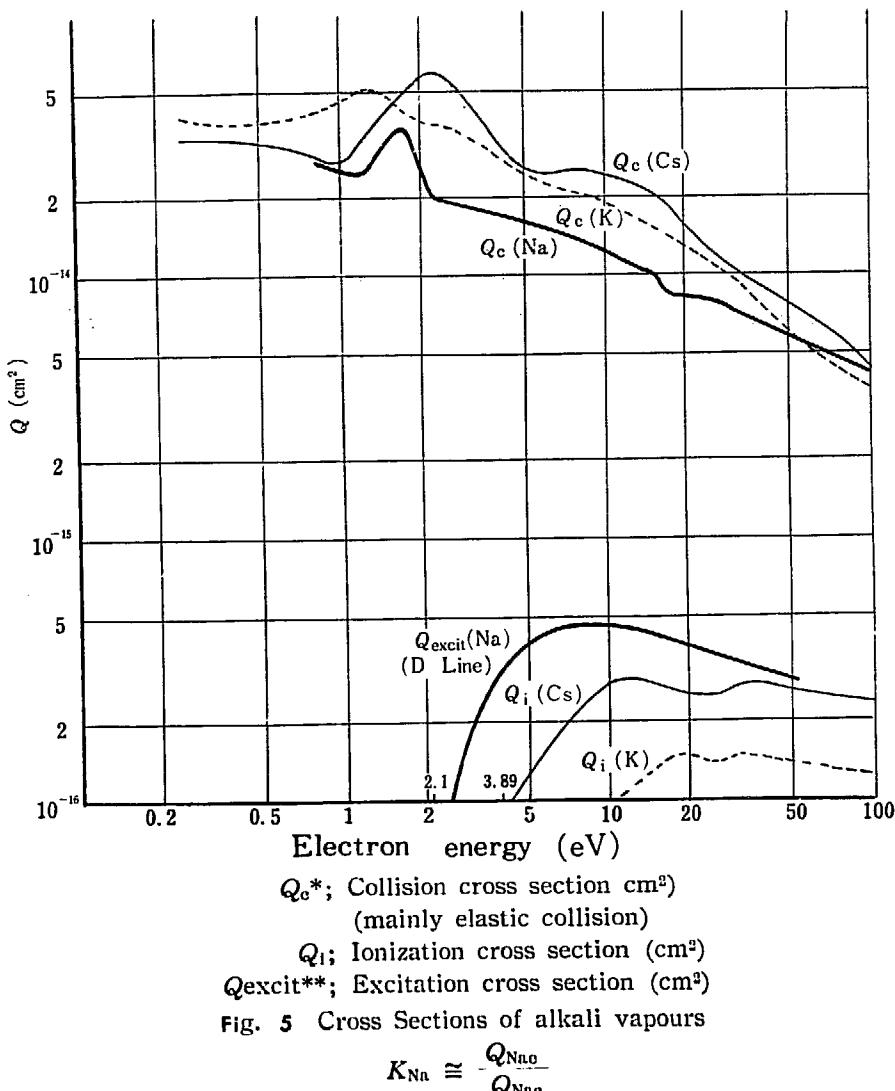


Fig. 5 Cross Sections of alkali vapours

$$K_{\text{Na}} \cong \frac{Q_{\text{Na}0}}{Q_{\text{Nee}}}$$

* Brown; Basic data of Plasma Phys. 96

** Christoph; Ann. Phys. 23, 51, (1935)

$$(a) K_{\text{Cs}} = 1.5 \times 10^{-2} = K \quad (89)$$

$$(b) K_{\text{Cs}} = 0.2 \quad K = \frac{K_{\text{Cs}} n_{\text{Cs}} Q_{\text{Cs}}}{n_{\text{He}} Q_{\text{He}} + n_{\text{Os}} Q_{\text{Os}}} = \frac{K_{\text{Cs}}}{146} = 1.37 \times 10^{-3} \quad (90)$$

$$(c) K_{\text{Cs}} = 0.02 \quad K = 1.37 \times 10^{-4} \quad (91)$$

なお、HOLSTEIN 分布の場合の r , v^2 は次式で求める。

$$r = \frac{\sqrt{3k}\epsilon_1}{E\lambda} \quad (92)$$

$$v^2 = \frac{0.653 \times 10^{-3}}{E^2 \lambda^2} \quad (93)$$

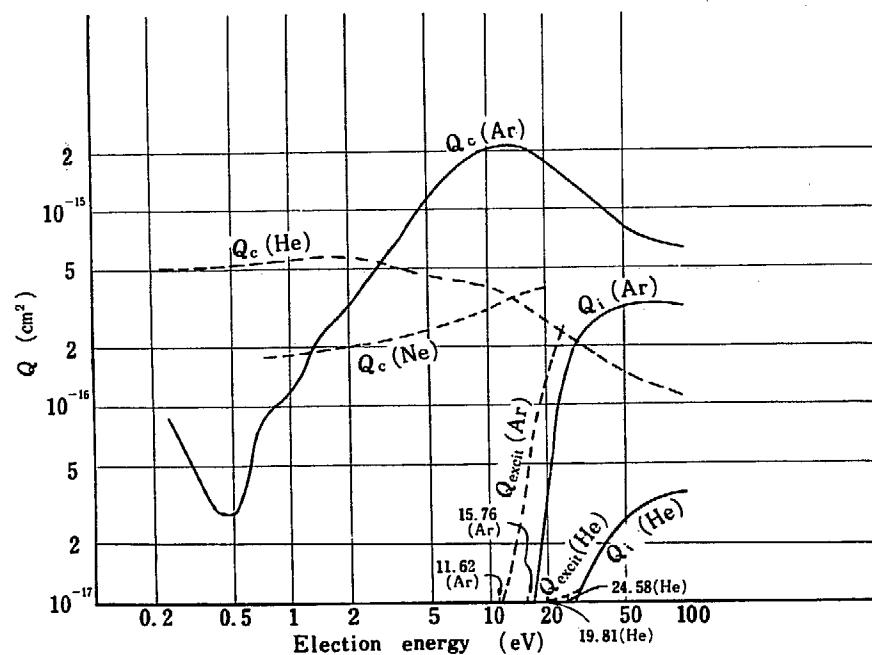
 ϵ_1 : eV, E : volt/m, λ : m

上の値を用いて求めた生成係数* a の値を TABLE 4 に示す。なお、HOLSTEIN 分布の場合与えられた数値では、場合によっては前に示した (1), (2), (3) のうちのいずれかの境界域に $\frac{2m}{M} \frac{r^2}{K}$ が落ちた。その

* 前に求めたように電離速度は分布によらず次の形で表わされた。

$$\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dt} = an_s$$

 a は時間に無関係な定数でこれを生成係数とよぶ。(77) 式



Q_c ; Collision cross section (cm^2)
 (mainly elastic collision)
 Q_i ; Ionization cross section (cm^2)
 Q_{ex} ; Excitation cross section (cm^2)
Fig. 6 Cross Sections of rare gases

TABLE 3 Values of the maximum excitation probabilities
 (K_{\max}) of the gases

$$K = \frac{Q_{\text{excite}}}{Q_{\text{elastic}}}$$

von Engel; Ionized Gases

	Transitions	Critical energy	K_{\max}	ϵ_{\max}
Na	$3^3S_{1/2}-3^3P_{1/2, 3/2}$	2.1 eV	~0.2	2.5
He	$1^1S_0-2^1P_1$	21.2	10^{-3}	—
He	$4^1P_1-4^1D_2$	~24	8×10^{-4}	50
H	$1^1S_{1/2}-2^3P_{1/2}$	10	<0.2	20
A	$3^1S_0-4^3P_1$	11.6	2×10^{-2}	—
Hg	$6^1S_0-6^1P_1$	6.7	~0.7	15
Hg	$6^3P_2-7^3S_1$	5.4	3×10^{-2}	~10
Hg	$6^1S_0-6^3P_1$	4.9	8×10^{-2}	5.6
Hg	$6^1S_0-6^3P_2$	5.4	0.1	6.8
Hg	$6^1S_0-6^3P_0$	4.7	1.4×10^{-2}	5.5
Ne	$2^1S_0-3^1P_1$	16.7	6×10^{-3}	—

K of C_s is unknown. K_{C_s} (total) is assumed to the following two values.

$$K_{C_s} (\text{total}) = 2 \times 10^{-1} \text{ or } 2 \times 10^{-2}$$

場合には両方の近似で求めた。TABLE 4 で同じ電場に二つの結果がでているのはそのためである。

TABLE 4 The results calculated on a gas (He+Cs)

 $n_{\text{He}}(t=0) = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3$ $n_{\text{Cs}}(t=0) = 2.5 \times 10^{14} \text{ atom/cm}^3$

The electric fields are direct, and uniform.

In the HOLSTEIN distribution, there are three cases

1) $\frac{2m\gamma^2}{MK} \ll 1$ (I)

2) $\gamma \gg 1$ and $\frac{2m\gamma^2}{MK} \sim 1$ (II)

3) $\frac{2m\gamma^2}{MK} \sim \gamma \gtrsim 1$ (III)

(I), (II) or (III) represents a sign for classification. A and B shows the signs of the classes of the electric fields 6, 20kV/m and 1, (1.1) 3kV/m, respectively. It can be approximated that either case is able to be used of the three cases. In such a case two figures are calculated.

The case of assuming the DRUYVESTEYN distribution

E	volt/m	1000	3000	6000	20000
α	$\text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec}$	2.91×10^{-51}	2.03×10^{-14}	1.60×10^{-10}	3.94×10^{-8}
$\bar{\epsilon}$	eV	0.30	0.90	1.73	7.0

The case of assuming the HOLSTEIN distribution

(a) the case of $K_{\text{Cs}} = K = 1.5 \times 10^{-3}$

E	volt/m	1000	3000	6000	20000
$\frac{2m\gamma^2}{MK} = 2\nu^2$		27.8	3.09	0.772	0.0695
γ		42.6	14.2	7.10	2.13
Class	B-II		B-II	A-I, II	A-I, II
t				7.60	2.63
S	57.0	16.245		7.986	2.665
A	14.6	6.577		3.607	1.302
R'	1.47×10^{-5}	0.167	0.239	0.290	0.440
$\alpha \text{ cm}^3/\text{ion}\cdot\text{sec}$	5.8×10^{-62}	1.59×10^{-23}	7.16×10^{-17}	3.83×10^{-17}	1.08×10^{-11}
$\bar{\epsilon}$ eV	0.294	0.995	0.573	1.20	0.881

(b) the case of $K_{\text{Cs}} = 2.0 \times 10^{-1}$ and $K = 1.37 \times 10^{-3} = K_1$

E	volt/m	1100	3000	6000	20000
$\frac{2m\gamma^2}{MK} = 2\nu^2$		22.96	3.09	0.722	0.0695
γ		11.70	4.29	2.145	0.644
Class	B-II		B-II	A-I, II	A-I, II
t				2.645	1.144
S	23.68	6.335		3.031	1.179
A	0.36	1.622			
R'	3.32×10^{-4}	0.308	0.44	0.27	0.43
$\alpha \text{ cm}^3/\text{ion}\cdot\text{sec}$	3.39×10^{-34}	1.10×10^{-15}	1.05×10^{-11}	2.36×10^{-12}	1.07×10^{-9}
$\bar{\epsilon}$ eV	0.426	1.11	0.880	1.26	1.76

(c) The case of $K_{Cs} = 2.0 \times 10^{-3}$ and $K = 1.37 \times 10^{-4} = K_2$

E volt/m	1000	3000	6000	20000
$\frac{2m\gamma^2}{MK} = 2\nu^2$	27.8	3.09	0.772	0.0692
γ	4.07	1.357	0.678	0.204
Class	A-III	A-III	A-I	A-I
t			1.178	0.7035
S	27.90	3.83		
A	0.05	0.37		
R'	2.18×10^{-4}	1.66	0.43	0.32
$\alpha \text{cm}^3/\text{ion}\cdot\text{sec}$	3.77×10^{-20}	1.09×10^{-12}	5.82×10^{-10}	5.73×10^{-9}
$\bar{\epsilon}$ eV	0.392	1.17	1.71	2.87

In the calculations the following data are used.

$$Q_{He} = 5.8 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad n_{Cs}/n_{He}(\text{at } t = 0) = 10^{-4} \quad \gamma = \frac{\sqrt{3k}\epsilon_1}{E\lambda}$$

$$Q_{Cs} = 400 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad \epsilon_1 = 1.38 \text{ eV} \quad \nu^2 = 1.89 \times 10^7/E^2$$

$$\epsilon_i = 3.89 \text{ eV}$$

例 2) 生成係数の値は、($E\lambda$) が一定なら温度、圧力に無関係に一定となる。

いま、 $n_{He} = 2.5 \times 10^{19} \text{ atom/cm}^3$, $\frac{n_{Cs}}{n_{He}} = 10^{-4}$ (室温でだいたい 1 気圧程度) とおくと、 λ の値は前の例の値より 1 衡小さくなり $E = 20 \text{ kV/m}$ の電場は例 1) のわずか 2 kV/m にしか相應しない*。

例 3) $T = 1500^\circ\text{K}$, $P = 1 \text{ atm}$ とすると、原子の数は $n_s \cong n_{He} = 2.7 \times 10^{19} \times \frac{273}{1500} = 4.91 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3$. また $\frac{n_{Cs}}{n_{He}} = 10^{-4}$ とすると $F = 20, 6 \text{ kv/m}$ の電場は例 1) のおのおの 10 kv/m, 3 kv/m, に相應する生成係数に対応する**, ***.

3.3 再結合過程について

電場によって加速された電子は、中性原(分)子に衝突することによって、これを電離させる。(イオン-原(分)子の衝突による電離は電子-原(分)子の衝突による電離にくらべ無視できるほど少ないとする)。しかし、こうして生じた電子もやがてイオンと再結合してしまう。その再結合の過程はきわめて複雑で、その理論的な取扱いはごく簡単な波動力学的模型を用いてなされているに過ぎない^④。

また、実験的にも各過程を定量的に測定することはきわめて困難で、得られた結果も測定者によってかなり異なっている場合もある^⑤。

いずれにしても再結合は電子と陽イオンの結合によって生ずるから、その速度は電子とイオンのおのおのの密度の積に比例する。したがって、その比例定数を ρ とおくと次式が成立する。

$$\frac{dn_e}{dt} = -\rho n_e n_i = -\rho n_e^2 \quad (n_i = n_e) \quad (94)$$

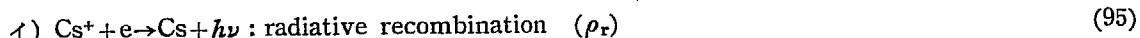
ここで、 ρ は再結合係数とよばれるもので、生成係数と同じく $\text{cm}^3/\text{ion sec}$ の次元をもっている。再結合過程の各過程はおのおの、それらが独立に起っていると考えられる。すなわち、 ρ は各過程の再結合係数の和と考えられる。ただし、あとで記す解離再結合過程は(94)式のようには表わされないから、他の係数の

*,** ただし以上の議論は電子エネルギーにより Q_{He} , Q_{Cs} が変化しないとしての話である。しかし、実際は $n_{He}Q_{He} \gg n_{Cs}Q_{Cs}$ で、しかも Q_{He} は ϵ にそれほど依存しないから上の議論はそれほど間違っていないと思われる。

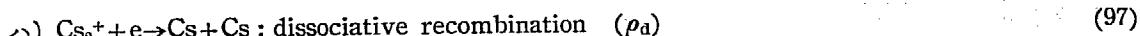
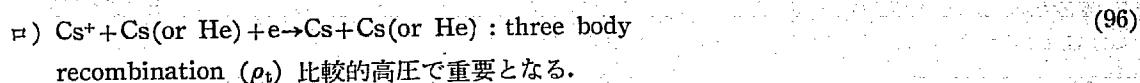
*** あとで示すように電離度の飽和値は始めのガス温度が高くなるほど増す。

中に含めることはできない。

再結合の一般論はきわめて複雑であるので、ここでは「稀ガス+アルカリ蒸気」の場合に限って取扱いを進める。その場合にはアルカリ蒸気の励起・電離電圧が稀ガスのそれに比し極端に低いので、稀ガス原子はすべてその中性原子の基底状態にあると仮定する。そうすると再結合に対する過程を考えられる。



主に低圧低電子エネルギーのとき重要となる。



Cs_2^+ の存在比が高いとき重要となる。すなわち、比較的低温高圧のとき重要となる。

i), ii) の ρ_r , ρ_t は波動力学的にも推定でき、かつ、また実験的にも（不確実なものが多いようであるが）得られている。しかし、iii) の場合は理論的な取扱いもきわめて困難であり、また、測定値もあまりないようである*。MHD 発電の作動ガスの場合のように Cs が高温、かつ低圧（10 mmHg 程度以下）では Cs_2^+ の密度はきわめて小さく、比較的大きな ρ_d にかかわらずこの過程はそれほど重要ではないと思われる。すなわち、 ρ_d は $\rho_d n_{\text{Cs}_2^+} n_e$ の形で効いてくる。 n_{Cs_2} は n_{Cs} に比しかなり少ないと思われる。その推定により $n_{\text{Cs}_2^+}$ も n_{Cs}^+ に比し少ないものと推定される。問題は ρ_d の値であるが、Eschenroeder は、

$$\rho_{d\text{Cs}} = 10^{-7} \left(\frac{250}{T} \right)^l \text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec}, l = \frac{1}{2} \sim \frac{3}{2} \quad (98)$$

を仮定しており、それを用いると p. 20 の例 1) の場合、あとでわかるように、 $\rho_d n_{\text{Cs}_2} n_e \ll (\rho_t + \rho_r) n_e n_{\text{Cs}}^+$ として左辺を右辺に対して無視できるものと思われる。

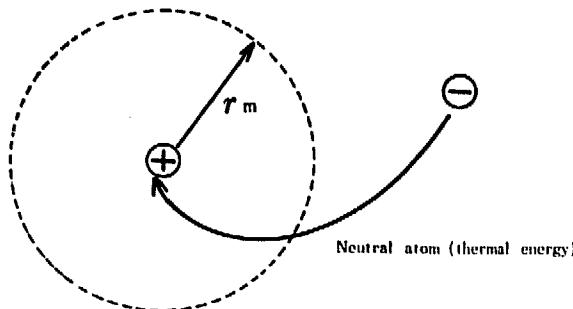
i) の ρ_r については LOED は多くの測定者のデータを整理して次の結果を得ている。（波動力学的計算結果とだいたい一致している）⁸⁾

$$\rho_r = 2 \times 10^{-12} \text{ cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec} \text{ at } \epsilon = 0.1 \text{ eV} \quad (\text{電子エネルギー}) \quad (99)$$

さらに高い ϵ に対しては、

$$\rho_r = \frac{2.0 \times 10^{-12}}{\epsilon \text{ eV}} \text{ cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec} \quad (100)$$

ii) 三体衝突再結合



A electron with the higher energy collides with a thermal neutral atom, and slows down to the thermal energy. Such a electron can be captured by an ion inside the range of r_m .

Fig. 7 Three body recombination process

Fig. 7 に示す中性原子、イオン、電子の系を考える。

電子の運動エネルギーが大きいほどイオンに捕捉され難い。いま第 3 の粒子として中性原子が存在する場

* 理論的にはいくつかの取扱いがなされている。例えば文献 9) 参照。

合、それに衝突して熱エネルギーまで減速された電子が、イオンの近傍をとおると簡単に捕捉されてしまう。いま、この再結合の生ずる最大許容距離を r_m とする。電子は中性原子に衝突して中性原子の温度 T まで落ちるから、そのときの運動エネルギーは $3/2 kT$ となる。これがイオン-電子間の静電エネルギー e^2/r 以下のときに再結合が起ると考えられるので、 r_m は次式で与えられる。

$$\frac{e^2}{r_m} = \frac{3}{2} kT \quad (101)$$

一方、

$$\frac{dn_e}{dt} = -Qv_en_en_ir_m/\lambda'_e = -\rho_t n_en_i \quad (102)$$

となるから、

$$\rho_t = Qv_en_ir_m/\lambda'_e \quad (103)$$

ただし、

$$Q: \text{再結合断面積} = \pi r_m^2$$

$$\frac{r_m}{\lambda'_e}: \text{エネルギー輸送の衝突の起る確率}$$

$$\lambda'_e: \text{エネルギー輸送の平均自由距離} = \frac{M}{2m}\lambda_e$$

$$v_e: \text{電子の衝突後の速さ} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

すなわち、 ρ_t は

$$\begin{aligned} \rho_t &= \pi r_m^3 \sqrt{\frac{3kT}{m}} \frac{2m}{M} \frac{1}{\lambda_e} = \pi \left(\frac{2e^2}{3kT} \right)^{1/2} \frac{2\sqrt{3kmT}}{M\lambda_e} \\ &= \frac{16}{27} \frac{e^6}{(kT)^{2.5}} \frac{\sqrt{m \times 3}}{M\lambda_e} \end{aligned} \quad (104)$$

$$\left. \begin{aligned} e &= 4.80 \times 10^{-10} \text{ esu} & m &= 9.11 \times 10^{-28} \text{ g} \\ k &= 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg}^\circ\text{k} & A: \text{原子量} \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

とすると、

$$\rho_t = \frac{3 \times 10^{-8}}{A\lambda T^{2.5}} \text{ cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec} \quad (\lambda: \text{cm}) \quad (106)$$

$$= \frac{3 \times 10^{-8}}{A\lambda T^{2.5}} \text{ cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec} \quad (\lambda: \text{m}) \quad (107)$$

3.4 再結合を考慮に入れた電離速度

前に求めた電離速度とこの結合を合わせて電子数の収支を考えると次式をうる。

$$\frac{dn_e}{dt} = an_en_{Cs} - \rho n_e^2 \quad (108)$$

いま、

$$t = 0 \text{ で}, n_s = n_{Cs0}^{**} \quad (109)$$

$$t = t \text{ で}, n_{Cs} \cong n_{Cs0} - n_e \quad (110)$$

$$\alpha = \frac{n_e}{n_{Cs0}}, \alpha_0 = \frac{n_{e0}}{n_{Cs0}} \quad (111)$$

とおくと、上式の解は次式で表わされる。

* 以上のように三体衝突再結合係数は電子のエネルギー（衝突前の）には一応無関係で略中性ガス温度・密度のみによって定まる。

** 添字 0 は初期状態を表わす。

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a} + \left(\alpha_0^{-1} - 1 - \frac{\rho}{a} \right) e^{-\alpha n_{Cs0}}} \quad (112)$$

筆者らが興味のあるのは、 $1 \ll \alpha_0^{-1}$, $\frac{\rho}{a} \ll \alpha_0^{-1}$ の場合であるから α は次のように近似できる*。

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a} + \alpha_0^{-1} e^{-\alpha n_{Cs0}}} \quad (113)$$

いま、簡単のため、 $\rho = \rho_r + \rho_t$ とおき ρ_r , ρ_t の値をおのおの (イ), (ロ) の式で求める。いま、例として p. 20 の例 1) の条件で電場の大小にかかわらず、放電のため中性原子の温度が 150°C 程度だけ上昇すると仮定すると (G.E. の実験ではこの程度の温度上昇が認められている), 再結合状態での中性原子の温度は始めの温度, $T_0 = 470^\circ\text{K}$ より $T \cong 620^\circ\text{K}$ まで上昇する。したがって, ρ_t は,

$$\rho_t = \frac{3 \times 10^{-6}}{1.46 \times 10^8 \times 4.74 \times (620)^{2.5}} \cong 10^{-10} \text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec} (\gg \rho_r) \quad (114)$$

すなわち、再結合はほとんど三体衝突過程で起っていると考えてよい。

参考のために、電子の平均エネルギーに相応した温度で、プラズマが熱平衡と非熱平衡の両状態に存在するとして、おのおのの場合の再結合係数を TABLE 5 に示すが著しく異なった値をもっている**。 ρ_t の導出方法から推定されたように、同一平均電子エネルギーの場合には熱平衡の場合の再結合係数は非熱平衡の場合の数値に比しかなり小さくなっていることがわかる。

* 初期の電離度 α_0 はきわめて低い。また $t \rightarrow \infty$ での α は、1 の order を目的としているから $\frac{\rho}{a} \sim 1$ でなければならない。以上より,

$$\alpha_0^{-1} \gg 1, \frac{\rho}{a} \sim 1 \ll \alpha_0^{-1}$$

** 中性原子が電子のエネルギーで電子と熱平衡にあるとする。その場合の熱平衡状態の ρ は次式で得られる。

$$\frac{dn_0}{dt} = an_0n_s - \rho n_0^2 \quad (1)$$

$$\therefore \frac{n_0}{n_s} = \frac{a}{\rho} \quad (2)$$

一方、Saha の式より,

$$\frac{n_e^2}{n_s} = 0.239 \times 10^{14} T^{1.5} e^{-x_1} = f(T) \quad (3)$$

$$\text{ただし}, \quad x_1 = \frac{11600 \epsilon_1 \text{eV}}{T} \quad (4)$$

$$n_{s0} = n_s + n_e \quad (5)$$

(2), (3), (5) 式より ρ を求めると,

$$\rho_{\text{saha}} = \left\{ \frac{2 n_{s0}}{\sqrt{f^2 + 4 n_{s0} f - f}} - 1 \right\} a \quad (6)$$

$f \gg n_{s0}$ の場合は簡単になって,

$$\rho = an_{s0}/f \quad (7)$$

2000°K 程度以上の高温で熱電離源の主となる電子一中性原(分)子衝突電離をとると、生成係数 a は,

$$a = 0.670 \times 10^6 \sqrt{T} \left(1 + \frac{2}{x_1} \right) e^{-x_1} \text{Q} \text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec} \quad (8)$$

Cs の場合には結局,

$$\rho_{\text{saha}} = 2.0 \times 10^{-13} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{1.5 \times \epsilon_1} \right) \text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec} \quad (9)$$

$(f \gg n_{s0} \text{ のとき})$

ただし $\epsilon_1 = 3.89$

と表わすことができる。ただし, $\bar{\epsilon}$ は電子(中性原子)の平均エネルギー。

TABLE 5 Relation between saturation values of the degree of ionization and electric fields

$$\alpha_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha \text{ (of } C_s)$$

He + Cs

$$n_{He} (t=0) = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3$$

$$n_{Cs} (t=0) = 2.5 \times 10^{14} \text{ atom/cm}^3$$

DRUYVESTEYN distribution

E volt/m	$\bar{\epsilon}$ eV	$\rho = \rho_r + \rho_t$ cm ³ /ionsec	α_{∞}	ρ_{saha}	α_{∞}
1000	0.30	1.0×10^{-10}	—	5.05×10^{-15}	—
3000	0.90	"	2×10^{-4}	2.56×10^{-13}	7.4×10^{-1}
6000	1.73	"	6.2×10^{-1}	1.50×10^{-13}	1.0
20000	7.0	"	1.0	6.28×10^{-14}	1.0

HOLSTEIN distribution

(a) $K = 1.37 \times 10^{-3} = K_1$

Class	E volt/m	$\bar{\epsilon}$ eV	$\rho = \rho_r + \rho_t$	α_{∞}	ρ_{saha}	α_{∞}
B-II	1100	0.426	1.0×10^{-10}	—	1.44×10^{-13}	—
B-II	3000	1.11	"	1×10^{-5}	2.14×10^{-13}	5×10^{-3}
A-I	6000	0.88	"	9.6×10^{-2}	2.63×10^{-13}	9.7×10^{-1}
A-II	"	1.26	"	2.4×10^{-2}	1.19×10^{-13}	9.5×10^{-1}
A-I	20000	1.76	"	8.9×10^{-1}	1.48×10^{-13}	1.0
A-II	20000	1.99	"	9.0×10^{-1}	1.35×10^{-13}	1.0

(d) $K = 1.37 \times 10^{-4} = K_2$

Class	E volt/m	$\bar{\epsilon}$ eV	$\rho = \rho_r + \rho_t$	α_{∞}	ρ_{saha}	α_{∞}
A-III	1000	0.392	1.0×10^{-10}	—	4.13×10^{-14}	—
A-III	3000	1.17	"	1.1×10^{-2}	2.05×10^{-13}	8.4×10^{-2}
A-I	6000	1.17	"	8.6×10^{-1}	1.51×10^{-13}	1.0
A-I	20000	2.87	"	9.9×10^{-1}	1.04×10^{-13}	1.0

- It is assumed that the temperature rise of the neutral atom is one hundred and several ten °K in the discharges and the rise independent of the strength of the fields (Such a rise is observed in the experiment in G.E.).
- The initial gas temperature is constant, and 470°K
- It may be better to use $\rho = \rho_r + \rho_t$ rather than ρ_{saha}

3.5 電離度の時間変化

前に求めたようにガスの電離度* α は電場印加前の電離度、生成係数、再結合係数および時間の関数で次の形で表わされた。

$$\alpha = \frac{n_e}{n_{Cs0}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{\alpha_0} + \alpha_0^{-1} e^{-anCs0t}} \quad (115)$$

この式でみると t が小のときには、 $1 + \frac{\rho}{\alpha} \ll \alpha_0^{-1} e^{-anCs0t}$ となり α はそれほど大きくない。

* Seeding ガス、すなわち、この場合 Cs 蒸気だけの電離度である。

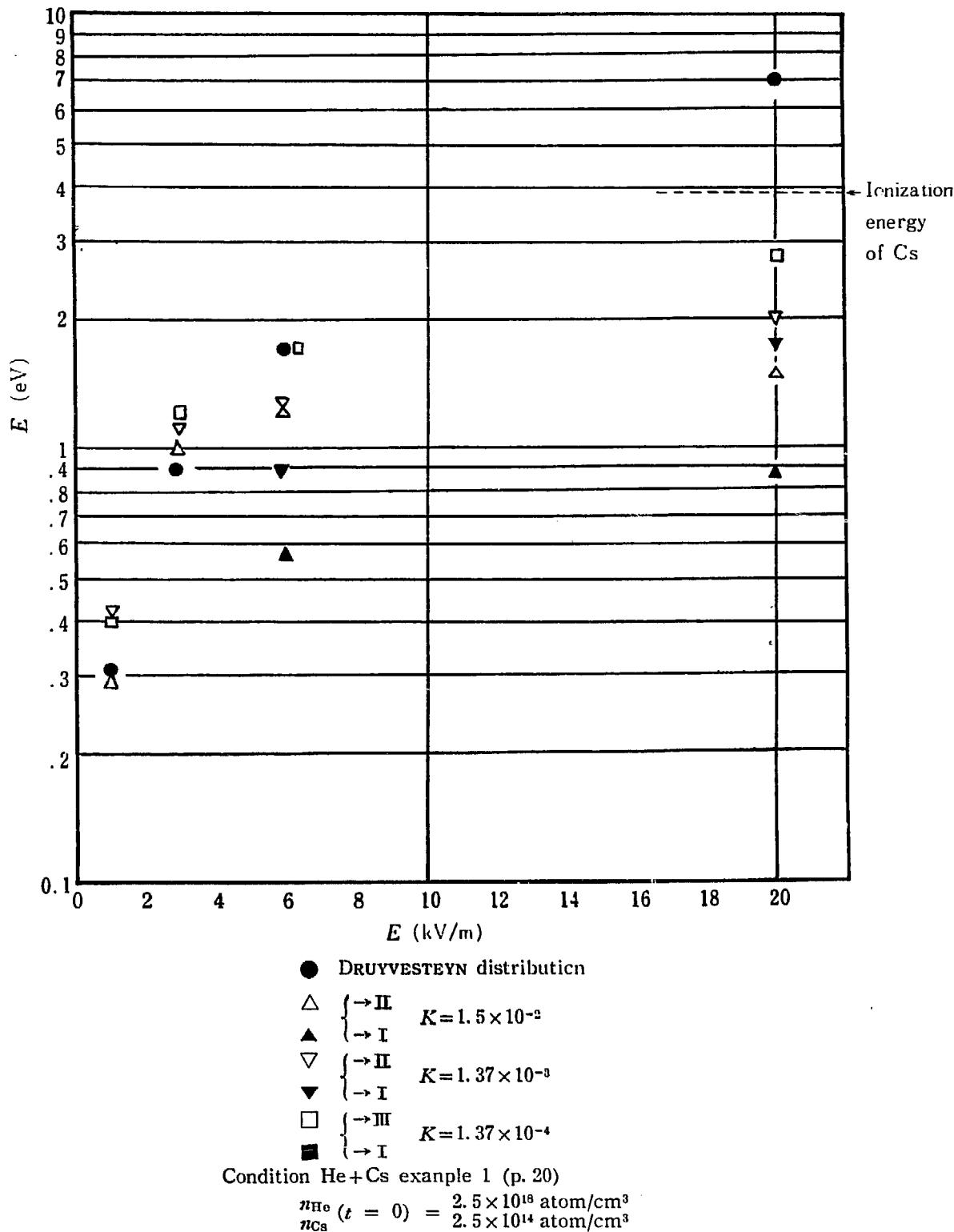
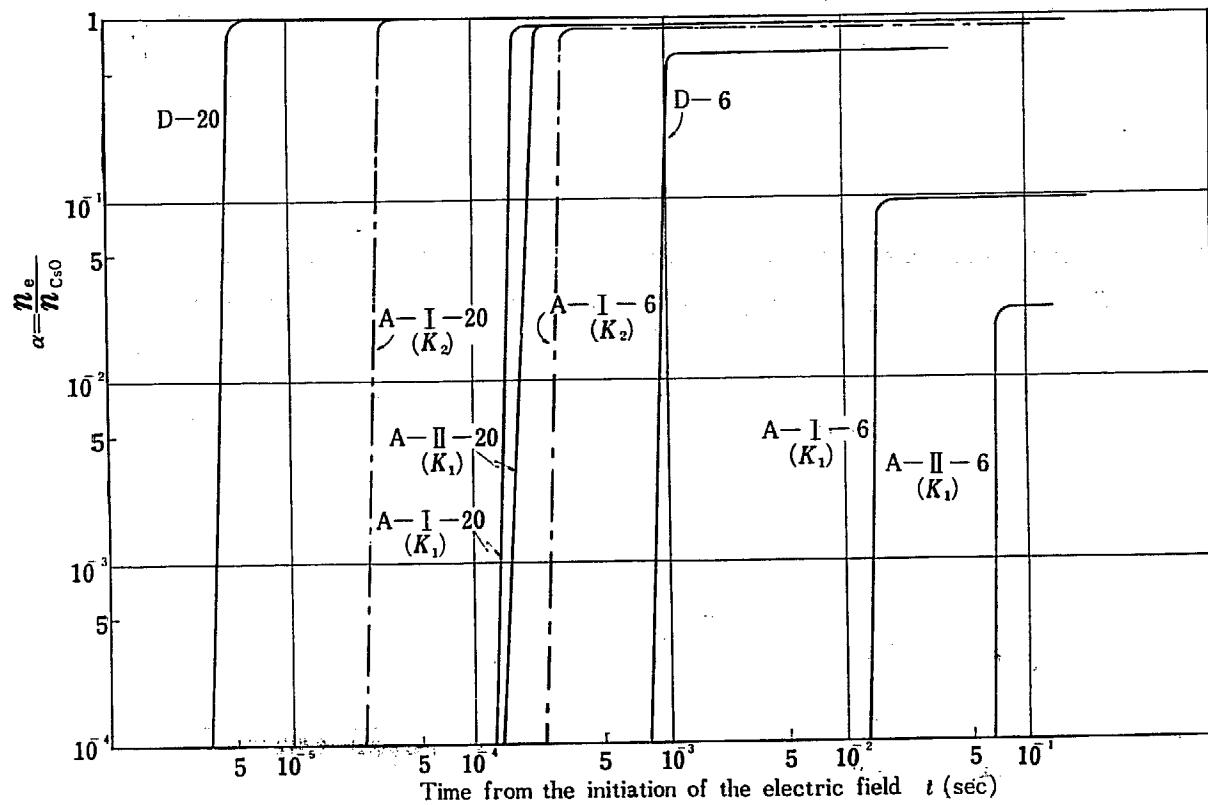


Fig. 8 Mean energy of electrons in electric fields
 The figure shows that the different assumptions lead to the somewhat different energies.

$\alpha_0^{-1}e^{-\alpha n_{Cs} t} \cong 1$ を満す t の近傍で急激に電離度が増加することがわかる。しかし、それ以上に t が増加しても今度は、 $1 + \frac{\rho}{\alpha} \gg \alpha_0^{-1}e^{-\alpha n_{Cs} t}$ となり、 α は t に無関係な一定値に飽和してしまう。いまそこで



distribution
D : DRUYVESTEYN
A : HOLSTEIN

Condition

He + Cs

$n_{\text{He}} = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3$

$$\frac{n_{\text{Cs}}}{n_{\text{He}}} = 10^{-4}$$

$T(t = 0) = 200^\circ\text{C}$

$$\alpha(t = 0) = 0.8 \times 10^{-10}$$

A - I p. 23, (1)

A - II p. 23, (2)

-6 or -20 show the dc electric field

(kV/m)

$$K = \frac{Q_{\text{excite}}}{Q_{\text{elastic}}}$$

$$K_1 = 1.37 \times 10^{-8}$$

$$K_2 = 1.37 \times 10^{-4}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \rho / (\alpha + \alpha_0^{-1} - 1 - \rho / \alpha) e^{-n_{\text{Cs}}0t}}$$

ρ : Recombination = $\rho_r + \rho_t$
coefficient

α : Ionization coefficient

$n_{\text{Cs}0}$: Number of Cs/cm³ at
 $t = 0$

Fig. 9 The values of the degree of ionization calculated from DRUYVESTEYN and HOLSTEIN distributions as a function of the time from the initiation of electric fields under the same condition as that of G. E.

$\alpha_0^{-1} e^{-soan_{\text{Cs}}0t} = 1$ を満す時間、すなわち、

$$t = t_1 = -\frac{1}{an_{\text{Cs}0}} \log \alpha_0 \quad (116)$$

を電離度飽和時間と名付けておく。

また、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = \alpha_\infty = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{\alpha}}$ を飽和電離度と名付ける。

TABLE 5 に p. 20 の例 1) の条件下で $\rho = \rho_r + \rho_t$ と ρ_{saha} の両方の場合について求めた α_∞ の値をまとめておく。同じ条件下での α と t の関係を $\rho = \rho_r + \rho_t$ を用いて求めた結果を Fig. 9 に示す。

α の式から直ちにわかるように飽和時間は α_0 の値によって左右される。 α_0 は同一ガスなら温度の上昇

とともに大きくなるから、初期温度、すなわち、作動ガス温度の高いほど飽和時間は短くなる。また、初期の seeding ガスの密度 n_{Cs0} は α_0 以上に飽和時間に効いてくる。すなわち、 t_1 と n_{Cs0} は互いにほぼ反比例の関係にあるので、 n_{Cs0} の増加によって容易に t_1 は短縮できる。

これに反して飽和電離度は、 α_0 、 n_{Cs0} に無関係であり、単に生成係数と再結合係数の比によって定まる。 α_∞ を大きくするには生成係数を大きくすればよいが、再結合過程の律速過程が三体衝突の場合には作動ガス温度を上げることにより、かなり有効に α_∞ を 1 に近づけることができる。TABLE 6 に例 1) の $K_2 = 1.37 \times 10^{-4}$ の場合の飽和時間・飽和電離度の初期ガス温度 T_0 との関係を示す。Fig. 10 および 11 はこれ

TABLE 6 Relation between initial gas temperatures and saturation values of the degree of ionization
Pre-ionization is assumed to be thermal ionization.

T_0 °K	α_0	3000 volt/m		
		ρ	α_∞	t_1
393	4.0×10^{-24}	3×10^{-10}	3.7×10^{-3}	1.94×10^{-1}
473	8.0×10^{-20}	2×10^{-10}	5.5×10^{-3}	1.61×10^{-1}
1273	2.76×10^{-5}	2×10^{-11}	5.2×10^{-2}	4.7×10^{-2}
2273	1.39×10^{-2}	5×10^{-11}	2.2×10^{-1}	1.6×10^{-2}

T_0 °K	6000 volt/m			20000 volt/m		
	ρ	α_∞	t_1	ρ	α_∞	t_1
398	3×10^{-10}	6.6×10^{-1}	4×10^{-4}	3×10^{-10}	9.5×10^{-1}	4×10^{-5}
473	2×10^{-10}	7.4×10^{-1}	3×10^{-4}	2×10^{-10}	9.7×10^{-1}	3×10^{-5}
1273	2×10^{-11}	9.7×10^{-1}	1×10^{-4}	2×10^{-11}	1.0	1×10^{-5}
2273	5×10^{-12}	9.9×10^{-1}	3×10^{-5}	5×10^{-12}	1.0	3×10^{-6}

Gas : He + Cs

$$\frac{n_{H_0}}{n_{Cs}}(t=0) = \frac{2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3}{2.5 \times 10^{14} \text{ atom/cm}^3} \quad (E = 1.37 \times 10^{-4} = K_2)$$

• It is assumed to be the gas temperature does not change in applying the electric fields.

• ρ : cm³/ion · sec (= $\rho_r + \rho_t$)

• t_1 : sec

を図に示したものである。(なお、この計算では簡単のため放電により中性原(分)子温度(作動ガス温度)はほとんど上昇しないと仮定した)。この図・表よりわかるように、比較的低電場でも作動ガス温度を高めると、電離度飽和時間の短縮、飽和電離度の増加が容易に達成せられる。

3.6 最適電離条件

3.6.1 電離度飽和時間

前節の電離度の式よりわかるように α は電場印加開始後、ある時間(だいたい電離度飽和時間の程度)経

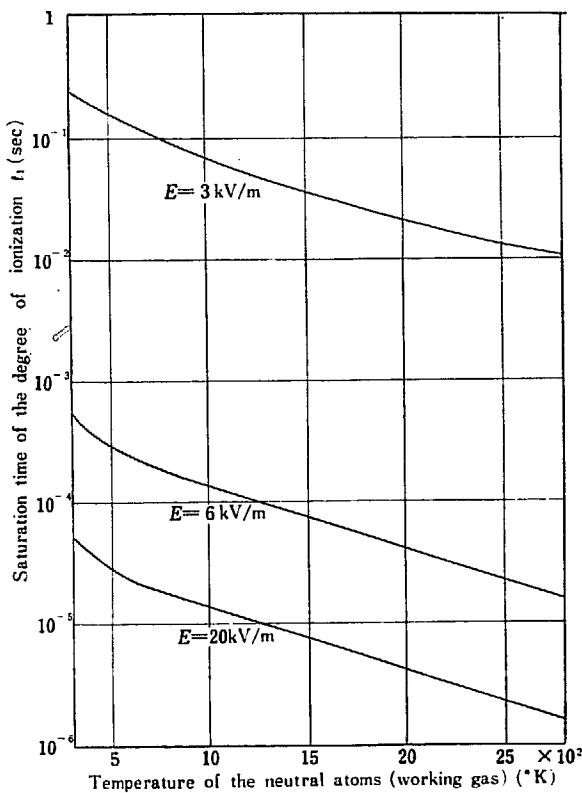


Fig. 10 Saturation time of the degree of ionization as a function of the temperature of the neutral gas (working gas).

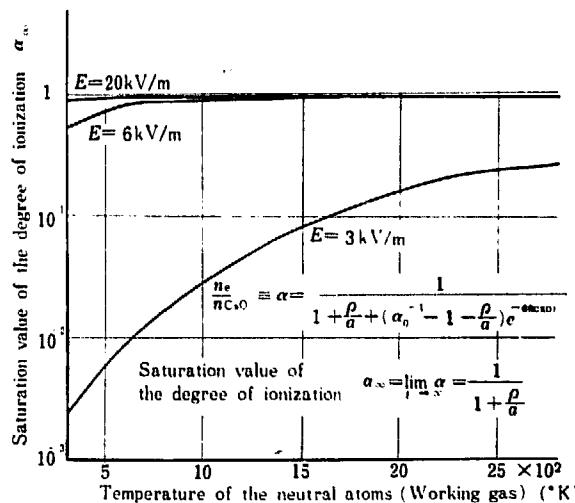


Fig. 11 Saturation value of the degree of the ionization as a function of the temperature of the neutral gas (working gas)

過してから急激に増加し、すぐ飽和してしまう。

したがって、電場印加時間は、せいぜい飽和時間程度で充分で、それ以上かけると、直流電圧の場合は、不均一な電荷分布ができる。また、逆に飽和時間より短くかけたのではほとんど意味がない。電荷の不均一分布が生じないという点では、高周波の電場印加が好ましい。

一般に飽和時間 t_1 は (116)

$$t_1 = -\frac{1}{\alpha n_{\text{Cs}0}} \log \alpha_0 \quad (117)$$

He + Cs

$$n_{\text{He}0} = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3$$

$$\frac{n_{\text{Cs}0}}{n_{\text{He}0}} = 10^{-4}$$

$$K = K_2 = 1.37 \times 10^{-4}$$

These curves are calculated with A-I (K_2)

$$\frac{n_e}{n_{\text{Cs}0}} = \alpha = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a} + \left(\alpha_0^{-1} - 1 - \frac{\rho}{a} \right) e^{-\alpha n_{\text{Cs}0} t}}$$

Saturation time of the degree of ionization

$$t_1 = -\frac{1}{\alpha n_{\text{Cs}0}} \log \left(\alpha_0^{-1} - 1 - \frac{\rho}{a} \right)$$

He + Cs

$$n_{\text{He}0} = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3$$

$$\frac{n_{\text{Cs}0}}{n_{\text{He}0}} = 10^{-4}$$

$$K = K_2 = 1.37 \times 10^{-4}$$

These curves are calculated with A-I (K_2).

α は r , ν などをとおして ((77)式), α_0 は $\alpha_0 \propto \frac{1}{\sqrt{n_{Cs0}}}$ として n_{Cs0} に関係しており, ガスの状態・種類のほかに, 電場の強さにも関係している. HOLSTEIN 分布の条件 (f を解くときに仮定した) を考慮に入れて, $\frac{dt_1}{dn_{Cs0}} = 0$ より最適な* seeding ratio を求めることは一般論としてはきわめて煩雑である.

熱電離ガスを電場で電離する場合には, 始めの温度を高くするほど α_0 は増加し t_1 は短くなる. p. 20 の例 1) の場合 ($\text{He} + \text{Cs}; n_{He0} = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3, \frac{n_{Cs0}}{n_{He0}} = 10^{-4}$) で, 電場 $E = 3, 6, 20 \text{ kV/m}$ をかけた場合の初期作動ガス温度と t_1 の関係を図示したのが Fig. 10 である. 明らかに温度の上昇につれ, t_1 が減少していることがわかる.

3.6.2 飽和電離度**

もう一つの最適条件は飽和電離度 α_∞ を増加させることである. 実際には, $t_1 \rightarrow 0, \alpha_\infty \rightarrow 1$ になることが望ましい. さしあたり α_∞ が最大になるような条件を求めてみる.

稀ガス+アルカリ原子の作動ガスを用いる MHD 発電機では再結合係数 ρ は, 三体衝突再結合(場合によっては解離再結合)によってその大きさが定まるものと思われる. したがって, ρ は中性原子(作動ガス)の温度を上げることにより, あるいは, 電子の自由距離を大きくする(これは稀ガス+アルカリの場合には seeding ratio を減らすことに相当する)ことにより小さくできる.

t_1 にしても α_∞ にしても, けっきょく生成係数 α が関係してきていている. そして, α は (77) 式でわかるように exponential の肩に乗る因子でだいたいその大きさが定まる. 二種の混合ガスで全原子数, 電場を一定とすれば, その因子は $r \left(\propto \frac{K^{1/2}}{\lambda} \right)$ で代表してよいと思われる. いま, 一種のガスの第1次励起電圧が, 他種のそれより極端に低い場合を考える***. その場合自由距離, 断面積比 K は次のようにおける.

$$\lambda^{-1} = n_{S1} Q_{S1} + n_{S2} Q_{S2} \quad (118)$$

$$K = \frac{Q_{\text{excit}}}{Q_{\text{elast}}} = \frac{K_1 n_{S1} Q_{S1}}{n_{S1} Q_{S1} + n_{S2} Q_{S2}} \quad (119)$$

ただし, S_1 : Seeding ガス

S_2 : 親ガス

$$\begin{aligned} \therefore r &\propto \frac{K^{1/2}}{\lambda} = (n_{S1} Q_{S1} + n_{S2} Q_{S2})^{1/2} (K_1 n_{S1} Q_{S1})^{1/2} \\ &= n_{S1} Q_{S1} \left(1 + \frac{n_{S2}}{n_{S1}} \frac{Q_{S2}}{Q_{S1}} \right)^{1/2} K_1^{1/2} \end{aligned} \quad (120)$$

いま, $Q = \frac{Q_{S2}}{Q_{S1}}, n = n_{S1} + n_{S2} = \text{const}, \kappa = \frac{n_{S2}}{n_{S1}}$ とおくと,

$n_{S1} = \frac{n}{1+\kappa}$ となるからけっきょく r は,

$$r \propto \frac{1}{1+\kappa} (1+\kappa Q)^{1/2} \quad (121)$$

この両辺を κ で微分すると,

* t_1 の短いほど適当と考えられる.

** MHD 発電機で必要なのは, 電気伝導度 $\sigma \propto \frac{n_e \lambda}{\sqrt{T}}$ であって, ここでいう (seeding 物質の) 電離度 α そのものではない. したがって, α の極大条件を出しても場合によっては trivial なものしかえられないこともある.

*** He+Cs もその一例である.

$$\frac{d\gamma}{d\kappa} = \frac{\frac{1}{2}(1+\kappa Q)^{\frac{1}{2}}(1+\kappa)Q - (1+\kappa Q)^{\frac{1}{2}}}{(1+\kappa)^2} = \frac{(1+\kappa Q)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(1+\kappa)Q}{(1+\kappa)} - 2 \right\}}{2(1+\kappa)^2} \quad (122)$$

すなわち、これより、

$Q \leq 2$ のときは、

$\kappa \rightarrow \infty$ で γ は極小となる。

$$(n_{s1} \rightarrow 0, n_{s2} \rightarrow n)$$

$Q > 2$ のときは、

$$\kappa = 1 - \frac{2}{Q} \text{ で } \gamma \text{ は極小となる。}$$

例) He+Cs の場合

$$Q = \frac{Q_{He}}{Q_{Cs}} \simeq 10^{-2} < 2 \quad (123)$$

したがって、seeding ratio の低いほど飽和時間、飽和電離度は大きい*。

3・6・3 電気伝導度

MHD 発電機で非熱平衡電離を用いる唯一の理由は、比較的低温でも作動ガスの電気伝導度を上げうるということである。したがって、これを最大にする条件を求めるることはきわめて重要である。しかしながら、この条件を満す場合には一方で飽和時間が比較的長くなることがある。したがって、実際の seeding ratio は飽和時間と電気伝導度をそれぞれ最大にする場合の中間に適当な値を採用すべきである。

一般に、二種ガス（稀ガス+アルカリ蒸気）の混合気体の密度・温度が一定のときに seeding ratio $\frac{n_{Cs}}{n_{He}}$

を変えてゆくと必ず電気伝導度の最大値が現われる。

一般に飽和以後の電気伝導度 σ は次式で表わされる、

$$\sigma \propto \frac{n_1 \alpha_\infty}{n_1 Q_1 + n_2 Q_2} \quad (124)$$

ただし、

1: アルカリ

2: 稀ガス

$$n_1 + n_2 = \text{const.}$$

$\frac{n_1}{n_2} \rightarrow 0$ の極限では $\alpha_\infty \rightarrow$ 最大値 ≤ 1 , $n_1 Q_1 + n_2 Q_2 \rightarrow$ 最小値となるが、 n_1 が小さいため σ は小さい。

逆に、 $\frac{n_1}{n_2} \rightarrow \infty$ の極限では、 $\alpha_\infty \rightarrow \geq$ 最小値 ≥ 0 となり、また $n_1 Q_1 + n_2 Q_2 \rightarrow$ 最大値となり、 $n_1 \rightarrow n$ であるから、これまた、 σ は小さくなってしまう。したがって、この中間に σ を最大にする $\frac{n_1}{n_2}$ の値が存在するはずである。

例えば、He+Cs で、 $n_{He0} + n_{Cs0} = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3$ $T = 1000^\circ\text{K}$ の場合の σ を最大にする $\frac{n_{Cs0}}{n_{He0}}$ の値は約 8×10^{-4} となり、同じ条件の $\frac{n_{Cs0}}{n_{He0}} = 10^{-4}$ の場合より、 σ は4倍強大きくなる**。

σ を最大にする $\frac{n_1}{n_2}$ (または $\frac{n_1}{n_1 + n_2}$) の値を求めるることはきわめて煩雑である。詳しくは、付録IIを参照されたい。

3・6・4 一般的な適当条件

いままでは、seeding ratio について種々の場合の最適条件について記した。ここではガス、あるいは電

* p.33 の注) に記したように MHD 発電機では Cs だけでなく He+Cs に対する電離度が問題となる。

** 付録II 参照。

場についてどのようなものが望ましいかをまとめておく。それは電離速度が大、飽和電離度が大ということであるから次のようになる。

運動量輸送平均自由距離 → 大 ($Q_{\text{elastic}} \rightarrow \text{小}$)	すなわち, $\epsilon_i - \epsilon_1 \rightarrow \text{小}^*$
電場 → 大	
$K = \frac{Q_{\text{excit}}}{Q_{\text{elastic}}} \rightarrow \text{小}$	
第1次励起エネルギー → 小	
第1次電離エネルギー → 小	
$z_1 = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_1} \rightarrow \text{小}$	
再結合係数 → 小	

(特に解体再結合過程のあまり効かないもの)

飽和電離度、飽和時間の両方に大きく関係するのは生成係数 a の値で、前に記したようにこれを大きくする条件は $\gamma(z_1-1)$ を小さくすることである。すなわち、 $\epsilon_i - \epsilon_1$ を小さく、平均自由距離 λ を大きくすればよい。TABLE 2 よりわかるように $\epsilon_i - \epsilon_1$ の小さいものはアルカリ原子で、稀ガスは大きい。逆に、 λ の大きなものは稀ガスで、アルカリ原子は一番小さい。このことより単一成分のガスを用いたのでは $\epsilon_i - \epsilon_1$ の小、 λ の大という二つの条件は満されない。そこで、アルカリ原子と稀ガス原子の混合ガスを作れば $\epsilon_i - \epsilon_1$ は主にアルカリだけが効き、(アルカリの ϵ_i 、 ϵ_1 は稀ガスの ϵ_i 、 ϵ_1 に比しかなり小さいので)、また、 λ はアルカリ量が少なければほとんど稀ガスのものに近くなり大きくとれるからである**。

3.7 G. E. の実験結果と数値計算との比較

3.7.1 G. E. の実験

稀ガスとアルカリ原子の混合ガスに電場を印加し、電離度の時間的変化を調べた実験はあまりみあたらない。ただ一つ手もとにある結果は G. E. のものだけでこれでも定量的なことがあまりはっきり発表されていない⁴⁾。その実験の大要を Fig. 12 に示す。

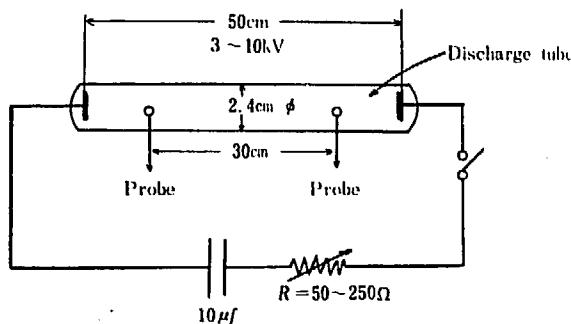


Fig. 12 Schematic apparatus for electric discharge experiment in G. E.

ガスの初期温度、密度、seeding ratio は次のとおりである。

ガス: He+Cs

初期ガス温度 120°C~200°C

* 各種の原子の $\epsilon_i - \epsilon_1$ の値は TABLE 2 にのっている。

** 比較的高気圧の場合を論じてるので、アルカリ蒸気単独の場合よりこの方が有利になるのである。

$$\left. \begin{array}{l} n_{He0} = 2.5 \times 10^{18} \text{ atom/cm}^3 \\ \frac{n_{Cs0}}{n_{He0}} \cong 10^{-4} \end{array} \right\} \quad (125)$$

○放電開始より、ある時間の後に放電管中のガスは電離されて導電性となった。一般には、先ず“diffuse mode”が発生し、場合によってはそれから数 $100 \mu \text{ Sec}$ 経過してから“constricted mode”へ移行した。後者は $\frac{n_{Cs0}}{n_{He0}} < 10^{-4}$ のとき、あるいは、放電電流が 30 amp. 以上のときにしか起らない。

○ $T_0 = 130^\circ\text{C}$ のとき diffuse → constricted への移行は放電開始後 $400 \mu \text{ sec}$ してから現われている（電圧不明）。

○Diffuse mode では、Cs の線は常に He より強い。

○Constricted mode では、この逆で He の線が常に強い。

○連続スペクトルは constricted mode にだけしか存在しない。

○35 cm 離れておかれた二本の探子での測定結果は次のようにある。

$$\left. \begin{array}{l} \text{電場: } 1 \sim 3 \text{ kV/m} \\ \sigma = 30 \sim 90 \text{ mhos/m} \\ \alpha_{Cs} = 20 \sim 100\% \quad (\sigma \text{ より推定}) \end{array} \right\} \quad (\text{diffuse mode で})$$

1~2 kV/m に対応する平均電子エネルギーの推定値は, $\bar{e} = 0.2 \sim 0.4 \text{ eV}$.

以上の結果より次のことが推定される。

- 1) 光学測定より diffuse mode では再結合はあまり現われていない。Cs の励起・電離が盛んである。再結合が盛んになるのは電子数の多くなる電離度飽和時間後と思われる。
- 2) 連続スペクトルの現われる時間より考えて Constricted Mode は電離度が飽和する頃より現われる。そのときには、すでに、Cs の励起・電離の可能性が上限にきてるので、He の励起が起り、ガスの大部分を占める He の線は Cs より強く現われ始める。
- 3) Constricted mode は diffuse mode で管壁周辺の Cs^+ および電子が壁と再結合して消滅したため、管中心部だけが導電性ガスとして残るためと思われる。Cs の数が少くないときには拡散速度が大きいというほかに放電終了までに充分飽和電離度に達しうるということも constricted mode の起る原因になっているものと思われる。

G.E. の実験でも時間とともに電荷の移動が起り、放電管中心部の電場が弱められている。これがどの程度の遅れで発生するかは全然わからない。あとの計算結果よりわかるように飽和電離度、飽和時間は電場分布の変化を無視して計算したものとだいたい一致している*。

3.7.2 計算例

G.E. の実験条件** と同一条件で a の値、電子の平均エネルギー、飽和電離度、飽和時間などを求めたものは既に図表にして示した***。なお、この場合にも Cs 断面積比 K はわからないので Na の測定値より推定した値を用いて計算した。K の値により電離の模様がかなり異なっていることは注意すべきである。また、再結合係数を $\rho = \rho_t + \rho_r$ として求めたものに対する Cs の電離度と時間の関係は Fig. 9 に示した。Fig. 9 よりわかるように E が大となると、飽和時間は短くなりまた飽和電離度は上昇している。K の値ははっきりわからないが小さくなると、E の増加と同じような効果を与えていることがわかる****。電場が $6 \sim 20 \text{ kV/m}$ のとき飽和時間は (HOLSTEIN 分布を用いたとき) $10^{-5} \sim 10^{-2} \text{ sec}$ となり (特に、 $K = K_2$

* G.E. の実験は capacitor discharge を用いている。 $E = \text{const.}$ という電場をある時刻から step 状にかけた場合も放電のごく初期 (飽和時間度程) では略同一の放電電離過程とみなせるだろう。

** p. 20 の例 1) も同一条件である。

*** Fig. 8, Fig. 9, TABLE 4, TABLE 5 参照。

**** K の値は正確にもわからないが、 K_2 と K_3 の中間に真の値がくるものと推定される。

$= 1.37 \times 10^{-4}$, ($K_{Cs} = 2 \times 10^{-2}$ *) のときは $10^{-5} \sim 10^{-4}$ sec となる), G. E. の実験での diffuse \rightarrow constrict の移行時間の 4×10^{-4} sec とだいたい一致している。また Cs の飽和電離度は G. E. の場合 diffuse mode で 20 ~ 100% であったがこの場合 2 ~ 99% (特に, $K = K_2$ のときには 86 ~ 99%) となる**。

このように HOLSTEIN 分布を用いておこなった計算結果は実験値とかなり良い一致をみせている。

DRUYVESTEYN 分布の場合には電場に対する変化が著しく、特に強電場中では HOLSTEIN 分布の場合と飽和時間、平均電子エネルギーともかなり異なっている。

なお、この計算では電場は直流と仮定したが、HOLSTEIN 分布のときには ω が 10 kMc/s 程度以下の交流電場としてもそのままこの数値が正しいものとなる***。ただし、この場合 E は実効値をとる。

* 実際の値もだいたいこの程度の大きさではないかと推定される。

** Diffuse mode であるから拡散による消滅はいまだ比較的少ないと思われる。

*** p. 12 参照。

4. ま と め

MHD 発電機の作動ガスがあらかじめ電離されている場合に、さらにこれを非熱平衡的に電離することにより、比較的低温でも充分高い電気伝導度を得ることが理論的に可能であることを確めた。

ここでは、あらかじめ作動ガスが加熱電離されていると仮定しこのガスに急激に電場をかけた場合の電離度と時間の間の関係を調べた。なお、そのとき電子のエネルギー分布は、非熱平衡* にあるとして、DRUY-VESTEYN 分布と HOLSTEIN 分布を比較対照しながら使用した。

一般に、放電により電気伝導度を高めるには、稀ガス+アルカリ蒸気系が最適であることを確かめた。特に、そのうちでも He+Cs、あるいは Ne+Cs が最適である**。

この方法でおこなった計算値と実験結果とはだいたい良い一致をみた。

なお、この計算 (HOLSTEIN 分布のとき) は始めに、

$$\frac{\omega^2 \lambda^2}{a_1} = \frac{m\omega^2 \lambda^2}{2\varepsilon_1} = \frac{e \times 10^{-28} \times (10^{-3})^2 \omega^2}{2 \times 1.6 \times 10^{-12} \times 1.38} = 10^{-22} \omega^2 \ll 1$$

と仮定していたので、 E として交流電場の実効値をとれば $\omega \approx 10 \text{ kMc/s}$ 以下の高周波としても適用できる。

一般に二種ガスの混合ガスの場合に最適条件を求めるのはきわめて困難である。一般的にいえることはあらかじめ電離度 a_0 を高くすれば飽和時間は短くてよい。また、作動ガスの温度を高くすると飽和時間、飽和電離度とも好適条件へ近づく。また、ガス密度一定のときには最高の電気伝導度を与える最適 seeding ratio が存在する。

なお、ここでは放電で消費する電力については全然触れなかった。いろいろな条件から考えて電場電離により MHD 作動ガスの電気伝導度を上げるのは 非熱平衡型電場印加でなければならないと思われる。飽和時間までは両極間に流れる電流はきわめて微小で、電力の消費はごく少ないとと思われる。飽和時間程度になると急激に電流は増し、飽和電流が流れ始めると電力の消費量は時間に比例して増加する。この状態では電荷の移動が生じる上に、イオン、さらには中性原子の加熱が活発となり（再結合による電子数の減少がある程度防ぐというほかは）、電気伝導度のそれ以上の上昇は望めないので、電場印加は電離度が飽和するや否や停止するのが最も経済的であると考えられる。作動ガスの流速と電場の空間分布は丁度飽和時間くらいで、ガスが電場を通過するようにしておくか（高周波の場合）、あるいは直流電圧をパルスでかける場合には、それに適した電極配置をとればよい。

参 考 文 献

- 1) A. M. CRAVATH: *Phys. Rev.*, 36, 248 (1930)
GOLDSTEIN, DOUGAL; *Phys. Rev.*, 109, (1958)

* これは BOLTZMANN 方程式を解く際のガスの状態によりきまる。

** Ne は Q_{elastic} が He のだいたい半分程度で、さらに、原子量が He の 5 倍であるから、三体衝突再結合係数も小さくなる。したがって、 ρ/a は、He+Cs の場合より小さくなる。

- 2) S. WAY: Westinghouse Scientific Paper, 6-40509-2-P-1 同じく P-2, (1960)
- 3) L. SPITZER, JR: "Physics of Fully Ionized Gases." Interscience Publ. (1956)
- 4) W.F. WESTENDROP *et al.*: *Phys. Fluids*, **4**, 786 (1961)
- 5) M. J. DRUYVESTEYN; *Physica*. **10**, 69 (1930)
- 6) T. HOLSTEIN: *Phys. Rev.*, **70**, 369 (1946)
- 7) H. MARGENAU: *Phys. Rev.*, **73**, 297 (1948)
- 8) L. B. LOEB: "Basic Processes of Gaseous Electronics Chap. VI, Univ. of California Press, (1960)
- 9) A. Q. ESCHENROEDER: *ARS. J.*, **40**, 196 (1961)

付 錄 I

荷電 e , 質量 m の荷電粒子が外部から加えられた電場 $E_0 \cos \omega t$ によってうるエネルギーの割合を計算する。

平均の速度を1箇の粒子の速度 v で代表し, この粒子が他の粒子との弾性衝突で失う運動量の割合を単位時間ごとに ν であるとすると, 次の方程式が成立する。

$$m \frac{dv}{dt} + m\nu v = e|E_0| \cos \omega t \quad (1)$$

この解は, $t = 0$ の速度を v_0 として,

$$v = \frac{eE_0/m}{\nu^2 + \omega^2} (\omega \sin \omega t + \nu \cos \omega t) + \left(v_0 - \frac{eE_0\nu/m}{\nu^2 + \omega^2} \right) e^{-\nu t} \quad (2)$$

で与えられる。

衝突によって失う平均のエネルギー \bar{E} は,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{T} m\nu \int_0^T v^2 dt = m\nu \left[\frac{\alpha^2}{2(\nu^2 + \omega^2)} + \frac{2\alpha}{\nu^2 + \omega^2} \left(v_0 - \frac{\alpha\nu}{\nu^2 + \omega^2} \right) \frac{1 - e^{-2\pi\nu/\omega}}{2\pi/\omega} \right. \\ &\quad \left. + \left(v_0 - \frac{\alpha\nu}{\nu^2 + \omega^2} \right)^2 \frac{1 - e^{-4\pi\nu/\omega}}{4\pi\nu/\omega} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, $\alpha = eE_0/m$ である。

いま, 簡単のために, $v_0 = 0$ として次の3つの場合について \bar{E} を求める。

$$(1) \quad \omega \ll \nu \text{ のとき} \quad \bar{E}_1 \cong \frac{e^2 E_0^2}{2m\nu}$$

$$(2) \quad \omega = \nu \text{ のとき} \quad \bar{E}_2 \cong \frac{e^2 E_0^2}{2m\nu} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{8\pi} \right\}$$

$$(3) \quad \omega \gg \nu \text{ のとき} \quad \bar{E}_3 \cong \frac{e^2 E_0^2}{2\omega^2} \frac{\nu}{m}$$

したがって,

$$E_2 = E_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8\pi} \right)$$

$$E_3 = E_1 \frac{\nu^2}{\omega^2}$$

となる。

このエネルギー, および粒子の質量を電子に対しては c , イオンに対しては i をつけてあらわすと,

$$(1) \quad \nu \gg \omega \text{ のとき} \quad \frac{E_{1i}}{E_{1e}} \cong \sqrt{\frac{m_e}{M_i}}$$

$$(2) \quad \nu = \omega \text{ のとき} \quad \frac{E_{2i}}{E_{2e}} \cong \sqrt{\frac{m_e}{M_i}}$$

$$(3) \quad \nu \ll \omega \text{ のとき} \quad \frac{E_{3i}}{E_{3e}} \cong \left(\frac{m_e}{M_i} \right)^{\frac{3}{2}}$$

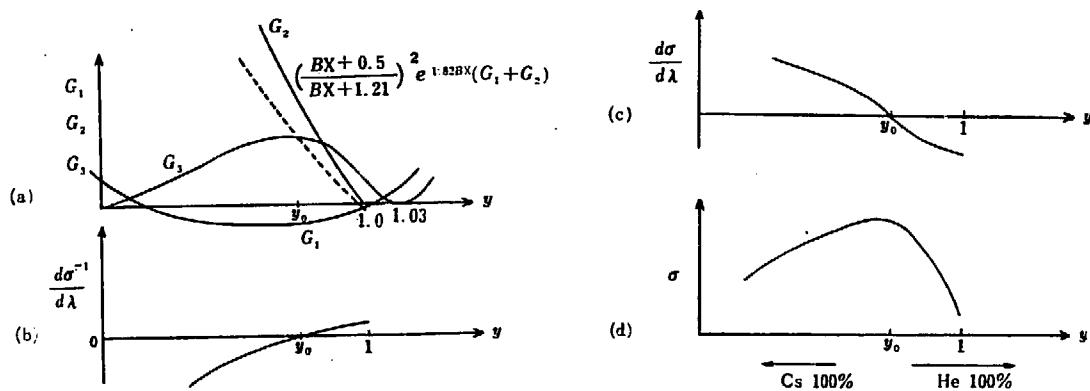
となる。ただし, この際 $\nu_e/\nu_i \cong \sqrt{M_i/m_e}$ と考えた。

以上の関係から判ることは, 外部電場が1箇のイオンに与えるエネルギーは弾性衝突の場合, 外部電場のすべての周波数領域にわたって電子に与えるエネルギーにくらべて十分に小さい。

すなわち, 外部電場のイオンの加熱に使われるエネルギーは省略できることを示している。きわめて周波数の高い領域(3)では, m_e/M_i の $3/2$ 乗に比例するから, 高周波がイオンを加熱しにくいことが判るが, MHD で使用する圧力では ν は 10^9 以上高いので, 周波数による変化はほとんど考える必要がない。

付 錄 III

二種ガス（稀ガス＋アルカリ蒸気）の混合ガスに直流電場を印加する場合には、ほかの純粋なガスにくらべ極端に短時間に飽和電離度（飽和電気伝導度）まで達した。稀ガスに添加するアルカリ蒸気の割合を変えた場合には、電気伝導度も Fig. 13 (d) のように変ってゆき、ある一定の混合比のところで最大になっている。この現象は次のような物理的意味をもっている。すなわち、アルカリ原子の Q_{elast} は稀ガスの Q_{elast}



$$\frac{d\sigma^{-1}}{d\lambda} = G_3 - \left(\frac{BX + 0.5}{BX + 1.21} \right)^2 e^{1.82BX} (G_1 + G_2)$$

$$G_1 = 6.67 \times 10^{-2} (BX + 0.5) (BX + 1.21) (3y^2 - 4.06y + 1.03)$$

$$G_2 = \{(BX + 1.405)^2 + 0.350\} \left(\frac{1}{y} - 0.5 \right) (1.03 - y) (1 - y)^{1/2}$$

$$G_3 = 1.631 \times 10^{-2} y^2 (1.03 - y)^2$$

$$BX = 8.24 \frac{(1-y)^{1/2}}{y}$$

$$y = N\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Q_{\text{Cs}}}{Q_{\text{He}}} - 1 \right) \epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{n_{\text{Cs}}}{n_{\text{He}} + n_{\text{Cs}}}$$

$$y_0 = 0.951$$

$$\frac{n_{\text{Cs}}}{n} = 7.6 \times 10^{-4}$$

Fig. 13 Relations between electric conductivity σ and seeding ratio ϵ .
(He + Cs; $n = n_{\text{He}} + n_{\text{Cs}} = 2.5 \times 10^{18}/\text{cm}^3$)

にくらべ極端に大きい。したがってアルカリ原子の数が少ないときには、電子の自由距離 λ ($= \frac{1}{\sum n_s Q_s}$) は大きくなり、中性原子に衝突する直前の電子速度は大きくなり、電離は容易におこなわれる。しかし、電気伝導度 σ は、

$$\sigma \propto \frac{n_1 \alpha_\infty}{\sqrt{T} \sum_{s=1}^2 n_s Q_s} * \quad (1)$$

1 : seeding ガス（アルカリ）

* 実際は n_1 は完全電離に近くなり $\sum n_s Q_s$ にはイオノー電子の効果も入れなければならないが以下の取扱いでは簡単のため $Q_{\text{Cs}} = Q_{\text{Cs}^+}$ と仮定した。したがって、 n_1 、 n_2 は電離前の おのおのの中性原子数に等しい。

2: 親ガス (稀ガス)

 α_∞ : アルカリ原子の飽和電離度

$$(n_1 + n_2)_0 = \text{const} = n$$

いま、系の断熱温度 T を一定とみなせば σ はいくら α_∞ が大きくて 1 に近くても、 $n_1 \rightarrow 0$ の場合には小さくなる。また逆に、 $n_1 \rightarrow n$ の場合には $\sum n_s Q_s$, α_∞ とも n_1 の増加する以上に減少するので σ は低下する。したがって、 $0 < n_1 < n$ の中間に σ を最大にする $\frac{n_1}{n}$ が存在するものと思われる。ここでは、この値を具体的に求める方法について記す。

簡単のために電子エネルギー分布式は HOLSTEIN 分布の 1) の場合を使用する。また、再結合過程は三体衝突再結合過程が律速過程と仮定する。そうすると、 σ は、

$$\sigma \propto \lambda n_1 \alpha_\infty = \lambda n_1 \left(\frac{1}{1 + \rho/a} \right) \quad (2)$$

ここで、

$$\lambda = \frac{1}{\sum n_s Q_s} \quad (\text{m}) \quad (3)$$

$$\rho = \frac{3 \times 10^{-8}}{A \lambda T^{2.5}} \quad (\text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec}) \quad (4)$$

 A : 中性原子の平均原子量 T : 中性原子の温度 $^\circ\text{K}$

$$a = 1.60 \times 10^{-8} R' \cdot \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{1}{1.41 t} \right) e^{-1.82 t} \quad (\text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec}) \quad (5)^*, **$$

$$t = \frac{1}{2} + r = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \varepsilon_1}{E} \cdot \frac{\sqrt{K}}{\lambda} \quad (6)^*$$

$$K = \frac{Q_{\text{excit}}}{Q_{\text{elast}}} = \lambda n_1 Q_1 K_1 \quad (7)$$

$$K_1 = \frac{Q_{\text{Cs excit}}}{Q_{\text{Cs elast}}} \quad (8)$$

$$n = \text{const} = n_1 + n_2 \quad (\text{atom/m}^3) \quad (9)$$

1: アルカリ (Cs)

2: 稀ガス (He)

n_1 に対する σ の変化を調べるわけであるが、計算の便利のために抵抗 σ^{-1} になおして計算する。

$$\sigma^{-1} = (\lambda n_1)^{-1} \left(1 + \frac{\rho}{a} \right) \quad (10)$$

まず (3), (9) 式より次式をうる。

$$n_2 = \frac{n Q_1 - \lambda^{-1}}{Q_1 - Q_2} \quad (11)$$

$$\therefore n_1 = \frac{\lambda^{-1} - n Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (12)$$

(11), (12) 式を用いると K , A は次のように変形される。

$$K = \lambda n_1 Q_1 K_1 = \frac{Q_1 K_1}{Q_1 - Q_2} (1 - n Q_2 \lambda) \quad (13)$$

$$A = \frac{n_1 Q_1 A_1 + n_2 Q_2 A_2}{n_1 Q_1 + n_2 Q_2} = \lambda \left(Q_1 A_1 \frac{\lambda^{-1} - n Q_2}{Q_1 - Q_2} + Q_2 A_2 \frac{n Q_2 - \lambda^{-1}}{Q_1 - Q_2} \right)$$

* この t は時間を示す t ではない。** (77) 式の z_1 に Cs の値を代入し、1) の場合であるから $k \rightarrow t$ とおく。さらに、 Q , ε_1 は Cs の値を代入する。

$$= \frac{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)}{Q_1 - Q_2} \left[\frac{Q_1A_1 - Q_2A_2}{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)} - \lambda \right] \quad (14)$$

また, t は (13) 式を用いて,

$$t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\varepsilon_1}{E} \sqrt{\frac{Q_1K_1}{Q_1 - Q_2}} \frac{\sqrt{1 - n_2\lambda Q_2}}{\lambda} \quad (15)$$

ここで,

$$nQ_2 = N \quad (16)$$

$$\frac{\sqrt{1 - N\lambda}}{\lambda} = \chi \quad (17)$$

$$\sqrt{\frac{3Q_1K_1}{Q_1 - Q_2}} \frac{\varepsilon_1}{E} = B \quad (18)$$

とおくと (15) 式は次のように書ける.

$$t = \frac{1}{2} + B\chi \quad (19)$$

また,

$$R' = \frac{1}{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 t + \frac{1}{t} \left\{ 1 + e^t \sqrt{\frac{\pi}{t}} N(\sqrt{2t}) \right\}} \quad (20)$$

ここで R' の分母は t の関数であるが t の変化に対してそれほど大きく変わらない. そしてだいたい $R' = 0.40$ の程度である. そこでいま, $R' = \text{const.}$ とおくと (5) 式は,

$$\alpha = 1.60 R' \times 10^{-8} \frac{\left(1 + \frac{1}{0.705 + 1.41B\chi}\right)}{(B\chi + 0.5)^2} e^{-0.91} e^{-1.92B\chi} \quad (21)$$

また ρ は,

$$\rho = \frac{3 \times 10^{-8}}{A\lambda T^{2.5}} = \frac{3 \times 10^{-8}}{\lambda \frac{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)}{Q_1 - Q_2} \left(\frac{Q_1A_1 - Q_2A_2}{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)} - \lambda \right)} \quad (22)$$

(12), (16), (21), (22) 式を (10) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} &\propto \left(\frac{Q_1 - Q_2}{1 - N\lambda} \right) \left\{ 1 + \frac{3 \times 10^{-8} \times (B\chi + 0.5)^3 e^{0.91} e^{1.92B\chi}}{T^{2.5} \lambda \frac{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)}{Q_1 - Q_2} \left(\frac{Q_1A_1 - Q_2A_2}{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)} - \lambda \right) \times 1.60 R' \times 10^{-8}} \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{1}{0.705 + 1.41B\chi} \right) \right\} \\ &= \frac{(Q_1 - Q_2)}{1 - N\lambda} \left\{ 1 + \frac{(Q_1Q_2) \times 3 \times 10^{-8} \times e^{0.91}}{nQ_1Q_2(A_1 - A_2) \times 1.60 R' \times 10^{-8} T^{2.5}} \frac{(B\chi + 0.5)^3 e^{1.92B\chi}}{\left(\frac{Q_1A_1 - Q_2A_2}{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)} - \lambda \right) (B\chi + 1.21) \lambda} \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

いまここで,

$$\frac{3 \times 10^{-8} e^{0.91}}{1.60 \times 10^{-8} R' T^{2.5}} - \frac{Q_1 - Q_2}{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)} = A \quad (24)$$

$$\frac{Q_1A_1 - Q_2A_2}{nQ_1Q_2(A_1 - A_2)} = F \quad (25)$$

とおくと σ^{-1} は,

$$\sigma^{-1} \propto \frac{1}{\lambda(F - \lambda)(1 - N\lambda)} \left\{ \lambda(F - \lambda) + A \frac{(B\chi + 0.5)^3}{B\chi + 1.12} e^{1.92B\chi} \right\} \quad (26)$$

また (17) 式より,

$$\frac{d\chi}{d\lambda} = \frac{N\lambda - 2}{2\lambda^2(1 - N\lambda)^{1/2}} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{d\sigma^{-1}}{d\lambda} &\propto -\frac{\{F-2(FN+1)\lambda+3N\lambda^2\}}{\{\lambda(F-\lambda)(1-N\lambda)\}^2} \left\{ \lambda(F-\lambda)+A \frac{(0.5+B\chi)^3}{1.21+B\chi} e^{1.82B\chi} \right\} \\
 &+ \frac{1}{\lambda(F-\lambda)(1-N\lambda)} \left[F-2\lambda+ABe^{B\chi} \frac{d\chi}{d\lambda} \left(\frac{0.5+B\chi}{1.21+B\chi} \right)^2 \right. \\
 &\times \left. \{3(1.21+B\chi)+1.82(1.21+B\chi)(0.5+B\chi)-(0.5+B\chi)\} \right] \\
 &= \frac{1}{\{\lambda(F-\lambda)(1-N\lambda)\}^2} \left[N\lambda^2(F-\lambda)^2-A \left(\frac{0.5+B\chi}{1.21+B\chi} \right)^2 e^{1.82B\chi} (0.5+B\chi) \right. \\
 &(1.21+B\chi) \{3N\lambda^2-2(FN+\lambda)\lambda+F\} + \frac{1.82B}{\lambda} \{(B\chi+1.405)^2 \\
 &\left. + 0.350\} \left(1-\frac{N\lambda}{2}\right)(F-\lambda)(1-N\lambda)^{1/2} \right] \quad (28)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$N\lambda = y \quad (y \geq 1) \quad (29)$$

とおくと、

$$F = \frac{Q_1 A_1 - Q_2 A_2}{n Q_1 Q_2 (A_1 - A_2)} = \frac{Q_1 A_1 - Q_2 A_2}{N Q_1 (A_1 - A_2)} = \frac{1 - \frac{Q_2 A_2}{Q_1 A_1}}{N \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)} \quad (30)$$

He+Cs の場合、

$$\frac{Q_2 A_2}{Q_1 A_1} = \frac{5.8}{400} \times \frac{4}{133} \approx 5 \times 10^{-4}$$

かつ、 $\frac{A_2}{A_1} = 0.030 \ll 1$ であるから F は、

$$F = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right) \quad (31)$$

(29), (30) 式を用いると、

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma^{-1}}{d\lambda} &\propto \frac{N}{A} \lambda^2 (F-\lambda)^2 - \left(\frac{0.5+B\chi}{1.21+B\chi} \right)^2 e^{1.82B\chi} \left[(0.5+B\chi)(1.21+B\chi) \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{N} (3y^2 - 4.06y + 1.03) + 1.82B \{(B\chi+1.405)^2 + 0.350\} \left(\frac{1}{y} - 0.5 \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(1 + \frac{A_2}{A_1} - y \right) \sqrt{1-y} \right] \quad (32)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{array}{l}
 A_1 = 133 \\
 A_2 = 4 \\
 K_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ (仮定)} \\
 n = 2.5 \times 10^{24}/\text{m}^3 \\
 Q_1 = 400 \times 10^{-20} \text{ m}^3 \\
 Q_2 = 5.8 \times 10^{-20} \text{ m}^3 \\
 \epsilon_1 = 1.38 \text{ eV}
 \end{array} \quad | \quad (33)$$

で、 $T = 1000^\circ\text{K}$, $E = 6 \text{ kV/m}$ の場合を計算する。なお、(20) 式の R' は 0.40 としておくと、

$$\begin{array}{l}
 N = n Q_2 = 1.45 \times 10^5 \\
 B = 0.568 \times 10^{-4} \\
 A = 1.95 \times 10^{-14} \\
 F = 0.71 \times 10^{-5} \\
 1 + \frac{A_2}{A_1} = 1.030
 \end{array} \quad | \quad (34)$$

$$G_1 = 6.67 \times 10^{-2} (B\lambda + 0.5) (B\lambda + 1.21) (3y^2 - 4.06y + 1.03) \quad (35)$$

$$G_2 = \{(B\lambda + 1.405)^2 + 0.350\} \left(\frac{1}{y} - 0.5\right) (1.03 - y) (1 - y)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

$$G_3 = 1.631 \times 10^2 y^2 (1.03 - y)^2 \quad (37)$$

とおくと、

$$\frac{d\sigma^{-1}}{d\lambda} \text{ の符号} \propto G_3 - \left(\frac{B\lambda + 0.5}{B\lambda + 1.21}\right)^2 e^{1.82B\lambda} (G_1 + G_2) \quad (38)$$

また $B\lambda$ は、

$$B\lambda = 8.24 \frac{\sqrt{1-y}}{y} \quad (39)$$

Fig. 13 よりわかるように σ の最大値は $y = y_0$, すなわち, $\lambda = \frac{y}{N} = y\lambda_{\max}$ の点で現われる。

(38) 式を数値的に解くと次の結果をうる。

$$y_0 = 0.951 \quad (40)$$

$$y_0 = N\lambda = \frac{nQ_2}{n_1Q_1 + n_2Q_2} = \frac{1}{\frac{n_1}{n} \left(\frac{Q_1}{Q_2} \right) + 1 - \frac{n_1}{n}} \quad (41)$$

より、

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\frac{1-y_0}{y_0}}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = 7.61 \times 10^{-4} \quad (42)$$

また、

$$\gamma = B\lambda = 1.917 \quad (43)$$

次に t の値は、

$$t = 0.5 + \gamma = 2.417 \quad (44)$$

また R' は、

$$R' = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \times 2.417 + \frac{1}{2.416} (1 + 11.26 \times 1.14 \times 0.0319) = 0.468 \quad (45)*$$

また、

$$\alpha = 1.6 \times 10^{-8} \times 0.468 \times \frac{1}{2.4172} \left(1 + \frac{1}{1.41 \times 2.417}\right) e^{-1.82 \times 2.417} = 2.04 \times 10^{-11} \quad (46)$$

$$A = \frac{5.80 \times 1.92 \times 10^{-11}}{3.94 \times 10^{-18}} \left(0.710 \times 10^{-5} - \frac{0.951}{1.45 \times 10^5}\right) = 10.24 \quad (47)$$

$$\rho = \frac{3 \times 10^{-8} \times 1.45 \times 10^5}{1.024 \times 10^8 \times 3.16 \times 10^7 \times 0.951} = 1.41 \times 10^{-11} \quad (48)**$$

$$\alpha_\infty = \frac{\alpha}{\alpha + \rho} = \frac{2.04 \times 10^{-11}}{(2.04 + 1.41) \times 10^{-11}} = 0.590 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \bar{\sigma}(T) \cdot \lambda n_1 \alpha_\infty \\ &= \bar{\sigma}(T) \cdot \frac{0.951 \times 2.5 \times 10^{34} \times 7.61 \times 10^{-4} \times 0.590}{1.45 \times 10^5} \\ &= 7.36 \times 10^{16} \bar{\sigma}(T) \end{aligned} \quad (50)$$

なお、同条件で G.E. の実験と同じ $n_{\text{Cs}_0} / n_{\text{He}_0} = 10^{-4}$ のときには、

* 始めに $R' = 0.40$ と仮定した値とだいたい一致している。

$(N(\sqrt{2}t) = 0.0139)$

** 再結合は三体衝突過程だけと考えてよい。また、この程度の密度では解離過程は無視できるであろう。

$$\begin{aligned}\alpha_{10^{-4}} &= 5.82 \times 10^{-10} \\ \rho_{10^{-4}} &= 2.90 \times 10^{-11} \\ \alpha_{\infty 10^{-4}} &= 0.977\end{aligned}\quad (51)$$

したがって、

$$\frac{\sigma_{\max.}}{\sigma_{10^{-4}}} = \frac{0.951 \times 7.61 \times 0.950}{0.977} = 4.37 \quad (52)$$

また、飽和時間 t_1 の比は、

$$\frac{t_1}{t_{10^{-4}}} = \frac{\alpha_{10^{-4}}}{\alpha} = \frac{5.82}{2.04} \times 10 = 2.85 \times 10 \quad (53)$$

$t_{10^{-4}} \approx 2.5 \times 10^{-4}$ sec であるから、

$$t_1 \approx 0.7 \times 10^{-2} \text{ sec} = 7 \text{ m sec} \quad (54)$$

ここで見たように一般に最高電気伝導度に対する seeding ratio は一方ではかなり長い飽和時間を必要とする。したがって、一般には飽和時間とここで議論した最高電気伝導度の両者を考慮して、最高電気伝導度における seeding ratio よりいくらかアルカリの少ない点で、seeding をおこなえばよい。

付 錄 III

本文ではおもに G.E. の実験条件の場合で数値計算を進めてきた。ここでは He+Cs 混合ガスに対する一般の数値の場合に電離度飽和時間 t_1 と飽和電離度 α_∞ を求める図表について説明する。なお、電子の平均自由距離を求める際に $Q_{Cs^+} = Q_{Cs}$ と仮定した。 $n_{Cs}/n_{He}(t=0) \leq 10^{-4}$ ならこのようにおいても数値的には正しい λ がえられる。

1) 電離度飽和時間

飽和時間 t_1 は次式より得られる。

$$t_1 = -\frac{\log \alpha_0}{an_{10}} \times 10^6 \text{ (sec)} \quad (1)$$

ただし、 n_{10} は $t = 0$ のときの Cs (中性) の数/m³

a : 生成係数 (cm³/ion·sec)

α_0 : $t = 0$ での Cs の電離度

一方、 $\log \alpha_0$ は次式で与えられる (熱電離の場合)

$$\log \alpha_0 = 3.9768 + \frac{3}{4} \log T - \frac{9800.3}{T} - \frac{1}{2} \log \frac{n_{10}}{n_1^*} \quad (2)$$

ここで

$$n_1^* = 2.687 \times 10^{25} \text{ /m}^3 \quad (3)$$

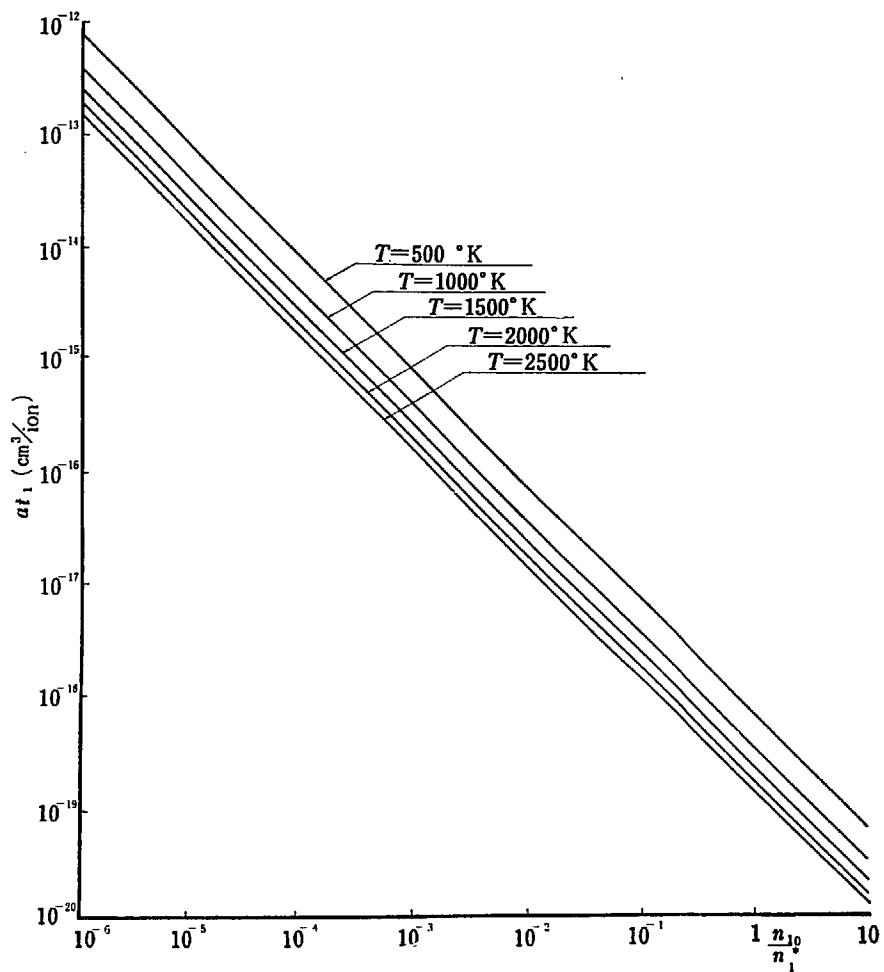
したがって、初期状態での Cs の数 n_{10} を与えることにより at_1 は求められる。このとき T は中性原子の温度でパラメーターとして取り扱うと便利である。 t_1 は a を求めればわかる。Fig. 14 は at_1 と n_{10}/n_1^* の関係を表わしたものである。

2) 生成係数

同一の組合せによる混合ガスなら、 γ の値が等しいとだいたい同じ値の a をもつ (γ の値が等しくても HOLSTEIN 分布の 1), 2), 3) の組が違う場合があるからそれによって a の値はわずかずつ異なる)

いまそこで、 γ の等しいものは同じ a をもつと仮定する。 γ の値は、

$$\gamma = \frac{\sqrt{3K\varepsilon_1}}{E\lambda} \quad (4)$$



n_{10} : number of Cs/m³ at $t = 0$

$n_1^* = 2.687 \times 10^{25}$ (atom/m³)

Fig. 14 Saturation time of the degree of ionization (t_1)

ここで \sqrt{K} は

$$\sqrt{K} = \sqrt{\frac{n_{10}Q_1K_1}{n_{10}Q_1 + n_{20}Q_1}} = \sqrt{\frac{K_1}{1 + \frac{n_{20}Q_2}{n_{10}Q_1}}} \quad (5)$$

ただし, K_1 は,

$$K_1 = \left(\frac{Q_{\text{Cs, excit}}}{Q_{\text{Cs, elast}}} \right) \quad (6)$$

1 : Cs
2 : He

いま, $n_{20}/n_{10} = 10^4$ としたときの K の値を K^* とし K と K^* の比を d^2 とおく。すなわち,

$$d = \sqrt{\frac{K}{K^*}} = \sqrt{\frac{1 + 10^4 \frac{Q_2}{Q_1}}{1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1}}} \quad (7)$$

いま,

$$\frac{E}{d} = E' \quad (8)$$

とおき λ を次のように書きかえる。

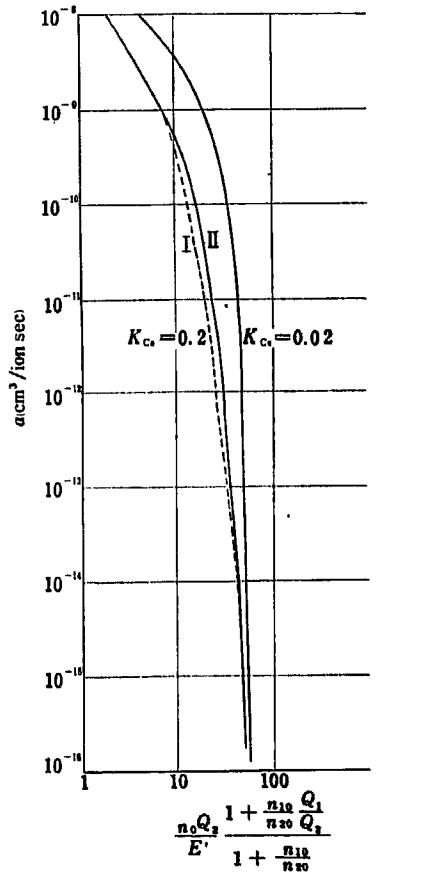
$$\begin{aligned}\lambda^{-1} &= n_{10}Q_1 + n_{20}Q_2 \\ &= n_0Q_2 \cdot \frac{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}} \frac{Q_1}{Q_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}\end{aligned}\quad (9)$$

ただし、 $n_0 = (n_{10} + n_{20})$ は一定とする。

したがって、 γ は、

$$\gamma = \sqrt{3K^*} \varepsilon_1 \frac{n_0 Q_2}{E'} \frac{\frac{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}} \frac{Q_1}{Q_2}}{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}}}}{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}}} \quad (10)$$

Q_1, Q_2 が電子のエネルギーにより変わらないと仮定すると (He+Cs の場合は $n_{\text{He}} / n_{\text{Cs}} > 10^3$ ではだいたいこの仮定は正しい) G.E. の実験条件で求めた数値をそのまま使用できる。Fig. 15 は、



$$n_{00} = n_{10} + n_{20} \text{ (atom/m}^3\text{)}$$

$$Q_{1,2} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$E' = \frac{E}{d} \text{ (volt/m)}$$

1 : Cs

2 : He

These curves are calculated from the following data;

$$Q_1 = 400 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$

$$Q_2 = 5.8 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$

$$K_{\text{Cs}} = \left(\frac{Q_{\text{excit}}}{Q_{\text{elast}}} \right)_{\text{cs}}$$

$$= \begin{cases} 0.2 & (\text{assumed values}) \\ 0.2 & \end{cases}$$

0 shows the values at $t=0$.

Fig. 15 Ionization coefficients

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 400 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \\ Q_2 &= 5.8 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

とおいて、 a と $\frac{n_0 Q_2}{E'} \frac{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}} \frac{Q_1}{Q_2}}{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}}}$ の関係を表わした図である。ただし、 K_1 としては次の二つの値

を採用した。

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = K_{(1)} = K_{Cs} = 0.2 \\ K_1 = K_{(2)} = K_{Cs} = 0.02 \end{array} \right\} \quad (12)$$

ただし、 E' は電場 E (volt/m) と d により求める。 d の値は Fig. 16 に n_{20}/n_{10} との関係で表わしてある。この場合にも Q_1, Q_2 は上の値を使用してある。

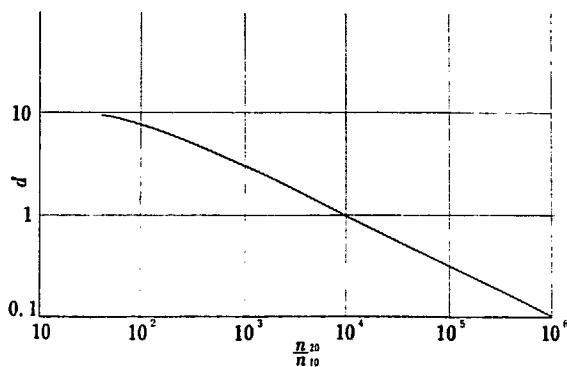


Fig. 16 Dimensionless excitation function

$$d = \sqrt{\frac{K^*}{K}} = \sqrt{\frac{1 + 10^{+} \frac{Q_2}{Q_1}}{1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1}}} \quad (13)$$

$$K = \frac{Q_{\text{excit}}}{Q_{\text{elast}}} \quad (14)$$

1 : Cs
2 : He } 0 shows the values at $t = 0$

This curve is calculated with $\frac{Q_2}{Q_1} = 1.45 \times 10^{-2}$

3) 再結合係数

再結合係数 ρ を ρ_r と ρ_t の和と仮定した。さらに、 ρ_r は電子のエネルギーによらず、常に、

$$\rho_r = 2 \times 10^{-12} \text{ (cm}^3/\text{ion}\cdot\text{sec}) \quad (13)$$

と仮定した。また、 ρ_t の値は、

$$\rho_t = \frac{3 \times 10^{-8}}{A \lambda T^{2.5}} \text{ (cm}^3/\text{ion}\cdot\text{sec}) \quad (14)$$

ここで、

$$A = \frac{n_{10} Q_1 A_1 + n_{20} Q_2 A_2}{n_{10} Q_1 + n_{20} Q_2} = \frac{A_1 \left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1} \frac{A_2}{A_1} \right)}{1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1}} \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{1 + \frac{n_{20}}{n_{10}}}{n_0 \left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1} \right)} \quad (16)$$

ただし、

$$n_0 = n_{10} + n_{20} \quad (17)$$

$$\therefore \rho_t = \frac{3 \times 10^{-8}}{A_1 T^{2.5}} n_0 Q_1 \frac{\left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1} \right)^2}{\left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \right) \left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1} \frac{A_2}{A_1} \right)} \quad (18)$$

ここで定数、

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 1.33 \times 10^3 \text{ (Cs)} \\ A_2 = 4.0 \text{ (He)} \end{array} \right\} \quad (19)$$

を代入すると、

$$\rho_t = \frac{2.25 \times 10^{-10}}{T^{2.5}} n_0 Q_1 \frac{\left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1} \right)^2}{\left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \right) \left(1 + 3.01 \times 10^{-2} \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1} \right)} \text{ (cm}^3/\text{ion}\cdot\text{sec}) \quad (20)$$

いまここで、

$$\Lambda^{-1} = n_0 Q_1 \frac{\left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{n_{20}}{n_{10}}\right) \left(1 + 3.01 \times 10^{-2} \frac{n_{20}}{n_{10}} \frac{Q_2}{Q_1}\right)} \quad (m^{-1}) \quad (21)$$

とおくと、

$$\rho_t = \frac{2.25 \times 10^{-10}}{T^{2.5}} \Lambda^{-1} \quad (\text{cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec}) \quad (22)$$

Q_1, Q_2 として前記の値を使用し、 ρ_t と Λ^{-1} の関係を表わしたもののが Fig. 17 である。中性原子温度 T はパラメーターとして取り扱われている。

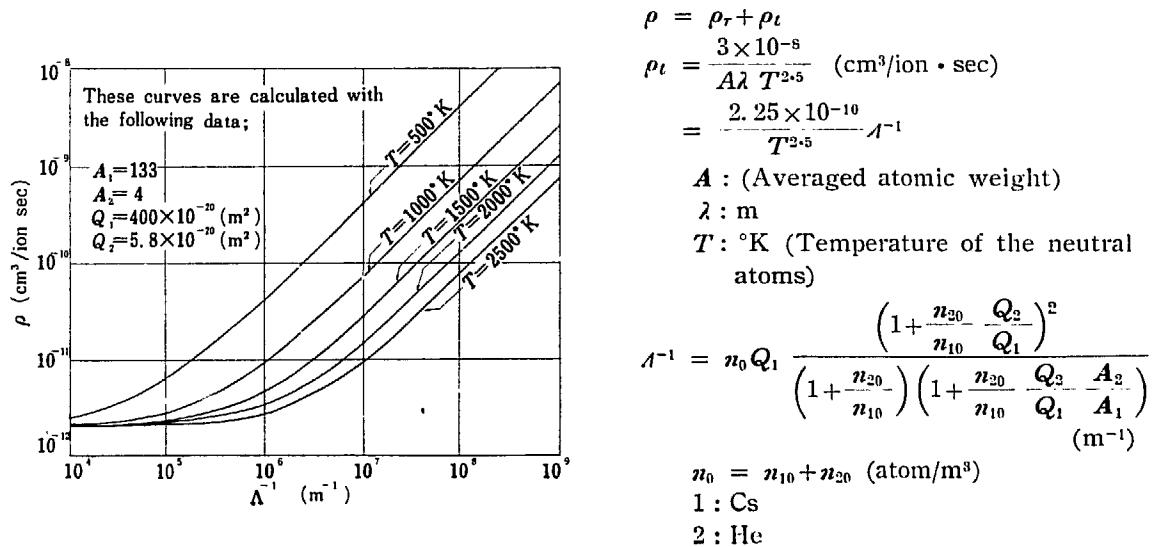


Fig. 17 Recombination coefficient

4) 飽和電離度

飽和電離度 a_∞ は次式で表わされる。

$$a_\infty = \frac{1}{1 + \rho/a} = \frac{1}{1 + \{(22) + (13)\}/a} \quad (23)$$

したがって、放電開始前の中性原子の数 ($= n_{\text{He}0} + n_{\text{Cs}0}$) が定まり、混合比、電場、作動ガス温度が与えられると Fig. 14, Fig. 15, Fig. 16 および Fig. 17 を用いて a_∞ を求めることができる。

5) 計算例

$$n_{\text{He}0} + n_{\text{Cs}0} = 10^{25} \quad (\text{atom/m}^3) = n_0 \quad (t = 0)$$

$$\frac{n_{\text{Cs}0}}{n_{\text{He}0}} \quad (t = 0) = 10^{-4} = \frac{n_{10}}{n_{20}}$$

$$T = 1500 {}^\circ\text{K}$$

$$E = 50 \times 10^3 \quad \text{volts/m}$$

以上のとき t_1 と a_∞ を求める。ただし、 $K_{\text{Cs}} = 0.02$ とし Q_1, Q_2 は次の値を使う。 $Q_1 = 400 \times 10^{-20} \text{ m}^2$, $Q_2 = 5.8 \times 10^{-20} \text{ m}^2$, 先ず始めに a を求める。

d の値は Fig. 16 より $d = 1$ である。

したがって、

$$E' = \frac{E}{d} = 5 \times 10^4$$

$$\frac{n_0 Q_2}{E^1} \cdot \frac{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}} \frac{Q_1}{Q_2}}{1 + \frac{n_{10}}{n_{20}}} = \frac{10^{25} \times 5.8 \times 10^{-20}}{5 \times 10^4} \cdot \frac{1 + 10^{-4} \times \frac{4}{5.8} \times 10^2}{1 + 10^4} = 11.60$$

したがって、 α は Fig. 15 より、

$$\alpha = 3.0 \times 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec}$$

$$\frac{n_{10}}{n_1^*} = 0.374 \times 10^{-4} \text{ であるから } at_1 \text{ の値は Fig. 14 より}$$

$$at_1 = 6.6 \times 10^{-15} \text{ cm}^3/\text{ion}$$

$$\therefore t_1 = \frac{6.6 \times 10^{-15}}{3.0 \times 10^{-9}} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ sec} = 2.2 \mu \text{ sec}$$

$$A^{-1} = 10^{25} \times 4 \times 10^{-18} \frac{1 + 10^4 \times 1.45 \times 10^{-2}}{(1 + 10^4) \left(1 + 1.45 \times 10^2 \times \frac{4}{1.33} \times 10^{-2} \right)} = 1.09 \times 10^5 \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

したがって、Fig. 17 より ρ は

$$\rho = 2.3 \times 10^{-12} \text{ (cm}^3/\text{ion} \cdot \text{sec})$$

したがって、 α_∞ は、

$$\alpha_\infty = \frac{1}{1 + \frac{2.3 \times 10^{-12}}{3.0 \times 10^{-9}}} = \frac{1}{1 + 0.8 \times 10^{-3}} \cong 1.0$$

また、このときの電子の数は

$$\begin{aligned} 10^{25} \times 10^{-4} &= 10^{21} \text{ election/m}^3 \\ &= 10^{15} \text{ election/cm}^3 \end{aligned}$$