

炉雑音の理論 (I)

1970年3月

日本原子力研究所

Japan Atomic Energy Research Institute

日本原子力研究所は、研究成果、調査結果などを JAERI レポートとして、つぎの4種に分けそれぞれの通し番号を付し、不定期に刊行しております。

- | | | |
|---------|--------------------------------|-------------|
| 1. 研究報告 | まとまった研究の成果あるいはその一部における重要な結果の報告 | JAERI 1001- |
| 2. 調査報告 | 総説・展望・調査の結果などをまとめたもの | JAERI 4001- |
| 3. 年報 | 研究・開発その他の活動状況などの報告 | JAERI 5001- |
| 4. 資料 | 施設の概要や手引きなど | JAERI 6001- |

このうち既刊分については「JAERI レポート一覧」にタイトル・要旨をまとめて掲載し、また新刊レポートは「研究成果要旨集」(隔月刊)で逐次紹介しています。

これらのリスト・研究報告書の入手および複写・翻訳などのご要求は、日本原子力研究所技術情報部(茨城県那珂郡東海村)に申しこんでください。

Japan Atomic Energy Research Institute publishes the nonperiodical reports with the following classification numbers:

1. JAERI 1001- Research reports
2. JAERI 4001- Survey reports and reviews
3. JAERI 5001- Annual reports
4. JAERI 6001- Manuals etc.

Requests for the above publications, and reproduction and translation should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan

JAERI 1187 正誤表

ページ	行	誤	正
vii	$B(\mathbf{x})$	(6. 154)	(6. 153)
	Cr	Eq. (7. 1222)	Eq. (7. 122)
viii	f_{1s}	$f(t)$ の定常値	$f_1(t)$ の定常値
	$f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	$f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	$f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$
	$\tilde{f}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$	$\tilde{f}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$	$\tilde{f}_2^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$
ix	g_{nm}	Eq. (6. 148) & Eq. (6. 152)	Eq. (6. 147) & Eq. (6. 151)
	\tilde{H}_{nj}	Eq. (7. 19)	Eq. (7. 18)
x	M		削除
	\tilde{P}_∞		削除
xi	$p_i(n_1, n_2, \dots, n_M)$	$p_i(n, n, \dots, n_M)$	$p_i(n_1, n_2, \dots, n_M)$
	$R(T)$	Eq. (7. 113)	Eq. (7. 119)
	\bar{S}	Eq. (7. 63)	Eq. (7. 63) & (7. 100)
	\bar{S}_f		削除
	\bar{S}_f	\bar{S}_f	\bar{S}_2
	同上	Eq. (7. 100)	Eq. (7. 101)
xi	$T[s]$	Eq. (6. 6)	Eq. (6. 5)
xii	u_0	Eq. (5. 14)	Eq. (5. 44)
	u_i	Eq. (5. 16)	Eq. (5. 46)
xiii	ε_n	ε_n	$\bar{\varepsilon}_n$
	ζ_0	Eq. (7. 94) & (7. 112)	Eq. (7. 93) & (7. 111)
	$\bar{\pi}_d$	Eq. (5. 89) の上の式	Eq. (5. 89)
11	左欄下から 9	KATSURAKI	KATSURAGI
14	Eq. (3. 47) 右辺	$-v \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) + \dots$	$-[v \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) + \dots$
15	Eq. (3. 49) 右辺	$\iint d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2$	$\iint d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2$
18	Eq. (4. 11) 右辺	$\exp[-\alpha(t - \xi')] 2D \dots$	$\exp[-\alpha(t - \xi')] 2D \dots$
29	左欄下から 18 行	条件付き確率 $p(\nu_0, \nu_1/\nu)$	条件付き確率 $p(\nu_0, \nu_1/\nu)$
31	Eq. (4. 121') 右辺	$1 - \beta + \beta k \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2}$	$1 - k + \beta k \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2}$
	左欄下から 16 行	$[\nu_0(\nu_0 - 1)] + \dots$	$[\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle] + \dots$
35	Eq. (4. 187) 右辺	$\frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu^2 \rangle}$	$\frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu \rangle^2}$
36	Eq. (4. 192) の 2 行上	${}^a C^{(i)}(t)$ とおこう	${}^a C^{(i)}(t) dt$ とおこう
42	Eq. (4. 260) 右辺	$W^{(i)} f_{1s}^{(i)}$	$W^{(i)} f_{1s}^{(i)}$
43	Eq. (4. 271) 右辺	$\frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu^2 \rangle}$	$\frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu \rangle^2}$
44	Eq. (4. 282) 右辺	$\frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu^2 \rangle}$	$\frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu \rangle^2}$
		$\frac{\langle \eta(\eta - 1) \rangle}{\langle \eta^2 \rangle}$	$\frac{\langle \eta(\eta - 1) \rangle}{\langle \eta \rangle^2}$
	Eq. (4. 283) 右辺	$\frac{\langle \eta(\eta - 1) \rangle}{\langle \eta^2 \rangle}$	$\frac{\langle \eta(\eta - 1) \rangle}{\langle \eta \rangle^2}$
51	Eq. (5. 9) 右辺最下段	$\Sigma \{ \Pi P(\dots \dots) \} + u$	$\Sigma \{ \Pi P(\dots \dots) \} + u$

(裏面につづく)

ページ	行	誤	正
53	Eq. (5. 25) の下 Eq. (5. 35) 右辺	ひとまとめにして y $v' \Sigma_t(\mathbf{x}'), \mathbf{v}' \times \dots$	ひとまとめにして y' $v' \Sigma_t(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \times \dots$
59	Eq. (5. 93) Eq. (5. 94)	$\times V_J, t_{JJ}, T_J \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ $\times V_J, t_{JJ}, T_J \mathbf{x}, i, t)$	$V_J, t_{JJ}, T_J \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ $V_J, t_{JJ}, T_J \mathbf{x}, i, t)$
69	左欄下から 11 行	方程式 (5. 80)	方程式 (5. 70)
71	Eq. (5. 201) 右辺最後の項	$\times [\int d\mathbf{v}' \dots$	$+\int d\mathbf{v}' \dots$
72	Eq. (5. 201') 右辺最後の項	$+2\langle \theta^2 \rangle \dots$	$+2\langle \theta \rangle^2 \dots$
91	右欄中段	6. 2. 2 自己スペクトル密度	6. 6. 2 自己スペクトル密度
92	Eq. (6. 200) 右辺	$\int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x}'$	$\int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}'$
99	Eq. (7. 26) 3 行下の方程式番号	(7. 27)	削除
102	Eq. (7. 67) の 2 行下	$G(z S) \approx [1 - \langle N \rangle / 2\sigma \ln z]^{2\sigma}$	$G(z s) \approx [1 - \langle N \rangle / (2\sigma) \ln z]^{-2\sigma}$
111	左欄上から 3 行	現わすこともできる	表わすこともできる
118	Table 15	$e^{i\omega t}$	$e^{i\theta t}$
122	左欄最後の式 同上式番号	$\Delta C \rightarrow d\tau_A$ (7. 206)	$\Delta C \rightarrow d\tau_c$ (7. 207)
124	左欄下から 5 行	柱木 学氏	桂木 学氏
130	(A. 81) 式 2 行下 Eq. (A. 85) 右辺	密与 $\int d\omega \Phi(\omega) e^{-i\omega\tau}$	寄与 $\int d\omega \Phi(\omega) e^{i\omega\tau}$
139	Eq. (E. 5) 右辺	$\frac{j!}{(j-i)!} [\tilde{G}(z)]^{i-j}$	$\frac{j!}{(j-i)!} [\tilde{G}(z)]^{j-i}$

炉 雑 音 の 理 論 (I)

要 旨

中性子輸送現象を線型・マルコフ的な分枝確率過程としてとらえ、低出力炉における炉雑音現象の理論構成をしめし、炉雑音実験解析のための種々な公式の導出を統一的におこなうとともに、公式相互の関連をあきらかにした。本報の構成は、以下の通り。

(1) では、どういふ実用上の要請から炉雑音理論の開発が促されてきたのか、また本報で展開する理論の基本的前提はなにかについてのべた。(2) では、原子炉を対象におこなわれる種々な動特性実験のなかで、いわゆる炉雑音実験が占める位置についてふれ、(3) では、零出力炉雑音理論の発展の小史をしるした。(4) では、中性子数のゆらぎは、炉に内在する不規則な雑音源に起因するという観点にたった Langevin 法による理論構成をしめした。(5) では、中性子輸送現象における分枝過程に特に重点をおいた理論構成について述べ、中性子数、観測量の確率分布の高次モーメントおよび多時点相関関数の物理的構造を、中性子家系図を用いて明らかにした。以上、(4)、(5) で展開した基礎理論の応用例を、(6)、(7) にしめした。すなわち、(6) では、炉雑音の周波数分析をおこなう場合、また、(7) では、時間分析をおこなう場合について、それぞれ、解析公式を導出し、対応する実験または、数値計算例を掲げた。なお、付録には、核分裂にともない放出される即発中性子数の確率分布、そのモーメントに関するデータおよび雑音現象論に用いられる術語の初等的解説を掲げた。

1969年6月

日本原子力研究所
原子炉工学部
齋藤慶一

Theory of Reactor Noise (I)

Abstract

Neutron fluctuations in a low-power reactor are formulated under the premise that they obey linear Markoffian branching process. Formulas for various methods of noise analysis are uniformly derived from results of the basic theoretical study. Interrelations among the formulas are critically examined. The present report consists of following chapters:

(1) summarizes practical requirements stimulating the development of the reactor noise theory, and presuppositions underlying the theory of the present author. (2) explains the significance the noise analysis experiment in the various kinds of the kinetic experiment performed on nuclear reactors. A brief history of the development of the reactor noise theory is presented in (3). (4) deals with the theoretical formulation from the Langevin's approach and finds out the noise-equivalent source in zero-power reactors. (5) formulates the neutron transport processes from the view point that they follow stochastic branching processes. Physical structures of correlation functions and moments of the probability distribution for neutrons or detection counts are clarified with the use of tree diagrams of neutron family. (6) and (7) applies the basic theory developed in (4) and (5) to the practical problems, i. e., to the derivation of formulas for the frequency domain analysis as well as the time domain analysis of reactor noise. Appendix summarizes nuclear data on the probability distribution and the second moment of the number of prompt neutrons emitted by a fission. Elementary explanation of the terminology of noise phenomena is also present in Appendix.

June, 1969

Keiichi SAITO
Division of Nuclear Engineering
Japan Atomic Energy Research Institute

目 次

記号表	
1. 序 論	1
2. 低出力炉雑音の理論モデル	5
3. 零出力炉雑音理論の構成	
3.1 量子論的方法	8
3.2 古典論的方法	9
3.2.1 Kolmogorov の方法	9
3.2.2 Langevin の方法	13
3.2.3 Feynman の方法	15
4. 炉雑音源に関する考察 (零出力炉)	
4.1 はじめに	17
4.2 一点炉モデルにたいする Langevin の方法	18
4.3 遅発中性子を考慮した Langevin の方法	20
4.4 空間および速度依存を考慮した Langevin の方法	23
4.5 雑音源の性質-I. Schottky の公式	26
4.6 零出力炉にたいする Schottky の公式の適用	28
4.7 雑音源の性質-II. Einstein の関係式	29
4.8 検出器出力のゆらぎとの関連	31
4.8.1 検出反応率と検出器出力との関連	32
4.8.2 検出反応率のゆらぎ——一点炉モデルの場合	34
4.8.3 検出反応率のゆらぎ——一般の場合	36
4.9 炉内における光子のゆらぎ	40
4.9.1 光子数のゆらぎのスペクトル密度	40
4.9.2 光子検出器出力のゆらぎのスペクトル密度	42
4.10 検出器雑音	44
4.11 まとめ	46
5. 中性子輸送の確率論的考察	
5.1 はじめに	50
5.2 中性子輸送にたいする基礎方程式	50
5.2.1 中性子のふるまい	50
5.2.2 初衝突法による中性子存在確率のしたがう方程式の導出	51
5.2.3 中性子輸送方程式の導出	53
5.3 存在確率母関数にたいする運動方程式	54
5.3.1 遅発中性子を考慮した場合	54
5.3.2 観測量——一回観測の場合	57
5.3.3 観測量——多数回観測の場合	59
5.3.4 外部中性子源のある場合	59
5.4 確率分布のモーメント	60
5.5 積密度グリーン関数とその物理的構造	63
5.5.1 結合確率と積密度分布関数	63
5.5.2 積密度グリーン関数の物理的構造——拡張された Feynman の方法	65
5.6 インポートランス場と観測量のモーメント	69
5.7 まとめ	72
6. 零出力炉雑音のスペクトル密度	
6.1 一点炉モデル	75
6.2 動特性パラメータの推定	76
6.2.1 中性子寿命	76
6.2.2 反応度	77
6.2.3 炉出力絶対値	77
6.3 二群一点炉モデル	78
6.4 二点結合炉モデル	80
6.5 空間依存伝達関数と炉雑音スペクトル密度	84
6.5.1 一群拡散モデル	84
6.5.2 二群拡散モデル	88
6.6 大型均質炉	90
6.6.1 相互スペクトル密度	91
6.6.2 自己スペクトル密度	91
6.6.3 検出器の自己遮蔽効果	94
6.7 まとめ	94
7. 相関時間分析法	
7.1 Feynman- α 法	96
7.1.1 一点炉モデル	96
7.1.2 一群拡散モデル	97
7.2 確率分布関数の評価——Pál-Bell 方程式の近似解 (2 叉基本モード近似)	100
7.3 待ち時間分布の解析 (Mogil'ner- P_0 法, Babala- P_{CC} , P_{RO} 法)	106
7.4 Rossi- α 法の解析公式	109
7.4.1 Orndoff 型の Rossi- α 法	111
7.4.2 待ち時間のある Rossi- α 法	114
7.5 動特性パラメータの推定原理	117
7.6 三叉分枝過程の寄与	118
7.7 まとめ	122
あとがき	124
謝 辞	124
付録 A. 確率過程論に関する基礎知識	125
A.1 確率過程	125
A.2 定常性とエルゴード性	125
A.3 確率過程の表現	126
A.3.1 確率および Bayes' rule	126
A.3.2 確率密度関数	126
A.3.3 相関関数	129
A.3.4 スペクトル密度関数	130
A.4 マルコフ過程	132

付録 B. 核分裂に伴う放出中性子数の確率分布 135	付録 F. (7.106) 式の導出139
B.1 即発中性子135	
B.2 遅発中性子135	
付録 C. (4.47) 式の導出138	文 献141
付録 D. (4.49) 式の導出138	索 引147
付録 E. (5.116) 式の導出139	

CONTENTS

List of symbols

1. Introduction	1
2. Theoretical model of low-power reactor noise	5
3. Approaches to the zero-power reactor noise theory	
3.1 Quantum mechanical approach.....	8
3.2 Classical approach.....	9
3.2.1 Kolmogorov method.....	9
3.2.2 Langevin method	13
3.2.3 Feynman method	15
4. Noise-equivalent source in zero-power reactors	
4.1 Introduction	17
4.2 Langevin method applied to one-point model	18
4.3 Langevin method including delayed neutrons	20
4.4 Langevin method applied to space- and energy-dependent analysis.....	23
4.5 Property of noise source-I Schottky formula	26
4.6 Application of the Schottky formula	28
4.7 Property of noise source-II Einstein relation.....	29
4.8 Fluctuations in detector outputs	31
4.8.1 Detector outputs and detection rate.....	32
4.8.2 Fluctuations in detection rate (one-point reactor model).....	34
4.8.3 Fluctuations in detection rate (general case).....	36
4.9 Photon fluctuations in nuclear reactors	40
4.9.1 Spectrum of photon noise	40
4.9.2 Noise spectrum of photon detector outputs	42
4.10 Detector noise	44
4.11 Summary	46
5. Stochastic formulation of neutron transport	
5.1 Introduction	50
5.2 Stochastic equation of neutron transport.....	50
5.2.1 Behaviors of neutrons	50
5.2.2 Derivation of kinetic equation	
for the probability distribution of the number of neutrons	51
5.2.3 Derivation of Boltzman equation for neutron transport	53
5.3 Kinetic equations for the probability distribution.....	54
5.3.1 Number of neutrons and precursors.....	54
5.3.2 Number of counts— one-time point detection.....	57
5.3.3 Number of counts— multi-time point detection	59
5.3.4 Extraneous neutron source.....	59

5.4	Moments of the number of neutrons	60
5.5	Product density and its physical meaning	63
5.5.1	Joint probability and product density function	63
5.5.2	Physical meaning of the Green's function of product density —extension of Feynman method	65
5.6	Importance function and moments of the number of counts	69
5.7	Summary.....	72
6.	Spectral density of zero-power reactor noise	
6.1	One-space-point model.....	75
6.2	Estimation of kinetic parameters	76
6.2.1	Neutron life	76
6.2.2	Reactivity	77
6.2.3	Reactor power	77
6.3	Two-energy-group, one-space-point model	78
6.4	Coupled core	80
6.5	Space-dependent noise spectrum and transfer function	84
6.5.1	One-energy-group, diffusion model	84
6.5.2	Two-energy-group, diffusion model	88
6.6	Large homogeneous core.....	90
6.6.1	Cross-spectral density	91
6.6.2	Auto-spectral density	91
6.6.3	Self-shielding effect of detectors	94
6.7	Summary.....	94
7.	Correlation time analysis of zero-power reactor noise	
7.1	Feynman- α formula	96
7.1.1	One-space-point model.....	96
7.1.2	One-energy-group, diffusion model	97
7.2	Expressions for the probability distribution function—solution of Pál-Bell equation on the two-forked-branching, fundamental-space-mode approximation...100	
7.3	Waiting time distribution of neutron counts —Mogil'ner- P_0 method and Babala- P_{CC} , P_{RO} method	106
7.4	Rossi- α formula	109
7.4.1	Orndoffian type	111
7.4.2	Rossi- α experiment with multi-channel time analyzer and time-of-flight logic...114	
7.5	Principle of parameter estimation	117
7.6	Contribution of the three-forked branching processes	118
7.7	Summary	122
	Concluding remarks	124
	Acknowledgements	124
	Appendix A. Basic relations in stochastic processes	125
A.1	Stochastic processes	125
A.2	Stationarity and Ergodic property	125
A.3	Representations of stochastic processes	126

A. 3. 1 Probability and Bayes's rule	126
A. 3. 2 Probability density function	126
A. 3. 3 Correlation function	129
A. 3. 4 Spectral density function	130
A. 4 Markoffian processes	132
Appendix B. Probability distributions of the number of neutrons emitted by nuclear fissions.....	135
B. 1 Prompt neutrons	135
B. 2 Delayed neutrons.....	135
Appendix C. Derivation of Eq. (4. 47).....	138
Appendix D. Derivation of Eq. (4. 49).....	138
Appendix E. Derivation of Eq. (5. 116)	139
Appendix F. Derivation of Eq. (7. 106)	139
References	141
Index	147

List of Tables

1. Miscellaneous response experiments	5
2. Relaxation time constants.....	6
3. Individual contribution to the noise-equivalent source (One-point model, no delayed neutrons)	20
4. Individual contribution of the noise-equivalent source (One-point model with delayed neutrons).....	22
5. Contribution of detection processes to the noise-equivalent source (One-point model)...	35
6. Contribution of detection processes to the noise-equivalent source (M-point model).....	37
7. Individual contribution of the noise-equivalent source (One-point model with photons).....	41
8. Elementary events in detectors	45
9. Partition number, R_{mj}	61
10. Partition set, $[r/m, j]$	62
11. Two-group constants.....	80
12. Coherence functions in two-point symmetrically coupled core	82
13. Geometrical factors (One-group diffusion model)	88
14. Characteristic frequency dependence of the power spectral density in the higher frequency region for various detector geometry	93
15. Physical parameters contained in the measured quantities	118
16. Probability density functions.....	128
17. Autocorrelation and power spectral density functions	131
18. Probabilities of the number of prompt neutrons emitted by nuclear fissions	136

List of Figures

1. Generalized response experiment on nuclear reactors	5
2. Forward and backward Kolmogorov method.....	10
3. Family of neutrons	15
4. Noise spectra in one-point zero-power reactors	36
5. Langevin's approach to linear Markoffian processes.....	48
6. Transport variables	50
7. Variables for single detection.....	57
8. Variables for double detection	59
9. History of an ancestor neutron	65
10. Family tree of two neutrons	67
11. Family tree of three neutrons, each of which comes from the same branching point...67	
12. Family tree of three neutrons consisting two chain-correlated subgroups	68
13. Family trees of neutrons	68
14. Separation of reactor noise from spurious noise	75
15. Measured frequency response of the ionization chamber.....	76
16. Pile noise spectrum from ZPR-V	77
17. Measurement of subcriticality.....	77
18. Reactor power calibration	78

19. Noise spectra on two-group model	80
20. Coherence function $R(\omega)$ of the ring core and two slab core loading.....	83
21. Space-dependent amplitude response to pile oscillation	86
22. Count-rate spectral density	88
23. Measured and calculated power spectral density for a small water moderated nearly critical core	90
24. Noise spectra for spherical detectors in an infinite water moderated core.....	93
25. Power spectral density of a just-critical, infinite, homogeneous core as detected by an infinite plate detector	94
26. Comparison of indices, Y and Z of Feynman- α 's experiment	97
27. Effect of delayed neutrons on variance/mean-1.....	98
28. Probabilities that a neutron born at time $t=0$ will lead exactly N neutrons at final time t_f	100
29. Probability distribution of neutrons in a steadily operating subcritical core	102
30. Probabilities of obtaining exactly N counts from a detector between t_f and t_f+T due to a single neutron born at time $t=0$	103
31. Probabilities of obtaining exactly N counts per source neutrons when the detection interval is infinitely long	104
32. Time scale of the "three-intervals" probability generating function	104
33. Time scale of waiting time distribution.....	107
34. Waiting time distributions.....	108
35. Measurement by P_0 -method	108
36. Measurement of $P_{RO}(T)$	109
37. Rossi- α data	113
38. Comparison of the space-independent auto-correlation function and the auto-correlation function of the count rate of a point detector located in an infinite homogeneous reactor	114
39. Cross-correlation function of the count rates of two detectors located in an infinite homogeneous reactor as a function of detector separation distances in terms of the diffusion lengths	114
40. Correlation amplitudes when triggered by the family N -th count.....	117
41. Time interval of the three-time-point correlation function and the three-time-point Rossi- α experiment	121
42. Expected frequency of observation of count trios	122
43. Experimental noncumulative neutron emission probabilities.....	135

記 号 表

A	白色雑音源のスペクトル密度 (行列) $= \Phi_{FF}(\omega) = 2D$.
A_{ij}	A の $(i-j)$ 成分.
${}^a A_{ij}$	検出器 a による i 番目のセルにおける検出に対する雑音源と検出器 b による j 番目のセルにおける検出に対する雑音源との間の相互スペクトル密度, Eq. (4. 201).
${}^b A_{ij}$	i 番目のセルにおける中性子数に対する雑音源と検出器 a による j 番目のセルにおける検出に対する雑音源との間の相互スペクトル密度, Eq. (4. 205).
A_0	Orndoff の相関項振幅.
A_N	Family- N th-count-trigger の場合の相関項振幅.
a_0	$L_c^2(\omega)$ の実数部分, Eq. (6. 183).
a_1, a_2, a_3	Eq. (7. 90).
B	ボルツマン作用素 (行列) $= L - \frac{\partial}{\partial t}$.
B_{ij}	B の $(i-j)$ 成分.
$B_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \mathbf{x}', \mathbf{v}')$	輸送ボルツマン作用素行列の $(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\beta, \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 成分, Eq. (4. 57).
$B(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$	一群拡散作用素行列の $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 成分, Eq. (4. 59).
$B(\mathbf{x}, \mathbf{v})$	輸送作用素, Eq. (3. 8).
$B(\mathbf{x})$	拡散作用素, Eq. (6. 106) & (6. 154).
B^T	B の転置行列.
B_n	$B(\mathbf{x})$ において $\Delta_{\mathbf{x}}$ を $-B_{gn}^2$ で置きかえたもの.
B_{gn}	n 番目の Helmholtz モードに対する幾何学的バックリング.
$B_r(t-\tau)$	遅れの効果をもつ線形作用素, Eq. (4. 113) & (6. 68).
B_0	Orndoff の非相関項振幅.
B_N	Family- N th-count-trigger の場合の非相関振幅.
b_0	$L_c^2(\omega)$ の虚数部分, Eq. (6. 184).
b_1, b_2, b_3	Eq. (7. 90).
$C_{(m)}$	(第 m 群の) 先行核数.
$C(T)$	時間幅 T の間の検出器全計数.
$C(t)$	時刻 t における検出器計数率.
${}^a C(t), {}^b C(t)$	それぞれ検出器 a, 検出器 b による $C(t)$.
${}^i C(t)$	Eq. (4. 125).
C_1	定常炉における $\langle C(t) \rangle$. すなわち, 単位時間当りの検出反応数の期待値.
${}^a C_i(t), {}^b C_i(t)$	それぞれ検出器 a, 検出器 b による $C_i(t)$.
$C(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) で時刻 t における検出器計数率.
${}^a C(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	検出器 a による $C(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.
${}^b C(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	検出器 b による $C(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.
${}^p C(t)$	光子検出反応率.
C_r	Chain register rate, Eq. (7. 1222).
C_{rN}	Rate of the N -th counts of neutron families.
$C(\xi)$	確率密度の特性関数.
$C(\omega)$	周波数 ω における検出器効果による炉雑音スペクトル密度の補正係数, Eq. (6. 193).
${}_m C_l$	$= \frac{m!}{(m-l)!l!}$
$c_i(t)$	i 番目のセルで時刻 t における検出器計数率.
$2D$	白色雑音源のスペクトル密度 $= A = 2\langle D_2 \rangle$.
D_n	すべての種類の素過程による状態変化量の n 次モーメント, Eq. (A. 98)
D_c	拡散係数.
$D[s] \propto Gr[s] $	

d	平板形検出器の厚み.
d_1, d_2, d_3	Eq. (7. 90).
E	中性子数の期待値を成分としてもつ対角行列, Eq. (4. 96).
E_{ij}	E の $(i-j)$ 成分 $= \delta_{ij} f_{is}^{(i)}$.
$\text{Erfc}(x)$	Complementary error function.
e_1, e_2, e_3	Eq. (7. 90).
$\mathbf{F}(t)$	時刻 t における Langevin 外力, 炉雑音源 (ベクトル).
$F^{(i)}(t)$	$\mathbf{F}(t)$ の i -成分.
${}^a F^{(i)}(t)$	検出器 a による i 番目のセルにおける検出に対する炉雑音源.
$\mathbf{f}(t)$	時刻 t における中性子数密度 (ベクトル), 原子炉の状態変数 (ベクトル).
$f^{(i)}(t)$	$\mathbf{f}(t)$ の i -成分.
$f^{(\alpha)}(t), f^{(\beta)}(t)$	それぞれ $\mathbf{f}(t)$ の α -成分, β -成分.
$f_1(t)$	$\mathbf{f}(t)$ の期待値 $= \langle \mathbf{f}(t) \rangle$.
f_{1s}	$\mathbf{f}(t)$ の定常値.
$f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	粒子 α の singlet 分布関数 $= \langle f_1^{(i)}(t) \rangle$. ただし, $i = (\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v})$.
$f_2^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$	粒子 α と粒子 β との間の doublet 分布関数 $= \langle f^{(i)}(t) f^{(j)}(t) \rangle$. ただし, $i = (\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $j = (\beta, \mathbf{x}', \mathbf{v}')$.
$\tilde{f}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$	2 次の積密度分布関数 $= f_2^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) - \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.
$\tilde{f}_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t)$	m 次の積密度分布関数.
$f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	インポートランス関数.
$f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	m 次のインポートランス関数.
$\mathbf{G}(z)$	確率母関数 (ベクトル).
$G(z \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	Eq. (5. 11).
$G_0(z \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	$\mathbf{G}(\mathbf{Z} \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の中性子成分, Eq. (5. 47).
$G_i(z \mathbf{x}, i, t)$	$\mathbf{G}(\mathbf{Z} \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の先行核 (タイプ i) 成分, Eq. (5. 48), ($i=1, 2, \dots, I$).
$G_0(z, V_d, t_f, T \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	Eq. (5. 74).
$G_i(z, V_d, t_f, T \mathbf{x}, i, t)$	Eq. (5. 75), ($i=1, 2, \dots, I$).
$G_0(z_1, z_2, \dots, z_I, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, V_I, t_{fI}, T_I \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	Eq. (5. 93).
$G_i(z_1, z_2, \dots, z_I, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, V_I, t_{fI}, T_I \mathbf{x}, i, t)$	Eq. (5. 94), ($i=1, 2, \dots, I$).
$G(z S)$	Eq. (5. 101).
$\tilde{G}(z)$	$= 1 - G(z)$.
$Ge(\mathbf{x} - \mathbf{x}' , \omega)$	検出器の幾何学的因子, Eq. (6. 199).
$\bar{G}e$	$Ge(\mathbf{x} - \mathbf{x}' , \omega)$ の体積平均, Eq. (6. 200).
$\bar{G}e_{sp}, \bar{G}e_{sl}$	それぞれ球形検出器, 平板形検出器における $\bar{G}e$.
$Gr(t u)$	(1 時空間点) グリーン関数 (行列) $= \exp\{-B(t-u)\}$.
$Gr^{(ij)}(t u)$	$Gr(t u)$ の $i-j$ 成分.
$Gr(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v}, t \beta, \mathbf{x}', \mathbf{v}', u)$	$i = (\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $j = (\beta, \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ とおいた時の $Gr^{(ij)}(t u)$.
$Gr(\mathbf{x} - \mathbf{x}' , t-u)$	無限媒質 1 群中性子モデルにおけるグリーン関数行列 $Gr(t u)$ の $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 成分.
$Gr^T(t u)$	$Gr(t u)$ の転置行列.
$Gr^+(t u)$	随伴グリーン関数行列.
$Gr(\mu_1, t_1, \mu_2, t_2, \dots, \mu_m, t_m \mu, u)$	m 時空間点グリーン関数. 特に $m=1$ の時 $Gr(\mu_1, t_1 \mu, u)$.
$Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t \mu, u)$	m 空間点グリーン関数 $= Gr(\mu_1, t, \mu_2, t, \dots, \mu_m, t \mu, u)$.
$Gr[s]$	$Gr(t 0)$ のラプラス変換 $= \int_0^\infty dt e^{-st} Gr(t 0)$.
$Gr[\mathbf{x} \mathbf{x}'; s]$	$Gr[s]$ の $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 成分.
$Gr_n[s]$	$Gr[\mathbf{x} \mathbf{x}'; s]$ の第 n 番目の Helmholtz モードに対する成分.
$Gr_n^{(00)}[s]$	$Gr_n[s]$ の中性子—中性子成分.
$Gr_n^{(0i)}[s]$	$Gr_n[s]$ の中性子—先行核 (タイプ i) 成分, $i=1, 2, \dots, I$.
$Gr_n^{(ij)}[s]$	$Gr_n[s]$ の $i-j$ 成分, ($i, j=0, 1, 2, \dots, I$).
$g_n(z, t)$	$\tilde{G}(z \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の第 n 空間モード展開係数.

g_{nm}	第 n 空間モードと第 m 空間モードとの間の結合係数, Eq. (6. 148) & (6. 152). cf. h_{nm} .
$H[s]$	1 点炉モデルにおける反応度伝達関数.
$H_n[s]$	伝達関数の第 n 空間モード成分, Eq. (6. 126).
\tilde{H}_{nj}	$H_n[s]$ の $s = -\alpha_{nj}$ における留数, Eq. (7. 19).
$h(t)$	検出器応答関数, Eq. (4. 126).
${}^a h(t), {}^b h(t)$	それぞれ検出器 a, 検出器 b の $h(t)$.
$h[s]$	$h(t)$ のラプラス変換 $= \int_0^{\infty} dt e^{-st} h(t)$.
h_{nm}	第 n 空間モードと第 m 空間モードとの間の結合係数, Eq. (6. 152). cf. g_{nm} .
I	Rossi- α 法 (タイプ II) における chain splitting 効果, Eq. (7. 157).
\mathbf{I}	単位摂動による中性子密度場ベクトル \mathbf{f} の乱れ, Eq. (6. 98).
\mathbf{I}_a	吸収体による単位摂動があつた時の \mathbf{I} .
\mathbf{I}_f	燃料体による単位摂動があつた時の \mathbf{I} .
$I_a^{(i)}, I_f^{(i)}$	それぞれ $\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_f$ の i -成分 ($i=0$ の場合は中性子, $i=1, 2, \dots, I$ の場合は先行核).
\mathbf{I}_n	\mathbf{I} の第 n Helmholtz モード成分, Eq. (6. 116).
$I_n^{(i)}$	\mathbf{I}_n の i -成分 ($i=0$ の場合は中性子, $i=1, 2, \dots, I$ の場合は先行核).
\mathbf{I}_{in}'	Eq. (6. 125).
I_m	Eq. (3. 32), (5. 110) & (5. 116). cf. J_m .
$\text{Im}g$	虚数部分をとりだす作用素.
$\mathbf{J}(\mathbf{f})$	Eq. (4. 82).
J_m	Eq. (5. 167).
K	行列 $K_{ij} = k_i^{(j)}$.
$Kr[\mathbf{x}, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}_0; s]$	Eq. (6. 138).
k	実効増倍係数.
k_n	第 n Helmholtz モードの増倍係数, Eq. (6. 114). 結合炉の増倍係数, Eq. (6. 64) & (6. 65).
k_{∞}	無限増倍係数 $= \langle \nu \rangle \Sigma_f / \Sigma_a$.
$k_i^{(j)}$	j 番目のセルの中性子 1 箇が失なわれた時 i 番目のセルに生成される中性子数の期待値.
$k_i^{\prime(j)}$	Eq. (4. 210).
${}^a k_i^{(j)}, {}^b k_i^{(j)}$	それぞれ, 検出器 a, 検出器 b との反応により j 番目のセルの中性子が 1 箇失なわれた時 i 番目のセルに生成される中性子数の期待値, Eq. (4. 207), Eq. (4. 208).
$k(\alpha, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \beta)$	速度 \mathbf{v}' の粒子 (タイプ β) が 1 箇失なわれた時生成される速度 \mathbf{v} の粒子 (タイプ α) 数の期待値.
${}^a k(\alpha, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', n)$ ${}^b k(\alpha, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', n)$	それぞれ検出器 a, 検出器 b との反応により速度 \mathbf{v}' の中性子が 1 箇失なわれた時生成される速度 \mathbf{v} の粒子 (タイプ α) 数の期待値.
k_2	中性子 1 箇が失なわれた時, 再生される中性子数の 2 次モーメント (1 点炉).
$k_{ij}^{(m)}$	m 番目のセルの中性子が 1 箇失なわれた時, i 番目のセルと j 番目のセルに生成される中性子数の積の期待値.
${}^a k_{ij}^{(m)}, {}^b k_{ij}^{(m)}$	それぞれ, 検出器 a, 検出器 b による反応で中性子が失なわれた時の $k_{ij}^{(m)}$.
$k_{2i}(\mathbf{v}, \alpha, \mathbf{v}', \beta \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x})$	相空間 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 点における中性子が核分裂反応により 1 箇失なわれた時, 生成される速度 \mathbf{v} の粒子 (タイプ α) 数と速度 \mathbf{v}' の粒子 (タイプ β) 数との積の期待値.
L	時間を含んだボルツマン作用素 (行列) $= B + \frac{\partial}{\partial t}$.
L^+	L の随伴作用素 (行列) $= B^+ - \frac{\partial}{\partial t}$. Eq. (5. 18).
L_{00}^+	行列 L^+ の中性子-中性子成分, Eq. (5. 61 a).
L_{0i}^+	行列 L^+ の中性子-先行核 (タイプ i) 成分, Eq. (5. 61 b).
$L_{i0}^+, L_{ij}^+, L_{ii}^+$	Eq. (5. 61 c), (5. 61 d), (5. 61 e).

L_d^+	検出器のある時の L^+ .
$L_a(\omega)$	周波数 ω における中性子波減衰距離.
$L_w(\omega)$	周波数 ω における中性子波長.
$L_c(\omega)$	複素拡散距離 $= \left[\frac{1}{L_a(\omega)} + i \frac{1}{L_w(\omega)} \right]^{-1}$.
L^2	拡散距離の 2 乗 $= D/\Sigma_a$.
l	中性子寿命.
l_d	検出反応に対する中性子寿命 $= 1/(v\Sigma_a) = 1/r_d$.
l_f	核分裂反応に対する中性子寿命.
l_n	第 n Helmholtz モードの中性子寿命.
l_i	i 番目のセルにおける中性子寿命.
l_i'	Eq. (4. 209).
${}^a l_i, {}^b l_i$	それぞれ検出器 a, 検出器 b の検出反応に対する i 番目のセルにおける中性子寿命.
$l^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$	相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) の粒子 (タイプ α) の寿命 $= v\Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad \alpha$; 中性子の時: $= \text{崩壊定数} \quad \beta$; 先行核の時.
M	Eq. (4. 303).
N	粒子 (中性子, 先行核, 検出反応) 数 (ベクトル).
N_1	N の期待値 $= \langle N \rangle$.
N_{1s}	N_1 の定常値.
$O(t)$	時刻 t における出力応答.
${}^a O(t)$	Eq. (4. 126).
P	炉平均出力.
$P(N, t)$	時刻 t に粒子数が N である確率.
$P(\mathbf{f}, t \mathbf{f}_0, t_0)$	時刻 t_0 に \mathbf{f}_0 という状態であつた時, 時刻 t に \mathbf{f} という状態へ遷移する確率.
$P(N, V, t_f \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に時刻 t に中性子を 1 箇投入した時, 後時刻 t_f に領域 V に N 箇の中性子が現われる確率.
$P(N, V, t_f \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に時刻 t に中性子を 1 箇投入した時, 後時刻 t_f に領域 V 中の粒子数ベクトル N である確率.
$P_i(N, V, t_f \mathbf{x}, i, t)$	同上, ただし (\mathbf{x}, t) に先行核 (タイプ i) を投入.
$P_0(N, V_d, t_f, T \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に時刻 t に中性子を 1 箇投入した時, 相空間領域 V_d で時刻 t_f から始めて T 時間観測した時得られる観測量が N 単位である確率.
$P_i(N, V_d, t_f, T \mathbf{x}, i, t)$	同上, ただし (\mathbf{x}, t) に先行核 (タイプ i) を投入.
$P_0(N_1, N_2, \dots, N_J, V_1, t_{11}, T_1, V_2, t_{12}, T_2, \dots, V_J, t_{1J}, T_J \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	多時点観測時の観測量分布確率 (中性子投入).
$P_i(N_1, N_2, \dots, N_J, V_1, t_{11}, T_1, V_2, t_{12}, T_2, \dots, V_J, t_{1J}, T_J \mathbf{x}, i, t)$	多時点観測量の観測量分布確率 (タイプ i の先行核投入).
$P_{2c}(t, u)$	時刻 t および u に検出パルス対の存在する確率.
${}^{ab} P_{2c}(t, u)$	時刻 t に検出器 a の, 時刻 u に検出器 b の検出パルスの存在する結合確率.
$P_{2c}(\tau)$	定常状態における $P_{2c}(t+\tau, t) = P_{\text{cor}}(\tau) + P_{\text{unc}}(\tau)$.
$P_{\text{cor}}(\tau)$	$P_{2c}(\tau)$ のうちの相関項.
$P_{\text{unc}}(\tau)$	$P_{2c}(\tau)$ のうちの非相関項.
$P_{\text{cc}}(T)$	Count-to-count interval distribution.
$P_{\text{ro}}(T)$	Random origin interval distribution.
$P_0(T)$	T 時間の観測で, カウントがない確率.
$P_I(\tau), P_{II}(\tau)$	それぞれ, タイプ I, タイプ II の Rossi- α 実験の解析公式.
$P_3(\tau_B, \tau_C)$	3 時点 Rossi- α 法の解析公式.
$\tilde{P}(\omega)$	$P_{\text{cor}}(\tau)$ のフーリエ変換.
$\tilde{P}_\infty(\omega)$	無限媒質における $\tilde{P}(\omega)$.
$p(n)$	中性子 1 箇が失なわれた時再生される 2 次中性子数が n である確率 (1 点炉).

$p_i(n, n, \dots, n_M)$	i 番目のセルの中中性子が1箇失なわれた時, 再生される2次中性子数の確率分布 (M 点炉).
${}^a p_i(n_1, n_2, \dots, n_M)$	i 番目のセルの中中性子が検出器 a との反応により1箇失なわれた時再生される2次中性子数の確率分布.
$p(\nu_0, \nu_1)$	核分裂により再生される即発中性子が ν_0 箇, 先行核 (1組近似) が ν_1 箇である結合確率.
$p(\nu_0, \nu_1 \nu)$	合わせて ν 箇の粒子が核分裂の際放出された時, ν_0 箇が即発中性子で ν_1 箇が先行核である条件確率.
$p(\nu \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) で時刻 t に核分裂が1回あった時, 生成される2次中性子-先行核数ベクトルが ν である確率.
$p_d(\nu \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) で時刻 t に検出反応により1箇の中中性子が失なわれた時, 再生される2次中性子数が ν である確率.
$p_s(\nu)$	} 自然核分裂あるいは外部源の放出反応の際, 放出される2次中性子数の確率分布.
$p_s(n_1, n_2, \dots, n_M)$	
$p_s(\nu \leftarrow \mathbf{x}, t)$	
$p_{ij}(t)$	結合炉において j 領域の中中性子が時間 t だけ遅れて i 領域に現われる確率.
Q	A のバイナリ炉雑音源成分.
${}^b Q$	検出器 b の検出反応に起因するバイナリ炉雑音源スペクトル行列, Eq. (4.228) & (4.230).
${}^a Q^T$	${}^a Q$ の転置行列, Eq. (4.229) & (4.231).
q_i	タイプ i の核反応による密度ベクトル f の変化量.
$q(\omega)$	Eq. (6.52).
R	球形または円筒形検出器の半径.
R_i	単位時間におこるタイプ i の反応数.
$R_{if}(\mathbf{x})$	単位時間におこる誘導核分裂反応数の期待値の分布 = $\langle R_i(\mathbf{x}) \rangle$.
$R_{if}^{\oplus}(\mathbf{x})$	自発核分裂も含めた全核分裂反応率 (= $S_0 + R_{if}(\mathbf{x})$).
\bar{R}_i	$R_{if}(\mathbf{x})$ の体積平均, Eq. (6.141).
$R(T)$	Eq. (7.113).
$R(\omega)$	干渉関数, Eq. (6.59), (6.87), (6.89) & (6.90).
R_{mj}	分割数, Eq. (5.119), 表 9.
r_1, r_2	それぞれ, 第1群, 第2群の中中性子1箇当りの全反応率 (= $1/l_1, 1/l_2$).
r_i	BF ₃ -検出管内イオン1箇当りの全反応率.
r_a	BF ₃ -検出管内 a 粒子1箇当りの全反応率.
r_d	中性子1箇当りの検出率 = $1/l_d$.
$[r_1, r_2, \dots, r_{m-1}]$	} 分割のセット, Eq. (5.117) & (5.118), 表 10.
$[r m, j]$	
$S, S(\mathbf{x})$	ポアソン源の単位時間当りの放出反応数の期待値.
S_0	単位時間に (単位体積中で) おこる自発核分裂回数期待値 (空間的に一様に分布).
$S_1^{(i)}, S_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})$	単位時間当りポアソン源から放出される中性子数の期待値.
$\tilde{S}(t_i, t_s)$	時刻 t_s から t_i までの間にポアソン源から放出される中性子数の期待値.
\bar{S}	Eq. (7.63).
\bar{S}_i	Eq. (7.99).
$\bar{\bar{S}}_i$	Eq. (7.100).
S_n	$S(\mathbf{x})$ の第 n Helmholtz 成分.
T, T_1, T_2, \dots	観測時間幅.
$T[s]$	伝達関数, Eq. (6.6).
$T_a[s]$	摂動が $\delta \Sigma_a$ の時の伝達関数, Eq. (6.121).
$T_f[s]$	摂動が $\delta \Sigma_f$ の時の伝達関数, Eq. (6.124).
U	単位行列, $U_{ij} = \delta_{ij}$.

u_0	Eq. (5. 14).
u_i	Eq. (5. 16), $i=1, 2, \dots, I$.
$u(t)$	階段関数. $\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$.
V_d, V_1, V_2, \dots	検出器の占める空間領域またにその大きさ.
V_t	炉の全体積.
v	中性子, 先行核の速度ベクトル.
v_{in}	媒質外境界上での内向きの v .
v_{out}	媒質外境界上での外向きの v .
v	1 群モデルにおける中性子の速さ.
$\mathbf{W}, {}^a\mathbf{W}$	密度ベクトル \mathbf{f} に対する検出器 (a の) 作用素縦ベクトル, Eq. (4. 227).
$\mathbf{W}^T, {}^a\mathbf{W}^T$	密度ベクトル \mathbf{f} に対する検出器 (a の) 作用素横ベクトル.
$W^{(0)}$	\mathbf{W} の中性子成分.
$W^{(p)}$	\mathbf{W} の光子成分.
W_m	Eq. (5. 186).
X_{mn}	$\tilde{\Psi}_m$ の第 n Helmholtz 成分, Eq. (7. 29).
\mathbf{x}	位置ベクトル.
\mathbf{x}_B	媒質外境界上の位置ベクトル.
Y	Eq. (4. 107) = $Y^{(s)} + Y^{(c)}$.
$Y_{\alpha\beta}^{(c)}$	Eq. (4. 108').
$Y_{\alpha\beta}^{(s)}$	Eq. (4. 108).
$Y(T)$	Feynman- α 法における非ポアソン項, Eq. (7. 1).
Z	行列, $Z_{ij} = \delta_{ij}/l_i$.
$Z(T)$	Feynman- α 法における非ポアソン項, Eq. (7. 2).
z, z_1, z_2, \dots	確率母関数における独立変数.
α	中性子減衰係数 = $(1-k)/l$.
α_0, α_p	即発中性子減衰係数 = $\{1-(1-\beta)k\}/l = \alpha_{10}$.
α_n	固有値問題 (7. 46) の n 番目の固有値.
α_n^+	固有値問題 (7. 44) の n 番目の固有値 = $-\alpha_n$.
$\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nI}$	第 n Helmholtz モードの逆時間公式 (6. 129) の $(I+1)$ 箇の解.
β	$= \sum_{i=1}^I \beta_i$, 遅発中性子の割合.
$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_I$	核分裂の際放出される先行核の割合.
$\Gamma_m(y)$	$= (y-1)\Gamma_m(y-1)$, ガンマ関数.
$\Gamma_m(a, y)$	不完全ガンマ関数, Eq. (7. 147).
$\Gamma(t, u)$	期待値のまわりのゆらぎに対する 2 時点相関関数 (行列) $= \Gamma^B(t, u) + \Gamma^S(t, u)$.
$\Gamma^B(t, u)$	$\Gamma(t, u)$ のうちバイナリ雑音源からの寄与.
$\Gamma^S(t, u)$	$\Gamma(t, u)$ のうちシングル雑音源からの寄与.
$\Gamma(t_1, t_2, \dots, t_N)$	N 時点相関関数.
$\Gamma_3(\tau_B, \tau_C)$	3 時点相関関数 = $\Gamma(t, t+\tau_B, t+\tau_B+\tau_C)$.
γ	Eq. (6. 218).
$\gamma(t, u)$	ランダム時変数の時刻 t における値と時刻 u における値との積の集合平均.
γ_m	m 次の階乗モーメント.
$\gamma(m_1, m_2, \dots, m_k)$	Eq. (5. 124).
$\Delta = \Delta_{12} = \Delta_{21}$	Eq. (6. 88).
$\Delta_{\mathbf{x}}$	ラプラシアン作用素.
Δ_j'	Eq. (7. 73).

$\delta(t), \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$	Dirac のデルタ関数.
δ_{ij}	Kronecker のデルタ関数, 特に, $\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$.
δ_{n0}	$= \delta_{n_1 0} \delta_{n_2 0} \cdots \delta_{n_l 0}$.
$\delta B, \delta \mathbf{S}_1$	単位摂動による B, \mathbf{S}_1 の変動部分.
$\delta R(t)$	単位摂動による検出器出力の変動部分, Eq. (6. 101).
$\delta \mathbf{f}(t)$	密度ベクトル $\mathbf{f}(t)$ の期待値のまわりのゆらぎ $= \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_1(t)$.
ε	検出器効率 $= \Sigma_d / \Sigma_f$.
$\rho \varepsilon$	光子検出器効率.
$\varepsilon \oplus$	自発核分裂も含めた全核分裂 1 回当りの検出反応数, Eq. (6. 13).
$\bar{\varepsilon}$	中性子 1 箇当りの検出反応率 ($\nu \Sigma_d$) の体積積分値, Eq. (7. 72).
ε_n	$\nu \Sigma_d(\mathbf{x})$ の第 n Helmholtz 成分, Eq. (6. 119).
ζ_0	Eq. (7. 94) & (7. 112).
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$	Eq. (7. 90).
η	核反応に伴ない放出される光子数.
$\Theta(T)$	T 時間観測した時得られる観測量.
${}^k \Theta(t)$	Eq. (4. 127).
θ	検出反応 1 回当り放出される検出量.
κ	拡散距離を単位とした 2 点間の距離.
$A(\mathbf{f})$	Eq. (4. 83).
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$	先行核崩壊定数.
$\bar{\lambda}$	$= \beta / \sum_{i=1}^l (\beta_i / \lambda_i)$.
μ	(\mathbf{x}, \mathbf{v}) 6次元相空間点座標をひとまとめにしたもの.
ν_0	核分裂の際, 放出される即発中性子数.
ν_i	核分裂の際, 放出される i 群 ($i=1, 2, \dots, l$) の先行核数.
$\nu, \nu(\mathbf{x}, \mathbf{v})$	核分裂に際し放出される 2 次中性子数と先行核数の和.
$\nu_s^{(i)}$	自然核分裂または外部源の放出反応の際, 放出されるタイプ i の 2 次中性子数.
ν_d	検出反応の際, 放出される 2 次中性子数.
$\tilde{\nu}^l$	Eq. (5. 59).
ν_d^l	Eq. (5. 88).
$E_0(\mathbf{z} \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	Eq. (5. 58).
$E_{d0}(\mathbf{z} \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	Eq. (5. 86).
ξ_r	Eq. (5. 220).
$\pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) で時刻 t におこった検出反応の際 θ 単位の検出量が得られる確率.
$\tilde{\pi}_d$	Eq. (5. 89) の上の式.
ρ_n	第 n Helmholtz モードの反応度 $= \frac{k_n - 1}{k_n}$.
$\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})$	全断面積.
$\Sigma_a, \Sigma_f, \Sigma_d, \Sigma_r$	それぞれ, 吸収, 核分裂, 検出および除去反応に対する断面積.
$\Sigma_s(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}')$	速度 \mathbf{v}' の中性子が散乱をおこし速度 \mathbf{v} の中性子になる確率.
$\tilde{\Sigma}$	2 次の階乗キュームラントを成分とする行列, Eq. (4. 95).
σ	相関実験の 3 基本量のうちの 1 つ, Eq. (7. 62).
σ_2	分散.
$\tilde{\sigma}$	m 次の階乗キュームラント.
$\tilde{\sigma}(m_1, m_2, \dots, m_k)$	Eq. (5. 126).
τ	フェルミ年令.
$\Phi(\omega)$	期待値のまわりのゆらぎのスペクトル密度 (行列).
$\varphi(\omega)$	ランダム時変数のスペクトル密度.
$\chi(\mathbf{v})$	核分裂に際し放出される 2 次中性子の速度分布関数.

$\chi_i(\mathbf{v})$	先行核(タイプ i)の崩壊に際し放出される 2 次中性子の速度分布関数 ($i=1, 2, \dots, I$).
$\chi_d(\mathbf{v})$	検出反応に際し放出される 2 次中性子 1 箇の速度分布関数.
$\chi^{(p)}(\mathbf{v})$	核反応により生成された光子の速度分布関数.
$\bar{\chi}$	Eq. (7. 55).
$\Psi_n(\mathbf{x})$	第 n Helmholtz モード関数, Eq. (6. 109).
$\bar{\Psi}_n(\mathbf{x})$	Eq. (7. 27).
$\phi_n(\mathbf{x}, \mathbf{v})$	固有値問題 (7. 44) の第 n 番目の解.
$\phi_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})$	固有値問題 (7. 46) の第 n 番目の解.
$\bar{\phi}_1$	Eq. (7. 57).
Ω	相関をうみだす源, Eq. (3. 10) & (3. 15).
ω	角速度 (rad/sec).
ω_0	零周波数.
ω_{Bn}	$ H_n[i\omega] $ の折点周波数.
ω_{coh}	干渉関数 $R(\omega)$ の折点周波数.
$\$$	ドル単位ではかった未臨界度 ($= -\rho/\beta$).

1. 序 論

通常、中性子輸送理論では、いわゆるボルツマン型微積分方程式で記述される^{173, 189)}中性子数の期待値のふるまいを問題にしている。しかしながら、原子炉における中性子の挙動は、本来、確率的なものであり、自由飛行による移動、散乱、吸収反応といった素過程を不規則に繰り返していき、時として核分裂反応——すなわち、中性子の消滅に伴ない複数箇の2次中性子が生成されるといういわゆる分枝反応をおこす。生成される2次中性子の数が確率的にしか予測できない点が、さらに現象を複雑にしている。

原子炉における中性子数を一つのランダム変数とみなし、確率・統計論の立場から中性子輸送現象を理論的に考察する背景になった実用上の要請は、大別して次の2つであった。

1) 弱中性子源による炉起動の際の安全評価

原子炉を安全に起動するためには、反応度が十分加わった状態では、中性子数が起動系の検出器で検出できる程十分増えている必要がある。しかしながら、中性子源が弱いと、統計的ばらつきが顕著になり、反応度がすでにかなり加わっているにもかかわらず、期待される程、起動系のカウント数が増えず、即発臨界に到達してしまう危険性がある。あるいは、時間的に一定の割合で反応度を加えつつ原子炉を超臨界にした時、核分裂による放出エネルギーが、中性子のふるまいの統計性を無視した通常の輸送理論から期待される量をかなり上まわる危険性がある。これらの危険性が十分無視できるような中性子源の強さ、反応度の挿入の割合を見積ることが、特にパルス状に運転を行なう原子炉の安全評価の上で必要となった。たとえば、アメリカのGODIVA¹⁵⁵⁾炉に関しては、HANSEN⁶⁴⁾は、源から放出された中性子が連鎖反応を持続する確率を算出し、中性子源の“弱さ”に関する評価、炉が臨界になった時刻から出力パルスが放出されるまでの待ち時間の分散の解析を行なった。また、放出エネルギーが、通常の運動方程式から期待される量と100倍も異なる場合があることを報告している。より詳細な解析は、その後HURWITZ *et al.*⁷²⁾, MacMILLAN and STORM⁹⁰⁾, BELL^{15, 16)}により行なわれた。ソビエトのIBR炉²²⁾に関しては、放出中性子数の分散の評価がMIN *et al.*⁹⁷⁾により行なわれた、TRIGA炉に関しては、BÄRS¹³⁾の報告がある。その他、特定の原子炉を対象にはしていないが、GOVORKOV⁶¹⁾, PÁL¹¹⁸⁾, ALBRECHT³⁾, MATTHES⁹⁵⁾, CLARKE³²⁾等の研究も報告されている。さらに空間依存性の効果を取り入れた高速デジタル計算機向きの解析も

STACEY¹⁴³⁾によって行なわれ、従来の期待値のみを問題にしている動特性解析結果の信頼度を検証するひとつの観点として、確率論的動特性理論は、その地位を確立しつつある。なお、非均質系の理論は、BARRET *et al.*¹⁰⁾, また、温度フィード・バック効果を取り入れた考察も、一点炉モデルではあるが、BÄRS¹²⁾によって試みられている。

2) 炉雑音実験の解析

炉の動特性に関する情報を得る実験法は、大別して2種類ある。一つは、外部から炉に振動を加え、中性子場へおよぼす効果を観測する方法である。たとえば、制御棒を落下させて負の反応度を炉に加える方法(Rod drop法)、パルス発生器から中性子を炉に投入する方法(Pulsed neutron法)、中性子吸収体を周期的に振動させる方法(Rod oscillator法)等が知られている。(e.g., Chap. 8 in Ref. (181))

これに対して、炉内を遊泳している中性子数の統計的ばらつき、いわば、炉が内蔵している摂動を観測、解析して炉の動特性に関する情報を得ることを目的としているのが炉雑音実験法¹⁸⁸⁾である。この実験方法には、Rossi- α 法、Feynman- α 法、Mogil'ner (P_0)法、周波数分析法がよく知られている。Rossi- α 法は、炉内におかれた中性子検出器の出力パルスの時系列を解析する方法でRossiにより示唆され、ORNDORFF¹¹⁰⁾によりGODIVAを対象に行なわれた。本邦では、AN *et al.**により、JRR-1を対象に始めて行なわれた。

Feynman- α 法は、一定時間の検出器カウント数の分散と平均との比を解析する方法で、FEYNMANにより示唆され、LOPO (the first water boiler reactor at Los Alamos)を対象に行なわれた⁵¹⁾。本邦では、AHCFを対象にしたGOTOH⁶⁰⁾の実験が始めて報告された。

Mogil'ner法^{98, 159)}は、一定時間の観測に際し、カウント数がゼロである確率を解析する方法で、本邦では、SAKURAI *et al.***により実験解析が行なわれた。これら3つの方法は、主として低出力炉(未臨界炉も含む)を対象に、即発中性子減衰定数、中性子寿命、反応度等い

* 安成弘, 川島協, 藤家洋一, 大山彰, 「核分裂連鎖の統計的解析による即発中性子寿命の測定」-I, 三本保秀, 大山彰, 「同上」-II
第2回原子力研究総合発表会
予稿集 B-67, 68 (1961)

** 桜井良文, 住田健二, 町田賢三「Feynmanの手法による α 測定の問題点について」昭和40年日本原子力学会年会, 要旨集 E-39 (1965)

わば炉物理量を実験的に定めることに重点がおかれてきた。[e. g., see Ref. (5), (29), (50), (75), (150)] これに対して MOORE¹⁰⁰ は、定常に運転されている原子炉の出力雑音を周波数分析することにより伝達関数を測定できることを提唱した。以来、周波数分析法は、高出力炉も対象に盛んに行なわれるようになり、遅発中性子の割合対中性子寿命、炉出力の絶対値、反応度停止余裕といった炉物理量の測定 [e. g., see Ref. (14), (20), (33), (106), (124), (157), (160), (161), (163), (167)] の他に、熱水力学パラメータの推定を行ったり、炉に内在するかも知れない不安定性を検出する安定性モニターとして応用されるようになり、運転時の炉の安全性を監視する一つの有力な方法として確立しつつある^{162, 169)}。

さて、以上二つの実用上の要請に対応して、一方では、炉過渡時における中性子の統計的ふるまい、炉雑音源の確定とその出力雑音への伝播の機構を理論的に考察する必要がある。ところが、炉雑音現象の機構は、低出力炉と高出力炉とは、おおいに異なる。低出力炉では、中性子の生成・消滅過程が確率的であることに由来した核的雑音源によるとみなしてさしつかえない。これに対して、高出力炉雑音は、制御棒や燃料板の機械的振動、冷却材流量・圧力や温度の微小変動、冷却材の渦、ボイドの生成・移動等の不規則性に由来した反応度の変動が大きな役割を占め¹⁴⁹⁾、核的雑音源からの寄与は小さく、一例では 10^{-4} 以下であるという報告⁹⁾もある。高出力炉雑音の測定は、THEE により EBWR を対象に行なわれて¹⁴⁸⁾ 以来、多くの実験が報告されており [e. g., see Ref. (19), (152), (157)], 雑音現象の機構に関する考察も行なわれつつあるが [e. g., see Ref. (11), (12), (27), (66), (101), (109), (120), (132), (142), (149)], 未だ十分に解明されたという段階に至っていない。本報 (I) では、考察の対象を低出力炉雑音現象とする。

本報 (I) の主題は、低出力炉における中性子輸送現象を確率・統計論の立場で定式化し、炉雑音現象および炉過渡時の中性子数の統計的ふるまいを解明するための理論の構成を行なうことにある。

理論の構成上、用いた基本的前提は、次の2つである。

1) 中性子、遅発中性子先行核は、位置および速度の6次元相空間 (μ -空間) に分布する古典粒子としてとりあつかうことができる。

実際には、中性子は、スピンとド・ブロイ波を担う量子粒子であり、その集団は、 Γ -空間におけるリュウヴィユ (Liouville) の方程式で記述される。この量子統計力学の立場から、炉内中性子の輸送現象を定式化したのは、OSBORN and YIP⁸⁴⁾、OSBORN and NATELSON¹¹¹⁾ である。リュウヴィユの方程式に古典的極限操作を施して、 μ -空間における平均の中性子数および中性子数の2空間点相関関数に対する運動方程式を求めている。その結果は、古典モデルから出発したより単純で、しかも炉雑音現象の本質をついた理論により得られたものと一致している。

さらに、理論構成上第2の基本的前提を次のようにおく。

2) 中性子輸送現象は、マルコフ (Markov)・線型すなわち Galton-Watson 型の分枝過程 [cf. Chap. 1 in Ref. (178)] とみなすことができる。

いいかえれば、原子炉における中性子・先行核数分布の現時点での情報がわかれば、将来の分布の様子は完全に予測できる。現時点での情報を知れば、それ以前の情報をすて去ってしまってもかまわない。また、原子炉における中性子・先行核は、互いに他の中性子・先行核と干渉しあうことなく、おのおの独立にふるまう。

中性子源から放出された中性子は、増倍媒質中を遊泳し、時おり媒質原子と核的相互作用を行なう。この中性子輸送現象は、一般の多体問題のうちで最も単純な例とみなすことができる。電気的に中性な中性子に影響をおよぼす核力の範囲は非常に狭く、媒質との相互作用は2体衝突近似でおきかえ、いわゆる反応断面積を導入する。炉内中性子密度は、非常に稀薄であり、(たかだか、 10^9 neutrons/cm³ 程度) 中性子同士の衝突は、媒質原子との衝突に比べて無視しうる。

低出力炉における状態変数を、 μ -空間に分布する中性子数および先行核数密度と選んだ時、その時間的发展をマルコフ過程として記述できるということは、われわれの観測の尺度と密接な関係をもつ。通常、動特性実験で関心を持つ時間の尺度は、短かくても即発中性子寿命、 10^{-8} sec 程度である。これに対して、中性子と媒質原子との核反応の持続時間は 10^{-20} sec のオーダーである。したがって、反応は瞬間的に行なわれ、また、ある中性子の衝突により、励起状態にある媒質原子に、他の中性子が衝突するようなこともないと考えてさしつかえなく、反応断面積は、時間的に一定なものとして与えられている。

要約すれば、本報 (I) では、中性子を、位置および速度の6次元相空間に分布する古典粒子とみなす。自由飛行による移動、散乱、核分裂、吸収等の反応素過程を行なう確率、散乱および核分裂反応後の2次中性子の生成確率等は、中性子の挙動とは無関係に、増倍媒質の性質としてあらかじめ与えられているものとする。中性子密度が稀薄で、中性子同士の衝突を無視しうることとあわせて、中性子輸送現象を線型でかつマルコフ的な生成・消滅過程とみなすことができるものとする。

一方、高出力炉では、温度やボイドによる反応度フィードバック、燃料燃焼の効果等を考慮しなければならず、マルコフ的記述ができるよう原子炉の状態変数を選ぶことも困難になり、線型性も一般に失なわれる。

さて、低出力炉における中性子輸送現象は、線型・マルコフ過程に従う一つの物理現象であるという立場に立つことは、すでに深い洞察と広い用途を備えている非平衡統計力学および分枝過程論の2つの領域に炉雑音理論を関連づけることができるということを意味する。本報では、KUBO⁸⁵⁾ および LAX⁸⁸⁾ により発展されたブラウン

(Brown) 粒子の揺動における Langevin の方法¹⁵⁶⁾が、低出力炉雑音源の確定とその出力雑音への伝播の機構を解明するうえで有効であったことを示す。また、宇宙線のなだれ現象の定式化に際して用いられた Janossay⁷⁹⁾ および Ramakrishnan¹²²⁾ の方法が、相空間が連続な場合の中性子数確率母関数の従う運動方程式の導出のうえで、また、中性子数高次モーメントの物理的構造を把握するうえで、それぞれ、有効であったことを示す。

まず第2章では、原子炉を対象に行なわれる種々の動特性実験のなかで、いわゆる炉雑音実験とよばれる種類のものがどういう位置を占めるかについてのべ、ついで炉雑音理論の背景になる零出力未臨界定常炉モデルの意義を、特に臨界炉あるいは超臨界炉を対象に現実には行なわれている炉雑音実験との関連において論ずる。

第3章には、零出力炉雑音理論の発展の小史を記す。従来の種々な理論構成法を、まず、量子論的方法と古典論的方法とに分類し、後者をさらに、Kolmogorovの方法、Langevinの方法、Feynmanの方法の3つにわけ、各方法の特徴を明らかにしつつ、相互の関連を論ずる。

第4章では中性子数、したがって検出器出力の統計的ゆらぎは、炉に内在する不規則な雑音源に起因するという観点にたった Langevin 法による理論構成を示し、ゆらぎのスペクトル密度、一定時間観測した時の観測量の分散および一定時間離れて検出パルス対の存在する確率に対する表式を導出した。これらは、それぞれ、周波数分析法、Feynman- α 法、Rossi- α 法の実験解析式となる。

各相空間点に存在する中性子数・先行核数を成分とする数ベクトルを、マルコフ的に推移するランダム変数とみなす。さらに、中性子・先行核の挙動はお互いに独立で、したがって核反応の生起確率は、数ベクトルに比例するという線型性を用いて、炉雑音現象を記述する Langevin 方程式の設定と Langevin 外力 (炉雑音源) の確定に関して、MOORE^{100, 101)}、COHN³⁴⁾ の用いた従来のやや発見論的な方法論を統一的に再構成できることを示し、同時に、Nyquist の定理の重要性をあらたに指摘した。この定理により、低出力炉雑音源スペクトル密度は、白色であり、その大きさと Langevin 方程式にあらわれるボルツマン (Boltzmann) 作用素とは、独立ではなく Einstein の関係式で結ばれていることがわかる。これを用いて、さらに、炉雑音源スペクトル密度が2つの成分から構成されることが示される。すなわち、中性子の散乱、吸収、先行核の崩壊、外部源の中性子放出等の核反応が不規則におこることに起因したシングル (single) 雑音源成分、および核分裂に際して複数箇の2次中性子・先行核が同時に放出されるいわゆる分枝現象に起因したバイナリ (binary) 雑音源成分である。シングル雑音源の中性子数の分散への寄与は、ちょうど中性子数の期待値に等しい。検出器では、ポアソン (Poisson) 的な不規則性をもつ検出反応をおこす。バイナリ雑音源からの寄与が

これに加わり、分散は大きくなる。また、お互に相関のある検出パルス対を生み出す。中性子数のゆらぎ、したがって検出器出力のゆらぎがポアソンのもの以外に特異な統計的性質をもち、炉雑音実験が実用上意義あるものになっているのは、分枝現象が存在しているからである。この現象が、一方では、炉雑音現象を単なるガウス (Gauss) 的なもの以上に複雑にしている。

本報の Langevin 法は、中性子数のゆらぎのみならず、線型マルコフ過程に従う現象全般に適用可能である。例として、核分裂に伴ない放出される即発ガンマ線のゆらぎ、計数管内におけるイオンの生成・移動のランダムネスに伴う出力電流のゆらぎの定式化を示す。これら線型系に関する Langevin 法による議論は、非線型性を含む高出力炉雑音の定式化を行なう上での背景として重要な役割を果す¹³²⁾。

第5章では、中性子輸送現象における分枝過程に特に重点をおいた理論構成を示し、あわせて、中性子数、観測量の確率分布の高次 (moment) モーメントおよび多時点相関関数に対する一般的な表式を導出した。

原子炉に投入された1箇の中性子は、核分裂反応を行なうといくつかの子孫中性子を放出する。これら子孫中性子同士は互いに干渉しあうことなくそれぞれ独立に媒質原子と相互作用を行ない、さらに子孫を増やしていく。この様子を中性子家系図として描くと、ある時刻に、たとえば N 箇の相空間点に現われる中性子は、いずれも始めに投入した1箇の中性子の子孫ではあるが、いくつかの家族集団をなしていることがわかり、家系図をさかのぼってそれらを生みだした最も近い共通の分枝点に到達することができる。この考え方は、検出パルス対のうちで特に相関のあるものの存在確率を求めるのに Feynman が用いたものの拡張になっている。これを用いて、 N 次の積密度グリーン (Green) 関数をより低次のグリーン関数のみで表わすことができる。したがって、中性子数の期待値のふるまいを記述するボルツマン方程式のグリーン関数がわかれば、高次の積密度グリーン関数を、順次、定めることができる。 N 箇の相空間点を選ぶ時刻をそれぞれ別々にすれば、 N 時空間点積密度グリーン関数が求まる。

積密度グリーン関数から、1箇の中性子を投入することにより起動された非定常状態にある原子炉における中性子数確率分布の階乗モーメントを定めることができる。階乗モーメントは、確率母関数のテイラー (Taylor) 展開係数に相当しているから、結局、BELL¹⁷⁾ が導いた母関数の従う非線型随伴ボルツマン型の運動方程式の解析解が得られたことになる。この結果を用いると、ポアソンの中性子放出反応をおこす外部源のある原子炉での中性子数確率分布の階乗キュムラント (cumulant) を求めることができる。同様に、 N 時空間点積密度グリーン関数から、検出器出力のゆらぎの N 時点相関関数および一定時間観測をした時得られる観測量の確率分布の N 次

階乗キュムラントが求まる。これらはそれぞれ、相関法、Feynman- α 法による雑音実験を拡張したものの解析公式となる。

以上、第4、5章で展開した基礎理論の応用例を、第6、7章に示す。第6章では、雑音の周波数分析を行なう場合、また、第7章では、時間分析を行なう場合について、それぞれ解析公式を導出し、対応する実験または数値計算例を示す。すなわち、第6章では、中性子検出器出力のゆらぎのスペクトル密度を、一点炉モデルでまず示し、これが、いわゆる零出力炉伝達関数のゲインに比例すると事実上みなしてさしつかえないことを確かめる。ついで、二群一点炉モデル、二点結合炉モデルさらには、一般に空間エネルギー依存性を考慮した場合に、一点炉モデルの結果がどう修正されるかを検討する。また、大型炉でみられる検出器効果、すなわち、雑音スペクトル密度は、検出位置には関係しないが、検出器の形・大きさには依存するという点を吟味する。さらに、検出器がおかれたことによる周囲の中性子束分布の歪、いいかえれば、検出器自己遮蔽の効果の検討例を示す。一方、2検出器間の相互スペクトル密度あるいは、干渉関数 (coherence function) を求めるといった雑音処理方法の創意工夫により、動特性パラメータの推定法に進展がみられつつあるが、この点についても簡単にふれる。

第7章では、いわゆる Feynman- α 法の解析公式の導出を行ない、ついで、ポアソン中性子源のある定常炉における中性子カウント数の確率母関数を、二又基本モード近似で求め、Mogil'ner 法、あるいは、検出カウント

時系列の間隔分布解析法の背景となる公式の導出、相互の関連についてふれる。また、ORNDORFF¹¹⁰⁾ の行なったような古典的な Rossi- α 法の解析公式と、近年行なわれているような電子回路による時間分析器を用いた Rossi- α 法の解析公式とをそれぞれ、導出し、両者の差異を物理的に検討する。ここで用いられた二又基本モード近似は、周波数分析法も含めた各種の相関実験解析上、相当よい近似となっている場合が多い。この場合、解析公式はそれぞれ、中性子源の強さ、即発中性子の増倍度、検出器効率に関係した3つの基本量で表わすことができる⁷⁸⁾。したがって、この種の相関実験のみでは、反応度、中性子寿命、炉出力といった3基本量を構成するよりミクロな炉物理量は、求めることはできず、他の補助実験により、たとえば、検出器効率そのものを定めておく必要がある。この点について、“動特性パラメータの推定原理”の節にのべる。ところが、中性子分枝過程における三又の寄与を、上手に捨てる実験法を開発すれば、この原理の制約からぬけだすことができる。この方向に沿った最近の動きを、最後に簡単に記す。

なお、付録Aでは、雑音現象論の術語に不慣れな読者のために、簡単な解説を試みる。ついで、第2、5、4、3、6、7章と読み進めると、あるいは理解しやすいかもしれない。

付録Bでは、核分裂に伴ない放出される即発中性子数 ν_0 の確率分布、および $\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle / \langle \nu_0 \rangle^2$ に関するデータをまとめる。

2. 低出力炉雑音実験の理論モデル

いろいろな動特性実験を TABLE 1 にまとめる。これらの実験は、Fig. 1 に示すように、原子炉を一つの“開かずの箱 (black box)” とみなし、入力外乱に対する出力応答を観測、解析することにより炉の動的ふるまいに関する情報を得ようとする試み—応答実験として統一的に理解することができよう。これらの実験は、

- (1) 出力応答の期待値を問題にするのか、それとも統計的ふるまいを扱うのか。
 - (2) 入力外乱は、人工的なものか、それとも自然のものであるか。
- によって分類できよう。

パルス中性子法、吸収体振動法、中性子波伝播法はいずれも人工的に外乱を“開かずの箱”に導入し、その出力応答の期待値を解析する。バイナリ雑音法^{8,65)}等²⁸⁾の実験法は、出力応答の統計性を問題にするが、雑音源を人工的に導入するという点で、本報で議論する雑音法とは区別される。本報でのべる炉雑音法における入力外乱は、炉内における中性子の統計的ふるまいに起因する自然のものであり、したがって炉の定常運転に何ら支障を与えことなく実験が行なえるという利点がある。炉雑

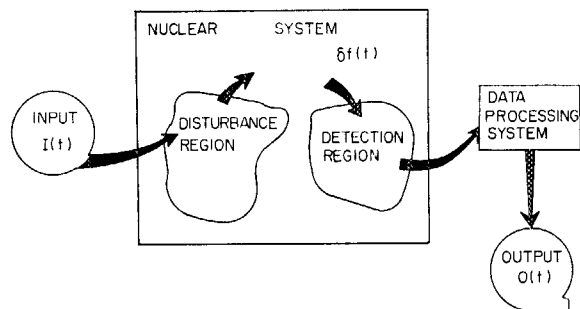


Fig. 1 Generalized response experiment on nuclear reactors

TABLE 1 Miscellaneous response experiments

De-clamping experiment	Rod drop, Positive period, Source-jerk exp. Pulsed neutron exp. Pulsed reactor (e. g., GODIVA)
Pile modulation experiment	Rod oscillation exp. Neutron wave exp. Binary noise exp.
Noise analysis experiment	Time analysis Feynman- α exp. Waiting time analysis $P_0(T), P_{cc}(T), P_{RO}(T)$ Rossi- α exp. Three-time-point Rossi- α exp. Frequency analysis

音法は、出力応答の統計性を、時間領域で分析するもの (Rossi- α 法, Feynman- α 法, Mogil'ner 法, 相関法) と周波数領域で分析するものとに大別できよう。

(なお、制御棒落下法、ペリオド法、中性子源引き抜き法やパルス炉での実験は、初期条件の確認を伴う実験で、初期観測値と適当な時間を経過した後の観測値との間の直接の相関を問題にしている。この意味で、TABLE 1 では“Pile Modulation” 実験とは、異なる範疇に入れた。)

外部中性子源 (たとえば, Ra-Be 源, ²³⁸U の自発核分裂) により定常に運転されている未臨界実験装置あるいは低出力炉を考えよう。すなわち、温度とかボイド、燃料燃焼による反応度フィード・バック、不規則な冷却水の流れによる燃料板や制御板の機械的振動、 k_i の制御に伴う人為的操作などのない“静かな”状態にある原子炉を考える。

この“開かずの箱”は、次の3つの性質、安定な線型定常系としての性質をもっていると仮定しよう。

- 1) 出力応答は、重ね合わせの原理をみたく。
- 2) 出力応答の法則は、時間原点の選び方に関係しない。
- 3) 無限の過去の影響が累積して現在に効果を及ぼすことはない。

いいかえれば、次の通りである。

1) 入力外乱の時間的変化を $I(t)$ 、出力応答の時間的変化を $O(t)$ とする。いま、 $I(t) \equiv I_1(t)$ の時、 $O(t) \equiv O_1(t)$ 、また、 $I(t) \equiv I_2(t)$ の時、 $O(t) \equiv O_2(t)$ としよう。この時、 a, b を任意のスカラー量として、入力外乱 $I(t) \equiv a I_1(t) + b I_2(t)$ が加えられた時の出力応答は、 $O(t) \equiv a O_1(t) + b O_2(t)$ である。(重ね合わせの原理)

2) $I \equiv I_1(t)$ の入力に対して $O(t) \equiv O_1(t)$ の出力応答があったとする。この時、任意の τ に対して $I(t) \equiv I_1(t - \tau)$ であれば $O(t) \equiv O_1(t - \tau)$ である。(定常性)

3) $I = \delta(t)$ という衝撃外乱に対する出力応答を $Gr(t)$ とした時、積分

$$\int_0^{\infty} dt |Gr(t)|$$

は有限である。すなわち、余効関数 $Gr(t)$ は、 L_1 -関数系に属する。

現実の原子炉をモデル化して、以上3つの性質、すなわち安定な線型定常系としての性質をもっている時、これを“零出力未臨界定常炉”モデルと呼ぶ。

低出力炉雑音現象を定式化していく際に、われわれは

TABLE 2 Relaxation time constants

Burn up	>5 months
Poisoning of Xe and Sm	10 hours
Moderator temperature	1.0~1,000 sec
Delayed neutrons	0.3~80 sec
Fuel temperature	0.1~10 sec
Reactivity feedback of voids	0.05~0.1 sec
Reactivity feedback of pressure	0.01~0.1 sec
Ion collection in BF ₃ -counter	10 ⁻³ sec
Prompt neutron chains (β/l)	10 ⁻² ~10 ⁻⁵ sec
Prompt neutrons (l)	10 ⁻⁴ ~10 ⁻⁷ sec
Prompt photons (5 MeV) in reactors	10 ⁻⁷ sec
Photons in NaI scintillation counter	10 ⁻⁷ sec
Ionizing particles (e.g., α -particles) in BF ₃ -counter	10 ⁻⁷ ~10 ⁻⁸ sec
Electrons in BF ₃ -counter	10 ⁻¹⁰ ~10 ⁻¹¹ sec
Lattice vibration	10 ⁻¹³ sec
Compound nucleus	10 ⁻²⁰ sec

原子炉は未臨界であることを前提とする。臨界または超臨界にある原子炉では、第3の性質が満足されない。次章で示すように、臨界状態では、中性子数の期待値は時間的に一定ではあるが、分散は時間に比例して増大してしまう。すなわち、臨界炉は、炉雑音理論の立場からみると、定常系とはいえない。

しかしながら、実際には、炉雑音実験は臨界炉で行なわれているし(たとえば DRAGT⁴⁶⁾の論文)、特に、ORNDORFF¹¹⁰⁾によって始めて行なわれた Rossi- α 実験は、超臨界状態であった。“未臨界炉”モデルによる本報の議論は、一見その一般性をかなり失なうようにみえるかもしれない。臨界炉における炉雑音現象の非定常性は、物理的観点から種々議論されている。その論点を整理してみよう。

1) 臨界状態というのは、一種の数学的“fiction”にすぎない。通常、炉雑音理論では、中性子と媒質原子との間の動力学的干渉効果は無視している。もし、この効果を考慮しなければならないのならば、臨界という概念そのものも大きく変わるであろう。

これは OSBORN *et al.*¹¹¹⁾ の考え方である。中性子と媒質原子との相互作用の緩和時間は、COHN⁹⁴⁾ も指摘しているように 10⁻²⁰ sec のオーダーであり、われわれが、関心を寄せている中性子の動的ふるまいを特徴づける時間(一応のめやすとして中性子寿命を考えればよからう。これは短かくて 10⁻⁸ sec 程度)に比べて問題にならない程、短い。中性子と結晶格子振動、分子振動との間の相互作用があっても、その振動数は、10¹³ cycle/sec のオーダーである (cf. TABLE 2)。しかも、原子炉内における中性子密度は、非常に稀薄である。(たかだか 10⁹ n/cm³ 程度)したがって、中性子の衝突による媒質原子への動力学的余効は、考慮するには値しない。

実効増倍率が1のまわりをふらつくことがあっても、それが中性子寿命程度の粗い時間尺度で眺めた時、一定であれば臨界状態とみなしてよいのではなかろうか。

2) 燃焼の効果があるために、中性子数の分散が発散

するという現象は、ごく短時間にとどまる。

この MEDINA⁹⁶⁾ の考え方は、OSBORN *et al.*¹¹¹⁾ の説明と相対する極端な位置を占める。燃焼の効果が効いてくるのは低出力炉では、数ヶ月以上のオーダーであろう。

3) 臨界炉では、エルゴード性が成り立たない。したがって、臨界炉について何らかの情報を実験的にうる試みの意義は疑わしい。

これは、DALFES³⁹⁾ の考え方である。われわれは通常、実験データの信頼度を増すために、何回か反復して(時間原点をずらして)実験を行ない平均(時間平均)をとる。ところが、このデータを解析するために用意されている公式は、集合(ensemble)平均に関するものである。エルゴード性は、両者の同等性を主張する。

未臨界炉では、エルゴード性は成り立つが、臨界炉ではそれが成立しないのは、エルゴード性がなりたつための必要条件、すなわち定常性が臨界炉では保たれないことによる。BENNET¹⁸⁾ が指摘しているように臨界炉では、未臨界炉のようにある特定の出力レベルに落ちつくという傾向はない。したがって、ある原子炉の中性子束レベルが、時間の経過とともに集団平均から大きくずれていく確率は高い。

臨界炉では(もちろん未臨界炉でも)、投入された中性子の家系が杜絶する確率は、1に等しい¹⁷⁸⁾。KOZIK⁸³⁾ は、この点を指摘し、臨界炉はやがては停止するであろう。ただし、臨界到達時の中性子数が十分大きければ、かなりの時間がかかるであろうと述べている。事実、実用上われわれが関心をもつ時間範囲内では、定常に運転されている臨界炉というものを想定することができる。

臨界炉まして超臨界炉の実験の意義は、疑わしいものであるだろうか。MATTHES⁹¹⁾ は、大型炉では、炉出力に大きなゆらぎが見られ、人為的に炉出力の設定点の“戻し”を行なうことの必要性を説いている。そして、この制御棒による人為的な操作を含めた理論体系を予期している。

4) 臨界または超臨界炉で行なわれる炉物理実験の意義は、次の2通りに分けて考察すべきである。

- 初期状態の確認を伴う実験。
- その炉でおこる“未臨界”な現象、すなわち、即発中性子のふるまいを対象にする実験

制御棒落下法、ペリオド法による制御棒効果測定実験は、常に初期状態すなわち落下直前の出力レベルを確認した後に行なわれる。一方、GODIVA のようなパルス炉での実験では、“burst”直前の出力レベルに比べて桁違いの中性子束を問題にしており、初期状態は、ゼロと考えてさしつかえない。このタイプの実験は、マルコフ性が妥当であることをその理論的背景としており、時刻 t_0 に炉の状態が f_0 であった時、時刻 $t(\geq t_0)$ の状態が f である遷移確率 $P(f, t|f_0, t_0)$ に関係した出力応答を解析の対象としている。

一方、臨界または超臨界(もちろん、即発臨界以下)

の状態で行なわれる炉雑音実験の意義は、高周波側（周波数 $\omega \gg \lambda$ 、ただし λ は、遅発中性子先行核の崩壊定数 $\approx 0.08 \text{ sec}^{-1}$ ）と低周波側とに分けて考えるべきである。高周波側では、即発中性子による連鎖反応が問題になるが、この場合、原子炉は即発中性子に対しては未臨界状態にあって、遅発中性子が外部源として働き定常な即発未臨界状態を実現していると考えることができる。これと同様な考え方は、KOZIK⁸³⁾も示している。さらに、彼は臨界炉を定常系とみなすもう一つの考え方を示している。すなわち、原子炉には、常に自発核分裂とか (γ, n)

反応といった外部中性子源が存在し、したがって臨界炉といっても実際はやや未臨界状態である。この考え方にたてば、臨界炉における炉雑音実験の低周波側の意義も認められよう。しかし、ORNDORFF¹¹⁰⁾、NOMURA *et al.*¹⁰⁸⁾によって行なわれたような超臨界状態の雑音解析は、即発未臨界定常状態で行なわれたと考えるべきであろう。

なお、臨界状態での炉雑音の自己相関関数の測定の際、分散の発散項がどの程度寄与するか、やや定量的な検討が DRAGT¹⁶⁾によって行なわれ、測定時間 40 sec の間では、1.8% という結果を得ている。

3. 零出力炉雑音理論の構成

炉雑音実験解析, 弱中性子源による炉起動時の安全評価等の背景になるのは, 確率・統計論の立場から定式化された中性子輸送理論である. 特に, 炉雑音実験の場合, 直接の解析対象は, 検出器出力 $O(t)$ の統計的性質である. 検出器の線型性が保証されていれば, 出力の期待値 $\langle O(t) \rangle$ は, 検出点における中性子数の期待値に比例していると考えられる. しかしながら, たとえば, 雑音周波数分析法の背景になる検出器出力のゆらぎのスペクトル密度と検出点における中性子数のゆらぎのスペクトル密度とは比例関係にはない. その理由は, 次の4点である.

- a) 検出器は, 検出に伴ない中性子を吸収すること.
- b) その際, たとえば核分裂計数管のように, 二次中性子・先行核を放出する場合があること.
- c) 検出1回当たり放出される検出量 θ (電気量) の大きさは必ずしも一定ではなく, ある確率法則に従うこと.
- d) 放出検出量は, 中性子検出の際, ただちに放出されるのではなく, ある特有な応答関数 $h(t)$ に支配される時間分布に従い放出されること. たとえば, BF_3 電離箱では, $h(t)$ は電離された電子やイオンが電極に集積されるとともに立ち上り, 回路の時定数に関係した減衰を示す.

したがって, 中性子場の統計的性質を明らかにすると同時に, 検出器出力の統計的性質との関連を明らかにすることの2点が理論上の問題になる.

理論の構成方法としては, いくつかの異なったやり方がいままで試みられてきた. 大別するとまず古典論的方法と量子論的方法とにわかれる.

3.1 量子論的方法

ここでは, 中性子, 先行核, 検出に伴ない放出される検出粒子 (たとえば, BF_3 電離箱における α -粒子) および媒質原子を含めた原子炉を構成するすべての粒子の集団が従う I -空間における量子リウヴィユの方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} D(t) = \frac{i}{\hbar} [D, H] \quad (3.1)$$

が出发点となる. ここで, D は密度行列, H はハミルトニアンである. 媒質原子と中性子, 先行核, 検出粒子との相互作用は, もちろん, H の中に含まれる. とこ

ろが, 原子炉における中性子輸送現象あるいは炉雑音現象で, 観測の対象にするのは, μ -空間における中性子, 先行核あるいは検出粒子の分布である. そこで, μ -空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) のまわりのセル (その体積は, V とする) に存在するスピン s をもつ種類 α の粒子数を対角化表現における固有値としてもつ作用素 $\rho^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, s)$ を導入し, 粒子数の singlet および doublet 分布関数をそれぞれ次のように定義する.

$$\begin{aligned} f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= V^{-1} \text{Tr} \cdot \sum_s \rho^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, s) D(t). \\ f_2^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) &= V^{-2} \text{Tr} \cdot \sum_s \sum_{s'} \rho^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, s) \rho^\beta(\mathbf{x}', \mathbf{v}', s') D(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

いま, μ -空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) のまわりの微小要素 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 中に存在する種類 α の粒子数を $f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ としよう. これはランダム変数である. singlet, doublet は古典論的には, 次のように表わされる.

$$\begin{aligned} f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \langle f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle. \\ f_2^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) &= \langle f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f^{(\beta)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

上式で, 記号 $\langle \rangle$ は, 集合平均をとることを意味する. OSBORN and Yip¹⁸⁴⁾, OSBORN and NATELSON¹¹¹⁾ は, 中性子, 先行核, 検出粒子に対するこれら分布関数に対する運動方程式を, 次のような前提のもとに導いている.

- 1) 中性子, 先行核, 検出粒子同士あるいは相互間には, 相互作用はない.
- 2) 中性子, 先行核, 検出粒子と媒質原子との間には相関はなく, これら粒子と独立に媒質原子の分布の状態は与えられる.

簡単のために遅発中性子先行核を無視すると, 中性子に対する singlet 分布関数 $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に対する運動方程式としては, 通常のボルツマン微積分方程式が得られた. すなわち,

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + B f_1 = S_1. \quad (3.6)$$

一方, doublet 分布関数 $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$ に対する運動方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2 + (B+B') f_2 = S_1 f_1' + S_1' f_1 + Q. \quad (3.7)$$

上式で, B はボルツマン作用素で一点炉モデルでは B , B' は共に中性子減衰係数 α となる (cf. Eq. (3.14)). 一般には, B は, 任意の関数 $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ に対して次のように定義される.

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} \phi + \nu \Sigma_t \phi \\
&- \int d\mathbf{v}'' \nu'' \Sigma_s(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}'', \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}'') \\
&- \int d\mathbf{v}'' \nu'' \Sigma_f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'') \langle \nu(\mathbf{x}, \mathbf{v}'') \rangle \\
&\times \chi(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}'', \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}''). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

記号は慣用のものである。すなわち、 Σ_t は、全反応断面積、 $\Sigma_s(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}'')$ は、散乱核を表わし、速度 \mathbf{v}'' の中性子の散乱断面積 $\Sigma_s(\mathbf{v}'', \mathbf{x})$ と次の関係にある。

$$\Sigma_s(\mathbf{v}'', \mathbf{x}) = \int d\mathbf{v} \Sigma_s(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}'', \mathbf{x}).$$

$\langle \nu(\mathbf{x}, \mathbf{v}'') \rangle$, $\chi(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}'', \mathbf{x})$ は、それぞれ速度 \mathbf{v}'' をもつ中性子が場所 \mathbf{x} で核分裂反応をおこした時生まれる二次中性子数の期待値および速度分布を表わす。後者は次のように規格化されている。

$$\int d\mathbf{v} \chi(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}'', \mathbf{x}) = 1.$$

(3.6) 式で $S_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ は、外部中性子源により場所 \mathbf{x} のまわりの $d\mathbf{x}$ 中に、速度 \mathbf{v} のまわりの $d\mathbf{v}$ をもつ中性子の単位時間当たり放出される数の期待値。(3.7)式で B' は、 $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$ においてプライムを付けた相空間点に作用することを意味する。また、

$$S_1' = S_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}'), \quad f_1' = f_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$$

2 空間点相関関数を次のように定義しよう。

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) &\equiv f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \\
&- f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t). \quad (3.9)
\end{aligned}$$

(3.6), (3.7), (3.9) 式を用いると Γ は、次の運動方程式をみたすことがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma + (B + B') \Gamma = \Omega. \quad (3.10)$$

中性子相互の相関がなければ、 Γ はゼロ。したがって、 Ω もゼロである。 Ω は、相関をうみだす源である。

こうして得られた運動方程式は、古典論的方法論によるものと一致していることを、OTSUKA and SAITO¹⁶⁾ が指摘している。量子論的方法論は、優れた方法ではあるが、古典論的方法論のほうがより単純であると同時に炉雑音現象の物理的本質をより明快に示してくれる。

なお、GELINAS and OSBORN⁵⁹⁾ は、核分裂の際放出されるガンマ線—光子場のしたがう運動方程式をやはり、リューヴィユの方程式から導き、即発光子数のゆらぎを解析することにより、中性子の動特性に関する情報が得られることを明らかにした。

3.2 古典論的方法

古典論的方法では、中性子・先行核を、場所 \mathbf{x} 、速度 \mathbf{v} で表わされる 6 次元相空間 (μ -空間) に分布する点粒子とみなす。媒質原子との相互作用を表わすために、反応断面積および反応により新たに生成される 2 次粒子の

μ -空間における分布確率を導入する。中性子—中性子衝突といった粒子相互間の作用を無視し、各粒子は、お互いに他の粒子と独立にふるまうと考える (線型性の仮定)。原子炉の状態を表わす変数としては、各相空間点に存在する粒子数を成分とするベクトルを選び、この粒子数ベクトルの現時点での値がわかれば、将来の粒子数ベクトルの値はわかる。その際、過去の情報は必要ないと考える (マルコフ性の仮定)。すなわち、中性子連鎖過程を Galton-Watson 型の分枝過程とみなす。

その定式化の方法は、次の 3 つに大別できる。

- 1) Kolmogorov の方法
- 2) Langevin の方法
- 3) Feynman の方法

3.2.1 Kolmogorov の方法

ここで、対象として扱う物理量は、ある時刻 t において原子炉の状態が \mathbf{f} である時、後時刻 $t' (\geq t)$ における状態が \mathbf{f}' である遷移確率 $P(\mathbf{f}', t' | \mathbf{f}, t)$ である。原子炉の状態を表わすランダム変数は、炉内粒子数である。炉内粒子は、中性子、先行核、検出粒子に種類分けされる。さらに、これら粒子が μ -空間においてどの位置を占めるかによって種類分けされる。粒子の種類を、 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ で区別し、それぞれの粒子の存在数を、 $f^{(\alpha)}, f^{(\beta)}, f^{(\gamma)}, \dots$ としよう。原子炉の状態は、 $f^{(\alpha)}, f^{(\beta)}, f^{(\gamma)}, \dots$ を成分としてもつ数ベクトル \mathbf{f} で、定量的に表わすことができる。マルコフ的な体系では、ある時刻 t における状態がわかれば、将来の状態は完全に予測することができる。過去の状態に関する情報は、必要としない。したがって、マルコフ的な体系では、遷移確率 $P(\mathbf{f}', t' | \mathbf{f}, t)$ がわかれば十分である。

状態の変化をひきおこす素過程としては、中性子の自由飛行による移動、散乱、吸収、分裂といった核反応、先行核の崩壊反応、検出器による中性子検出反応、外部源からの中性子放出反応等がある。これら素過程による状態の変化を考慮して、遷移確率 $P(\mathbf{f}', t' | \mathbf{f}, t)$ の従う時間に関する微分方程式、いわゆる Kolmogorov の方程式を導出する。この際、時間に関する未来向きの方程式 (Forward equation. 以下、F. eq と略す) を導く方法と過去向きの方程式 (Backward equation. 以下、B. eq. と略す) を導く方法とがある。前者では、時刻 t における状態を初期条件として固定しておき、時刻 t' における状態が、微小時間 $dt' (> 0)$ の間におこる種々な素過程により時刻 $t' - dt'$ のどんな状態から遷移したかということの問題にする。一方、後者では、時刻 t' における状態を終期条件として固定しておく。時刻 t にたとえば 1 ケの中性子を投入したという状態から出発して定められた終期状態が実現される確率と、その中性子の最初の媒質原子との反応によって新たに生じた状態から終期状態が実現される確率との間の関係式を導く (初衝突確率

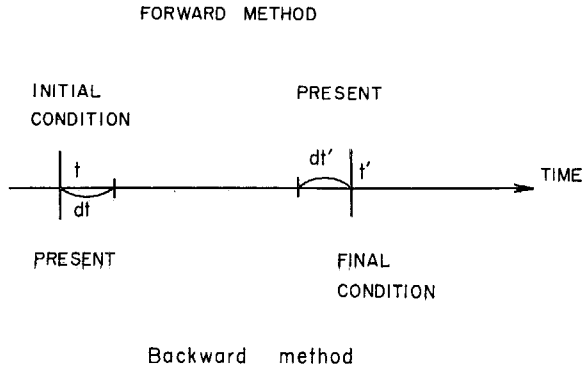


Fig. 2 Forward and backward Kolmogorov method

法-first collision probability method). ついで、中性子を投入する時刻を dt だけ遅らせた場合の同様な関係式を導き、2つの関係式から時間に関しては、後向きの方方程式を求める (cf. Fig. 2).

F. eq は、始め COURANT and WALLACE³⁶⁾により、 μ -空間の位置および速度依存を無視した一点炉モデルで導出された。この場合、原子炉の状態をあらわすランダム変数であるベクトル f の成分は、中性子数、タイプ i の先行核数 ($i=1, 2, \dots, I$) である。いま、先行核は無視し、時刻 $t+dt$ に中性子が N 箇存在する確率を $P(N, t+dt)$ としよう。初期状態はあらわには書き表わさないこととする。時刻 $t+dt$ における存在確率 P は、時刻 t における存在確率と微小時間 dt におこる反応素過程とを考慮して次の3つの項から成り立つことがわかる。

i) 時刻 t に $(N-1)$ 箇の中性子が存在している確率と外部源から1箇の中性子が dt 時間に放出される確率との積。すなわち、

$$P(N-1, t)S dt.$$

ii) 時刻 t に $(N-n+1)$ 箇の中性子が存在している確率と中性子が1箇 dt 時間中に失なわれ、その結果、 n 箇の中性子が再生される確率との積。すなわち、

$$P(N-n+1, t) \frac{N-n+1}{l} p(n) dt.$$

iii) 時刻 t に、 N 箇の中性子が存在する確率と微小時間 dt の間に外部源による中性子放出も中性子の損失反応も起らない確率との積。すなわち、

$$P(N, t) \left(1 - S dt - N \frac{dt}{l} \right).$$

これら3つを合わせて、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} P(N, t+dt) &= P(N-1, t) S dt \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} P(N-n+1, t) \frac{N-n+1}{l} p(n) dt \\ &+ \left[1 - S dt - N \frac{dt}{l} \right] P(N, t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

上式で、 $P(N, t)$ を左辺に移し、 dt で割った後、極限操作 $dt \rightarrow 0$ を行なえば、未来向きの Kolmogorov 方程式が得られる。

ここで、次のように定義される確率母関数を導入する。

$$G(z, t) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N P(N, t).$$

(3.11) 式を用いると G の従う次のような F. eq が得られる。

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (z-1)SG + \frac{g(z)-z}{l} \frac{\partial G}{\partial z}. \quad (3.12)$$

ここで

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n).$$

(3.12) 式を、 z で1回微分してから $z=1$ とおいてみよう。期待値 $\langle N(t) \rangle$ に対する次のような運動方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \langle N(t) \rangle + \alpha \langle N(t) \rangle = S. \quad (3.13)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{1-k}{l},$$

$$k = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n).$$

次に $\left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)$ を2回、(3.12)式に作用させて、 $z=1$ とおいてみよう。2次モーメント $\langle N^2(t) \rangle$ の従う運動方程式が得られる。すなわち、

$$\frac{d}{dt} \langle N^2(t) \rangle + 2\alpha \langle N^2(t) \rangle = 2S \langle N(t) \rangle + Q(t). \quad (3.14)$$

ここで、非同次項

$$Q(t) = \frac{k_2 - k}{l} \langle N(t) \rangle + S + \alpha \langle N(t) \rangle. \quad (3.15)$$

また

$$k_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p(n).$$

分散 $\sigma_2(t) = \langle N^2(t) \rangle - \langle N(t) \rangle^2$ の従う運動方程式は、(3.13), (3.14) 式から次のようになることがわかる。

$$\frac{d}{dt} \sigma_2(t) + 2\alpha \sigma_2(t) = Q(t). \quad (3.16)$$

(3.13), (3.14), (3.16) 式は、それぞれ (3.6), (3.7), (3.10) 式の一点炉近似に相当したものである。定常状態においては、 $\langle N \rangle = S/\alpha$ という関係があるから、分散の従う運動方程式 (3.16) で“源”に相当する $Q(t)$ は、次のように書ける。

$$Q_s = \frac{k_2 - k}{l} \langle N \rangle + 2\alpha \langle N \rangle. \quad (3.17)$$

$\alpha > 0$ 、すなわち未臨界炉では、分散の定常値 σ_s は、次のようになる。

$$\sigma_{2s} = \frac{k_2 - k}{2(1-k)} \langle N \rangle + \langle N \rangle. \quad (3.18)$$

純粋なポアソン体系では、分散は期待値に等しい。1回の核反応で再生される二次中性子数がたかだか1箇の時には、 $k_2 = k$ となって、(3.18) 式右辺第1項は、ゼロである。この項は、再生される二次中性子が複数箇ある時

にのみ現われる。すなわち、分枝反応特有な項である。臨界に近い原子炉では、この項が全体の分散のうちで大きな部分を占める。

$\sigma_{2s}/\langle N \rangle^2 \approx \frac{k_2 - k}{2l} \frac{1}{S} \propto \frac{1}{S}$ であるから、中性子源が弱いと中性子数の相対的なふるつきは大きくなるがわかる。

臨界の時、すなわち、 $\alpha=0$ の時には、外部源 $S=0$ とおけば、期待値は定常になる。しかし、(3.16) 式からわかるように分散は、時間に比例して発散してしまう。この場合の比例定数は、 Ω_s である。臨界炉は、炉雑音の立場からみると定常状態にあるとはいえない。COURANT and WALLACE³⁶⁾ は、方程式 (3.12) を導いた後、定常状態における中性子数の分散 $\sigma = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ 、2 時点相関関数 $\langle N(t+\tau)N(t) \rangle$ を算出している。さらに期待値のまわりのゆらぎ $\delta N(t) = N(t) - \langle N \rangle$ のスペクトル密度も求めている。同様な結果を、LARISSE and BRAFFORT⁸⁷⁾ は、(3.11) 式から得られる確率微分方程式を用いて導いている。

DALFES は、(3.12) 式の定常解が、外部源をもった未臨界炉では存在するが、臨界炉では、炉出力の期待値は一定でも分散は時間に比例して発散してしまうことを証明し³⁷⁾、ついで、粒子数の変化を連続量の変化におきかえ、(3.11) 式から P の従う Fokker-Planck 方程式を導き³⁸⁾、COURANT 等と同じ結果を得ている^{39, 40)}。

弱中性子源による炉起動時の安全評価を目的として、方程式 (3.12) の解の性質を考察したのは、HURWITZ⁷²⁾、MACMILLAN⁹⁰⁾、BELL^{15, 16)} らである。さらに検出器を原子炉の一部としてとりいれ、状態変数の1つとして検出カウンタ数を新たに付け加えて、方程式 (3.12) を拡張したのは FRISCH and LITTLER⁵²⁾、DALFES⁴¹⁾ である。方程式の解は、KOBAYASHI⁸²⁾ によって求められ、また、KURIHARA and SEKIYA⁸⁶⁾ は、種々な相関実験解析公式を見通しよくひきだすことのできる演算子の導入を行なっている。

HARRIS⁶⁶⁾ は、さらに、温度によるフィード・バックをとりいれて、確率母関数 G に関する非線型方程式を導いている。さらに、ポイドの効果を考慮しているのは、PLUTA¹²⁰⁾ である。

1 点炉から多点炉への拡張は、まず、RAIEVSKI¹²¹⁾ により行なわれた。位置空間は、小さな有限セルに分割し、エネルギー依存性は、減速時間は無視するが、減速による空間的拡がりには考慮するモデル、年令理論、二群理論によってそれぞれ考察した。また、空間依存性は、モード展開における基本項のみをとりだし具体的な検討を行なっている。RAIEVSKI のモデルをさらに発展させ、位置および速度空間を小さな有限セルに分割して、各セルにおける中性子数の存在確率の母関数が従う運動方程式を導いたのは、MATTHES⁹²⁾ である。定常時における多点炉の中性子数の分散および 2 時点相関関数の表式は、

固有関数展開法により OTSUKA and SAITO¹¹⁴⁾ により求められた。多点炉モデルでは、中性子の自由飛行による移動をとりいれるために、“もれ”の反応断面積を用いる。この点を吟味して拡散の効果の統計的性質を論じたのは、BLAQUIERE and PACHOWSKA²¹⁾ である。

相空間が連続な場合への拡張の方向として、ごく自然な方法は、原子炉の状態を、密度分布関数ベクトル (その成分は、中性子、先行核、検出粒子の密度分布関数) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ で記述し、状態が $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ である確率密度汎関数 $P(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t))$ を導入し、 P の従う運動方程式を導く方法である。これは DALFES⁴³⁾ によって行なわれ、特に検出カウンタ数の 2 時点相関関数 $\Gamma_{dd}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t')$ $\equiv \langle f^{(d)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f^{(d)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \rangle - \langle f^{(d)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle \times \langle f^{(d)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \rangle$ に対する表式が得られている⁴²⁾。

汎関数を用いない、より初等的方法論としては、宇宙線のなだれ現象の定式化に応用された Ramakrishnan の方法¹²²⁾がある。これは相空間無限小領域 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 中に N 箇、粒子が存在する確率は、 $|d\mathbf{x} d\mathbf{v}|^N$ に比例し、したがって、2 箇以上粒子の存在する確率は、1 箇存在する確率に比し、高次の無限小になり、1 箇存在する確率に比し無視しようという性質を利用する方法である。比例係数は、期待値の密度分布関数になる。同様に相異なる 2 つの無限小セル $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$, $d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'$ を考えると、それぞれのセルに 1 箇ずつ粒子の存在する結合確率の比例係数として、2 次の積密度分布関数 $\tilde{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$ が得られる。これは先に用いた doublet 分布関数 $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$ と、次のような関係にある。

$$\tilde{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (3.19)$$

SAITO and OTSUKA¹²⁶⁾ はこの Ramakrishnan の方法を応用して、原子炉における中性子、先行核、検出粒子の分布関数の従う運動方程式を導き、その解を求めている。GOVORKOV も同様な考察を、先行核を無視した中性子場について行ない、さらにより高次の積密度分布関数の従う運動方程式を導いている⁶²⁾。微小相空間要素を考慮するが、その有限性を残しておく立場で問題を扱ったのは、KATSURAKI* である。MATTHES⁹⁴⁾ も、同様な立場をとっている。

一方、原子炉に投入された 1 箇の中性子が、自由飛行による移動、散乱、吸収、核分裂反応といった素過程を繰り返していく様子を、“酔歩 (random walk)” の問題として捉え、反応回数別に中性子密度分布関数をまず求め、それらの総和として分布を表わすことができる。この方法は、TAJI¹⁴⁶⁾ により、doublet 分布関数の時間依存性を検討するのに用いられた。

* 桂木 学, “中性子輸送過程の統計的記述”
第 4 回炉物理・第 2 回炉工学分科会予稿集 B7, B8 (1964)
“中性子輸送の確率過程としての記述とその応用” JAERI-
memo 1803 (1964)(未公開)

以上は、遷移確率 $P(\mathbf{f}, t|\mathbf{f}', t')$ の従う未来向きの Kolmogorov 方程式を背景にした理論構成法である。過去向きの方程式を背景にした中性子輸送の確率理論は、まず PÁL¹¹⁷⁾ により考察され、BELL¹⁷⁾ によって、より明快な形に整理された。時刻 t に速度 \mathbf{v} をもつ中性子を場所 \mathbf{x} に投入した時、後時刻 $t_1 (\geq t)$ に相空間領域 V 中に N 箇中性子が存在する確率 $P(N, V, t_1|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ を導入し、投入中性子が初めて核反応を行なう時、その反応が吸収、散乱、核分裂のうち、どのタイプであるかを考慮して P の釣合いの関係式を導く。この方法は、初衝突確率法 (first collision probability method) と呼ばれ、JANOS-SAY⁷⁹⁾ が宇宙線のなだれ現象の定式化に用いたものを PÁL が中性子輸送現象へ応用した。確率母関数を

$$G(z, V, t_1|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N P(N, V, t_1|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

と定義し、 $\tilde{G} = 1 - G$ とおくと、 \tilde{G} の満足する運動方程式は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\tilde{G}(z, V, t_1|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1) \rangle \nu \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ \times \left[\int d\mathbf{v}' \tilde{G}(z, V, t_1|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \chi(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \right]^j \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで作用素 L^+ は、時間を含めたボルツマン作用素 $(\partial/\partial t + B)$ の随伴作用素である。すなわち、

$$\begin{aligned} L^+ \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \phi - \mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} \phi + \nu \Sigma_t \phi \\ - \int d\mathbf{v}' \nu \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}') \\ - \nu \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \langle \nu(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle \int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}'). \end{aligned}$$

(3.20) 式は、通常のボルツマン方程式 (3.6) に比べると時間に関しては逆向きの随伴型でしかも非線型になっている。

ポアソンの中性子を放出する外部源分布 $S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ がある時に、時点 t_1 に領域 V に N 箇の中性子が存在する確率 $P(N, V, t_1|S)$ に対する母関数を、次のように定義しよう。

$$G(z, V, t_1|S) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N P(N, V, t_1|S). \quad (3.21)$$

これは $G(z, V, t_1|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ と、次のような関係にあることが、BELL¹⁷⁾ によって示された。

$$\begin{aligned} G(z, V, t_1|S) = \exp \left[\int d\mathbf{x} \int d\mathbf{v} \int_0^{t_1} dt S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right. \\ \left. \times (G(z, V, t_1|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

(3.20), (3.22) 式は、一点炉モデルでは、それぞれ次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \left(- \frac{d}{dt} + \alpha \right) \tilde{G}(z, t_1|t) \\ = - \nu \Sigma_t \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1) \rangle \\ \times [\tilde{G}(z, t_1|t)]^j, \end{aligned} \quad (3.20')$$

$$G(z, t_1|S) = \exp \left[-S \int_{-\infty}^{t_1} dt \tilde{G}(z, t_1|t) \right]. \quad (3.22')$$

BELL¹⁷⁾ は、原子炉へ投入された中性子の連鎖過程が杜絶する確率と母関数との関連を論じ、さらに中性子数の分散の評価を行ない、一点炉モデルでは、値を小さ目に見積ることを報告している。また、BORGWALDT and SANITZ²³⁾ は、2つの終期時刻 t_{11} と t_{12} にそれぞれ検出カウントが存在する確率を論じ、位置・速度依存を考慮した Rossi- α 法に対する公式を導いている。さらに遅発中性子を考慮した場合への拡張、時刻 t_1 から T 時間検出を行なった時のカウント数の確率母関数の従う運動方程式の導出もなされている。これらの結果を用いて、PÁL¹¹⁹⁾ は一点炉モデルで炉雑音実験の解析公式を導出している。ZOLOTUKHIN and MOGIL'NER¹⁵⁹⁾ も同様な応用を行なっている。

また、BABALA⁷⁾ は、一對の検出カウント間の時間分布、あるいはある任意の時刻から、初めて検出カウントがあるまでの待ち時間分布に対する表式を求めている。時間分析器を用いて現在ふつうに試みられている Rossi- α 法の解析公式は、ORNDORFF¹¹⁰⁾ が初めて試みたものとは異なる。時間分析器は、トリガ検出カウントを待って始めて、スイープを行なう。この待ち時間が、中性子の統計的ふるまいに支配されることを考慮した解析公式の導出は、BABALA⁶⁾, IZUMI⁷⁸⁾ によって行なわれた。

一方、SAITO and TAJI¹³¹⁾ は、時刻 t_1 に領域 V 中に存在する中性子を、初めに投入した中性子の何代目の子孫に当るかによって分類し、それぞれの世代に属する中性子数ベクトルの確率母関数の従う運動方程式を導き、中性子多重衝突過程の確率論的定式化を行なった。

方程式 (3.20) の数値解は、 S_N 法³¹⁾ を応用すれば求められることを BELL¹⁷⁾ は示唆しているが、解析解を階乗モーメント展開の形で得ることができることを SAITO and TAJI¹³⁰⁾ は示した。一点炉モデルで考えてみよう。

$$G(z, t_1|t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \gamma_m(t_1|t) \quad (3.23)$$

とおくと、定義により、

$$\begin{aligned} \gamma_m(t_1|t) = \sum_{N=m}^{\infty} N(N-1)\cdots(N-m+1) P(N, t_1|t), \\ \text{ただし } m \geq 1 \text{ の時} \end{aligned} \quad (3.24)$$

となり、また

$$\begin{aligned} \gamma_0(t_1|t) &= G(1, t_1|t) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N, t_1|t) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.23) を (3.22') に代入すると、ポアソン源がある時には、時刻 t_1 に存在する中性子数の確率母関数は、次のような階乗キームラント展開形で与えられることがわかる。

$$G(z, t_f | S) = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \tilde{\sigma}_m(t_f | S) \right\}. \quad (3.26)$$

ここで、

$$\tilde{\sigma}_m(t_f | S) = \int_{-\infty}^{t_f} dt \gamma_m(t_f | t) S(t). \quad (3.27)$$

(3.26) 式を 1 回 z について微分し、 $z=1$ とおくと、 $\tilde{\sigma}_1$ は期待値に等しいことがわかる。

$$\tilde{\sigma}_1(t_f | S) = \sum_{N=0}^{\infty} NP = \langle N \rangle. \quad (3.28)$$

また、(3.26) 式を 2 回 z について微分し、 $z=1$ とおくと次のことがわかる。

$$\tilde{\sigma}_2(t_f | S) = \sigma_2(t_f | S) - \langle N \rangle^2. \quad (3.29)$$

ただし、分散

$$\sigma_2(t_f | S) = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2.$$

さて、階乗モーメント γ_m の満足すべき運動方程式を求めよう。(3.20') 式を、 m 回 z について微分し、 $z=1$ とおく。結果は次のようになる。

$$\left(-\frac{d}{dt} + \alpha \right) \gamma_1(t_f | t) = 0. \quad (3.30)$$

$$\left(-\frac{d}{dt} + \alpha \right) \gamma_m(t_f | t) = v \sum_l I_m(t_f | t), m \geq 2 \text{ の時} \quad (3.31)$$

核分裂がなければ、 γ_m に対する源に相当する上式右辺第 2 項はゼロである。ここで、

$$I_m(t_f | t) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1) \dots (\nu-j+1) \rangle \times \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left[\tilde{G}(z, t_f | t) \right]_{z=1}. \quad (3.32)$$

I_m は、 γ_m より低次のモーメントから成り立っている。特に、

$$I_2(t_f | t) = \langle \nu(\nu-1) \rangle [\gamma_1(t_f | t)]^2. \quad (3.33)$$

次の方程式の解、すなわち、グリーン関数を求めよう。

$$\left(-\frac{d}{dt} + \alpha \right) Gr(t' | t) = \delta(t-t').$$

(3.30) 式の解は、次のように与えられる。

$$\gamma_1(t_f | t) = Gr(t_f | t) = \exp(-\alpha(t_f - t)). \quad (3.34)$$

一方、(3.31) 式の解は、次のようになる。

$$\gamma_m(t_f | t) = \int_t^{t_f} dt' I_m(t_f | t') v \sum_l Gr(t' | t). \quad (3.35)$$

外部中性子源のある場合のモーメントは、(3.34)、(3.35) 式を (3.27) 式へ代入して、(3.26) 式を用いて求めることができる。まず、期待値は次のようになる。

$$\langle N(t_f | S) \rangle = f_1(t_f). \quad (3.36)$$

ここで、次のように定義した。

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^t dt' Gr(t | t') S = S/\alpha. \quad (3.37)$$

一方、分散に対する表式は、(3.35) 式へ (3.33) 式を代入し、(3.27)、(3.29) 式を用い、積分を実行すると次のようになることがわかる。

$$\sigma_{2s} = \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle v \sum_l \langle N \rangle + \langle N \rangle^2}{2\alpha}. \quad (3.38)$$

($k_2 - k$) = $\langle \nu(\nu-1) \rangle v \sum_l l$ とおくと、(3.38) 式は、F. eq を用いて得られた結果 (3.18) と一致していることがわかる。

より高次の階乗モーメントは、(3.32)、(3.35) 式を用いて低次のモーメントから、順次算出することができる。いいかえれば、グリーン関数 Gr がわかれば、高次の階乗モーメントは順次求まり、したがって確率母関数が定まるわけである。

過去向き Kolmogorov の方程式を背景にした理論の利点は、解がこのような構造をもっていることを容易に示せる点である。この場合の解がわかれば、GOVORKOV⁶²⁾ が導いている高次の積密度分布関数に対する運動方程式の解を、書き下すことは容易である。MATTHES⁶⁴⁾ は、F. eq と B. eq とを統一的な立場で論じ、このような B. eq の利点を指摘している。

以上は、原子炉の状態を記述するランダム変数が、マルコフ的であることを背景にして、遷移確率 $P(\mathbf{f}, t | \mathbf{f}', t')$ の従う Kolmogorov 方程式を応用した炉雑音理論構成法の簡単な紹介である。

3.2.2 Langevin の方法

状態変数の値が統計的にふらつくのは、炉に内在する不規則な雑音源が原因であるという見方に立つのが Langevin 法である。MOORE は、雑音源に対する線型系の応答の問題を一般的に考察し、原子炉の伝達関数のゲインを雑音周波数分析により得られることを指摘し¹⁰⁰⁾、温度フィード・バックを考慮した場合へ応用しているが¹⁰¹⁾、雑音源に関しては、定性的な議論を行なったのみで未知量としている。零出力炉の雑音源は、まず COHN³⁴⁾ により一点炉モデルで考察された。雑音源 $F(t)$ は、種々な核反応が確率的に起こることに原因している。核反応の持続時間は、 10^{-20} sec 程度のオーダーであり、われわれが炉雑音を観測する時間尺度に比し十分短いので雑音源の相関関数 $\langle F(t)F(u) \rangle$ は、デルタ関数 $\delta(t-u)$ に比例する。すなわち、そのスペクトル密度は白色であると考えられる。スペクトル密度の大きさを定めるには、反応に伴う粒子の放出という点で 2 極管のショット雑音に類似していることから Schottky の公式 (たとえば、文献 (185) 第 2 章をみよ) が適用できるであろうと COHN は、考えた。この Moore-Cohn の方式は、SHEFF and ALBRECHT¹³⁹⁾、AKCASU and OSBORN¹¹⁾ によりそれぞれ拡散理論、輸送理論で位置・空間依存のある場合へ拡張された。この方法により得られる中性子場のゆらぎの 2 空間点相関関数が、OSBORN and NATELSON¹¹¹⁾ の得た量子論的方法論との結果と一致することも示された¹¹⁾。

一方、これらとは、別に DALFES³⁸⁾ は、先にのべた Kolmogorov の方法で導かれた一点炉モデルによる粒子数 N の期待値および分散の従う運動方程式を、等価な

Langevin 方程式におきかえている。

Langevin 方程式の設定とその雑音源の確定に関する従来のやや発見論的方法論は、SAITO¹²⁸⁾により吟味された。定常に運転されている原子炉雑音は、マルコフ過程として扱えるようランダム変数 $\mathbf{f}(t)$ がうまく選ばれていることを基本的な前提とする。定常状態における期待値 \mathbf{f}_{1s} のまわりのふらつき $\delta\mathbf{f}(t)=\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}_{1s}$ に対して、まず、Langevin 方程式を設定する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{f}(t) = -B\delta\mathbf{f}(t) + \mathbf{F}(t). \quad (3.39)$$

ここで、 B は、 $\delta\mathbf{f}(t)$ の平均のふるまいを定めるボルツマン作用素である。すなわち、何か外乱が加わって、状態が定常値 \mathbf{f}_{1s} からずれていく時、その平均のふるまいは、次の運動方程式によって表わされるものと考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta\mathbf{f}(t) \rangle = -B \langle \delta\mathbf{f}(t) \rangle + \text{外乱項}.$$

(3.39) 式は、一点炉モデルでは、

$$\frac{d}{dt} \delta N(t) = -\alpha \delta N(t) + F(t). \quad (3.39')$$

となる。ただし、 $\delta N = N - \langle N \rangle$ 。

雑音源の性質を議論するにあたっては、KUBO⁸⁵⁾ の “Fluctuation-Dissipation Theorem” の考え方を導入し、Langevin 方程式に現われる “摩擦係数” に相当した B と雑音源 $\mathbf{F}(t)$ とは、お互に独立ではなく、熱雑音における Nyquist の定理の拡張に相当する関係式で結ばれていることを指摘した。この定理は、(3.39) 式のような Langevin 方程式に対しては、雑音源は白色、すなわち $\langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(u) \rangle = A \delta(t-u)$ であり、スペクトル密度の大きさ A と作用素 B とは、次の Einstein の関係式で結ばれていることを意味する。

$$A = B \langle \delta\mathbf{f} \delta\mathbf{f} \rangle + \langle \delta\mathbf{f} \delta\mathbf{f} \rangle B^T. \quad (3.40)$$

ここで、 $\langle \delta\mathbf{f} \delta\mathbf{f} \rangle$ は、定常状態における状態変数の分散行列、また B^T は、 B の転置行列作用素を意味する。一点炉モデルでは、この関係式は

$$A = 2\alpha \sigma_{2s}.$$

となる。一方、マルコフ性の前提を用いると、遷移確率 $P(\mathbf{f}', t + \Delta t | \mathbf{f}, t)$ を用いて

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{\mathbf{f}'} \langle (\mathbf{f}' - \mathbf{f})(\mathbf{f}' - \mathbf{f}) P(\mathbf{f}', t + \Delta t | \mathbf{f}, t) \rangle \quad (3.41)$$

とも表わせる。ここで和 $\sum_{\mathbf{f}'}$ は、遷移後のあらゆる可能な状態についてとる。また、集合平均は、遷移前の状態について行なう。核反応の種々なタイプを考慮し、また、体系が \mathbf{f} に関して線型であることを用いると、(3.41) 式は、次のように書き改められる。

$$A = \sum_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \langle R_i \rangle. \quad (3.42)$$

ここで、 \mathbf{q}_i は、タイプ i の反応によりおこる状態ベクトルの変化量、 $\langle R_i \rangle$ は、単位時間当おこるタイプ i の反応数の期待値であり、和は、すべてのタイプの

反応についてとる。(3.42) 式は、COHN³⁴⁾ が一点炉で先行核を無視した場合に用いた雑音源を定める Schottky の公式の拡張である。

遅発中性子の効果をとりにれた場合、この公式を雑音源を定めるのに適用できないのではないかという疑問が、SHEFF and ALBRECHT¹³⁹⁾ により提出された。しかし遅発中性子の効果を自由中性子場へ対する一種のフィード・バック効果とは考えずに、原子炉の状態変数ベクトルの 1 成分として遅発中性子数を考慮すれば、雑音源ベクトルのスペクトル密度行列を定めるのに、拡張された Schottky の公式が適用できることを SAITO¹²⁹⁾ は示した。

雑音源 (Noise-Equivalent Source, 以下 NES と略す) は、“Binary NES” と “Single NES” との 2 つのタイプに分けることができる¹²⁸⁾。すなわち、

$$A = Q + (BE + EB^T). \quad (3.43)$$

一点炉モデルではこれは、(3.17) 式 Ω_s と等しくなる。すなわち、

$$A = \Omega_s, \quad \text{一点炉の時.}$$

(3.43) 式右辺第 1 項 Q は、核分裂反応の際、複数個の二次粒子が放出されるという分枝過程特有な項である。

相空間が連続な場合には、遅発中性子を無視すると次のようにかける。

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Y(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{x}). \quad (3.44)$$

ここで

$$Y(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{x}_0) = \int d\mathbf{v}_0 \langle \nu(\nu-1) \rangle \chi(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}_0, \mathbf{x}_0) \chi(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}_0, \mathbf{x}_0) R_{11}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t). \quad (3.45)$$

ただし、 R_{11} は平均の核分裂率の分布、すなわち、

$$R_{11}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t) = \nu_0 \sum_i f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0). \quad (3.46)$$

(3.43) 式右辺括弧内は、SNES であり、種々な核反応がランダムに起こることに原因している。 E は、対角行列で、その対角要素は、粒子数の期待値を表わす。一点炉モデルでは、(3.17) 式右辺第 2 項のようになる。輸送理論では、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{SNES} = & \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [2\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \nu \sum_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ & - [\nu' \sum_s(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \mathbf{x}) + \langle \nu(\mathbf{x}, \mathbf{v}') \rangle \chi(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \mathbf{x}) \\ & \times \nu' \sum_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}') f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}')] \\ & - \nu \sum_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) + \langle \nu(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle \chi(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \\ & \times \nu \sum_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v})]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

(3.44), (3.47) 式を合わせると、輸送理論では雑音源 $A(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ は、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ に比例する、すなわち空間的にも白色であることがわかる。

雑音源に対するこれらの表式を用い、Langevin 方程式 (3.39) を解いて、定常状態におけるゆらぎの 2 時点相関関数 $\Gamma(t, t') = \langle \delta\mathbf{f}(t) \delta\mathbf{f}(t') \rangle$ を求めよう。

一点炉モデルでは、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t') &= \int_{-\infty}^t d\xi' \exp(-\alpha(t-\xi')) A \exp(-\alpha(t'-\xi')) \\ &= \frac{Q}{2\alpha} \exp(-\alpha|t-t'|) \\ &+ \langle N \rangle \exp(-\alpha|t-t'|). \end{aligned} \quad (3.48)$$

積分の上限 ξ は、 t と t' のうち小さいほうをとる。 $t=t'$ の時には、 Γ は、すでに (3.18) 式で与えた分散 σ_{2s} に等しくなる。一方、輸送理論では、

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') &= \int_{-\infty}^{\xi} dt_0 \iint d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1 \iint d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 \\ & Gr(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t_0) Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t_0) \\ & \times Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2) \\ & + \begin{cases} Gr(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') f_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}'); & t \geq t' \text{ の時,} \\ Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}); & t < t' \text{ の時.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.49)$$

分枝反応がなければ、中性子場のゆらぎの2時点相関関数は、(3.48), (3.49) それぞれの右辺第2項のみになる。この項は、 $t=t'$ では、期待値に値が等しくなる。 $t \neq t'$ 、たとえば、 $t > t'$ の時には、この項は、時刻 t' に存在していた中性子またはその子孫が、時刻 t に現われるという直接相関を意味する。検出器出力のゆらぎとしては、SNES に起因した期待値に等しい検出カウント数の分散項は存在する。しかし、中性子は、検出の際、吸収されてしまうので、中性子場のゆらぎの直接相関項に比例した相関は、検出器出力のゆらぎの相関関数には、 $t \neq t'$ の時には見られず、ゆらぎのスペクトル密度には、周波数依存のない白色な寄与をする。分枝反応に起因した BNES からの寄与のみが、検出器出力のゆらぎのスペクトル密度で特有な周波数依存のあるものになり、原子炉の動特性パラメータを定めるのに用いられる。

3.2.3 Feynman の方法

これは、検出器出力のゆらぎとしてわれわれが観測する炉雑音現象において、本質的なものは分枝過程であるという物理的直観に基づいている。定常状態において観測された検出パルス時系列において、時刻 t のまわりの微小時間 dt 中に1箇のパルス、それより τ だけ離れた時刻 $(t+\tau)$ のまわりの微小時間 $d\tau$ 中に1箇のパルスが存在する結合確率 $P(t+\tau, t) dt d\tau$ は、次のようにかける。

$$P(t+\tau, t) = C_1 \delta(\tau) + P_{unc}(\tau) + P_{cor}(\tau). \quad (3.50)$$

ここで、 C_1 は単位時間当りのパルス数の期待値である。右辺第1項は、検出器へランダムに入射する中性子のうちで、SNES からの寄与である。

上式右辺第2項は、時間差 τ だけ離れて存在するパルス対が無相関なものである場合に相当した項で、次のように与えられる。

$$P_{unc}(\tau) = C_1^2. \quad (3.51)$$

相関のあるパルス対は、検出パルスを生みだした中性子対それぞれの系譜をさかのぼって、その最も近い共通の祖先にあたる核分裂で結ばれていると FEYNMAN は考えた。次のような事象およびそれに対する確率を導入しよう (cf. Fig. 3).

i) 時刻 t_0 のまわりの微小時間 dt_0 に核分裂が1

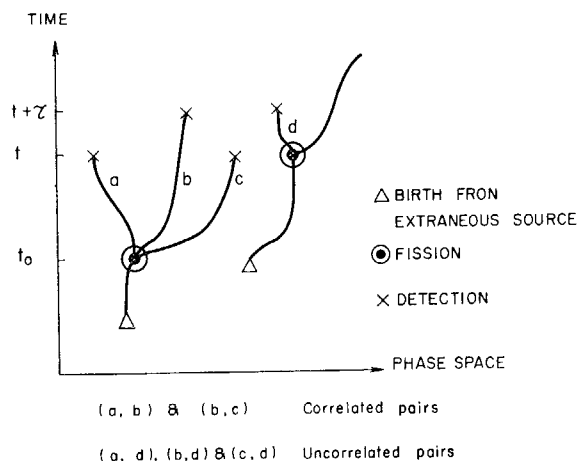


Fig. 3 Family of neutrons.

回おこる; $R_{if} dt_0$.

ii) 合わせて ν 箇の2次中性子が放出される; $p(\nu)$.

iii) これら2次中性子またはその子孫が、時刻 t に1箇存在する; $\nu e^{-\alpha(t-t_0)}$.

iv) その中性子が微小時間 dt に検出器に吸収され1カウント生ずる; $\varepsilon/l_i dt$.

v) 時刻 t_0 に起こった核分裂により生じた2次中性子または、その子孫のうちで、時刻 t に1カウント生じた残りの中性子が1箇、時刻 $t+\tau$ に存在する; $(\nu-1)e^{-\alpha(t+\tau-t_0)}$.

vi) その中性子が微小時間 $d\tau$ に検出器に吸収され、1カウント生ずる; $\varepsilon/l_i d\tau$.

ここで、 ε は、検出器効率であり、核分裂1回当たり生ずるカウント数である。 dt/l_i は、1箇中性子が存在する時、微小時間 dt 中に核分裂がおこる確率である。i) ~vi) の確率を乗じ、共通の祖先となりうる核分裂の生ずる時刻 t_0 は、 $-\infty$ と検出時刻 t との間のどの時刻であってもよいことおよび核分裂の際放出される2次中性子数 ν の値は2以上複数箇であればよいことを考慮すると次の結果が得られる。

$$P_{cor}(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{l_i}\right)^2 \frac{\nu(\nu-1)}{2\alpha} R_{if} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3.52)$$

これは、中性子場における2時点相関関数 (3.48) のうちで、BNES に起因した項に、検出に関係した因子 $(\varepsilon/l_i)^2$ を乗じたものに等しい。

相関のある中性子対がこのように同一の核分裂により生じた子孫中性子同士であるという考え方は、FEYNMAN により提唱され、HOFFMAN⁶⁹⁾ によって報告され、ORNDOFF¹¹⁰⁾ によって行なわれた Rossi- α 実験解析、FEYNMAN *et al.*⁵¹⁾ によって行なわれた検出カウント数の分散対期待値の比の測定解析 (Feynman- α 法) に利用された。

さらに、空間依存を考慮した場合の検出カウントに対する結合確率 P の表式が、HARRIS⁶⁷⁾, OTSUKA and SAITO¹¹⁴⁾, UKAI *et al.*¹⁵¹⁾ によって導出された。また、

* したがって、Hoffman の方法と呼ばれることもある。

BORGWALDT *et al.*^{24,25)} は, Rossi- α 法, Feynman- α 法, 雑音周波数分析法といった炉雑音実験に対する種々な公式を, この Feynman の方法を一貫して用い, 導出している.

検出カウンターの3次モーメントについては, 1点炉モデルによる DRAGT⁴⁹⁾, FURUHASHI and Izumi⁵⁵⁾ の考察がある. 空間依存を考慮した高次モーメントの導出に

Feynman の方法を拡張し, PÁL¹¹⁷⁾, BELL¹⁷⁾ による過去向きの Kolmogorov 方程式の解の物理的構造を明らかにしたのは, SAITO and TAJI¹³⁰⁾ である.

以上, 従来の種々な炉雑音基礎理論の構成法とそれぞれの特徴, 相互の関連について論じてきた. 同様な主旨の報告としては, すでに OTSUKA and SAITO¹⁶⁶⁾, BELL¹⁶⁵⁾ のものがある.

4. 炉雑音源に関する考察(零出力炉)

4.1 はじめに

炉雑音は、炉に内在する不規則な雑音源に起因するという見方にたった Langevin 法による理論構成を示す。この方法は、はじめ、まわりの溶液と熱平衡にあるブラウン粒子の揺動の考察に用いられた。

ブラウン粒子の質量を1とすると、Langevin 方程式は次のようにかける。

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\eta v(t) + F(t).$$

ここで、 ηv は速さ v のブラウン粒子に対する規則的な復元力で、 η は摩擦定数である。一方、不規則な力 $F(t)$ については、まず期待値 $\langle v \rangle$ が時間に無関係に0であるから

$$\langle F(t) \rangle = 0$$

が要請される。また、 η が定数である限り

$$\langle F(t)F(u) \rangle = 2D\delta(t-u)$$

がなりたたなければならない。(Fluctuation Dissipation Theorem, cf. Ref (85)) ここで、 $\delta(t-u)$ は Dirac のデルタ関数。 D は、ブラウン粒子に対する拡散定数と呼ばれる。熱平衡状態にあっては、 D と η との間に次の Einstein の関係式が成り立つ。

$$\frac{D}{\eta} = \frac{1}{2}k_B T.$$

k_B はボルツマン定数、 T は絶対温度。この関係式は、エネルギー等分配則

$$\frac{1}{2}k_B T = \langle vv \rangle$$

を用いて

$$\frac{D}{\eta} = \langle vv \rangle$$

とも表わせる。

原子炉の雑音現象に対しては、状態変数たとえば中性子数の期待値のまわりの揺動に対して、Langevin 方程式を設定する。この場合、定常状態は実現できても、熱的に平衡状態になるとは考えられない。

本章では、KUBO⁸⁵⁾ および LAX⁸⁸⁾ による非平衡統計力学における Langevin 法に関する一般論を背景に、MOORE^{100, 101)} および COHN³⁴⁾ による炉雑音の Langevin 法による理論構成を吟味する。また、低出力炉における

次の3つの事実が、一般論にはない炉雑音特有な理論構成を示すことを明らかにする。

i) 中性子は、お互いに他の中性子とは独立にふるまう。すなわち、炉雑音現象は、線型であること。

ii) 核反応の際、複数箇の二次中性子を放出するという分枝反応が存在していること。生成される二次中性子の数が確率的にしか予測できない点がさらに現象を複雑にしている。

iii) 中性子検出器による炉雑音の観測に際しては、雑音の担い手である中性子を捕獲し、原子炉からとり去ってしまうこと。

まず、4.2 では、空間および速度依存を無視した一点炉モデルで、中性子数のゆらぎに対する Langevin 方程式を設定し、雑音源スペクトル密度の白色性を仮定した時、拡散定数に相当するその大きさと摩擦係数に相当する中性子減衰係数との間に、ブラウン粒子の揺動の場合と同じような Einstein の関係式が成立することを示す。この関係式には、中性子数の分散が未知量として含まれる。雑音源スペクトル密度を確定するのに、COHN³⁴⁾ の提唱した Schottky の公式を用い、中性子数のゆらぎの2時点相関関数およびスペクトル密度を求める。この方式を拡張して遅発中性子を考慮した場合、空間および速度依存を考慮した場合への応用を4.3, 4.4 でそれぞれ行なう。4.5 では、炉の状態変数がマルコフ的であるよううまく選ばれていることを前提として、Langevin 方程式の設定と雑音源の性質とを論ずる。状態変数の遷移確率の従う Smoluchowski の条件式から、Einstein の関係式および Schottky の公式を導出することができる。

4.6 では、零出力炉の雑音源スペクトル密度を、具体的に計算し、雑音源が分枝反応に起因する項と種々な核反応が不規則に起こることに起因する項との2つの成分から成ることを示す。4.7 では、遅れの効果を持つ一般的な場合に対する Langevin 方程式の設定と雑音源の性質を考察し、雑音源スペクトル密度と摩擦係数のフーリエ・ラプラス変換との間に成立する Nyquist の定理を導く。Einstein の関係式は、この定理の特殊な場合に相当している。4.8 では、まず、検出器出力と検出率 (detection rate) との関連を論じ、ついで、零出力炉における中性子検出率のゆらぎの2時点相関関数を導く。検出反応数の期待値が中性子数の期待値と比例関係にあっても、相関関数同士の間には、比例関係は成立せず、したがって、両者のゆらぎのスペクトル密度の周波数依存性は異なることを示す。炉雑音実験が実際上意義ある

のは、分枝反応に起因した雑音源の寄与を検出する場合、検出反応が不規則に起こることに起因した雑音源の寄与は白色であり、炉雑音実験にとってはつまらない、むしろ邪魔なものであることがわかる。

ところで、核分裂に際しては、中性子・先行核のみならずガンマ線——光子も同時に複数箇放出される。この即発光子数のゆらぎのスペクトル密度は、中性子数のゆらぎのスペクトル密度と実際上同等の原子炉動特性に関する情報を含むことが指摘され⁵⁹⁾、その実験的検証も行なわれている。4.9では、即発光子数のゆらぎの定式化を、4.4でのべる線型マルコフ場に対する一般論の応用例として示す。4.10では、BF₃計数管を念頭において、計数管内でおこる反応素過程に起因する雑音源が、出力電流のゆらぎに及ぼす影響について考察する。

4.2 一点炉モデルにたいする Langevin の方法

始めに、空間および速度依存性を無視した一点炉モデルを考えよう。遅発中性子の存在も考えない。原子炉の状態は、中性子数 N で記述される。 N の期待値 $\langle N \rangle$ の従う運動方程式は、次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \langle N(t) \rangle = -\alpha \langle N(t) \rangle + S_1 \quad (4.1)$$

ここで、 α は中性子減衰係数で、増倍率 k および中性子寿命 l を用いて、次のように書ける。

$$\alpha = \frac{1-k}{l} \quad (4.2)$$

また、 S_1 は、単位時間当たり外部中性子源により投入される中性子数の期待値である。定常状態では、(4.1)式の左辺はゼロであり、中性子数の期待値 N_{1s} は次のようになる。

$$N_{1s} = \frac{S_1}{\alpha} \quad (4.3)$$

もし、定常に運転されている炉に何らかの外乱が、加わったとすると、中性子数は、定常値 N_{1s} からずれていく。ずれの度合 $\delta N(t) = N(t) - N_{1s}$ の期待値は、次の運動方程式を満足する。

$$\frac{d}{dt} \langle \delta N(t) \rangle = -\alpha \langle \delta N(t) \rangle + \text{外乱項}$$

さて、定常炉での期待値 N_{1s} のまわりの中性子数のふらつき $\delta N(t)$ は、炉に内在する不規則な外乱 $F(t)$ によって生ずるものとみなし、次のような運動方程式に支配されると考えよう。

$$\frac{d}{dt} \delta N(t) = -\alpha \delta N(t) + F(t) \quad (4.4)$$

ただし、

$$\delta N(t) \equiv N(t) - N_{1s}$$

これが期待値のまわりの中性子数のふらつきに対する

Langevin 方程式である。形式解は次のようになる。

$$\delta N(t) = \delta N(0) e^{-\alpha t} + \int_0^t dt' e^{-\alpha(t-t')} F(t') \quad (4.5)$$

問題は、不規則な力 (雑音源) の持つべき性質である。次のようにおこう。

$$a) \quad \langle F(t) \rangle = 0, \quad (4.6)$$

$$b) \quad \langle F(t) F(u) \rangle = 2D \delta(t-u) \quad (4.7)$$

a) の性質は、次のようにして確かめられる。(4.5) 式をまず初期状態を固定して集合平均をとろう。結果は

$$\langle \delta N(t) \rangle_0 = \delta N(0) e^{-\alpha t} + \int_0^t dt' e^{-\alpha(t-t')} \langle F(t') \rangle$$

となる。さらに、種々な初期状態について集合平均をとる。この際、初期点ですでに定常状態が実現されているとしよう。この場合、ゆらぎの期待値

$$\langle \delta N(t) \rangle = \langle \delta N(0) \rangle = 0$$

のはずである。したがって、雑音源の期待値はゼロ、逆もまた真である。

b) の性質は、雑音源のスペクトル密度が白色であることを意味する。すなわち、スペクトル密度*

$$\Phi_{FF}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(t) F(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] d(t-u) \quad (4.8)$$

は、周波数 ω に無関係に一定で次のようになる。

$$\Phi_{FF}(\omega) = 2D \quad (4.9)$$

定常状態では、ゆらぎの相関関数 $\langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle$ は、時間差 $\tau = t - u$ のみの関数のはずである。これを生みだす雑音源もまた定常のはずで、 $\langle F(t) F(u) \rangle$ はやはり時間差 $\lambda = t - u$ のみの関数であろう。しかし、その関数形がデルタ関数で与えられるということは、雑音源の相関時間が、ゆらぎの相関時間に比べて、十分短いことを仮定している。いいかえればわれわれが中性子数のふらつきを観測する時間尺度 τ_0 に比べて、雑音源の相関を特徴づける緩和時間 λ_0 が十分小さく、 $\lambda \gg \lambda_0$ という λ に対して、 $\langle F(t+\lambda) F(t) \rangle = 0$ とおくことができることを意味する。零出力炉では、雑音源は、種々な核反応が不規則に起こることに起因する。 λ_0 は、中性子と媒質原子との相互作用の緩和時間 10^{-20} sec のオーダーであろう。これに対して炉出力雑音を観測する時間尺度は、たかだか μ sec のオーダーである。雑音源が白色であることは、われわれの設定した Langevin 方程式 (4.4) の形と無関係ではない。この点については 4.7 で議論する。

さて、ゆらぎの相関関数を求めよう。

$$\delta N(u) = \delta N(0) \exp(-\alpha u)$$

$$+ \int_0^u du' \exp[-\alpha(u-u')] F(u') \quad (4.10)$$

(4.5), (4.6), (4.7) および (4.10) 式から次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle_0 &= e^{-\alpha t} \delta N(0) \delta N(0) e^{-\alpha u} \\ &+ \int_0^t d\xi' \exp[-\alpha(t-\xi')] 2D \exp[-\alpha(u-\xi')] \end{aligned} \quad (4.11)$$

* Wiener-Khintchin の定理 (付録A参照)。

ただし、積分の上限 ξ は t と u とのうち小さい方に等しい。すなわち、

$$\xi = \text{lesser of } t \text{ and } u. \quad (4.12)$$

記号 $\langle \rangle_0$ は、初期状態を固定して集合平均をとることを意味する。

特に、原子炉が臨界であるとしよう。この時

$$\alpha = 0$$

したがって、(4.11) 式は、次のようになる。

$$\langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle_0 = \delta N(0) \delta N(0) + 2D\xi \quad (4.13)$$

特に、 $t = u = \xi$ とおけばわかるように、臨界炉では、分散 $\langle \delta N(t) \delta N(t) \rangle_0$ は、時間 t に比例して発散することがわかる。すでに述べたように臨界炉は、炉雑音の立場から見ると定常系ではない。

未臨界炉では、(4.11) 式は次のように整理される。

$$\begin{aligned} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle_0 \\ = \frac{D}{\alpha} e^{-\alpha(t-u)} + e^{-\alpha t} \left[\delta N(0) \delta N(0) - \frac{D}{\alpha} \right] e^{-\alpha u}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

ただし、 $t \geq u$ とおいた。

未臨界炉では、十分時間がたてば初期状態を忘れる。すなわち、いかなる初期状態から出発しても、初期値に無関係な定常なゆらぎが得られるはずである。(4.14) 式で、 $t - u = \tau$ を固定して、 $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$ とおくと、結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{NN}(\tau) &\equiv \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ u \rightarrow \infty \\ t-u=\tau}} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle_0 \\ &= \frac{D}{\alpha} e^{-\alpha\tau} ; \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

定常状態におけるゆらぎの相関関数 (4.15) はまた、次のような考察によっても求められる。(4.14) 式でさらに初期状態について平均をとる。結果は

$$\begin{aligned} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle \\ = \frac{D}{\alpha} e^{-\alpha(t-u)} + e^{-\alpha t} \left[\langle \delta N \delta N \rangle - \frac{D}{\alpha} \right] e^{-\alpha u}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

初期点において、すでに炉は定常状態にあるとしよう。この時、相関関数 $\langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle$ は、時間差 $\tau = t - u$ のみの関数のはずである。したがって、上式右辺第二項はゼロになる。すなわち、次の関係式が成立するはずである。

$$\frac{D}{\alpha} = \langle \delta N \delta N \rangle. \quad (4.17)$$

そして、相関関数は (4.16) 式右辺第一項、すなわち (4.15) 式のようになる。(4.17) の関係式が成りたつことは、(4.15) で $\tau = 0$ とおいても確かめられる。

$t - u = \tau < 0$ の場合も同様にして、相関関数が求められる。結果をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{NN}(\tau) &= \langle \delta N(t+\tau) \delta N(t) \rangle \\ &= \frac{D}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

(4.4) 式における中性子減衰係数 α は、ブラウン粒子

の運動に対する摩擦係数 η に対応することがわかる。不規則な力 F のスペクトル密度は、拡散定数 D の 2 倍に対応する。規則的な復元力に関係した α は、不規則な力に関係した D とは無関係ではなく、(4.17) 式で結ばれる。これは、Einstein の関係式であり、 D と α との比は、中性子数の分散 $\langle \delta N \delta N \rangle$ に等しい。原子炉内で核反応は不規則におこる。その効果の一部は、中性子減衰係数 α として現われ、外乱の大きさに比例した規則的な復元力 ($-\alpha \delta N$) を生み出す。他の一部は、ゆらぎを生み出す不規則な外乱 F として現われる。両者は、同じ原因から生ずる以上、その間に内的な関係があるはずである。それが (4.17) の関係式である。

以上が非平衡状態に対して、熱的平衡状態にあるブラウン粒子の理論を応用して導かれる議論である。残された課題は、雑音源のスペクトル密度の大きさ $2D$ を定めることである。COHN³⁴⁾ は中性子の生成過程*が、二極管において、陰極面から電子が不規則に飛び出す現象と類似していることに注目した。二極管における電流雑音のスペクトル密度は、以下のような Schottky の公式 (たとえば、文献(185) 第 2 章をみよ) で与えられる。

$$\Phi_{ii}(\omega) = e^2 \langle I \rangle.$$

ここで、 e は電子 1 箇の担う電荷、 $\langle I \rangle$ は単位時間当り流れる電子数の期待値である。上式の類推から、炉雑音源のスペクトル密度は、次のように書けることを COHN は提唱した。

$$\Phi_{FF}(\omega) = \sum_i q_i^2 \langle R_i \rangle. \quad (4.19)$$

ここで、 q_i はタイプ i の反応によって変化する中性子数、 $\langle R_i \rangle$ は単位時間当りタイプ i の反応がおこる期待値である。和は原子炉内でおこる種々なタイプの核反応全体についてとる。(4.9) 式を用いると、中性子数のふらつきをブラウン運動とみたてた時の“拡散定数”が次のように与えられることになる。

$$2D = \sum q_i^2 \langle R_i \rangle. \quad (4.20)$$

TABLE 3 に種々な反応と $\langle R_i \rangle$, q_i を示す。

ここで $p(\nu)$ は、核分裂の際、 ν 箇の二次中性子が生成される確率で、次のように規格化されている。

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p(\nu) = 1.$$

一方、 $p_s(\nu)$ は、一回の中性子源崩壊反応 (たとえば、²³⁸U の自発核分裂) の際、 ν 箇の二次中性子が生成される確率で

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_s(\nu) = 1.$$

と規格化されている。 S は単位時間当り起こる中性子源崩壊反応数である。したがって、単位時間当り中性子源から放出される中性子数の期待値 S_1 は、次のようになる。

* 一定時間内にこれらの素過程の生起する回数は、分枝反応が存在する場合には、ポアソン (Poisson) 分布にはしたがわれない。

TABLE 3 Individual contribution to the noise-equivalent source
(One-point model, no delayed neutrons)

Nature of process (i)	Mean rate of occurrence ($\langle R_i \rangle$)	Net number of neutrons produced (q_i)
Non-fission absorption	$\nu(\Sigma_a - \Sigma_f)N_{1s}$	-1
Induced fission yielding ν secondary neutrons	$\nu \Sigma_f N_{1s} p(\nu)$	$\nu - 1$
Source neutron emission yielding ν secondaries	$S p_s(\nu_s)$	ν_s

$$S_1 \equiv S \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu p_s(\nu) \\ = S \langle \nu_s \rangle. \quad (4.21)$$

その他の記号は、慣用のものであり、(4.2) 式で用いた k, l は、次のように表わせる。

$$k = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu p(\nu) \\ = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \langle \nu \rangle, \quad (4.22)$$

$$l = \frac{1}{\nu \Sigma_a}. \quad (4.23)$$

ν は、中性子の速さである。

さて、TABLE 3 に従って (4.20) 式の計算を行なおう。結果は次のようになる。

$$2D = \nu(\Sigma_a - \Sigma_f)N_{1s} + \nu \Sigma_f N_{1s} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu-1)^2 p(\nu) \\ + S \sum_{\nu_s=0}^{\infty} \nu_s^2 p_s(\nu_s) \\ = [\langle \nu^2 - \nu \rangle \nu \Sigma_f N_{1s} + \langle \nu_s^2 - \nu_s \rangle S] \\ + \nu(\Sigma_a - \langle \nu \rangle \Sigma_f)N_{1s} + \langle \nu_s \rangle S. \quad (4.24)$$

(4.2), (4.3), (4.21), (4.22) および (4.23) 式を用いると上式は、次のようになる。

$$2D = Q + 2\alpha N_{1s}, \quad (4.25)$$

ここで

$$Q = \langle \nu^2 - \nu \rangle \nu \Sigma_f N_{1s} + \langle \nu_s^2 - \nu_s \rangle S \\ = \frac{N_{1s}}{l} \left[\frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu \rangle} k + \frac{\langle \nu_s^2 - \nu_s \rangle}{\langle \nu_s \rangle} (1-k) \right]. \quad (4.26)$$

特に、核反応の際、複数箇の二次中性子が放出されるという分枝反応のない体系を考えよう。この場合、 Q はゼロになり、 D と α との比は N_{1s} に等しいことが (4.25) 式からわかる。一方、Einstein の関係式 (4.17) から中性子数の分散 $\langle \delta N \delta N \rangle$ が期待値 N_{1s} に等しいことがわかる。(4.25) 式右辺第 2 項は、中性子の生成・消滅反応が不規則に起こることに由来した雑音源である。

分枝反応に起因する雑音源 Q を、“Binary-Noise-Equivalent Source (BNES)” と呼ぶ。これに対し、核反応が不規則に起こることに由来した (4.25) 式右辺第二項を“Single” 雑音源 (SNES) と呼ぶ。

(4.25) 式を (4.18) 式に代入すると、中性子の相関関数は、結局次のようになる。

$$\Gamma_{NN}(\tau) = \frac{Q}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} + N_{1s} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (4.27)$$

上式、右辺第二項、SNES からの寄与は、直接相関 (direct correlation) と呼ばれる。時刻 $t=0$ に存在するいずれか

1 箇の中性子に注目しよう。その中性子またはその子孫が τ 時間後になお生き残っている確率は、 $e^{-\alpha\tau}$ である。直接相関項は、以前に存在した中性子自身またはその子孫が後の時刻になお生き残っているという事実に対応している。純粋なポアソン体系では、この直接相関項のみが中性子相関関数として寄与する。

中性子数の分散を求めよう。

$$\langle \delta N \delta N \rangle = \Gamma_{NN}(0) \\ = \frac{Q}{2\alpha} + N_{1s}. \quad (4.28)$$

分枝反応の存在のために、分散は純粋なポアソン体系に比べて $Q/2\alpha$ だけ大きくなっていることがわかる。最後に、中性子数のゆらぎのスペクトル密度を求めておこう。

$$\Phi_{NN}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Gamma_{NN}(\tau) \exp[-i\omega\tau] \\ = \frac{Q}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{2\alpha N_{1s}}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (4.29)$$

周波数 $\omega < \alpha$ では、 $\Phi_{NN}(\omega)$ は ω に依存せず平坦なグラフになる。 $\omega > \alpha$ では、 $\Phi_{NN}(\omega)$ は ω^2 に逆比例する (cf. Fig. 4 in p. 36).

以上、遅発中性子を無視した一点炉モデルで中性子数のゆらぎを定式化してきた。ここで述べた Langevin 法は、次の 3 つの骨組から構成されている。

1) 定常値から偏りに対して Langevin 方程式 (4.4) を設定する。

2) 雑音源スペクトル密度は、白色であると仮定する。(式 (4.7))

3) 雑音源スペクトル密度の大きさは、Schottky の公式により定める。(式 (4.20))

SAITO¹²⁸⁾ は、ランダム変数がマルコフ過程として記述できるということを基本的な前提として、この構成方法を吟味し、正当化している。その概略は、4.5 でのべるが、その前に、Langevin 法による定式化が遅発中性子を考慮した場合、多点炉モデルの場合、相空間が連続な場合、それぞれどうなるか考察しておこう。

4.3 遅発中性子を考慮した Langevin の方法

遅発中性子の効果は、中性子場に対する一種のフィード・バック効果とみなすことができる。SHEFF and ALBRECHT¹²⁹⁾ は、この立場で中性子場のゆらぎを論じ、遅

発中性子を考慮した場合には、雑音源は白色ではなくなり、したがって、Schotky の公式が適用できないことを指摘した。これに対して SAITO¹²⁸⁾ は、中性子場および先行核場の 2 つの成分からなるベクトル場に、Moore-Cohn の方式を適用すれば正しい結果が得られることを示した。

次のような Langevin 方程式を設定しよう。

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{f}(t) = -B \delta \mathbf{f}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (4.30)$$

ここで

$$\delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_{1s}. \quad (4.31)$$

たてベクトル \mathbf{f} は、中性子数 N および先行核数 C を成分として持つ。すなわち、

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} N \\ C \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

\mathbf{f}_{1s} は、定常状態における粒子数の期待値を意味し、次のように与えられる。

$$\mathbf{f}_{1s} = \begin{bmatrix} N_{1s} \\ C_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_1 l}{1-k} \\ \frac{S_1 \beta k}{1-k \lambda} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

B はボルツマン作用素行列で、次のようになる。

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1-k(1-\beta)}{l}, & -\lambda \\ -\frac{\beta k}{l}, & \lambda \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

(4.33), (4.34) 式における記号は、慣用のものである。すなわち、 S_1 は単位時間当り源から放出される中性子数の期待値、 l は中性子寿命 ($1/(v\Sigma_a)$)、 v は中性子の速さ、 k は増倍率 ($\langle \nu \rangle \Sigma_f / \Sigma_a$)、 β は、核分裂の際、放出される二次粒子のうちで先行核の占める平均の割合、 λ は先行核の崩壊定数である。(4.30) 式における $\mathbf{F}(t)$ は、雑音源ベクトルである。次の性質を持っていると仮定しよう。

$$a) \quad \langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0, \quad (4.35)$$

$$b) \quad \langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(u) \rangle = 2D \delta(t-u). \quad (4.36)$$

すなわち、a) 雑音源の集合平均はゼロ、b) 雑音源の相関行列* は白色であり、そのスペクトル密度は、周波数 ω に無関係で次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_{FF}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] d(t-u) \\ &= 2D. \end{aligned} \quad (4.37)$$

初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} \delta \mathbf{f}(t) = \delta \mathbf{f}(0).$$

のもとで (4.30) 式の解を求めよう。結果は次のようになる。

$$\delta \mathbf{f}(t) = Gr(t) \delta \mathbf{f}(0) + \int_0^t dt' Gr(t-t') \mathbf{F}(t'). \quad (4.38)$$

ここで、 $Gr(t)$ はグリーン関数行列、すなわち次の運動方程式の解である。

$$\frac{d}{dt} Gr(t) = -B Gr(t). \quad (4.39)$$

初期条件は次の通り。

$$\lim_{t \rightarrow 0} Gr(t) = U. \quad (4.40)$$

U は単位行列を意味する。

$$U = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

$Gr(t)$ の $(i-j)$ 要素は、 $t=0$ に j という種類の粒子 (中性子または先行核) を 1 箇、炉に投入した時、時刻 $t(>0)$ に存在する i という種類の粒子数の期待値を意味する。

ゆらぎの相関関数を求めよう。(4.15) 式を導びいた時と同様な手法を用いる。すなわち (4.35), (4.36) および (4.38) 式から次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle_0 &= Gr(t) \delta \mathbf{f}(0) \delta \mathbf{f}(0) Gr^T(u) \\ &+ \int_0^t d\xi' Gr(t-\xi') 2D \\ &\times Gr^T(u-\xi'). \end{aligned}$$

ただし、 Gr^T はグリーン関数行列 Gr の転置行列を意味し、 ξ は t と u のうち小さいほうに等しい。未臨界炉では、 t を十分大きくすると、 $Gr(t)$ はゼロ行列になる。差 $(t-u)$ を固定して、 t および u をそれぞれ無限大に持っていかう。ゆらぎの相関関数は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle &\equiv \lim_{t, u \rightarrow \infty} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle_0 \\ &\text{with } (t-u) \text{ fixed} \\ &= \int_0^\infty d\xi Gr(t-u+\xi) 2D Gr^T(\xi) \\ &\quad ; t-u \geq 0 \text{ の時,} \\ &= \int_0^\infty d\xi Gr(\xi) 2D Gr^T(u-t+\xi) \\ &\quad ; t-u < 0 \text{ の時.} \end{aligned} \quad (4.41)$$

積分変数を変換して一つの形にまとめる。

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle \\ = \int_{-\infty}^\xi d\eta' Gr(t-\eta') 2D Gr^T(u-\eta'). \end{aligned} \quad (4.42)$$

ただし、

$$\xi = \text{lesser of } t \text{ and } u.$$

次に、“拡散定数” 行列 D を求めよう。Schotky の公式 (4.20) を次のように拡張する。

$$2D = \sum_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \langle R_i \rangle. \quad (4.43)$$

ここで、 $\langle R_i \rangle$ は、単位時間当りタイプ i の反応がおこる期待値。 \mathbf{q}_i は、タイプ i の反応によって変化する中性子数を第 1 要素とし、先行核数を第 2 要素とするベクトルである。TABLE 4 に種々な反応と $\langle R_i \rangle$, \mathbf{q}_i を示す。ここで、 $p(\nu_0, \nu_1)$ は、核分裂の際、 ν_0 箇の中性子と ν_1 箇の先行核が、即発的に生まれる確率であり、次のように規格化されている。

$$\sum_{\nu_0=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} p(\nu_0, \nu_1) = 1.$$

* その $(i-j)$ 要素は、 $\langle F_i(t) F_j(u) \rangle$ である。

TABLE 4 Individual contribution to the noise-equivalent source
 (One-point model with delayed neutrons)

Nature of Process (i)	Mean rate of occurrence ($\langle R_i \rangle$)	Net number of neutrons produced ($q_i^{(1)}$)	Net number of precursors produced ($q_i^{(2)}$)
Non-fission absorption	$v(\Sigma_a - \Sigma_f)N_{1s}$	-1	0
Fission yielding ν_0 prompt neutrons and ν_1 precursors	$v \Sigma_f N_{1s} p(\nu_0, \nu_1)$	$\nu_0 - 1$	ν_1
Decay of precursors	λC_{1s}	1	-1
Source neutron emission	S	1	0

簡単のために、一回の中性子源崩壊反応の際、生みだされるのは、中性子1箇だけと仮定した。TABLE 4 に従って (4.43) 式の計算を行なう。関係式 (4.33) および

$$\begin{aligned} \langle \nu_0 \rangle &= \langle \nu \rangle (1 - \beta), \\ \langle \nu_1 \rangle &= \langle \nu \rangle \beta \end{aligned}$$

という事実を用いると結果は、次のように整理される。

$$2D = Q + BE + EB^T. \quad (4.44)$$

ただし、 Q は核分裂の際、複数箇の二次粒子が放出されることに起因した“Binary”雑音源で次のように書ける。

$$Q = v \Sigma_f N_{1s} \begin{bmatrix} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle, & \langle \nu_0 \nu_1 \rangle \\ \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, & \langle \nu_1(\nu_1 - 1) \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

また、 B^T は B の転置行列である。

(4.44) 式右辺第2項、第3項は種々な核反応が不規則に起こることに由来した“Single”雑音源である。ただし、 E は次のような対角行列を意味する。

$$E = \begin{bmatrix} N_{1s}, & 0 \\ 0, & C_{1s} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

(4.44) 式を (4.42) 式に代入しよう。SNES からの寄与は、関係式*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} [Gr(t-\eta) E Gr^T(u-\eta)] \\ = Gr(t-\eta) [BE + EB^T] Gr^T(u-\eta) \end{aligned} \quad (4.47)$$

を用いて積分できる。結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle \\ = \int_{-\infty}^u d\eta Gr(t-\eta) Q Gr^T(u-\eta) + Gr(t-u) E \\ ; t-u \geq 0 \text{ の時,} \\ = \int_{-\infty}^t d\eta Gr(t-\eta) Q Gr^T(u-\eta) + E Gr^T(u-t) \\ ; t-u < 0 \text{ の時.} \end{aligned} \quad (4.48)$$

ゆらぎのスペクトル密度を求めよう。

$$\Phi(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] d(t-u).$$

(4.48) 式を用いて上式の計算を行なう。

結果は**次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= Gr[i\omega] 2D Gr^T[-i\omega] \\ &= Gr[i\omega] Q Gr^T[-i\omega] \\ &\quad + Gr[i\omega] E + E Gr^T[-i\omega], \end{aligned} \quad (4.49)$$

ただし、 $Gr[i\omega]$ は、 $Gr(t)$ のフーリエ・ラプラス変換、すなわち、

$$\begin{aligned} Gr[i\omega] &\equiv \int_0^{\infty} dt Gr(t) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{l}{i\omega \left(l + \frac{\beta k}{i\omega + \lambda} \right) + 1 - k} \\ &\quad \times (i\omega + \lambda)^{-1} \begin{bmatrix} i\omega + \lambda, & \lambda \\ \beta k/l, & i\omega + \frac{1-k(1-\beta)}{l} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

特に (4.49) 式の中性子-中性子成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_{NN}(\omega) &= v \Sigma_f N_{1s} \left| \frac{l}{i\omega \left(l + \frac{\beta k}{i\omega + \lambda} \right) + 1 - k} \right|^2 \\ &\quad \times \left[\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle + \frac{\lambda}{i\omega + \lambda} \langle \nu_0 \nu_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{-i\omega + \lambda} \langle \nu_0 \nu_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{(i\omega + \lambda)(-i\omega + \lambda)} \langle \nu_1(\nu_1 - 1) \rangle \right] \\ &\quad + 2 N_{1s} l \times \text{Real Part of} \\ &\quad \left[i\omega \left(l + \frac{\beta k}{i\omega + \lambda} \right) + 1 - k \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

上式右辺第一項は、BNES からの寄与、第二項は SNES からの寄与である。

この結果は、COURANT and WALLACE³⁶⁾ が、確率母関数を用いて求めたもの、あるいは DALFES³⁸⁾ が Fokker-Planck の方程式に基づいて求めたものと一致している。特に

$$\begin{aligned} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle &= \langle \nu(\nu - 1) \rangle (1 - \beta)^2 \\ \langle \nu_0 \nu_1 \rangle &= \langle \nu(\nu - 1) \rangle \beta (1 - \beta) \\ \langle \nu_1(\nu_1 - 1) \rangle &= \langle \nu(\nu - 1) \rangle \beta^2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

と仮定する*と (4.51) 式右辺第一項は次のようになる。

$$v \Sigma_f N_{1s} \langle \nu^2 - \nu \rangle |H(i\omega)|^2, \quad (4.53)$$

ただし、 $H(s)$ は、零出力炉の伝達関数である。すなわち、

$$H(s) = \frac{1 - \frac{\beta s}{s + \lambda}}{s \left(l + \frac{\beta k}{s + \lambda} \right) + 1 - k}.$$

(4.53) 式は、BENNET¹⁸⁾ が、Rice の方法¹²³⁾を用いて導いたものと一致している。こうして、(4.52) 式の近似を用いれば BNES からの雑音スペクトルへの寄与は、MOORE¹⁰⁰⁾ が指摘したように炉の伝達関数のゲインに比例することがわかる。(cf. Fig. 4 in p. 36)

* 付録C参照

** 付録D参照

* 付録B参照

以上、本報では、中性子場および先行核場の2つの成分からなるベクトル場を考え、ベクトル雑音源に対する応答ベクトルのゆらぎの問題を扱ってきた。注意すべきことは、雑音源ベクトルの各成分間の相関関数が白色であっても、ある特定の応答ベクトル成分に対する等価な雑音源は、必ずしも白色にならないということである。たとえば、われわれは通常中性子成分のみに関心があるから、先行核成分を消去して応答ベクトルの中性子成分のみを考えたとしよう。先行核場に生じた外乱は、それと等価な中性子場の外乱におきかえ、グリーン関数行列の中性子成分を通じて、中性子場への応答を与えるとする。(4.50), (4.51)式を見比べればわかるように、この時の等価な雑音源、特にそのBNESは、 $v \sum_l N_{1s} \times [(4.51)式の右辺第1項 [] 内の部分]$ となる。すなわち、周波数依存性を持つようになる。SHEFF and ALBRECHT¹³⁹⁾ および AKCASU and OSBORN¹⁴⁾ は、いずれも、雑音源ベクトルにおける先行核成分を一旦、それと等価な中性子場雑音源とおきかえて議論をすすめている。当然のことながら、その際には、白色雑音源の大きさを決める Schottky の公式は適用できなくなる。

先行核場に生じた外乱は、 $\lambda^{-1} \text{sec}$ の遅れ時間をもって中性子場へ影響を及ぼす一種のフィード・バック効果とみなすか、あるいは、先行核場を体系の状態を記述する一つの状態量としてあらわにとりいれるかは好みの問題かも知れない。しかし、そのいずれを用いるかにより雑音源の決め方は異なる。本報では、後者の立場にたてば Schottky の公式により正しく雑音源を定めうることを示した。

以上の方法は、遅発中性子が、6組の場合へも容易に拡張できよう。この場合、作用素行列 B 、対角行列 E および雑音源スペクトル密度行列 $2D$ は、次のようになる。

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1-k(1-\beta)}{l}, & -\lambda_1, & -\lambda_2, & \dots, & -\lambda_6 \\ -\beta_1 k/l, & \lambda_1, & 0, & \dots, & 0 \\ -\beta_2 k/l, & 0, & \lambda_2, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_6 k/l, & 0, & 0, & \dots, & \lambda_6 \end{pmatrix} \quad (4.34')$$

$$E = \begin{pmatrix} N_{1s}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & C_{1s1}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & C_{1s2}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & C_{1s6} \end{pmatrix} \quad (4.46')$$

$$2D = v \sum_l N_{1s}$$

$$\times \begin{pmatrix} \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle, & \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, & \langle \nu_0 \nu_2 \rangle, & \dots, & \langle \nu_0 \nu_6 \rangle \\ \langle \nu_1 \nu_0 \rangle, & \langle \nu_1(\nu_1-1) \rangle, & \langle \nu_1 \nu_2 \rangle, & \dots, & \langle \nu_1 \nu_6 \rangle \\ \langle \nu_2 \nu_0 \rangle, & \langle \nu_2 \nu_1 \rangle, & \langle \nu_2(\nu_2-1) \rangle, & \dots, & \langle \nu_2 \nu_6 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \nu_6 \nu_0 \rangle, & \langle \nu_6 \nu_1 \rangle, & \langle \nu_6 \nu_2 \rangle, & \dots, & \langle \nu_6(\nu_6-1) \rangle \end{pmatrix} \\ + BE + EB^T. \quad (4.44')$$

上式で、 $\nu_m, \beta_m, \lambda_m$ は、それぞれ、第 m 群 ($m=1, 2, \dots, 6$) の先行核が、核分裂1回当たり生まれる数、その平均

の割合、崩壊定数を示す。 β は核分裂1回当たり生まれる全先行核数の期待値の全2次粒子数(即発中性子および先行核数)の期待値に対する割合である。すなわち、

$$\beta = \sum_{m=1}^6 \beta_m.$$

また、

m 群に属する先行核の期待値 C_{1sm} は、次のようになる。

$$C_{1sm} = \frac{S_1 \beta_m k}{1-k \lambda_m}.$$

この場合、中性子数のゆらぎのスペクトル密度は、次のようになる。

$$\Phi_{NN}(\omega) = v \sum_l N_{1s} \left[\frac{l}{i\omega \left(l + \sum_{m=1}^6 \frac{\beta_m k}{i\omega + \lambda_m} \right) + 1 - k} \right]^2 \\ \times \left[\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle + \sum_{m=1}^6 \frac{\lambda_m}{i\omega + \lambda_m} \langle \nu_0 \nu_m \rangle \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^6 \frac{\lambda_m}{-i\omega + \lambda_m} \langle \nu_0 \nu_m \rangle \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 \frac{\lambda_m}{i\omega + \lambda_m} \frac{\lambda_n}{-i\omega + \lambda_n} \langle \nu_m(\nu_n - \delta_{nm}) \rangle \right] \\ + 2 N_{1s} l \times \text{Real Part of} \\ \left[i\omega \left(l + \sum_{m=1}^6 \frac{\beta_m k}{i\omega + \lambda_m} \right) + 1 - k \right]^{-1}. \quad (4.51')$$

ここで、 δ_{nm} は、Kronecker のデルタである。すなわち
 $\delta_{nm} = 1$; $n=m$ の時、
 $= 0$; $n \neq m$ の時。

4.4 空間および速度依存を考慮した Langevin の方法

前節 4.2 および 4.3 の議論を整理しつつ多点炉モデルの場合、相空間が連続な場合へ Langevin 法を拡張しよう。

零出力未臨界炉を考えよう。媒質の性質は、時間的に一定で、中性子の連鎖反応により影響をうけることはないものとする。核反応は、不規則におこるので、中性子・先行核数は、統計的に変動をうける。密度ベクトル f を導入しよう。その成分は、各相空間点における中性子または先行核の数をあらわすものとしよう。たとえば、原子炉を j 箇の空間領域に分け、中性子の速度領域を n 箇の群に分け、遅発中性子先行核を m 組考えたとしよう。先行核数は、いわば、貯蔵されている中性子数とみなすことができる。位置および速度空間を自由に動きまわっている中性子と貯蔵されている中性子と合わせて、 $M = j \times (m+n)$ 箇の中性子の状態または種類が考えられる。密度ベクトル f は、 M 箇の成分から成り、 i という状態にある中性子数を $f^{(i)}$ とする。一方、相空間が連続な場合、たとえば、3次元位置空間 x 、3次元速度空間

\mathbf{v} , 遅発中性子 m 組の場合には, \mathbf{f} は, $(m+1) \times \infty^3 \times \infty^3$ 箇の成分からなるベクトルを表わすものとする. α を中性子の種類, すなわち, 自由に動きまわっている中性子か, それともある種の先行核に貯蔵されている中性子かを区別する添字としよう. \mathbf{f} の $(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 成分を $f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ と表わす. さらに, 連続パラメータをひとまとめにして μ とした時, 一般に $h^{(\alpha)}(\mu)$ という形の関数を $i=(\alpha, \mu)$ とおいて, ベクトル関数 \mathbf{h} の i 番目の要素と呼ぼう. また, $H_{\alpha\beta}(\mu; \mu')$ という形の関数を行列関数 H の $(i-j)$ 要素と呼ぼう. ただし, $j=(\beta, \mu')$. このようにすれば, 以下の議論は, 相空間変数が離散的である場合にも, また連続である場合にも適用できる.

密度ベクトル \mathbf{f} の期待値 $\langle \mathbf{f} \rangle$ は, よく知られているように, 次のようなボルツマン方程式をみたく.

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{f}(t) \rangle = -B \langle \mathbf{f}(t) \rangle + \mathbf{S}_1, \quad (4.54)$$

ここで, B は, ボルツマン作用素行列である. 一点炉モデルの場合, すなわち, $j=n=1, m=0$ の場合には, B は, (4.2) 式で与えた中性子減衰係数に等しくなる. 遅発中性子を考慮した二点炉モデル, すなわち, $j=n=1, m=1$ の場合には, B は (4.34) 式で与えたように, (2×2) の正方行列になる. 一般に, \mathbf{f} が M 箇の成分から成る時, B は $(M \times M)$ の正方行列であり, (4.54) 式は, M 箇の連立方程式を意味する. 特にその i 番目の方程式は, 次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f^{(i)}(t) \rangle = - \sum_{j=1}^M B_{ij} \langle f^{(j)}(t) \rangle + S_1^{(i)}. \quad (4.55)$$

相空間が連続な場合にも, 多点炉モデルの場合の行列・ベクトル演算の形式がそのまま保存されるようにしておく. たとえば, 輸送理論では, (4.55) 式に対応して, $(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 成分に対する運動方程式は次のように表わされる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = - \sum_{\beta} \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{v}' B_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \mathbf{x}', \mathbf{v}') f_1^{(\beta)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \\ + S_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

すなわち, 行列・ベクトル演算 $B\mathbf{f}_1$ において, 連続変数に関する和は積分を意味するものと約束して, (4.54) の形式で運動方程式は与えられるものとする. (4.56) 式で,

$$\langle f^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

とおいた. $f_1^{(\alpha)}$ は種類 α の粒子の singlet 分布関数と呼ばれる. また, B の $(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\beta, \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 要素は, 次のように与えられる.

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \mathbf{x}', \mathbf{v}') \\ = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}') \left[\mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \right. \\ \left. + \frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{l^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v})} - \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \frac{k(\alpha, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \beta)}{l^{(\beta)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}')} \right], \end{aligned} \quad (4.57)$$

ここで, $\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタ, すなわち,

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} &= 1 \quad ; \alpha = \beta \text{ の時} \\ &= 0 \quad ; \alpha \neq \beta \text{ の時.} \end{aligned}$$

$\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}')$, $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ は Dirac のデルタ関数を意味する. これを $\delta_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}$, $\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$ と略して用いることもある. また, $l^{(\alpha)}$: 種類 α の中性子の平均寿命.

たとえば, 自由中性子の場合, $1/l^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は, 全反応の断面積 $\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ と中性子の速さ v との積を意味する. α が先行核の場合には, 崩壊定数 $\lambda^{(\alpha)}$ と先行核の散乱の割合 $\nu \Sigma_s^{(\alpha)}$ との和とみなすことができる.

$k(\alpha, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \beta)$: 速度 \mathbf{v}' を持った種類 β の中性子 1 箇が反応 (散乱, 核分裂またはベータ崩壊) をおこして速度 \mathbf{v} のまわりの単位速度領域に, 生み出す種類 α の中性子数の期待値.

$S_1^{(\alpha)}$: 独立な源から単位時間当たり単位空間領域に生みだされる種類 α の中性子数の期待値.

(4.57) 式を (4.56) 式に代入し, 積分を実行するとよく知られた次の形の方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = - \mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) / l^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ + \sum_{\beta} \int d\mathbf{v}' \frac{k(\alpha, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \beta)}{l^{(\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}')} f_1^{(\beta)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \\ + S_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.58)$$

ここで, $\text{grad}_{\mathbf{x}} f_1^{(\alpha)}$ 項を導く場合に, 部分積分を一回行なった. (4.58) 式で, 特に, α が先行核を意味する場合, 媒質中での平均の自由行程は, 10^{-3} cm 程度とごく短いので, 通常, 先行核は生まれた場所にそのままとどまっていると仮定している. (4.58) 式をさらに \mathbf{v} について積分し, 先行核が散乱される割合 $\nu \Sigma_s$ が大きいとして, grad 項を落とせば, 先行核密度 $\int d\mathbf{v} f_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に対する通常の運動方程式が得られる.

拡散近似の場合にも, 同様にして積分作用素としての B を導入する. たとえば, 遅発中性子を無視した一群拡散モデルでは, B の $(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ 成分は, 均質媒質中では次のようになる.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -D_s \nu \Delta_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &+ \Sigma_a \nu (1-k_{\infty}) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Δ は, ラプラシアンを意味する. D_s は中性子の拡散係数.

さて, 定常状態における \mathbf{f} の期待値を \mathbf{f}_{is} としよう. すなわち, \mathbf{f}_{is} は次の方程式の解として与えられる.

$$-B\mathbf{f}_{is} + \mathbf{S}_1 = 0. \quad (4.60)$$

期待値からの密度ベクトルのずれを, $\delta\mathbf{f}(t)$ とおこう.

$$\delta\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_{is}. \quad (4.61)$$

ずれ $\delta\mathbf{f}(t)$ の時間的変動は, 媒質からうける 2 つの種類の効果によって支配されると考えられる. 一つは, 各瞬間の不規則なふらつきを生み出すランダムな原動力, 他の一つは, ずれをゼロに引きもどそうとする, いわば摩擦力に相当した力である. いずれも, 中性子と媒質原子

との相互作用がその起因になっているので、両者の間には内的な関係があるはずである。その点については、次節でのべる。

時刻 $t=0$ に、 f は、 $\delta f(0)$ だけ定常値からずれていたとしよう。この時、変動の期待値 $\langle \delta f(t) \rangle_0$ は、次のような運動方程式をみたしつつゼロに近づく。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta f(t) \rangle_0 = -B \langle \delta f(t) \rangle_0, \quad (4.62)$$

ただし、初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \delta f(t) \rangle_0 = \delta f(0).$$

(4.62) 式から摩擦定数に相当する項がわかる。ブラウン運動論からの類推で、ふらつき $\delta f(t)$ は、次のような運動方程式、すなわち Langevin 方程式をみたすものとしよう。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f(t) = -B \delta f(t) + F(t). \quad (4.63)$$

ここで、 $F(t)$ は、ゆらぎをひきおこすランダムな原動力、すなわち、雑音源ベクトルである。

次の性質をもっているものとしよう。

$$a) \quad \langle F(t) \rangle = 0, \quad (4.64)$$

$$b) \quad \langle F(t) F(u) \rangle = 2D \delta(t-u). \quad (4.65)$$

すなわち、a) 雑音源の集合平均はゼロ。b) 雑音源のスペクトル密度は白色であると仮定する。ゆらぎの相関関数 $\langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle$ を求めよう。(4.63) 式の解は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta f(t) &= \exp(-Bt) \delta f(0) \\ &+ \int_0^t d\xi \exp[-B(t-\xi)] F(\xi), \end{aligned} \quad (4.66)$$

あるいは、

$$\begin{aligned} \delta f(u) &= \exp(-Bu) \delta f(0) \\ &+ \int_0^u d\xi \exp[-B(u-\xi)] F(\xi). \end{aligned} \quad (4.67)$$

ここで、 $\exp(-Bt)$ は、グリーン関数行列 $Gr(t)$ を意味する。すなわち、初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} Gr(t) = U$$

をみたす次の方程式の解である。

$$\frac{\partial}{\partial t} Gr(t) = -B Gr(t). \quad (4.68)$$

U は単位行列である。すなわち、その $(i-j)$ 要素*

$$U_{ij} = \delta_{ij}.$$

$Gr_{ij}(t)$ は、 j という状態に中性子を1箇投入した時、 t 時間後に i という状態に存在する中性子数の期待値に等しい。

初期状態を $\delta f(0)$ として、(4.64), (4.65), (4.66) および (4.67) 式を用いると、次のような集合平均が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle_0 \\ = \exp(-Bt) \delta f(0) \delta f(0) \exp(-B^T u) \end{aligned}$$

* 連続パラメータがあって $i=(\alpha, \mu)$, $j=(\beta, \mu')$ の時 $\delta_{ij} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mu - \mu')$ と解釈する。

$$+ \int_0^t d\xi' \exp[-B(t-\xi')] 2D \exp[-B^T(u-\xi')]. \quad (4.69)$$

ここで、 ξ は、 t と u のうち小さい方に等しい。また、 $\exp(-B^T t)$ は、グリーン関数行列 $\exp(-Bt)$ の転置行列で、次の方程式の解 $Gr^T(t)$ に等しい。

$$\frac{\partial}{\partial t} Gr^T(t) = -Gr^T(t) B^T. \quad (4.70)$$

ただし、初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} Gr^T(t) = U.$$

さらに、初期点ですでに定常なランダム過程が実現されていると考え、(4.69) 式を初期値の分布に関して集合平均をとる。結果は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle \\ = \exp(-Bt) \langle \delta f \delta f \rangle \exp(-B^T u) \\ + \int_0^t d\xi' \exp[-B(t-\xi')] 2D \exp[-B^T(u-\xi')]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

ここで、 $\langle \delta f \delta f \rangle$ は、定常状態における中性子数の分散を表す行列である。すなわち、その $(i-j)$ 要素、

$$\begin{aligned} \langle \delta f \delta f \rangle_{ij} &= \langle (f^{(i)} - f_{1s}^{(i)}) (f^{(j)} - f_{1s}^{(j)}) \rangle \\ &= \langle f^{(i)} f^{(j)} \rangle - f_{1s}^{(i)} f_{1s}^{(j)}. \end{aligned}$$

次節で、 B と D との間に、次の Einstein の関係が成立することを示す。

$$2D = B \langle \delta f \delta f \rangle + \langle \delta f \delta f \rangle B^T. \quad (4.72)$$

この関係は、一点炉モデルですでに示したように (4.17) 式のように表わされる。上式から次の関係があることがわかる。

$$\langle \delta f \delta f \rangle = \int_0^\infty d\xi' \exp(-B\xi') 2D \exp(-B^T \xi'), \quad (4.73)$$

あるいは、

$$\langle \delta f \delta f \rangle = \int_{-\infty}^0 d\xi' \exp(B\xi') 2D \exp(B^T \xi'). \quad (4.73')$$

事実、(4.73) 式に左から B を、(4.73') 式に右から B^T を乗じ、(4.68) および (4.70) 式を用いつつ部分積分を行なうと (4.72) 式が得られる。

(4.73') を (4.71) に代入し、グリーン関数の相加関係

$$\exp(-Bt) \exp(-Bu) = \exp[-B(t+u)],$$

$$\exp(-B^T t) \exp(-B^T u) = \exp[-B^T(t+u)]$$

を用いると、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle \\ = \int_{-\infty}^t d\xi' \exp[-B(t-\xi')] 2D \exp[-B^T(u-\xi')]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

この関係式は、(4.15) 式あるいは (4.41) 式を導いた時と同様な手法を用いても得られる。すなわち、未臨界炉では、十分時間がたてば初期状態を忘れる。いいかえれば、いかなる初期状態から出発しても、初期値に無関係な定常なゆらぎが得られるという事実を背景に、 $(t-u)$ を固定して、 $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$ という操作を行なえば、(4.74)

式を得る. 雑音源スペクトル密度 A の大きさは, 次節で示すように Schottky の公式から得られ, 次のような形にまとめることができる.

$$2D = Q + BE + EB^T. \quad (4.75)$$

ここで, E は, 定常状態における中性子数の期待値ベクトルを対角上に並べた対角行列である. すなわち,

$$E_{ij} = f_{is}^{(i)} \quad ; \quad i=j \text{ の時} \\ = 0 \quad ; \quad i \neq j \text{ の時.}$$

Q は分枝反応の存在に起因する. (4.75) 式右辺第 2 項および第 3 項は, 吸収, 散乱, 先行核の崩壊, 外部源からの中性子放出といった種々な核反応が不規則に起こることに起因している. (4.75) 式を (4.74) 式に代入する. 前節で (4.48) 式を導いた時と同様な手法を用いると, 次の結果 ((4.48) と同形) を得る.

$$\begin{aligned} & \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^u d\eta \exp[-B(t-\eta)] Q \exp[-B^T(u-\eta)] \\ & \quad + \exp[-B(t-u)] E \quad ; \quad t-u \geq 0 \text{ の時,} \\ &= \int_{-\infty}^t d\eta \exp[-B(t-\eta)] Q \exp[-B^T(u-\eta)] \\ & \quad + E \exp[-B^T(u-t)] \quad ; \quad t-u < 0 \text{ の時.} \end{aligned} \quad (4.76)$$

この結果は, 確率母関数の方法を用いて OTSUKA and SAITO¹¹³⁾ により得られたものと一致する. (4.76) 式右辺第 1 項は, 分枝反応に起因した BNES(Binary Noise-Equivalent Source) Q の寄与で “binary correlation” と呼ぶ. 第 2 項は, “single or direct correlation” と呼ばれる. $t \geq u$ の時の $(i-j)$ 要素は, $Gr_{ij}(t-u) f_{i1}^{(j)}$ である. これは, 時刻 t に存在する j という状態の中性子が原因になって, 時刻 u に生みだされる i という状態の中性子数の期待値に等しい.

ゆらぎのスペクトル密度は, (4.49) 式を導いた時と同様な手法を用いて求めることができる. 結果は (4.49) 式と同形である. すなわち

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] d(t-u) \\ &= Gr[i\omega] 2D Gr^T[-i\omega] \\ &= Gr[i\omega] Q Gr^T[-i\omega] \\ & \quad + Gr[i\omega] E + E Gr^T[-i\omega]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

ここで, $Gr(i\omega)$ は, グリーン関数行列 $Gr(t)$ のフーリエ・ラプラス変換, すなわち,

$$Gr[i\omega] = \int_0^{\infty} dt Gr(t) \exp(-i\omega t) = [i\omega U + B]^{-1}. \quad (4.78)$$

すなわち, 行列 $\{i\omega U + B\}$ の逆行列に等しい. ただし, U は単位行列である.

以上, のべた Langevin 法は, 4.2 の代わりに記した 3 つの骨組に加えて, ボルツマン作用素 B と雑音源スペクトル密度 $2D$ との間に存在する内的な関係式, すなわち Einstein の関係式から成立している. これら 4 つの骨組をより統一的な立場から検討してみよう.

4.5 雑音源の性質-I Schottky の公式

相空間点における中性子数ベクトル \mathbf{f} を炉の状態を表わす変数として選んだ時, マルコフ的記述ができる経験的に行うことができる. すなわち現時点での炉の状態 \mathbf{f} の値がわかれば, 将来の炉の状態を完全に予測することができ, 過去の状態に関する情報は必要としない. この前提にたつて, 雑音源のみたすべき Einstein の関係と Schottky の公式を導くことができる.

\mathbf{f} がマルコフ変数であるならば, ゆらぎの性質は, 次のような遷移確率を用いることにより完全に定めることができるはずである.

$P(\mathbf{f}, t | \mathbf{f}_0, t_0)$, すなわち t_0 の中性子数ベクトルが \mathbf{f}_0 の時, 時刻 $t (\geq t_0)$ の中性子数ベクトルが \mathbf{f} である確率. 特に, 媒質および外部中性子源の性質が時間的に一定な場合には, 遷移確率は, 時間原点の選び方に関係せず, t と t_0 との差 τ だけの関数である. これを, $P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; \tau)$ と書こう. 遷移確率は, 次のような条件をみたす.

規格化条件:

$$\sum_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; \tau) = 1. \quad (4.79)$$

初期条件:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; \tau) = \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0). \quad (4.80)$$

Smoluchowski の条件:

$$P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}_0; t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; t). \quad (4.81)$$

ただし, $\Delta t \geq 0$. また, (4.79), (4.80) 式で和は, \mathbf{f} のとりうるあらゆる可能な状態についてとる. (4.80) 式からわかるように, 中性子数の変化量 $(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)$ のモーメントは, $\Delta t \rightarrow 0$ とするとゼロになることがわかる. 特に, その一次と二次のモーメントは, Δt が小さい時, 次のようにおけると考えよう.

$$\sum_{\mathbf{f}'} (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) = \mathbf{J}(\mathbf{f}) \Delta t + O(\Delta t)^2, \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{f}'} (\mathbf{f}' - \mathbf{f})(\mathbf{f}' - \mathbf{f}) P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) \\ &= A(\mathbf{f}) \Delta t + O(\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

いいかえれば, 微小時間 Δt の間の反応により変化した中性子数の一次および二次モーメントは, Δt の次数で展開できると考える. 期待値および分散のみたす運動方程式を求めよう.

まず, (4.81) 式左辺に \mathbf{f}' を, 右辺に $\mathbf{f} + (\mathbf{f}' - \mathbf{f})$ をかけ, \mathbf{f}' のあらゆる可能な状態について和をとる.

この時, 左辺は次のようになる.

$$\sum_{\mathbf{f}'} \mathbf{f}' P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}_0; t + \Delta t) = \langle \mathbf{f}(t + \Delta t) \rangle. \quad (4.84)$$

一方, 右辺は (4.79) 式および (4.82) 式を用いて次のように変形できる.

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{f}'} \mathbf{f} P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; t) \\ & \quad + \sum_{\mathbf{f}'} (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \sum_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\mathbf{f}} \mathbf{f} P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; t) + \sum_{\mathbf{f}} \mathbf{J}(\mathbf{f}) P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; t) \Delta t + O(\Delta t)^2$$

$$= \langle \mathbf{f}(t) \rangle_0 + \langle \mathbf{J}(\mathbf{f}) \rangle \Delta t + O(\Delta t)^2. \quad (4.85)$$

(4.84) および (4.85) 式から次の結果をうる。

$$\langle \mathbf{f}(t + \Delta t) \rangle = \langle \mathbf{f}(t) \rangle + \langle \mathbf{J}(\mathbf{f}) \rangle \Delta t + O(\Delta t)^2.$$

したがって、期待値の満足すべき次のような運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{f}(t) \rangle = \langle \mathbf{J}(\mathbf{f}) \rangle. \quad (4.86)$$

ただし、初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \mathbf{f}(t) \rangle = \mathbf{f}_0.$$

定常状態における期待値を \mathbf{f}_{1s} としよう。(4.81) 式の左辺に $(\mathbf{f}' - \mathbf{f}_{1s})(\mathbf{f}' - \mathbf{f}_{1s})$ を乗じ、右辺には、それと等価な次の量

$$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{1s})(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{1s}) + (\mathbf{f}' - \mathbf{f})(\mathbf{f}' - \mathbf{f})$$

$$+ (\mathbf{f}' - \mathbf{f})(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{1s}) + (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{1s})(\mathbf{f}' - \mathbf{f})$$

を乗じ、 \mathbf{f}' について和をとる。左辺は次のようになる。

$$\langle \delta \mathbf{f}(t + \Delta t) \delta \mathbf{f}(t + \Delta t) \rangle.$$

一方、右辺は、

$$\langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(t) \rangle + \langle \Lambda(\mathbf{f}) \rangle \Delta t$$

$$+ \langle \mathbf{J}(\mathbf{f}) \delta \mathbf{f} \rangle \Delta t + \langle \delta \mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{f}) \rangle \Delta t + O(\Delta t)^2$$

となる。この2つの関係式から、分散に対する次のような運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(t) \rangle$$

$$= \langle \Lambda(\mathbf{f}) \rangle + \langle \mathbf{J}(\mathbf{f}) \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{f}) \rangle. \quad (4.87)$$

ただし、初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(t) \rangle = (\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_{1s})(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_{1s}).$$

さて、期待値のみたす運動方程式が (4.86) 式のように得られたが、これは、ボルツマン方程式 (4.54) 式と同じものではなく、したがって右辺は次のようにおける。

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{f}) \rangle = -B \langle \mathbf{f} \rangle + \mathbf{S}_1. \quad (4.88)$$

ところで、外部中性子源により放出される中性子数は、炉の状態 \mathbf{f} の値には、無関係である。一方、零出力炉では、散乱、吸収、核分裂、先行核の崩壊等の核反応がおこる確率は、反応前の中性子数ベクトル \mathbf{f} に比例すると考えられる。したがって、 \mathbf{f} に関する集合平均をとる以前に、次の関係があると考えられる。

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}) = -B \mathbf{f} + \mathbf{S}_1. \quad (4.89)$$

次節で、この関係式を確かめる。上式を (4.87) 式に代入する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(t) \rangle$$

$$= \langle \Lambda(\mathbf{f}) \rangle - \langle B \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle - \langle \delta \mathbf{f} \mathbf{f} B^T \rangle$$

$$+ \mathbf{S}_1 \langle \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \rangle \mathbf{S}_1.$$

特に、定常状態では、上式左辺および $\langle \delta \mathbf{f} \rangle$ はゼロになるはずである。 $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{1s} + \delta \mathbf{f}$ とおけば、次の関係式が得られる。

$$A = B \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle B^T. \quad (4.90)$$

ここで、

$$A \equiv \langle \Lambda(\mathbf{f}) \rangle$$

$$= \langle \Lambda(\mathbf{f}_{1s} + \delta \mathbf{f}) \rangle = \Lambda(\mathbf{f}_{1s}). \quad (4.91)$$

4.7 で示すように、ここで定義された A は、白色雑音源スペクトル密度 $2D$ に等しい。すなわち、

$$A = 2D \quad (4.92)$$

(4.90) 式は、摩擦力に関係したボルツマン作用素 B とゆらぎの原動力に関係した拡散定数 $2D$ との間に成立する Einstein の関係式である。(4.91) の第2式から第3式を導く時に核反応がおこる確率は、中性子数ベクトル \mathbf{f} に比例するという線型性を用いた。(4.83) 式の定義から、拡散定数は、一般に次のように与えられることがわかる。

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{\mathbf{f}} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{1s})(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{1s}) P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_{1s}; \Delta t). \quad (4.93)$$

反応後の種々な状態 \mathbf{f} とそういう状態を生み出す反応の種類とは、一対一の対応関係がつけられる。そこで (4.93) 式で、 \mathbf{f} について和をとる代りに反応のタイプについて和をとることにする。また、微小時間 Δt の間に、あるタイプの反応がおこる確率は、反応前の状態が \mathbf{f}_{1s} である時には、単位時間にその反応がおこる期待値と Δt との積に等しい。これらの事実を用いれば、(4.93) 式は、次のように表わされる。

$$A = \sum_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \langle R_i \rangle$$

$$= 2D. \quad (4.94)$$

ここで、 \mathbf{q}_i は、タイプ i の反応による中性子数ベクトルの変化量、 $\langle R_i \rangle$ は、単位時間当たり起こるタイプ i の反応数の期待値である。(4.94) 式は、Schottky の公式と呼ばれる。

次のような行列を導入しよう。

$$\Sigma_{ij} = \langle \delta f^{(i)} \delta f^{(j)} \rangle - f_{1s}^{(i)} \quad ; i = j \text{ の時,}$$

$$= \langle \delta f^{(i)} \delta f^{(j)} \rangle \quad ; i \neq j \text{ の時.} \quad (4.95)$$

また、対角要素が定常状態における期待値に等しい次のような対角行列を導入する。

$$E_{ij} = f_{1s}^{(i)} \quad ; i = j \text{ の時,}$$

$$= 0 \quad ; i \neq j \text{ の時.} \quad (4.96)$$

Einstein の公式 (4.90) において、分散行列 $\langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle$ をそれと等価な行列 $(\Sigma + E)$ で置きかえる。結果は、次のように表わされる。

$$A = Q + BE + EB^T$$

$$= 2D \quad (4.97)$$

ただし、

$$Q = B \Sigma + \Sigma B^T. \quad (4.98)$$

体系が、ポアソンのであるならば、分散 $\langle \delta f^{(i)} \delta f^{(j)} \rangle$ は期待値 $f_{1s}^{(i)}$ に等しく、また相互分散 $\langle \delta f^{(i)} \delta f^{(j)} \rangle$ ($i \neq j$) はゼロに等しい。したがって、行列 Σ はゼロになり、雑音源スペクトル密度は、 $BE + EB^T$ となる。この項は、“Single” 雑音源 (SNES) と呼ばれる。これに対して、 Q は “Binary” 雑音源 (BNES) で、誘導核分裂あるいは自発核分裂に原因した項である。次節では、具体的に核反応による遷移確率を導入して雑音源を定める。

4.6 零出力炉にたいする Schottky の公式の適用

まず, M 点炉モデルをとり, 次のような遷移確率を導入しよう.

i) 外部中性子源の自然崩壊 1 回当たり, 第 1 セルに n_1 箇, 第 2 セルに n_2 箇, ..., 中性子が生まれる確率を $p_s(n_1, n_2, \dots, n_M)$ としよう. 単位時間当たり外部中性子源の崩壊数を S とする. 微小時間 Δt の間に, 自然崩壊が 1 回おこる確率は, $S \Delta t$ となる. これに対して 2 回以上自然崩壊がおこる確率は, Δt の 2 次以上の高次の無限小になり, 1 回おこる確率に比し無視できる.

ii) i 番目のセルにある中性子が 1 箇消滅した時, 第 1 セルに n_1 箇, 第 2 セルに n_2 箇, ..., 2 次中性子が生まれる確率を $p_i(n_1, n_2, \dots, n_M)$ とする. i 番目のセルにいる中性子が単位時間当たり, 吸収・減速・もれ・自然崩壊 (先行核の場合) 等により失なわれる確率は, i 番目のセルにある中性子数 $f^{(i)}$ と中性子寿命 l_i の逆数との積に等しい. 微小時間 Δt の間に, i 番目のセルの中性子が 1 箇消滅する確率は, $f^{(i)}/l_i \cdot \Delta t$ である. これに対して, 2 箇以上消滅する確率は, Δt の 2 次以上の高次の無限小になり, 1 箇消滅する確率に比し, 無視できる.

p_s, p_i は, 次のように規格化されているものとする.

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_M=0}^{\infty} p(n_1, n_2, \dots, n_M) = 1.$$

まず, (4.82) 式に従って, 単位時間当たり i 番目のセルで変化する中性子数の 1 次のモーメントを求めてみよう.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}(\mathbf{f}) \rangle^{(i)} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{\mathbf{f}'} (f'^{(i)} - f^{(i)}) P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) \\ &= S \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} n_i p_s(n_1, n_2, \dots, n_M) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} (n_i - \delta_{im}) \\ &\quad \times \frac{f^{(m)}}{l_m} p_m(n_1, n_2, \dots, n_M) \\ &= S_1^{(i)} + \sum_{m=1}^M (k_i^{(m)} - \delta_{im}) \frac{f^{(m)}}{l_m}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

ここで

$$\begin{aligned} S_1^{(i)} &= S \langle \nu_s^{(i)} \rangle, \\ \langle \nu_s^{(i)} \rangle &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} n_i p_s(n_1, n_2, \dots, n_M), \\ k_i^{(m)} &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} n_i p_m(n_1, n_2, \dots, n_M). \end{aligned}$$

(4.99) 式は, まとめて次のように書くことができる.

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}) = \mathbf{S}_1 - B \mathbf{f}. \quad (4.100)$$

ただし,

$$B = (U - K)Z. \quad (4.101)$$

ここで,

$$U_{ij} = \delta_{ij}, \quad K_{ij} = k_i^{(j)}, \quad Z_{ij} = \delta_{ij}/l_j.$$

(4.100) 式は, 前節で用いた (4.89) の関係式である. 次に, 2 次モーメントを求めよう.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(\mathbf{f}) \rangle_{ij} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{\mathbf{f}'} (f'^{(i)} - f^{(i)})(f'^{(j)} - f^{(j)}) \\ &\quad \times P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) \\ &= S \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} n_i n_j p_s(n_1, n_2, \dots, n_M) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} (n_i - \delta_{im})(n_j - \delta_{jm}) \\ &\quad \times \frac{f^{(m)}}{l_m} p_m(n_1, n_2, \dots, n_M) \\ &= S \langle \nu_s^{(i)} \nu_s^{(j)} \rangle + \sum_{m=1}^M k_{ij}^{(m)} \frac{f^{(m)}}{l_m} \\ &\quad - k_i^{(j)} \frac{f^{(j)}}{l_j} - k_j^{(i)} \frac{f^{(i)}}{l_i} + \delta_{ij} \frac{f^{(i)}}{l_i}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \langle \nu_s^{(i)} \nu_s^{(j)} \rangle &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} n_i n_j p_s(n_1, n_2, \dots, n_M) \\ &= \langle \nu_s^{(j)} \nu_s^{(i)} \rangle, \\ k_{ij}^{(m)} &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_M} n_i n_j p_m(n_1, n_2, \dots, n_M) \\ &= k_{ji}^{(m)}. \end{aligned}$$

(4.102) 式は, \mathbf{f} に関して線形であり, したがって $\langle \Lambda(\mathbf{f}) \rangle = \Lambda(\langle \mathbf{f} \rangle)$. (4.102')

これは, すでに (4.91) 式を導く際用いた性質である. 定常状態では, 中性子数の期待値は, 次のボルツマン方程式をみだす.

$$-S \langle \nu_s^{(i)} \rangle + \sum_{j=1}^M B_{ij} \langle f^{(j)} \rangle = 0. \quad (4.103)$$

上式を (4.102') 式の $(i-i)$ 要素に加えて, (4.101) 式を用いて整理すると, 結果は, 次のようになる.

$$\Lambda(\langle \mathbf{f} \rangle) = Q + B \mathbf{E} + \mathbf{E} B^T. \quad (4.104)$$

ただし,

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= S \{ \langle \nu_s^{(i)} \nu_s^{(j)} \rangle - \delta_{ij} \langle \nu_s^{(i)} \rangle \} \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (k_{ij}^{(m)} - \delta_{ij} k_j^{(m)}) \frac{\langle f^{(m)} \rangle}{l_m} \\ &= Q_{ji}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

こうして, M 点炉の場合の雑音源スペクトル密度行列が定まった. この行列は, 対称行列であることに注意しておこう. 1 空間点, 1 群または 6 群遅発中性子についての具体的な表式は, すでに (4.25), (4.44), (4.44') 式に示した. 1 空間点, 2 エネルギー点についての応用は, NIETO and AKHTAR¹⁰⁴⁾ が行なっている.

相空間が連続な場合にも (4.104) の形式は, そのまま保存される. ただし, B としては (4.57) あるいは (4.59) 式で用いた積分作用素を用いる. (4.65), (4.92), (4.91) および (4.104) 式から, 雑音源の $(\alpha, \mu) - (\beta, \mu')$ 成分は次のように与えられることがわかる.

$$\begin{aligned} \langle F^{(\alpha)}(\mu, t) F^{(\beta)}(\mu', u) \rangle \\ = \delta(t-u) [Q_{\alpha\beta}(\mu; \mu') + B_{\alpha\beta}(\mu; \mu') f_1^{(\beta)}(\mu') \\ + f_1^{(\alpha)}(\mu) B_{\beta\alpha}(\mu'; \mu)]. \end{aligned} \quad (4.106)$$

BNES に相当する Q は, 輸送理論では, 次のように

かける.

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \mathbf{x}', \mathbf{v}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Y_{\alpha\beta}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{x}). \quad (4.107)$$

すなわち, Q は空間的にみて白色 (異なる空間点相互の間には, 相関がない) である. Y は自発核分裂からの寄与 $Y^{(S)}$ と誘導核分裂からの寄与 $Y^{(I)}$ とにわかれる.

$$Y_{\alpha\beta} = Y_{\alpha\beta}^{(S)} + Y_{\alpha\beta}^{(I)}.$$

前者は, 次のようになる.

$$Y_{\alpha\beta}^{(S)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) k_{2S}(\mathbf{v}, \alpha, \mathbf{v}', \beta \leftarrow \mathbf{x}). \quad (4.108)$$

ここで, $S(\mathbf{x})$ は, 位置 \mathbf{x} のまわりの単位体積中でおこる自発核分裂 (自然崩壊 1 回当たり複数箇の 2 次粒子を放出する外部源の崩壊反応) の単位時間当りの期待値である. $k_{2S}(\mathbf{v}, \alpha, \mathbf{v}', \beta \leftarrow \mathbf{x})$ は, 位置 \mathbf{x} での自発核分裂の際, 速度 \mathbf{v} のまわりの単位領域当り 1 箇のタイプ α の 2 次粒子を, また, 速度 \mathbf{v}' のまわりの単位領域当り 1 箇のタイプ β の 2 次粒子を放出する結合確率である.

一方, 誘導核分裂からの寄与は次のようになる.

$$Y_{\alpha\beta}^{(I)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{x}) = \int d\mathbf{v}_0 f_1^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0) \nu_0 \Sigma_f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0) \times k_{2I}(\mathbf{v}, \alpha, \mathbf{v}', \beta \leftarrow \mathbf{v}_0, \mathbf{x}). \quad (4.108')$$

$f_1^{(n)}$ は, 中性子数の期待値の分布関数, $k_{2I}(\mathbf{v}, \alpha, \mathbf{v}', \beta \leftarrow \mathbf{v}_0, \mathbf{x})$ は, 位置 \mathbf{x} で速度 \mathbf{v}_0 の中性子が 1 箇核分裂をおこした際, 速度 \mathbf{v} のまわりの単位領域当り 1 箇のタイプ α の 2 次粒子を, また, 速度 \mathbf{v}' のまわりの単位領域当り 1 箇のタイプ β の 2 次粒子を放出する結合確率である.

核分裂により生まれる 2 次粒子が, 自由な中性子である確率を $(1-\beta)$, タイプ i の先行核である確率を β_i とし $\beta = \sum_{i=1}^I \beta_i$ とおこう. 全部で, ν 箇の 2 次粒子が生まれた時, ν_0 箇が中性子, ν_i 箇がタイプ $i (i=1, 2, \dots, I)$ の先行核である条件付き確率 $p(\nu_0, \nu_1 | \nu)$ は, 次のような多項分布で与えられるものと仮定しよう. (cf. Appendix B)

$$p(\nu_0, \nu_1 | \nu) = \frac{\nu!}{\nu_0! \nu_1! \dots \nu_I!} (1-\beta)^{\nu_0} \beta_1^{\nu_1} \dots \beta_I^{\nu_I}.$$

ただし,

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_I.$$

即発中性子の速度分布関数を $\chi(\mathbf{v})$ としよう. また先行核は, 静止しているものとする. この時, k_{2I} の各成分は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} k_{2I}(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{v}', \mathbf{n}') &= \langle \nu(\nu-1) \rangle (1-\beta)^2 \chi(\mathbf{v}) \chi(\mathbf{v}'), \\ k_{2I}(\mathbf{v}, \mathbf{n}, i) &= \langle \nu(\nu-1) \rangle (1-\beta) \beta_i \chi(\mathbf{v}), \\ k_{2I}(i, j) &= \langle \nu(\nu-1) \rangle \beta_i \beta_j. \end{aligned} \quad (4.109)$$

拡散モデルの場合の Q は, (4.107) 式を角度部分について積分して得られる.

これに対し, SNES は (4.106) 式右辺第 2 項および第 3 項の和として得られる. すなわち

$$\text{SNES} = B_{\alpha\beta}(\mu; \mu') f_1^{(S)}(\mu') + f_1^{(I)}(\mu) B_{\beta\alpha}(\mu'; \mu). \quad (4.110)$$

輸送理論では, (4.57) 式を用いると, 上式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{SNES} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [2 \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta_{\alpha\beta} f_1^{(S)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) / l^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &\quad - k(\alpha, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \beta) f_1^{(S)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}') / l^{(\beta)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \\ &\quad - k(\beta, \mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \alpha) f_1^{(S)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) / l^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{v})]. \end{aligned} \quad (4.111)$$

$\text{grad}_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ の項は, 互いに打ち消し合う. したがって雑音源は, 空間的にも白色になることがわかる.

一方, 拡散近似では, SNES は, 空間的に白色にはならない. たとえば, 一群モデルで遅発中性子を無視した場合には, (4.59) および (4.110) 式から次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} \text{SNES} &= -D_s \nu f_1^{(n)}(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &\quad - D_s \nu f_1^{(n)}(\mathbf{x}') \Delta_{\mathbf{x}'} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ &\quad + 2 \Sigma_a \nu (1 - k_{\infty}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f_1^{(n)}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.112)$$

中性子の不規則なふるまいは, 決定論的なものと確率論的なものとをまざり合っていると考えられる. 輸送現象が雑音源に寄与しないのは, それが決定論的な過程であるからである. すなわち, 媒質と反応をおこさない中性子は, 自由飛行を行ない, その将来の位置は, 確実に予測できる. 反応をおこすかおこさないかが確率的にしか予測できないのである.

これに対し, 拡散による中性子のひろがりというのは, 多数回の散乱過程ののちにみられる現象であり, 雑音源として寄与するのは当然と思われる.

本報では, 雑音源スペクトル密度を (4.104) 式のように, BNES である Q と SNES である $(BE + EB^T)$ との和の形に整理した. 定常状態では, 期待値の満足すべき関係式 $-B \mathbf{f}_{1S} + \mathbf{S}_1 = 0$ があるから, これを用いれば, 雑音源スペクトル密度は, また別の形にも書くことができよう. 事実, SHEFF and ALBRECHT¹³⁹⁾, ARCASU and OSBORN¹³⁾ の導いている形は, SNES に相当する項の表式が本報のものとは違う. 本報で示した形は, 雑音源スペクトル密度の対称性, すなわち,

$$A_{ij} = A_{ji}$$

をよく示していると同時に, ゆらぎの相関関数 (4.76) を導く上での数学的演算が明快になるという利点がある.

4.7 雑音源の性質-II Einstein の関係式

4.5 では, 炉の状態の時間的推移をマルコフ的とみなすことができるようまくランダム変数が選ばれているならば, 雑音源スペクトル密度は, 期待値の時間的推移を定めるボルツマン作用素と Einstein の関係式で結びついており, 具体的にその内容を定めるには, Schottky の公式が適用できることを示した. 本節では, “遅れ” の効果がある場合も含めて, 雑音源スペクトル密度が一般のにもつべき性質を導いてみよう.

Langevin 方程式 (4.63) は, “遅れ” の効果がある時には, 次のように一般化される.

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{f}(t) = - \int_0^t d\tau Br(t-\tau) \delta \mathbf{f}(\tau) + \mathbf{F}(t). \quad (4.113)$$

雑音源の期待値 $\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0$ と考えよう. また, 次のような因果律が満足されると考えよう.

$$\langle \delta \mathbf{f}(0) \mathbf{F}(t) \rangle = 0 \quad ; \quad t > 0 \text{ の時.} \quad (4.114)$$

すなわち, 現時点でのゆらぎ $\delta \mathbf{f}$ は, 未来の雑音源と相関をもたないと考える.

(4.113) の形式解は, グリーン関数 $Gr(t)$ を用いて, $t \geq 0$ の時, 次のように書ける.

$$\delta \mathbf{f}(t) = Gr(t) \delta \mathbf{f}(0) + \int_0^t d\xi Gr(t-\xi) \mathbf{F}(\xi).$$

右から $\delta \mathbf{f}(0)$ を乗じ, 集合平均をとる. $t=0$ ですでに定常状態が実現されているものと考えよう. 因果律 (4.114) を用いると次の結果が得られる.

$$\langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(0) \rangle = Gr(t) \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle. \quad (4.115)$$

$t < 0$ の場合にも, 同様にして次の結果が得られる.

$$\langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(0) \rangle = \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle Gr^T(-t). \quad (4.116)$$

この2つの式を用いてゆらぎのスペクトル密度を求めよう.

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d(t-u) \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] \\ &= Gr[i\omega] \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle Gr^T[-i\omega]. \end{aligned} \quad (4.117)$$

ここで, $Gr[\omega]$ は, グリーン関数行列 $Gr(t)$ のフーリエ・ラプラス変換である. $Gr(t)$ のみならず方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} Gr(t) = - \int_0^t d\tau Br(t-\tau) Gr(\tau),$$

および初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} Gr(t) = U$$

を用いれば, $Gr[i\omega]$ は, 形式的に次のように書けることがわかる.

$$Gr[i\omega] = (i\omega U + Br[i\omega])^{-1}. \quad (4.118)$$

一方, エルゴード性の成り立つ定常系では, 十分時間がたてば, 初期値に無関係なゆらぎが得られるはずである. (4.41) 式を導いた時と同様な手法を用いると次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^u du' Gr(t-t') \langle \mathbf{F}(t') \mathbf{F}(u') \rangle \\ &\quad \times Gr^T(u-u'). \end{aligned}$$

上式のフーリエ変換を求めよう.

まず, 右辺を次のように書きかえる.

$$\int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta Gr(\xi) \langle \mathbf{F}(t-\xi) \mathbf{F}(u-\eta) \rangle Gr^T(\eta).$$

定常系では, 雑音源も定常で, その相関関数は時間差のみの関数のはずである.

$$\Gamma_{FF}(t-\xi-u+\eta) = \langle \mathbf{F}(t-\xi) \mathbf{F}(u-\eta) \rangle$$

とおこう.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d(t-u) \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] \\ &= \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta \int_{\eta-\xi}^\infty d\zeta e^{-i\omega\xi} Gr(\xi) e^{-i\omega\zeta} \\ &\quad \times \Gamma_{FF}(\zeta) Gr^T(\eta) e^{i\omega\eta}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

ただし, $\zeta = t - \xi - u + \eta$

同様に,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 d(t-u) \langle \delta \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{f}(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] \\ &= \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^{\eta-\xi} d\zeta e^{-i\omega\xi} Gr(\xi) e^{-i\omega\zeta} \\ &\quad \times \Gamma_{FF}(\zeta) Gr^T(\eta) e^{i\omega\eta}. \end{aligned} \quad (4.120)$$

(4.119) 式と合わせれば, 結局,

$$\Phi(\omega) = Gr[i\omega] \Phi_{FF}(\omega) Gr^T[-i\omega]. \quad (4.121)$$

こうしてゆらぎの相関関数のフーリエ変換 $\Phi(\omega)$ に対して, (4.117) と (4.121) の2つの表式が得られた. 両者の右辺を等しいとおき, 左から逆行列 $Gr^{-1}[i\omega]$, 右から $\{Gr^T[-i\omega]\}^{-1}$ を乗ずる. (4.118) 式を用いて整理すると次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} \Phi_{FF}(\omega) &= Br[i\omega] \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle \\ &\quad + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle Br^T[-i\omega]. \end{aligned} \quad (4.122)$$

雑音源のスペクトル密度

$$\Phi_{FF}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d(t-u) \langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)].$$

と “遅れ” の効果を含んだ作用素 $B(t)$ のフーリエ・ラプラス変換 $B[i\omega]$ との間に成り立つ (4.122) の関係式は, Nyquist の定理と呼ばれる.

特に, “遅れ” の効果がなく,

$$Br(t) = B \delta(t)$$

とおける場合には, $Br[i\omega]$ は白色となり, (4.122) 式は, 次のようになる.

$$\Phi_{FF}(\omega) = B \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle B^T.$$

すなわち, 雑音源スペクトル密度は白色でなければならない.

$$\Phi_{FF}(\omega) = 2D$$

とおくと結局,

$$2D = B \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle B^T. \quad (4.123)$$

が得られる. これを, Einstein の関係式と呼ぶ. (4.123) 式と (4.90) 式の右辺同士は等しいから, マルコフ過程では,

$$2D = A \quad (4.124)$$

であることがわかる. すなわち, 白色雑音源スペクトル密度の大きさ $2D$ は, Schottky の公式 (4.93) または (4.94) 式で定めうることがわかった*. 以上, 本章でのべた Langevin 法の骨組みをまとめると, Fig. 5 (p.48) のようになる.

ところで, 一般に “遅れ” の効果のある Langevin 方程式 (4.113) に対する雑音源の表式 (4.122) の導出には, 因果律 (4.114) を用いている点に注意が必要であ

* 以下の節では, したがって, 白色雑音源の大きさを A で表わすこともある.

る。遅発中性子の寄与を“遅れ”の効果とみなし、中性子数のゆらぎについて (4.113) に対応する Langevin 方程式を設定すると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta N(t) = - \int d\tau \left[\alpha \delta(\tau) - \lambda \frac{\beta k}{l} e^{-\lambda(t-\tau)} \right] \delta N(t) + F(t). \quad (4.113')$$

この場合、

$$Br(i\omega) = \frac{1}{l} \left[1 - k + \beta k \frac{i\omega}{i\omega + \lambda} \right]$$

$$Gr(i\omega) = l \left[i\omega \left(l + \frac{\beta k}{i\omega + \lambda} \right) + 1 - k \right]^{-1}. \quad (4.118')$$

したがって、(4.122) 式から

$$\Phi_{FF}(\omega) = 2 \langle \delta N \delta N \rangle \times \text{Real part of } Br(i\omega)$$

$$= 2 \langle \delta N \delta N \rangle \frac{1}{l} \left[1 - k + \beta k \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \right] \quad (4.122')$$

が得られる。この結果を、(4.121) 式に代入すると、中性子数のゆらぎのスペクトル密度として次の結果が得られる。

$$\Phi(\omega) = \left| \frac{l}{i\omega \left(l + \frac{\beta k}{i\omega + \lambda} \right) + 1 - k} \right|^2$$

$$\times 2 \langle \delta N \delta N \rangle \frac{1}{l} \left[1 - \beta + \beta k \frac{\omega^2}{\omega^2 + \lambda^2} \right]. \quad (4.121')$$

一方、中性子数の分散値は、(4.90) 式の行列方程式を解けば求まる。この場合、 B としては (4.34) 式、 A としては、(4.44)、(4.45) を用いる。結果は次のようになる。

$$\langle \delta N \delta N \rangle = N_{is} + N_{is} \frac{(1-k+\lambda l)}{2(1-k)}$$

$$\times \frac{[\nu_0(\nu_0-1) + 2\langle \nu_0 \nu_1 \rangle + \langle \nu_1(\nu_1-1) \rangle] \frac{l}{l_1}}{(1-k+\beta k+\lambda l)}$$

$$- N_{is} \frac{2\langle \nu_0 \nu_1 \rangle + \langle \nu_1(\nu_1-1) \rangle \frac{l}{l_1}}{2(1-k+\beta k+\lambda l)}$$

これを、(4.121') に代入し、結果をすでに求めた (4.51) と見比べてみよう。等しいものではないことがわかる。すなわち、遅発中性子を遅れの効果とみなし、(4.113') のような Langevin 方程式を設定しても、中性子数のゆらぎに対する正しい表式は得られない。その原因は、因果律 (4.114) が成りたないことにあると思われる。したがって、(4.117) 式が正しくない。

先行核から遅れて生まれてくる寄与を考慮はするが、中性子数のみで炉を記述すると、マルコフ性が失なわれる。因果律の成立しない非マルコフ系への Langevin 法の形式的な適用は、以上の例からもわかるように誤まった結果を導くことがある。反応度フィードバックをとり入れた高出力炉雑音の議論を行なう際、この点に注意が必要であろう。

4.8 検出器出力のゆらぎとの関連

前節までの議論は、中性子・先行核場のゆらぎを対象にしてきた。炉雑音に関する情報は、何らかの観測を行なわない限り、われわれの手に入らない。検出器の線型性が保証されていれば、検出器出力の期待値 $\langle O(t) \rangle$ と中性子数の期待値 $f_1^{(n)}(t)$ とは、比例関係にあると見なすことができよう。しかし、検出器出力のゆらぎ $\delta O(t) (= O(t) - \langle O(t) \rangle)$ の相関関数 $\langle \delta O(t) \delta O(u) \rangle$ と中性子数のゆらぎの相関関数 $\langle \delta f_1^{(n)}(t) \delta f_1^{(n)}(u) \rangle$ との比例関係は、第3章8頁にのべた4つの理由により成立しない。

原子炉は、定常に運転されているものとしよう。炉内のあるところに検出器を挿入したとする。観測時間 T を固定して、何回か反復して観測をしたとする。 k 番目の観測では、 m 回検出反応があって、そのうち i 番目の検出反応は、時刻 t_i で起こったとしよう。この観測における検出反応の記録は、次のようなパルス時系列になる。

$${}^k C(t) = \sum_{i=1}^m \delta(t-t_i). \quad (4.125)$$

検出反応1回当たりの検出量 (電気量) を θ とおくと、上式で与えた ${}^k C(t)$ に対応した検出器出力の記録は、次のようになる。

$${}^k O(t) = \sum_{i=1}^m \theta_i h(t-t_i). \quad (4.126)$$

検出器応答関数 $h(t)$ は、検出時点には無関係なある一定の関数と考えよう。また、次の性質をもっているものとしよう。

i) 因果律: $h(t) = 0$; $t < 0$ の時。

ii) 規格化条件: $\int_0^\infty dt h(t) = 1$.

すなわち、 $h(t)dt$ は、時刻 $t=0$ に検出反応があった時、時刻 t と $t+dt$ との間に放出される検出量の割合を表す。

この場合、 ${}^k O(t)$ は、時点 t_i の大きさが θ_i であるパルス時系列

$${}^k \Theta(t) = \sum_{i=1}^m \theta_i \delta(t-t_i) \quad (4.127)$$

を、 $h(t)$ という応答関数をもつ線型系に入力した時の出力とみなすことができる。すなわち、

$${}^k O(t) = \int_0^\infty d\tau h(\tau) {}^k \Theta(t-\tau). \quad (4.128)$$

時系列 $\Theta(t)$ で、 θ をランダム変数ではなく、大きさが1に等しい定数と選べば、 $\Theta(t)$ は、 $C(t)$ に一致する。

始めに、検出反応率 $C(t)$ のゆらぎと検出器出力 $O(t)$ のゆらぎとの関連についてのべよう。ついで、Langevin 法により $C(t)$ のゆらぎを定式化しよう。

4.8.1 検出反応率と検出器出力との関連

まず、検出器出力の期待値 $\langle O(t) \rangle$ は、(4.128) 式を集合平均することによって得られる。定常系では、 $\langle {}^k\theta(t) \rangle$ が時間によらない事実および応答関数の規格化条件とを用いて、次の結果が得られる。

$$\langle O(t) \rangle = \langle \theta(t) \rangle = \text{Const.}$$

検出量 θ の確率分布は、検出時刻に依存しないと考えよう。この時、

$$\langle \theta(t) \rangle = C_1 < \theta \rangle. \quad (4.129)$$

ここで、 C_1 は単位時間当りの検出反応数の期待値で、次のように書ける。

$$C_1 = \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} c_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (4.130)$$

積分は、全相空間にわたって行なう。 $c_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ は、単位時間当りの検出反応数の期待値の分布で、次式で与えられる。

$$c_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_1^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (4.131)$$

$f_1^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ は、中性子数の期待値の分布関数である。 $\Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ は、検出器の中性子吸収断面積である。これは検出器のしめるある一定の体積領域 V_{sd} 、ある一定の中性子速度領域 V_{va} 以外ではゼロである。

次に、検出器出力の相関関数を求めよう。(4.128) を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} {}^k O(t) {}^k O(u) &= \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta h(\xi) h(\eta) \\ &\quad \times {}^k \theta(t-\xi) {}^k \theta(u-\eta). \end{aligned}$$

集合平均をとると、

$$\gamma_{oo}(t, u) = \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta h(\xi) h(\eta) \gamma_{\theta\theta}(t-\xi, u-\eta)$$

となる*。定常系では、相関関数 $\gamma(t, u)$ は、時間差 $(t-u)$ のみの関数である。したがって、

$$\gamma_{oo}(t-u) = \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta h(\xi) h(\eta) \gamma_{\theta\theta}(t-\xi-u+\eta). \quad (4.132)$$

スペクトル密度を求めよう。

$$\begin{aligned} \varphi_{oo}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d(t-u) \gamma_{oo}(t-u) \exp[-i\omega(t-u)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d(t-u) \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta h(\xi) h(\eta) \times \\ &\quad \gamma_{\theta\theta}(t-\xi-u+\eta) \exp[-i\omega(t-u)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d(t-u) \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta h(\xi) e^{-i\omega\xi} h(\eta) e^{i\omega\eta} \\ &\quad \times \gamma_{\theta\theta}(t-\xi-u+\eta) \exp[-i\omega(t-\xi-u+\eta)] \\ &= |h[i\omega]|^2 \varphi_{\theta\theta}(\omega). \end{aligned} \quad (4.133)$$

ただし、 $h[s]$ は、 $h(t)$ のラプラス変換、すなわち、

$$h[s] = \int_0^\infty dt h(t) e^{-st}. \quad (4.134)$$

したがって、検出器出力 $O(t)$ のスペクトル密度 $\varphi_{oo}(\omega)$ は、パルス時系列 $\theta(t)$ のスペクトル密度 $\varphi_{\theta\theta}(\omega)$ と次の関係にあることがわかる。

$$\varphi_{oo}(\omega) = |h[i\omega]|^2 \varphi_{\theta\theta}(\omega). \quad (4.135)$$

もし、出力応答関数 $h(t)$ が、 t_0 程度のひろがりを持っているとすれば、 $\omega_0 \lesssim 1/t_0$ である周波数に対して

$$|h[i\omega]|^2 \approx 1.$$

したがって、

$$\varphi_{oo}(\omega) \approx \varphi_{\theta\theta}(\omega). \quad (4.136)$$

とみなすことができる。 ω_0 は、ふつうの補償型イオン検出器 (CIC) で 10^4 rad/sec 程度である。

パルス時系列 ${}^k\theta(t)$ の相関関数 $\langle \theta(t+\tau)\theta(t) \rangle$ を求めよう*。ランダム変数 $dM(t)$ を導入しよう。これは、時刻 t のまわりの微小時間 dt に存在するパルス数を表わす。各パルスの大きさ θ は、時刻 t には関係しない一定の確率分布に従って与えられるとしよう。 dt が十分小さければこの間に1箇パルスが存在する確率は dt に比例すると考えられる。これを、 $P_c(t)dt$ とおこう。これに対して、2箇以上パルスが存在する確率は、 dt の2次以上の無限小になり1箇存在する確率に比し無視できよう。したがって、 $P_c(t)dt$ は、 dt 時間に存在するパルス数の期待値 $C_1 dt$ と等しくなり、 $dM(t)$ の期待値は、 $P_c(t)dt$ とパルスの大きさ θ の期待値との積に等しい。すなわち、

$$\langle dM(t) \rangle = \langle \theta \rangle C_1 dt + O(dt)^2.$$

次に、積 $dM(t+\tau)dM(t)$ の期待値を考えよう。 $\tau=0$ の時には、 $\langle [dM(t)]^2 \rangle$ は、1箇パルスの存在する確率 $C_1 dt$ と θ^2 の期待値の積に等しい。すなわち、

$$\langle [dM(t)]^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle C_1 dt + O(dt)^2. \quad (4.137)$$

一方、 $\tau \neq 0$ の時には、時刻 $t+\tau$ と時刻 t とのまわりの微小時間 $d\tau$ および dt にそれぞれ存在するパルス数に対する結合確率を導入する必要がある。 $d\tau$ および dt が十分小さければ、それぞれに1箇ずつパルスの存在する結合確率は、 $d\tau dt$ のオーダーに比例すると考えられよう。これを、 $P_{2c}(t+\tau, t)d\tau dt$ とおく。これに対して、 $d\tau$ に1箇以上、 dt に1箇以上、 $d\tau$ と dt で合わせて3箇以上のパルスが存在する確率は、 $d\tau dt$ に比べてより高次の無限小になるであろう。したがって、 $\langle dM(t+\tau)dM(t) \rangle$ は、 $P_{2c}(t+\tau, t)d\tau dt$ と相異なる2つの時刻でのパルスの大きさの積の期待値とで表わされる。パルスの大きさの確率分布は、相異なる時刻ではお互いに独立で、しかも同一の法則で与えられるとすると、 $\tau \neq 0$ の時には次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle dM(t+\tau)dM(t) \rangle &= \langle \theta \rangle^2 P_{2c}(t+\tau, t) d\tau dt \\ &\quad + O(d\tau^2 dt) + O(d\tau dt^2). \end{aligned} \quad (4.138)$$

(4.137) 式と上式とを合わせると結局、

* 検出器出力 $O(t)$ の相関関数 $\langle O(t)O(u) \rangle$ を、 $\gamma_{oo}(t, u)$ と表わす。これに対して、平均値のまわりのゆらぎ $\delta O(t)$ の相関関数は、 $\Gamma_{oo}(t, u)$ で表わす。対応するスペクトル密度は、それぞれ、 φ_{oo} 、 Φ_{oo} と表わす。

* Langevin 法を用いて処理することもできる。(cf. 4.10)

$$\begin{aligned} \langle dM(t+\tau)dM(t) \rangle &= \langle \theta^2 \rangle C_1 \delta(\tau) d\tau dt \\ &+ \langle \theta \rangle^2 P_{2c}(t+\tau, t) d\tau dt \\ &+ \text{higher order terms.} \end{aligned}$$

ここで、 $\delta(\tau)$ は Dirac のデルタ関数である。したがって、パルス時系列 $\theta(t)$ の相関関数は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta\theta}(\tau) &= \langle \theta(t+\tau)\theta(t) \rangle \\ &= \langle \theta^2 \rangle C_1 \delta(\tau) + \langle \theta \rangle^2 P_{2c}(\tau). \end{aligned} \quad (4.139)$$

定常系では、 $P_{2c}(t+\tau, t)$ は、時間差 τ のみの関数である。これを、 $P_{2c}(\tau)$ とおいた。すなわち、

$$P_{2c}(t+\tau, t) = P_{2c}(\tau). \quad (4.140)$$

(4.139) 式で、 $\langle \theta^2 \rangle = \langle \theta \rangle^2 = 1$ とおくと、検出反応率の相関関数が得られる。すなわち、

$$\gamma_{cc}(\tau) = C_1 \delta(\tau) + P_{2c}(\tau). \quad (4.141)$$

ところで、 τ だけ離れてパルス対の存在する結合確率は、お互いに相関のあるパルス対の存在する確率 $P_{cor}(\tau)$ と無相関なパルス対の存在する確率 $P_{unc}(\tau)$ とにわけることができる。すなわち、

$$P_{2c}(\tau) = P_{cor}(\tau) + P_{unc}(\tau). \quad (4.142)$$

後者は、次のようにおける。

$$\begin{aligned} P_{unc}(\tau) &= P_c(t+\tau) P_c(t) \\ &= C_1^2. \end{aligned} \quad (4.143)$$

(4.139)、(4.142) および (4.143) 式を用いて、期待値 $\langle \theta(t) \rangle$ のまわりのゆらぎ $\delta\theta(t) = \theta(t) - \langle \theta(t) \rangle$ の相関関数が、次のように表わされることがわかる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}(\tau) &\equiv \langle \delta\theta(t+\tau)\delta\theta(t) \rangle \\ &= \gamma_{\theta\theta}(\tau) - \langle \theta(t) \rangle^2 \\ &= C_1 \langle \theta^2 \rangle \delta(\tau) + \langle \theta \rangle^2 P_{cor}(\tau). \end{aligned} \quad (4.144)$$

同様に、期待値 C_1 のまわりの検出反応率のゆらぎは、次のようになる。

$$\Gamma_{cc}(\tau) = C_1 \delta(\tau) + P_{cor}(\tau). \quad (4.145)$$

スペクトル密度は、それぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta\theta}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \Gamma_{\theta\theta}(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= C_1 \langle \theta^2 \rangle + \langle \theta \rangle^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau P_{cor}(\tau) e^{-i\omega\tau}, \end{aligned} \quad (4.146)$$

$$\Phi_{cc}(\omega) = C_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau P_{cor}(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (4.147)$$

検出器出力 $O(t)$ の期待値 $\langle O(t) \rangle$ のまわりのゆらぎ $\delta O(t)$ のスペクトル密度 $\Phi_{OO}(\omega)$ と $\Phi_{\theta\theta}(\omega)$ とは、(4.135) 式で与えたのと同様な次の関係式で結ばれる。すなわち、

$$\Phi_{OO}(\omega) = |h[i\omega]|^2 \Phi_{\theta\theta}(\omega). \quad (4.148)$$

(4.146) 式右辺第 1 項は、周波数によらない一定の寄与を示し、バック・グラウンド雑音と呼ばれることもある。これに対し、右辺第 2 項は、増倍系における中性子の動的ふるまいに関する情報を担う信号である。

次に、2つの検出器 a, b を考えよう。それぞれの検出器出力 $O(t)$ 、検出器応答関数 $h(t)$ 、ランダムな高さを持つパルス時系列 $\theta(t)$ 、検出反応率時系列 $C(t)$ をそれぞれ左肩上に添字 a, b をつけて区別しよう。検出器

出力の相互相関関数 ${}^{ab}\gamma_{OO}(\tau)$ とパルス時系列の相関関数の間には、(4.132) 式と同様な関係が成り立つ。すなわち、

$${}^{ab}\gamma_{OO}(\tau) = \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta {}^a h(\xi) {}^b h(\eta) {}^{ab}\gamma_{\theta\theta}(\tau) \quad (4.149)$$

したがって、相互スペクトル密度は、次の関係で結ばれる。

$${}^{ab}\Phi_{OO}(\omega) = {}^a h[i\omega] {}^b h[-i\omega] {}^{ab}\Phi_{\theta\theta}(\omega). \quad (4.150)$$

相異なる 2つのパルス時系列 ${}^a\theta(t+\tau)$ と ${}^b\theta(t)$ との間の相関関数を問題にする時には、自己相関関数を求めた時のような $\tau=0$ のところでの特異性はない。時刻 $t+\tau$ のまわりの微小時間 $d\tau$ に検出器 a のパルス時系列に 1 箇のパルスが存在し、かつ、時刻 t のまわりの微小時間 dt に、検出器 b のパルス時系列に 1 箇パルスが存在する結合確率 ${}^{ab}P_{2c}(t+\tau, t) d\tau dt$ を導入しよう。この確率は、定常系では、時間差 τ のみの関数である。これを、 ${}^{ab}P_{2c}(\tau) d\tau dt$ と書き改めよう。相互相関関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\gamma_{\theta\theta}(\tau) &\equiv \langle {}^a\theta(t+\tau) {}^b\theta(t) \rangle \\ &= \langle {}^a\theta \rangle \langle {}^b\theta \rangle + {}^{ab}P_{2c}(\tau), \end{aligned} \quad (4.151)$$

検出反応率の相互相関関数は、 $\langle {}^a\theta \rangle \langle {}^b\theta \rangle = 1$ として得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} {}^{ab}\gamma_{cc}(\tau) &\equiv \langle {}^a C(t+\tau) {}^b C(t) \rangle \\ &= {}^{ab}P_{2c}(\tau). \end{aligned} \quad (4.152)$$

確率 ${}^{ab}P_{2c}(\tau)$ を、相関のあるパルス対の存在する確率 ${}^{ab}P_{cor}(\tau)$ と無相関パルス対の存在する確率 ${}^{ab}P_{unc}(\tau)$ にわけると、

$${}^{ab}P_{2c}(\tau) = {}^{ab}P_{cor}(\tau) + {}^{ab}P_{unc}(\tau). \quad (4.153)$$

${}^{ab}P_{unc}$ は、次のように表わすことができる。

$${}^{ab}P_{unc} = {}^a C_1 {}^b C_1. \quad (4.154)$$

(4.153) および (4.154) 式を用いると (4.151)、(4.152) 式に対応して、期待値のまわりのゆらぎの相関関数が得られる。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Gamma_{\theta\theta}(\tau) &\equiv \langle \delta {}^a\theta(t+\tau) \delta {}^b\theta(t) \rangle \\ &= \langle {}^a\theta \rangle \langle {}^b\theta \rangle + {}^{ab}P_{cor}(\tau), \end{aligned} \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Gamma_{cc}(\tau) &\equiv \langle \delta {}^a C(t+\tau) \delta {}^b C(t) \rangle \\ &= {}^{ab}P_{cor}(\tau). \end{aligned} \quad (4.156)$$

それぞれのスペクトル密度は、したがって次のように求まる。

$${}^{ab}\Phi_{\theta\theta}(\omega) = \langle {}^a\theta \rangle \langle {}^b\theta \rangle + {}^{ab}\Phi_{cc}(\omega), \quad (4.157)$$

$${}^{ab}\Phi_{cc}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau {}^{ab}P_{cor}(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (4.158)$$

また、検出器出力の期待値のまわりのゆらぎに対するスペクトル密度 ${}^{ab}\Phi_{OO}(\omega)$ は、 ${}^{ab}\Phi_{\theta\theta}(\omega)$ と (4.150) 式と同様な関係で結ばれている。すなわち

$${}^{ab}\Phi_{OO}(\omega) = {}^a h[i\omega] {}^b h[-i\omega] {}^{ab}\Phi_{\theta\theta}(\omega). \quad (4.159)$$

(4.157) 式を (4.146) 式と比較してみればわかるように、相互スペクトル密度は、自己スペクトル密度において存在したような白色なバック・グラウンド雑音の寄与を含まない。したがって、信号対雑音比 (S/N ratio) を改善することができ、実用上の利点は大きい。このことは、

NOMURA¹⁰⁷⁾ および SEIFRITZ *et al.*^{136, 137)} によりそれぞれ独立に指摘され実験的にも確かめられている。

以上、検出器出力 $O(t)$ と検出反応率 (detection rate) $C(t)$ との相関関数の関連についてのべてきた。次に、観測時間 T の間にわたって得られる全観測量を $\Theta(T)$ とおこう。すなわち、

$$\Theta(T) = \sum_{i=1}^m \theta_i y(t-t_i). \quad (4.160)$$

ここで、 $y(t)$ は、階段関数を表わす。すなわち、

$$y(t) = 1 \quad ; \quad t \geq 0 \text{ の時,} \\ = 0 \quad ; \quad t < 0 \text{ の時.} \quad (4.161)$$

MATTHES⁹²⁾ は、 $\Theta(T)$ の分散は、定常系では、次のように表わされることを示した*。

$$\langle \Theta^2(T) \rangle - \langle \Theta(T) \rangle^2 \\ = \langle \theta^2 \rangle C_1 T \\ + 2 \langle \theta \rangle^2 \int_0^T d\tau (T-\tau) P_{\text{cor}}(\tau). \quad (4.162)$$

一方、2つの検出器 a, b により、それぞれ、 T 時間観測した時得られる観測量の間の共分散は、次のようになる。

$$\langle {}^a\Theta(T) {}^b\Theta(T) \rangle - \langle {}^a\Theta(T) \rangle \langle {}^b\Theta(T) \rangle \\ = 2 \langle {}^a\theta \rangle \langle {}^b\theta \rangle \int_0^T d\tau (T-\tau) {}^{ab}P_{\text{cor}}(\tau). \quad (4.163)$$

さて、残された課題は、お互いに相関のあるパルス対が時間差 τ だけ離れて存在する確率 $P_{\text{cor}}(\tau)$ を定めることである。互いに相関のあるパルス対は、互いに相関のある中性子対を検出した時得られる。相関のある中性子対とは、同一の分枝反応で生じた中性子またはその子孫中性子の対である。いいかえれば、中性子場のゆらぎの相関関数における“Binary”雑音源からの寄与に、 $P_{\text{cor}}(\tau)$ は比例する。このほかに、核分裂計数管や陽子反跳計数管 (Proton Recoil Counter) のように、検出反応の際、2次中性子が放出されて、この中性子または子孫中性子が、 τ 時間のちに検出される場合には、始めの検出パルスと後の検出パルスとは、相関を持ち、 $P_{\text{cor}}(\tau)$ へ寄与する。これらの事実を、Langevin 法により定式化しよう。

4.8.2 検出反応率のゆらぎ；一点炉モデルの場合

始めに、一点炉モデルで考えよう。遅発中性子も無視する。検出器 a が炉に挿入されているとし、検出反応に対する中性子寿命を ${}^a l_d$ としよう。核分裂当りの検出数、すなわち、検出器効率を ${}^a \epsilon$ とおくと、 ${}^a l_d$ は、次のように表わされる。

$${}^a l_d = ({}^a \epsilon v \Sigma_f)^{-1}. \quad (4.164)$$

この検出器により時刻 t と $t+dt$ の間におこる中性子検出反応数を ${}^a C(t)dt$ とおくと、これは、

$${}^a C(t)dt = N(t) {}^a l_d dt. \quad (4.165)$$

と書ける。

検出反応率の期待値のまわりのゆらぎを、 $\delta {}^a C(t)$ とおき、次の Langevin 方程式を設定しよう。

$$\delta {}^a C(t) = \delta N(t) {}^a l_d + {}^a F(t). \quad (4.166)$$

ただし、

$$\delta {}^a C(t) = {}^a C(t) - \langle {}^a C \rangle. \quad (4.167)$$

Langevin 外力 ${}^a F(t)$ は、次の性質をもっているとしよう。

$$a) \quad \langle {}^a F(t) \rangle = 0, \quad (4.168)$$

$$b) \quad \langle {}^a F(t) {}^a F(u) \rangle = {}^{aa} A \delta(t-u). \quad (4.169)$$

さて、ゆらぎの相関関数は、(4.166) 式から次のように表わされる。

$${}^{aa} \Gamma(t, u) \equiv \langle \delta {}^a C(t) \delta {}^a C(u) \rangle \\ = \frac{1}{{}^a l_d^2} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle \\ + \frac{1}{{}^a l_d} \langle \delta N(t) {}^a F(u) \rangle \\ + \frac{1}{{}^a l_d} \langle {}^a F(t) \delta N(u) \rangle \\ + {}^{aa} A \delta(t-u). \quad (4.170)$$

いま、 $t > u$ としよう。上式右辺第3項は、因果律によってゼロである。第2項に、中性子数のゆらぎに対する Langevin 方程式 (4.4) の解

$$\delta N(t) = \int_0^{\infty} d\xi e^{-\alpha(t-\xi)} F(\xi). \quad (4.171)$$

を代入する。結果は、次のようになる。

$$\frac{1}{{}^a l_d} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\alpha(t-\xi)} \langle F(\xi) {}^a F(u) \rangle. \quad (4.172)$$

中性子数のゆらぎに対する Langevin 外力 $F(\xi)$ と検出反応率のゆらぎの外力 ${}^a F(u)$ との間の相関関数は、白色と仮定しよう。すなわち、

$$b') \quad \langle F(\xi) {}^a F(u) \rangle = {}^{na} A \delta(\xi-u). \quad (4.173)$$

雑音源スペクトル密度の大きさ ${}^{aa} A$, ${}^{na} A$ を Schottky の公式により定める。簡単のために検出器は、たとえば、BF₃ 計数管のような吸収型のものとしよう。すなわち、検出反応の際、二次中性子は放出されないものとする。

TABLE 5 を用いると次の結果が得られる。

$${}^{aa} A = \langle N \rangle / {}^a l_d = \langle {}^a C \rangle, \quad (4.174)$$

$${}^{na} A = -\langle N \rangle / {}^a l_d. \quad (4.175)$$

これらを用いると、(4.170) 式は次のようになる。

$${}^{aa} \Gamma(t, u) = \frac{1}{{}^a l_d^2} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle \\ - \frac{1}{{}^a l_d^2} \langle N \rangle e^{-\alpha(t-u)} \\ + \langle {}^a C \rangle \delta(t-u). \quad (4.176)$$

これから、検出反応率のゆらぎの相関関数は、中性子数のゆらぎ

$$\langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle = \frac{Q}{2\alpha} e^{-\alpha(t-u)} + \langle N \rangle e^{-\alpha(t-u)}. \quad (4.27)$$

に比例するのではないことがわかる。上式を (4.176) 式に代入する。直接相関項 $\langle N \rangle e^{-\alpha(t-u)}$ は、(4.176) 式

* 証明は、(7.13)式 脚注にある。

TABLE 5 Contribution of detection processes to the noise-equivalent source (One-point model)

Nature of process	Mean rate of occurrence	Number of detection (detector-a)	Net number of neutrons produced	Number of detection (detector-b)
Capture of a neutron by detector-a	$N_{1s}/^a l_d$	1	-1	0
Capture of a neutron by detector-b	$N_{1s}/^b l_d$	0	-1	1

右辺第2項と打ち消し合って、結局

$${}^{aa}\Gamma(t, u) = \frac{1}{^a l_d^2 2\alpha} Q e^{-\alpha(t-u)} + \langle {}^a C \rangle \delta(t-u) \quad (4.177)$$

が得られる。すなわち、検出反応率のゆらぎの相関関数は、中性子場におけるゆらぎのうち、バイナリ雑音源 Q に比例した項に、検出過程の不規則性由来した白色な寄与が加わる。中性子場の直接相関項の寄与は、検出の際、1箇の中性子が消滅し、同時に、1箇の検出パルスが生ずるという素過程からの寄与と打ち消し合う。

2つの相異なる検出器出力のゆらぎの相互相関には、検出過程の不規則性由来した白色な寄与も表われず、バイナリ雑音源に比例した項だけが残る。

検出器 b の検出反応率に対する Langevin 方程式を (4.166) 式にならって、次のようにおこう。

$$\delta {}^b C(t) = \delta N(t)/^b l_d + {}^b F(t). \quad (4.178)$$

Langevin 外力 ${}^b F(t)$ は次の性質をもつものとする。

$$a) \quad \langle {}^b F(t) \rangle = 0, \quad (4.179)$$

$$b) \quad \langle {}^b F(t) {}^b F(u) \rangle = {}^{bb} A \delta(t-u). \quad (4.180)$$

また、2つの Langevin 外力、 ${}^a F(t)$ と ${}^b F(u)$ の相関関数も、やはり白色と考える。すなわち

$$\langle {}^a F(t) {}^b F(u) \rangle = {}^{ab} A \delta(t-u). \quad (4.181)$$

TABLE 5 に Schottky の公式を用いると次のことがわかる。

$${}^{nb} A = -\langle N \rangle / ^b l_d, \quad (4.182)$$

また

$${}^{ab} A = 0. \quad (4.183)$$

(4.166) 式と (4.178) 式から、相互相関関数を求めよう。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Gamma(t, u) &\equiv \langle \delta {}^a C(t) \delta {}^b C(u) \rangle \\ &= \frac{1}{^a l_d {}^b l_d} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{^a l_d} \langle \delta N(t) {}^b F(u) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{^b l_d} \langle {}^a F(t) \delta N(u) \rangle \\ &\quad + {}^{ab} A \delta(t-u). \end{aligned} \quad (4.184)$$

上式右辺、最後の項は (4.183) 式によりゼロ。また、 $t > u$ とすると、上式右辺第3項は、因果律によりゼロとなる。第2項に (4.171) 式を代入し、(4.182) を用いて整理する。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Gamma(t, u) &= \frac{1}{^a l_d {}^b l_d} \langle \delta N(t) \delta N(u) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{^a l_d {}^b l_d} \langle N \rangle e^{-\alpha(t-u)}. \end{aligned} \quad (4.185)$$

さらに、(4.27) 式を代入すると、相互相関関数が次のように求まる。

$${}^{ab}\Gamma(t, u) = \frac{1}{^a l_d {}^b l_d 2\alpha} Q e^{-\alpha(t-u)}. \quad (4.186)$$

すなわち、自己相関関数に表われた検出率に比例した白色な寄与は、相互相関関数には表われない。この事実は特に、高周波側 ($\approx \beta/l$) の雑音スペクトル密度を解析する際、有利なことである (cf. Fig. 4 in p. 36).

以上の結果は、遅発中性子を考慮した場合へも容易に拡張できる。中性子場のゆらぎの相関関数として、(4.48) 式を用い、さらに核分裂時に放出される2次中性子、先行核数のモーメントとして、(4.52) の近似を用いると、検出反応率のゆらぎのスペクトル密度として、結局、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi_{cc}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) {}^{aa}\Gamma(t, u) e^{-i\omega(t-u)} \\ &= \varepsilon R_{1f} \left[\varepsilon \frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu^2 \rangle} k^2 |H(i\omega)|^2 + 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.187)$$

ここで、 R_{1f} は、単位時間当りの核分裂数の期待値、すなわち、

$$R_{1f} = \nu \Sigma_f \langle N \rangle. \quad (4.188)$$

また、 k は、増倍率、すなわち

$$k = \langle \nu \rangle \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}. \quad (4.189)$$

さらに、 $H(s)$ は、零出力炉の伝達関数で遅発中性子が6組の場合、次のようになる。

$$H[s] = \frac{1 - \sum_{m=1}^6 \frac{\beta_m s}{s + \lambda_m}}{s \left(l + \sum_{m=1}^6 \frac{\beta_m k}{s + \lambda_m} \right) + 1 - k}. \quad (4.190)$$

一方、2つの検出器の検出反応率のゆらぎについて、相互スペクトル密度を求めると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Phi_{cc}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) {}^{ab}\Gamma(t, u) e^{-i\omega(t-u)} \\ &= {}^{ab} \varepsilon R_{1f} \frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k^2 |H(i\omega)|^2. \end{aligned} \quad (4.191)$$

すなわち、相互スペクトル密度は、伝達関数のゲインの2乗に比例し*、自己スペクトル密度に表われる白色な寄与はなくなる。Fig. 4 に、遅発中性子を1組とおいた時のスペクトル密度の周波数依存性を示す。

以上、一点炉モデルに用いた方法を、空間・速度依存のある場合、また検出器として核分裂計数管のように検出反応に伴い、2次中性子を放出する場合へ拡張しよう。

* ただし、(4.52) 式で表わされる仮定があることに注意する必要がある。

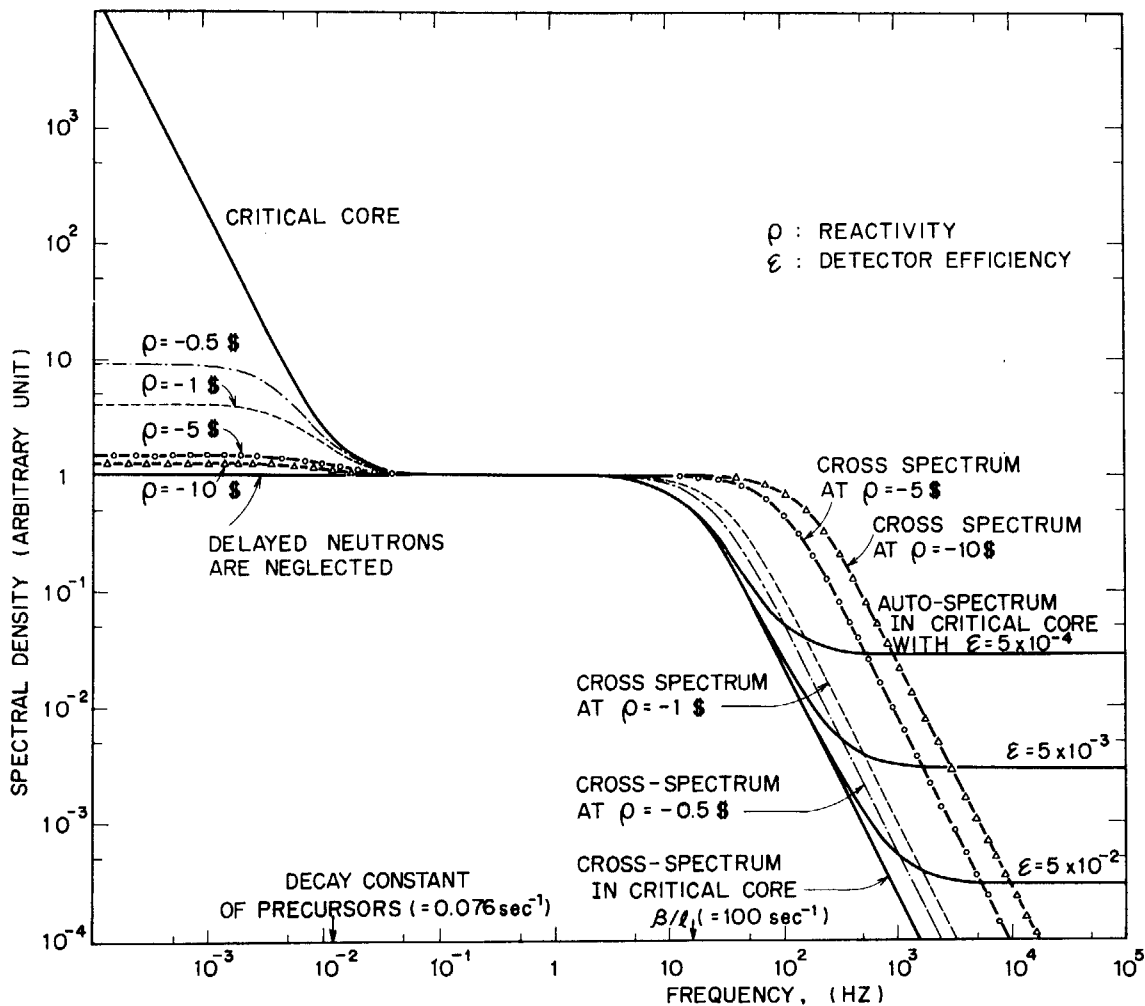


Fig. 4 Noise spectra in one-point zero-power reactors

4.8.3 検出反応率のゆらぎ；一般の場合

定常炉内のあるところに検出器 a を挿入したとしよう。時刻 t における炉の状態は、相空間が連続な場合でも、離散的な場合でも密度ベクトル $f(t)$ で記述される。離散的な相空間の場合には、要素 $f^{(i)}(t)$ は、 i 番目のセルに存在する中性子数を表わす。連続相空間の場合には要素 $f(\mu, t)$ は、点 μ のまわりの単位体積中に存在する中性子数を表わす。一方、検出器 a は、検出反応に対する中性子寿命ベクトル ${}^a l$ で特徴づけられる。 $1/{}^a l_i$ は i 番目のセルにおける中性子に対する検出器の反応断面積 $\Sigma_{da}^{(i)}$ とそのセルの中性子の速さ v_i との積である。 Σ_a は、遅発中性子先行核に対してはゼロ。また、検出器が相空間に占めるある一定の領域を除いては、ゼロである。

検出器 a による i 番目のセルで、時刻 t と $t+dt$ との間におこる中性子検出反応数を ${}^a c^{(i)}(t)$ とおこう。 ${}^a c^{(i)}(t)$ は、次のように書ける。

$${}^a c^{(i)}(t) = f^{(i)}(t) / {}^a l_i \tag{4.192}$$

相空間が連続な場合は、上式は、次のように書ける。

$${}^a c(\mu, t) = f(\mu, t) / {}^a l(\mu) \tag{4.193}$$

検出器 a による全体の検出反応率 (detection rate) は、それぞれ (4.192), (4.193) 式を相空間全体について加え合わせれば得られる。

$${}^a C(t) = \sum_i {}^a c_i(t) \tag{4.194}$$

or

$$= \int d\mu {}^a c(\mu, t) \tag{4.194'}$$

検出反応率の期待値は、各セルにおける中性子の検出反応率の期待値の和として与えられる。すなわち

$$\langle {}^a C \rangle = \sum_i \langle {}^a c_i \rangle \tag{4.195}$$

or

$$= \int d\mu \langle {}^a c(\mu) \rangle \tag{4.195'}$$

セル i における検出反応率の期待値のまわりのゆらぎを $\delta c_i(t)$ とおこう。

$$\delta c_i(t) = c_i(t) - \langle c_i \rangle \tag{4.196}$$

δc_i と δc_j との間の相関関数を次のように定義する。

$${}^{ab} \Gamma_{ij}(t, u) = \langle \delta {}^a c_i(t) \delta {}^b c_j(u) \rangle \tag{4.197}$$

検出器 a の全反応率の期待値のまわりのゆらぎと検出器 b の全反応率の期待値のまわりのゆらぎとの間の相互相関関数 ${}^{ab} \Gamma(t, u)$ は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Gamma(t, u) &= \langle \delta^a C(t) \delta^a C(u) \rangle \\ &= \langle [\sum_i \delta^a c_i(t)] [\sum_j \delta^b c_j(u)] \rangle \\ &= \sum_i \sum_j {}^{ab}\Gamma_{ij}(t, u). \end{aligned} \quad (4.198)$$

上式で, $a=b$ とおけば, 検出器 a による全検出反応率の期待値のまわりのゆらぎに対する自己相関関数が得られる. 相空間が連続な場合も同様に,

$${}^{ab}\Gamma(\mu, t, \mu', u) = \langle \delta^a c(\mu, t) \delta^b c(\mu', u) \rangle. \quad (4.197')$$

として, 2 相空間点間の相関関数を定義すると, 全検出反応率の期待値のまわりのゆらぎに対する相関関数は, 次のように求まる.

$${}^{ab}\Gamma(t, u) = \int d\mu \int d\mu' {}^{ab}\Gamma(\mu, t, \mu', u). \quad (4.198')$$

したがって, 問題は ${}^{ab}\Gamma_{ij}$ または ${}^{ab}\Gamma(\mu, t, \mu', u)$ を求めることに帰着する. Langevin 法によりこれを求めよう. 始めに, M 点炉モデルを考えよう. (4.193) 式から次のような Langevin 方程式を設定する.

$$\delta^a c_i(t) = \delta f^{(i)}(t) / {}^a l_i + {}^a F^{(i)}(t). \quad (4.199)$$

すなわち, 検出反応率のゆらぎは, 中性子数のゆらぎに比例した部分 $\delta f(t) / {}^a l$ と不規則な外力 ${}^a F(t)$ とから成ると考える. 不規則な外力は, 次のような性質をもっているとしよう.

$$a) \quad \langle {}^a F^{(i)}(t) \rangle = 0, \quad \langle {}^b F^{(i)}(t) \rangle = 0. \quad (4.200)$$

$$b) \quad \langle {}^a F^{(i)}(t) {}^b F^{(j)}(u) \rangle = {}^{ab} A_{ij} \delta(t-u). \quad (4.201)$$

性質 a) は, 定常系での検出反応率のゆらぎの期待値がゼロであることから要請される. 性質 b) は, 雑音源スペクトル密度が白色であるという仮定である.

(4.199) および (4.201) 式を用いて, 相関関数を求めよう.

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Gamma_{ij}(t, u) &= \langle \delta^a c_i(t) \delta^b c_j(u) \rangle \\ &= \frac{1}{{}^a l_i {}^b l_j} \langle \delta f^{(i)}(t) \delta f^{(j)}(u) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{{}^a l_i} \langle \delta f^{(i)}(t) {}^b F^{(j)}(u) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{{}^b l_j} \langle {}^a F^{(i)}(t) \delta f^{(j)}(u) \rangle \\ &\quad + {}^{ab} A_{ij} \delta(t-u). \end{aligned} \quad (4.202)$$

いま, $t > u$ と考えよう. この時, 上式右辺第 3 項は因果律

$$\langle {}^a F(t) \delta f(u) \rangle = 0; \quad t > u \text{ の時} \quad (4.203)$$

によってゼロである. (4.202) 式右辺第 2 項は, 中性子数のゆらぎに対する Langevin 方程式 (4.63) の解*

* 後に指摘するように, 検出器による中性子の吸収・放出の効果があたに加わり, ボルツマン作用素が多少かわる.

$$\delta f(t) = \int_0^\infty d\xi \exp[-B(t-\xi)] F(\xi)$$

を用いると, 次のように書くことができる.

$$\frac{1}{{}^a l_i} \sum_{k=1}^M \int_0^\infty d\xi [\exp(-B(t-\xi))]_{ik} \langle F^{(k)}(\xi) {}^b F^{(j)}(u) \rangle. \quad (4.204)$$

中性子数のゆらぎに対する Langevin 外力 $F(\xi)$ と検出器 b による検出反応のゆらぎに対する Langevin 外力 ${}^b F(u)$ との間の相互スペクトル密度は白色であると考えよう. すなわち,

$$b) \quad \langle F^{(k)}(\xi) {}^b F^{(j)}(u) \rangle = {}^{nb} A_{kj} \delta(\xi-u). \quad (4.205)$$

残された課題は, 雑音源スペクトル密度の大きさに関係した ${}^{ab} A, {}^{nb} A$ 等を定めることである. それには, Schottky の公式 (4.94) を用いる. 検出反応の際, 2 次中性子がいくつか放出されることを考慮して, 4.6 で用いた遷移確率にさらに, 次の項をつけ加える.

iii) i 番目のセルにある中性子いずれか 1 箇を, 検出器 a が検出した際, 検出反応 1 回当たり, 第 1 セルに n_1 箇, 第 2 セルに n_2 箇, ..., 2 次中性子の生まれる確率を ${}^a p_i(n_1, n_2, \dots, n_M)$ とする. 検出反応により m 番目のセルにある中性子が失なわれる割合の期待値は $\langle f^{(m)} \rangle / {}^a l_m$ に等しい. 検出反応による正味の中性子の増減は, i 番目のセルにおいては, $(n_i - \delta_{im})$ 箇である. ただし, δ_{im} Kronecker のデルタ, すなわち

$$\begin{aligned} \delta_{im} &= 1 \quad ; \quad i = m \text{ の時,} \\ &= 0 \quad ; \quad i \neq m \text{ の時.} \end{aligned}$$

また, 検出器 a の検出反応数は 1 だけ増えるが, 検出器 b の検出反応数には増減はない.

検出器 b による反応に関しても, 同様な遷移確率を導入する. TABLE 6 を用いて Schottky の公式 (4.94) に従い計算を行なう. 結果は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} {}^{aa} A_{mn} &= {}^{aa} A_{nm} = \delta_{mn} \langle f^{(m)} \rangle / {}^a l_m, \\ {}^{ab} A_{mn} &= {}^{ba} A_{nm} = 0, \\ {}^{bb} A_{mn} &= {}^{bb} A_{nm} = \delta_{mn} \langle f^{(m)} \rangle / {}^b l_m, \\ {}^{an} A_{mi} &= {}^{na} A_{im} = [{}^a k_i^{(m)} - \delta_{im}] \langle f^{(m)} \rangle / {}^a l_m, \\ {}^{bn} A_{mi} &= {}^{nb} A_{im} = [{}^b k_i^{(m)} - \delta_{im}] \langle f^{(m)} \rangle / {}^b l_m. \end{aligned} \quad (4.206)$$

ここで ${}^a k_i^{(m)}, {}^b k_i^{(m)}$ は, それぞれ検出器 a, b による m 番目のセルにおける検出反応の際, i 番目のセルに放出される 2 次中性子数の期待値である. すなわち,

$${}^a k_i^{(m)} = \sum_{n_1=0}^\infty \sum_{n_2=0}^\infty \dots \sum_{n_M=0}^\infty n_i {}^a p_m(n_1, n_2, \dots, n_M), \quad (4.207)$$

TABLE 6 Contribution of detection processes to the noise-equivalent source (M-point model)

Nature of process	Mean rate of occurrence	Number of detection by detector-a	Number of detection by detector-b	Net number of neutrons produced in the i -th cell	Net number of neutrons produced in the j -th cell
Capture of neutrons in the m -th cell by detector-a	$\langle f^{(m)} \rangle / {}^a l_m$ $\times {}^a p_m(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_M)$	1	0	$n_i - \delta_{im}$	$n_j - \delta_{jm}$
Capture of neutrons in the n -th cell by detector-b	$\langle f^{(n)} \rangle / {}^b l_n$ $\times {}^b p_n(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_M)$	0	1	$n_i - \delta_{in}$	$n_j - \delta_{jn}$

$${}^b k_i^{(m)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_M=0}^{\infty} n_i {}^b p_m(n_1, n_2, \dots, n_M). \quad (4.208)$$

このほかに、ボルツマン作用素 B および雑音源スペクトル密度 A の中性子-中性子成分への検出反応の寄与がある。まず、(4.99) 式の右辺には、新たに次の項が加わる。

$$\sum_{m=1}^M [{}^a k_i^{(m)} - \delta_{im}] f^{(m)}/{}^a l_m + \sum_{m=1}^M [{}^a k_i^{(m)} - \delta_{im}] f^{(m)}/{}^b l_m.$$

検出反応を含めたすべての吸収反応に対する中性子寿命および増倍係数を次のように定義する。

$$1/l_m' = 1/l_m + 1/{}^a l_m + 1/{}^b l_m, \quad (4.209)$$

$$k_i'^{(m)}/l_m' = k_i^{(m)}/l_m + {}^a k_i^{(m)}/{}^a l_m + {}^b k_i^{(m)}/{}^b l_m. \quad (4.210)$$

$l_m', k_i'^{(m)}$ を用いて、(4.101) 式に対応する新しいボルツマン作用素 B' を定義すると、定常状態における中性子数の期待値 f_{is} は、検出器 a, b が存在する時、次のボルツマン方程式を満足すべきであることがわかる。

$$S_i - B' f_{is} = 0. \quad (4.211)$$

したがって、Langevin 方程式も、新しい B' を用いて次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f(t) = -B' \delta f(t) + F(t).$$

同様に雑音源スペクトル密度行列にも検出反応の寄与を考慮すると、(4.104) に対応して次の結果が得られる。

$$A' = A(\langle f \rangle) = Q' + B' E + E B'^T. \quad (4.212)$$

ただし、

$$Q_{ij}' = Q_{ij} + \sum_{m=1}^M ({}^a k_{ij}^{(m)} - \delta_{ij} {}^a k_j^{(m)}) \frac{\langle f^{(m)} \rangle}{{}^a l_m} + \sum_{m=1}^M ({}^b k_{ij}^{(m)} - \delta_{ij} {}^b k_j^{(m)}) \frac{\langle f^{(m)} \rangle}{{}^b l_m}, \quad (4.213)$$

$${}^a k_{ij}^{(m)} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_M} n_i n_j {}^a p_m(n_1, n_2, \dots, n_M), \quad (4.214)$$

$${}^b k_{ij}^{(m)} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_M} n_i n_j {}^b p_m(n_1, n_2, \dots, n_M). \quad (4.215)$$

検出反応の際、複数箇の2次中性子が放出されないならば、 Q' に対する検出反応の寄与はない。

さて、検出反応数の相関関数を求めよう。(4.202)~(4.206) 式を用いると、次の結果をうる。

$${}^{ab} \Gamma_{ij}(t, u) = \frac{1}{{}^a l_i {}^b l_j} \langle \delta f^{(i)}(t) \delta f^{(j)}(u) \rangle + \frac{1}{{}^a l_i {}^b l_j} \sum_{m=1}^M [\exp(-B'(t-u))]_{im} \times ({}^b k_m^{(i)} - \delta_{mj}) \langle f^{(j)} \rangle + \frac{\langle f^{(i)} \rangle}{{}^a l_i} \delta_{ij} \delta_{ab} \delta(t-u); \quad t > u \text{ の時}, \quad (4.216)$$

これからわかるように、検出反応数の相関関数は、中性子数のゆらぎの相関関数 $\langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle$ に比例するのではなく、補正項がつけ加わることがわかる。(4.76) 式を代入すると、 $\langle \delta f(t) \delta f(u) \rangle$ のうち、直接相関項、

すなわち、“single” 雑音源からの寄与 $\exp[-B'(t-u)]E$ は、(4.216) 式右辺第2項の一部とうち消し合うことがわかる。したがって、(4.216) 式は、次のように書きなおせる。

$${}^{ab} \Gamma_{ij}(t, u) = \frac{1}{{}^a l_i {}^b l_j} \Gamma_{ij}^B(t, u) + \langle {}^a c_i \rangle \delta_{ab} \delta_{ij} \delta(t-u) + \frac{\langle {}^a c_j \rangle}{{}^a l_i} \sum_{m=1}^M [\exp(-B'(t-u))]_{im} {}^b k_m^{(j)}; \quad t \geq u \text{ の時}. \quad (4.217)$$

ただし、 Γ_{ij}^B は、 $\langle \delta f^{(i)}(t) \delta f^{(j)}(u) \rangle$ のうち “binary” 雑音源 Q' からの寄与を表す。すなわち

$$\Gamma^B(t, u) = \int_{-\infty}^u d\eta \exp[-B'(t-\eta)] \times Q' \exp[-B^T(u-\eta)]; \quad t \geq u \text{ の時}. \quad (4.218)$$

また、 $\langle {}^a c_i \rangle$ は、検出器 a による i 番目のセルにおける単位時間当りの検出反応数の期待値である。 $t < u$ の場合も同様にして求まる。結果をまとめると次のようになる。

$${}^{ab} \Gamma_{ij}(t, u) = \frac{1}{{}^a l_i {}^b l_j} \Gamma_{ij}^B(t, u) + \langle {}^a c_i \rangle \delta_{ab} \delta_{ij} \delta(t-u) + \begin{cases} \frac{\langle {}^b c_j \rangle}{{}^a l_i} \sum_{m=1}^M [\exp(-B'(t-u))]_{im} {}^b k_m^{(j)} & ; t \geq u \text{ の時}, \\ \frac{\langle {}^a c_i \rangle}{{}^b l_j} \sum_{m=1}^M {}^a k_m^{(i)} [\exp(-B^T(u-t))]_{mj} & ; t < u \text{ の時}. \end{cases} \quad (4.219)$$

相空間が連続な場合には、(4.199) 以降の式で、空間の位置を表す指標 i, j 等は、対応する連続相空間の座標点を表す $(\mathbf{x}, \mathbf{v}), (\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 等におきかえればよい。その際、Kronecker のデルタ δ_{ij} は、Dirac のデルタ関数 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ におきかわる。最後の結果だけ示すと輸送理論では、次のようになる。

$${}^{ab} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', u) = \frac{1}{{}^a l(\mathbf{x}, \mathbf{v}) {}^b l(\mathbf{x}', \mathbf{v}')} \Gamma_{nn}^B(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', u) + \langle {}^a c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(t-u) + \begin{cases} \frac{\langle {}^b c(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \rangle}{{}^a l(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \left[\int_{\alpha} \iint d\mathbf{x}'' d\mathbf{v}'' \times Gr(n, \mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \alpha, \mathbf{x}'', \mathbf{v}'', u) \times {}^b k(\alpha, \mathbf{x}'', \mathbf{v}'' \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}') \right] & ; t > u \text{ の時}, \\ \frac{\langle {}^a c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle}{{}^b l(\mathbf{x}', \mathbf{v}')} \left[\int_{\alpha} \iint d\mathbf{x}'' d\mathbf{v}'' \times Gr(n, \mathbf{x}', \mathbf{v}', u | \alpha, \mathbf{x}'', \mathbf{v}'', t) \times {}^a k(\alpha, \mathbf{x}'', \mathbf{v}'' \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}) \right] & ; t < u \text{ の時}. \end{cases} = {}^{ba} \Gamma(\mathbf{x}', \mathbf{v}', u, \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (4.219')$$

上式、右辺第1項で、 Γ_{nn}^B は、自由中性子同士ゆらぎの相関関数のうち、“binary” 雑音源からの寄与を表

わす. BNES としては, 増倍系の分枝反応のほかに検出器で生ずる分枝反応の寄与も含める.

上式右辺第3項で, $Gr(n, \mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \alpha, \mathbf{x}'', \mathbf{v}'', u)$ は, 時刻 u で点 $(\mathbf{x}'', \mathbf{v}'')$ に種類 α の粒子1箇生まれた時, 時刻 $t (> u)$ で, 点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) のまわりの単位相空間に現われる自由中性子数の期待値である. ${}^b k(\alpha, \mathbf{x}'', \mathbf{v}'' \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ は点 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ で起こった検出器 b による検出反応の結果, 点 $(\mathbf{x}'', \mathbf{v}'')$ のまわりの単位相空間に現われる種類 α の粒子数の期待値を意味する. 通常, 位置空間点 \mathbf{x}' と \mathbf{x}'' は, 同じである. たとえば, 核分裂計数管を用いた時には, 次のようにかける.

$$\begin{aligned} {}^b k(\alpha, \mathbf{x}'', \mathbf{v}'' \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}') &= \langle \nu \rangle (1 - \beta) \chi(\mathbf{v}'') \delta(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \\ &\quad ; \text{自由中性子の場合,} \\ &= \langle \nu \rangle \beta_i \delta(\mathbf{v}'') \delta(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \\ &\quad ; \text{第 } i \text{ 組の遅発中性子の場合.} \end{aligned} \tag{4.220}$$

記号は, 慣用のものである. (4.219')式右辺第3項で, 和 \sum_{α} は, 自由中性子および遅発中性子についてとる.

(4.219), (4.219') を, それぞれ (4.198), (4.198') にしたがって積分すれば, 検出器全体で起こる検出反応率の相関関数が求められる. 検出反応後, ただちに1単位の検出量が得られると考えれば, 検出反応率の相関関数は, 検出器出力の相関関数に等しい. 検出量がランダムで, しかもある応答関数に従って放出される場合には, すでに 4.8.1 で導いた関係式を用いて, 検出器出力の相関関数を求めることができる. 4.8.1 で未知量として残された互いに相関のある検出パルス対が, 時間差 τ だけ離れて存在する確率 $P_{\text{cor}}(\tau)$ は, (4.219) あるいは (4.219') をそれぞれ (4.198) あるいは (4.198') に代入して積分した結果と (4.145) および (4.156) 式とを比較すれば容易に求まる. すなわち,

$$\begin{aligned} {}^{aa} P_{\text{cor}}(\tau) &= \sum_i \sum_j {}^{aa} \Gamma_{ij}(t+\tau, t) - {}^a C_1 \delta(\tau) \\ \text{or} \\ &= \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' {}^{aa} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t+\tau, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \\ &\quad - {}^a C_1 \delta(\tau); \text{同一検出器の場合.} \end{aligned} \tag{4.221}$$

$$\begin{aligned} {}^{ab} P_{\text{cor}}(\tau) &= \sum_i \sum_j {}^{ab} \Gamma_{ij}(t+\tau, t) \\ \text{or} \\ &= \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' {}^{ab} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t+\tau, \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \\ &\quad ; \text{相異なる2つの検出器の場合.} \end{aligned} \tag{4.222}$$

ただし, ${}^a C_1$ は検出器 a による単位時間当りの全反応数の期待値.

以上の結果から, 検出器を炉内に挿入した場合には, まず, ボルツマン作用素 B に, 検出器による中性子吸収の効果を考慮しなければならないこと, 特に, 核分裂計数管や陽子反跳計数管のように吸収に伴ない2次中性子の放出がある場合には, この効果もボルツマン作用素に考慮しなければならないことがわかる. 特に, 放出2次

中性子数が複数箇ある場合には, 検出反応を分枝反応の一種とみなし, 中性子場のゆらぎにおける“binary”雑音源として加える必要があることがわかった. これらはいいかえれば, 検出器を原子炉の構成材の一部として考えればよいことを意味する.

検出器反応率の相関関数 (4.219) あるいは (4.219') は, 3つの項から成立している. 第1は, 中性子数のゆらぎの相関関数のうち, BNES からの寄与に比例した項である. SNES からの寄与である直接相関項は, 検出の際, 中性子が吸収されてしまうので, たち切られてしまい, 検出反応率の相関関数 $\Gamma(t, u)$ には, $t \neq u$ の時には寄与しない. ただし, 同一検出器による自己相関関数には, 検出反応が不規則におこることに起因した白色な寄与が新たに加わる. これが第2の項である. 第3項は検出反応の際, 2次粒子が放出(複数箇とは限らない)される場合, その粒子またはその子孫が検出にかかる際生ずる検出相関項である. この項は検出カウントと2次粒子の放出とが同時に起こる分枝反応と広義に解釈できるのである.

最後に, 炉雑音スペクトル密度に対する表式を整理しておこう. 同一検出器出力 $O(t)$ の期待値のまわりのゆらぎ $\delta O(t) (= O(t) - \langle O(t) \rangle)$ のスペクトル密度は, (4.146), (4.148) 式から次のようになる.

$$\Phi_{00}(\omega) = |h[i\omega]|^2 [\langle \theta^2 \rangle C_1 + \langle \theta \rangle^2 \tilde{P}(\omega)]. \tag{4.223}$$

一方, 2つの検出器 a, b の出力それぞれの期待値のまわりのゆらぎの相互スペクトル密度は, (4.157), (4.159) 式を用いて, 次のように書ける.

$$\begin{aligned} {}^{ab} \Phi_{00}(\omega) &= {}^a h[i\omega] {}^b h[-i\omega] \langle {}^a \theta \rangle \langle {}^b \theta \rangle {}^{ab} \tilde{P}(\omega) \\ &= {}^{ba} \Phi_{00}(-\omega). \end{aligned} \tag{4.224}$$

ここで,

$$\tilde{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau P_{\text{cor}}(\tau) e^{-i\omega\tau}. \tag{4.225}$$

$${}^{ab} \tilde{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau {}^{ab} P_{\text{cor}}(\tau) e^{-i\omega\tau}. \tag{4.226}$$

$P_{\text{cor}}, {}^{ab} P_{\text{cor}}$ は, それぞれ, (4.221), (4.222) から求められる. 2時点相関関数は, 多点炉モデルでは, (4.219) で与えられる. 検出器 a の反応を表わすベクトル ${}^a \mathbf{W}$ を導入しよう. これは, 横ベクトルで, その i 番目の要素は, $1/\sigma l_i$ で与えられる. 各要素を縦に並べかえたものを ${}^b \mathbf{W}^T$ とする. この時 (4.226) 式は, 次のように表わせる.

$$\begin{aligned} {}^{ab} \tilde{P}(\omega) &= {}^a \mathbf{W} Gr[i\omega] Q Gr^T[-i\omega] {}^b \mathbf{W}^T \\ &\quad + {}^a \mathbf{W} Gr[i\omega] {}^b Q {}^b \mathbf{W}^T \\ &\quad + {}^a \mathbf{W} {}^a Q^T Gr^T[-i\omega] {}^b \mathbf{W}^T. \end{aligned} \tag{4.227}$$

ここで, 行列 ${}^b Q$ の $(i-j)$ 要素は, 次の通り

$${}^b Q_{ij} = {}^b k_i^{(j)} \langle f^{(j)} \rangle. \tag{4.228}$$

また,

$${}^a Q_{ij}^T = {}^a k_j^{(i)} \langle f^{(i)} \rangle. \tag{4.229}$$

(4.227) 式で, ${}^a \mathbf{W} = {}^b \mathbf{W}$ とおけば, $\tilde{P}(\omega)$ が得られる. Q, Gr には, 検出器の効果は, 含まれているものとす

る。

相空間が連続な場合にも、検出器 a の反応を表わすベクトル ${}^a\mathbf{W}$ を考え、その $(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 要素は、 α が中性子を意味する時には $1/l(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 、先行核を意味する時には、ゼロと約束しておく。(4.219') を用いると ${}^a\mathbf{P}(\omega)$ に対する表式は、(4.227) と同形になる。ただし、行列 ${}^b\mathbf{Q}$ 、 ${}^a\mathbf{Q}^T$ の成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^b\mathbf{Q}(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v}; \beta, \mathbf{x}', \mathbf{v}') &= {}^b k(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}') f_1^{(a)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \\ &\quad ; \beta = \text{中性子の時,} \\ &= 0 \quad ; \beta = \text{先行核の時.} \end{aligned} \quad (4.230)$$

$$\begin{aligned} {}^a\mathbf{Q}^T(\beta, \mathbf{x}', \mathbf{v}', \alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v}) &= {}^a k(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}') f_1^{(a)}(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \\ &\quad ; \beta = \text{中性子の時,} \\ &= 0 \quad ; \beta = \text{先行核の時.} \end{aligned} \quad (4.231)$$

行列・ベクトル演算で、連続パラメータに関する和は、積分でおきかえるものとする。

4.9 炉内における光子のゆらぎ

核分裂の際、中性子、先行核の他にガンマ線——光子が同時に放出される。すなわち、即発光子は、核分裂後 $1 \mu\text{sec}$ 以内に、平均 7.4 箇、0.3 MeV から 10 MeV エネルギー範囲にわたって放出される。これら光子のもつ全エネルギーは、約 7 MeV 程度である¹⁷⁷⁾。この他にももちろん、核分裂生成物の放射性崩壊、中性子の吸収あるいは非弾性散乱反応、電子が原子核のクーロン(Coulomb)力で速度変化をうける過程での制動輻射(bremsstrahlung)、正電子と物質中の電子との衝突による消滅の際にも放出される。

特に、5 MeV 程度以上の光子に注目してみよう。この光子は、核分裂および捕獲反応の際、 10^{-4} sec 以内に放出されるものがほとんどを占め、長寿命の遅発ガンマからの寄与は無視できる。放出された光子は、光電効果、電子対生成等により消滅する。また、コンプトン(Compton)効果により散乱を受ける。この際、生成される光子あるいは電子のもつエネルギーは、ほとんどが、5 MeV 以下になってしまい⁸⁰⁾、われわれが注目しているエネルギー以上の光子が再生産されるとしても、核分裂および捕獲反応の際、放出される光子数に比べて無視してさしつかえない。

この放出、消滅、除去過程に起因する光子数のゆらぎを、たとえば、シンチレーション・カウンタで解析し、炉内における中性子の動特性に関する情報を得ようとする試みが、KENNEY⁸⁰⁾、ROUX *et al.*¹²⁵⁾、LEHTO *et al.*⁸⁹⁾ によって行なわれた。その背景になる理論的定式化も GELINAS and OSBORN⁵⁸⁾、LEHTO *et al.*⁸⁹⁾ によって行なわ

れ、炉内における高エネルギー光子数のゆらぎのスペクトル密度、特に2つの検出器出力電流のゆらぎの間の相互スペクトル密度は、炉の伝達関数のゲインに比例することが明らかになった。一点炉近似での伝達関数の折点周波数 $\omega_B = (\beta - \rho)/l$ から、反応度 ρ 、遅発中性子の割合対中性子寿命との比 β/l 等を決定できる。

光子の雑音解析は、中性子の雑音解析に比べて、次のような利点がある。

1) 光子の平均自由行程は、中性子のそれと比べて長い。

したがって^{58,170)}、

a) 検出器を、炉心に擾乱を与えない程度に十分離して設定することができる。

b) 空間依存性、すなわち、空間分布の高次モードの利きが小さく、雑音解析によるパラメータ決定が容易になる。

2) 5 MeV 程度以上の高エネルギー光子のみを選択して測定をするので、分裂生成物から放出される光子の寄与はない。したがって、分裂生成物が蓄積して、通常の中性子検出器では測定しにくい。いわゆる汚れた(dirty)炉においても、炉雑音実験ができる。

LEHTO *et al.*⁸⁹⁾が、チェレンコフ(Cerenkov)検出器を用いて、スイミング・プール型炉で行なった実験では、ガンマ線の強さは 10^5 から 10^6 R/hr 程度であった。

ここでは、Langevin 法を用いて光子数のゆらぎを定式化してみよう。

4.9.1 光子数のゆらぎのスペクトル密度

光子同士の相互作用は、ないものと仮定する。遅発ガンマの寄与は、中性子場、光子場とは独立な外部源と考えよう。線型マルコフ過程として、光子場のゆらぎを取り扱う。

したがって、4.4 以下の一般論を、光子-中性子場に特殊化すれば、ゆらぎのスペクトル密度は求められる。

光子数の期待値の分布関数 $f_1^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は、次のような線型非同次ボルツマン方程式にしたがう。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f_1^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} f_1^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &+ \nu \Sigma_t^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_1^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= \int d\mathbf{v}' \nu' \Sigma_s^{(p)}(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \mathbf{x}) f_1^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \\ &+ \int d\mathbf{v}' k(p, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \mathbf{x}) \nu' \Sigma_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}') f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \\ &+ S_1^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.232)$$

ここで、 Σ_a 、 f_1 は、中性子の吸収断面積および期待値の分布関数である。核反応による光子の平均生成率は、次のように核分裂によるものと、 (n, γ) によるものとにわけることができる。

$$\begin{aligned} & k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{v}', \boldsymbol{x}) \nu' \Sigma_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}') \\ &= \langle \eta \rangle_I \chi_I^{(p)}(\boldsymbol{v}) \nu' \Sigma_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}') \\ &+ \langle \eta \rangle_{n\gamma} \chi_{n\gamma}^{(p)}(\boldsymbol{v}) \nu' \Sigma_{n\gamma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}'). \end{aligned} \quad (4.233)$$

ここで $\langle \eta \rangle_I$ は、核分裂 1 回当たり放出される光子数の期待値、 $\langle \eta \rangle_{n\gamma}$ は、 (n, γ) 反応 1 回当たり放出される光子数の期待値である。また、 $\chi^{(p)}(\boldsymbol{v})$ は、放出光子の速度分布を表わす。

方程式 (4.232) から、定常状態で期待値のまわりのゆらぎ

$$\delta f^{(p)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) = f^{(p)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) - f_{is}^{(p)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

の従う Langevin 方程式を設定することは容易である。中性子場の従う Langevin 方程式と合わせて、次のような $(2 \times \infty^6)$ 次元線型方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{f}(t) \\ \delta \boldsymbol{f}^{(p)}(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B & 0 \\ B_{pn} & B_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{f}(t) \\ \delta \boldsymbol{f}^{(p)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}(t) \\ \boldsymbol{F}^{(p)}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.234)$$

ここで、 $\delta \boldsymbol{f}(t), \delta \boldsymbol{f}^{(p)}(t)$ は、 ∞^6 次元のたてベクトルを表わし、その $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 成分は、それぞれ、 $\delta f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t), \delta f^{(p)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ である。また、 $\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{F}^{(p)}(t)$ は、Langevin 外力を表わし、やはり ∞^6 次元のたてベクトルであり、その期待値はゼロ、すなわち、

$$\langle \boldsymbol{F}(t) \rangle = 0. \quad (4.235)$$

$$\langle \boldsymbol{F}^{(p)}(t) \rangle = 0. \quad (4.236)$$

B, B_{pn}, B_{pp} は、 $\infty^6 \times \infty^6$ 正方行列であり、 B の成分は、(4.57) 式から容易にわかるように次のように与えられる。

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') &= \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') [\boldsymbol{v} \cdot \text{grad}_{\boldsymbol{x}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\ &+ \nu \Sigma_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')] \\ &- \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{v}', \boldsymbol{x}') \nu' \Sigma_I(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}'). \end{aligned} \quad (4.237)$$

一方、 B_{pn}, B_{pp} は、方程式 (4.232) と (4.234) との比較から、次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned} B_{pn}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') &= -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') k(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{v}', \boldsymbol{x}') \nu' \Sigma_a(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}'). \end{aligned} \quad (4.238)$$

$$\begin{aligned} B_{pp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') &= \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') [\boldsymbol{v} \cdot \text{grad}_{\boldsymbol{x}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\ &+ \nu \Sigma_I^{(p)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')] \\ &- \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \nu' \Sigma_S^{(p)}(\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{v}', \boldsymbol{x}'). \end{aligned} \quad (4.239)$$

Langevin 外力の相関関数は、白色と仮定しよう。すなわち、

$$\langle \boldsymbol{F}(t) \boldsymbol{F}(u) \rangle = A \delta(t - u). \quad (4.240)$$

$$\langle \boldsymbol{F}(t) \boldsymbol{F}(u)^{(p)} \rangle = A_{np} \delta(t - u). \quad (4.241)$$

$$\langle \boldsymbol{F}^{(p)}(t) \boldsymbol{F}(u) \rangle = A_{pn} \delta(t - u). \quad (4.242)$$

$$\langle \boldsymbol{F}^{(p)}(t) \boldsymbol{F}^{(p)}(u) \rangle = A_{pp} \delta(t - u). \quad (4.243)$$

行列 A は、(4.75) 式で与えられている。すなわち、

$$A = Q + BE + EB^T. \quad (4.244)$$

Q は、(4.107), (4.108'), (4.109) 式を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} Q &= Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') \\ &= \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \langle \nu(\nu - 1) \rangle \chi(\boldsymbol{v}) \chi(\boldsymbol{v}') R_{II}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \quad (4.245)$$

ただし、外部中性子源からの寄与、遅発中性子の存在を無視した。上式で $R_{II}(\boldsymbol{x})$ は、場所 \boldsymbol{x} のまわりの単位体積中で、単位時間当りおこる核分裂反応数の期待値である。すなわち、

$$R_{II}(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{v} \nu \Sigma_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) f_{is}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}). \quad (4.246)$$

行列 A_{np}, A_{pp} は、光子の生成・消滅過程に Shottky の公式を適用して求める。参考のために、一点炉モデルの場合の反応素過程を TABLE 7 にまとめる。4.6 で行なったと同様な手続きを用いると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} A_{np}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') &= Q_{np}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') \\ &+ f_I^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) B_{pn}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') \\ &= A_{pn}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}'; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}). \end{aligned} \quad (4.247)$$

$$\begin{aligned} A^{(pp)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') &= Q_{pp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') \\ &+ B_{pp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') f_{is}^{(p)}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') \\ &+ B_{pp}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}'; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) f_{is}^{(p)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}). \end{aligned} \quad (4.248)$$

上式におけるバイナリ雑音源は、中性子場におけるバイナリ雑音源と類似の表式で与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} Q_{np}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') &= \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \langle \nu \eta \rangle_I \chi(\boldsymbol{v}) \chi^{(p)}(\boldsymbol{v}') R_{II}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \quad (4.249)$$

$$\begin{aligned} Q_{pp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}') &= \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') [\langle \eta(\eta - 1) \rangle_I \chi^{(p)}(\boldsymbol{v}) \chi^{(p)}(\boldsymbol{v}') R_{II}(\boldsymbol{x}) \\ &+ \langle \eta(\eta - 1) \rangle_{n\gamma} \chi_{n\gamma}^{(p)}(\boldsymbol{v}) \chi_{n\gamma}^{(p)}(\boldsymbol{v}') R_{In\gamma}(\boldsymbol{x})]. \end{aligned} \quad (4.250)$$

ここで、

$$R_{In\gamma}(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{v} \nu \Sigma_{n\gamma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) f_{is}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}). \quad (4.251)$$

また、放出される複数箇の光子の速度分布は、互いに他と独立と仮定した。

結局、中性子場-光子場に対する Langevin 力の相関関数は、次のようにまとめられる。

TABLE 7 Individual contribution to the noise-equivalent source (One-point model with photons)

Nature of process	Mean rate of occurrence	Net number of neutrons produced	Net number of photons produced
(n, γ) reaction	$\nu \Sigma_{n\gamma} N_{I_1}$	-1	$\eta_{n\gamma}$
Fission yielding ν prompt neutrons and η_f prompt photons	$\nu \Sigma_f N_{I_1}$	$\nu - 1$	η_f
Source neutron emission	S_1	1	0
Capture, annihilation and removal of photons	$\nu \Sigma^{(p)} N_{I_1}^{(p)}$	0	-1
Emission of extraneous photon source	$S_1^{(p)}$	0	1

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(u) \rangle, \langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}^{(p)}(u) \rangle \\ \langle \mathbf{F}^{(p)}(t) \mathbf{F}(u) \rangle, \langle \mathbf{F}^{(p)}(t) \mathbf{F}^{(p)}(u) \rangle \end{array} \right\} \\ & = \delta(t-u) \times \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} Q, Q_{np} \\ Q_{pn}, Q_{pp} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} B, 0 \\ B_{pn}, B_{pp} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} f_1, 0 \\ 0, f_1^{(p)} \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{l} f_1, 0 \\ 0, f_1^{(p)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} B^T, B_{np}^T \\ 0, B_{pp}^T \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (4.252) \end{aligned}$$

これは, (4.106) 式で, α を中性子, β を光子と考えた時の表式に他ならない. 光子場のゆらぎのスペクトル密度は, (4.77) の表式で, その (p-p) 成分として求められる. すなわち,

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}(\omega) & \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) \langle \delta \mathbf{f}^{(p)}(t) \delta \mathbf{f}^{(p)}(u) \rangle \\ & = \text{the two-two element of} \\ & \{ Gr[i\omega] Q Gr^T[-i\omega] + Gr[i\omega] E \\ & \quad + E Gr^T[-i\omega] \}. \quad (4.253) \end{aligned}$$

ただし,

$$Q = \begin{bmatrix} Q & Q_{np} \\ Q_{pn} & Q_{pp} \end{bmatrix} \quad (4.254)$$

$$E = \begin{bmatrix} f_1, 0 \\ 0, f_1^{(p)} \end{bmatrix} \quad (4.255)$$

$$Gr[s] = \begin{bmatrix} B+sU, & 0 \\ B_{pn}, & B_{pp}+sU \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.256)$$

4.9.2 光子検出器出力のゆらぎのスペクトル密度

光子の検出過程は, 中性子の場合に比べるとやや複雑である. たとえば, シンチレーション検出器においては入射光子は, いったん蛍光体 (NaI, CsI 等) に吸収され, 再び光子となって放出される. この光子は, 光電子増倍管の光電面 (Cs-Sb からなる半透明の膜) から, 光電効果により電子をたたき出し, これが 9~14 段からなるダイノード層を通過する間に, $10^5 \sim 10^8$ 倍程度に増倍された電子流となって, 外へとりだされる. 一方, チェレンコフ検出器, 特に LEHTO⁸⁹⁾ が用いた CO₂ 検出器では, 入射光子はコンプトン散乱によって, まず電子をたたきだし, この電子が高圧 (200 psig) の CO₂ ガス内で, チェレンコフ効果 (しきい値 4 MeV 程度) によって生みだした光子を光電子増倍管で受けとめる.

ここでは, まず, 光子のひきおこす一次反応数のゆらぎを議論しよう. 蛍光体あるいはコンプトン散乱体の中で 1 箇の入射光子が消滅し, 同時に 1 単位の検出量 (蛍光体から放出される光子あるいはコンプトン電子) が得られるものとする. 実際には, 蛍光体から光子が放出される過程は, nsec オーダの緩和時間をもつ. また, 5 MeV 程度の光子のはじきだすコンプトン電子は, 複数箇あるであろう. 一次反応により放出された検出量は, 検出管内でさらに何段かの反応をひきおこして, 実際にわれわれの手に入る出力電流を生みだす. これらの効果のうち, 検出器の緩和時間の効果, 複数箇の一次検出量が放出される効果は, すでに, 4.8.1 でのべた議論

に基づいてとりいれることができよう.

われわれが, β/l 程度の周波数までのスペクトル密度を対象にし, さらに, 2 検出器出力間の相互スペクトル密度を扱うこととすれば, 一次検出量と出力電流とのゆらぎの間の比例関係は, 成りたつものと考えてさしつかえないであろう. (cf. 4.10)

光子 1 箇の消滅に伴ない生成される一次検出量のゆらぎと, 光子場のゆらぎとの関係は, 中性子検出量と中性子場のゆらぎの関係と全く同じである. すなわち, 光子場における直接相関項 ((4.253) 式右辺第 2 項, 第 3 項の寄与) は, 一次検出量のゆらぎには現われない. 特に同一検出器の自己相関関数には, 新たに, 検出過程に起因した白色な寄与が加わる. したがって, 形式的には, 検出雑音スペクトル密度は, (4.223) あるいは (4.224) 式と全く同等である. すなわち, スペクトル密度は, 次のようになる.

$${}^{ab}\Phi_{cc}^{(pp)}(\omega) = \delta_{ab} C_{15}^{(p)} + \tilde{P}^{(pp)}(\omega). \quad (4.257)$$

ここで

$\delta_{ab} = 1$; 同一検出器出力の自己スペクトル密度の時,

$= 0$; 2つの検出器出力間の相互スペクトル密度の時. (4.258)

また, $C_{15}^{(p)}$ は, 光子の平均検出率, また, $\tilde{P}^{(pp)}(\omega)$ は次のように与えられる.

$$\tilde{P}^{(pp)}(\omega) = \mathbf{W} Gr[i\omega] Q Gr^T[-i\omega] \mathbf{W}^T. \quad (4.259)$$

ここで, \mathbf{W} は, 光子検出器の反応率ベクトルであり, その中性子成分は, もちろんゼロである. これを用いると, $C_{15}^{(p)}$ は, 次のように表わせる.

$$\begin{aligned} C_{15}^{(p)} & = \sum_i W^{(i)} f_{15}^{(i)} \\ & = \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} W^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_{15}^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (4.260) \end{aligned}$$

特に, 一点炉モデルで考えてみよう. \mathbf{W} は, 次のように表わせる.

$$\begin{aligned} W^{(i)} & = 0 \quad ; i = \text{中性子の時}, \\ & = (\varepsilon v \Sigma)^{(p)} \quad ; i = \text{光子の時}. \quad (4.261) \end{aligned}$$

ここで, $\varepsilon^{(p)}$ は, 光子の反応一回当たりの検出数, いわゆる検出器効率である. $(v \Sigma)^{(p)}$ は光子の反応率である. コンプトン散乱後の放出光子のエネルギーは, 5 MeV 以下と考えているので, $\Sigma^{(p)}$ は, 光電効果, 電子対生成による消滅過程の断面積に, コンプトン散乱の断面積を加えた全断面積である.

光子の平均の検出率は, 次のようになる.

$$C_{15}^{(p)} = (\varepsilon v \Sigma)^{(p)} N_{15}^{(p)}. \quad (4.262)$$

定常状態での光子の期待値は, (4.232) 式に一点炉近似を施せば, 次のように求まる.

$$N_{15}^{(p)} = \langle \eta \rangle \frac{v \Sigma_f}{(v \Sigma)^{(p)}} N_{15} + \frac{S_1^{(p)}}{(v \Sigma)^{(p)}}. \quad (4.263)$$

ここで,

$$\langle \eta \rangle = \frac{\langle \eta \rangle_f \Sigma_f + \langle \eta \rangle_{nr} \Sigma_{nr}}{\Sigma_f}. \quad (4.264)$$

次に, スペクトル密度 $\tilde{P}^{(pp)}(\omega)$ を求めよう. まず,

行列 Q は, (4.254), (4.249), (4.250) および (4.26) 式を用いて, 次のように表わされる.

$$Q = \begin{bmatrix} \langle \nu^2 - \nu \rangle R_{1f}, & \langle \nu \eta \rangle_f R_{1f} \\ \langle \nu \eta \rangle_f R_{1f}, & \langle \eta(\eta-1) \rangle R_{1f} \end{bmatrix} \quad (4.265)$$

ただし, 外部源は, 放出反応 1 回当たり常に 1 箇しか粒子を放出しないものと仮定した. また,

$$\langle \eta(\eta-1) \rangle = \frac{\langle \eta(\eta-1) \rangle_f \Sigma_f + \langle \eta(\eta-1) \rangle_{nr} \Sigma_{nr}}{\Sigma_f} \quad (4.266)$$

一方, グリーン関数のラプラス変換 (4.256) の表式は, 次のように書ける.

$$Gr[s] = \begin{bmatrix} \alpha + s & 0 \\ -\langle \eta \rangle \nu \Sigma_f & (\nu \Sigma)^{(p)} + s \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.267)$$

α は, 中性子の減衰定数である. すなわち,

$$\begin{aligned} \alpha &= \nu \Sigma_a - \langle \nu \rangle \nu \Sigma_f \\ &= \nu \Sigma_a (1 - k). \end{aligned} \quad (4.268)$$

(4.261), (4.265) および (4.267) 式を (4.259) に代入する. ベクトル・行列演算を実行すると結果は次のようになる.

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(pp)}(\omega) &= (\varepsilon \nu \Sigma)^{(p)} \times (\varepsilon \nu \Sigma)^{(p)} \\ &\quad \times [\langle \nu^2 - \nu \rangle R_{1f} \langle \eta \rangle^2 (\nu \Sigma_f)^2 \\ &\quad + 2 \langle \nu \eta \rangle_f R_{1f} \langle \eta \rangle \nu \Sigma_f \alpha \\ &\quad + \langle \eta(\eta-1) \rangle R_{1f} (\alpha^2 + \omega^2)] / \\ &\quad [(\alpha^2 + \omega^2) \{ (\nu \Sigma)^{(p)} \}^2 + \omega^2] \\ &= [\varepsilon^{(p)} \langle \eta \rangle]^2 R_{1f} \left[\frac{k^2 \langle \nu^2 - \nu \rangle}{(1-k)^2 \langle \nu \rangle^2} \right. \\ &\quad + 2 \frac{k \langle \nu \eta \rangle_f}{1-k \langle \nu \rangle \langle \eta \rangle} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \\ &\quad \left. + \frac{\langle \eta(\eta-1) \rangle}{\langle \eta \rangle^2} \frac{\{ (\nu \Sigma)^{(p)} \}^2}{\{ (\nu \Sigma)^{(p)} \}^2 + \omega^2} \right] \quad (4.269) \end{aligned}$$

$$\langle \nu \eta \rangle_f / [\langle \nu \rangle \langle \eta \rangle] = 1 \text{ とおく.}$$

さらに, 原子炉は, 臨界に近いとすると,

$$\frac{k^2 \langle \nu^2 - \nu \rangle}{(1-k)^2 \langle \nu \rangle^2} \gg 2 \frac{k \langle \nu \eta \rangle_f}{1-k \langle \nu \rangle \langle \eta \rangle}. \quad (4.270)$$

したがって (4.269) 式右辺第 2 項は, 第 1 項に比べて無視できる. また, $\omega \ll (\nu \Sigma)^{(p)}$ 程度の周波数域*に対象を限るとしよう. 一次検出量のゆらぎのスペクトル密度は, 次のように整理できる.

$$\begin{aligned} {}^{ab}Q_{cc}^{(pp)}(\omega) &= C_{1s}^{(p)} \delta_{ab} + [\varepsilon^{(p)} \langle \eta \rangle]^2 R_{1f} \\ &\quad \times \left[\frac{k^2 \langle \nu^2 - \nu \rangle}{(1-k)^2 \langle \nu \rangle^2} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \eta(\eta-1) \rangle}{\langle \eta \rangle^2} \frac{\{ (\nu \Sigma)^{(p)} \}^2}{\{ (\nu \Sigma)^{(p)} \}^2 + \omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.271)$$

さらに, (4.263) 式右辺第 2 項を無視し, 上式で,

$$C_{1s}^{(p)} \approx \varepsilon^{(p)} \langle \eta \rangle R_{1f} \quad (4.272)$$

とおいた結果は, GELINAS⁵⁸⁾, LEHTO⁶⁹⁾ が他の方法で求めた結果と当然のことながら一致している.

(4.271) 式, 右辺第 1 項は, 同一検出器出力の自己スベ

* 5 MeV の光子に対しては, $(\nu \Sigma_r)^{(p)}$ の値は $9 \times 10^8 \text{ sec}^{-1}$ 程度である.

クトル密度にのみ表われる項で白色である. この項は, 検出反応により光子が失なわれる素過程に起因する. 第 2 項は, 核分裂に伴ない 2 次中性子が複数箇放出されることに起因し, 中性子の動特性に関する情報 $\alpha^2/(\alpha^2 + \omega^2)$ を含んでいる. 第 3 項は, 核分裂の際, 複数箇の光子が同時に放出されることに起因している. $\omega \ll (\nu \Sigma)^{(p)}$ 程度の低周波では, この項は, 2 つの検出器出力のゆらぎの間の相互スペクトル密度にも, 白色な寄与をすることに注意を要する. ただし, この項の寄与は, 臨界に近い炉では, 第 2 項に比べて小さく, 観測にはかからないものとして, さしつかえない. こうして, 光子場のゆらぎを観測すれば, 中性子場のゆらぎの観測から得られるものと同等の情報が得られることがわかった.

中性子場のゆらぎとの関連をより明らかにするために, 遅発中性子の効果をとりいれた表式を求めてみよう. 雑音源行列 Q は, 次のようになる.

$$Q = \begin{bmatrix} \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle R_{1f}, & \langle \nu_0 \nu_1 \rangle R_{1f}, & \langle \nu_0 \eta \rangle_f R_{1f} \\ \langle \nu_0 \nu_1 \rangle R_{1f}, & \langle \nu_1(\nu_1-1) \rangle R_{1f}, & \langle \nu_1 \eta \rangle_f R_{1f} \\ \langle \nu_0 \eta \rangle_f R_{1f}, & \langle \nu_1 \eta \rangle_f R_{1f}, & \langle \eta(\eta-1) \rangle R_{1f} \end{bmatrix} \quad (4.273)$$

上式で添字 0 は即発中性子, 添字 1 は先行核を意味する. 一方, グリーン関数のラプラス変換 $Gr[s]$ は, 次のようになる.

$$Gr[s] = \begin{bmatrix} \alpha_p + s & -\lambda & 0 \\ -\frac{\beta k}{l} & \lambda + s & 0 \\ -\langle \eta \rangle \nu \Sigma_f & 0 & (\nu \Sigma)^{(p)} + s \end{bmatrix} \quad (4.274)$$

ここで, α_p は, 即発中性子の減衰定数である. すなわち,

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{1 - (1 - \beta)k}{l} \\ &= \nu \Sigma_a - \langle \nu \rangle (1 - \beta) \nu \Sigma_f. \end{aligned} \quad (4.275)$$

検出率ベクトル W は, 次のように表わせる.

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= 0; \quad i = \text{中性子または先行核の時,} \\ &= (\varepsilon \nu \Sigma)^{(p)}; \quad i = \text{光子の時.} \end{aligned} \quad (4.276)$$

(4.273)~(4.276) 式を (4.259) 式へ代入して結果を整理すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(pp)}(\omega) &= [\varepsilon^{(p)} \langle \eta \rangle]^2 R_{1f} \times \left[\left(\frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\lambda^2 \langle \nu_0 \nu_1 \rangle}{\omega^2 + \lambda^2 \langle \nu \rangle^2} + \frac{\lambda^2 \langle \nu_1(\nu_1-1) \rangle}{\omega^2 + \lambda^2 \langle \nu \rangle^2} \right) k^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\langle \nu_0 \eta \rangle_f}{\langle \nu \rangle \langle \eta \rangle} k \times \text{Real part of } \frac{1 - \frac{2i\omega\lambda}{\omega^2 + \lambda^2}}{T(i\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\lambda^2 \langle \nu_1 \eta \rangle_f}{\omega^2 + \lambda^2 \langle \nu \rangle \langle \eta \rangle} k \times \text{Real part of } \right. \\ &\quad \left. \frac{i\omega + \lambda}{\lambda T(i\omega)} \right] \times |T(i\omega)|^2 + \frac{\langle \eta(\eta-1) \rangle}{\langle \eta \rangle^2} \\ &\quad \times \frac{\{ (\nu \Sigma)^{(p)} \}^2}{\{ (\nu \Sigma)^{(p)} \}^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.277)$$

ここで,

$$T(s) = \frac{1}{s \left(l + \frac{\beta k}{s + \lambda} \right) + 1 - k} \quad (4.278)$$

上式, 右辺第 2 項に現われる $\langle \nu_0 \nu_1 \rangle / \langle \nu \rangle^2$ は, 遅発中性子の割合 β のオーダー, また, 第 3 項に現われる $\langle \nu_1 (\nu_1 - 1) \rangle / \langle \nu \rangle^2$ は, β^2 のオーダーであるから, いずれも, 第 1 項に比べて無視できる. 一方,

$$\begin{aligned} \text{Real part of } \frac{1 - \frac{2i\omega\lambda}{\omega^2 + \lambda^2}}{T(i\omega)} \\ = \frac{l[\omega^2 \alpha + \lambda^2(1-k)/l]}{\omega^2 + \lambda^2} - \frac{l\lambda[\omega^2 + \lambda(\lambda + \beta k/l)]\omega^2}{(\omega^2 + \lambda^2)^2} \end{aligned} \quad (4.279)$$

したがって, 原子炉がごく臨界に近い場合 ($1-k \leq \beta$) には, $\omega \geq \lambda$ の領域では, 上式は,

$$\beta - l\lambda \frac{(\omega^2 + \lambda\beta/l)\omega^2}{(\omega^2 + \lambda^2)^2} = \beta. \quad (4.280)$$

となる. そこで, (4.277) 式右辺第 1 項 $\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle / \langle \nu \rangle^2$ に比べて, 上記の項を含む部分は無視できる.

また,

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda^2}{\omega^2 + \lambda^2} \times \text{Real part of } \frac{i\omega + \lambda}{\lambda T(i\omega)} \\ = - \frac{2\lambda l[\omega^2 - \lambda(1-k)/l]}{\omega^2 + \lambda^2} \end{aligned} \quad (4.281)$$

この項の寄与も, (4.277) 式右辺第 1 項に比べて無視できる.

これらの近似および放出中性子数のモーメントとして (4.52) 式を用いると, (4.277) 式は結局, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(pp)}(\omega) \approx [\varepsilon^{(p)} \langle \eta \rangle]^2 R_{II} \\ \times \left[\frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k^2 |H(i\omega)|^2 \right. \\ \left. + \frac{\langle \eta(\eta-1) \rangle}{\langle \eta^2 \rangle} \frac{\{(v\Sigma)^{(pp)}\}^2}{\{(v\Sigma)^{(pp)}\}^2 + \omega^2} \right] \end{aligned} \quad (4.282)$$

上式を, (4.257) 式に代入すると, 周波数 $\omega \lesssim (v\Sigma)^{(pp)}$ では, 光子検出反応数のゆらぎのスペクトル密度は, 次のように表わせることがわかる.

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Phi_{CC}(\omega) = \delta_{ab} C_{1S}^{(p)} \\ + [\varepsilon^{(p)} \langle \eta \rangle]^2 R_{II} \left[\frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} \right. \\ \left. \times k^2 |H(i\omega)|^2 + \frac{\langle \eta(\eta-1) \rangle}{\langle \eta^2 \rangle} \right] \end{aligned} \quad (4.283)$$

原子炉が, 臨界に近い場合 ($1-k \leq \beta$), 周波数 $\omega \lesssim \beta/l$ 程度の領域で

$$|H(i\omega)|^2 \approx \frac{1}{\beta^2} \quad (4.284)$$

これは, $\langle \eta(\eta-1) \rangle / \langle \eta \rangle^2$ に比べて, 十分大きいものと考えられるから, (4.283) 式は, 結局, 次のようになる.

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Phi_{CC}^{(pp)}(\omega) = \delta_{ab} C_{1S}^{(p)} \\ + [\varepsilon^{(p)} \langle \eta \rangle]^2 R_{II} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} \\ \times k^2 |H(i\omega)|^2 \end{aligned} \quad (4.285)$$

こうして, 光子の検出反応数のゆらぎのスペクトル密度, 特に, 2つの検出器出力間の相互スペクトル密度の周波数依存性は, 中性子検出反応数のゆらぎの相互スペクトル密度に対する表式, (4.191) 式と同等とみなして事実上さしつかえないことがわかる.

4.10 検出器雑音

中性子 (あるいは光子) 検出器出力のゆらぎは, 中性子数 (あるいは光子数) のゆらぎには比例せず, 検出素過程による影響を受けることは, 4.8, 4.9 でのべた. この際, 検出器内で起こる種々な素過程を無視し, 単に検出反応に伴ない, 出力電流がある時定数に支配されつつ放出されると仮定した. 実際には, たとえば, BF_3 計数管で考えると, まず, 中性子が ^{10}B と核反応をおこし, α -粒子 (2.3 MeV) と ^7Li イオンを放出する. α -粒子は, その飛跡にそって, B -ガスを電離して, 電子とイオンを生み出す. これら荷電体は, 中性ガス原子との衝突による拡散を行ないつつ, 電場による輸送を受け, 電極に集められ, 測定系に電流パルスを生み出す. 時には再結合により, 荷電体が消滅することもある.

このような検出管内部の現象を, 雑音解析公式にとり入れる試みが, OSBORN *et al.*¹¹²⁾ (BF_3 計数管の場合), LEHTO⁸⁹⁾ (CO_2 チェレンコフ検出器の場合) によって行なわれた. 本節では, BF_3 計数管雑音を Langevin 法で定式化してみよう.

次のような前提をおく.

- 計数管内の粒子の空間・エネルギー分布を無視する.
- イオン化をおこす粒子のふるまいはすべて同一とし, α -粒子で代表する.
- イオンと電子の再結合は無視し, 線型性を保つ.
- 出力電流のゆらぎに及ぼす計数管内電子のゆらぎの効果は無視する. これは, 電子のドリフト時定数が, イオンのそれに比べて, 1/2,000 程度であり, 10^5 rad/sec 以下の周波数では, 影響がないからである¹¹²⁾.

期待値のまわりのゆらぎに対して, 次のような Langevin 方程式を設定しよう*.

$$\frac{d}{dt} \delta N(t) = -r \delta N(t) + F(t) \quad (4.286)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta N^{(\alpha)}(t) = -r_\alpha \delta N^{(\alpha)}(t) \\ + r_d \delta N(t) + F^{(\alpha)}(t) \end{aligned} \quad (4.287)$$

* OSBORN¹¹²⁾, LEHTO⁸⁹⁾ は, 粒子数または電流値そのものに対する Langevin 方程式を設定している.

TABLE 8 Elementary events in detectors

Nature of process	Mean rate of occurrence	Net increase of neutrons	Net increase of α -particles	Net increase of ions
Detection	$r_d N_{1s}$	-1	+1	0
Reaction of α -particles	$r_\alpha N_{1s}^{(\alpha)}$	0	-1	θ
Reaction of ions	$r_i N_{1s}^{(i)}$	0	0	-1

$$\frac{d}{dt} \delta N^{(i)}(t) = -r_i \delta N^{(i)}(t) + \langle \theta \rangle r_\alpha \delta N^{(\alpha)}(t) + F^{(i)}(t). \quad (4.288)$$

ここで、

$\delta N(t)$: 中性子数のゆらぎ、

$\delta N^{(\alpha)}(t)$: α -粒子数のゆらぎ、

$\delta N^{(i)}(t)$: イオン数のゆらぎ。

また、

r : 中性子 1 箇当りの全反応率、

r_d : 中性子 1 箇当りの検出反応 [B(n, α)Li] 率、

r_α : α -粒子 1 箇当りの全反応率、

r_i : イオンのドリフト時定数の逆数。

$\langle \theta \rangle$ は、 α -粒子の反応 1 回当り生成されるイオン対の平均数である。出力電流のゆらぎ $\delta I(t)$ は、 $\delta N^{(i)}(t)$ に比例する。すなわち*

$$\delta I(t) = \gamma \delta N^{(i)}(t). \quad (4.289)$$

ゆらぎのスペクトル密度は、(4.77) 式を用いて計算する。すなわち

$$\Phi(\omega) = Gr[i\omega] A Gr^T[-i\omega]. \quad (4.290)$$

において、 $Gr[i\omega]$ は、定義(4.78)および方程式(4.286)(4.287)、(4.288) から次のように与えられる。

$$Gr[i\omega] = \begin{pmatrix} r+i\omega & 0 & 0 \\ -r_d & r_\alpha+i\omega & 0 \\ 0 & -\langle \theta \rangle r_\alpha & r_i+i\omega \end{pmatrix}. \quad (4.291)$$

一方、白色雑音源マトリックスの大きさ A は、TABLE 8 の素過程に Schottky の公式を適用すれば容易に求められる。

$$A = \begin{pmatrix} A_{NN} & -r_d \langle N \rangle & 0 \\ -r_d \langle N \rangle & r_d \langle N \rangle + r_\alpha \langle N^{(\alpha)} \rangle & -\langle \theta \rangle r_\alpha \langle N^{(\alpha)} \rangle \\ 0 & -\langle \theta \rangle r_\alpha \langle N^{(\alpha)} \rangle & \langle \theta^2 \rangle r_\alpha \langle N^{(\alpha)} \rangle + r_i \langle N^{(i)} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.292)$$

上式で、 A_{NN} は、中性子の核分裂、検出反応その他による捕獲に起因する雑音源であり、遅発中性子を無視した一点炉モデルでは、(4.25) 式のように与えられる。

問題は、 $\Phi(\omega)$ の (3-3) 要素、すなわち $\delta N^{(i)}$ のスペクトル密度を求めることである。(4.291)、(4.292) 式を用いて、計算すると次のような結果が得られる。

* γ は、近似的に次のように与えられる¹¹²⁾。

$$\gamma = \frac{e \bar{E}^2}{V_0} \mu_i$$

ここで、 e は電子 1 箇の荷電量、 \bar{E}^2 は、計数管内の電場の強さの 2 乗を体積平均したもの、 μ_i はイオンの mobility、 V_0 は印加電圧。

$$\Phi_{33}(\omega) = \frac{1}{r_i^2 + \omega^2} \left[r_d^2 r_\alpha^2 \langle \theta \rangle^2 \frac{A_{NN} - 2r \langle N \rangle}{(r^2 + \omega^2)(r_\alpha^2 + \omega^2)} + (\langle \theta^2 \rangle + \langle \theta \rangle) r_d \langle N \rangle \right]. \quad (4.293)$$

ただし、定常状態における期待値のみならず次の関係式を用いた。

$$r_\alpha \langle N^{(\alpha)} \rangle = r_d \langle N \rangle. \quad (4.294)$$

$$r_i \langle N^{(i)} \rangle = \langle \theta \rangle r_\alpha \langle N^{(\alpha)} \rangle = \langle \theta \rangle r_d \langle N \rangle. \quad (4.295)$$

ところで、雑音源の中性子-中性子成分は、(4.25) 式によって、次のように与えられている。

$$A_{NN} = Q + 2r \langle N \rangle. \quad (4.296)$$

上式を、(4.293) 式に代入し、(4.289) 式を用いると、出力電流の期待値のまわりのゆらぎは、次のようなスペクトル密度をもつことがわかる。

$$\Phi_{II}(\omega) = \frac{\gamma^2}{r_i^2 + \omega^2} \langle \theta \rangle^2 \left[\frac{r_\alpha^2}{r_\alpha^2 + \omega^2} \tilde{P}(\omega) + \frac{\langle \theta^2 \rangle + \langle \theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} r_d \langle N \rangle \right]. \quad (4.297)$$

ここで、 $\tilde{P}(\omega)$ は、中性子の検出反応率のゆらぎのスペクトル密度のうち、バイナリ雑音源からの寄与であり、一点炉モデルでは、

$$\tilde{P}(\omega) = \frac{r_d^2}{r^2 + \omega^2} Q. \quad (4.298)$$

となる。

α 粒子の全反応率 r_α は、 $10^7 \sim 10^8 \text{ sec}^{-1}$ であるから、炉雑音で問題とする周波数域では、(4.297) 式は、次のようにおける。

$$\Phi_{II}(\omega) = \frac{\langle \theta^2 \rangle \gamma^2}{r_i^2 + \omega^2} \left[\tilde{P}(\omega) + \frac{\langle \theta^2 \rangle + \langle \theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} C_1 \right]. \quad (4.299)$$

ただし、 C_1 は、平均の検出反応率である。すなわち、

$$C_1 = r_d \langle N \rangle. \quad (4.300)$$

この結果は、OSBORN *et al.*¹¹²⁾ が導いているものと一致している*。なお、2つの検出器出力の相互スペクトル密度には、上式右辺第 2 項の白色な寄与はなくなる。そこで、

$$\delta_{ab} = 1 \quad ; \quad \text{自己スペクトル密度の時,} \\ = 0 \quad ; \quad \text{相互スペクトル密度の時.}$$

と定義し、検出器の伝達特性

$$|h[i\omega]|^2 = \frac{\gamma^2}{r_i^2 + \omega^2} \quad (4.301)$$

* ただし、p. 44 の脚注にも触れたように、文献(112)では、電流値そのものの雑音スペクトル密度として、この式を得ている。これは誤りである。電流値の雑音スペクトル密度は、(4.299) 式に、 $2\pi \langle I \rangle^2 \delta(\omega)$ をつけ加える必要がある。

とおくと、出力電流の期待値のまわりのゆらぎのもつスペクトル密度を、次のように整理することができる。

$$\Phi_{11}(\omega) = |h[i\omega]|^2 \{ \langle \theta^2 \rangle \tilde{P}(\omega) + (\langle \theta^2 \rangle + \langle \theta \rangle) C_1 \delta_{ab} \}. \quad (4.302)$$

この結果を、(4.223) および (4.224) 式と比較してみよう。自己スペクトル密度に現われる検出反応率 C_1 を含む項の形が異なる。すなわち、(4.302) 式では、(4.223) 式に比べて、 $\langle \theta \rangle C_1$ だけ白色雑音が多くなっている。この原因は、(4.223) 式の導出の際、検出器内でおこる素過程を簡略化し、雑音源の一部を無視したことにある。いいかえれば、(4.223) 式は、次のような Langevin 方程式に対応している。

$$\frac{d}{dt} \delta N(t) = -r \delta N(t) + F(t), \quad (4.286)$$

$$\frac{d}{dt} \delta N^{(i)}(t) = -r_i \delta N^{(i)}(t) + \langle \theta \rangle r_d \delta N(t) + F^{(i)}(t). \quad (4.288')$$

上式における白色雑音源行列は、次のように与える。

$$A = \begin{bmatrix} A_{NN} & , & -\langle \theta \rangle r_d \langle N \rangle \\ -\langle \theta \rangle r_d \langle N \rangle & , & \langle \theta^2 \rangle r_d \langle N \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.292')$$

一方、LEHTO and CARPENTER⁸⁹⁾ は、ガンマ線の検出に用いた CO_2 -チェレンコフ検出器について、中性子数、光子数、コンプトン電子数、チェレンコフ光子数について、それぞれ、線型 Langevin 方程式を設定し、出力電流は、チェレンコフ光子の反応率に比例するとし、ゆらぎのスペクトル密度を求めている。チェレンコフ光子が、コンプトン電子により生成される過程から、新たに白色雑音が (4.271) 式の自己スペクトル密度に対する表式に加わる。

4.11 ま と め

不規則な雑音源に起因して炉雑音が生ずるという観点にたつて炉雑音現象の定式化を行なってきた。基本的前提は、炉の状態変数の不規則な時間的推移を、マルコフ過程とみなしうようまく変数の選択がなされていることである。この基本的前提から、次の事を示すことができた。

- Langevin 法を炉雑音現象の定式化に応用できること。
- 雑音源スペクトル密度は、白色であると仮定できること。
- 雑音源スペクトル密度の大きさは、Schottky の公式により定めることができること。

マルコフの状態変数がいくつかある時、これを縦に並べてベクトル f で表わす。零出力未臨界炉では、 f の成分として、各相空間セルにおける自由中性子数と遅発中性子先行核数を選ぶ。相空間が連続な場合には、 f は、

4.4 で指摘したように各相空間点における中性子数を成分とした無限次元ベクトルになる。定常状態における期待値 f_{1s} のまわりのゆらぎ δf に対して Langevin 方程式を設定する。その手続きは、以下の通りである。期待値 $\langle f(t) \rangle$ に対する運動方程式が与えられていたとしよう。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f(t) \rangle = J \langle f(t) \rangle + S_1. \quad (4.303)$$

零出力未臨界炉の場合は、単位時間当りの変化量の期待値を表わすベクトル J は、 $\langle f \rangle$ に関して線型な関数になる。定常状態における期待値 f_{1s} は、関係式 $J(f_{1s}) = 0$ によって定まる。いま原子炉は、定常に運転されていると考えよう。この炉に、何らかの外乱が加わって、炉の期待される状態は、 f_{1s} からずれていく。ずれの期待値 $\langle \delta f(t) \rangle = \langle f(t) \rangle - f_{1s}$ に対して、次のようにおこなうことができる。

$$\begin{aligned} J \langle f(t) \rangle &= J(f_{1s} + \langle \delta f \rangle) \\ &= J(f_{1s}) + B \langle \delta f \rangle. \end{aligned} \quad (4.304)$$

この時、 $\langle \delta f(t) \rangle$ は、次のような運動方程式を満足する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta f(t) \rangle = -B \langle \delta f(t) \rangle + \text{外乱項}. \quad (4.305)$$

そこで、期待値 f_{1s} のまわりの不規則なゆらぎ $\delta f(t)$ は、不規則な雑音源 $F(t)$ により生ずると考え、次のような Langevin 方程式を設定する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f(t) = -B \delta f(t) + F(t). \quad (4.306)$$

一般の非線型系においても、定常状態における期待値のまわりの微小変動に対する平均の運動方程式が、線型化近似で (4.305) のように与えられている場合、期待値のまわりのゆらぎに対する Langevin 方程式を (4.306) のように与えることができる。一方、形式的には、期待値のまわりのゆらぎ δf に対してではなく、 f そのものに対する Langevin 方程式を設定することができる。雑音源の形は、両者の間には当然差異がある。Dalfes³⁸⁾ は 1 空間点モデルで、 f そのものに対する Langevin 方程式を設定している。この場合、雑音源の性質は、あらかじめ Fokker-Planck の方程式から得られた期待値および分散に対する運動方程式と一致するように定めている。

本報では、雑音源は、まず、定常状態におけるゆらぎの期待値 $\langle \delta f(t) \rangle$ は、ゼロであることと矛盾しないように、次の関係を満足するよう要請をおいた。

$$\langle F(t) \rangle = 0. \quad (4.307)$$

ついで、雑音源スペクトル密度が白色であること、いいかえれば、

$$\langle F(t) F(u) \rangle \propto \delta(t-u). \quad (4.308)$$

であるということを要請した。この要請が、Langevin 方程式 (4.306) の形と無関係ではないことは、4.7 で導いた Nyquist の定理によって示すことができた。物理的には、この要請は、Moore¹⁰⁰⁾ がのべているように、わ

れわれが状態ベクトル \mathbf{f} のゆらぎを観測する時間尺度が、雑音源の相関時間に比べて十分粗いということの意味する。COHN³⁴⁾ は、中性子の散乱、吸収、核分裂反応、先行核の自然崩壊、外部源からの中性子放出が不規則におこることが、零出力炉の雑音源になること、したがって、雑音源の相関時間は、これら核反応の持続時間、 10^{-20} sec 程度のオーダーであることを指摘した。炉雑音実験の観測域は、たかだか 10^{-6} sec 程度までであろうから、白色スペクトル密度の仮定は零出力炉では、正しいであろう。

雑音源スペクトル密度の大きさ

$$\begin{aligned} \Phi_{FF}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(u) \rangle \exp[-i\omega(t-u)] d(t-u) \\ &= \text{Const.} \\ &= 2D. \end{aligned} \quad (4.309)$$

を定めるにあたっては、まず、Langevin 方程式 (4.306) に表われる“摩擦係数”に相当した作用素 B と“拡散定数”に相当した D との間に、次のような Einstein の関係式があることを、4.7 で示した。

$$2D = B \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle B^T. \quad (4.310)$$

これは、Nyquist の関係式

$$\Phi_{FF}(\omega) = Br[i\omega] \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle Br^T[-i\omega]. \quad (4.311)$$

の特殊な場合に相当する。 $\delta \mathbf{f}(t)$ が、ある種の時間おくれ効果を受ける場合も考慮して、Langevin 方程式 (4.306) を、次のように一般化しよう。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{f}(t) = - \int_{-\infty}^t d\tau Br(t-\tau) \delta \mathbf{f}(\tau) + \mathbf{F}(t). \quad (4.312)$$

上式に表われる $Br(t)$ のフーリエ・ラプラス変換 $Br(\omega)$ が定数であるならば、雑音源スペクトル密度 $\Phi_{FF}(\omega)$ も定数であることを Nyquist の関係式は示している。いかえれば、 $Br(t) = B\delta(t)$ で、上記 Langevin 方程式が (4.306) のように書ける場合は、 $\Phi_{FF}(\omega)$ は白色で、その大きさは、Nyquist の定理の特殊な場合に相当した Einstein の関係式で定められる。ただし、分散行列 $\langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle$ の値が未知である。体系が、純粋にポアソンの場合は、相異なる 2 つの成分間の分散はゼロ、同一成分に対する分散はその成分の期待値に等しくなり、分散行列 $\langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle$ は、期待値ベクトル \mathbf{f}_{is} を対角線上に並べた対角行列 E になる。すなわち、

$$\begin{aligned} E_{ij} &= f_{is}^{(i)} \quad ; i=j \text{ の時,} \\ &= 0 \quad ; i \neq j \text{ の時.} \end{aligned} \quad (4.313)$$

この時、2 時点相関関数 $\Gamma(t, u)$ は、4.4 で示したように、次のような形になる。

$$\begin{aligned} \Gamma^s(t, u) &= Gr(t-u)E \quad ; t \geq u \text{ の時,} \\ &= EGr^T(u-t) \quad ; t < u \text{ の時.} \end{aligned} \quad (4.314)$$

ここで、 $Gr(t)$ は、Langevin 方程式 (4.306) に対するグリーン関数行列である。物理的には、(4.314) は次のような内容をもつ。いま、 $t \geq u$ としよう。時刻 u に、ある相空間セル j に、中性子が 1 箇存在していたとしよう。その中性子または子孫中性子が、時刻 t に、相空間セル

i に表われる確率は $Gr_{ij}(t-u)$ に等しい。セル j に、 $f_{is}^{(j)}$ 箇の中性子が存在していたとすると、そのうちのいずれか 1 箇またはその子孫が、セル i に表われる確率は $Gr_{ij}(t-u)f_{is}^{(j)}$ 、すなわち、相関関数 $\langle \delta f^{(i)}(t) \delta f^{(j)}(u) \rangle$ に等しくなる。純粋なポアソン体系でみられるこの種の相関を直接相関と名づける。

直接相関を生みだす雑音源は、Einstein の関係式 (4.310) を用いて、 $(BE + EB^T)$ の形にまとめられる。そのほかに、誘導核分裂あるいは自発核分裂の際、複数箇の 2 次中性子が放出されるという分枝反応があるため、分散は、純粋なポアソン体系に比べて大きくなる。

4.5 で、マルコフ的の体系に対する Smoluchowski の条件

$$P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}_0; t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f}' | \mathbf{f}; \Delta t) P(\mathbf{f} | \mathbf{f}_0; t)$$

を用いて、次のような関係式を導いた。

$$\sum_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \langle R_i \rangle = B \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle + \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f} \rangle B^T. \quad (4.315)$$

ここで、 \mathbf{q}_i は、タイプ i の核反応による各相空間セルにおける中性子数の変化量を、縦に並べたベクトルである。 $\langle R_i \rangle$ は、単位時間当りのタイプ i の反応数の期待値。和は、すべての反応のタイプについてとる。

Einstein の関係式 (4.310) を用いると、白色雑音源の大きさは、次のように与えられる。

$$2D = \sum_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \langle R_i \rangle. \quad (4.316)$$

これを、Schottky の公式という。この公式は、COHN³⁴⁾ が炉内で不規則に起こる核反応と、二極管陰極面から放出される電子の不規則な流れとの類似性に注目して炉雑音源の確定のために導入したものである。COHN の洞察が正しいものであることを 4.5 では、マルコフ性の前提を用いて示したわけである。この公式は、そのままの形で SHEFF and ALBRECHT¹³⁹⁾ の拡散モデルによる炉雑音源の確定に利用されている。一方、AKCASU and OSBORN¹⁾ は、やや形をかえて、次の 3 つの前提を用いて雑音源を確定している。すなわち、1) 中性子の吸収、核分裂、散乱、外部源からの中性子の放出等の反応は、互いに統計的に独立である。2) 単位時間・単位体積当り各核反応が起こる確率は、時間的に一定で、ちょうど単位時間・単位体積当り起こるその核反応数の期待値に等しい。3) 相異なる 2 時点、相異なる 2 空間点における核反応数のゆらぎは、統計的に独立である*。

零出力炉においては、雑音源スペクトル密度は、結局、次の形にまとめることができることを 4.6 で示した。

$$2D = Q + BE + EB^T. \quad (4.317)$$

核分裂に起因する Q を“binary”雑音源、他を“single”雑音源と呼ぶ。バイナリ雑音源に起因したゆらぎの相関関数 $\Gamma^b(t, u)$ は、次のように表わされる。

$$\Gamma^b(t, u) = \int_{-\infty}^{\xi} d\tau Gr(t-\tau) Q Gr^T(u-\tau), \quad (4.318)$$

ただし、 $\xi = t$ と u のうち小さいほう。

* この仮定は、おかしい。

外部源の放出反応は、ポアソンの系であるが、たとえば、中性子の吸収反応は、ポアソンの系ではない。

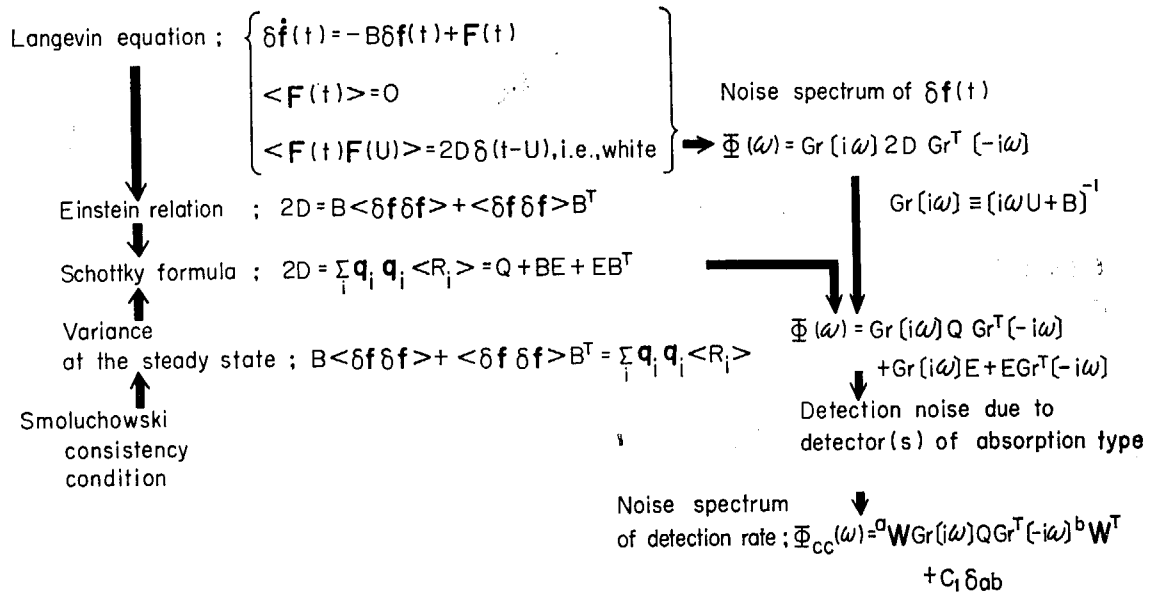


Fig. 5 Langevin's approach to linear Markoffian processes

これは、時刻 τ に起こった核分裂反応により生まれた 2 次中性子またはその子孫が 1 箇は時刻 t に、他の 1 箇は時刻 u に生まれる結合確率を示している。すなわち過去のある時刻に起こった核分裂反応を共通の分枝点としてもつ中性子対を表わす。(4.314) と (4.318) とを合わせたものが零出力未臨界炉における中性子数のゆらぎの相関関数である。以上のべた線型マルコフ過程に対する Langevin 法の手続きをまとめると Fig. 5 のようになる。

雑音源 (4.317) の表式は、一義的ではない。なぜならば、定常状態における期待値のみたすべき条件として、 $J(f_{is})=0$ があるから、他に種々書き表わすことはできよう。(4.317) の形は、雑音源スペクトル密度行列の対称性をよく表わしているという利点がある。遅発中性子を考慮にいれた場合にも、中性子・先行核の 2 つの成分からなる雑音源ベクトルのスペクトル密度行列は白色と仮定してよいことを 4.3 で示した。ただし、先行核場に対する雑音源を等価な中性子場の雑音源におきかえ、グリーン関数行列の中性子-中性子成分を通じて伝播されるという立場をとるならば、遅発中性子を考慮することにより周波数依存のある雑音源を考えなければならなくなる。したがって、SHEFF and ALBRECHT¹³⁹⁾ が指摘しているように Schottky の公式により雑音源を確定することができなくなってしまう。

雑音源は、位置空間 x に関しては、AKCASU and OSBORN¹⁾ が第 3 の前提として用いているように統計的に独立と考えられる。すなわち、雑音源の $(x-x')$ 成分は、 $\delta(x-x')$ に比例し、空間的に白色であると考えられる。ただし、これは、輸送理論における話であり、多点炉モデル、拡散モデルでは、ある空間セルからの中性子のもれが確率的におこり、相異なる位置空間点の間の雑音源は相関をもつようになる。エネルギー的には、散乱あるいは核分裂により相異なる 2 点での中性子の生

成・消滅が行なわれるので互いに相関をもつ。

炉雑音に関する情報は、中性子検出器の出力としてわれわれの手に入る。検出器出力の相関関数は、中性子数の相関関数には比例しないことを 4.8 で示した。検出反応の際、放出される検出量の大きさが必ずしも一定ではなくある確率法則に従うこと、および検出量の放出が検出回路固有の時定数をもつ応答関数 $h(t)$ に支配されることにより、検出器出力のゆらぎのスペクトル密度は、検出器内でおこる検出反応数のゆらぎのスペクトル密度と異なることをまず示した。本報では、検出器出力応答関数 $h(t)$ は、各検出反応には関係しない一定のものと考えたが、これがランダム関数である場合の問題は、MATTHES⁹²⁾ が扱っている。結論的には、(4.132) あるいは (4.149) 式に表われる $h(\xi)h(\eta)$ あるいは ${}^a h(\xi) {}^b h(\eta)$ をそれぞれ集合平均 $\langle h(\xi)h(\eta) \rangle$ あるいは $\langle {}^a h(\xi) {}^b h(\eta) \rangle$ とおきかえればよい。

検出器が中性子場へおよぼす効果として、検出反応の際、中性子を吸収し、検出器によっては 2 次中性子を放出することが挙げられる。この効果は、炉雑音現象において 2 つの意味をもつ。一つは、期待値に関する実験においても同様であるが、検出器挿入により中性子増倍過程が乱されることである。このことは、検出器を原子炉構成材の一部とみなせば解決する。もう一つは、中性子吸収によりその中性子が将来もつであろう直接相関を断ち切ること、および検出反応の際生じた 2 次中性子またはその子孫中性子が後に再び検出されることによる検出相関項を新たに生みだすことを意味する。

検出反応率のゆらぎの相関関数 $\Gamma_{cc}(t, u)$ は、この検出相関項と中性子場のゆらぎの相関を検出したことによる寄与とから成る。後者のうち、バイナリ雑音源からの寄与 $\Gamma^b(t, u)$ は、時刻 t および u に表われる中性子対が同一の核分裂から生じた子孫中性子対であるとはいえ、それぞれ相異なるものである。したがって、 $\Gamma^b(t, u)$ に

比例した $\Gamma_{cc}(t, u)$ への寄与を生みだす. シングル雑音源は, 検出の際, 1 箇の中性子が消滅し, 同時に 1 箇の検出パルスが生ずるといふ素過程からの寄与と打消し合っ
て, 検出反応数の相関関数には寄与しない. さらに, 同一検出器の自己相関関数 $^{aa}\Gamma(t, u)$ には, 検出過程の不規則性に由来した $\delta(t-u)$ に比例する白色な寄与が加わる. 相異なる 2 つの検出器反応数の間の相互相関関数には, このような寄与はしない. SHEFF and ALBRECHT¹³⁹⁾, AKCASU and OSBORN¹⁴⁾ いずれも検出カウント数の相関関数の問題をあつかっているが, シングル雑音源からの寄与を十分整理しきっていない.

検出反応率のゆらぎは, 一方, 出力電流値のゆらぎと比例関係にあるわけではない. 計数管内のイオン化過程, イオンおよび電子の拡散, ドリフト, 再結合等の素過程に伴う雑音が発生する. 計数管雑音の問題は, 非線型性を含む複雑な現象ではあるが, 線型マルコフ近似を用いて模擬することはできる. イオンおよび電子の集積に対する時定数は, 計数管内の中性ガス密度, 温度, 印加電圧等に関係するが, 通常, 用いられている状態では, 中性子家系の時定数 α^{-1} に比べて十分短く, 計数管の伝達特性の影響は, ないものと考えられる. しかしなが

ら, 計数管内の素過程に起因する白色雑音が, 出力電流の自己スペクトル密度に新たに加わる.

核分裂の際, 放出される即発ガンマ線—光子の反応を検出するという事は, 核分裂計数管で中性子の核分裂反応を検出するという事とはほぼ同等な意味をもつ. ただ, 後者では, 検出に際して 2 次中性子が放出されるのに対し, 前者では, 中性子—光子場への影響がないという点だけが異なる. 光子数のゆらぎは中性子数のゆらぎと同等の炉動特性に関する情報を含んでいる.

以上, 本章では, Langevin 法を一貫して用い, 炉雑音実験において重要な役割を果す 2 時点相関関数に対する表式を導いた. Langevin 法は, Kolmogorov 法, Feynman 法に比べて, やや厳密性を欠くという批判もあったが, 炉雑音現象をマルコフ過程として扱えるようランダム変数がうまく選ばれていることを基本的前提として, Moore-Cohn 流の Langevin 法の正当性を裏付けることができた. 零出力炉の場合のみならず, フィード・バックのある高出力炉の場合にも, マルコフ的ランダム変数を見出すことにより, 本章でのべた Langevin 法は, 拡張可能である¹³²⁾.

5. 中性子輸送の確率論的考察

5.1 はじめに

前章では、炉雑音をひきおこす雑音源を想定し、Langevin 方程式を背景に、中性子数、観測量の分散、炉雑音の 2 時点相関関数、スペクトル密度に対する表式を特に零出力炉を対象に導出した。基本的前提は、炉雑音を記述する状態変数が、マルコフ的であるということであった。炉雑音現象が、さらに、ガウスの (Gaussian) であれば、3 時点以上の多時点相関関数はゼロになり、また、中性子数、観測量の確率分布そのものも、分散がわかれば、完全に定まる。

実際には、炉雑音現象はガウスのではなく、多時点相関関数が存在する。その表式を原理的には、Langevin 法により定めることはできる。しかしながら、すでに 2 時点相関関数に関する前章の議論から明らかになったように、原子炉における中性子場のゆらぎがポアソンのもの以外に特異な確率的性質をもち、炉雑音実験が、実用上意義あるものになっている理由は、核分裂、外部源の崩壊 (たとえば、 ^{238}U の自然崩壊)、検出 (たとえば、核分裂計数管による) 等の反応の際、複数箇の 2 次粒子が放出されるいわゆる分枝反応が存在しているからであった。この分枝反応の存在が、一方では炉雑音現象を単なるガウスのもの以上に複雑なものにしている。本章では、中性子の分枝過程に注目した炉雑音現象の理論構成を示す。

まず、5.2 では、BELL¹⁷⁾ の方式に従い、1 箇の中性子を投入することにより起動された非定常状態にある原子炉における中性子数の確率母関数の従う運動方程式を導出し、通常用いられるいわゆる Boltzmann 方程式との関係についてのべる。5.3 では、さらに 1 箇の中性子あるいは先行核を投入することにより起動された非定常状態にある原子炉における中性子数、先行核数、観測量の確率分布母関数の従う運動方程式を導く。ついでこの母関数と外部源、特に、ポアソンの中性子または先行核を放出する外部源のある原子炉での確率分布母関数との関連を示す。5.4 では、運動方程式の解析解が階乗モーメント展開の形で求められることを示す。その結果を用いれば、ポアソン源のある体系での確率母関数は、階乗キュムラント展開の形で求めうる事がわかる。

5.5 では、まず、RAMAKRISHNAN¹²²⁾ による階乗モー

メントの確率論的解釈に基づき、積密度グリーン関数を導入する。高位の積密度グリーン関数が、より低位の積密度グリーン関数から構成されている仕組みを、中性子家系の増倍の形態と結びつけて、物理的に解明する。この方法は、Rossi- α 法の解析公式の導出に FEYNMAN が用いた方法の拡張になっている。

ところで、中性子数の平均分布に対する運動方程式を記述するいわゆるボルツマン作用素は、自己随伴形ではないので、その随伴作用素により記述される運動方程式をみだす物理量は、特に、インポートランス (importance) と呼ばれ、炉物理特有の観測理論を構成している¹⁸³⁾。

5.6 では、中性子の平均的ふるまいに関連して、従来用いられてきたインポートランス場のほかに、新たに、中性子の確率的ふるまいに関連したインポートランス場を導入し、同時に、観測量の高次モーメント、多時点相関関数に対する表式を導出する。

5.2 中性子輸送にたいする基礎方程式

5.2.1 中性子のふるまい

原子炉内の場所 \mathbf{x} に、速度 \mathbf{v} をもった中性子が 1 箇、時刻 t に投入されたとしよう。原子炉は、凸型 (convex) の表面でかこまれているとする。簡単のために、遅発中性子の存在を無視しよう。この時、問題は、時刻 $t_i (\geq t)$ に炉内のある領域 V に存在する中性子数 N を求めることである。

Fig. 6 に示したように、投入された中性子は、もし、

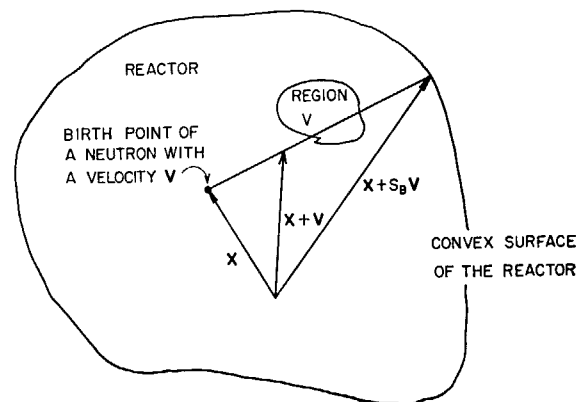


Fig. 6 Transport variables

媒質原子と反応をおこさなければ、 s_B 時間後には、原子炉から逃げ去ってしまう。媒質の性質は、時間的に一定で変わらないものとし、反応断面積 $\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ を導入しよう。すなわち、投入された中性子が、 $\mathbf{x} + s\mathbf{v}$ と $\mathbf{x} + (s + ds)\mathbf{v}$ の間 ($s \leq s_B$) で衝突をおこす確率は、次のように与えられる。

$$\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) v ds \exp\left[-\int_0^s ds' v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})\right]. \quad (5.1)$$

さらに、媒質の性質として、衝突後、 j 箇の 2 次中性子が生じ、それらが、速度 \mathbf{v}_1 のまわりの $d\mathbf{v}_1$ 中に 1 箇、速度 \mathbf{v}_2 のまわりの $d\mathbf{v}_2$ 中に 1 箇…、速度 \mathbf{v}_j のまわりの $d\mathbf{v}_j$ 中に 1 箇、それぞれ分布している確率

$$p_j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \dots d\mathbf{v}_j$$

が与えられているものとしよう。この確率は、次のように規格化されている。

$$p_0(\leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 \dots \int d\mathbf{v}_j p_j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) = 1. \quad (5.2)$$

上式で積分は、全速度領域にわたっておこなう。特に、

$$\Sigma_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) p_0(\leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}), \quad (5.3)$$

$$\Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \equiv \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) p_1(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \quad (5.4)$$

とにおいて、これらをそれぞれ捕獲断面積、散乱微分断面積と呼ぶ。また、

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv \int d\mathbf{v}' \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \quad (5.5)$$

とにおいて、これを散乱断面積と呼ぶ。一方、

$$\begin{aligned} \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &\equiv \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \Sigma_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \Sigma_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 \dots \int d\mathbf{v}_j \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) p_j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

を、核分裂断面積と呼ぶ。特に、2 箇以上生じた 2 次中性子の速度分布の間に相関がないと仮定すると

$$p_j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) = p(j \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}) \chi(\mathbf{v}_1) \chi(\mathbf{v}_2) \dots \chi(\mathbf{v}_j); j \geq 2 \quad (5.7)$$

と分解できる。ただし、 $\chi(\mathbf{v})$ は、分裂により生じた 2 次中性子の速度分布関数で、次のように、規格化されているものとする。

$$\int d\mathbf{v} \chi(\mathbf{v}) = 1. \quad (5.8)$$

以上のような定義からも明らかなように、媒質の巨視断面積とは、1 箇の中性子が単位長さ移動する場合に反応をおこす確率の大きさとして導入されたものであり、原子炉における中性子の挙動は、本来、確率的な性格をおびているものである。すなわち、自由飛行による移動、散乱、吸収反応といった素過程を不規則に繰り返していき、時として、核分裂反応をおこして、子孫を増やしていく。この際、生成される子孫中性子数も、確率的にしか予測できない。したがって、われわれは、 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$

に 1 箇投入された中性子により、後の時刻 t_1 に領域 V 中に存在する中性子数 N も、確率的にしか予測できないことになる。

5.2.2 初衝突確率法による中性子存在確率のしたがう運動方程式の導出

時刻 t に、場所 \mathbf{x} へ速度 \mathbf{v} をもつ中性子が 1 箇投入された時、後の時刻 $t_1 (\geq t)$ に、領域 V 中に N 箇の中性子の存在する確率を $P(N, V, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ としよう。投入された中性子は、時間と共に \mathbf{v} 方向へ移動する。もし、時刻 $t+s$ と $t+s+ds$ の間の微小時間 ds に媒質原子と反応をおこせば、(その確率は (5.1) 式で与えられる) 2 次中性子が、確率法則 p_j に従って生成される。もし $j=0$ であれば、その反応は、捕獲反応であり、炉内に中性子は存在しなくなる。したがって、存在確率 P は、 $N=0$ の場合を除いては、ゼロである。 $j=1$ の場合には確率 $\Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{v}(t+s)) d\mathbf{v}'$ で、新たに、速度が \mathbf{v}' と $\mathbf{v}' + d\mathbf{v}'$ の間の中性子が 1 箇生ずる。そこで、時刻 $t+s$ に場所 $\mathbf{x} + \mathbf{v}(t+s)$ に、速度 \mathbf{v}' をもつ中性子が 1 箇投入されたと考え ($s < t_1 - t$ とする)、これによる時刻 t_1 での存在確率を新たに問題にする。 $j=2$ の場合は、2 箇の中性子のうち、一方が時刻 t_1 で m 箇 ($=0, 1, 2, \dots, N$) の中性子を生じ、他の一方が $N-m$ 箇の中性子を生ずればよい。合わせて、 N 箇の中性子が生ずることになる。

こうして、始めに投入された 1 箇の中性子の時刻 t_1 までの反応歴を追っていくと、求める存在確率に対する次のような関係式が得られる。

$$\begin{aligned} P(N, V, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \int_0^{l(s_B, t_1-t)} ds v \Sigma_t(\mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &\times \exp\left[-\int_0^s ds' v \Sigma_t(\mathbf{x} + s'\mathbf{v}, \mathbf{v})\right] \\ &\times \left[p_0(\leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + s\mathbf{v}) \delta_{N0} + \int d\mathbf{v}' p_1(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + s\mathbf{v}) \right. \\ &\times P(N, V, t_1 | \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}', t+s) \\ &+ \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 p_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + s\mathbf{v}) \\ &\times \sum_{m=0}^N P(m, V, t_1 | \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, t+s) \\ &\times P(N-m, V, t_1 | \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, t+s) \\ &+ \sum_{j=3}^{\infty} \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 \dots \int d\mathbf{v}_j p_j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + s\mathbf{v}) \\ &\times \sum_{\Sigma m_i=N} \left. \left[\prod_{i=1}^j P(m_i, V, t_1 | \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}_i, t+s) \right] \right] + u. \end{aligned} \quad (5.9)$$

ここで

$$l(a, b) = \text{lesser of } a \text{ or } b,$$

$$\delta_{ij}; \text{ Kronecker's delta.}$$

また和 $\sum_{m_i=N}^j$ は、条件 $\sum_{i=1}^j m_i = N$ を満足する整数セット $\{m_1, m_2, \dots, m_j\}$ のあらゆる場合について加え合わせることを意味する。(5.9) 式右辺最後の項 u は、投入中性子が、外へもれるか、あるいは、時刻 t_f までに一度も衝突しないという可能性を考慮する補正項であり、次のように与えられる。

$$u \equiv \delta_{N_0} u'$$

$$= \delta_{N_0} \exp \left\{ - \int_0^{s_B} ds v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}) \right\}$$

; $t_f - t \geq s_B$ の時, (5.10a)

$$u \equiv \delta_{N_0} u'$$

$$= \delta_{N_0} \exp \left\{ - \int_0^{t_f - t} ds v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}) \right\};$$

; $t_f - t < s_B$ でかつ $(\mathbf{x} + \mathbf{v}(t_f - t), \mathbf{v}) \notin V$ の時, (5.10b)

$$u \equiv \delta_{N_1} u'$$

$$= \delta_{N_1} \exp \left\{ - \int_0^{t_f - t} ds v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}) \right\}$$

; $t_f - t < s_B$ でかつ $(\mathbf{x} + \mathbf{v}(t_f - t), \mathbf{v}) \in V$ の時. (5.10c)

(5.9) 式を求めるのに用いられた方法は、“First Collision Probability (以下 FCP と略す)” の方法と呼ばれ、宇宙線のなだれ現象の定式化に始め用いられ、後に PÁL¹⁷⁾ および BELL¹⁷⁾ によって、中性子輸送過程の定式化に応用されたものである。

ここで、存在確率 P に対する確率母関数を定義しよう。すなわち、

$$G(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$\equiv \sum_{N=0}^{\infty} z^N P(N, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.11)$$

(5.9) 式に z^N を乗じ、 N について和をとる。反応断面積に関する (5.3), (5.4), (5.6) の定義および (5.7) の仮定を用いると結果は、次のように表わされる。

$$G(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$= \int_0^{t(s_B, t_f - t)} ds v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v})$$

$$\times \exp \left\{ - \int_0^s ds' v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s', \mathbf{v}) \right\}$$

$$\times \left[\frac{\Sigma_c(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v})}{\Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v})} + \frac{1}{\Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v})} \right]$$

$$\times \int d\mathbf{v}' \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{v}s)$$

$$\times G(z, V, t_f | \mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}', t + s)$$

$$+ \frac{\Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v})}{\Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v})} \sum_{j=2}^{\infty} p(j \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}) \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \right]^j$$

$$\times G(z, V, t_f | \mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}', t + s) \Big]^j$$

$$+ u'(z). \quad (5.12)$$

上式、右辺最後の項は、補正項 u に対して (5.10a), (5.10b) 式が成り立つ場合には、 u' , (5.10c) 式が成り立つ場合には $u'z$ となる。

確率母関数の満足する運動方程式を導こう。中性子の投入時刻を δs だけ遅らせ、投入点を $\mathbf{x} + \mathbf{v}\delta s$ とし、(5.12) 式に対応する関係式を導く。これは、(5.12) 式の時間に関する積分の下限 0 を δs とおきかえただけで、他は、同じである。これから (5.12) 式を差引き、 δs で割って、極限操作 $\delta s \rightarrow 0$ を行なう。次の結果が得られる。

$$\left(\mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) G(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$= v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) G(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - v \Sigma_c(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

$$- \int d\mathbf{v}' v \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{v}) G(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t)$$

$$- v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \sum_{j=2}^{\infty} p(j \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v})$$

$$\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') G(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^j. \quad (5.13)$$

同時に、境界条件として、

$$G(z, V, t_f | \mathbf{x}_B, \mathbf{v}_{\text{out}}, t) = 1. \quad (5.14)$$

また、終期条件として

$$G(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t_f) = z \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V \text{ の時,}$$

$$= 1 \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \notin V \text{ の時.} \quad (5.15)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{x}_B は、原子炉の外表面上、 \mathbf{v}_{out} はその上で方向が外向きの速度ベクトルを意味する。

BELL¹⁷⁾ は、さらに、次式で定義される \tilde{G} を導入した。すなわち、

$$\tilde{G} \equiv 1 - G. \quad (5.16)$$

方程式 (5.13) で、 G を $1 - \tilde{G}$ でおきかえると、次の結果が得られる。

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \tilde{G}(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$= - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1) \dots (\nu-j+1) \rangle$$

$$\times v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \tilde{G}(z, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^j. \quad (5.17)$$

ただし、 L^+ は、随伴ボルツマン作用素で、任意の関数 $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に対して、次のように定義される。

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$= \left[- \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} + v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right] \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$- v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \int d\mathbf{v}' \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) k(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}). \quad (5.18)$$

ただし*

$$k(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \frac{\Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x})}{\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})}$$

$$+ \frac{\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \langle \nu \rangle \chi(\mathbf{v}'). \quad (5.19)$$

また

$$\langle \nu(\nu-1) \dots (\nu-j+1) \rangle$$

* 核分裂をおこした中性子の位置 \mathbf{x} , 速度 \mathbf{v} に、 ν, χ は依存するが、このことは以後あらわには書かないことにする。

$$= \sum_{\nu=j}^{\infty} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1) p(\nu|\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (5.20)$$

方程式 (5.17) に対する境界条件は、次の通り。

$$\tilde{G}(z, V, t|\mathbf{x}_B, \mathbf{v}_{out}, t) = 0. \quad (5.21)$$

また、終期条件は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{G}(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= 1-z \quad ; (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V \text{ の時,} \\ &= 0 \quad ; (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \notin V \text{ の時.} \end{aligned} \quad (5.22)$$

なお、一点炉モデルでは、(5.17) 式は、次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{d}{dt} + \alpha\right) \tilde{G}(z, t|t) \\ &= -v \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1) \rangle \\ &\quad \times [\tilde{G}(z, t|t)]^j. \end{aligned} \quad (5.17')$$

ここで、 α は、中性子の減衰係数である。

5.2.3 中性子輸送方程式の導出

前節で導いた運動方程式は、中性子輸送現象を記述する最も基本的な方程式である。解 $\tilde{G}(z, V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ がわかれば、 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に投入した1箇の中中性子が、時刻 t に領域 V 中に生みだす中性子数の期待値 $\langle N(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle$ のみならず、その分散 $\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ や高次モーメント、あるいは、 V 中の中性子数が N 箇である確率等も容易に算出することができる。すなわち、(5.11)、(5.16) の定義から

$$\begin{aligned} \langle N(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle &= \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=1} = - \left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z} \right|_{z=1}, \\ \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 &= \left. \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right|_{z=1} + \langle N \rangle - \langle N \rangle^2 \\ &= - \left. \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial z^2} \right|_{z=1} + \langle N \rangle - \langle N \rangle^2, \\ P(N, V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \left. \frac{1}{N!} \frac{\partial^N G}{\partial z^N} \right|_{z=0} = - \left. \frac{1}{N!} \frac{\partial^N \tilde{G}}{\partial z^N} \right|_{z=0} \end{aligned}$$

となることがわかる。

特に、期待値 $\langle N \rangle$ の従う運動方程式を導いてみよう。(5.17) 式を z について1回微分し、 $z=1$ とおいてみる。次のような線形同次方程式が得られる。

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \langle N(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = 0. \quad (5.23)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \langle N(V, t|\mathbf{x}_B, \mathbf{v}_{out}, t) \rangle &= 0, \quad (5.24) \\ \langle N(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle &= 1 \quad ; (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V \text{ の時,} \\ &= 0 \quad ; (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \notin V \text{ の時.} \end{aligned} \quad (5.25)$$

ここで、独立変数 $\mathbf{x}', \mathbf{v}', t'$ 等をひとまとめにして y とおいた時、任意の関数 $\psi_1(y'), \psi_2(y')$ に対する内積を次のように定義しよう。

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv \int d y' \psi_1(y') \psi_2(y'). \quad (5.26)$$

積分は、 y' の全定義域にわたって行なう。また、任意の作用素 O に対して、次の関係を満足する作用素 O^+ は、

O の随伴 (adjoint) 作用素と呼ばれる。

$$(\psi_1, O \psi_2) = (O^+ \psi_1, \psi_2). \quad (5.27)$$

随伴作用素 O^+ の随伴作用素は、当然のことながらも O の作用素 O である。

内積を用いると、期待値 $\langle N \rangle$ は、次のように表わされることがわかる。すなわち

$$\langle N(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = (f_1^+, S). \quad (5.28)$$

ただし、

$$f_1^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \equiv \langle N(V, t|\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \rangle. \quad (5.29)$$

$$S(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \equiv \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \delta(t' - t). \quad (5.30)$$

ここで、 $\delta(y)$ は、Dirac's delta function である。

$S(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')$ は、 $\mathbf{x}' = \mathbf{x}, \mathbf{v}' = \mathbf{v}, t' = t$ に1箇の中中性子が炉内に投入されたという事実を表わす。すなわち、中性子源である。また、 $f^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')$ は、 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')$ に投入された1箇の中中性子により、時刻 t に領域 V 中に存在する中性子数の期待値を表わす分布関数で、これをインポート関数と呼ぶ。中性子の投入時相空間点が異なれば、 V 中に時刻 t に存在する中性子数の期待値も当然異なる。インポート関数は、投入中性子が将来生みだす中性子数の期待値を表わしている。

さて、ここで、 L^+ の随伴作用素

$$L \equiv (L^+)^+ \quad (5.31)$$

を導入して、次の方程式

$$L(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) = S(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0). \quad (5.32)$$

の解の意味を考えてみよう。随伴作用素に関する定義から、 $f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ のみたすべき境界条件として

$$f_1(\mathbf{x}_B, \mathbf{v}_{in}, t_0) = 0, \quad (5.33)$$

また、初期条件として

$$f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t) = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}). \quad (5.34)$$

が得られる ($t < t_0, t_1$)。ただし、 \mathbf{v}_{in} は、外境界 \mathbf{x}_B 上で内向きのベクトルを持つ速度を意味する。また、 L は、任意の関数 $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に対して、次のような作用をする作用素で、ボルツマン作用素と呼ばれる。

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} + v \sum_i \Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right] \psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad - \int d \mathbf{v}' k(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v}', \mathbf{x}) v' \Sigma_t(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t). \end{aligned} \quad (5.35)$$

(5.32) 式左辺を、(5.28) 式右辺へ代入しよう、さらに随伴作用素の定義 (5.27) を用いると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \langle N(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle &= (f_1^+, L f_1) \\ &= (L^+ f_1^+, f_1). \end{aligned}$$

さらに、(5.23) 式および終期条件 (5.25) を用いると、上式は、次のようになる。

$$\langle N(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = \iint_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \in V} d \mathbf{x}_0 d \mathbf{v}_0 f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_1). \quad (5.36)$$

特に、 V として、微小体積要素 $\delta \mathbf{x}_0 \delta \mathbf{v}_0$ を選ぼう。すると、

$$\langle N(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_f) \delta \mathbf{x}_0 \delta \mathbf{v}_0.$$

が得られる。すなわち、 f_1 は、単位相空間体積当たり存在する中性子数の期待値である。こうして、方程式 (5.32) は、中性子密度の満足すべき運動方程式であることがわかった。この方程式は、通常^{173, 189)}、中性子輸送方程式と呼ばれている。

5.3 存在確率母関数にたいする運動方程式

前節では、遅発中性子を無視した場合、投入中性子1箇が、後の時刻に生みだす子孫中性子数の従う確率母関数の従う運動方程式 (5.13) を FCP 法を用いて導出した。ここでは、その結果をより一般化して、1) 遅発中性子を考慮した場合、2) 検出器による検出反応数を問題にする場合、3) 外部中性子源が存在する場合について、基礎関係式を導いてみよう。

5.3.1 遅発中性子を考慮した場合

方程式 (5.17) を修正する際の一つの考え方は、遅発中性子を、自由中性子場に対する先行核の崩壊定数の逆数に等しい時定数をもつ“遅れ”とみなす考え方である。PÁL¹⁷⁷⁾、BELL¹⁷⁷⁾は、この立場をとっている。先行核数のゆらぎを問題にする場合もあることを考慮して、本報では、中性子数、先行核数を同時に扱おう。

時刻 t に、場所 \mathbf{x} に速度 \mathbf{v} をもった中性子を1箇投入した時、後時刻 t_f に相空間領域 V 中に中性子が N_0 箇、タイプ1の先行核が N_1 箇、…、タイプ i の先行核が N_i 箇…、タイプ I の先行核が N_I 箇存在する確率を、

$$P_0(N_0, N_1, \dots, N_i, \dots, N_I, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

としよう。横ベクトル \mathbf{N} を用いてこれを

$$P_0(\mathbf{N}, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

とかく。同様に、時刻 t に場所 \mathbf{x} にタイプ i の先行核が1箇存在している時、時刻 t_f に領域 V 中に \mathbf{N} 箇の粒子が存在する確率を

$$P_i(\mathbf{N}, V, t_f | \mathbf{x}, i, t)$$

とおく。

さらに次の確率を導入する。

$$p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_v, \nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_I | \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_j \dots d\mathbf{v}_v. \quad (5.37)$$

これは、時刻 t に場所 \mathbf{x} で速度 \mathbf{v} をもった中性子が核分裂をおこした時、即発中性子が ν_0 箇、タイプ1の先行核が ν_1 箇、…、タイプ i の先行核 ν_i 箇、タイプ I の先行核が ν_I 生じ、即発中性子は、速度 \mathbf{v}_1 のまわりの $d\mathbf{v}_1$ 中に1箇、…、速度 \mathbf{v}_j のまわりの $d\mathbf{v}_j$ 中に1箇…速度 \mathbf{v}_v のまわりの $d\mathbf{v}_v$ 中に1箇生ずる確率である。この確率は、次のように規格化されている。

$$\sum_{\nu_0=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_I=0}^{\infty} \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 \dots \int d\mathbf{v}_v. p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_v, \nu_1, \dots, \nu_I | \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1. \quad (5.38)$$

特に、即発中性子が互いに独立ならば、

$$p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_v, \nu_1, \dots, \nu_I | \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = p(\nu | \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \chi(\mathbf{v}_1) \chi(\mathbf{v}_2) \dots \chi(\mathbf{v}_v) \quad (5.39)$$

とかける。ここで $p(\nu | \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は、点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) で時刻 t におきた核分裂により $\nu = \{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_I\}$ 箇の二次粒子の生まれる確率。また、 $\chi(\mathbf{v})$ は、核分裂中性子の速度分布関数である。

さて、投入中性子が始めて核反応を行なう時、その反応が吸収(添字 c をつけて区別する)、散乱(添字 s)、核分裂(添字 f) の3つのタイプがある事を考慮して $P(\mathbf{N}, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の釣合いの関係式を FCP の方法で導こう。

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{N}, V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \int_0^{l(s_B, t_f - t)} ds \nu \Sigma_t(\mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}, t + s) \\ &\times \exp\left\{-\int_0^s ds' \nu \Sigma_t(\mathbf{x} + s'\mathbf{v}, \mathbf{v}, t + s')\right\} \\ &\times \left\{ \frac{\Sigma_c}{\Sigma_t} \delta_{N_0} + \frac{1}{\Sigma_t} \int d\mathbf{v}' \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + s\mathbf{v}, t + s) \right. \\ &\times P_0(\mathbf{N}, V, t_f | \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}', t + s) \\ &+ \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t} \sum_{\mathbf{v}} \sum_{\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{N}} \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 \dots \int d\mathbf{v}_v. \\ &\times p(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_v, \nu | \leftarrow \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}, t + s) \\ &\times \prod_{j=1}^{\nu_0} \{P_0(\mathbf{n}_{0j}, V, t_f | \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}_j, t + s)\} \\ &\left. \times \prod_{i=1}^I \left[\prod_{j=1}^{\nu_i} \{P_i(\mathbf{n}_{ij}, V, t_f | \mathbf{x} + s\mathbf{v}, i, t + s)\} \right] \right\} + u_0. \quad (5.40) \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{n}_{ij} は、核分裂で放出された合わせて ν_i 箇のタイプ i の粒子のうち j 番目のものにより領域 V 中に生みだされる粒子数ベクトルである。

和 \sum_{ν} は、数ベクトル $\nu = \{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_I\}$ のすべてについてとる。

また、和 $\sum_{\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{N}}$ は、

$$\sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{\nu_i} \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{N}. \quad (5.41)$$

を満足するあらゆる可能な数ベクトルの組 $\{\mathbf{n}_{ij}\}$ についてとる。また、

$$\delta_{N_0} = \delta_{N_{00}} \times \dots \times \delta_{N_{I0}} \times \dots \times \delta_{N_{I0}}. \quad (5.42)$$

δ_{ij} は、Kronecker's delta.

衝突をおこす時刻 $t+s$ に関する積分の上限は、投入した1箇の中性子 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) が1度も衝突せず境界上へ達する時刻 $t+s_B$ と、観測時刻 t_f のうち、小さいほうまでである。すなわち、

$$l(s_B, t_f - t) \equiv \text{lesser of } s_B \text{ or } t_f - t. \quad (5.43)$$

u_0 は、中性子が1度も衝突することなく時刻 t_f まですごすか、あるいは、体系の外へ出てしまう可能性に対する補正項である。すなわち、

$$u_0 = \delta_{N_0} u_0' = \delta_{N_0} \exp\left[-\int_0^{s_B} ds v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}, t + s)\right] \\ ; t_1 - t \geq s_B \text{ の時.} \quad (5.44a)$$

$$u_0 \equiv \delta_{N_0} u_0' = \delta_{N_0} \exp\left[-\int_0^{t_1-t} ds v \Sigma_t\right] \\ ; t_1 - t < s_B \text{ でかつ } (\mathbf{x} + \mathbf{v}(t_1 - t), \mathbf{v}) \notin V \text{ の時,} \quad (5.44b)$$

$$u_0 \equiv \delta_{N_{s_1}} \delta_{N_{s_0}} \cdots \delta_{N_{s_0}} u_0' \\ = \delta_{N_{s_1}} \delta_{N_{s_0}} \cdots \delta_{N_{s_0}} \exp\left[-\int_0^{t_1-t} ds v \Sigma_t\right] \\ ; t_1 - t < s_B \text{ でかつ } (\mathbf{x} + \mathbf{v}(t_1 - t), \mathbf{v}) \in V \text{ の時,} \quad (5.44c)$$

同様に、タイプ i の先行核に関しては、次の関係式が得られる。

$$P_i(N, V, t_1 | \mathbf{x}, i, t) \\ = \int_0^{t_1-t} ds \lambda_i e^{-\lambda_i s} \int d\mathbf{v}' \chi_i(\mathbf{v}') \\ \times P_0(N, V, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t + s) + u_i. \quad (5.45)$$

ここで、 $\chi_i(\mathbf{v})$ は、タイプ i の先行核が崩壊した時生成される 2 次中性子の速度分布関数である。

u_i は、観測時刻 t_1 にいたるまで先行核が崩壊しない場合に対する補正項である。すなわち

$$u_i \equiv \delta_{N_0} u_i' \\ = \delta_{N_0} e^{-\lambda_i(t_1-t)}; \mathbf{x} \notin V \text{ の時,} \quad (5.46a)$$

$$u_i \equiv \delta_{N_{s_0}} \delta_{N_{s_1}} \cdots \delta_{N_{s_1}} \times \cdots \times \delta_{N_{s_1}} \times \cdots \times \delta_{N_{s_1}} \times e^{-\lambda_i(t_1-t)} \\ ; \mathbf{x} \in V \text{ の時.} \quad (5.46b)$$

さて、次の確率母関数を導入する。

$$G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = G_0(z_0, \cdots, z_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \equiv \sum_{N_0=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_1=0}^{\infty} z_0^{N_0} \cdots z_1^{N_1} \\ \times P_0(N_0, \cdots, N_1, V, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (5.47)$$

$$G_i(\mathbf{z} | \mathbf{x}, i, t) \\ = G_i(z_0, \cdots, z_1 | \mathbf{x}, i, t) \\ \equiv \sum_{N_0=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_1=0}^{\infty} z_0^{N_0} \cdots z_1^{N_1} \\ \times P_i(N_0, \cdots, N_1, V, t_1 | \mathbf{x}, i, t); i=1, \cdots, I. \quad (5.48)$$

方程式 (5.40), (5.45) に $\prod_{i=0}^I z_i^{N_i}$ を乗じ、それぞれの N_i について和をとると結果は、次のようになる。

$$G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \int_0^{t(s_B, t_1-t)} ds v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}, t + s) \\ \times \exp\left[-\int_0^s ds' v \Sigma_t(\mathbf{x} + \mathbf{v}s', \mathbf{v}, t + s')\right] \\ \times \left\{ \frac{\Sigma_c}{\Sigma_t} + \frac{1}{\Sigma_t} \int d\mathbf{v}' \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{v}s, t + s) \right. \\ \times G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}', t + s) \\ \left. + \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t} \sum_{\mathbf{v}'} \int d\mathbf{v}_1 \cdots \int d\mathbf{v}_j \cdots \int d\mathbf{v}_n \right. \\ \times p(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}, t + s) \\ \left. \times \prod_{j=1}^n \{G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x} + \mathbf{v}s, \mathbf{v}_j, t + s)\} \right. \quad (5.49)$$

$$\times \prod_{i=1}^I \{G_i(\mathbf{z} | \mathbf{x} + \mathbf{v}s, i, t + s)\}^{v_i} + u_0' \quad (5.49)$$

もし、(5.44c) が成り立つときには、上式右辺最後の項は $u_0' z_0$ となる。一方、

$$G_i(\mathbf{z} | \mathbf{x}, i, t) \\ = \int_0^{t_1-t} ds \lambda_i e^{-\lambda_i s} \int d\mathbf{v}' \chi_i(\mathbf{v}') \\ \times G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t + s) + u_i' \quad (5.50)$$

もし、(5.46b) が成り立つときには、上式右辺最後の項は $u_i' z_i$ となる。

次に、方程式 (5.49) に対応して、母関数 $G(\mathbf{z} | \mathbf{x} + \delta s \mathbf{v}, \mathbf{v}, t + \delta s)$ に対する方程式を作り、辺々引き算をしたのち、両辺を δs で割り算を行ない極限操作 $\delta s \rightarrow 0$ を施す。結果は次の通り。

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial}{\partial t} G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \mathbf{v} \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \left\{ G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right. \\ \left. - \frac{\Sigma_c}{\Sigma_t} - \frac{1}{\Sigma_t} \int d\mathbf{v}' \Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}, t) G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right. \\ \left. - \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t} \sum_{\mathbf{v}'} \int d\mathbf{v}_1 \cdots \int d\mathbf{v}_j \cdots \int d\mathbf{v}_n \right. \\ \left. \times p(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^n G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}_j, t) \right. \\ \left. \times \prod_{i=1}^I [G_i(\mathbf{z} | \mathbf{x}, i, t)]^{v_i} \right\}. \quad (5.51)$$

同様に G_i に対する運動方程式を (5.50) 式から作ることができる。結果は次の通り。

$$\frac{\partial}{\partial t} G_i(\mathbf{z} | \mathbf{x}, i, t) = \lambda_i \left\{ G_i(\mathbf{z} | \mathbf{x}, i, t) \right. \\ \left. - \int d\mathbf{v}' \chi_i(\mathbf{v}') G_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right\}. \quad (5.52)$$

方程式 (5.51), (5.52) は、遅発中性子を考慮にいれた場合の考察の出発点となる基本式である。

さて、ここで、確率母関数 $\{G_0, G_1, \cdots, G_i, \cdots, G_I\}$ のかわりに、次の量を導入する。

$$\tilde{G}_i = 1 - G_i; i=0, 1, \cdots, I. \quad (5.53)$$

さらに、核分裂により放出される 2 次粒子に対する確率 p は (5.39) 式のようにおけると仮定しよう。このとき、方程式 (5.51), (5.52) は、 \tilde{G} を用いて次のように書きなおすことができる。

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} \tilde{G}_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \mathbf{v} \Sigma_t \tilde{G}_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ - \mathbf{v} \Sigma_t \int d\mathbf{v}' k(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}, t) \tilde{G}_0(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \\ - \mathbf{v} \Sigma_t \sum_{i=1}^I \langle v_i \rangle \tilde{G}_i(\mathbf{z} | \mathbf{x}, i, t) \\ + \mathbf{v} \Sigma_t \sum_{\mathbf{v}'} p(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\nu} \left[\binom{\nu_0}{l_0} (-1)^{l_0} \left\{ \int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \tilde{G}_0(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right\}^{l_0} \right. \\ \left. \times \prod_{i=1}^I \left[\binom{\nu_i}{l_i} (-1)^{l_i} [\tilde{G}_i(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i, t)]^{l_i} \right] \right], \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_i(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i, t) = \lambda_i \tilde{G}_i(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i, t) \\ - \lambda_i \int d\mathbf{v}' \chi_i(\mathbf{v}') \tilde{G}_0(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \\ ; i=1, \dots, I. \quad (5.55)$$

ただし, ここで,

$$\langle \nu_i \rangle \equiv \sum_{\nu_0=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i-1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_i=0}^{\infty} \nu_i p(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_i | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ ; i=0, 1, \dots, I. \quad (5.56)$$

すなわち, $\langle \nu_i \rangle$ は, 核分裂の際放出されるタイプ i の粒子数の期待値である. また,

$$\sum_{l=0}^{\nu} = \sum_{l_0=0}^{\nu_0} \sum_{l_1=0}^{\nu_1} \dots \sum_{l_{i-1}=0}^{\nu_{i-1}} \dots \sum_{l_i=0}^{\nu_i}. \quad (5.57)$$

和 $\sum_{l=0}^{\nu}$ は和 $\sum_{l=0}^{\nu}$ のうち, 条件 $\sum_{i=0}^I l_i \geq 2$ を満足するものについてのみ和をとることを意味する.

(5.54) 式で

$$\sum_{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\nu=l}^{\infty}$$

と和の順序を交換する. その結果を整理すると (5.54) 式右辺最後の項は, 次のようにかける.

$$\nu \Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \sum_{l=0}^{\nu} \langle \nu^l \rangle \frac{(-1)^{l_0}}{l_0!} \left\{ \int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \right. \\ \left. \times \tilde{G}_0(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right\}^{l_0} \\ \times \prod_{i=1}^I \left[\frac{(-1)^{l_i}}{l_i!} [\tilde{G}_i(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i, t)]^{l_i} \right] \\ \equiv \mathcal{E}_0(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.58)$$

ただし, ここで,

$$\langle \nu^l \rangle = \sum_{\nu_0=l_0} \sum_{\nu_1=l_1} \dots \sum_{\nu_{i-1}=l_{i-1}} \prod_{i=0}^I [\nu_i(\nu_i-1)\dots(\nu_i-l_i+1)] \\ \times p(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_i | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \langle \prod_{i=0}^I [\nu_i(\nu_i-1)\dots(\nu_i-l_i+1)] \rangle. \quad (5.59)$$

さて, 確率母関数 $\{\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_i, \dots, \tilde{G}_I\}$ をまとめて, たてベクトル \mathbf{G} であらわそう. このとき, 方程式 (5.54), (5.55) は, 随伴ボルツマン作用素マトリックス L^+ を用いて次のように整理できる.

$$L^+ \mathbf{G} = -\mathcal{E}. \quad (5.60)$$

ただし, たてベクトル \mathcal{E} の第 1 番目の要素は (5.58) 式で与えた \mathcal{E}_0 に等しく, それ以外の要素はゼロ.

また, 任意のベクトル関数 $\{\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \phi_1(\mathbf{x}, 1, t), \dots, \phi_i(\mathbf{x}, i, t), \dots, \phi_I(\mathbf{x}, I, t)\}$ に対して L^+ の各要素は, 次のように定義されているものとする.

$$L_{00}^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} + \nu \Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right) \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ - \nu \Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \int d\mathbf{v}' k(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}, t) \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t). \quad (5.61a)$$

$$L_{0i}^+(\mathbf{x}, i, t) \phi_i(\mathbf{x}, i, t) \\ = -\nu \Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \langle \nu_i \rangle \phi_i(\mathbf{x}, i, t) ; i=1, \dots, I. \quad (5.61b)$$

$$L_{i0}^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = -\lambda_i \int d\mathbf{v}' \chi_i(\mathbf{v}') \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) ; i=1, \dots, I. \quad (5.61c)$$

$$L_{ij}^+(\mathbf{x}, j, t) \phi_j(\mathbf{x}, j, t) = 0 ; i \neq j ; i, j=1, \dots, I, \quad (5.61d)$$

$$L_{ii}^+(\mathbf{x}, i, t) \phi_i(\mathbf{x}, i, t) \\ = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \right) \phi_i(\mathbf{x}, i, t) ; i=1, \dots, I. \quad (5.61e)$$

方程式 (5.54), (5.55) あるいはそれらと等価な方程式 (5.60) に対する終期条件は次の通りである.

$$\tilde{G}_0(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t_f) = 1 - z_0 ; (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V \text{ の時,} \\ = 0 ; (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \notin V \text{ の時.} \quad (5.62)$$

$$\tilde{G}_i(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i, t_f) = 1 - z_i ; \mathbf{x} \in V \text{ の時,} \\ = 0 ; \mathbf{x} \notin V \text{ の時 ; } i=1, 2, \dots, I. \quad (5.63)$$

また, 境界条件は, 次の通り.

$$\tilde{G}_0(\mathbf{z}|\mathbf{x}_b, \mathbf{v}_{\text{out}}, t) = 0. \quad (5.64)$$

なお, 方程式 (5.55) を解くことにより, \tilde{G}_i は \tilde{G}_0 を用いて次のように表わすことができる.

$$\tilde{G}_i(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i, t) \\ = \lambda_i \int_0^t dt' e^{-\lambda_i(t-t')} \int d\mathbf{v}' \chi_i(\mathbf{v}') \tilde{G}_0(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t') \\ + \tilde{G}_i(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i, t_i) e^{-\lambda_i(t-t_i)}. \quad (5.65)$$

上式, 右辺第 1 項は, 先行核が時刻 t' で中性子を放出した時の寄与, 第 2 項は先行核のまま残っている時の寄与を表わす. (5.65) を (5.54) に代入すれば, \tilde{G}_0 のみの方程式になる. この結果は, PÁL¹⁷⁾ の導いたものと一致している.

特に, 一点炉一遅発中性子群モデルでは, (5.60) 式は次のように表わすことができる.

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} + \alpha_0, & -\frac{\beta k}{l} \\ -\lambda, & -\frac{d}{dt} + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_0(z_0, z_1 | t) \\ \tilde{G}_1(z_0, z_1 | t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.60')$$

ただし,

$$\mathcal{E}_0 = \nu \Sigma_i \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\nu} \frac{(-1)^{l+m}}{l! m!} \langle \nu_0(\nu_0-1)\dots \\ \times (\nu_0-l+1)\nu_1(\nu_1-1)\dots(\nu_1-m+1) \rangle \\ \times [\tilde{G}_0(z_0, z_1 | t)]^l [\tilde{G}_1(z_0, z_1 | t)]^m. \quad (5.58')$$

記号は, 慣用のものである. すなわち, α_0 は, 即発中性子減衰係数, β は核分裂の際放出される遅発中性子の割合, k は実効増倍率, l は中性子寿命, λ は先行核の崩壊定数である. また,

終期条件は,

$$\tilde{G}_0(z_0, z_1 | t_f) = 1 - z_0, \quad (5.62')$$

$$\tilde{G}_1(z_0, z_1 | t_f) = 1 - z_1, \quad (5.63')$$

である。(5.60')を \tilde{G}_1 について解くと、

$$\tilde{G}_1(z_0, z_1 | t) = \lambda \int_t^{t'} dt' e^{-\lambda(t'-t)} \tilde{G}_0(z_0, z_1 | t') + (1-z_1)e^{-\lambda(t-t)}. \quad (5.65')$$

この結果を、 \tilde{G}_0 に関する方程式に代入し、特に、 $z_1=1$ とおくと、遅発中性子の効果を考慮した場合の、炉内に存在する中性子数確率母関数の従う運動方程式が次のように得られる。

$$\left[-\frac{d}{dt} + \alpha_0 \right] \tilde{G}_0(z_0, 1 | t) = \frac{\beta k}{l} \lambda \int_t^{t'} dt' e^{-\lambda(t'-t)} \tilde{G}_0(z_0, 1 | t') - E_0(z_0, 1 | t). \quad (5.66)$$

ここで

$$E_0(z_0, 1 | t) = \nu \sum_l \sum_{m=0}^{l+m \geq 2} \frac{(-1)^{l+m}}{l! m!} \langle \nu_0(\nu_0-1) \dots \times (\nu_0-l+1) \nu_1(\nu_1-1) \dots (\nu_1-m+1) \rangle \lambda \int_t^{t'} dt' e^{-\lambda(t'-t)} \tilde{G}_0(z_0, 1 | t')^m [\tilde{G}_0(z_0, 1 | t)]^l \quad (5.58')$$

上式で、特に、遅発中性子からの寄与を無視すると

$$E_0(z_0, 1 | t) = \nu \sum_{l=2} \frac{(-1)^l}{l!} \langle \nu_0(\nu_0-1) \dots (\nu_0-l+1) \rangle \times [\tilde{G}_0(z_0, 1, t)]^l \quad (5.67)$$

となる。

5.3.2 観測量——一回観測の場合

時刻 t_f から t_f+T まで、相空間中の特定領域 V_d を占める検出器によって、観測を行なったとしよう (cf. Fig. 7)。検出器の反応断面積を $\Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ としよう。次のような確率を導入する。

$\pi_d(\nu \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$: 検出反応の際、 ν 箇の2次粒子 (すなわち、 ν_0 箇の即発中性子、 ν_i 箇のタイプ i の先行核 ($i=1, 2, \dots, I$) が生ずる確率。 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) は、検出反応のおきた相空間点、 t はその時刻。

$\pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$: $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ であった検出反応の際、 θ 単位の観測量が得られる確率。

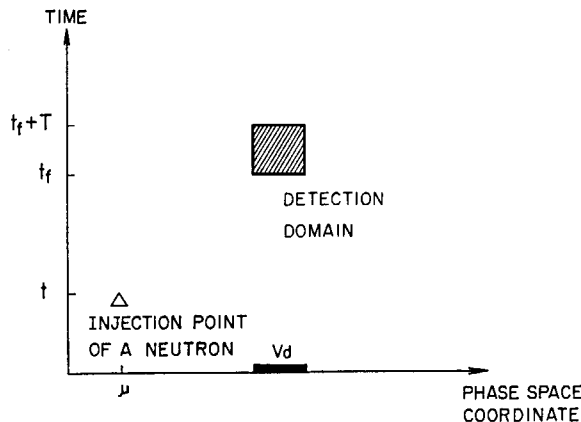


Fig. 7 Variables for a single detection

この2つの確率は、互いに独立と考えてよいであろう。また、検出反応の際生じた2次中性子の速度分布は、互いに独立に定まると考え、 $\chi_d(\mathbf{v})$ を、2次中性子1箇の速度分布関数とする。

BELL¹⁷⁾ は、先行核を無視し、かつ、観測の際得られる観測量が、0か1で、二次中性子は放出されない場合を扱っている。すなわち、時刻 t に相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に1箇中性子を投入した時、検出器 V_d による時刻 t_f から t_f+T までの観測により、 N 単位の観測量が得られる確率 $P(N, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ を導入する。この確率に対して、初衝突確率法の考えを用いて、(5.9) 式に類似な関係式を導く。初衝突が、検出による捕獲反応であれば、1単位の観測量が得られる。そうでない捕獲反応では、当然、観測量はゼロ。散乱、核分裂の場合には、生成された二次中性子が後に、 N 単位の寄与をすればよい。したがって、次のような関係式が得られる。

$$P(N, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \{ \delta_{N0} \pi_d(0 \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{v} \mathbf{s}, \mathbf{v}, t + s) + \delta_{N1} \pi_d(1 \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{v} \mathbf{s}, \mathbf{v}, t + s) \} \times \int_0^{t_f, t_f+T-t} ds v \Sigma_d(\mathbf{x} + \mathbf{v} \mathbf{s}, \mathbf{v}) \times \exp \left\{ - \int_0^s ds' v \Sigma_t \right\} + (5.9) \text{式右辺}^* \quad (5.68)$$

確率母関数

$$G(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N P(N, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (5.69)$$

を導入し、5.2.2 で行なったと同様な手法を用いて $\tilde{G} = 1 - G$ に対する運動方程式を導くことができる。結果は、次のようになる。

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \tilde{G}(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1) \dots (\nu-j+1) \rangle \nu \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \tilde{G}(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^j + (1-z) \pi_d(1 \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \nu \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (5.70)$$

終期条件は、

$$\tilde{G}(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t_f + T) = 0. \quad (5.71)$$

一方、境界条件は、(5.64) 式と同形になる。

(5.70) 式は、新たに右辺に非同次項 $(1-z)\pi_d(1 \leftarrow) \nu \Sigma_d$ が現われる点を除いては、(5.17) 式と同じである。特に一点炉モデルでは、この式は、次のように簡単になる。

$$\left(-\frac{d}{dt} + \alpha \right) \tilde{G} = -\nu \Sigma_t \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1) \dots (\nu-j+1) \rangle \times [\tilde{G}]^j + (1-z) \varepsilon \nu \Sigma_t A(t). \quad (5.72)$$

ただし、 ε は、検出器効率、また

$$A(t) = 1; \text{ if } t_f \leq t \leq t_f + T, \\ = 0; \text{ otherwise.} \quad (5.73)$$

* ただし P は、この節で定義した P におきかえる。また、 Σ_t は、 Σ_d も含むものとする。

検出器によっては、反応の際、二次中性子を放出するものもあるし、また、検出反応1回当たり得られる観測量、たとえば、電流量が常に一定であるとは限らない。一般の場合を考えてみよう。

時刻 t に相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に1箇の中性子を投入した時、検出器 V_d による時刻 t_f から t_f+T までの観測により、 N 単位の観測量が得られる確率を $P_0(N, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ としよう。同様に、タイプ i の先行核を時刻 t に原子炉に投入した時、 N 単位の観測量が得られる確率を、 $P_i(N, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, i, t)$ としよう。それぞれの確率母関数を定義する。

$$G_0(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} z^N P_0(N, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.74)$$

$$G_i(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, i, t) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} z^N P_i(N, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, i, t). \quad (5.75)$$

投入中性子の最初の衝突で、検出器との反応をあらたに加え、FCPの方法で G_0, G_i のみたす運動方程式を求め。結果は、 G_0 に対しては、(5.51)と同じで、ただ、右辺に次の項があらたに加わる。

$$-\sum_{\mathbf{t}} \sum_{\theta=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{v}=0}^{\infty} z^{\theta} \pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) p_d(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi_d(\mathbf{v}') G_0(|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{\theta} \times \prod_{i=1}^l [G_i(|\mathbf{x}, i, t)]^{\nu_i}. \quad (5.76)$$

ただし、

$$\Sigma_t = \Sigma_c + \Sigma_s + \Sigma_f + \Sigma_d. \quad (5.77)$$

G_i に対する運動方程式は、(5.52)式と同形になる。

$$\tilde{G}_0 = 1 - G_0, \quad (5.78)$$

$$\tilde{G}_i = 1 - G_i. \quad (5.79)$$

とおいて、 \tilde{G}_0, \tilde{G}_i を成分とするたてベクトルを $\tilde{\mathbf{G}}$ とすると、 $\tilde{\mathbf{G}}$ は、次の方程式を満足する。

$$L_d^+ \tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{B} - \mathbf{B}_d. \quad (5.80)$$

終期条件は、次の通り

$$\tilde{G}_0(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t_f+T) = 0. \quad (5.81)$$

$$\tilde{G}_i(z, V_d, t_f, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t_f+T) = 0. \quad (5.82)$$

一方、境界条件は、(5.64)と同形になる。

(5.80)式で、 L_d^+ は、検出器も媒質の一部として考えた時の随伴ボルツマン作用素行列である。中性子-中性子要素 L_{d00}^+ は、(5.61a)式で与えられる。ただし、

$$k(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}, t) = \frac{\Sigma_s(\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}, t) + \Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)} \langle \nu_0 \rangle \chi(\mathbf{v}') + \frac{\Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)} \langle \nu_{d0} \rangle \chi_d(\mathbf{v}'). \quad (5.83)$$

とおきかえる。ここで、

$$\langle \nu_{d0} \rangle = \sum_{\nu_0=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_l=0}^{\infty} \nu_0 p_d(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_l). \quad (5.84)$$

また、中性子-先行核成分 L_{d0i}^+ は、次のようになる。

$$L_{d0i}^+(\mathbf{x}, i, t) \psi_i(\mathbf{x}, i, t) = -\{v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \langle \nu_i \rangle$$

$$+ v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \langle \nu_{di} \rangle \} \psi_i(\mathbf{x}, i, t). \quad (5.85)$$

その他の要素 $L_{d00}^+, L_{d0i}^+, L_{dii}^+$ は、それぞれ(5.61c), (5.61d), (5.61e)式と同じである。(5.80)式右辺 \mathbf{B} は、たてベクトル $\{\mathbf{B}_0, 0, 0, \dots, 0\}$ を表わす。ただし、 \mathbf{B}_0 は(5.58)で与えたもの。また、 \mathbf{B}_d は、中性子成分 \mathbf{E}_{d0} 以外は、すべてゼロ。中性子成分は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{d0}(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \sum_{\mathbf{t}} \langle \tilde{\nu}_d^{\mathbf{t}} \rangle \frac{(-1)^{|\mathbf{t}|}}{l_0!} \left[\int d\mathbf{v}' \chi_d(\mathbf{v}') \right. \\ &\quad \times \tilde{G}_0(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \left. \right]^{l_0} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^l \left[\frac{(-1)^{l_i}}{l_i!} (\tilde{G}_i(z | \mathbf{x}, i, t))^{l_i} \right] \\ &\quad + v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \sum_{\theta=0}^{\infty} z^{\theta} \tilde{\pi}_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad \times \left[1 + \sum_{\mathbf{t}} \langle \tilde{\nu}_d^{\mathbf{t}} \rangle \frac{(-1)^{|\mathbf{t}|}}{l_0!} \left(\int d\mathbf{v}' \chi_d(\mathbf{v}') \right. \right. \\ &\quad \times \tilde{G}_0(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \left. \left. \right) \right]^{l_0} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^l \left[\frac{(-1)^{l_i}}{l_i!} (\tilde{G}_i(z | \mathbf{x}, i, t))^{l_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.86)$$

ここで和 $\sum_{\mathbf{t}}$ は、次のような多重和を簡略して書いたものである。

$$\sum_{\mathbf{t}} = \sum_{l_0=0}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{l_l=0}^{\infty}. \quad (5.87)$$

特に $\sum_{\mathbf{t}}'$ は、 $l_0+l_1+\dots+l_l \geq 2$ のものについて和 $\sum_{\mathbf{t}}$ を意味する。また、 $\sum_{\mathbf{t}}''$ は、 $l_0+l_1+\dots+l_l \geq 1$ のものについて和を意味する。また、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nu}_d^{\mathbf{t}} \rangle &= \sum_{\nu_0=l_0}^{\infty} \sum_{\nu_1=l_1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_l=l_l}^{\infty} \prod_{i=0}^l \{ \nu_i(\nu_i-1) \cdots (\nu_i-l_i+1) \} \\ &\quad \times p_d(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (5.88) \\ \tilde{\pi}_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - 1 \quad ; \theta=0 \text{ の時,} \\ &= \pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad ; \theta \geq 1 \text{ の時.} \end{aligned} \quad (5.89)$$

特に、検出器が、BF₃ 計数管やCICのように検出に伴ない二次中性子、先行核を放出しない吸収型のものであるならば(5.86)式は、次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{d0}(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \sum_{\theta=0}^{\infty} z^{\theta} \tilde{\pi}_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (5.90)$$

さらに、検出の際、放出される観測量が、0か1の場合には、上式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{d0}(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (z-1)v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \pi_d(1 \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (5.91)$$

なお、検出器を原子炉に挿入するという事と観測を行なうということとは必ずしも同じことではない。検出器は、増倍系の一部として以前から原子炉に挿入されており、特に t_f と t_f+T の間の観測のバラツキを問題にする場合があるからである。この場合には、 t_f 以前の検出器反応断面積 Σ_d あるいは、検出器との反応の際放出される二次中性子、先行核の値は、ゼロではない。なぜならば、検出器は原子炉中に存在しているからである。

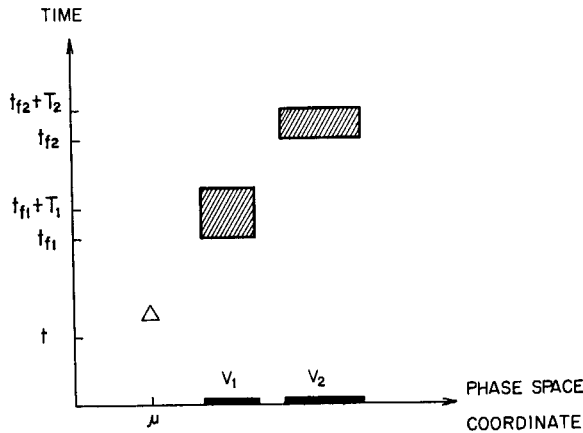


Fig. 8 Variables for double detection

検出に伴ない得られる観測量が、つねにゼロであると考える。すなわち、 $t < t_f$ または $t > t_f + T$ の時、

$$\pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \delta_{00} \quad (5.92)$$

とおく。

5.3.3 観測量——多数回観測の場合

検出器が合わせてJ箇であって、それぞれ相空間領域 V_1, V_2, \dots, V_J を占めているとしよう。j番目の検出器 V_j によって時刻 t_{ij} から $t_{ij} + T_j$ まで観測を行なったとする。(j=1, 2, ..., J) 観測時間は、互いに重なり合う事があってもかまわない。Fig. 8に、J=2の場合の模式図を掲げた。各検出器に対して、5.3.2で導入したと同様な確率、 $\Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $p_d(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $\pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $\chi_d(\mathbf{v})$ を定義する。それぞれに添字jをつけて区別する。

さて、時刻tに相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に1箇中性子を投入した時、検出器 $V_j(j=1, 2, \dots, J)$ による時刻 t_{ij} から $t_{ij} + T_j$ の観測により N_j 単位の観測量が得られる確率を $P_0(N_1, N_2, \dots, N_J, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, V_J, t_{fJ}, T_J | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ としよう。同様に、タイプiの先行核を時刻tに場所 \mathbf{x} に投入した時、検出器 $V_j(j=1, 2, \dots, J)$ により N_j 単位の観測量が得られる確率を $P_i(N_1, N_2, \dots, N_J, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, V_J, t_{fJ}, T_J | \mathbf{x}, i, t)$ としよう。それぞれの確率母関数を定義する。

$$\begin{aligned} G_0(z_1, z_2, \dots, z_J, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, \\ \times V_J, t_{fJ}, T_J | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \equiv \sum_{N_1=0} \sum_{N_2=0} \dots \sum_{N_J=0} z_1^{N_1} z_2^{N_2} \dots z_J^{N_J} \\ \times P_0(N_1, N_2, \dots, N_J, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, \\ \times V_J, t_{fJ}, T_J | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} G_i(z_1, z_2, \dots, z_J, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, \\ \times V_J, t_{fJ}, T_J | \mathbf{x}, i, t) \\ \equiv \sum_{N_1=0} \sum_{N_2=0} \dots \sum_{N_J=0} z_1^{N_1} z_2^{N_2} \dots z_J^{N_J} \\ \times P_i(N_1, N_2, \dots, N_J, V_1, t_{f1}, T_1, V_2, t_{f2}, T_2, \dots, \\ \times V_J, t_{fJ}, T_J | \mathbf{x}, i, t). \end{aligned} \quad (5.94)$$

FCPの方法で、 G_0, G_i のみたす運動方程式を求める。結果は、 G_0 に対しては、(5.51)と同形で、ただ右辺に、

次の非線型項があらたに加わる。

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^J \frac{\Sigma_{dj}}{\Sigma_t} \sum_{\theta=0} \sum_{\mathbf{v}=0} z_j^\theta \pi_{dj}(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) p_{dj}(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi_{dj}(\mathbf{v}') G_0(|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{\nu_0} \\ \times \prod_{i=1}^J [G_i(|\mathbf{x}, i, t)]^{\nu_i}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

ただし、

$$\Sigma_t = \Sigma_c + \Sigma_s + \Sigma_f + \sum_{j=1}^J \Sigma_{dj}. \quad (5.96)$$

G_i に対する運動方程式は、(5.52)と同様となる。

$$\tilde{G}_0 = 1 - G_0, \quad (5.97)$$

$$\tilde{G}_i = 1 - G_i. \quad (5.98)$$

とにおいて、 \tilde{G}_0, \tilde{G}_i を成分とするたてベクトル $\tilde{\mathbf{G}}$ を導入すると、 $\tilde{\mathbf{G}}$ は、次の運動方程式を満足する。

$$L_d^+ \tilde{\mathbf{G}} = -\tilde{\mathbf{B}} - \sum_{i=1}^J \tilde{\mathbf{B}}_{di}. \quad (5.99)$$

L_d^+ は、合わせてJ箇の検出器すべてを媒質の一部とみなした時の随伴ボルツマン作用素行列である。 $\tilde{\mathbf{B}}$ は、一回観測の場合の方程式(5.80)にあらわれたものと同じである。j番目の検出器による非同次項 $\tilde{\mathbf{B}}_{dj}$ は、やはり(5.80)にあらわれた $\tilde{\mathbf{B}}_d$ と内容は同じであって、ただ $\Sigma_d, \chi_d, p_d, \pi_d$ がそれぞれj番目の検出器に対する相当量におきかわるだけである。

特に、遅発中性子を無視した一点炉モデル、2回観測の場合には、(5.99)式は、次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dt} + \alpha \right) \tilde{G}(z_1, z_2, t_{f1} + T_1, t_{f2} + T_2 | t) \\ = -\nu \Sigma_f \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1) \dots (\nu-j+1) \rangle [\tilde{G}]^j \\ + (1-z_1) \varepsilon_1 \nu \Sigma_f \Delta_1(t) + (1-z_2) \varepsilon_2 \nu \Sigma_f \Delta_2(t). \end{aligned} \quad (5.99')$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) = 1 \quad ; \text{ if } t_{fi} \leq t \leq t_{fi} + T_i, \\ = 0 \quad ; \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

同一の検出器を用いて、J回、それぞれ、時刻 t_{ij} から $t_{ij} + T_j(j=1, 2, \dots, J)$ まで観測した時、得られる観測量の確率分布も、方程式(5.99)から求められる。ただし、この場合には、観測時間は重なり合うようなことはないものとする。方程式(5.99)に対する終期条件は、すべての観測が終了する時刻で $\tilde{\mathbf{G}}=0$ 、また、境界条件は、(5.64)と同形である。

5.3.4 外部中性子源のある場合

いままでは、原子炉に1箇の中性子または先行核を投入した場合の種々な確率母関数を考えてきた。複数箇の粒子を投入した場合の確率母関数は、それぞれの粒子を投入した場合の確率母関数の積として与えられる。たとえば、時刻 t_1 に相空間点 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1)$ に1箇の中性子を投入し、時刻 t_2 に相空間点 $(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2)$ にさらに1箇の中性子を

投入した時の1時点観測量に対する確率母関数 $G_0(z, V_d, t_f, T|\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t_2)$ は, $G_0(z, V_d, t_f, T|\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t_1) \times G_0(z, V_d, t_f, T|\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t_1)$ となる.

特に, ポアソンの粒子放出反応がおこる場合, たとえば, ^{238}U の自然崩壊, Ra-Be 源の α -崩壊を考えよう. 場所 \mathbf{x} のまわりの微小体積要素 $d\mathbf{x}$ 中で, 時刻 t と $t+dt$ の間に粒子放出反応がおこる確率を, $S(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}dt$ としよう. 放出反応をポアソンのと考えているので, 時刻 t_s と t_f の間におこる放出反応数の期待値および分散は, 互いに等しく次のように与えられる.

$$\tilde{S}(t_f, t_s) = \int_{t_s}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}, t).$$

また, ちょうど n 回放出反応がおこる確率は,

$$\frac{[\tilde{S}(t_f, t_s)]^n}{n!} \exp[-\tilde{S}(t_f, t_s)].$$

さて, 場所 \mathbf{x} において時刻 t におこった放出反応により中性子が ν_0 箇, タイプ i ($i=1, 2, \dots, I$) の先行核が ν_i 箇生まれる確率を $p_s(\nu \leftarrow \mathbf{x}, t)$ としよう. また, 放出中性子の速度分布は, 互いに他の放出粒子とは独立に定まると仮定し, その分布関数を $\chi_s(\mathbf{v})$ とおこう. 放出反応が, 1度もおこらない確率は,

$$\exp[-\tilde{S}(t_f, t_s)]$$

で与えられる. 放出反応が1回だけ, しかも, 時刻 t と $t+dt$ の間に, 場所 \mathbf{x} のまわりの $d\mathbf{x}$ 中でおこる確率は,

$$S(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}dt \exp[-\tilde{S}(t_f, t_s)].$$

また, t_1 と t_s の間に2回, しかも, t と $t+dt$ との間 $d\mathbf{x}$ 中と, t' と $t'+dt'$ ($t' > t$) との間 $d\mathbf{x}'$ 中でおこる確率は

$$S(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}dt S(\mathbf{x}', t')d\mathbf{x}'dt' \exp[-\tilde{S}(t_f, t_s)]$$

で与えられる.

このようなポアソン中性子源が時刻 t_s から存在している時の確率分布にたいする母関数 $G(|S)$ は, したがって,

$$\begin{aligned} G(|S) = & \left[1 + e^{-\tilde{S}} \int_{t_s}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}, t) g(|\mathbf{x}, t) \right. \\ & + e^{-\tilde{S}} \int_{t_s}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}, t) g(|\mathbf{x}, t) \\ & \times \int d\mathbf{x}' \int_{t_s}^{t_f} dt' S(\mathbf{x}', t') g(|\mathbf{x}', t') \\ & \left. + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.100)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} g(|\mathbf{x}, t) = & \sum_{\nu_0=0} \sum_{\nu_1=0} \dots \sum_{\nu_I=0} p_s(\nu \leftarrow \mathbf{x}, t) \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi_s(\mathbf{v}') G(|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{\nu_0} \\ & \times \prod_{i=1}^I [G(|\mathbf{x}, i, t)]^{\nu_i}. \end{aligned}$$

ところで, 時間積分について, 次の関係がなり立つ.

$$\int_{t_1}^{t_f} dt_1 f(t_1) \int_{t_1}^{t_f} dt_2 f(t_2) \dots \int_{t_{n-1}}^{t_f} dt_n f(t_n)$$

$$= \frac{1}{n!} \left[\int_{t_s}^{t_f} dt f(t) \right]^n$$

これらの関係を用いると, (5.100) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} G(|S) = & \exp \left\{ \int_{t_s}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}, t) \sum_{\nu_0=0} \sum_{\nu_1=0} \dots \sum_{\nu_I=0} \right. \\ & \times p_s(\nu \leftarrow \mathbf{x}, t) \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi_s(\mathbf{v}') G(|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{\nu_0} \\ & \left. \times \prod_{i=1}^I [G(|\mathbf{x}, i, t)]^{\nu_i} \right\} \exp[-\tilde{S}(t_f, t_s)]. \end{aligned} \quad (5.101)$$

この関係は, 終期条件として 5.2.2, 5.3.1 のように領域 V 中の粒子数, 5.3.2 のように一回観測量, 5.3.3 のように多数回観測量を考えた場合それぞれについて成り立つ. ただし, t_f は粒子検出の場合は, 検出時点 t_f , 一回観測の場合は, 観測の終期時点 $t_f + T$, 多数回観測の場合は, 最後の観測の終期時点をとる.

特に, 放出反応1回当たりただ1箇の中性子しか放出されない場合には, (5.101) は, BELL¹⁷⁾ がすでに導いているような簡単な形になる.

$$\begin{aligned} G(|S) = & \exp \left[\int_{t_s}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}, t) \chi_s(\mathbf{v}) \right. \\ & \left. \times (G(|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - 1) \right]. \end{aligned} \quad (5.102)$$

さらに, 一点炉モデルでは, 上式は,

$$G(|S) = \exp \left[\int_{t_s}^{t_f} dt (G(|t) - 1) \right] \quad (5.102')$$

となる.

5.4 確率分布のモーメント

1箇の中性子または先行核を原子炉に投入した時の確率母関数の従う運動方程式は, 前節, (5.17), (5.17'), (5.60), (5.60'), (5.66), (5.70), (5.80), (5.99), (5.99') 式で示したようにいずれも非線型随伴ボルツマン型である. その解析解を階乗モーメント展開の形で求めることができることを SAITO¹³⁰⁾ は示した. ある階乗モーメントに対する運動方程式は, 線型な随伴ボルツマン型になり, 非同次項として, より低次の階乗モーメントのみを含む. したがって, 低次の階乗モーメントがわかり, また, 線型随伴ボルツマン方程式を満足するグリーン関数がわかれば, 順次, より高次の階乗モーメントを求めることのできる.

1箇の中性子を時刻 t に点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) へ投入した時, 時刻 t_f に相空間領域 V に存在する中性子数を考えよう.

(5.11) 式で定義される確率母関数を階乗モーメント展開する. すなわち,

$$G(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \gamma_m(V, t_f|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.103)$$

上式を, z に関して m 回微分し, (5.11) の定義を用いると γ_m は, 中性子数の m 次階乗モーメントであることがわかる.

$$\gamma_m = \sum_{N=m}^{\infty} N(N-1)\cdots(N-m+1) \times P(N, V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.104)$$

特に

$$\gamma_0 = \sum_{N=0}^{\infty} P = 1. \quad (5.105)$$

また, (5.14), (5.15) 式を用いると γ_m の境界および終期条件が次のように与えられる.

$$\gamma_m(V, t_t | \mathbf{x}_B, \mathbf{v}_{out}, t) = 0. \quad (5.106)$$

$$\gamma_1(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t_t) = 1 \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V \text{ の時,} \\ = 0 \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \notin V \text{ の時,}$$

$$\gamma_m(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t_t) = 0 \quad ; \quad m \geq 2 \text{ の時.} \quad (5.107)$$

(5.103), (5.105) 式を用いれば,

$$\tilde{G} = 1 - G = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \gamma_m \quad (5.108)$$

となる. 上式を \tilde{G} の従う運動方程式 (5.17) に代入し, z について m 回微分したあと, $z=1$ とおけば, γ_m の従う運動方程式が得られる. すなわち,

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \gamma_1(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0. \\ L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \gamma_m(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) I_m(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad ; \quad m \geq 2 \text{ の時.} \quad (5.109)$$

ここで,

$$I_m(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1) \rangle \\ \times \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \tilde{G}(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]_{z=1}^j. \quad (5.110)$$

付録Eに示すように, I_m は γ_m は含まず, より低次の階乗モーメントのみから成る. 方程式 (5.109) は, γ_m に関しては線型, $v \Sigma_t I_m$ がその源になっている. 解は, 線型作用素 L^+ のグリーン関数を用いて, 次のようにならわすことができる.

$$\gamma_1(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \iint_{(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \in V} d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.111) \\ \gamma_m(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \int_{t_0}^{t_t} dt_0 \iint d\mathbf{x}_0 d\mathbf{v}_0 I_m(V, t_t | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \\ \times v_0 \Sigma_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) Gr(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ ; \quad m \geq 2 \text{ の時.} \quad (5.112)$$

(5.112) 式右辺における相空間に関する積分は, 全相空間領域にわたって行なう. グリーン関数 $Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は, 次の方程式の解として与えられる.

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(t - t'). \quad (5.113)$$

境界条件は, 次の通り.

$$Gr(\mathbf{x}_B, \mathbf{v}_{in}, t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}_B, \mathbf{v}_{out}, t) = 0. \quad (5.114)$$

また, 因果律により

$$Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0; \quad t' < t \text{ の時.} \quad (5.115)$$

付録Eに従い, 微分を実行すると (5.110) 式で与えられた I_m は, 次のようになる.

$$I_m(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \sum_{j=2}^m \langle \nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1) \rangle \sum_{\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}} \frac{m!}{r_1! r_2! \cdots r_{m-1}!} \\ \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_1} \\ \times \left[\frac{1}{2!} \int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_2(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_2} \times \cdots \\ \times \left[\frac{1}{(m-1)!} \int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_{m-1}(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_{m-1}}. \quad (5.116)$$

ここで, 和 $\sum_{\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}}$ は, 次の2つの条件をみたす m または正整数からなるセット $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}$ すべてについてとることを意味する.

$$\text{条件 I} \quad \sum_{i=1}^{m-1} i r_i = m. \quad (5.117)$$

$$\text{条件 II} \quad \sum_{i=1}^{m-1} r_i = j. \quad (5.118)$$

これらの条件をみたす正整数セットの総数を R_{mj} とおく. これは, 自然数をちょうど j 箇の自然数の和であらわす表わし方の総数で, 分割数と呼ばれる. R_{mj} に対する母関数は, 次のように与えられる¹⁷⁶⁾.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} y^m z^j R_{mj} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - y^n z)^{-1}. \quad (5.119)$$

TABLE 9 に, R_{mj} のいくつかの値を示す. また, TABLE 10 には, 分割のセット $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}$ の例を示す. $m=2 \sim 4$ の場合に対して, I_m を示すと次のようになる.

$$I_2(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \langle \nu(\nu-1) \rangle \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^2. \quad (5.120)$$

$$I_3(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ = \langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^3 \\ + 3 \langle \nu(\nu-1) \rangle \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_2(V, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]. \quad (5.121)$$

TABLE 9 Partition number, R_{mj}

$j \backslash m$	2	3	4	5	6
2	1				
3	1	1			
4	2	1	1		
5	2	2	1	1	
6	3	3	2	1	1

TABLE 10 Partition set, $\{r/m, j\}$

$m \backslash j$	2	3	4	5	6
2	(2)	—	—	—	—
3	(1, 1)	(3, 0)	—	—	—
4	(1, 0, 1) (0, 2, 0)	(2, 1, 0)	(4, 0, 0)	—	—
5	(1, 0, 0, 1) (0, 1, 1, 0)	(2, 0, 1, 0) (1, 2, 0, 0)	(3, 1, 0, 0)	(5, 0, 0, 0)	—
6	(1, 0, 0, 0, 1) (0, 1, 0, 1, 0) (0, 0, 2, 0, 0)	(2, 0, 0, 1, 0) (1, 1, 1, 0, 0) (0, 3, 0, 0, 0)	(3, 0, 1, 0, 0) (2, 2, 0, 0, 0)	(4, 1, 0, 0, 0)	(6, 0, 0, 0, 0)

$$\begin{aligned}
I_4(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \langle \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3) \rangle \\
&\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \right]^4 \\
&+ 6 \langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle \\
&\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^2 \\
&\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_2(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\
&+ 4 \langle \nu(\nu-1) \rangle \\
&\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\
&\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_3(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\
&+ 3 \langle \nu(\nu-1) \rangle \\
&\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \gamma_2(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^2. \quad (5.122)
\end{aligned}$$

こうして、1 箇の中性子を時刻 t に、相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に投入した時、時刻 t_f に相空間領域 V に存在する中性子数確率母関数の従う運動方程式 (5.17) の解を、階乗モーメント展開の形に求めることができた。同様な手法を用いれば、遅発中性子を考慮した場合の方程式 (5.60), (5.60') 観測量確率母関数の従う運動方程式 (5.70), (5.72), (5.80), (5.99), (5.99') の解析解も求めることができる。ただし、多重結合確率 $P(N_1, N_2, \dots, N_k)$ に対する母関数 $G(z_1, z_2, \dots, z_k)$ に対しては、結合階乗モーメント展開を行なう。すなわち、

$$\begin{aligned}
G(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \sum_{m_1=0} \sum_{m_2=0} \dots \sum_{m_k=0} \frac{(z_1-1)^{m_1}}{m_1!} \frac{(z_2-1)^{m_2}}{m_2!} \times \dots \\
&\times \frac{(z_k-1)^{m_k}}{m_k!} \gamma(m_1, m_2, \dots, m_k). \quad (5.123)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\gamma(m_1, m_2, \dots, m_k) &= \sum_{N_1=m_1} \sum_{N_2=m_2} \dots \sum_{N_k=m_k} \\
&\times \prod_{l=1}^k [N_l(N_l-1)\dots(N_l-m_l+1)] \\
&\times P(N_1, N_2, \dots, N_k). \quad (5.124)
\end{aligned}$$

1 箇の中性子または先行核を原子炉に投入した時の確率母関数 (5.11), (5.47), (5.48), (5.69), (5.74), (5.75), (5.93), (5.94) 式が、(結合) 階乗モーメント展開 (5.103) 式または (5.123) 式の形で求められたとする。この結果を、(5.101) 式または (5.102) 式に代入すれば、ポアソンの放出反応を行なう外部中性子源のある体系での確率母関数が、次のような (結合) 階乗キュームラント展開の形に求められる。

$$G(z) = \exp \left[\sum_{m=1} \frac{(z-1)^m}{m!} \delta_m \right]. \quad (5.125)$$

あるいは、

$$\begin{aligned}
G(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \exp \left[\sum_{m_1=0} \sum_{m_2=0} \dots \sum_{m_k=0} \frac{(z_1-1)^{m_1}}{m_1!} \frac{(z_2-1)^{m_2}}{m_2!} \dots \right. \\
&\times \left. \frac{(z_k-1)^{m_k}}{m_k!} \delta(m_1, m_2, \dots, m_k) \right]. \quad (5.126)
\end{aligned}$$

例を示そう。ポアソン源は、放出反応 1 回当たり 1 箇の中性子しか放出しないものとする。時刻 t_f に、相空間領域 V に存在する中性子数の m 次の階乗キュームラント $\delta_m(V, t_f | S)$ を求める。(5.103) を (5.102) に代入する。

$$G(z, V, t_f | S) = \exp \left[\sum_{m=1} \frac{(z-1)^m}{m!} \delta_m(V, t_f | S) \right]. \quad (5.127)$$

$$\delta_m(V, t_f | S)$$

$$= \int_{t_s}^{t_f} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} S(\mathbf{x}, t) \chi_S(\mathbf{v}) \gamma_m(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.128)$$

(5.111), (5.112) 式を用いると、 δ_m はまた、次のように表わすことができる。

$$\delta_1(V, t_f | S) = \iint_{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V} d\mathbf{x} d\mathbf{v} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t_f). \quad (5.129)$$

$$\delta_m(V, t_f | S)$$

$$= \int_{t_s}^{t_f} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} I_m(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) R_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$; m \geq 2 \text{ の時}. \quad (5.130)$$

ここで、 f_1 は、平均の中性子数分布関数である。すなわち、

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_{t_0}^t dt' \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' Gr(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \times S(\mathbf{x}', t') \chi_s(\mathbf{v}'). \quad (5.131)$$

また、 R_{1t} は、単位時間当りの核分裂数の平均分布をあらわす。すなわち、

$$R_{1t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = v \Sigma_f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.132)$$

ある確率の階乗キュームラントと(5.104)または、(5.124)で定義した階乗モーメントとの一般的な関係は、KUBO⁸⁴⁾により調べられている。いくつかの例を示そう。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \gamma_1 = \text{期待値.} \\ \bar{\sigma}_2 &= \gamma_2 - \gamma_1^2 = \text{分散 - 期待値.} \\ \bar{\sigma}_3 &= \gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3. \\ \bar{\sigma}_4 &= \gamma_4 - 4\gamma_3\gamma_1 - 3\gamma_2^2 + 12\gamma_2\gamma_1^2 - 6\gamma_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.133)$$

また、 $\bar{\sigma}(m_1, m_2, \dots, m_N)$ と $\gamma(m_1, m_2, \dots, m_N)$ との関係をいくつかあげると次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(1) &= \gamma(1). \\ \bar{\sigma}(1, 1) &= \gamma(1, 1) - \gamma(1, 0)\gamma(0, 1). \\ \bar{\sigma}(1, 1, 1) &= \gamma(1, 1, 1) - \gamma(1, 0, 0)\gamma(0, 1, 1) \\ &\quad - \gamma(0, 1, 0)\gamma(1, 0, 1) - \gamma(0, 0, 1)\gamma(1, 1, 0) \\ &\quad + 2\gamma(1, 0, 0)\gamma(0, 1, 0)\gamma(0, 0, 1). \\ \bar{\sigma}(1, 1, 1, 1) &= \gamma(1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \{\gamma(1, 0, 0, 0)\gamma(0, 1, 1, 1) \\ &\quad + 3 \text{ other similar terms}\} \\ &\quad - \{\gamma(1, 1, 0, 0)\gamma(0, 0, 1, 1) \\ &\quad + 2 \text{ other similar terms}\} \\ &\quad + 2\{\gamma(1, 0, 0, 0)\gamma(0, 1, 0, 0)\gamma(0, 0, 1, 1) \\ &\quad + 5 \text{ other similar terms}\} \\ &\quad - 6\gamma(1, 0, 0, 0)\gamma(0, 1, 0, 0) \\ &\quad \times \gamma(0, 0, 1, 0)\gamma(0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (5.134)$$

これらの関係を用いれば、ある確率の階乗モーメントがわかれば、階乗キュームラントを算出できる。逆に、階乗キュームラントがわかれば、階乗モーメントを算出することもできる。(附録A参照)

5.5 積密度グリーン関数とその物理的構造

5.5.1 結合確率と積密度分布関数

始めに相空間領域 V 中にあらわれる粒子数 N の m 次階乗モーメント $\gamma_m = \langle N(N-1)\dots(N-m+1) \rangle$ の確率論的意味を明らかにしよう。簡単のために、相空間座標 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) を (μ) と表わすものとする。

領域 V 中の無限小領域 $d\mu (= d\mathbf{x} d\mathbf{v})$ 中に現われる粒子数 $dN(\mu)$ が n 箇である確率 $P(n, d\mu \text{ at } \mu)$ に対して次の仮定 (Ramakrishnan¹²²⁾ の仮定) が成り立つ。

$$P(1, d\mu \text{ at } \mu) = \phi_1(\mu) d\mu + O(d\mu)^2,$$

$$\begin{aligned} P(0, d\mu \text{ at } \mu) &= 1 - \phi_1(\mu) d\mu - O(d\mu)^2, \\ P(n, d\mu \text{ at } \mu) &= O(d\mu)^n; n \geq 2. \end{aligned} \quad (5.135)$$

すなわち、1 箇現われる確率は $d\mu$ に比例するが、2 箇以上 n 箇現われる確率は $(d\mu)^n$ のオーダーになり、1 箇現われる確率に比し、無視できるものとする。

したがって、領域 V 中に現われる粒子数の期待値

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \int_V \langle dN(\mu) \rangle \\ &= \int_V d\mu \phi_1(\mu). \end{aligned} \quad (5.136)$$

次に、無限小領域 $d\mu_1$ に n_1 箇、 $d\mu_2$ に n_2 箇現われる結合確率 $P_2(n_1, d\mu_1 \text{ at } \mu_1; n_2, d\mu_2 \text{ at } \mu_2)$ を考える。このとき $n_1 = n_2 = 1$ に対する P_2 の値のオーダーは $d\mu_1 d\mu_2$ であるが、一般には、 $(d\mu_1)^{n_1} (d\mu_2)^{n_2}$ のオーダーになる。そこで、 $n_1 + n_2 \geq 3$ の場合は、 $n_1 = n_2 = 1$ の場合に比し、無視できると仮定 (Ramakrishnan の仮定) しよう。そうすると、 $d\mu_1$ と $d\mu_2$ とが一致しないとき

$$\begin{aligned} \langle dN(\mu_1) dN(\mu_2) \rangle &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} n_1 n_2 P_2(n_1, d\mu_1 \text{ at } \mu_1; n_2, d\mu_2 \text{ at } \mu_2) \\ &= P_2(1, d\mu_1 \text{ at } \mu_1; 1, d\mu_2 \text{ at } \mu_2) \\ &\quad + O(d\mu_1^2 d\mu_2) + O(d\mu_1 d\mu_2^2). \end{aligned} \quad (5.137)$$

$$\begin{aligned} P_2(1, d\mu_1 \text{ at } \mu_1; 1, d\mu_2 \text{ at } \mu_2) &= \psi_2(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2. \end{aligned} \quad (5.138)$$

とおいて、 ψ_2 を第2位の積密度と名づける。

一方、無限小領域 $d\mu_1$ と $d\mu_2$ とが一致するときは $d\mu_1$ にいる粒子は同時に $d\mu_2$ にもいるという事情に対応して縮退がおこる。すなわち (5.135) 式から

$$\begin{aligned} \langle [dN(\mu_1)]^2 \rangle &= \Sigma n^2 P(n, d\mu \text{ at } \mu) \\ &= P(1, d\mu \text{ at } \mu) + O(d\mu)^2 \\ &= \phi_1(\mu) d\mu + O(d\mu)^2 \\ &= \langle dN(\mu_1) \rangle. \end{aligned} \quad (5.139)$$

(5.137), (5.138), (5.139) 式をまとめて

$$\begin{aligned} \langle dN(\mu_1) dN(\mu_2) \rangle &= \delta(\mu_1 - \mu_2) \phi_1(\mu_1) d\mu_1 d\mu_2 \\ &\quad + \psi_2(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2. \end{aligned} \quad (5.140)$$

したがって、領域 V 中の粒子数の2次モーメント

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle &= \iint \langle dN(\mu_1) dN(\mu_2) \rangle \\ &= \int_V d\mu \phi_1(\mu) + \int_V d\mu_1 \int_V d\mu_2 \psi_2(\mu_1, \mu_2). \end{aligned} \quad (5.141)$$

一般に m 箇の無限小領域 $d\mu_1 \dots d\mu_m$ (どの2つも一致しないものとする) 中にそれぞれ、 $dN(\mu_1), \dots, dN(\mu_m)$ 箇の粒子が現われる結合確率 P_m を考えよう。 P_m の値は $dN(\mu_1) = n_1 \geq 1, \dots, dN(\mu_m) = n_m \geq 1$ に対して $(d\mu_1)^{n_1} (d\mu_2)^{n_2} \dots (d\mu_m)^{n_m}$ のオーダーになり、 $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 1$ の場合に比し無視できると仮定 (Ramakrishnan の仮定) しよう。このとき

$$\begin{aligned} \langle dN(\mu_1) dN(\mu_2) \dots dN(\mu_m) \rangle &= P_m(1, d\mu_1 \text{ at } \mu_1; \dots; 1, d\mu_m \text{ at } \mu_m) \\ &\quad + \text{higher order terms} \\ &= \phi_m(\mu_1, \dots, \mu_m) d\mu_1 \dots d\mu_m. \end{aligned} \quad (5.142)$$

ϕ_m を m 位の積密度分布関数と呼ぶ。

m 箇の微小領域のうちいくつか重なり合うときは縮退がおこる。たとえば $d\mu_{m-1} = d\mu_m$ のときには

$$\begin{aligned} & \langle dN(\mu_1) dN(\mu_2) \cdots [dN(\mu_{m-1})]^2 \rangle \\ &= \langle dN(\mu_1) dN(\mu_2) \cdots dN(\mu_{m-1}) \rangle \\ & \quad + \text{higher order terms} \\ &= \phi_{m-1}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}) d\mu_1 d\mu_2 \cdots d\mu_{m-1}. \end{aligned} \quad (5.143)$$

したがって、領域 V 中の粒子数の m 次モーメントは一般に次のようにかける。

$$\begin{aligned} \langle N^m \rangle &= \int_{\mu_1 \in V} \cdots \int_{\mu_m \in V} \langle dN(\mu_1) \cdots dN(\mu_m) \rangle \\ &= \sum_{l=1}^m C_l^m \int_V d\mu_1 \int_V d\mu_2 \cdots \\ & \quad \times \int_V d\mu_l \phi_l(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l). \end{aligned} \quad (5.144)$$

係数 C_l^m は Stevens の分割数と呼ばれるものである。これは積密度分布関数 ϕ_l には関係しない。そこで、領域 V にちょうど N 箇の互いに独立な粒子が存在するとしよう。

1 箇の粒子が微小領域 $d\mu$ に存在する確率を $\phi^0(\mu)d\mu$ とおく。

ただし

$$\int_{\mu \in V} d\mu \phi^0(\mu) = 1. \quad (5.145)$$

そうすると、微小領域 $d\mu$ の中に N 箇のうちのどれか 1 箇が存在する確率 (Ramakrishnan の仮定により、これは $\phi_1(\mu)d\mu$ に等しい) は次のようにかける。

$$\phi_1(\mu)d\mu = N\phi^0(\mu)d\mu. \quad (5.146)$$

次に 2 つの領域 $d\mu_1, d\mu_2$ 中にそれぞれ 1 箇ずつ現われる確率は

$$\begin{aligned} & \phi_2(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2 \\ &= N(N-1) \phi^0(\mu_1) \phi^0(\mu_2) d\mu_1 d\mu_2. \end{aligned} \quad (5.147)$$

同様に

$$\begin{aligned} & \phi_l(\mu_1, \dots, \mu_l) d\mu_1 \cdots d\mu_l \\ &= N(N-1) \cdots (N-l+1) \phi^0(\mu_1) \cdots \phi^0(\mu_l) d\mu_1 \cdots d\mu_l. \end{aligned} \quad (5.148)$$

(5.146)~(5.148) を (5.144) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \langle N^m \rangle &= N^m \\ &= \sum_{l=1}^m C_l^m N(N-1) \cdots (N-l+1). \end{aligned} \quad (5.149)$$

(5.149) 式から係数 C_l^m を求めることができる。たとえば、

$$C_m^m = C_1^m = 1, \quad C_2^m = \frac{1}{2}(2^m - 1), \text{ etc.} \quad (5.150)$$

一般に次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \gamma_m(V) &= \langle N(N-1) \cdots (N-m+1) \rangle \\ &= \int_{\mu_1 \in V} d\mu_1 \cdots \int_{\mu_m \in V} d\mu_m \phi_m(\mu_1, \dots, \mu_m). \end{aligned} \quad (5.151)$$

すなわち、 m 次の階乗モーメントは、 m 位の積密度分布関数 ϕ_m を積分したものに等しい。いいかえれば、領域 V 中の相異なる m 箇の無限小領域 $d\mu_1, \dots, d\mu_m$ 中にそれぞれ 1 箇ずつ粒子が現われる確率 P_m の和に等しい。

証明 数学的帰納法を用いる。

まず (5.136), (5.141) 式から

$$\langle N(N-1) \rangle = \int_{\mu_1 \in V} d\mu_1 \int_{\mu_2 \in V} d\mu_2 \phi_2(\mu_1, \mu_2) \quad (5.152)$$

がわかる。

次に、 l 次 ($l \leq m-1$) の階乗モーメント

$$\begin{aligned} & \langle N(N-1) \cdots (N-l+1) \rangle \\ &= \int_{\mu_1 \in V} d\mu_1 \cdots \int_{\mu_l \in V} d\mu_l \phi_l(\mu_1, \dots, \mu_l) \end{aligned} \quad (5.153)$$

と仮定しよう。

(5.144) 式に (5.153) 式を用いると

$$\begin{aligned} & \int_{\mu_1 \in V} d\mu_1 \cdots \int_{\mu_m \in V} d\mu_m \phi_m(\mu_1, \dots, \mu_m) \\ &= \langle N^m \rangle - \sum_{l=1}^{m-1} C_l^m \langle N(N-1) \cdots (N-l+1) \rangle \\ &= \langle N^m - \sum_{l=1}^{m-1} C_l^m N(N-1) \cdots (N-l+1) \rangle \end{aligned}$$

が得られる。

ところで (5.149) 式を用いると上式、右辺は m 次の階乗モーメント $\langle N(N-1) \cdots (N-m+1) \rangle$ に他ならないことがわかる。(Q. E. D)

(5.151) 式は他にパラメータがあっても、そのまま成り立つ。したがって、時刻 t に点 μ に投入された 1 箇の中性子により、時刻 t_l に領域 V に現われる粒子数に対する m 次の階乗モーメント $\gamma_m(V, t_l | \mu, t)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \gamma_m(V, t_l | \mu, t) \\ &= \int_{\mu_1 \in V} d\mu_1 \int_{\mu_2 \in V} d\mu_2 \cdots \int_{\mu_m \in V} d\mu_m \\ & \quad \times Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_l | \mu, t). \end{aligned} \quad (5.154)$$

ここで、 $Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_l | \mu, t)$ は、時刻 t に点 μ に投入された 1 箇の中性子により時刻 t_l に作りだされる m 位の積密度関数である。これを特に m 位積密度グリーン関数と呼ぼう。簡単のために $Gr(m, t_l | \mu, t)$ と書くこともある。これは、次のようにも表わせる。

$$\begin{aligned} & Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_l | \mu, t) d\mu_1 d\mu_2 \cdots d\mu_m \\ &= P_m(1, d\mu_1 \text{ at } \mu_1; \dots; 1, d\mu_m \text{ at } \mu_m : t_l | \mu, t) \end{aligned} \quad (5.155)$$

以後、簡単のために、右辺を $P_m(1, t_l | \mu, t)$ と書くこともある。

こうして、確率母関数 (5.11) を $(z-1)$ のまわりで Taylor 展開したとき、すなわち、

$$G(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \gamma_m(V, t_l | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (5.156)$$

とおいたとき、階乗モーメント $\gamma_m(V, t_l | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は次の

ような意味をもつことがわかった。すなわち、時刻 t に場所 \mathbf{x} へ速度 \mathbf{v} をもった 1 箇の中性子を投入した時、時刻 t_f に領域 V 中の相異なる m 箇の点 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1), \dots, (\mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m)$ のまわりの m 箇の微小領域 $(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{v}_1), \dots, (d\mathbf{x}_m, d\mathbf{v}_m)$ 中にそれぞれ 1 箇ずつ中性子が現われる結合確率 $P_m(1, t_f | \mu, t)$ を領域 V 中のセルから m 箇のセルを選びだすあらゆる組み合わせについて求めてこれを加え合わせたもの、すなわち、 m 位の積密度グリーン関数 $Gr(m, t_f | \mu, t) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{x}_m d\mathbf{v}_m$ を独立変数 $\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m$ のすべてについて領域 V 中で積分したものに等しいことがわかった。

特に、(5.154) 式で、 $m=1$ とおいて、その結果を (5.111) 式と見比べると、 $Gr(\mu', t' | \mu, t)$ は、方程式 (5.113)~(5.115) 式で定義したグリーン関数にほかならないことがわかる。一方、SAITO and OTSUKA¹²⁶⁾ は、外部源のある原子炉において、第 2 位の積密度分布関数の従う運動方程式を導出し、その解は、Rossi- α 法における Feynman の流儀に従って得られたものと一致する事を示した。Feynman の流儀は、3. で紹介したように中性子場のゆらぎにおける相関項の起因を分枝過程と結びつけたもので、直観的ではあるが、炉雑音の本質をついた方法である。

この考えかたをさらに拡張して、高位の積密度グリーン関数の物理的構造を明らかにしよう。

5.5.2 積密度グリーン関数の物理的構造—拡張された Feynman の方法

時刻 t に相空間点 μ に投入した 1 箇の中性子のふるまいを、Fig. 9 のようなダイアグラムに示す。中性子は、

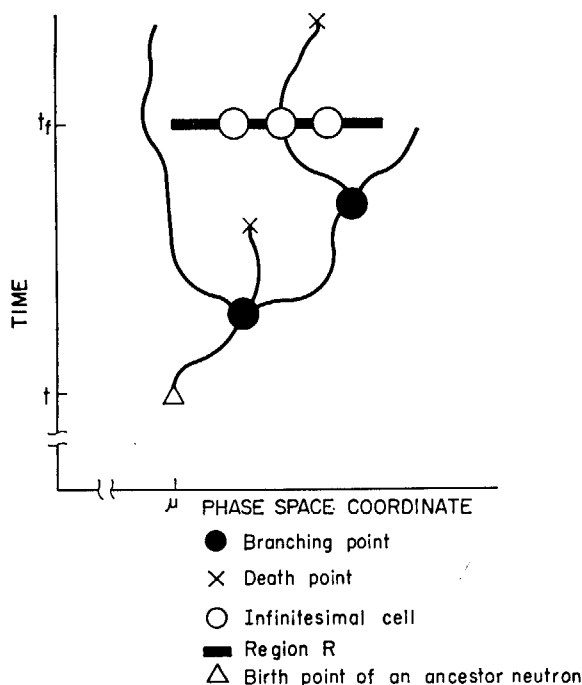


Fig. 9 History of an ancestor neutron

媒質原子と捕獲、散乱、核分裂といった反応をおこす。特に、核分裂で、2 またはそれ以上の子孫を生む場合には、そこから何本かの子孫中性子の運命線が生ずる。相空間-時間座標において、この分枝反応のおこった点を、分枝点と呼び、ダイアグラムでは記号●で表わすことにする。捕獲または原子炉の外へもれ出てしまった時空間点は、×をつける。Fig. 9 は、いわば、1 箇の祖先中性子とその子孫との運命を表わしたもので、これを中性子家系図とよぼう。

さて、時刻 t_f に、 $m(\geq 2)$ 箇の無限小セルを選ぶ。問題は、時刻 t に相空間点 μ に 1 箇の中性子を投入した時、 m 箇のセルそれぞれに 1 箇ずつ中性子が存在する結合確率 $P_m(1, t_f | \mu, t)$ を求めることである。それには次のように考える。

「各セルに現われる合わせて $m(\geq 2)$ の中性子は、少なくとも 2 箇、最大 m 箇の分集団から構成されている。分集団には、1 箇以上 $(m-1)$ 箇以下の中性子が含まれる。これら分集団は、最も近い互いに共通な分枝点 (closest common branching point. 以下 CCBP と略す。) と結びついている。この共通な祖先分枝点のおこり方、分集団の構成には、いくつかの可能性がある。各々の場合について、それぞれの確率を求め、加え合わせたものが、 $P_m(1, t_f | \mu, t)$ である。」

この考え方は、 $m=2$ の場合に用いられた Feynman の考え方の拡張になっている。ただし、Feynman は、外部源の存在する定常炉のゆらぎのうちで、特に相関項を求めるのに用いたことに注意を要する。本報の議論は、1 箇の中性子を投入した非定常炉における m 位の積密度グリーン関数に関する考察である。

Feynman の考え方を拡張して、結合確率 $P_m(1, t_f | \mu, t)$ あるいは、 m 位の積密度グリーン関数 $Gr(m, t_f | \mu, t)$ を構成するために、まず、次のような事象を導入しよう。

事象 1 時刻 t に (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に 1 箇の中性子を投入した時、後時刻 $t'(>t)$ における微小時間 dt' に点 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ のまわりの微小要素 $d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'$ 中で分枝反応が 1 回起る事象。

事象 2 事象 1 の結果、合わせて ν 箇の 2 次中性子が放出される事象。

事象 3 放出された ν 箇の 2 次中性子のうち、任意の 1 箇が $d\mathbf{v}_1'$ 中に、残りの $(\nu-1)$ 箇のうち任意の 1 箇が $d\mathbf{v}_2'$ 中に、 \dots 、残りの $(\nu-j+1)$ 箇のうち任意の 1 箇が $d\mathbf{v}_j'$ 中に現われる事象。

事象 4-1 事象 3 により放出された 2 次中性子のうち \mathbf{v}_1' のまわりの $d\mathbf{v}_1'$ 中の速度をもった中性子がもとになって、時刻 t_f に m 箇の微小セル $d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1, d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2, \dots, d\mathbf{x}_m d\mathbf{v}_m$ のうち任意の k_1 箇のセルにそれぞれ 1 箇ずつの中性子がおさまるような分集団 k_1 を生みだす事象。

事象 4-2 速度 \mathbf{v}_2' をもった中性子がもとになって、残り $(m-k_1)$ 箇のセルのうち任意の k_2 箇のセルにそれぞれ 1 箇ずつ中性子がおさまるような分集団 k_2 を生みだ

す事象.

事象 4-3

.....

事象 4-j 速度 \mathbf{v}_j' をもった 2 次中性子がもたなくなつて残り $k_j = m - k_1 - k_2 - \dots - k_{j-1}$ のセルにそれぞれ 1 箇ずつ中性子がおさまるような分集団 k_j を生みだす事象.

事象 4 における j 箇の分集団のうちには, 同じ数 k 箇の中性子からなる分集団 k が, r_k 箇あったとしよう. これは, 次の関係をみだす.

$$\sum_{k=1}^m k r_k = m. \tag{5.157}$$

$$\sum_{k=1}^m r_k = j. \tag{5.158}$$

r_k は, ゼロまたは正の整数である. $j \geq 2$ であるから $k \geq m$ である時, r_k は, ゼロになる. 上記の関係をみだすゼロまたは正整数のセット $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}$ は, すでに, (5.117), (5.118) で定義した分割のセットの一つになっている.

さて, 各事象の生起確率をもとめよう.

事象 1 のおこる確率:

$$dt' v' \Sigma_f(\mathbf{x}', \mathbf{v}') P_1(1, d\mu' \text{ at } \mu', t' | \mu, t).$$

無限小セル $d\mu'$ を考えているので, そこに 2 箇以上の子孫中性子が存在する確率は, 1 箇存在する場合に比し無視できる. (5.155) を用いると, 上式は, 次のようにかける.

$$dt' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' v' \Sigma_f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \tag{5.159}$$

事象 2 のおこる確率:

$$p(\nu \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \tag{5.160}$$

とおこう, 規格化の条件は, 次の通り

$$\sum_{\nu=2}^m p(\nu \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') = 1.$$

事象 3 のおこる確率:

$$\chi_{\nu j}(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \dots, \mathbf{v}_j' | \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') d\mathbf{v}_1' d\mathbf{v}_2' \dots d\mathbf{v}_j'. \tag{5.161}$$

とおこう. もし, 放出される ν 箇の中性子の速度分布が, 互いに独立に定まり, また核分裂のおこった時刻, 場所にも無関係とすると, 次のようにも書ける.

$$\nu(\nu-1)\dots(\nu-j+1) \chi(\mathbf{v}_1') \chi(\mathbf{v}_2') \dots \times \chi(\mathbf{v}_j') d\mathbf{v}_1' d\mathbf{v}_2' \dots d\mathbf{v}_j'. \tag{5.162}$$

ここで, $\chi(\mathbf{v})$ は, 1 箇の分裂中性子の速度分布関数であり, 次のように規格化されているものとする.

$$\int_0^\infty d\mathbf{v} \chi(\mathbf{v}) = 1.$$

事象 4 のおこる確率: 次のようにかける.

$$P_{k_1}(1, t_1 | \mathbf{x}', \mathbf{v}_1', t) P_{k_2}(1, t_1 | \mathbf{x}', \mathbf{v}_2', t') \times \dots \times P_{k_j}(1, t_1 | \mathbf{x}', \mathbf{v}_j', t').$$

これは, また, (5.155) 式を用いて, 次のようにも書ける.

$$Gr(k_1, t_1 | \mathbf{x}', \mathbf{v}_1', t') Gr(k_2, t_1 | \mathbf{x}', \mathbf{v}_2', t') \times \dots \times Gr(k_j, t_1 | \mathbf{x}', \mathbf{v}_j', t') d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_m. \tag{5.163}$$

(5.159), (5.160), (5.162), (5.163) の積をとり, 分枝空間点 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ としては, 全相空間中どこであってもよいこと, 分枝時刻 t' としては, 始めの中性子投入時刻 t か

ら終期点 t_1 までのどの時刻であってもよいことを考慮して積分を行なう. また, j 箇の 2 次中性子速度分布について平均をとる. その結果を, さらに, 次のような可能性を考慮して, 加え合わせる.

i) CCBP から生じた j 箇の 2 次中性子により作りだされる分集団 k_1, k_2, \dots, k_j に, m 箇の相異なるセルをわり合てる仕方には, いくつかの異なったやり方がある. そのやり方の数は,

$$\frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_j!} \tag{5.164}$$

通りである. しかしながら, もし分集団の組み合わせ $\{k_1, k_2, \dots, k_j\}$ の中に, 同じ箇数たとえば k 箇の中性子を含むものが複数箇 (r_k 箇) ある時には, 注意を要する.

たとえば, $k_1 = k_2 = \dots = k_{r_k} = k$ であるとすれば, それぞれ k 箇の中性子から成る r_k 箇の分集団は, 第 1 のものが速度 \mathbf{v}_1' をもつ 2 次中性子から, 第 2 のものが速度 \mathbf{v}_2' をもつ 2 次中性子から, ..., 第 r_k のものが速度 \mathbf{v}_{r_k}' をもつ 2 次中性子から生みだされるという点を除いては, 全く同等である. われわれは, すでに, 2 次中性子の速度分布については, 重み $\chi(\mathbf{v}_1') \chi(\mathbf{v}_2') \dots \chi(\mathbf{v}_{r_k}')$ をつけて積分しているので, このままでは, $\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \dots, \mathbf{v}_{r_k}'$ をもつ 2 次中性子からできる r_k 箇の分集団を重複して数えてしまうことになる. 重複をさけた分割の仕方の数は, (5.164) を, $r_k!$ で割れば求められる.

したがって, 一般に m 箇のセルを分集団にわりふる際, 分集団 k が r_k 箇 ($k=1, 2, \dots, m-1$) 存在している時には, 重複をさけた分割の仕方は, 次のようになる.

$$\frac{m!}{r_1! r_2! (2!)^{r_2} \dots r_k! (k!)^{r_k} \dots r_{m-1}! ((m-1)!)^{r_{m-1}}} \tag{5.165}$$

ここで, $\{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_{m-1}\}$ は, (5.157), (5.158) を満足する分割のセットを表わす.

ii) ある定まった m と j の値に対して, 分割のセット $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}$ は, TABLE 9 の例でもわかるようにいくつかある. その数 R_{mj} の母関数は, すでに (5.119) で与えた.

iii) 分集団の総数 j は, 2 以上で m または ν の小さい方に等しい数のうち, いずれでもよい.

以上により $Gr(m, t_1 | \mu, t)$ は, 次のように求まる.

$$Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_t^{t_1} dt' \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' J_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_1 | \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \times v' \Sigma_f(\mathbf{x}', \mathbf{v}') Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \tag{5.166}$$

ここで,

$$J_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{j=2}^m \langle \nu(\nu-1)\dots(\nu-j+1) \rangle \times \sum_{\{r\}_{m,j}} [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m | r_1, r_2, \dots, r_{m-1}] \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(1, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_j}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_2} \\ & \times \dots \dots \dots \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(k, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_k} \\ & \times \dots \dots \dots \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(m-1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_{m-1}}. \end{aligned} \tag{5.167}$$

ここで、和 $\sum_{[r_1, r_2, \dots, r_{m-1}]}$ は、(5.157), (5.158) をみたく 0 または正の整数のセット $[r_1, r_2, \dots, r_{m-1}]$ すべてについてとる事を意味する。和の数は、分割数 R_{m_j} 箇ある。次に和 $\sum_{[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]}$ の数は、(5.165) 式で与えられた数だけあり、 m 箇の相空間点 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ のうち、1 箇を含む r_1 箇の組に、2 箇を含む r_2 箇の組に、 \dots , $(m-1)$ 箇を含む r_{m-1} 箇の組に分割する仕方、すべてについてとる事を意味する。この分割が定まれば、(5.167) 右辺における各グリーン関数の相空間点が具体的に定まる。

こうして、 m 位の積密度グリーン関数を、Feynman の方法の拡張により導くことができた。中性子家系図を用いて、その構成を示してみよう。まず、 $m=2$ の場合には、分集団は、各々 1 箇の中性子を含む 2 つの集団から構成される。2 つの座標 μ_1, μ_2 のわりふり方は、一通りしかなく、(5.167) 式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} & J_2(\mu_1, \mu_2, t_f | \mu, t) \\ & = \langle \nu(\nu-1) \rangle \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]. \end{aligned} \tag{5.168}$$

家系図を、Fig. 10 に示す。

$m=3$ の場合には、分割のセットには、2 通りある。1 つは、Fig. 11 に示したように、それぞれ 1 箇の中性子からなりたつ 3 つの分集団にわける方法である。この場合には、相空間点 μ_1, μ_2, μ_3 のわりふり方は、1 通りしかなく、 J_3 への寄与は、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_3, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]. \end{aligned} \tag{5.169}$$

もう一つの分割の仕方は、2 つの中性子からなる分集団と 1 箇の中性子からなる分集団へわける方法である。この場合には、Fig. 12 に示すように、相空間点のわりふり方には、3 通りあり、 J_3 への寄与は、次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \langle \nu(\nu-1) \rangle \left\{ \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \right. \\ & \quad \times \left. \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_2, \mu_3, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \right\} \end{aligned}$$

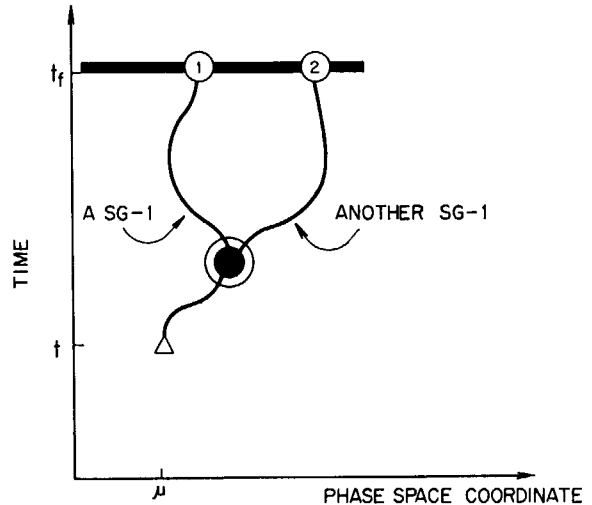


Fig. 10 Family tree of two neutrons

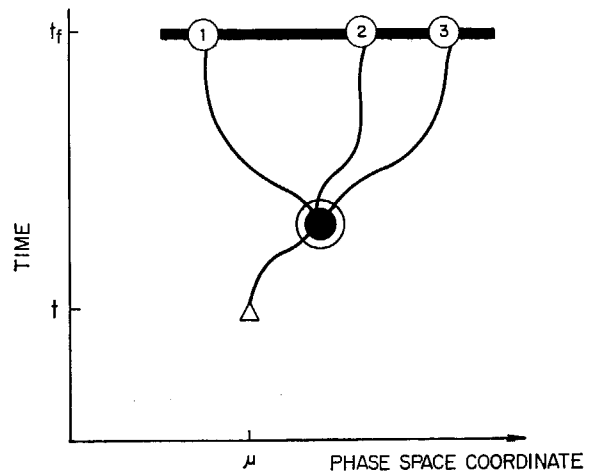


Fig. 11 Family tree of three neutrons, each of which comes from the same branching point

$$\begin{aligned} & + \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_3, \mu_1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad + \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_3, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, \mu_2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]. \end{aligned} \tag{5.170}$$

(5.169) と (5.170) との和が、 $J_3(\mu_1, \mu_2, \mu_3, t_f | \mu, t)$ となる。

$m=4$ の場合には、4 通りとなる。まず、それぞれ 1 箇の中性子からなりたつ 4 つの分集団にわける方法である。 J_4 への寄与は、次の通り。

$$\begin{aligned} & \langle \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3) \rangle \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_3, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \end{aligned}$$

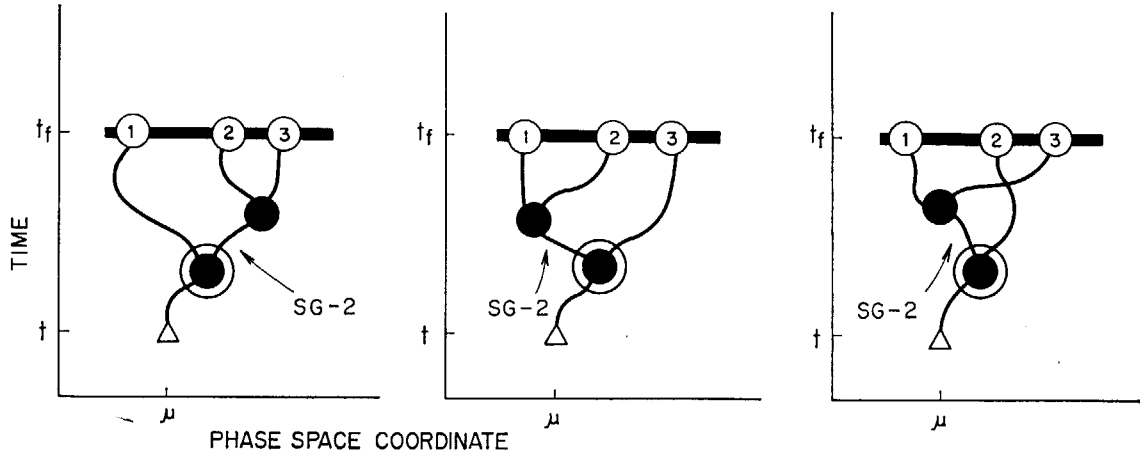


Fig. 12 Family trees of three neutrons consisting of two chain-correlated subgroups

$$\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_4, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]. \quad (5.171)$$

第2のわけ方は、1箇の中性子からなる2つの分集団と2箇の中性子からなる1つの分集団へわけける方法である。この場合、 J_4 への寄与は、次のようになる。

$$\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_3, \mu_4, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & + 5 \text{ other similar terms} \}. \quad (5.172) \end{aligned}$$

上式できちんと書いた項の座標点のわりふり方を (1|2|3, 4) と表わしたとすると、他の5項の座標のわりふり方は、次のようになる。

$$(1|3|2, 4), (1|4|2, 3), (2|3|1, 4), (4|2|1, 3), (4|3|1, 2).$$

次に、第3のわけ方は、1箇の中性子からなる1つの分集団と3つの中性子からなる1つの分集団へわけける方法である。 J_4 へのこの寄与は、次のようになる。

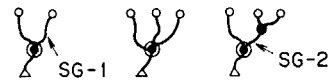
$$\begin{aligned} & \langle \nu(\nu-1) \rangle \left\{ \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \right. \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_2, \mu_3, \mu_4, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \left. + 3 \text{ other similar terms} \right\}. \quad (5.173) \end{aligned}$$

他の3項の座標のわりふりは、次の通り。

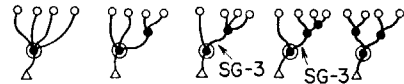
$$(2|3, 4, 1), (3|4, 1, 2), (4|1, 2, 3).$$

第4のわけ方は、2つの中性子からなる2つの分集団へわけける方法である。この場合の J_4 への寄与は、次の通り。

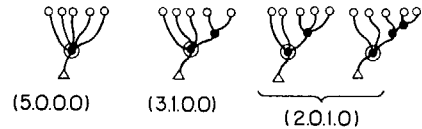
$$\begin{aligned} & \langle \nu(\nu-1) \rangle \left\{ \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_1, \mu_2, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \right. \\ & \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') Gr(\mu_3, \mu_4, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \\ & \left. + 2 \text{ other similar terms} \right\}. \quad (5.174) \end{aligned}$$



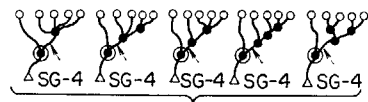
$$\begin{matrix} (3,0) & (1,1) \\ \hline m=2 & m=3 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} (4,0,0) & (2,1,0) & (1,0,1) & (0,2,0) \\ \hline m=4 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} (5,0,0,0) & (3,1,0,0) & (2,0,1,0) \\ (1,2,0,0) & (0,1,1,0) \end{matrix}$$



$$(1,0,0,1) \quad m=5$$

Fig. 13 Family trees of neutrons

他の2項の座標のわりふりは、次の通り。

$$(1, 3|2, 4), (1, 4|2, 3).$$

(5.171)~(5.174) 式の和が, $J_4(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, t_f | \mu, t)$ である。

Fig. 13 に、 $m=2\sim5$ の場合について、分集団の構成を分割のセット $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}$ に対応させて示す。 m 箇の相空間点のわりふり方については、明示していない。

こうして、 m 位の積密度グリーン関数 $Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_f | \mu, t)$ が、より低位の積密度グリーン関数から構

成されている仕組がわかった。その構成の仕方から、 m 位積密度グリーン関数に現われる m 箇の相空間点 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ を、どう並べかえても関数の値はかわらないことがわかる。(5.166) を (5.154) に代入して積分を実行すると、その結果は、すでに、(5.112), (5.116) で与えたものに一致する。

ただし、

$$I_m(V, t_t | \mu, t) = \int_{\mu_1 \in V} d\mu_1 \int_{\mu_2 \in V} \dots \int_{\mu_m \in V} d\mu_m \times J_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m | \mu, t). \quad (5.175)$$

さらに、(5.128), (5.154) を用いると、次のことがわかる。

$$\bar{\sigma}_m(V, t_t | S) = \int_{\mu_1 \in V} d\mu_1 \int_{\mu_2 \in V} d\mu_2 \dots \int_{\mu_m \in V} d\mu_m \times \bar{f}_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_t). \quad (5.176)$$

ここで

$$\bar{f}_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_t) = \int_{t_s}^{t_t} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \times S(\mathbf{x}, t) \chi_S(\mathbf{v}). \quad (5.177)$$

\bar{f}_m を、 m 位の積密度分布関数とよぶ。上式にさらに (5.166) 式を用いるとわかるように、高位の積密度分布関数は、次のようにも表わせる。

$$\bar{f}_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_t) = \int_{t_s}^{t_t} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} J_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_t | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \times R_{1t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad ; m \geq 2. \quad (5.178)$$

ただし、 R_{1t} は、(5.132) 式で定義したように、単位時間当りの核分裂数の平均分布を表わす関数である。

積密度分布関数の従う運動方程式は、SAITO and OTSUKA¹²⁶⁾, GOVORKOV⁶²⁾ により考察されている。(5.178) はその解である。

Feynman の流儀の拡張により構成された積密度グリーン関数は、1 箇の中性子を投入した非定常な原子炉において、領域 V 中に存在する中性子数の階乗モーメントと関係している。しかるに、このグリーン関数から (5.177) 式により構成された m 位の積密度分布関数 \bar{f}_m は、(5.176) が示すように、放出反応 1 回当たり 1 箇の中性子を放出するポアソン源のある原子炉において、領域 V 中に存在する中性子数の m 次の階乗キュムラントと関係していることに注意を要する。

なお、本節では、同一時刻 t_t に m 箇の相空間点を選んだが、拡張された Feynman の考え方は、相空間点を選ぶ時刻を違えた場合にも成り立つ。この場合にも、同様な手法で、グリーン関数が得られる。これを、特に m 時空間点グリーン関数と呼ぶ。この場合、(5.166) にあらわれる CCBP についての時間積分の上限は、相空間点を選ぶいくつかの時刻のうち一番小さいものになる。

5.6 インポートランス場と観測量のモーメント

本質には関係ないので、以下の議論では選発中性子の存在は無視する。1 時点観測の場合の観測量の確率母関数の従う運動方程式 (5.80) を z について 1 回微分した後、 $z=1$ とおいてみよう。

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = v \Sigma_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle. \quad (5.179)$$

ただし、 L^+ は (5.18) で定義した随伴ボルツマン作用素。また、

$$f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{N=0} N P_0(N, V_d, t_t, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.180)$$

$$\langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = \sum_{\theta=0} \theta \pi_a(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.181)$$

非同次項として表われる検出断面積が、いわば“源”の役割を果している随伴方程式 (5.179) の解は、インポートランスと呼ばれており、いままでに多くの考察がなされてきた。LEWINS¹⁸³⁾ によれば、インポートランス $f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は、時刻 t に相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に投入した 1 箇の中性子が将来の観測に寄与する平均の割合を表わす。すなわち、(5.180) 式である。より一般的には、インポートランスを、ある物理場に線型な作用を行なって得られる観測量への 1 箇の粒子の寄与とみなした MARCHUK and ORLOV⁹¹⁾ による概念がある。中性子の投入時空間点が異なれば、観測に対する寄与も異なる。また、中性子場に対して行なう観測にいくつかの種類がある時には、それぞれの観測に対して異なるインポートランス場が対応する。インポートランスは、いわば、将来の観測にとってその中性子がどの程度重要かを表わす物理量である。インポートランスの概念は、従来、中性子の平均的ふるまいに関連して用いられたが、ここでは、中性子の確率的ふるまいに関連したインポートランス場を考えよう。

始めに、検出に際して放出される 2 次中性子がない場合を考えよう。また、1 回の検出で常に 1 単位の観測量が得られるものとしよう。すなわち、

$$\pi_a(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 \quad ; \theta = 1 \text{ で } (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V_d \text{ かつ } t_t \leq t \leq t_t + T \text{ の時,}$$

$$= 0; \text{ 上記以外の時.} \quad (5.182)$$

方程式 (5.80) を、 z について、 m 回微分したのち、 $z=1$ とおこう。

運動方程式は、次のようになる。

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = v \Sigma_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \pi_a(1 \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t),$$

$$L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = W_m(V_d, t_t, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \times v \Sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad ; m \geq 2 \text{ の時} \quad (5.183)$$

ここで、 f_m^+ は、確率母関数 (5.74) を、 $z=1$ のまわりで、テイラー展開した時の m 次の展開係数、いいかえれば、観測量の m 次階乗モーメントを表わす。すなわち、

$$G(z, V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.184)$$

ただし,

$$\begin{aligned} f_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= 1. \\ f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{N=m}^{\infty} N(N-1)\cdots(N-m+1) \\ &\quad \times P(N, V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad ; m \geq 1 \text{ の時.} \end{aligned} \quad (5.185)$$

また, W_m は, (5.116) 式右辺において, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}$ をそれぞれ $f_1^+, f_2^+, \dots, f_{m-1}^+$ でおきかえたものに等しい. すなわち,

$$\begin{aligned} W_m(V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{j=2}^m \langle \nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1) \rangle \\ &\quad \times \sum_{\{r_{i|m,j}\}} \frac{m!}{r_1! r_2! \cdots r_{m-1}!} \\ &\quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_1} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2!} \int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') f_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_2} \times \cdots \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(m-1)!} \int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') f_{m-1}^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{r_{m-1}}. \end{aligned} \quad (5.186)$$

方程式 (5.183) の解は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \int d\mathbf{t}' \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' v' \Sigma_d(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \pi_d(1 \leftarrow \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \\ &\quad \times Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\ f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \int d\mathbf{t}' \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' W_m(V_d, t_i, T | \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \\ &\quad \times v' \Sigma_t(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad ; m \geq 2 \text{ の時.} \end{aligned} \quad (5.187)$$

ここで, Gr は, (5.113) 式で定義したグリーン関数である. $f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は, 時刻 t に相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に 1 箇中性子を投入した時できる非定常な中性子場で観測した時, 得られる観測量の m 次階乗モーメントへの投入中性子の寄与の度合を表わすと解釈できよう.

一方, (5.187) を (5.102) へ代入する. 結果は, 次のようになる.

$$G(z, V_d, t_i, T | S) = \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \delta_m \right]. \quad (5.188)$$

ここで,

$$\delta_m = \int dt' \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} S_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.189)$$

$$S_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = S(\mathbf{x}, t) \chi_S(\mathbf{v}). \quad (5.190)$$

(5.189) から $f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は, ポアソン源から $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に放出された 1 箇の中性子の観測量の m 次階乗キュムラントへの寄与を表わすとも解釈できよう. 同じ随伴方程式の解 f_m^+ が, この例で示したような異なる物理的意味をもつことに注意を要する. すなわち, 原子炉が,

どんな種類の外部源により運転されているかによって, f_m^+ の物理的内容が異なる. 1 箇の中性子を投入しただけの非定常炉では, f_m^+ は, 観測量の階乗モーメントへの寄与を表わすし, 放出反応 1 回当たり 1 箇の中性子を放出するポアソン源をもつ原子炉では, f_m^+ は, 観測量の階乗キュムラントを表わす. 特に, 一次の階乗モーメントと一次の階乗キュムラントとは, 一致していずれも観測量の期待値を表わし, 従って, f_1^+ は, 外部源の性質には関係なく一義的な意味をもつ.

原子炉における中性子数の統計的性質は, したがってまた観測量の統計的性質は, 外部源の統計的性質にも依存する. しかしながら, $f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ のみならず運動方程式 (5.183) は, 投入中性子の統計的性質までは規定していない. $f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の物理的内容が一義的に定まらないのも当然である. 随伴解 f_m^+ をインポートランスと呼ぶ時には, この点, 注意を要する. MATTHES⁹³⁾ は, 前節 (5.166) 式であらわされる m 次積密度グリーン関数 $Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_i | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ を中性子投入時点 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の関数とみた時, これをインポートランス関数と呼ぶことを提唱しているが, この場合にも, やはり, 中性子投入源の統計的性質によって, その物理的内容が異なってくる. なお, f_m^+ を, 前節で導入した m 時空間点積密度グリーン関数を用いて表わすと次のようになる.

$$\begin{aligned} f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \prod_{j=1}^m \left[\int_{t_i}^{t_i+T_j} dt_j \int_{\mu_j \in V_{d_j}} d\mu_j v_j \Sigma_{d_j}(\mu_j, t_j) \right] \\ &\quad \times Gr(\mu_1, t_1, \mu_2, t_2, \dots, \mu_m, t_m | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (5.191)$$

さて, インポートランスは, 観測器の統計的性質にも当然依存する. 1 回の検出の反応の際, 複数単位の検出量が放出され, 同時に, 二次中性子も生成される一般の場合を考えよう. ただし, 遅発中性子は無視する. 方程式 (5.80) を, z について, m 回微分した後, $z=1$ とおく. まず, $f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の従う運動方程式として (5.179) が得られる. 一方, $f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に対しては, 次のようになる.

$$\begin{aligned} L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= W_m(V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) v \Sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad + W_{dm}(V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad + \langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle_m v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{m-1} m C_l \langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle_{m-l} \\ &\quad \times \left[\langle \nu_d \rangle \int d\mathbf{v}' \chi_d(\mathbf{v}') f_l^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right. \\ &\quad \left. + W_{dl}(V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right] \\ &\quad \times v \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) ; m \geq 2. \end{aligned} \quad (5.192)$$

ここで

$$\begin{aligned} W_{dm}(V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{j!} \langle \nu_d(\nu_d-1)\cdots(\nu_d-j+1) \rangle \\ &\quad \times \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left[\int d\mathbf{v}' \chi_d(\mathbf{v}') \tilde{G}(z, V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right]_{z=1}. \end{aligned} \quad (5.193)$$

微分を実行すると、これは、(5.186) 式右辺において、核分裂の際放出される 2 次中性子数 ν とその速度分布関数 $\chi(\mathbf{v})$ を、それぞれ検出反応の際放出される 2 次中性子数 ν_d とその速度分布関数 $\chi_d(\mathbf{v})$ におきかえたものに等しいことがわかる。

特に、

$$W_{d1}(V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (5.194)$$

また、(5.192) 式において、 $\langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle_m$ は、放出観測量の m 次階乗モーメントを表わす。すなわち、

$$\begin{aligned} \langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle_m &= \sum_{\theta=m} \theta(\theta-1)\cdots(\theta-m+1) \pi_d(\theta \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \\ & \quad (5.195) \end{aligned}$$

また、

$${}_m C_i = \frac{m!}{(m-1)! l!}.$$

方程式 (5.192) の右辺は、低次のインポートランス関数から構成されており、グリーン関数 $Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ を用いてその解を表わすことができる。たとえば、

$$\begin{aligned} f_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \int d\mathbf{x}' \iint d\mathbf{v}' \{ (W_2(|\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \mathbf{v}' \Sigma_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \\ &+ W_{d2}(|\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \mathbf{v}' \Sigma_d(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \\ &+ \langle \theta(\theta-1) \rangle \mathbf{v}' \Sigma_d(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \\ &+ 2 \langle \theta(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \rangle \langle \nu_d \rangle \mathbf{v}' \Sigma_d(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \\ &\times \int d\mathbf{v}'' \chi_d(\mathbf{v}'') f_1^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}'', t') \} \\ &\times Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.196) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} W_2(|\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') &= \langle \nu(\nu-1) \rangle \left[\int d\mathbf{v}'' \chi(\mathbf{v}'') f_1^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}'', t') \right]^2. \quad (5.197) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{d2}(|\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') &= \langle \nu_d(\nu_d-1) \rangle \left[\int d\mathbf{v}'' \chi_d(\mathbf{v}'') f_1^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}'', t') \right]^2. \\ & \quad (5.198) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \int d\mathbf{x}' \iint d\mathbf{v}' \mathbf{v} \Sigma_d(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \langle \theta(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \rangle \\ &\times Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.199) \end{aligned}$$

こうして、時刻 t に相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に 1 箇中性子を投入した非定常状態にある原子炉で、観測をした時の観測量の確率母関数が、(5.184) のような階乗モーメント展開の形に求められた。この結果を (5.101) に代入すれば、ポアソン源のある原子炉で観測したときの観測量を階乗キュムラント展開の形に求めることができる。特に、観測量の期待値：

$$\bar{\sigma}_1(V_d, t_i, T | S) = \langle \nu \Sigma_d \langle \theta \rangle \rangle, f_1. \quad (5.200)$$

観測量の分散：

$$\begin{aligned} \sigma_2(V_d, t_i, T | S) &= \bar{\sigma}_2(V_d, t_i, T | S) + \sigma_1(V_d, t_i, T | S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\langle \nu_s(\nu_s-1) \rangle \left[\int d\mathbf{v}' \chi_s(\mathbf{v}') f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^2, S(\mathbf{x}, t) \right) \\ &+ \left(\langle \nu(\nu-1) \rangle \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^2, R_{1f}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &+ \left(\langle \nu_d(\nu_d-1) \rangle \right. \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}' \chi_d(\mathbf{v}') f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^2, C_1(\mathbf{x}, t) \left. \right) \\ &+ \langle \theta^2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle, C_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &+ 2 \left(\langle \nu_d \rangle \langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle \right. \\ &\times \left. \left[\int d\mathbf{v}' \chi_d(\mathbf{v}') f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t), C_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right] \right). \quad (5.201) \end{aligned}$$

ここで、任意の関数 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ に対して (ψ_1, ψ_2) は (5.26) 式で定義した内積を表わす。すなわち、

$$(\psi_1, \psi_2) = \int dy \psi_1(y) \psi_2(y).$$

積分は、 y の全定義域にわたって行なう。(5.200) 式において f_1 は、中性子数の期待値の分布関数を表わす。すなわち、

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \int_{t_i}^t d\mathbf{x}' \iint d\mathbf{v}' Gr(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \mathbf{x}', \mathbf{v}', t') \\ &\times S_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t'). \quad (5.202) \end{aligned}$$

R_{1f} は、(5.132) で定義したように単位時間当りの核分裂数の平均分布。

C_1 は、単位時間当りの検出反応数の平均分布。すなわち、

$$C_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \nu \Sigma_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.203)$$

また

$$C_1(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{v} C_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.204)$$

S_1 は、ポアソン源から単位時間当り放出される中性子数の平均分布、すなわち、

$$S_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = S(\mathbf{x}, t) \chi_s(\mathbf{v}) \langle \nu_s \rangle. \quad (5.205)$$

$\langle \nu_s \rangle$ は、ポアソン源の放出反応 1 回当り放出される中性子数の期待値。すなわち、

$$\langle \nu_s \rangle = \sum_{\nu=0} \nu p_s(\nu \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.206)$$

また、

$$\langle \nu_s(\nu_s-1) \rangle = \sum_{\nu=2} \nu(\nu-1) p_s(\nu \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.207)$$

特に、一点炉モデルでは、

$$\begin{aligned} f_1^+(t) &= \frac{\nu \Sigma_d \langle \theta \rangle}{\alpha} [1 - e^{-\alpha(t_i + T - t)}] \\ & \quad ; t_i \leq t \leq t_i + T \text{ の時,} \\ &= \frac{\nu \Sigma_d \langle \theta \rangle}{\alpha} [1 - e^{-\alpha T}] e^{-\alpha(t_i - t)} \\ & \quad ; t \leq t_i \text{ の時,} \quad (5.208) \end{aligned}$$

となるから、(5.201) の分散の値は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_2(t_i, T | S) &= \langle \theta \rangle^2 \frac{\varepsilon^2 T}{\alpha^2 l^2} \{ \langle \nu_s(\nu_s-1) \rangle S + \langle \nu(\nu-1) \rangle R_{1f} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \nu_d(\nu_d - 1) \rangle C_1 \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \\
& + \langle \theta^2 \rangle \varepsilon R_{if} T \\
& + 2 \langle \theta^2 \rangle \frac{\varepsilon^2 T}{\alpha l_f} R_{if} \langle \nu_d \rangle \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right). \quad (5.201')
\end{aligned}$$

ただし, ε は, 検出器効率であり, 平均の検出率 C_1 とは, 次の関係で結ばれる.

$$\varepsilon = \frac{C_1}{R_{if}}. \quad (5.209)$$

(5.201') 式右辺第 1 項 [] の部分は, それぞれ, 中性子源からの放出反応, 誘導核分裂反応 (検出器内のものは除く), 検出器内の誘導核分裂反応によるバイナリ雑音源からの寄与である. 右辺, 最後の項は, 検出一計数反応に伴ない生成された 2 次中性子が, 再び, 検出・計数が行なわれる過程からの寄与である.

(5.201) の結果は, Langevin 法で求めた 2 時点相関関数に対する表式 (4.219') で, まず, 遅発中性子の存在を無視し, ついで, (4.221) により相関のある検出パルス対が時間差 τ だけ離れている確率 $P_{cor}(\tau)$ を求め, (4.162) に代入して求めた分散の値と同じになる.

検出器が, 複数箇ある場合, あるいは, 同一の検出器で多時点観測を行なう場合の確率分布のモーメントも同様な手法で求められる. 確率母関数 (5.93) は, (5.123) のような結合階乗モーメント展開の形に求まり, その結果を用いれば, ポアソン源のある体系での観測量の確率母関数は, (5.126) のような結合階乗キュームラントの形で求められる. 特に, 遅発中性子を無視し, 検出反応の際, つねに 1 単位の観測量が得られ, また, その際, 二次中性子が放出されないとしよう. 1 箇の中性子を時刻 t に, 相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に投入した時, 得られる J 箇の検出器観測量 N_1, N_2, \dots, N_J の相互モーメント $\langle N_1 N_2 \dots N_J \rangle$ は, 前節でのべた J 時空間点積密度グリーン関数を用いて, 次のように書き表わされる.

$$\begin{aligned}
& \langle N_1 N_2 \dots N_J \rangle \\
& = \prod_{j=1}^J \left[\int dt_j \int d\mu_j v \Sigma_{dj}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \pi_{dj}(1 \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right] \\
& \quad \times Gr(\mu_1, t_1, \mu_2, t_2, \dots, \mu_J, t_J | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (5.210)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\pi_{dj}(1 \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= 1 \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V_j \text{ でかつ} \\
& \quad t_j \leq t \leq t_j + T_j \text{ の時,} \\
& = 0 \quad ; \quad \text{上記以外の時.} \quad (5.211)
\end{aligned}$$

したがって, 放出反応 1 回当たり 1 箇の中性子を放出するポアソン源のある体系での観測量のキュームラントは, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
& \bar{\sigma}(m_1, m_2, \dots, m_J | S) \\
& = \prod_{j=1}^J \left[\int dt_j \int d\mu_j v \Sigma_{dj}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \pi_{dj}(1 \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right] \\
& \quad \times \tilde{f}(\mu_1, t_1, \mu_2, t_2, \dots, \mu_J, t_J). \quad (5.212)
\end{aligned}$$

ただし, $m_1 = m_2 = \dots = m_J = 1$, また,

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}(\mu_1, t_1, \mu_2, t_2, \dots, \mu_J, t_J) \\
& = \int_0^{t_1} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\
& \quad \times Gr(\mu_1, t_1, \mu_2, t_2, \dots, \mu_J, t_J | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\
& \quad \times S(\mathbf{x}, t) \chi_s(\mathbf{v}). \quad (5.213)
\end{aligned}$$

特に, $\bar{\sigma}(1, 1)$ は, 観測量の共分散 $\langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle$ である. J 時点観測の場合には, $\bar{\sigma}(1, 1, \dots, 1)$ を, $(T_1 T_2 \times \dots \times T_J)$ で割ったものは, J 時点相関関数と呼ばれる. この場合, T_j は, j 番目の検出器の分解時間とみなせよう. 特に, (5.212) で

$$\pi_{dj}(1 \leftarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \delta(t - t_j)$$

とおけば, 時刻 t_j における瞬間観測量, いいかえれば, 検出反応率 (detection rate) の J 時点相関関数 $\Gamma(t_1, t_2, \dots, t_J)$ に対する表式となる.

5.7 ま と め

零出力炉における中性子輸送現象を, 線型, マルコフ, すなわち, Galton-Watson 型 (cf. Chap. 1 in Ref. (178)) の分枝過程とみなした理論構成を示した.

まず, 原子炉に 1 箇の中性子を投入し, 後時刻に, 相空間領域 V 中に存在する中性子数が N 箇である確率 P を導入する. 投入中性子が原子炉内を自由飛行し, 始めて核反応を行った時, 吸収, 散乱, 核分裂, それぞれの場合に応じて放出される 2 次中性子をあらたに投入中性子と考えて, P に対する釣合いの関係を導く. この導出法は, "first collision probability (FCP)" 法と呼ばれ, JANOSSAY⁷⁹⁾ が宇宙線のなだれ現象の定式化に用いたものを, PÁL¹¹⁷⁾, BELL¹⁷⁾ が中性子輸送問題へ応用したものである. これから, (5.11) 式で定義される P の母関数 G の運動方程式が得られる. 特に, $\tilde{G} = 1 - G$ とおくと, \tilde{G} は, 非線型随伴ボルツマン型の運動方程式 (5.17) に従うことがわかる.

解析解は, (5.103) に示したように, $z=1$ のまわりのテイラー展開の形に求められる. 展開係数 γ_m は, 領域 V 中の中性子数の m 次の階乗モーメントを意味し, (5.112), (5.116) で示されるように, より低次の階乗モーメント, $\gamma_{m-1}, \gamma_{m-2}, \dots, \gamma_1$ から構成される. この構成の仕組を, 中性子家系の増倍の形態と結びつけて, 物理的に解明できることを, 5.5 で示した. (cf. Fig. 13) この考え方は, 定常炉において, 互いに相関のある中性子検出パルス対が時間差 τ だけ離れて存在する確率 $P_{cor}(\tau)$ を評価した Feynman の方法⁶⁹⁾ の拡張になっている. これを用いて, m 位の積密度グリーン関数 $Gr(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, t_1 | \mu, t)$ が, (5.166), (5.167) 式のように表わされることがわかる. RAMAKRISHNAN¹²²⁾ によると, このグリーン関数は, (μ, t) に投入した 1 箇の中性子が増倍を繰り返して, 後時刻 t_1 に m 箇の微小相空間領域 $d\mu_1, d\mu_2,$

…、 $d\mu_m$ にそれぞれ1箇ずつ子孫中性子を生みだす確率の大きさに相当している。相空間点を選ぶ時刻を、それぞれ、 t_1, t_2, \dots, t_m と変えれば、 m 時空間点積密度グリーン関数が得られる。階乗モーメントは、積密度グリーン関数を用いて、(5.154) のように表わされる。

遅発中性子を考慮した場合には、一般に、領域 V 中に存在する中性子数および先行核数に対する結合確率を導入する。始めに投入した粒子が、中性子かあるいは先行核かに応じて、それぞれ、結合確率を導入し、母関数を(5.47)、(5.48) のように定義する。FCP法を用いて母関数(5.53)の運動方程式を導くと、(5.60) のように、連立非線型随伴ボルツマン型になる。投入粒子が、先行核である場合の解は、(5.65) のように投入粒子が中性子である場合の解を用いて表わすことができる。解析解は、(5.123) のように結合階乗モーメント展開の形に表わすことができる。

観測量の確率母関数のしたがう運動方程式には、(5.80) で示されるように、あらたに、検出器の統計的性質に関連した非同次項 \bar{S}_d が加わる。ただし、先行核成分はゼロ。一方、自由中性子成分は、検出の際、2次中性子・先行核が放出されず、また、つねに1単位の観測量が得られる時には、(5.91) のように簡単になる。一般には、(5.86) のようになる。この項の存在のために、中性子検出量の確率分布は、検出領域に存在する中性子数の確率分布とは異なったものになる。検出量の階乗モーメント f_m^+ は、(5.187)、(5.186) のように与えられ、これはまた、(5.191) のように m 時空間点積密度グリーン関数を用いて表わすことができる。

f_m^+ は、一般には、方程式(5.192)の解として得られる。遅発中性子を考慮する場合には、より複雑になるが手続は原理的に同じである。

一方、複数箇の検出器を用いて観測した時の観測量、あるいは、1箇の検出器で、観測時間をずらして観測した時の観測量の確率母関数は、(5.99)の方程式に従う。解は、原理的には(5.123)のような結合階乗モーメントの形に定めることができる。特に、観測量の間の相互モーメントは、(5.210) のように、多時空間点積密度グリーン関数を用いて表わすことができる。

こうして、1箇の中性子または先行核を投入する事により起動された非定常な原子炉での種々な確率母関数がわかれば、原子炉に任意の外部中性子源をおいた場合の対応する確率母関数を求めることができる。特に、ポアソンの、放出反応をおこす外部源のある場合には、(5.101)、(5.102) のようになる。すでに求めた1粒子投入の場合の確率分布の(結合)階乗モーメントを用いて、ポアソン源のある原子炉での種々な確率母関数を、(5.125)、(5.126) のような(結合)階乗キュムラント形に定めることができる。たとえば、遅発中性子を無視し、ポアソン源が放出反応1回当たり1箇の中性子しか放出しない時には、領域 V 中に存在する中性子数の階乗キ

ュームラントは、(5.130) のようになる。これは、また、積密度グリーン関数から(5.177)によって定義される中性子数の積密度分布関数 \tilde{f}_m を用いて(5.176) のようにも書ける。 \tilde{f}_m に対する運動方程式は、SAITO and OTSUKA¹²⁶⁾、GOVORKOV⁶²⁾ によって、それぞれ独立に導かれているが、(5.177) または(5.178) の表式は、その解になっている。

一方、観測量の階乗キュムラント $\bar{\sigma}_m$ も、 f_m^+ を用いて(5.189) のように表わされる。特に、観測量の分散に対する公式は、(5.201) のようになる。観測量の種類が、複数箇ある時、(5.126)の結合階乗キュムラント展開において、特に、次数 $m_1 = m_2 = \dots = m_N = 1$ の展開係数は、 N 時空間点積密度グリーン関数を用いて(5.212)、(5.213) のように表わされる。 $N=2$ とおくと、1つの検出器を用いて、観測時間が重なり合うことのないよう2回観測した時、あるいは、2つの相異なる検出器で観測した時、それぞれ得られる観測量の共分散となる。一方、それぞれの観測時間幅を十分短かくすると、検出反応率(detection rate)の多時点相関関数が得られる。

こうして、1箇の中性子または先行核を投入することにより起動された非定常な原子炉における中性子数、先行核数、観測量等に対する確率母関数の(結合)階乗モーメントを、低次のものから順次、算出できることを示した。したがって、原理的には、確率分布そのものも評価できることになる。たとえば、中性子数確率分布は、(5.11)、(5.103) を用いて、次のように与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} P(N, V, t_i | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial z^N} G(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \gamma_{N+m}(V, t_i | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (5.214)$$

母関数が(5.184)で与えられる観測量の分布確率も、同形になる。すなわち、

$$\begin{aligned} P(N, V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} f_{N+m}^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (5.215)$$

母関数が(5.123)で与えられる一般の場合には、次のようになる。

$$\begin{aligned} P(N_1, N_2, \dots, N_k) &= \prod_{j=1}^k \left[\frac{1}{N_j!} \right] \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_k=0}^{\infty} \\ &\quad \times \frac{(-1)^{m_1+m_2+\dots+m_k}}{m_1! m_2! \dots m_k!} \gamma(N_1+m_1, N_2+m_2, \\ &\quad \dots, N_k+m_k). \end{aligned} \quad (5.216)$$

一方、ポアソンの外部源のある原子炉では、(結合)階乗キュムラントを、低次のものから順次算出できることがわかった。したがって、原理的には、確率分布そのものは、たとえば、次式で算出できることになる。

$$P(0, V, t_f | S) = \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \delta_m\right]. \quad (5.217)$$

$$P(1, V, t_f | S) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \delta_{m+1}\right] P(0, V, t_f | S). \quad (5.218)$$

$$P(N, V, t_f | S) = \sum \frac{1}{r_1! r_2! \dots r_l!} \left(\frac{\xi_1}{1!}\right)^{r_1} \left(\frac{\xi_2}{2!}\right)^{r_2} \dots \left(\frac{\xi_l}{l!}\right)^{r_l} \times [(P(0, V, t_f | S))]^{r_1+r_2+\dots+r_l}. \quad (5.219)^*$$

ここで、和は、 $\sum_{k=1}^l k r_k = N$ となるような、0 または正

の整数の組 (r_1, r_2, \dots, r_l) 全部にわたってとられる。また、

$$\xi_r = \frac{\partial^r}{\partial z^r} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \delta_m \right] \Bigg|_{z=1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \delta_{m+r}. \quad (5.220)$$

なお、本章の理論構成は、原子炉を特性づける核反応断面積、2次中性子の生成確率等のパラメータが時間に依存して変る非定常系の炉雑音現象にも適用できる。

* 附録Eに示した Bell の多項式を用いる。

6. 零出力炉雑音のスペクトル密度

検出器 a による時刻 t の検出率を ${}^a C(t)$ としよう。定常炉における平均の検出率 ${}^a C_1$ のまわりのゆらぎを $\delta^a C(t)$ とおく。すなわち、

$$\delta^a C(t) = {}^a C(t) - {}^a C_1.$$

ゆらぎのスペクトル密度を、次のように定義しよう。

$$\begin{aligned} {}^{aa} \Phi_{cc}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) e^{-i\omega(t-u)} \langle \delta^a C(t) \delta^a C(u) \rangle \\ &= 2 \int_0^{\infty} d\tau \langle \delta^a C(\tau) \delta^a C(0) \rangle \cos \omega\tau. \end{aligned} \quad (6.1)$$

一方、2つの検出器 a, b の出力のゆらぎ $\delta^a C(t), \delta^b C(t)$ 間の相互スペクトル密度は、次のように定義する。

$${}^{ab} \Phi_{cc}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) e^{-i\omega(t-u)} \langle \delta^a C(t) \delta^b C(u) \rangle. \quad (6.2)$$

6.1 一点炉モデル

炉雑音スペクトル密度は、一点炉モデルでは、すでに(4.187)式で求めたように、次のように与えられる。

$$\Phi_{cc}(\omega) = \epsilon R_{1f} \left[\epsilon \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k^2 |H[i\omega]|^2 + 1 \right]. \quad (6.3)$$

特に、2つの検出器出力間の相互スペクトル密度は、(4.191)式で与えたように

$${}^{ab} \Phi_{cc}(\omega) = \epsilon^a \epsilon^b \epsilon R_{1f} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k^2 |H[i\omega]|^2. \quad (6.4)$$

ここで、 R_{1f} は、単位時間当りの核分裂数の期待値、 ϵ は、検出器効率、 k は、実効増倍率、 $H[s]$ は、零出力伝達関数で、次のように与えられる。

$$H[s] = \frac{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s\beta_i}{s + \lambda_i}}{s \left(l + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i k}{s + \lambda_i} \right) + 1 - k} \quad (6.5)$$

記号は、慣用のものである。すなわち l は中性子寿命、 β_i は、核分裂に際して放出される i 群の遅発中性子の割合、 λ_i は、 i 群の先行核崩壊定数。

(6.3) および (6.4) 式の導出の際、次のおきかえを用いている*。

$$\begin{aligned} \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle &= (1-\beta) \langle \nu(\nu-1) \rangle. \\ \langle \nu_0 \nu_i \rangle &= (1-\beta) \beta_i \langle \nu(\nu-1) \rangle \quad ; \quad i \geq 1 \text{ の場合.} \\ \langle \nu_i(\nu_j - \delta_{ij}) \rangle &= \beta_i \beta_j \langle \nu(\nu-1) \rangle \quad ; \quad i, j \geq 1 \text{ の場合.} \end{aligned} \quad (6.6)$$

ただし、 ν_0 は、核分裂1回当たり放出される即発中性子

* 付録B参照

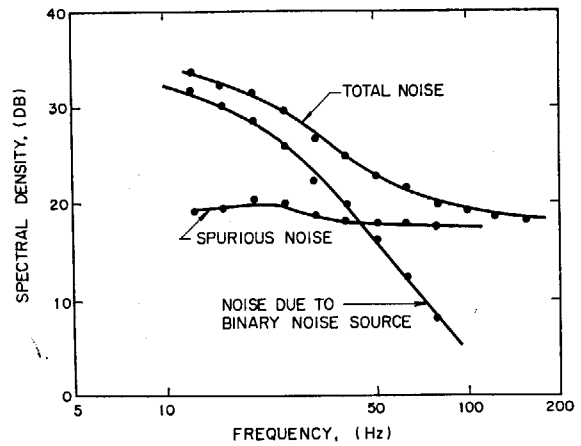


Fig. 14 Separation of reactor noise from spurious noise*

数、 $\nu_i (i \geq 1)$ は、同じく核分裂1回当たり放出される i 群の遅発中性子数である。また、

$$\nu = \nu_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i. \quad (6.7)$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i. \quad (6.8)$$

Fig. 14 は、炉雑音スペクトル密度 (6.3) を、バイナリ雑音源からの寄与と白色な検出器雑音 ϵR_{1f} とに実験的にわけたものである。

a) 自発核分裂の寄与

炉出力が低く、誘導核分裂に比し、自発核分裂の効果が無視できない場合には、雑音源 $\langle \nu(\nu-1) \rangle R_{1f}$ に、自発核分裂の雑音源 $\langle \nu_s(\nu_s-1) \rangle S_0$ を加えなければならない。特に、

$$\langle \nu_s(\nu_s-1) \rangle = \langle \nu(\nu-1) \rangle. \quad (6.9)$$

とおけるとしよう。また、自然核分裂率 S_0 に、誘導核分裂率 R_{1f} を加えた全核分裂率を R_{1f}^{\oplus} とおこう。すなわち、

$$R_{1f}^{\oplus} = R_{1f} + S_0. \quad (6.10)$$

中性子数の期待値**が、 $\langle \nu_s \rangle S_0 / [v \Sigma_a (1-k)]$ であることおよび ν_s の確率分布は、 ν の分布に等しいという近似を用いると

$$R_{1f} = k R_{1f}^{\oplus}. \quad (6.11)$$

$$S_0 = (1-k) R_{1f}^{\oplus}. \quad (6.12)$$

となる。また、検出器効率 ϵ^{\oplus} を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon^{\oplus} &= C_1 / R_{1f}^{\oplus} = k C_1 / R_{1f} \\ &= k \epsilon. \end{aligned} \quad (6.13)$$

* Reproduced from Ref (108).

** 自発核分裂によるもの他に外部源がないものとする。

これらの関係を用いると、自発核分裂に起因する雑音源もとりにいた検出反応率のゆらぎのスペクトル密度は、次のようになる。

$${}^{ab}\Phi_{cc}(\omega) = {}^a\varepsilon^b\varepsilon R_{1f} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k^2 |H[i\omega]|^2 + \delta_{ab} C_1. \quad (6.14)$$

ただし、 C_1 は、平均の検出率、すなわち

$$C_1 = \varepsilon \oplus R_{1f} \oplus = \varepsilon R_{1f}. \quad (6.15)$$

また、

$$\begin{aligned} \delta_{ab} &= 1; \text{ 自己スペクトル密度の場合,} \\ &0; \text{ 相互スペクトル密度の場合.} \end{aligned} \quad (6.16)$$

b) 検出器雑音の効果

たとえば、BF₃-計数管に対して、

1) 検出反応に際して放出される α -粒子など、検出管内でイオン化をおこす粒子のランダム過程。

2) イオン化により生ずるイオンのランダム過程。

以上、2つを考慮した場合の、放出電流の期待値のまわりのゆらぎは、すでに 4.10 で得られている。自発核分裂の寄与もとりにいた解析公式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Phi_{II}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) e^{-i\omega(t-u)} \langle \delta^a I(t) \delta^b I(u) \rangle \\ &= |h[i\omega]|^2 [\langle \theta \rangle^2 {}^{ab}\tilde{P}(\omega) + (\langle \theta^2 \rangle + \langle \theta \rangle) C_1]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

ただし、計数管の伝達特性 $h[s]$ は、a, b 両計数管で同一とした。これは、イオンの集積時定数を、時定数としてもつ一次遅れ要素の伝達特性と同じと考えてよい。 θ は α -粒子の反応 1 回当たり生成されるイオン対の数である。出力電流は、イオン対の数に比例するものと考えている。また、 ${}^{ab}\tilde{P}(\omega)$ は、次のように与えられる。

$${}^{ab}\tilde{P}(\omega) = {}^a\varepsilon^b\varepsilon R_{1f} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k^2 |H[i\omega]|^2. \quad (6.18)$$

ГОРН⁵⁹⁾ は、(6.17) 式を電離箱の伝達特性 $|h[i\omega]|^2$ を測定するのに利用している。印加電圧をパラメータとした実験結果を Fig. 15 に示す。

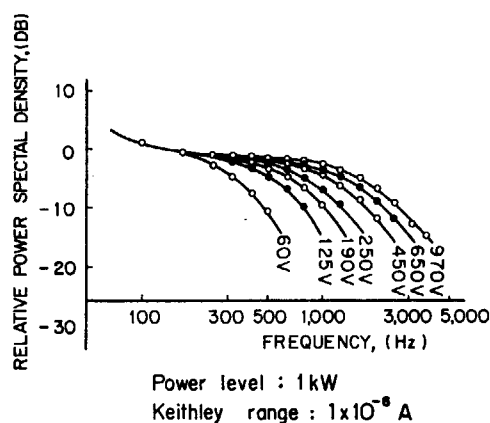


Fig. 15 Measured frequency response of the ionization chamber*

* Reproduced from Ref (59).

実際に炉雑音スペクトル密度についての正確な実験データを得るためには、この検出器の伝達特性やのちのべる空間依存性の効果の他に、次のような点に関して補正を行なう必要がある。

- 臨界炉の場合におこるドリフト。すなわち、ゆらぎは定常ではなく、たとえば、分散は、時間に比例して増大する。
- 統計量が有限であるという制約。理論で与えられるのは、無限時間かけて行なった観測データに対応する。
- 測定系から生ずる誤差。たとえば、増幅器やフィルター内の雑音、増幅度やバンド幅・中心周波数のゆらぎ、バンド幅の有限性、磁気テープの機械的ふれやテープ速度の不均一性等々。

これらの誤差評価については、たとえば、DRAGT^{46,48)}, MORITZ *et al.*¹⁰²⁾, SEIFRITZ *et al.*¹³⁷⁾ により考察されており、また、SUDA による適切な解説も試みられている (cf. 第II篇 7 in Ref. (186))

6.2 動特性パラメータの推定

6.2.1 中性子寿命

(6.5) 式で与えた零出力炉伝達関数は、周波数 $\omega \gg \lambda$ では、次のように近似できる。

$$\begin{aligned} H[i\omega] &\approx \frac{1}{i\omega \left(l + \frac{\beta k}{i\omega} \right) + 1 - k} \\ &\approx \frac{1}{l(i\omega + \alpha_0)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

ここで、 α_0 は、即発中性子の減衰定数である。すなわち

$$\alpha_0 = \frac{1 - (1 - \beta)k}{l}. \quad (6.20)$$

そこで、臨界に十分近い場合、同一検出器の出力電流のゆらぎの自己スペクトル密度は、(6.3) 式から次のように与えられることがわかる。

$$\Phi_{cc}(\omega) = \frac{A}{\omega^2 + (\beta/l)^2} + B. \quad (6.21)$$

ここで、 A, B は常数である。測定データを上式の形にカーブ・フィットすれば、折点周波数 β/l が求められ、既知の β の値を用いれば、中性子寿命 l がわかる。

なお、2つの検出器出力電流のゆらぎについての相互スペクトル密度には、(6.21)式定数項がなくなる。すなわち、

$${}^{ab}\Phi_{cc}(\omega) = \frac{A'}{\omega^2 + (\beta/l)^2}. \quad (6.22)$$

Fig. 16 は、COHN³³⁾ が、高速炉 ZPR-V を対象に (6.21) 式を用いて、はじめて、中性子寿命を炉雑音実験によっ

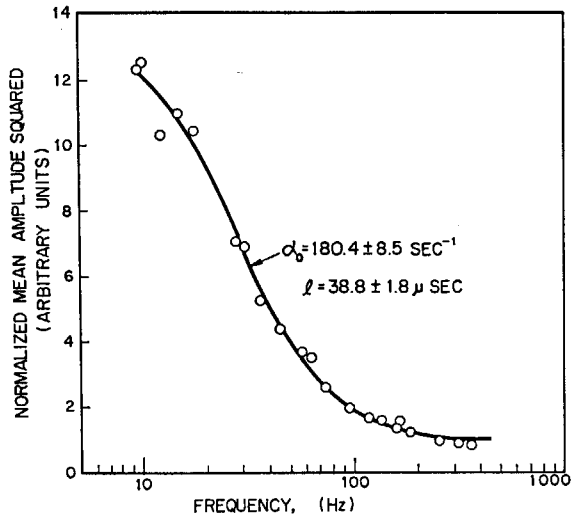


Fig. 16 Pile noise spectrum from ZPR-V*

て定めた時、得られた結果である。

6.2.2 反応度

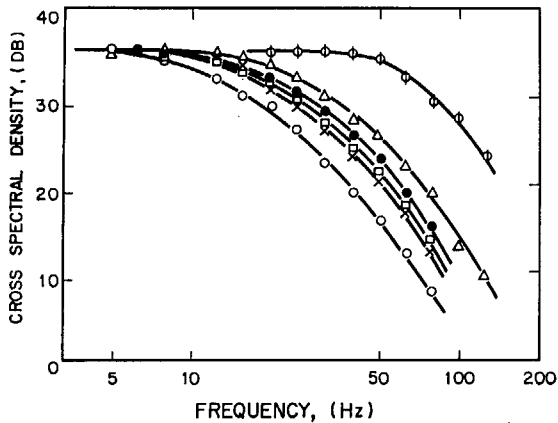
炉の反応度 ρ を、次のように定義する

$$\rho = \frac{k-1}{k} \tag{6.23}$$

ρ を用いると、 α_0 は、次のようにかける

$$\alpha_0 = \frac{1}{1-\rho} \frac{\beta}{l} \left(1 - \frac{\rho}{\beta}\right) \tag{6.24}$$

ρ が1に比べて、十分小さい時、相互スペクトル密度は次のように表わすことができる。



- Critical
- × Shim rod 300 mm inserted
- " 400 mm "
- " 500 mm "
- △ " 800 mm "
- ◇ Safety rod 800 mm "

Fig. 17 Measurement of subcriticality**

* Reproduced from Ref. (33)

** Reproduced from Ref. (108)

$${}^{ab}\Phi_{cc}(\omega) = \frac{A'}{\omega^2 + \left[\frac{\beta}{l} \left(1 - \frac{\rho}{\beta}\right)\right]^2} \tag{6.25}$$

したがって、折点周波数の β/l からのずれを求めて、ドル単位で表わされる反応度 ρ/β を定めることができる。

Fig. 17 は、NOMURA¹⁰⁸⁾ が、スイミング・プール型炉 TTR-1 を対象に、制御棒挿入度をパラメタにした実験の結果である。

6.2.3 炉出力絶対値

炉雑音スペクトル密度 (6.3) 式と平均の検出率

$$\langle C \rangle = \epsilon R_{If} \tag{6.26}$$

の2乗との比をとると結果は、次のようになる。

$$\frac{\Phi_{cc}(\omega)}{\langle C \rangle^2} = \frac{1}{R_{If}} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k^2 |H[i\omega]|^2 + \frac{1}{\langle C \rangle} \tag{6.27}$$

ワット (watt) 単位で表わされる炉出力 P と R_{If} との間には、次の関係がある。

$$R_{If} = 3.1 \times 10^{10} P \tag{6.28}$$

一方、伝達関数のゲインは、周波数域 $\lambda \ll \omega_F \ll \beta/l$ では、ほぼ平坦になり、(6.19)式から次のように表わされることがわかる。

$$|H[i\omega_F]|^2 \approx \frac{1}{(\alpha_0 l)^2} \approx \frac{1}{\beta^2}$$

$$\text{ただし、} \lambda \ll \omega_F \ll \beta/l \tag{6.29}$$

一方、 $\omega_\infty \gg \beta/l$ では、

$$|H[i\omega_\infty]|^2 \approx \frac{1}{(\omega l)^2} \tag{6.30}$$

となるから、(6.27) 式は、 $1/\langle C \rangle$ で近似できることになる。これらの事柄を用いると、次の関係式が得られる。

$$\frac{\Phi_{cc}(\omega_F)}{\langle C \rangle^2} - \frac{\Phi_{cc}(\omega_\infty)}{\langle C \rangle^2} \approx \frac{1}{3.1 \times 10^{10} P} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\beta^2 \langle \nu \rangle^2} \tag{6.31}^*$$

この関係式から炉出力絶対値 $P[\text{watt}]$ が求まる¹³⁴⁾。

Fig. 18 は、YAMADA¹⁵⁷⁾ がスイミング・プール型炉 HTR を対象に、検出器出力電流のゆらぎを用いて測定した出力と出力計の読みとの比較である。このほか、反応度計あるいは対数増幅器の出力電圧のゆらぎから測定したり¹⁴⁵⁾、また、のちにのべる Rossi- α 法、 P_0 -法を用いて測定する試みも報告⁹⁹⁾されている。

なお、(6.31) 式は、空間依存性を考慮すると、多少、ようすがかわる。特に、裸の立方形炉を想定し、基本モード近似で空間依存性を考慮すると、(6.31) 式右辺は、 $\left(\frac{32}{3\pi^2}\right)^3$ 倍、すなわち、1.26 倍される¹⁴¹⁾。(cf. Eq.(6.145))

* 自己相関関数を $\Gamma(\tau)$ とおくと、本報では、雑音スペクトル密度を

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Gamma(\tau) e^{-i\omega\tau} = 2 \int_0^{\infty} d\tau \Gamma(\tau) \cos \omega\tau$$

と定義している。

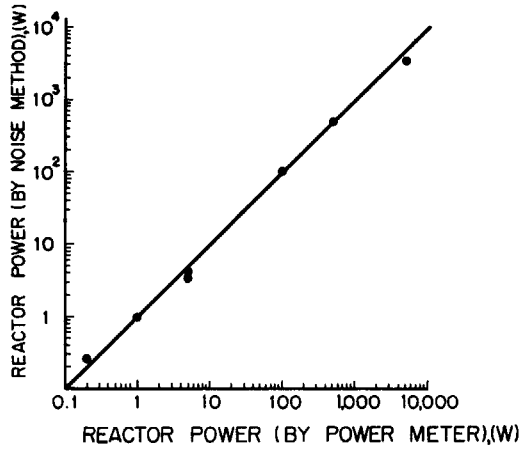


Fig. 18 Reactor power calibration*

6.3 二群一点炉モデル

遅発中性子を I 組とし、第 i 組の先行核数を $C^{(i)}$ としよう。また、第 i 群 ($i=1, 2$) の中性子数を $N^{(i)}$ とする。粒子数ベクトル \mathbf{f} を次のように定義しよう。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \\ C^{(1)} \\ \vdots \\ C^{(I)} \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

期待値 \mathbf{f}_1 は、次の運動方程式をみます。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}_1(t) = -\mathbf{B}\mathbf{f}_1(t) + \mathbf{S}_1. \quad (6.33)$$

ここで、 \mathbf{S}_1 は、外部源の強さを表わす。また、ボルトマン作用素行列 \mathbf{B} は、次のように与えられる。

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1} & , & -\frac{(1-\beta)k}{l_2} & , & -\lambda_1 & , & \dots & , & -\lambda_I \\ & & -\frac{\rho}{l_1} & , & \frac{1}{l_2} & & 0 & , & \dots & , & 0 \\ 0 & , & -\frac{\beta_1 k}{l_2} & , & \lambda_1 & , & \dots & , & 0 \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & , & -\frac{\beta_I k}{l_2} & , & 0 & , & \dots & , & \lambda_I \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

ここで、 l_1, l_2 は、それぞれ、1群および2群の中性子寿命、 k は、2群の中性子が1箇消滅した時再生される1群の中性子数の期待値。 ρ は、1群の中性子1箇が、2群へ減速される確率、すなわち共鳴吸収をのがれる確率、 β_i ($i=1, \dots, I$) は核分裂に伴ない放出される i 群の遅発中性子の割合、 λ_i は、 i 群の先行核の崩壊定数である。核分裂により放出される即発中性子および先行核の崩壊により放出される遅発中性子は、いずれも、1群に属するものとした。 β を全遅発中性子の割合とする。

特に、外部中性子源は、1群に属する中性子のみを放出すると考え、その強さを S_{ex} とおくと、粒子数の期待値について次の結果が得られる。

$$\langle N^{(1)} \rangle_s = \frac{l_1}{1-k\rho} S_{ex}. \quad (6.35a)$$

$$\langle N^{(2)} \rangle_s = \frac{l_2 \rho}{1-k\rho} S_{ex}. \quad (6.35b)$$

$$\langle C^{(i)} \rangle_s = \frac{\beta_i k}{\lambda_i} \frac{\rho}{1-k\rho} S_{ex}, \quad i=1, 2, \dots, I. \quad (6.35c)$$

また、 i 群に中性子振動源 $\delta S^{(i)} e^{i\omega t}$ が加わった場合の、定常値のまわりの粒子数の変動は、 $\delta \mathbf{f}[i\omega] e^{i\omega t}$ で与えられる。ここで、 $\delta \mathbf{f}[s]$ は、次の方程式の解である。

$$(\mathbf{s}U + \mathbf{B})\delta \mathbf{f}[s] = \begin{pmatrix} \delta S^{(1)} \\ \delta S^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

特に、

$$\delta N^{(1)}[s] = l_1 \frac{(1+s l_2)\delta S^{(1)} + k \left(1 - \sum_{i=1}^I \frac{s \beta_i}{s + \lambda_i}\right) \delta S^{(2)}}{|D[s]|}. \quad (6.37)$$

$$\delta N^{(2)}[s] = l_2 \frac{\rho \delta S^{(1)} + (1+s l_1)\delta S^{(2)}}{|D[s]|}. \quad (6.38)$$

ここで、

$$D[s] = s^2 l_1 l_2 + s(l_1 + l_2) + 1 - k\rho \left(1 - \sum_{i=1}^I \frac{s \beta_i}{s + \lambda_i}\right). \quad (6.39)$$

(6.37) および (6.38) 式から、伝達関数 (Transfer function) は、容易に求めることができよう。すなわち、

$$T_{11}[s] = \frac{1+s l_2}{|D[s]|}. \quad (6.40)$$

$$T_{12}[s] = \frac{k \left(1 - \sum_{i=1}^I \frac{s \beta_i}{s + \lambda_i}\right)}{|D[s]|}. \quad (6.41)$$

$$T_{21}[s] = \frac{\rho}{|D[s]|}. \quad (6.42)$$

$$T_{22}[s] = \frac{1+s l_1}{|D[s]|}. \quad (6.43)$$

さて、Langevin 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{f}(t) = -\mathbf{B}\delta \mathbf{f}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (6.44)$$

を導入する。雑音源のスペクトル密度は、次のように与えられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) \langle \mathbf{F}(t)\mathbf{F}(u) \rangle e^{-i\omega(t-u)} = \mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{B}^T. \quad (6.45)$$

ここで、 \mathbf{E} は、対角行列で、その $i-i$ 成分は、定常状態における粒子数の期待値ベクトル \mathbf{f}_1 の i 番目の成分である。

検出反応の際、二次中性子、先行核は、放出されないものとしよう。この時、検出反応率のゆらぎのスペクト

* Reproduced from Ref. (157)

ル密度は、次のように表わされる。

$${}^a b \tilde{\Phi}_{cc}(\omega) = \tilde{P}(\omega) + \langle {}^a C \rangle \delta_{ab}. \quad (6.46)$$

ここで

$$\tilde{P}(\omega) = {}^a \mathbf{W} Gr[i\omega] Q Gr^T[-i\omega] {}^b \mathbf{W}^T. \quad (6.47)$$

であり、すでに (4.227) 式で与えたものである。

${}^a \mathbf{W}$ は、検出器 a の中性子 1 箇当りの検出率ベクトル、また、 ${}^a C$ は、検出率である。自己スペクトル密度を求める場合、すなわち、 $a=b$ の場合のみ、(6.46) 式右辺第 2 項で表わされる白色な寄与がある。Gr[s] は、作用素 B のグリーン関数をラプラス変換したもので、次のように与えられる。

$$Gr[s] = [sU + B]^{-1}. \quad (6.48)$$

ここで、U は、単位行列である。

雑音源 Q は、(4.105) 式を用いて、次のように表わすことができる。

$$Q = R_{1f} \begin{pmatrix} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle, 0, \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, \dots, \langle \nu_0 \nu_l \rangle \\ 0, 0, 0, \dots, 0 \\ \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, 0, \langle \nu_1(\nu_1 - 1) \rangle, \dots, \langle \nu_1 \nu_l \rangle \\ \vdots \\ \langle \nu_0 \nu_l \rangle, 0, \langle \nu_l \nu_l \rangle, \dots, \langle \nu_l(\nu_l - 1) \rangle \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

ただし、 R_{1f} は、平均の核分裂率。また、中性子源は、崩壊反応 1 回当たり 1 箇の中性子しか放出しないものと考え、Q への寄与はないものとする。

(6.34)、(6.48) および (6.49) 式を用いて、(6.47) 式から、まず、1 群の中性子検出率のゆらぎのスペクトル密度を求めてみよう。

$${}^a \mathbf{W} = {}^b \mathbf{W} = \mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

とおき、ベクトル・行列演算を実行すると次の結果が得られる。

$$\tilde{P}_{11}(\omega) = r_1^2 l_1^2 \frac{1 + \omega^2 l_2^2}{|D[i\omega]|^2} R_{1f} q(\omega). \quad (6.51)$$

ここで

$$q(\omega) = \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle + 2 \sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i^2}{i\omega^2 + \lambda_i^2} \langle \nu_0 \nu_i \rangle + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \frac{\lambda_i}{i\omega + \lambda_i} \frac{\lambda_j}{-i\omega + \lambda_j} \langle \nu_i(\nu_j - \delta_{ij}) \rangle. \quad (6.52)$$

δ_{ij} は、Kronecker's delta である。すなわち

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 && \text{if } i=j, \\ &= 0 && \text{otherwise.} \end{aligned} \quad (6.53)$$

同様に、(6.47) 式で

$${}^a \mathbf{W} = {}^b \mathbf{W} = \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

とおくと、2 群の中性子検出反応率のゆらぎのスペクトル密度が求まる。すなわち、

$$\tilde{P}_{22}(\omega) = r_2^2 l_2^2 \frac{p^2}{|D[i\omega]|^2} R_{1f} q(\omega). \quad (6.55)$$

一方、(6.47) 式で ${}^a \mathbf{W} = \mathbf{W}_1$ 、 ${}^b \mathbf{W}^T = \mathbf{W}_2^T$ とおくと、1 群の中性子検出率と 2 群の中性子検出率の間の相互スペクトル密度が求められる。すなわち、

$$\tilde{P}_{12}(\omega) = r_1 r_2 l_1 l_2 \frac{(1 + i\omega l_2) p}{|D[i\omega]|^2} R_{1f} q(\omega). \quad (6.56)$$

したがって、絶対値は、

$$|\tilde{P}_{12}(\omega)| = r_1 r_2 l_1 l_2 \frac{\sqrt{1 + \omega^2 l_2^2}}{|D[i\omega]|^2} p R_{1f} q(\omega), \quad (6.57)$$

一方、位相差は、次のようになる

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= \tan^{-1} \frac{\text{Im. } \tilde{P}_{12}(\omega)}{\text{Re. } \tilde{P}_{12}(\omega)} \\ &= \tan^{-1} \omega l_2. \end{aligned} \quad (6.58)$$

これは、また、第 1 群にのみ外乱を加えた場合の第 1 群における中性子場の応答、すなわち、 $T_{11}[s]$ の位相差に等しい。

さらに、干渉関数 (Coherence function) $R(\omega)$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} R(\omega) &\equiv \frac{\tilde{P}_{12}(\omega)}{|\tilde{P}_{11}(\omega) \tilde{P}_{22}(\omega)|^{1/2}} \\ &= e^{i\theta_{12}}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

2 群一点炉モデルによる炉雑音スペクトル密度は、NIETO *et al.*,¹⁰⁴⁾ によって始めて求められた。そこでは、核分裂に伴ない放出される即発中性子数、先行核数の分散について Akcasu のモデル (cf. Appendix B) を導入し、(6.52) 式で与えられる $q(\omega)$ をさらに変形している。特に、周波数域 $\omega \gg \lambda_i$ では、 $q(\omega)$ は、白色とみなせる。すなわち、

$$q(\omega) \approx \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle, \quad \omega \gg \lambda_i. \quad (6.60)$$

一方、

$$D[i\omega] \approx -\omega^2 l_1 l_2 + i\omega(l_1 + l_2) + 1 - kp(1 - \beta). \quad (6.61)$$

ここで、中性子寿命 $l_1 \ll l_2$ であることを利用すると、上式はさらに次のように近似できる。

$$D[i\omega] \approx [i\omega l_1 + 1][i\omega l_2 + 1 - kp(1 - \beta)]. \quad (6.62)$$

したがって、次のような結論をひきだすことができる。

- $P_{22}(\omega)$ の折点周波数 $[1 - kp(1 - \beta)]/l_2$ は、1 点炉モデルによる折点周波数 $[1 - k(1 - \beta)]/l$ において、 k を kp でおきかえたものに相当する。
- $P_{11}(\omega)$ には、さらに、2 群の中性子寿命の逆数に対応した折点周波数が、存在する。
- l_2 は、また、相互スペクトル密度 $P_{12}(\omega)$ の位相差 θ_{12} からも決定できる。
- 伝達関数との関係は、次のようになる。

$$\tilde{P}_{11}(\omega) \propto |T_{11}[i\omega]|^2.$$

$$\tilde{P}_{22}(\omega) \propto |T_{21}[i\omega]|^2.$$

$$\tilde{P}_{12}(\omega) \propto T_{11}[i\omega] T_{21}[i\omega].$$

Fig. 19 は、NESAP-ZERO コード¹³³⁾ によって算出し

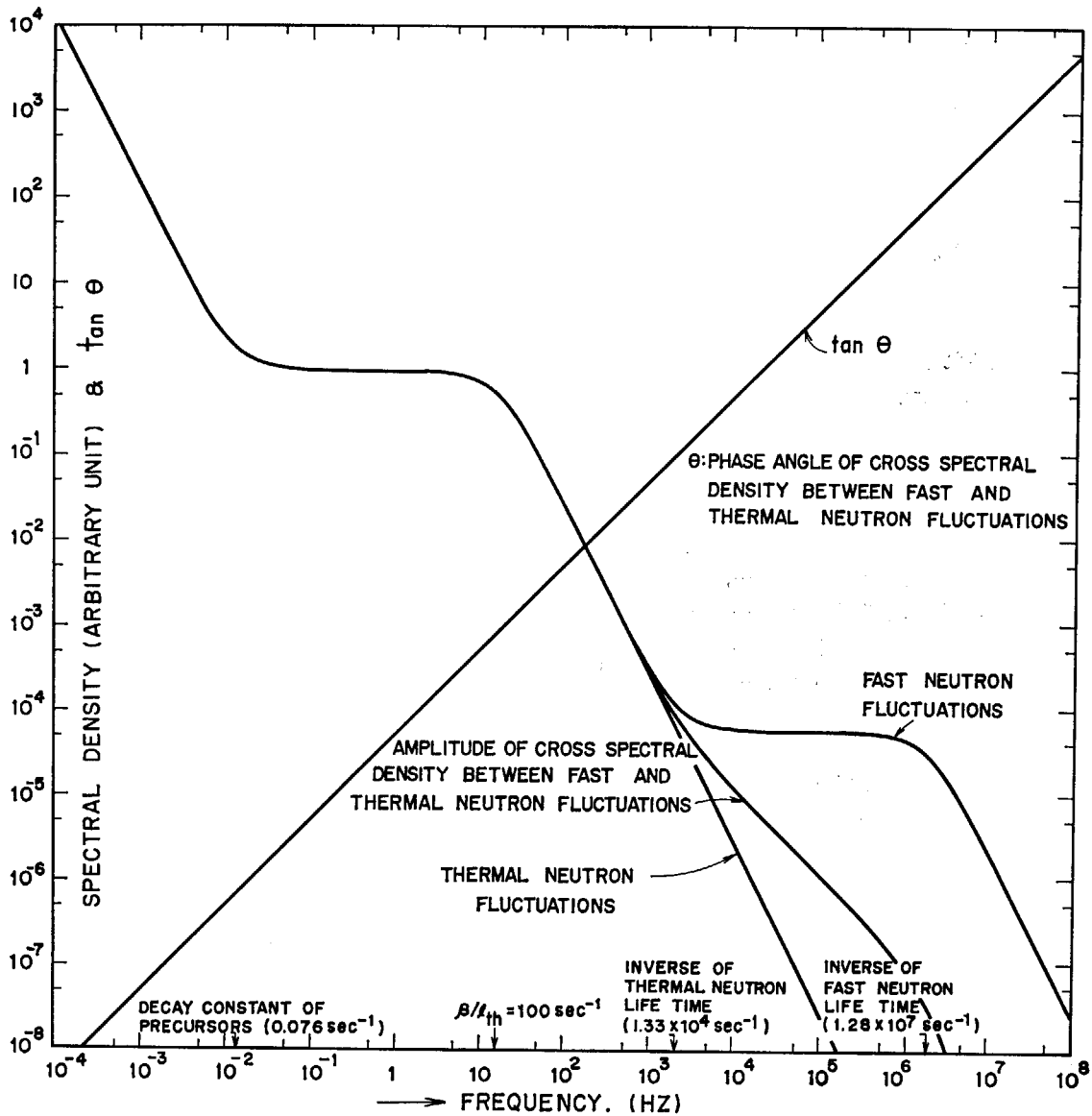


Fig. 19 Noise spectral density on two-group model

TABLE 11 Two-group constants

$k=0.99$	$l_1=7.8 \times 10^{-8} \text{sec}$
$\rho=0.995$	$l_2=7.5 \times 10^{-5} \text{sec}$
$\beta=0.0075$	$\lambda=0.076 \text{sec}^{-1}$
$\langle \nu(\nu-1) \rangle = 4.97$	

た2群1点炉モデルでの炉雑音スペクトル密度である。計算に用いたパラメータを TABLE 11 にまとめる。なお遅発中性子は一群とし、 $q(\omega)$ は、(6.6) 式を用いて次のように変形した。

$$q(\omega) = \langle \nu(\nu-1) \rangle \left| 1 - \frac{i\omega\beta}{i\omega + \lambda} \right|^2 \quad (6.63)$$

6.4 二点結合炉モデル

遅発中性子は、1群としよう。第 i 領域 ($i=1, 2$) の

中性子数、先行核数をそれぞれ $N^{(i)}$ 、 $C^{(i)}$ とする。その期待値は、次のような運動方程式をみたとす。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N^{(i)}(t) \rangle = & -\frac{1-(1-\beta)k_i}{l_i} \langle N^{(i)}(t) \rangle \\ & + \frac{K_{ij}}{l_j} \int_0^t dt' p_{ij}(t-t') \langle N^{(j)}(t') \rangle \\ & + \lambda \langle C^{(i)}(t) \rangle + S_i \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\frac{d}{dt} \langle C^{(i)}(t) \rangle = \frac{\beta k_i}{l_i} \langle N^{(i)}(t) \rangle - \lambda \langle C^{(i)}(t) \rangle \quad (6.65)$$

ただし、 $\begin{cases} i=1 \text{ の場合は } j=2 \\ j=2 \text{ の場合は } i=1 \end{cases}$ *

ここで、

l_i : 第 i 領域の中性子寿命

k_i : 第 i 領域の中性子が1箇消滅した時、再生される二次粒子数の期待値

* 以下、本節 6.4 では、特に断わりのない限り、 i, j はこの組み合わせとする。

K_{ij} : 第 j 領域の中性子が 1 箇消滅した時, 第 i 領域に 1 箇中性子の現われる確率.

S_i : 第 i 領域の外部中性子源の強さ.

$p_{ij}(t)$: 第 j 領域の中性子 1 箇が, 遅れ時間 t で第 i 領域に現われる確率. ただし,

$$\int_0^\infty dt p_{ij}(t) = 1$$

臨界条件は, 次のように表わせる.

$$(1-k_1)(1-k_2) = K_{12}K_{21}.$$

期待値のまわりのゆらぎについての Langevin 方程式は, したがって, 次のように表わせる.

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{f}(t) = - \int^t dt' Br(t-t') \delta \mathbf{f}(t') + \mathbf{F}(t). \quad (6.66)$$

ここで,

$$\delta \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \delta N^{(1)}(t) \\ \delta C^{(1)}(t) \\ \delta N^{(2)}(t) \\ \delta C^{(2)}(t) \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

$Br(t) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-(1-\beta)k_1}{l_1} \delta(t), & -\lambda \delta(t), & -\frac{K_{12}}{l_2} p_{12}(t), & 0 \\ -\frac{\beta k_1}{l_1} \delta(t), & \lambda \delta(t), & 0, & 0 \\ -\frac{K_{21}}{l_1} p_{21}(t), & 0, & \frac{1-(1-\beta)k_2}{l_2} \delta(t), & -\lambda \delta(t) \\ 0, & 0, & -\frac{\beta k_2}{l_2} \delta(t), & \lambda \delta(t) \end{pmatrix} \quad (6.68)$$

まず, 伝達関数を求めよう.

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \delta S^{(1)} \\ 0 \\ \delta S^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (6.69)$$

とおくと, (6.66) 式の解は, $\delta \mathbf{f}[i\omega] e^{i\omega t}$ となる.

ここで,

$$\delta \mathbf{f}[s] = [sU + Br[s]]^{-1} \mathbf{F}(t). \quad (6.70)$$

$Br[s]$ は, $Br(t)$ のラプラス変換である. 特に,

$$\delta N^{(i)}[s] = l_i G_i[s] \frac{\delta S^{(i)} + \Delta_{ij}[s] \delta S^{(j)}}{1 - \Delta_{12}[s] \Delta_{21}[s]}. \quad (6.71)$$

ここで,

$$G_i[s] = \frac{1}{s \left(l_i + \frac{\beta k_i}{s + \lambda} \right) + 1 - k_i}. \quad (6.72)$$

$$\Delta_{ij}[s] = K_{ij} p_{ij}[s] G_j[s]. \quad (6.73)$$

したがって, 伝達関数は, 次のようになる.

$$T_{ii}[s] = \frac{G_i[s]}{1 - \Delta_{12}[s] \Delta_{21}[s]}. \quad (6.74)$$

$$T_{ij}[s] = \frac{G_i[s] \Delta_{ij}[s]}{1 - \Delta_{12}[s] \Delta_{21}[s]}. \quad (6.75)$$

特に, 対称炉においては,

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} \equiv \Delta$$

とおける. この場合, Δ は, 第 1 領域にのみ外乱を加え

た場合の第 2 領域における応答と第 1 領域における応答との比に等しい.

遅れの効果を持つ線型定常系における雑音スペクトル密度行列 $\Phi(\omega)$ の一般的表式は, すでに, (4.121) 式で求められている. すなわち,

$$\Phi(\omega) = Gr[i\omega] \Phi_{FF}(\omega) Gr^T[-i\omega]. \quad (6.76)$$

ここで,

$$Gr[s] = [sU + Br[s]]^{-1}. \quad (6.77)$$

また, $\Phi_{FF}(\omega)$ は, 雑音源のスペクトル密度行列で, 遅れ効果のある場合には, 白色にはならない. 特に, 遅れが短かく,

$$p_{12}(t) = p_{21}(t) = \delta(t)$$

とおける場合には,

$$Br(t) = B\delta(t)$$

となり, $\Phi_{FF}(\omega)$ は白色で次のように表わせる.

$$\Phi_{FF}(\omega) = Q + BE + EB^T. \quad (6.78)$$

ここで,

$$Q = \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle, & R_{11}^{(1)} \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, & & \\ R_{11}^{(1)} \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, & R_{11}^{(1)} \langle \nu_1(\nu_1 - 1) \rangle, & & \\ 0, & 0, & & \\ 0, & 0, & & \\ 0, & 0, & & \\ 0, & 0, & & \\ R_{11}^{(2)} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle, & R_{11}^{(2)} \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, & & \\ R_{11}^{(2)} \langle \nu_0 \nu_1 \rangle, & R_{11}^{(2)} \langle \nu_1(\nu_1 - 1) \rangle, & & \end{pmatrix} \quad (6.79)$$

$$E = \begin{pmatrix} \langle N^{(1)} \rangle_s, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \langle C^{(1)} \rangle_s, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \langle N^{(2)} \rangle_s, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \langle C^{(2)} \rangle_s \end{pmatrix} \quad (6.80)$$

また, $R_{11}^{(i)}$ は, 第 i 領域の平均の核分裂率である. したがって, 第 1 領域の中性子検出反応率の相互スペクトル密度 ${}^{ab}\Phi_{11}(\omega)$ は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Phi_{11}(\omega) &= {}^a \varepsilon_1 {}^b \varepsilon_1 \left(\frac{1}{l_{11}} \right)^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \\ &\quad \times Gr^{(1)}[i\omega] Q^{(ij)} Gr^{T(1)}[-i\omega] \\ &= {}^a \varepsilon_1 {}^b \varepsilon_1 \left(\frac{l_1}{l_{11}} \right)^2 |G_1[i\omega]|^2 \\ &\quad \times \frac{[R_{11}^{(1)} + R_{11}^{(2)}] |\Delta_{12}[i\omega]|^2 q(\omega)}{|1 - \Delta_{12}[i\omega] \Delta_{21}[i\omega]|^2}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

同様に, 第 2 領域の相互スペクトル密度は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Phi_{22}(\omega) &= {}^a \varepsilon_2 {}^b \varepsilon_2 \left(\frac{l_2}{l_{22}} \right)^2 |G_2[i\omega]|^2 \\ &\quad \times \frac{[R_{11}^{(1)} |\Delta_{21}[i\omega]|^2 + R_{11}^{(2)}] q(\omega)}{|1 - \Delta_{12}[i\omega] \Delta_{21}[i\omega]|^2}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

一方, 第 1 領域と第 2 領域との間の相互スペクトル密度

は、次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\Phi_{12}(\omega) &= {}^a\varepsilon_1 {}^b\varepsilon_2 \left(\frac{1}{l_1 l_{12}} \right) \\ &\times \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 G r^{(1i)}[i\omega] Q^{(ij)} G r^{T(3j)}[-i\omega] \\ &= {}^a\varepsilon_1 {}^b\varepsilon_2 \frac{l_1}{l_1} \frac{l_2}{l_{12}} G_1[i\omega] G_2[-i\omega] \\ &\times \frac{R_{1f}^{(1)} \Delta_{21}[-i\omega] + R_{1f}^{(2)} \Delta_{12}[i\omega]}{|1 - \Delta_{12}[i\omega] \Delta_{21}[i\omega]|^2} q(\omega). \end{aligned} \quad (6.83)$$

ここで、 $q(\omega)$ は、(6.52) 式で与えたものに等しい*。

特に、第2領域が反射体で、核分裂のない場合

$$R_{1f}^{(2)} = 0$$

とおける。 $q(\omega)$ の周波数依存性を無視すると、炉雑音スペクトル密度と伝達関数の間には、次の関係があることがわかる。

$${}^{ab}\Phi_{11}(\omega) \propto |T_{11}[i\omega]|^2. \quad (6.84)$$

$${}^{ab}\Phi_{22}(\omega) \propto |T_{21}[i\omega]|^2. \quad (6.85)$$

$${}^{ab}\Phi_{12}(\omega) \propto T_{11}[i\omega] T_{21}[-i\omega]. \quad (6.86)$$

次に、干渉関数 $R(\omega)$ を求めてみよう。

$$\begin{aligned} R(\omega) &\equiv \frac{{}^{ab}\Phi_{12}}{|{}^{ab}\Phi_{11} {}^{ab}\Phi_{22}|^{1/2}} \\ &= \frac{G_1[i\omega] G_2[-i\omega]}{|G_1[i\omega] G_2[i\omega]|} \times \{ R_{1f}^{(1)} \Delta_{21}[-i\omega] \\ &+ R_{1f}^{(2)} \Delta_{12}[i\omega] \} \div \{ [R_{1f}^{(1)} \\ &+ R_{1f}^{(2)}] \Delta_{12}[i\omega] \}^{1/2} [R_{1f}^{(1)} \Delta_{21}[i\omega] \} \\ &+ R_{1f}^{(2)}]^{1/2} \} \end{aligned} \quad (6.87)$$

特に、対称炉においては

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} \equiv \Delta \quad (6.88)$$

とおくと、 $R(\omega)$ は、次のように簡単になる。

$$R(\omega) = \frac{2 \operatorname{Re} \Delta[i\omega]}{1 + |\Delta[i\omega]|^2}. \quad (6.89)$$

遅れの効果をもつ一般の場合に、(6.76) 式に現われる周波数依存のある雑音源スペクトル密度 $\Phi_{FF}(\omega)$ を定めることは、困難である。しかしながら、 $\Phi_{FF}(\omega)$ の行列要素のうち、遅発中性子の関係した要素は、即発中性子要素に比べて、無視しうるであろう。特に、対称型炉においては、干渉関数 $R(\omega)$ は、遅れ効果のある一般の場合でも、第1領域の外乱と第2領域の外乱との間に、統計的相関がなければ、(6.89) 式のように表わされることを ALBRECHT and SEIFRITZ⁴⁾ は示している。

すなわち

$$R(\omega) = \frac{\langle \delta N^{(1)}[i\omega] \delta N^{(2)}[-i\omega] \rangle}{\langle |\delta N^{(1)}[i\omega]|^2 \rangle}. \quad (6.90)$$

に、(6.71) 式を代入し、対称条件

$$l_1 = l_2 = l, \quad k_1 = k_2 = k, \quad K_{12} = K_{21} = K$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta, \quad p_{12} = p_{21} = p, \quad \langle |\delta S^{(1)}|^2 \rangle = \langle |\delta S^{(2)}|^2 \rangle$$

を用い、さらに

$$\langle \delta S^{(1)}[i\omega] \delta S^{(2)}[-i\omega] \rangle = \langle \delta S^{(2)}[i\omega] \delta S^{(1)}[-i\omega] \rangle = 0$$

とおくと、(6.89) 式が求まる**。したがって、(6.73) 式を使って整理すると、次の結果が得られる。

TABLE 12 Coherence functions in a two-point symmetrically coupled core (Reproduced from Ref. (4))

$p(t)$	$p[i\omega]$	$R(\omega)$	Equation for the null frequency, ω_0
General	$p[i\omega]$	$\frac{K}{l} [i\omega(p[-i\omega] - p[i\omega]) + \frac{\beta - \rho}{l}(p[-i\omega] + p[i\omega])] \div \left[\omega^2 + \left(\frac{\beta - \rho}{l} \right)^2 + \frac{K^2}{l^2} p[i\omega] ^2 \right]$	$-\omega_0 \frac{\operatorname{Im} p[i\omega]}{\operatorname{Re} p[i\omega]} = (1 - \beta) \omega_{\text{crit}}$
$\delta(t)$	1	$\frac{2K(\beta - \rho)}{l^2} \div \left[\omega^2 + \left(\frac{\beta - \rho}{l} \right)^2 + \frac{K^2}{l^2} \right]$	ω_0 does not exist
$\delta(t - \tau_0)$	$e^{-i\omega\tau_0}$	$\frac{2K}{l} \left(\frac{\beta - \rho}{l} \cos \omega\tau_0 - \omega \sin \omega\tau_0 \right) \div \left[\omega^2 + \left(\frac{\beta - \rho}{l} \right)^2 + \frac{K^2}{l^2} \right]$	$\omega_0 \tan \omega_0 \tau_0 = (1 - \beta) \omega_{\text{crit}}$
$\frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0}$	$\frac{1}{1 + i\omega\tau_0}$	$\frac{2K}{\tau_0 l} \left[\frac{\beta - \rho}{\tau_0 l} - \omega^2 \right] \div \left[\omega^2 + \left(\frac{\beta - \rho}{l} \right)^2 \right] \left[\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2} \right] + \frac{K^2}{l^2 \tau_0^2}$	$\tau_0 \omega_0^2 = (1 - \beta) \omega_{\text{crit}}$
$\frac{1}{\tau_0^2} t e^{-t/\tau_0}$	$\frac{1}{(1 + i\omega\tau_0)^2}$	$\frac{2K/l}{[1 + (\omega\tau_0)^2]^2} \left[\frac{\beta - \rho}{l} [1 - (\omega\tau_0)^2] - 2\tau_0 \omega^2 \right] \div \left[\omega^2 + \left(\frac{\beta - \rho}{l} \right)^2 + \frac{(K/l)^2}{[1 + (\omega\tau_0)^2]^2} \right]$	$2 \frac{\tau_0 \omega_0^2}{1 + (\tau_0 \omega_0)^2} = (1 - \beta) \omega_{\text{crit}}$

* 遅発中性子が I 群ある場合には、(6.52) 式のようなになる。

** (6.76) 式で $\Phi_{FF}^{(11)}(\omega) = \Phi_{FF}^{(33)}(\omega)$ とおき、他の要素はゼロとおいて ${}^{ab}\Phi_{11} (= {}^{ab}\Phi_{22})$, ${}^{ab}\Phi_{12}$ を求め (6.87) 式の定義から求めたものと同じである。

$$R(\omega) = \frac{K}{l} \left[i\omega(p[-i\omega] - p[i\omega]) + \frac{1 - (1-\beta)k}{l} (p[i\omega] + p[-i\omega]) \right] \div \left[\omega^2 + \left(\frac{1 - (1-\beta)k}{l} \right)^2 + \frac{K^2}{l^2} |p[i\omega]|^2 \right] \quad (6.91)$$

ただし、周波数域 $\omega \gg \lambda$ を解析対象とするものと考え、

$$G_1[s] = G_2[s] \equiv G[s] \approx \frac{1}{sl + 1 - (1-\beta)k}$$

と近似した。TABLE 12 は、結合のおくれを表わす $p(t)$ をいろいろ変えた場合の干渉関数を示す。ここで、原子炉は、十分臨界に近いものとし、ドル単位で表わした単独領域の未臨界面を $\$$ とおいた。すなわち

$$\$ = \frac{k-1}{\beta} = \frac{\rho}{\beta}$$

また、 ω_{crit} は臨界炉の折点周波数、すなわち、

$$\omega_{crit} = \frac{\beta}{l}$$

ω_0 は、 $R(\omega)$ の値がゼロになる周波数である。

相互スペクトル密度に比べ、干渉関数は、領域間の結合パラメータのみを含み、雑音源の性質や、各領域固有

の特性は含まないので、実験解析が容易になる。その特徴をまとめると、次のようになる。

対称型炉における干渉関数 (Coherence function) $R(\omega)$ の特徴⁴⁾

- 実数である。特に、一点炉モデルでは $R(\omega) = 1$
- 二点結合炉で、他領域との雑音源に相関がない場合、すなわち、
雑音源の相互スペクトル密度

$$\Phi_{FF}^{(13)}(\omega) = \Phi_{FF}^{(31)}(\omega) = 0$$

である場合には、

$$R(\omega) = \frac{2 \operatorname{Re} \Delta[i\omega]}{1 + |\Delta[i\omega]|^2}$$

以下、この $R(\omega)$ の特徴をのべる。

- $p[0] = \int_0^\infty dt p(t) = 1$ であることを利用すると、

$$R(0) = \frac{2K[1 - (1-\beta)k]}{[1 - (1-\beta)k]^2 + K^2} (\geq 0) \approx \frac{2K(\beta - \rho)}{(\beta - \rho)^2 + K^2} \quad (6.92)$$

- 周波数が高くなり、「零周波数」(null or sink frequency) ω_0 をこすと $R(\omega)$ は、マイナスになる。ここで

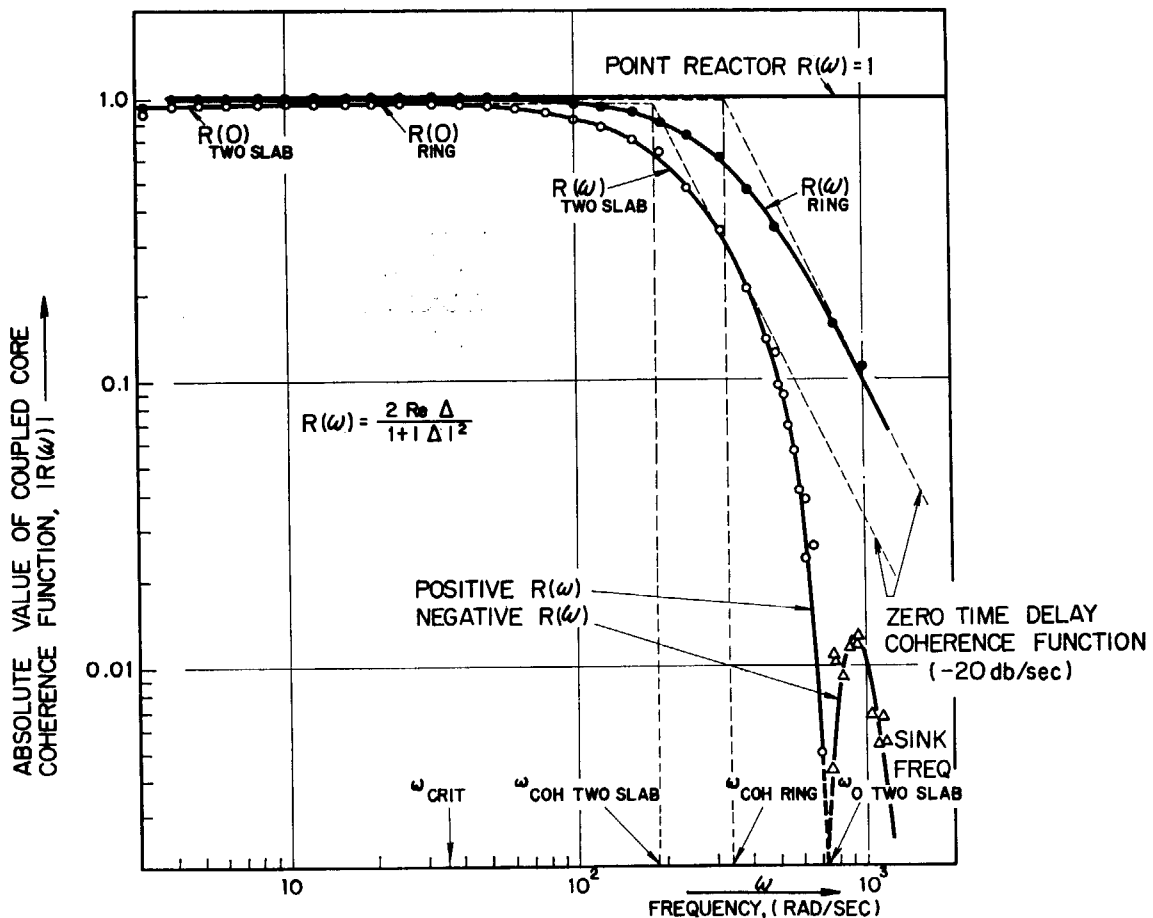


Fig. 20 Coherence function $R(\omega)$ of the ring core and two slab core loading*

* Reproduced from Ref. (138)

$$\begin{aligned}\omega_0 &= -\frac{1-(1-\beta)k}{l} \frac{\text{Re. } p[i\omega]}{\text{Im. } p[i\omega]} \\ &\approx -(1-\xi)\omega_{\text{crit}} \frac{\text{Re. } p[i\omega]}{\text{Im. } p[i\omega]}. \quad (6.93)\end{aligned}$$

Fig. 20 は、アルゴート (Argonaut) 型炉における干渉関数の実験結果¹³⁸⁾である。

臨界炉においては、 $(1-k)=K$ であることを利用すると、単独領域の未臨界度 ξ は、(6.92) 式から、次のように与えられる。

$$\xi = \frac{\rho}{\beta} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{1+R(0)}}{\sqrt{1-R(0)}} \right] < 0. \quad (6.94)$$

K が 1ξ 以上の場合には、 $R(0)$ は、0.8 より大きくなり、 $1-R(0)$ の値の誤差が大きくなる。

特に、遅れ時間の十分短い場合には、

$$p(t) = \delta(t).$$

したがって、

$$p[i\omega] = 1$$

とおける。したがって

$$R(\omega) = R(0) \frac{\omega^2_{\text{coh}}}{\omega^2 + \omega^2_{\text{coh}}}.$$

ここで、 ω_{coh} は干渉関数の折点周波数、すなわち

$$\begin{aligned}\omega_{\text{coh}} &= \left(\frac{1-(1-\beta)k}{l} \right)^2 + \frac{K^2}{l^2} \\ &= \frac{(\beta-\rho)^2 + K^2}{l^2}. \quad (6.95)\end{aligned}$$

そこで、(6.94) 式は、次のように書き改めることができる。

$$\xi = \frac{\rho}{\beta} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2R(0)\omega^2_{\text{coh}}}{\omega^2_{\text{crit}}}} \right] < 0. \quad (6.96)$$

これを用いても、未臨界を定めることができる。また、(6.93) の関係式から、 $p(t)$ の特性を推定することもできる¹³⁸⁾。

6.5 空間依存伝達関数と炉雑音スペクトル密度

6.5.1 一群拡散モデル

炉雑音スペクトル密度に対する一般的表式は、4.8 で求めた。(cf. (4.223), (4.224)), MOORE¹⁰⁰⁾ は、バイナリ雑音源からの寄与 $\hat{P}(\omega)$ (cf. (4.227) 式) から原子炉の伝達関数が得られることを指摘している。このことは、一点がモデルで、すでに 6.1 で確かめた。(cf. (6.3) 式) 空間依存性を考慮すると、この結論は多少変る。

伝達関数は、通常、正弦波状の摂動 ($\propto e^{i\omega t}$) を原子炉に加えて、中性子場への応答を測定すること (Sinusoidal Pile Modulation Experiment: (以下 SPME の略す) により得られる。摂動の強さが 1 単位の時の応答を、一般

に、伝達関数 $T[i\omega]$ と定義しよう*。単位の定義、大きさは、適宜定めればよい。単位の摂動で、ボルツマン作用素行列、外部中性子源の強さが、それぞれ δB , δS_1 だけ変化したとしよう。また、定常に保たれていた中性子場が、 δf だけ変化したとしよう。次の方程式が得られる¹²⁷⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta f(t) \rangle = -B \langle \delta f(t) \rangle + I e^{i\omega t}. \quad (6.97)$$

ここで、

$$I = -\delta B f_{1s} + \delta S_1. \quad (6.98)$$

なお、定常時の中性子数期待値ベクトル f_{1s} は、次の関係をみす。

$$-B f_{1s} + S_1 = 0. \quad (6.99)$$

(6.97) 式の解は、グリーン関数行列のラプラス変換 $Gr[s]$ を用いて、次のように表わせる。

$$\langle \delta f(t) \rangle = Gr[i\omega] I e^{i\omega t}. \quad (6.100)$$

したがって、検出器出力応答は、次のようになる。

$$\delta R(t) = W Gr[i\omega] I e^{i\omega t}. \quad (6.101)$$

ここで、 W は、検出反応に対する中性子の平均寿命の逆数を成分とする横ベクトルで、(4.227) 式で用いたものと同じである。(6.101) 式から、伝達関数 $T[i\omega]$ が、得られる。

$$T[i\omega] = W Gr[i\omega] I. \quad (6.102)$$

これは、一般に、摂動の種類 (中性子吸収物質、燃料素片等)、摂動を加える位置、検出器の種類、検出する位置に関する。伝達関数のゲインは、次のようになる。

$$|T[i\omega]|^2 = W Gr[i\omega] I I Gr^T[-i\omega] W^T. \quad (6.103)$$

さて、SPME に用いたのと同じ検出器を用いて、同じ位置で、炉雑音スペクトル密度を測定したとしよう。検出器としては、たとえば、補償型イオン電離箱 (CIC) のように、検出反応の際、2 次中性子・先行核を放出しないものを用いたとしよう。この場合、(4.227) 式右辺第 3 項と第 4 項はなくなり、次うように簡単になる。

$$\hat{P}(\omega) = W Gr[i\omega] Q Gr^T[-i\omega] W^T. \quad (6.104)$$

(6.103) と (6.104) 式を比べると両者の差異は、ダイアド II (その $i-j$ 成分は $I^{(i)} I^{(j)}$) と行列 Q との違いに基づくことがわかる。通常、SPME で摂動は局所的に加える。その空間点を x_M としよう。 II の $(x_0 - x_0')$ 要素は、 $\delta(x_0 - x_M) \delta(x_0' - x_M)$ に比例する。一方 Q の要素は、(4.107) 式に示したように $\delta(x_0 - x_0')$ を含む。この差異をより定量的に検討してみよう。

中性子の速度依存を無視した一群拡散モデルを用いる。グリーン関数行列の $(x - x')$ 要素だけに注目してこれを $Gr[x|x'; s]$ としよう。これは、 $(I+1) \times (I+1)$ の行列であり、 $(I$ は、先行核の種類の数) 次の方程式を満足する。

* この概念は、COHN, *et al.*³⁵⁾ が用いているものと同じである。

$$sGr[\mathbf{x}|\mathbf{x}'; s] = -B(\mathbf{x})Gr[\mathbf{x}|\mathbf{x}'; s] + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')U. \quad (6.105)$$

ここで、 $B(\mathbf{x})$ は、通常の拡散作用素行列。すなわち、 $B(\mathbf{x}) =$

$$- \begin{pmatrix} D_s v \Delta \mathbf{x} + v \Sigma_f \langle \nu \rangle (1 - \beta) - v \Sigma_a, & \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_I \\ v \Sigma_f \langle \nu \rangle \beta_1 & & -\lambda_1, & 0, & \dots, & 0 \\ v \Sigma_f \langle \nu \rangle \beta_2 & & & 0, & -\lambda_2, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v \Sigma_f \langle \nu \rangle \beta_I & & & & 0, & 0, & \dots, & -\lambda_I. \end{pmatrix} \quad (6.106)$$

ただし、 $\beta = \sum_{i=1}^I \beta_i$ 、その他の記号は、慣用のものである。また、 U は、単位行列でその $(i-j)$ 要素は、次の通り

$$U_{ij} = \delta_{ij}. \quad (6.107)$$

δ_{ij} は、Kronecker's delta.

ヘルムホルツ固有関数を用いて、 $Gr[\mathbf{x}|\mathbf{x}'; s]$ を展開する。すなわち、

$$Gr[\mathbf{x}|\mathbf{x}'; s] = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}') Gr_n[s]. \quad (6.108)$$

ここで、 $\Psi_n(\mathbf{x})$ は、次の方程式の n 番目の固有関数である。

$$\Delta \mathbf{x} \Psi_n(\mathbf{x}) + B_{0n} \Psi_n(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.109)$$

外境界上で $\Psi_n(\mathbf{x})$ はゼロ、また、次の正規直交関係をみたく。

$$\int d\mathbf{x} \Psi_n(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}) = \delta_{nm}. \quad (6.110)$$

(6.105), (6.108), (6.109) 式から、 $Gr_n[s]$ は、次の関係から求められることがわかる。

$$sGr_n[s] = -B_n Gr_n[s] + U. \quad (6.111)$$

ここで、 B_n は、作用素 $B(\mathbf{x})$ で、ラプラシアン $\Delta \mathbf{x}$ を $-B_{0n}$ でおきかえたものである。

$Gr_n[s]$ の中性子—中性子成分を $Gr_n^{(00)}[s]$ としよう。これは、次のようになる。

$$Gr_n^{(00)}[s] = \frac{1}{s \left(1 + \frac{k_n}{l_n} \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + \frac{1 - k_n}{l_n}}. \quad (6.112)$$

一方、中性子—先行核 (タイプ i) 成分は、次のようになる。

$$Gr_n^{(0i)}[s] = \frac{\frac{\lambda_i}{s + \lambda_i}}{s \left(1 + \frac{k_n}{l_n} \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + \frac{1 - k_n}{l_n}}. \quad (6.113)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_{0n}^2}, & k_{\infty} &= \frac{\langle \nu \rangle \Sigma_f}{\Sigma_a}, & L^2 &= \frac{D_s}{\Sigma_a} \\ l_n &= \frac{l_a}{1 + L^2 B_{0n}^2}, & l_a &= \frac{1}{v \Sigma_a}, \\ \frac{k_n}{l_n} &= \frac{k_{\infty}}{l_a} \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

単位摂動による中性子—先行核場の乱れ \mathbf{I} も、同様に、展開できる。その \mathbf{x} 成分を $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ とすると、これ

は、 $(I+1)$ の要素をもつ縦ベクトルであり、

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\mathbf{x}) \mathbf{I}_n \quad (6.115)$$

とおける。ここで

$$\mathbf{I}_n = \int d\mathbf{x} \Psi_n(\mathbf{x}) \mathbf{I}(\mathbf{x}). \quad (6.116)$$

一方、検出器を特徴づけるベクトル \mathbf{W} の \mathbf{x} 成分は、 $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ で、特にその中性子成分を、次のようにおこう。

$$\mathbf{W}^{(0)}(\mathbf{x}) = v \Sigma_d(\mathbf{x}). \quad (6.117)$$

また、先行核成分は、ゼロとしよう。

(6.108), (6.115) 式を、(6.102) 式へ代入し、空間点に関する積分を実行すると、次の結果が得られる。

$$T[s] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\epsilon}_n \sum_{i=0}^I Gr_n^{(0i)} \mathbf{I}_n^{(i)}. \quad (6.118)$$

ここで、

$$\bar{\epsilon}_n = \int d\mathbf{x} v \Sigma_d(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}). \quad (6.119)$$

摂動として、特に、中性子吸収体を挿入したとしよう。

その断面積を、 $\delta \Sigma_a(\mathbf{x})$ とする。この時、 $\mathbf{I}_a(\mathbf{x})$ の成分は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_a^{(0)}(\mathbf{x}) &= v \delta \Sigma_a(\mathbf{x}) f_{1s}^{(0)} \\ \mathbf{I}_a^{(i)}(\mathbf{x}) &= 0, \quad i=1, 2, \dots, I. \end{aligned} \right\} \quad (6.120)$$

この時、伝達関数は、次のようになる。

$$T_a[s] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\epsilon}_n Gr_n^{(00)}[s] \mathbf{I}_{an}^{(0)}. \quad (6.121)$$

ここで

$$\mathbf{I}_{an}^{(0)} = \int d\mathbf{x} \Psi_n(\mathbf{x}) v \delta \Sigma_a(\mathbf{x}) f_{1s}^{(0)}. \quad (6.122)$$

特に、(6.121) 式の基本モード項は、摂動 $\mathbf{I}_{a1}^{(0)} = \bar{\epsilon}_1 / l_1$ の時には、次のようになる。

$$T_{a1}[s] = \frac{1}{s \left(l_1 + k_1 \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + 1 - k_1}. \quad (6.123)$$

同様に、摂動として、核分裂断面積 $\Sigma_f(\mathbf{x})$ を、 $\delta \Sigma_f(\mathbf{x})$ だけ変化させるものを用いたとしよう。この時の伝達関数は、次のようになる。

$$T_f[s] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\epsilon}_n l_n \mathbf{I}_{fn} H_n[s]. \quad (6.124)$$

ここで、

$$\mathbf{I}_{fn} = \langle \nu \rangle \int d\mathbf{x} \Psi_n(\mathbf{x}) v \delta \Sigma_f(\mathbf{x}) f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x}). \quad (6.125)$$

$$H_n[s] = \frac{1 - \sum_{i=1}^I \frac{s \beta_i}{s + \lambda_i}}{s \left(l_n + k_n \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + 1 - k_n}. \quad (6.126)$$

特に、上式の基本モード項は、一点炉モデルで、反応度伝達関数として通常用いられているものと同等であり、その周波数依存性はよく考察されている。(e.g., Chap. 10 in Ref. (181)).

炉が臨界に近い時、振幅 $|H_1[i\omega]|$ は、低周波領域 $\omega \ll \bar{\lambda} (= \beta / \sum \beta_i / \lambda_i)$ および高周波領域 $\omega \gg \omega_{B1}$ では、 $1/\omega$

に比例する。中間領域 $\bar{\lambda} < \omega < \omega_{B1}$ では、ほぼ平坦で、その大きさは

$$|H_1[i\omega]| \approx \frac{1}{k_1(\beta - \rho_1)}, \quad (6.127)$$

$\bar{\lambda} < \omega < \omega_{B1}$ の時.

高周波側の折点周波数 ω_{B1} は、次のように与えられる。

$$\omega_{B1} = \bar{\lambda} + \frac{k_1(\beta - \rho_1)}{l_1} \approx \frac{\beta - \rho_1}{l_1} k_1.$$

ρ_1 は、反応度である。すなわち、

$$\rho_1 = \frac{k_1 - 1}{k_1}.$$

次に、高次モード項の周波数依存性を吟味してみよう。 $H_n[i\omega]$ は、次のように近似できよう。

$$H_n[i\omega] \approx \frac{1}{s \left(l_n + k_n \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + 1 - k_n} \Bigg|_{s=i\omega} \quad (6.128)$$

n 番目の空間モードにたいする逆時間公式を導入しよう。

$$s \left(1 + \frac{k_n}{l_n} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + \frac{1 - k_n}{l_n} = 0. \quad (6.129)$$

あるいは、

$$\rho_n = \frac{s l_n}{s l_n + 1} + \frac{1}{s l_n + 1} \sum_{i=1}^n \frac{s \beta_i}{s + \lambda_i}. \quad (6.129')$$

ここで、第 n モードにたいする反応度

$$\rho_n = \frac{k_n - 1}{k_n} = \rho_1 + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_n} \right) \left(1 - \frac{B_{gn}^2}{B_{g1}^2} \right). \quad (6.130)$$

(6.129) 式の $(I+1)$ 箇の解 (符号をかえたもの) は、次のように分布している。

$$-\frac{1}{l_n} < -\alpha_{n0} < -\lambda_1 < -\alpha_{n1} < -\lambda_{l-1} < \dots < -\lambda_2 < -\alpha_{n2} < -\lambda_1 < -\alpha_{n1} < 0. \quad (6.131)$$

また、(6.128) 式は、次のように書き改められる。

$$H_n[s] = \frac{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_l)}{l_n(s + \alpha_{n0})(s + \alpha_{n1}) \dots (s + \alpha_{nl})}. \quad (6.132)$$

(6.130) 式からわかるように臨界にごく近い炉でも炉が大型で $k_1 \approx k_\infty$ の時、または極端に縦長な炉型のように、 B_{gn}^2 のうちで、 B_{g1}^2 に近いものがある場合を除いては、 $|\rho_n|$ は、 β に比べてずっと大きいとみなしてよい。

したがって、 $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nl}$ は、それぞれ、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ にごく近くなり、一方

$$\alpha_{n0} \approx [1 - (1 - \beta)k_n] / l_n = (\beta - \rho_n)k_n / l_n$$

となる。したがって、(6.132) 式は、次のように近似できよう。

$$H_n[i\omega] \approx \frac{1}{l_n(i\omega + \alpha_{n0})} \quad ; n \geq 2 \text{ の時.} \quad (6.133)$$

したがって、振幅 $|H_n[i\omega]|$ は、折点周波数 $\omega_{Bn} \approx$

$\alpha_{n0} = \frac{1 - k_n}{l_n}$ までは、ほぼ平坦で、以後 $1/\omega$ に比例して減少することがわかる。平坦部の大きさは、

$$|H_n[i\omega]| \approx \frac{1}{l_n \alpha_{n0}} \quad ; n \geq 2 \text{ かつ } \omega \ll \frac{1 - k_n}{l_n} \text{ の時.} \quad (6.134)$$

また、

$$\frac{k_n(\beta - \rho_n)/l_n}{k_1(\beta - \rho_1)/l_1} = \frac{\beta - \rho_n}{\beta - \rho_1} > 1$$

であるから、高次モード項 $H_n[i\omega]$ の折点周波数 ω_{Bn} は、基本モード項 $H_1[i\omega]$ の第 2 折点周波数 ω_{B1} より高いところにある。(6.127), (6.134) 式を用いると、周波数 ω_{B1} までは

$$\frac{|l_n H_n(i\omega)|}{|l_1 H_1(i\omega)|} \approx \frac{\beta - \rho_1}{\beta - \rho_n} < 1 \quad ; (n \geq 2). \quad (6.135)$$

となる。一方、伝達関数 (6.121), (6.124) 式で、 ϵ_n は、検出器の位置により、また、 $I_{an}^{(0)}, I_{in}$ は振動を加える位置により変わるが、その大きさはモードにより大きく変動することはなく同じオーダーと考えられよう。したがって、 ω_{B1} までは、伝達関数に対する基本モード項と第 n 高次モード項との寄与の比は、 $(\beta - \rho_1)/|\rho_n|$ で与えられるとみなしてよい。特に、臨界に近い炉 ($|\rho| \ll \beta$) では、この比は $\beta/|\rho_n|$ となり 1 に比べて十分小さくなる。

$$\rho_n \approx \frac{k_\infty - 1}{k_\infty} \left(1 - \frac{B_{gn}^2}{B_{g1}^2} \right)$$

であることを利用すると、たとえば板状の裸の炉を例にとると、基本モード項の寄与に対する高次モード項全体の寄与の比は、 $\beta \frac{k_\infty}{k_\infty - 1}$ となる。

したがって、通常の臨界炉 ($k_\infty - 1 \gg \beta$) または臨界に近い炉 ($|\rho_1| \ll \beta$) では、伝達関数は、少なくとも、低周波領域 ($\omega \leq \frac{\beta}{l_1}$) までは、基本モード項のみで近似できる。遅発中性子の効果を無視できる高周波側で、始め

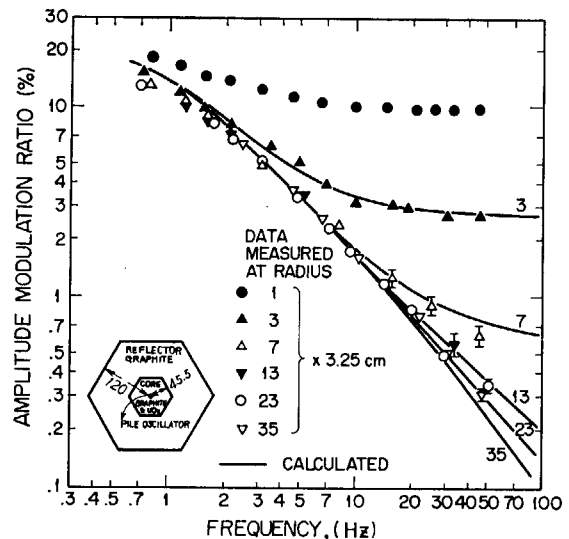


Fig. 21 Space-dependent amplitude response to pile oscillation*

* Reproduced from Ref. (71)

て、高次モードの寄与が利いてくる。このことは、すでにいくつか行なわれている数値的な検討¹⁰⁵⁾、実験との比較^{35), 70), 81)}からも裏づけられる。

Fig. 21 は、20% 濃縮ウラン、黒鉛減速材を用いた臨界実験装置 SHE-1 における伝達関数の空間依存性を示したものである。縦軸には、熱中性子束の振動項と定常項との比をとってある。

一方、炉雑音スペクトル密度 (6.104) は、 Q として、(4.107)(4.108')(4.109) 式を用いると、次のようになる*。

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega) = & \iint dx dv v \Sigma_d(\mathbf{x}, v) \iint dx' dv' v' \Sigma_d(\mathbf{x}', v') \\ & \times \int dx_0 \langle \nu(\nu-1) \rangle R_{1f}(\mathbf{x}_0) K r[\mathbf{x}, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}_0; i\omega] \\ & \times K r[\mathbf{x}', \mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{x}_0; -i\omega]. \end{aligned} \quad (6.136)$$

ここで

$$R_{1f}(\mathbf{x}_0) = \int dv' v' \Sigma_f(\mathbf{x}_0, v') f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x}_0, v'). \quad (6.137)$$

$$K r[\mathbf{x}, \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{x}_0; s] = (1-\beta) \int dv_0 \chi(\mathbf{v}_0)$$

$$\begin{aligned} & G r^{(00)}[\mathbf{x}, \mathbf{v} | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0; s] + \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \int dv_0 \chi_i(\mathbf{v}_0) \\ & \times G r^{(00)}[\mathbf{x}, \mathbf{v} | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0; s]. \end{aligned} \quad (6.138)$$

$\chi(\mathbf{v}_0)$ は、核分裂の際、即発的にでる中性子の速度分布、 $\chi_i(\mathbf{v}_0)$ は、タイプ i の先行核が崩壊した時放出される遅発中性子の速度分布である。

中性子の速度依存性を無視した一群拡散モデルでは、(6.136) 式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega) = & \langle \nu(\nu-1) \rangle \left| 1 - \sum_{i=1}^I \frac{s \beta_i}{s + \lambda_i} \right|^2 \int dx v \Sigma_d(\mathbf{x}) \\ & \times \int dx' v \Sigma_d(\mathbf{x}') \int dx_0 G r^{(00)}[\mathbf{x} | \mathbf{x}_0; s] \\ & \times R_{1f}(\mathbf{x}_0) G r^{(00)}[\mathbf{x}' | \mathbf{x}_0; -s]. \end{aligned} \quad (6.139)$$

ここで、 s は $i\omega$ でおきかえるものとする。

グリーン関数行列のモード展開 (6.108) を代入する。結果は、次のようになる**。

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega) = & \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\epsilon}_n l_n H_n[i\omega] \\ & \times h_{nm} H_m[-i\omega] l_m \bar{\epsilon}_m. \end{aligned} \quad (6.140)$$

ここで、単位時間当りの核分裂数の期待値を、空間平均したものを \bar{R}_f とおいた。すなわち

$$\bar{R}_f = \int dx v \Sigma_f(\mathbf{x}) f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x}) / V_t. \quad (6.141)$$

* Q に対する誘導核分裂からの寄与は、炉出力に比例して大きくなる (この性質は、すでに 6.2.3 でのべたように、炉出力の絶対値を定めるのに利用される。) ので、自発核分裂からの寄与 (4.108) は、無視できるようになる。なお、(4.108) 式において、 k_{2s} が (4.109) 式で与えた k_{2f} と同じだとすれば、自発核分裂からの $\tilde{P}(\omega)$ への寄与は、(6.136) 式において、 R_{1f} を S でおきかえたものに等しくなる。

** なお、自発核分裂からの寄与は、(6.140) 式で $\bar{R}_f h_{nm}$ を次のようにかきかえたものに等しい。

$$\int dx \Psi_n(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x})$$

V_t は、原子炉の全体積、また、モード間の結合係数は、次の通り。

$$h_{nm} = \frac{V_t \int dx \Psi_n(\mathbf{x}) \Sigma_f(\mathbf{x}) f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x})}{\int dx \Sigma_f(\mathbf{x}) f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x})}. \quad (6.142)$$

なお、

$$f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{S_n l_n}{\rho_n k_n} \Psi_n(\mathbf{x}). \quad (6.143)$$

$$S_n = \int dx S(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}). \quad (6.144)$$

さて、伝達関数 $T_f[s]$ のゲインは、(6.140) 式で、結合係数 h_{nm} を $I_n I_m$ でおきかえたものに比例する。 h_{nm} と $I_n I_m$ は、一般に異なる。したがって、伝達関数のゲイン $|T_f[i\omega]|^2$ と炉雑音スペクトル密度 $\tilde{P}(\omega)$ とは、空間依存性を考慮すると一般には、比例関係にはない。ただし、すでに検討したように、臨界または臨界に近い炉 ($|\rho_1| \ll \beta$) では低周波領域 $\omega \lesssim \beta/l_1$ における高次モードの寄与は小さく、基本モードの寄与だけを考慮すればよく、 $|T_f[i\omega]|^2$ と $\tilde{P}(\omega)$ とは比例するとみなしてよい。この近似は、(6.135) 式からわかるように、高次モードの反応度 $|\rho_n|$ が、 $\beta - \rho_1$ に比べて大きいほど、よく成り立つ。臨界炉では、この条件は、次のように書ける。

$$L^2(B_{g1}^2 - B_{gn}^2) \gg \beta.$$

したがって、拡散距離 L^2 が大きいほど、また炉が小型で基本モードのバックリング B_{g1}^2 と高次モードのもの B_{gn}^2 との差が大きいほど、 $\tilde{P}(\omega)$ の周波数依存性は、基本モード項のみで評価でき、通常の一点炉モデルの結果に近づく。

基本モード近似では、炉雑音スペクトル密度 (6.140) 式は、次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega) = & \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f (\bar{\epsilon}_1 l_1)^2 h_{11} |H_1[i\omega]|^2 \\ = & \langle C \rangle^2 \frac{1}{\bar{R}_f V_t} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k_1^2 g_{11} |H_1[i\omega]|^2. \end{aligned} \quad (6.145)$$

ここで、 $\langle C \rangle$ は、平均の検出率、すなわち

$$\langle C \rangle = \int dx v \Sigma_d(\mathbf{x}) f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x}). \quad (6.146)$$

また、一点炉モデルに対する補正因子 g_{11} は、次のように定義される。

$$g_{11} = \int dx \Psi_1(\mathbf{x}) \int dx [\Psi_1(\mathbf{x})]^3. \quad (6.147)$$

これは、OTSUKA and IJIMA¹¹⁵⁾ により導入されたもので、SHEFF,¹⁴⁰⁾ NATELSON¹⁰³⁾ らもこれに対応する因子を導入している。

TABLE 13 に、 g -因子の値を示す。

基本モード近似は、反射体効果が少なく、かつ、臨界に近く、中性子数の期待値の分布も、基本モードに比例すると考えられる場合に成りたつものと考えられる。

炉雑音スペクトル密度の空間依存性は、一般には、原

TABLE 13 Geometrical factors
(One-group diffusion model)

	Bare spherical core	Bare parallelepiped core
g_{11}	1.235	1.262
h_{11}	2.032	0.296
g_{nm}	—	Eq. (6.152)
h_{nm}	—	$0.2347 \times g_{nm}$

$$h_{nm} = g_{nm} V_i \left[\int d\mathbf{x} \Psi_1(\mathbf{x}) \right]^{-2}$$

子炉の形状 (B_{gn^2}), 組成 (k_∞, L^2), 検出器の位置, 形状 (\bar{E}_n) に関係しており, その数値的な検討もいくつか報告されている. たとえば, 均質炉では, NATELSON *et al.*¹⁰³⁾ SHEFF and ALBRECHT¹⁴⁰⁾, Argonaut 型の結合炉では, DANOFSKY⁴⁴⁾, 板状燃料と減速材とが交互に並んだ無限格子では, WILLIAMS¹⁵⁴⁾ の報告がある.

特に均質裸炉の場合を考えてみよう. 空間依存性の効果が現われる周波数域 ($\omega \gg \lambda$) を問題にする. また, 原子炉は, 十分臨界に近く, 中性子数の期待値の分布 $f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x})$ は, 基本モードで近似できるものとしよう.

すなわち,

$$f_{1s}^{(0)}(\mathbf{x}) \approx \frac{S_1 l_1}{1 - k_1} \Psi_1(\mathbf{x}). \quad (6.148)$$

伝達関数 $H_n[s]$ を次のようにおく.

$$H_n[s] \approx \frac{1}{l_n s + \alpha_{n0}}. \quad (6.149)$$

これらを用いると, (6.140) 式は, 次のように書き改めることができる.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega) &= \frac{1}{R_l V_t} \frac{\langle \nu^2 - \nu \rangle}{\langle \nu \rangle^2} k_1^2 \left(\frac{S_1}{1 - k_1} \right)^2 \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int d\mathbf{x} \nu \Sigma_a(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}) \right]_a \\ &\times \left[\int d\mathbf{x} \nu \Sigma_a(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}) \right]_b \\ &\times \frac{g_{nm}}{(i\omega + \alpha_{n0})(-i\omega + \alpha_{m0})}. \end{aligned} \quad (6.150)$$

ここで,

$$\begin{aligned} g_{nm} &= \int d\mathbf{x} \Psi_1(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x} \Psi_n(\mathbf{x}) \Psi_1(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}) \\ &= h_{nm} \left[\int d\mathbf{x} \Psi_1(\mathbf{x}) \right]^2 / V_i. \end{aligned} \quad (6.151)$$

特に, 直方形炉では, 上式は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} g_{nm} &= \left(\frac{4}{\pi} \right)^6 h_{nm} \\ &= \left(\frac{4}{\pi^2} \right)^3 \prod_{i=x,y,z} (-1)^{\frac{n_i+m_i}{2}} [(-1)^{n_i} + (-1)^{m_i}] \\ &\times \left[\frac{1}{(n_i+m_i)^2 - 1} - \frac{1}{(n_i-m_i)^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (6.152)$$

上式で積は, n 番目のモードを構成する x, y, z 軸方向のモード番号を n_x, n_y, n_z とおき, また, m 番目のモードの構成を m_x, m_y, m_z とおいた時, 3つの組 (n_x, m_x), (n_y, m_y), (n_z, m_z) について行なう. たとえば, 基

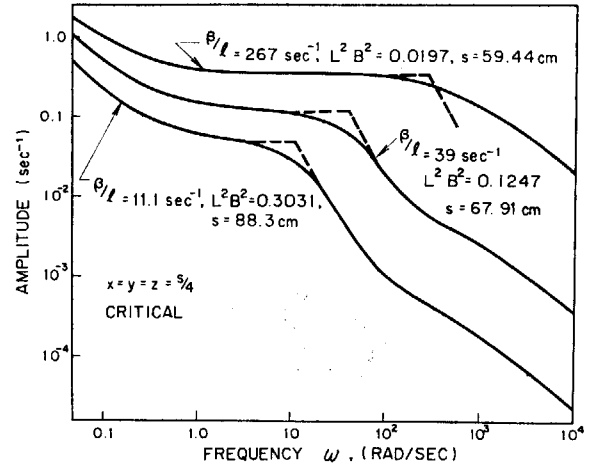


Fig. 22 Count-rate spectral density*
(a point detector located at $x=y=z=s/4$ in three critical bare cubical reactors of side s)

本モードについては, g_{11} は $(4/\pi^2)^3 \times (8/3)^3$ となる.

Fig. 22 は, 一辺の長さ s の立方形炉における $\tilde{P}(\omega)$ を示したものである. 点線は, 一点炉モデルにおける周波数依存性を模式的に示したもので, 折点は周波数 β/l にある. $L^2 B^2$ の値が小さくなると一点炉モデルからのずれが大きくなる傾向が表われている.

6.5.2 二群拡散モデル

核分裂あるいは先行核の崩壊に伴ない生成される二次中性子は, 1群に属するものとする. (6.106) 式に対応して, 2群拡散作用素を導入する.

$$B(\mathbf{x}) = - \begin{pmatrix} D_{s1} v_1 \Delta_{\mathbf{x}} - v_1 \Sigma_r, & v_2 \Sigma_1 \langle \nu \rangle (1 - \beta), \\ p v_1 \Sigma_r, & D_{s2} v_2 \Delta_{\mathbf{x}} - v_2 \Sigma_a, \\ 0, & v_2 \Sigma_1 \langle \nu \rangle \beta_1, \\ 0, & v_2 \Sigma_1 \langle \nu \rangle \beta_2, \\ \vdots, & \vdots \\ 0, & v_2 \Sigma_1 \langle \nu \rangle \beta_l, \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l \\ 0, 0, \dots, 0 \\ -\lambda_1, 0, \dots, 0 \\ 0, -\lambda_2, \dots, 0 \\ \vdots, \vdots, \vdots \\ 0, 0, \dots, -\lambda_l \end{pmatrix} \quad (6.153)$$

ここで, 核分裂は, 2群の中性子のみにより行われるとした. また, Σ_r は, 1群の中性子の除去断面積, p は共鳴吸収をのがれる確率である.

$B(\mathbf{x})$ にたいするグリーン関数行列, すなわち, (6.105) 式の解を, (6.108) 式のような固有関数展開の形に求める.

作用素 $B(\mathbf{x})$ のラプラシアン $\Delta_{\mathbf{x}}$ を, バックリング

* Reproduced from Ref. (140)

$-B_{gn}^2$ でおきかえたものを B_n とする。この時、方程式

$$sGr_n[s] = -B_n Gr_n[s] + U \quad (6.154)$$

の解は、容易に書き下すことができる。

$$Gr_n^{(11)}[s] = \frac{l_{1n}(1+s l_{2n})}{|D_n[s]|} \quad (6.155)$$

$$Gr_n^{(21)}[s] = \frac{l_{2n}}{|D_n[s]|} \frac{p}{1+\tau B_{gn}^2} \quad (6.156)$$

ここで、

$$D_n[s] = s^2 l_{1n} l_{2n} + s(l_{1n} + l_{2n}) + 1 - \frac{k_\infty}{(1+\tau B_{gn}^2)(1+L^2 B_{gn}^2)} \left(1 - \sum_{i=1}^I \frac{s\beta_i}{s+\lambda_i} \right) \quad (6.157)$$

また、

$$k_\infty = \langle \nu \rangle \frac{\sum_i p_i}{\sum_a \beta_a},$$

$$l_{1n} = \frac{l_1}{1+\tau B_{gn}^2}, \quad l_1 = \frac{1}{v_1 \Sigma_r}, \quad \tau = \frac{D_{s1}}{\Sigma_r},$$

$$l_{2n} = \frac{l_2}{1+L^2 B_{gn}^2}, \quad l_2 = \frac{1}{v_2 \Sigma_a}, \quad L^2 = \frac{D_{s2}}{\Sigma_a} \quad (6.158)$$

雑音源行列 Q は、(6.49) 式のように与えられる。

これから、1群の中性子検出反応率のゆらぎのスペクトル密度は、次のように与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{11}(\omega) &= q(\omega) \bar{R}_f \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int d\mathbf{x} v_1 \Sigma_{d1}(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}) \right]_a \\ &\quad \times \left[\int d\mathbf{x} v_1 \Sigma_{d1}(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}) \right]_b \\ &\quad \times \frac{l_{1n}(1+i\omega l_{2n}) h_{nm} (1-i\omega l_{2m}) l_{1m}}{D_n[i\omega] D_m[-i\omega]} \end{aligned} \quad (6.159)$$

2群の中性子検出反応数のゆらぎのスペクトル密度は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{22}(\omega) &= q(\omega) \bar{R}_f \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int d\mathbf{x} v_2 \Sigma_{d2}(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}) \right]_a \\ &\quad \times \left[\int d\mathbf{x} v_2 \Sigma_{d2}(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}) \right]_b \\ &\quad \times \left(\frac{p}{1+\tau B_{gn}^2} \right)^2 \frac{l_{2n} h_{nm} l_{2m}}{D_n[i\omega] D_m[-i\omega]} \end{aligned} \quad (6.160)$$

また、1群と2群との間の相互スペクトル密度は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{12}(\omega) &= q(\omega) \bar{R}_f \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int d\mathbf{x} v_1 \Sigma_{d1}(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}) \right]_a \\ &\quad \times \left[\int d\mathbf{x} v_2 \Sigma_{d2}(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}) \right]_b \\ &\quad \times \frac{p}{1+\tau B_{gn}^2} \times \frac{l_{1n} h_{nm} (1+i\omega l_{2n}) l_{2m}}{D_n[i\omega] D_m[-i\omega]} \end{aligned} \quad (6.161)$$

(6.159)~(6.161) 式で、 $q(\omega)$ は、(6.52) 式、 \bar{R}_f は (6.141) 式でそれぞれ与えられているものである。

特に、基本モード近似においては、スペクトル密度は、次のようになる。

$$\tilde{P}_{11}(\omega) \approx \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f^a \bar{\epsilon}_{11}^b \bar{\epsilon}_{11} l_{11}^2 h_{11} \frac{1+\omega^2 l_{21}^2}{|D_1[i\omega]|^2} \quad (6.162)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{22}(\omega) &\approx \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f^a \bar{\epsilon}_{21}^b \bar{\epsilon}_{21} l_{21}^2 h_{11} \\ &\quad \times \left(\frac{p}{1+\tau B_{g1}^2} \right)^2 \frac{1}{|D_1[i\omega]|^2} \end{aligned} \quad (6.163a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{12}(\omega) &\approx \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f^a \bar{\epsilon}_{11}^b \bar{\epsilon}_{21} l_{11} l_{21} h_{11} \\ &\quad \times \frac{p}{1+\tau B_{g1}^2} \frac{1+i\omega l_{21}}{|D_1[i\omega]|^2} \end{aligned} \quad (6.164)$$

ここで

$$\bar{\epsilon}_{11} = \int d\mathbf{x} v_1 \Sigma_{d1}(\mathbf{x}) \Psi_1(\mathbf{x}) \quad (6.165)$$

ところで、 $D_1[i\omega]$ は、(6.62) 式と同じように

$$D_1[i\omega] \approx [i\omega l_{11} + 1][i\omega l_{21} + 1 - k(1-\beta)] \quad (6.166)$$

とおける。ここで、 k は、実効増倍率である。すなわち、

$$k = \frac{k_\infty}{(1+\tau B_{g1}^2)(1+L^2 B_{g1}^2)} \quad (6.167)$$

したがって、たとえば、(6.163a) 式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{22}(\omega) &= \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f^a \bar{\epsilon}_{21}^b \bar{\epsilon}_{21} h_{11} \frac{p^2}{(1+\tau B_{g1}^2)^2} \\ &\quad \times \frac{1}{(\omega^2 l_{11}^2 + 1) \left[\omega^2 + \left(\frac{1-k(1-\beta)}{l_{21}} \right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (6.163b)$$

特に、周波数域 $\lambda \ll \omega \ll 1/l_{11}$ では、上式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{22}(\omega) &= \langle {}^a C_2 \rangle \langle {}^b C_2 \rangle \frac{1}{\bar{R}_f V_t} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} \\ &\quad \times \left(\frac{k_\infty}{1+\tau B_{g1}^2} \right)^2 \frac{g_{11}}{l_{21}^2 (\omega^2 + \omega_B^2)} \end{aligned} \quad (6.163c)$$

ここで、 $\langle C_2 \rangle$ は、2群の中性子の平均の検出率、また、第1折点周波数 ω_B は、次のように与えられる。

$$\omega_B = \frac{1-k(1-\beta)}{l_{21}} \quad (6.169)$$

特に、原子炉が臨界に十分近い場合には、(6.163c) 式は、さらに、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{22}(\omega) &= \langle {}^a C_2 \rangle \langle {}^b C_2 \rangle \frac{1}{\bar{R}_f V_t} \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} \\ &\quad \times \frac{g_{11}}{l_{21}^2 (\omega^2 + \omega_{crit}^2)} \end{aligned} \quad (6.163d)$$

ここで、

$$\omega_{crit} = \frac{\beta}{l_{21}} = \frac{k_\infty}{l_2} \frac{\beta}{1+\tau B_{g1}^2} \quad (6.169a)$$

(6.163c) 式を、1群拡散モデルに基づく結果、(6.145) 式と比較すると、2群拡散モデルの結果は、速中性子が減速される確率 ($= p/(1+\tau B_{g1}^2)$) の2乗を、(6.145) 式に乗じたものに等しいことがわかる。

Fig. 23 は、小型の軽水炉での実験値と理論との比較である。点線は、1群拡散モデルによる計算値で、モー

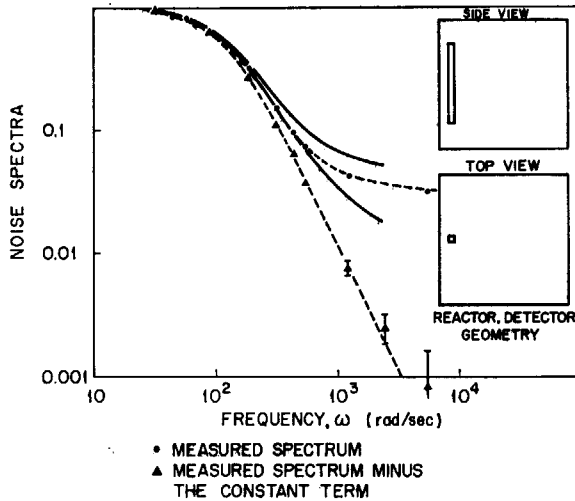


Fig. 23 Measured and calculated power spectral density for a small water moderated nearly critical core*

(The solid line is obtained on one-group model, while the broken line on two-group fundamental mode approximation.)

ド展開 (6.150) 式において, 64項もの和をとったものであり, 理論上の精度は十分ではあるが, 実験結果とはかなり異なる. 一方, 実線は, 2群拡散モデルで, 基本モード近似をしたものである. 実験値とのよい一致を示している.

なお, 遅発中性子のフェルミ年令 τ が即発中性子に比べて小さいことを考慮すると, (6.169a) 式で与えた折点周波数 ω_{crit} は, 次のように修正される¹⁵³⁾.

$$\omega_{crit} = \frac{k_{\infty}}{l_2} \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{1 + \tau_i B_{g1}^2} \quad (6.169b)$$

ここで, τ_i は, i 番目の組に属する遅発中性子のフェルミ年令である. この補正を無視した (6.169a) 式は, 軽水炉では, 約15%, 黒鉛炉では, 約2%, 折点周波数を過少評価することになる.

6.6 大型均質炉

大型炉では, 基本モード近似は, 精度が悪く, モード展開の項数をかなり多くとらなければならなくなる. 特に, 媒質の大きさが無限大の場合について, 一群拡散モデルで検討してみよう.

無限媒質では, グリーン関数行列 $Gr(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ は, 2空間点の距離 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ のみの関数である. 時間に関しては, 差 $t - t_0$ のみの関数であることを合わせて, この性質を $Gr(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, t - t_0)$ と書く. これを用いると次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} & Gr^{(00)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t + u) \\ &= \sum_{i=0}^I \int d\mathbf{x}_0 Gr^{(0i)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, t) \\ & \quad \times Gr^{(i0)}(|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'|, u). \end{aligned} \quad (6.170)$$

中性子—先行核成分 $Gr^{(0i)}$, 先行核—中性子成分 $Gr^{(i0)}$ は, 中性子—中性子成分 $Gr^{(00)}$ を用いて表わされる. すなわち,

$$\begin{aligned} & Gr^{(0i)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, t) \\ &= \int_0^t d\tau \lambda_i e^{-\lambda_i \tau} Gr^{(00)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, t - \tau) \\ & \quad ; i = 1, 2, \dots, I \text{ の時.} \end{aligned} \quad (6.171)$$

$$\begin{aligned} & Gr^{(i0)}(|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'|, u) \\ &= \int_0^u d\tau e^{-\lambda_i \tau} \frac{\beta_i k_{\infty}}{l_a} Gr^{(00)}(|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'|, u - \tau) \\ & \quad ; i = 1, 2, \dots, I \text{ の時.} \end{aligned} \quad (6.172)$$

(6.170) 式の両辺に $\int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} du e^{+i\omega u}$ を作用させる. この時

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} du e^{-i\omega(t+u)} \\ & \quad \times Gr^{(00)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t + u) e^{2i\omega u} \\ &= \int_0^{\infty} d(t+u) e^{-i\omega(t+u)} \\ & \quad \times Gr^{(00)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t + u) \int_0^{t+u} du' e^{2i\omega u'} \\ &= \int_0^{\infty} d\xi \frac{\sin \omega \xi}{\omega} Gr^{(00)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \xi) \\ &= \frac{1}{\omega} \text{Im}g. Gr^{(00)}[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; -i\omega]. \end{aligned} \quad (6.173)$$

ここで, $\text{Im}g.$ は Imaginary part of の略である.

一方, 右辺は, (6.171), (6.172) 式を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \left[1 + \frac{k_{\infty}}{l_a} \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i \beta_i}{(s + \lambda_i)(-s + \lambda_i)} \right] \\ & \quad \times \int d\mathbf{x}_0 Gr^{(00)}[|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|; s] \\ & \quad \times Gr^{(00)}[|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'|; -s], \\ & \quad \text{ただし, } s = i\omega. \end{aligned} \quad (6.174)$$

さて, $\tilde{P}(\omega)$ に対する (6.139) の表式において, $R_{1f}(\mathbf{x}_0)$ は, 無限媒質中では, 場所によらない. 上に導いた2つの表式 (6.173), (6.174) を用いて, グリーン関数の積の積分は処理できて結局, 次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} \text{ab} \tilde{P}(\omega) &= \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{l_a^2} R_{1f} \left| 1 - \frac{\sum_{i=1}^I s \beta_i}{s + \lambda_i} \right|^2 \\ & \quad \times \left[1 + \frac{k_{\infty}}{l_a} \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i \beta_i}{(\omega^2 + \lambda_i^2)} \right]^{-1} \frac{1}{\omega} \\ & \quad \times \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \text{Im}g. Gr^{(00)}[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; -s], \\ & \quad \text{ただし, } s = i\omega. \end{aligned} \quad (6.175)$$

ここで, 検出器断面積は, 場所によらないと考え

* Reproduced from Ref. (103)

$$l_a = 1/v \Sigma_a$$

とおいた。また、 V_a は、検出器の体積である。

グリーン関数のラプラス変換 $Gr[\mathbf{x}-\mathbf{x}'; s]$ の中性子-中性子成分は、次の方程式をみたす。

$$D_s v \Delta_x Gr^{(00)}[\mathbf{x}-\mathbf{x}'; i\omega] - \frac{1}{l_a T_a[i\omega]} Gr^{(00)} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (6.176)$$

ただし、一点炉モデルにおける吸収体伝達関数

$$T_a[s] = \frac{1}{s \left(l_a + k_\infty \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + 1 - k_\infty}. \quad (6.177)$$

したがって、無限媒質では、

$$Gr^{(00)}[|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|; i\omega] = \frac{\exp[-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/L_c(\omega)]}{4\pi D_s v |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \quad (6.178)$$

ここで、複素拡散距離

$$L_c(\omega) = \sqrt{D_s v l_a T_a[i\omega]}. \quad (6.179)$$

中性子波の減衰距離および波長をそれぞれ、 L_a, L_w とおくと次の関係がある。

$$\frac{1}{L_c} = \frac{1}{L_a} + i \frac{1}{L_w}. \quad (6.180)$$

$$L_a = \left[\frac{2}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + a_0}} \right]^{1/2}. \quad (6.181)$$

$$L_w = \left[\frac{2}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2 - a_0}} \right]^{1/2} > L_a. \quad (6.182)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{Real part of } L_c^{-2}(\omega) \\ &= \frac{1}{D_s v l_a} \left[1 - k_\infty + k_\infty \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i \omega^2}{\omega^2 + \lambda_i^2} \right] = \frac{1}{L_a^2} - \frac{1}{L_w^2}. \end{aligned} \quad (6.183)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \text{Imaginary part of } L_c^{-2}(\omega) \\ &= \frac{\omega}{D_s v} \left[1 + \frac{k_\infty}{l_a} \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega^2 + \lambda_i^2} \right] = \frac{2}{L_a L_w}. \end{aligned} \quad (6.184)$$

また、

$$|T_a[i\omega]| = \frac{1}{D_s v l_a} \frac{(L_a L_w)^2}{L_a^2 + L_w^2}. \quad (6.185)$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Im}g. T_a[i\omega]}{\text{Re}. T_a[i\omega]} = -\frac{2L_a L_w}{L_w^2 - L_a^2}. \quad (6.186)$$

6.6.1 相互スペクトル密度

まず、相異なる2つの検出器 a, b があるとしよう。検出器の大きさは、中性子波の減衰距離 L_a に比し十分小さいものとする。(6.178) 式を (6.175) 式に代入する。結果は、次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^{ab}\hat{P}(\omega) &= \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle_a V_d^b V_d R_{1f}}{l_a^2} \left| 1 - \sum_{i=1}^I \frac{i\omega \beta_i}{i\omega + \lambda_i} \right|^2 \\ &\quad \times \left[1 + \frac{k_\infty}{l_a} \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i \beta_i}{\omega^2 + \lambda_i^2} \right]^{-1} \frac{1}{\omega} \\ &\quad \times \frac{e^{-|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|/L_a}}{4\pi D_s v |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} \sin \frac{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|}{L_w}. \end{aligned} \quad (6.187)$$

ここで、 $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b$ は、それぞれ、検出器 a, b の中心の位置である。

これから、二空間点相互スペクトル密度は、周波数が高くなると、その符号が変わることがわかる。特に、値がゼロになる周波数のうち、最も小さいもの ω_0 は、

$$\frac{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|}{L_w} = \pi \quad (6.188)$$

とおいて、(6.182) 式を用いると次のように求まる。

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \left[2\pi^2 \frac{D_s v}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|^2} + \frac{1 - k_\infty(1 - \beta)}{l_a} \right]^2 \\ &\quad - \left(\frac{1 - k_\infty(1 - \beta)}{l_a} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.189a)$$

したがって、臨界に近い炉では、

$$\omega_0 \approx 2\pi^2 \frac{1}{\kappa^2 l_a} \sqrt{1 + \kappa^2 \frac{\beta}{\pi^2}}. \quad (6.189b)$$

ここで、 κ は、拡散距離を単位とした2点間の距離である。軽水炉では、 $l_a = 10^{-4}$ (sec) 程度であるから、 κ が 17、すなわち、2点間の距離が 40cm 程度はなれていると、 $\omega_0 \approx 100$ Hz となる。NOMURA が実験的に発見したこの“零周波数” ω_0 の存在は、このような観点から定性的には説明できる*。

6.2.2 自己スペクトル密度

この場合、スペクトル密度は、検出器の位置には関係しないが、その大きさ、形により周波数依存性が違ってくる。

白色な寄与をとりのぞいた炉雑音スペクトル密度 (6.175) 式は、一点炉モデルにおける反応度伝達関数

$$H[s] = \frac{1 - \sum_{i=1}^I \frac{s\beta_i}{s + \lambda_i}}{s \left(l_a + k_\infty \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) + 1 - k_\infty}. \quad (6.190)$$

を用いて、次のように書きかえられる。

$$\hat{P}(\omega)/V_d = \varepsilon^2 \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{l_f^2} R_{1f} |l_a H[i\omega]|^2 C(\omega). \quad (6.191)$$

ここで $l_f = 1/v \Sigma_f$, $\varepsilon = l_f/l_a$ 。また、

$$C(\omega) = \{ \text{Im}g. T_a[i\omega] \}^{-1} \quad (6.192)$$

$$C(\omega) = \{ \text{Im}g. T_a[i\omega] \}^{-1}$$

$$\times \text{Im}g. \left\{ \int_{V_d} d\mathbf{x}' \int_{V_d} d\mathbf{x} Gr^{(00)}[|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|; i\omega] / (l_a V_d) \right\}. \quad (6.193)$$

これを、補正係数と名づける。

無限大検出器

V_d を十分大きくすると、(6.176) 式から容易にわかるように

* 森島信弘, 野村孜, “中性子ゆらぎの伝播”, 1969年日本原子力学会年会要旨集 A-37.

$$\int_{V_d} dx' \int_{V_d} dx' Gr^{(00)}[|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|; i\omega] \approx l_a V_d T_a[i\omega]. \quad (6.194)$$

となるから、 $V_d \rightarrow \infty$ の時、補正係数は

$$C(\omega) \rightarrow 1, \quad (6.195)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \bar{P}_\infty(\omega)/V_d \rightarrow \varepsilon^2 \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{l_t^2} R_{1f} |l_a H[i\omega]|^2, \\ V_d \rightarrow \infty \text{ の時.} \end{aligned} \quad (6.196)$$

特に、周波数域 $\omega \gg \lambda$ では、

$$\begin{aligned} \bar{P}_\infty(\omega)/V_d \rightarrow \varepsilon^2 \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{l_t^2} R_{1f} \frac{1}{\omega^2 + \alpha_0^2}, \\ V_d \rightarrow \infty, \quad \omega \gg \lambda. \end{aligned} \quad (6.197^*)$$

ここで

$$\alpha_0 = \frac{1 - k_\infty(1-\beta)}{l_a}. \quad (6.198)$$

すなわち、無限媒質で、媒質全体に分布する検出器単位体積当りのスペクトル密度は、従来の一点炉モデルで得られるものと一致している。一方、

$$Ge(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \omega) = \frac{1}{V_d} \frac{\exp[-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/L_c]}{4\pi L_c^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \quad (6.199)$$

$$\bar{Ge} = \int_{V_d} dx' \int_{V_d} dx' Ge(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \omega). \quad (6.200)$$

とおくと、(6.193) 式は次のように書きかえられる。

$$C(\omega) = \{\text{Img. } T_a[i\omega]\}^{-1} \text{Img.}\{T_a[i\omega] \bar{Ge}\}. \quad (6.201)$$

\bar{Ge} は、検出器の形、大きさの関数である。

球形 (半径 R) 検出器

\bar{Ge} は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{Ge}_{sp.} = \bar{Ge}_{sp.}(Z) = 1 - \frac{3}{2Z^3} [(1+Z)^2 e^{-2Z} + Z^2 - 1], \\ \text{ただし, } Z = R/L_c. \end{aligned} \quad (6.202)$$

検出器が小さく、

$$R \ll L_a < L_w$$

の時には、 \bar{Ge} の展開形を最初の 2 項で近似する。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{Ge}_{sp.}(Z) = \frac{2}{5} Z^2 - \frac{3}{5} Z^3 \left[1 - 2Z + \frac{2}{3}(1+Z)^2 \right. \\ \left. \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2Z)^n 6!}{(n+6)!} \right] \approx \frac{2}{5} Z^2 - \frac{2}{3} Z^3 + O(Z^4), \end{aligned} \quad (6.203)$$

この時

$$\begin{aligned} C_{sp.}(\omega) \approx \frac{V_d}{4\pi} L_a \left(\frac{1}{L_a^2} + \frac{1}{L_w^2} \right)^2 \\ = \frac{V_d}{4\pi} \frac{L_a}{(D_s v l_a)^2 |T_a[i\omega]|^2}. \end{aligned} \quad (6.204)$$

* $\langle \nu(\nu-1) \rangle |l_a H[i\omega]|^2 \approx \langle \nu(\nu-1) \rangle \frac{(1-\beta)^2}{\omega^2 + \alpha_0^2}$ があること、さらに (6.6) 式で与えられているように $\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle = (1-\beta)^2 \langle \nu(\nu-1) \rangle$ であることを用いた。

ここで $V_d = 4\pi R^3/3$.

したがって、

$$\begin{aligned} \bar{P}_{sp.}(\omega) \approx (\varepsilon V_d)^2 \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{l_t^2} R_{1f} \\ \times \left| 1 - \sum_{i=1}^I \frac{s\beta_i}{s + \lambda_i} \right|^2 \frac{L_a(\omega)}{4\pi(D_s v)^2} \end{aligned} \quad (6.205)$$

周波数域 $\omega \gg \lambda$ では、

$$\begin{aligned} \bar{P}_{sp.}(\omega) \approx (\varepsilon V_d)^2 \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{l_t^2} \\ \times R_{1f} \frac{1}{\pi(2D_s v)^{3/2}} \frac{(\sqrt{\omega^2 + \alpha_0^2} - \alpha_0)^{1/2}}{\omega}, \\ R \ll L_a, \quad \omega \gg \lambda \text{ の時.} \end{aligned} \quad (6.206)$$

検出器半径が、その周波数における中性子波減衰距離より大きければ、(6.196)、(6.197) の結果が得られ、特に、高周波側 ($\omega > \alpha_0$) では、スペクトル密度は、 $1/\omega^2$ に比例する。一方、球形の小さな検出器では、(6.206) 式からわかるように、高周波側では、 $\omega^{-1/2}$ に比例する。

平板状 (厚さ d) 検出器

$$\bar{Ge}_{sl.}(Z) = 1 + \frac{e^{-Z} - 1}{Z}; \quad Z = d/L_c. \quad (6.207)$$

検出器が小さく

$$d \ll L_a < L_w$$

の時には、次のようにおく。

$$\begin{aligned} \bar{Ge}_{sl.}(Z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-Z)^n}{(n+1)!} \\ \approx \frac{Z}{2} - O(Z^2). \end{aligned} \quad (6.208)$$

この時

$$C_{sl.}(\omega) \approx \frac{d}{4L_a} \frac{L_a^2 + L_w^2}{L_w^2} = \frac{d}{4} \frac{L_a}{D_s v l_a |T_a[i\omega]|}. \quad (6.209)$$

したがって

$$\begin{aligned} \bar{P}_{sl.}(\omega) \approx (\varepsilon V_d)^2 \frac{\langle \nu(\nu-1) \rangle}{l_t^2} \\ \times R_{1f} \frac{|l_a H[i\omega]|^2 L_a(\omega)}{|l_a T_a[i\omega]| 4D_s v}, \end{aligned} \quad (6.210)$$

遅発中性子の効果を見捨てる高周波側では、これは次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{P}_{sl.}(\omega) \approx (\varepsilon V_d)^2 \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{l_t^2} \\ \times R_{1f} \frac{1}{2\sqrt{2D_s v}} \frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha_0^2}}{\omega \sqrt{\omega^2 + \alpha_0^2}}, \\ d \ll L_a, \quad \omega \gg \lambda \text{ の時.} \end{aligned} \quad (6.211)$$

したがって、平板形の小さな検出器で測定した炉雑音スペクトル密度は、高周波側では、 $\omega^{-3/2}$ に比例する。

無限長円筒形 (半径 R) 検出器

R が小さい時、 $\bar{Ge}_{cy.}$ は、次のように近似できる。

$$\overline{G}_{e_{cy}} \approx \frac{V_d}{2\pi L_c^2} K_0 \left(\frac{R}{2L_c} \right), \quad (6.212)$$

ここで、 $V_d = \pi R^2$ 、 K_0 は、第2種0次の変形ベッセル関数である。この時

$$C_{cy}(\omega) = \{ \text{Im}g. T_a[i\omega] \}^{-1} \frac{V_d}{4\pi D_s v l_a} (-\tan^{-1}\theta). \quad (6.213)$$

ここで、 θ は、(6.186) 式で与えた $T_a[i\omega]$ の位相角である。

周波数域 $\omega \gg \lambda$ では、

$$C_{cy}(\omega) \approx \frac{V_d}{4\pi D_s v} \frac{\omega^2 + \alpha_0^2}{\omega} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\alpha_0} \right). \quad (6.214)$$

したがって

$$\begin{aligned} \bar{P}_{cy}(\omega) &= (\varepsilon V_d)^2 \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{l_f^2} \\ &\times R_{II} \frac{1}{4\pi D_s v} \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\alpha_0} \right), \\ &R \ll L_a, \omega \gg \lambda. \text{の時} \end{aligned} \quad (6.215)$$

円筒形の小さな検出器で測定した炉雑音スペクトル密度は、高周波側では、 ω^{-1} に比例して小さくなるが、その傾斜 ($\ln \bar{P}_\infty - \ln \omega$ 面において) は、球形の検出器で測ったものと平板形のものとの中間になっている。(cf.

TABLE 14)

TABLE 14 Characteristic frequency dependence of the power spectral density in the higher frequency region for various detector geometry (A black detectors absorbs all neutrons incident on it. A white detector causes no flux depression around it)

Detector geometry	Large	Thin plate		Long thin cylinder	Small sphere
Property	white	white	black	white	white
$\bar{P}_\infty(\omega) \propto$	ω^{-2}	$\omega^{-3/2}$	ω^{-1}	ω^{-1}	$\omega^{-1/2}$

Fig. 24 に球形の検出器を用いた時の $\bar{P}(\omega)$ の高周波側の周波数依存性を示す。パラメータは検出器半径である。

このように、核分裂の生起率 $R_{II}(\mathbf{x})$ が、場所によらない大きな原子炉では、高次モードの寄与のために、検出器の大きさが中性子波の減衰距離 $L_a(\omega)$ に比べて大きい場合でないと、炉雑音スペクトル密度は一点炉モデルの周波数依存性と一致しない。臨界炉では、遅発中性子の効果を無視すると、(6.181)~(6.184) 式から、

$$L_a(\omega) = L_w(\omega) = \sqrt{2D_s v / \omega}$$

高周波になると減衰距離は短くなるが、基本モードの伝達関数 $H_1[i\omega]$ の第2折点周波数 $\omega_{B1} = \beta/l$ 附近でも、この値は、拡散距離 $L(= \sqrt{D_s/\Sigma_a})$ の10倍程度に

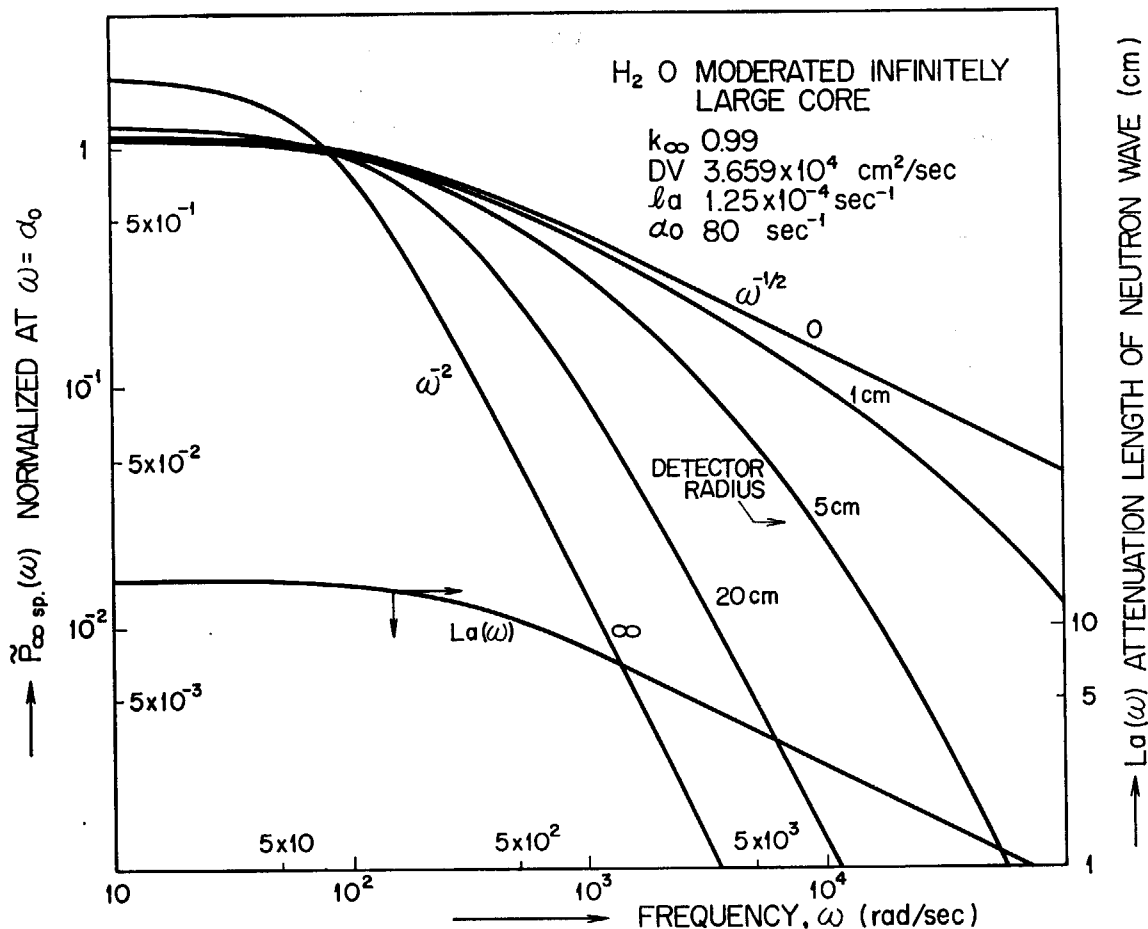


Fig. 24 Noise spectra for spherical detectors in an infinite water moderated core

なる。すなわち、

$$L_a(\omega) \approx L/\sqrt{\beta} \approx 10L, \quad \omega = \beta/l \text{ の時.}$$

なお、(6.197), (6.206), (6.211), (6.215) 式の結果は、すでに NATELSON *et al.*,¹⁰³⁾ SHEFF and ALBRECHT,¹⁴⁰⁾ WILLIAMS¹⁵³⁾ によって、別な手法で得られているものと一致している。

6.6.3 検出器の自己遮蔽効果

前節では、検出器をおいたことにより生ずる中性子束分布のひずみを無視した。この効果をとりにれた考察が、WILLIAMS¹⁵⁴⁾ によってなされている。

平板形の薄い検出器 (厚さ d) が場所 y におかれているとしよう。遅発中性子の寄与が無視できる高周波側のみに注目する。グリーン関数は、次の方程式の解として与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Gr(x|x_0, t) &= [D_s v \Delta_x - v \Sigma_a + \langle \nu \rangle (1 - \beta) v \Sigma_f] Gr(x|x_0, t) \\ &\quad - v \Sigma_d d \delta(x-y) Gr(y|x_0, t) \\ &\quad + \delta(x-x_0) \delta(t). \end{aligned} \quad (6.216)$$

上式をラプラス変換し、ついで x に関してフーリエ変換を行なって解を求める。結果は、次のようになる。

$$Gr[y|x_0; s] = \frac{\exp\left[-|y-x_0| \sqrt{\frac{s+\alpha_0}{D_s v}}\right]}{\gamma + 2\sqrt{D_s v}(s+\alpha_0)}. \quad (6.217)$$

ここで、

$$\gamma = v \Sigma_d d. \quad (6.218)$$

一方、単位強さの定常源がある場合の中性子数の期待値の分布 $f_{1s}(x)$ は、次のようになる。

$$f_{1s}(x) = \frac{1}{\alpha_0} \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma + 2\sqrt{D_s v} \alpha_0} \exp\left[-|x-y| \sqrt{\frac{\alpha_0}{D_s v}}\right] \right]. \quad (6.219)$$

したがって、検出反応率のゆらぎの自己スペクトル密度は、次のようになる。

$$\Phi(\omega) = \gamma f_{1s}(y) + \bar{P}(\omega). \quad (6.220)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{P}(\omega) &= \gamma^2 \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle v \Sigma_f \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 f_{1s}(x_0) |Gr[y|x_0; i\omega]|^2 \\ &= \gamma^2 f_{1s}(y) \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle v \Sigma_f \left[\frac{L_a(\omega)}{\left[\gamma + \frac{2D_s v}{L_a(\omega)}\right]^2 + \left[\frac{2D_s v}{L_w(\omega)}\right]^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{D_s v} \left[\frac{2\sqrt{D_s v}}{L_a(\omega)} + \sqrt{\alpha_0} \right]} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (6.221)$$

γ が十分小さい場合には、当然のことながら上式は、(6.211) 式と一致し、高周波側では $\omega^{-3/2}$ に比例する。すなわち検出器の自己遮蔽効果が無視できるのは、次の条件が成り立つ場合である。

$$\gamma \ll \frac{2D_s v}{L_a(\omega)} = \sqrt{2D_s v} \sqrt{\omega^2 + \alpha_0^2 + \alpha_0}.$$

特に、折点周波数 α_0 においては、この条件は、臨界炉では*

$$\gamma \ll 2\sqrt{\frac{D_s v}{L_a}} \sqrt{\beta} = 2v\sqrt{D_s \Sigma_a} \sqrt{\beta}$$

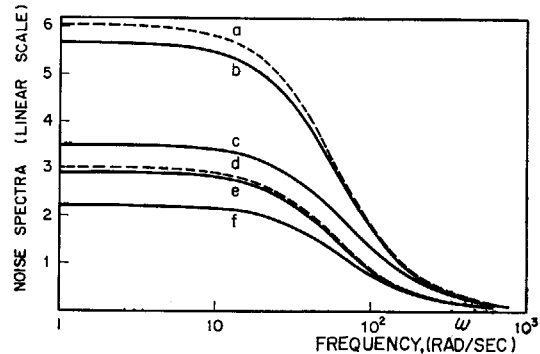
となる。 γ は、通常の検出器では、 $10^3 \sim 10^4$ cm/sec である。 $\sqrt{D_s \Sigma_a}$ は、熱中性子炉では、 10^{-1} 程度であるから、折点周波数近傍では、検出器の自己遮蔽効果は、ほぼ、無視しうる。

γ が大きくなり、検出器に入射した中性子がすべて吸収されるようになると、

$$\begin{aligned} \bar{P}(\omega) &= \gamma f_{1s}(y) \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle v \Sigma_f \\ &\quad \times \frac{L_a(\omega)}{2\sqrt{D_s v} \left[\frac{2\sqrt{D_s v}}{L_a(\omega)} + \sqrt{\alpha_0} \right]} \\ &= \gamma f_{1s}(y) \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle v \Sigma_f}{\sqrt{\omega^2 + \alpha_0^2 + \alpha_0}} \\ &\quad \times \frac{1}{\left[\sqrt{\alpha_0} + \sqrt{\omega^2 + \alpha_0^2 + \alpha_0} \right]} \\ \gamma &\gg \frac{2D_s v}{L_a(\omega)} > \frac{2D_s v}{L_w(\omega)} \text{ の時.} \end{aligned} \quad (6.222)$$

したがって、スペクトル密度は、高周波側では、 ω^{-1} に比例するようになる。

Fig. 25 は、臨界炉における $\bar{P}(\omega)/[\gamma f(y)]$ を示したものである。検出器の自己遮蔽効果は無視するとこの値は、 γ に比例し、周波数依存性は、 γ に無関係に同一の傾向を示す。点線は、この場合に対応している。



a) $\gamma=100, \bar{\nu}=1000$ (1/10 scale) d) $\gamma=50, \bar{\nu}=500$ (1/10 scale)
 b) $\gamma=100$ e) $\bar{\nu}=50$
 c) $\gamma=1000$ (1/10 scale) f) $\bar{\nu}=500$ (1/10 scale)

Fig. 25 Power spectral density of a just-critical, infinite, homogeneous core as detected by an infinite plate detector (Full line includes the flux depression, broken line neglects it.**)

6.7 まとめ

炉雑音スペクトル密度の解析公式として通常用いられる一点炉モデルの結果は、いわば、炉心全体に分布した

* Williams¹⁵⁴⁾ は、誤まった表式を導いている。

** Reproduced from Ref. (154)

検出器反応率のゆらぎの解析公式である。小型の臨界炉では、基本空間モードの寄与が高次モードに比べて著しく大きく、いわば、基本モードで炉心全体に広がる検出器による反応率が観測されることになり、一点炉モデルによる結果と、周波数依存性に関してはよい一致を示す。ただし、炉出力絶対値の測定 (cf. 6.2.3) では、雑音スペクトル密度の絶対値を問題とするので、一点炉モデルと基本モード近似との差異 (cf. Eq. (6.27) & (6.145)) が理論上は問題となる。炉が大型になり、特に、無限媒質においては、空間モードの固有値、バックリングは、連続に存在し、しかも、各モードが同じ強さに励起されるようになる。検出器は、その周辺で発生した世代の若い相関中性子対を相対的に高い頻度で吸収することになるので、雑音スペクトル密度の高周波側の周波数依存性にその影響が現われてくる。そのきき方は、検出器の形・大きさ・吸収断面積に関する (cf. 6.6)。この影響が無視できるためには、検出器は、その周波数における中性子波の減衰距離 $L_a(\omega)$ より十分大きいことが必要である。 $L_a(\omega)$ は、周波数が高くなると小さくなるが、折点周波数 β/l 附近でも、拡散距離 L の10倍程度となる。非均質性の効果が無視できるかどうかの尺度として炉雑音実験では、 $L_a(\omega)$ を用いる点に注意する必要がある。燃料板と減速材とが格子をかたちづくっている場合

に、等価な均質媒質におきかえてよいかどうかの判定にも、中性子波の減衰距離 (この場合、減速材中のもの) が用いられる¹⁵⁴⁾。

速中性子の減速の効果 (減速過程でのみれ、共鳴吸収、減速時間の有限性) は、減速時間が熱化時間に比べて十分短いならば、小型臨界炉では、これを無視した場合と同じになる。(cf. Eq. (6.145) & Eq. (6.163d)) ただし、パラメータの撰択を誤ると失敗する (cf. Fig. 23)。

一方、速中性子群の炉雑音スペクトル密度には、熱中性子寿命の逆数に対応した折点周波数があらたに現われる。速中性子雑音スペクトル密度あるいは、速中性子と熱中性子のゆらぎの間の相互スペクトル密度の位相角から、熱中性子寿命を独立に測定しうる可能性がある。

相互スペクトル密度は、一般には、複素数である。値がゼロになる、いわゆる、“sink”周波数は、実験的に精度よく求まるから、これから、新たな動特性パラメータを推定することもできる。(cf. Eq. (6.93), (6.189b))。

零出力炉雑音現象の基礎理論は完成したものの、ノイズに含まれる炉の動特性に関する検出可能なパラメータは何かといった検討は未だ不十分のように思われる。この面での新たな発見が期待される。

7. 相 関 時 間 分 析 法

7.1 Feynman- α 法の解析

一定時間 T の間の検出カウント数 $C(T)$ の分散を解析の対象とするのが、Feynman- α (Variance-to-mean ratio) 法である。FEYNMAN *et al.*,⁵¹⁾ は、

$$\frac{\langle C^2(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2}{\langle C(T) \rangle} = 1 + Y(T) \quad (7.1)$$

とにおいて、ポアソン分布からのずれ Y を解析対象とした。これにたいして、FURUHASHI *et al.*,⁵⁴⁾ は、二次の階乗キュームラントを解析対象とし、同じくポアソン分布からのずれを表わす指標 Z を導入した。すなわち

$$\frac{\langle C^2(T) \rangle - \langle C(T) \rangle}{\langle C(T) \rangle^2} = 1 + Z(T). \quad (7.2)$$

Y と Z との関係は、容易にわかるように

$$Z(T) = \frac{Y(T)}{\langle C(T) \rangle} \quad (7.3)$$

である。

7.1.1 一点炉モデル

遅発中性子の存在を無視した一点炉モデルで、 T 時間の観測で得られる検出カウント数の分散の値は、すでに、(5.201') 式で求めた。検出器として、特に、BF₃ 計数管のように検出に伴ない二次中性子を放出しない吸収型のものを用いた場合を考えると、(5.201') 式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \langle C^2(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2 \\ &= \frac{\epsilon^2 T}{\alpha_0^2 l_f^2} [\nu_0(\nu_0 - 1) R_{1f} + \langle \nu_{s0}(\nu_{s0} - 1) \rangle S_0] \\ & \quad \times \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right] + C_1 T. \end{aligned} \quad (7.4)$$

ここで、検出反応に伴ない必ず 1 カウント得られるものとし、検出器効率を $\epsilon (= \Sigma_d / \Sigma_f)$ とおいた。また、

- $\alpha_0 = \nu \Sigma_a [1 - (1 - \beta)k]$: 即発中性子減衰係数
- $l_f = 1/\nu \Sigma_f$: 中性子生成時間
- ν_0 : 誘導核分裂反応に伴ない放出される即発中性子数。
- ν_{s0} : 自発核分裂反応に伴ない放出される即発中性子数。
- R_{1f} : 平均の誘導核分裂率

S_0 : 平均の自発核分裂率

$C_1 = \epsilon R_{1f}$: 平均の検出率

(7.4) 式は、観測時間 T が、遅発中性子先行核の崩壊時定数 ($= 1/\lambda$) に比べて、十分小さい時、適用できる。

a) 自発核分裂の効果

特に、自発核分裂以外に外部源のない場合には、(6.9) ~ (6.13) 式の関係を用いると、 Y の値は、次のようになる。

$$Y(T) = \epsilon \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{\alpha_0^2 l_f^2 k} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right]. \quad (7.5)$$

一方、 Z は、次のようになる。

$$\begin{aligned} Z(T) &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{\alpha_0^2 l_f^2 k R_{1f} T} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right] \\ &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{\alpha_0^2 l_f^2 k^2} \frac{1 - k}{S_0 T} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

これは、すでに FURUHASHI *et al.*,⁵⁴⁾ の求めている表式である。飽和値は、それぞれ、次のようになる。

$$Y_{\text{sat}} = \lim_{T \rightarrow \infty} Y(T) = \epsilon \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{\alpha_0^2 l_f^2 k}. \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{sat}} &= \lim_{T \rightarrow 0} Z(T) = \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{2 \alpha_0 l_f^2 k R_{1f}} \\ &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{2 \alpha_0 l_f^2 k^2} \frac{1 - k}{S_0} \\ &= \frac{\alpha_0}{2 C_1} Y_{\text{sat}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

指標 Z の特徴としては、次の点をあげることができ⁵⁴⁾。

○ 相関に関する物理的イメージを、よく反映している。すなわち、 Z は、中性子源 (通常、自発核分裂率) に逆比例し、源が弱い程、ゆらぎが大きという事実によく対応している。これに対して、 Y は、中性子源の強さには、無関係な指標である。また、 Z は、観測時間 T が小さい場合には、大きくなり、相関のある中性子対は、 T が小さい程、相対的に大きいという事実に対応している。これに対して、 Y は、 T が小さい程、小さいという逆の傾向を示す。(cf. Fig. 26)

○ 実験的な処理がしやすい。すなわち

Z は、検出器効率に無関係である。また、高次空間モードの影響を無視すると、検出器位置にも関係しなくなる。さらに、その飽和値 ($T \rightarrow 0$) は、たとえば、天然ウラン-軽水系でも、2~3 程度の値をもつが、 Y の飽和値 ($T \rightarrow \infty$) は、 10^{-2} 程度のごく小さい値とな

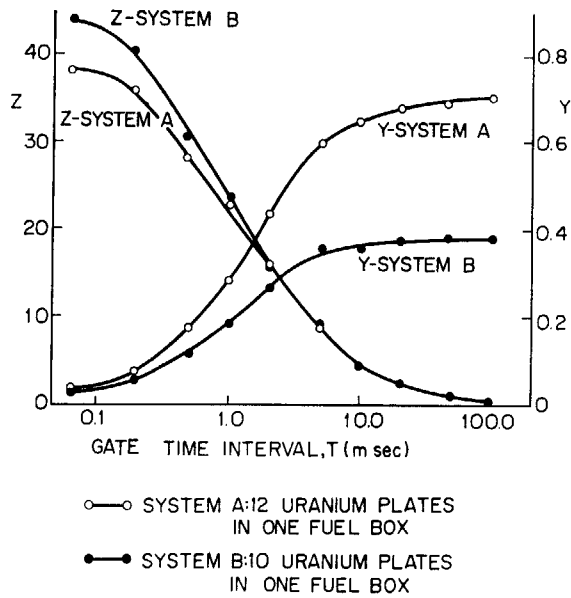


Fig. 26 Comparison of indices, Y and Z of Feynman- α 's experiment*

ってしまう。

b) 分裂型計数管の効果

計数管として、特に、核分裂計数管を用いる場合には、検出管内の核分裂を源とする相関対の他に、検出に伴い放出された二次中性子が後に再び計数されることによる検出相関項の寄与が加わる。この場合のカウント数の二次の階乗キュームラントは、(5.201') 式を用いると次のように書ける。

$$\begin{aligned} \sigma_2(T) &= \langle C^2(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2 - \langle C(T) \rangle \\ &= \langle C(T) \rangle^2 Z(T) \\ &\quad \times \left[1 + \varepsilon k + 2 \frac{\langle \nu_0 \rangle^2}{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle} \frac{1 - (1 - \beta)k}{1 - \beta} \right]. \end{aligned} \tag{7.9}$$

ただし、計数管の放出する二次即発中性子数 ν_{00} の確率分布は、誘導核分裂により放出される二次即発中性子数の確率分布に等しいと仮定した。また、外部源は、自発核分裂のみとした。したがって、 $Z(T)$ としては、(7.6) 式を用いる。

c) 遅発中性子の寄与

炉雑音スペクトル密度 (6.3) 式のフーリエ逆変換を行なうと、Wiener-Khintchin の定理**により、相関関数が得られる。すなわち

$$\begin{aligned} \Gamma_{cc}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega\tau} \Phi_{cc}(\omega) \\ &= \varepsilon^2 k^2 R_{lf} \frac{\langle \nu(\nu - 1) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^1 H(\alpha_j) \tilde{H}_j e^{-\alpha_j \tau} \\ &\quad + \varepsilon R_{lf} \delta(\tau). \end{aligned} \tag{7.10*}$$

* Reproduced from Ref. (54), ** 附録A参照

ただし、 $-\alpha_j$ は、伝達関数 $H(s)$ の j 番目の極、いいかえれば、逆時間公式

$$s \left(l + k \sum_{i=1}^1 \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) = k - 1. \tag{7.11}$$

の j 番目の根である。一方、 \tilde{H}_j は、 $H(s)$ の $s = -\alpha_j$ における留数、すなわち、

$$\tilde{H}_j = \lim_{s \rightarrow -\alpha_j} (s + \alpha_j) H(s). \tag{7.12}$$

T 時間の間の計数値の分散は、相関関数と次の関係がある**。

$$\langle C^2(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2 = 2 \int_0^T d\tau (T - \tau) \Gamma_{cc}(\tau). \tag{7.13}$$

(7.10) 式を上式に代入すると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \langle C^2(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2 &= 2 \frac{\varepsilon^2 l^2 T}{l_f^2} \langle \nu(\nu - 1) \rangle R_{lf} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^1 \frac{1}{\alpha_j} H(\alpha_j) \tilde{H}_j \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_j T}}{\alpha_j T} \right] \\ &\quad + \varepsilon R_{lf} T. \end{aligned} \tag{7.14}$$

したがって、非ポアソンの成分を表わす指標 Y は、次のようになる。

$$\begin{aligned} Y &= 2 \frac{\varepsilon \langle \nu(\nu - 1) \rangle l^2}{l_f^2} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^1 \frac{1}{\alpha_j} H(\alpha_j) \tilde{H}_j \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_j T}}{\alpha_j T} \right]. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Fig. 27 は、ALBRECHT²⁾ の報告した実験データであり、成分わけした理論値が合わせ記載されている。

なお、外部源は自発核分裂のみとし、その寄与も含めると上式 Y の値は、次のようになる。

$$\begin{aligned} Y &= 2 \frac{\varepsilon \langle \nu(\nu - 1) \rangle l^2}{l_f^2 k} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^1 \frac{1}{\alpha_j} H(\alpha_j) \tilde{H}_j \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_j T}}{\alpha_j T} \right]. \end{aligned} \tag{7.16}$$

ただし、自発核分裂により放出される即発中性子、遅発中性子数確率分布は、誘導核分裂の場合と同じと仮定し、さらに、(6.6) 式のようなおきかえが許されるとしている。

7.1.2 一群拡散モデル

速度依存を無視した一群モデルで、グリーン関数のモ

* $\Phi_{cc}(\tau)$ の導出にあたっては、(6.6) 式で与えられる近似を用いている。

** 時間 T を l 箇の小さな間隔に分割し、始めから i 番目の小時間幅で得られる計数値を、 ΔC_i としよう。この時、

$$\begin{aligned} \langle C^2(T) \rangle &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\langle \left(\sum_{i=1}^1 \Delta C_i \right)^2 \right\rangle \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 \Delta C_i \Delta C_j \right\rangle \\ &= \int_0^T dt \int_0^T du \gamma(t, u). \end{aligned}$$

ただし、 $\gamma(t, u)$ は、計数値 $C(t)$ の 2 時点相関関数である。定常系では、 $\gamma(t, u)$ は、時間差 $\tau = t - u$ のみの関数であることおよび (A-6) 式を利用して、上式を変形すれば、(7.13) 式となる。

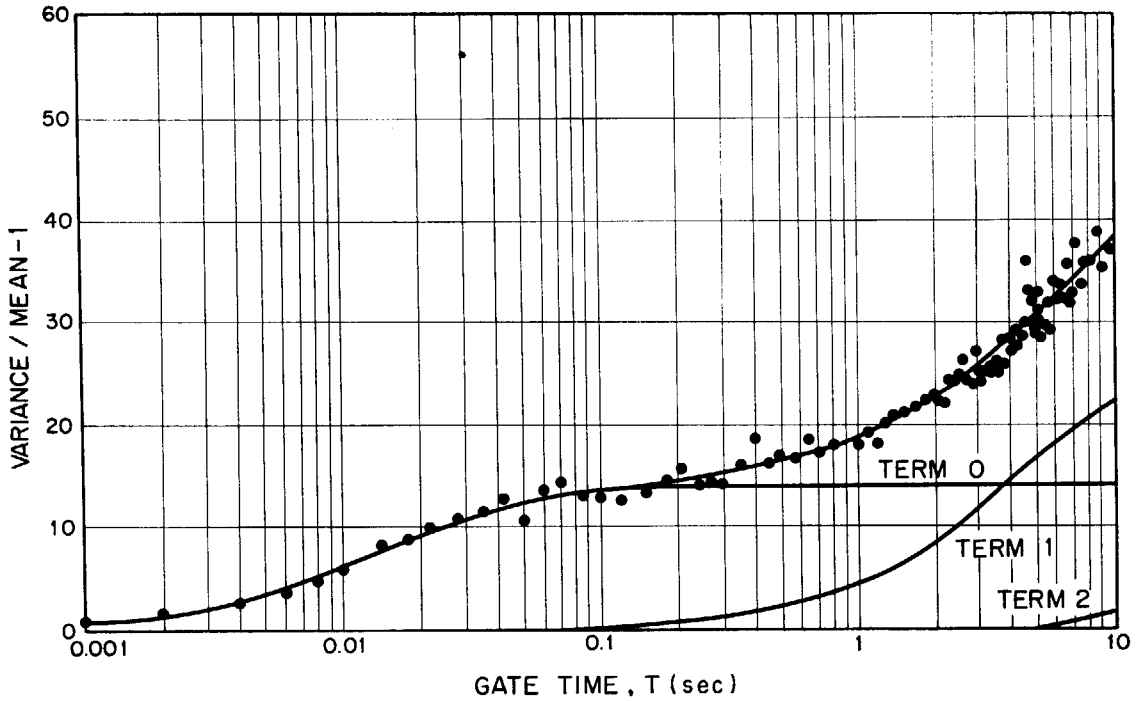


Fig. 27 Effect of delayed neutrons on variance/mean-1*

ード展開を利用して、空間依存を考慮した場合の計数値の分散の解析公式を導いてみよう。

(6.140) 式をフーリエ逆変換して、まず、相関のある検出パルス対の存在確率を求める。

$$P_{cor}(\tau) = \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f \sum_{n=1} \sum_{m=1} \epsilon_n l_n \times \sum_{j=0}^I H_n(\alpha_{mj}) \tilde{H}_{mj} e^{-\alpha_{mj}\tau} h_{nm} l_m \epsilon_m. \quad (7.17)$$

ここで、 \tilde{H}_{mj} は、 $H_m(s)$ の $s = -\alpha_{mj}$ における留数すなわち、

$$\tilde{H}_{mj} = \lim_{s \rightarrow -\alpha_{mj}} (s + \alpha_{mj}) H_m(s). \quad (7.18)$$

計数値の二次の階乗キュムラントは、 $P_{cor}(\tau)$ と次の関係にある**。

$$\delta_2(T) \equiv \langle C^2(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2 - \langle C(T) \rangle = 2 \int_0^T d\tau (T-\tau) P_{cor}(\tau). \quad (7.19)$$

上式に (7.17) 式を代入する。

$$\delta_2(T) = 2 \langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_f \sum_{n=1} \sum_{m=1} \epsilon_n l_n \sum_{j=0}^I H_n(\alpha_{mj}) \tilde{H}_{mj} \times \frac{T}{\alpha_{mj}} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_{mj}T}}{\alpha_{mj}T} \right] h_{nm} l_m \epsilon_m. \quad (7.20)$$

上式で、 $n=m=1$ のみを考慮する時、これを基本モード近似とよぶ。特に、均質炉においては指標 Y は、次のようになる。

$$Y(T) = 2 \frac{\epsilon l_1^2 \langle \nu(\nu-1) \rangle}{l_1^2} g_{11} \times \sum_{j=0}^I \frac{1}{\alpha_{1j}} H(\alpha_{1j}) \tilde{H}_j \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_{1j}T}}{\alpha_{1j}T} \right]. \quad (7.21)$$

ただし、

$$\epsilon = \int d\mathbf{x} v \Sigma_d(\mathbf{x}) \Psi_1(\mathbf{x}) / \int d\mathbf{x} v \Sigma_f \Psi_1(\mathbf{x}). \quad (7.22)$$

とおいた。 $\Psi_1(\mathbf{x})$ は、基本モードの空間分布関数 (cf. Eq. (6.109)), g_{11} は、(6.148) 式で定義した幾何学的因子である。(cf. TABLE 13). また、 l_1 はもれの効果も含めた中性子寿命である (cf. Eq. (6.114)).

外部源が自発核分裂のみの場合、(7.21) 式は、次のように書き改められる。

$$Y(T) = 2 \frac{\epsilon l_1^2 \langle \nu(\nu-1) \rangle}{l_1^2} \frac{1 - k_1 + k_1 g_{11}}{k_1} \times \sum_{j=0}^I \frac{1}{\alpha_{1j}} H(\alpha_{1j}) \tilde{H}_j \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_{1j}T}}{\alpha_{1j}T} \right]. \quad (7.23)$$

ただし、自発核分裂率は、炉内に一様に分布しているものとし、(7.20) 式で、 $\bar{R}_f h_{11}$ を $\bar{R}_f h_{11} + S_0$ とおきかえて、導出を行なった。なお、 k_1 は、実効増倍率である。(cf. Eq. (6.114))

さて、原子炉が未臨界で高次モードにたいする反応度 $|\rho_n| \gg \beta$ ($n \geq 2$ の時) である時、前章 (6.131) 式以下の議論を利用すると次の結果が得られる。

$$H_n(\alpha_{m0}) \approx \frac{1}{l_n(\alpha_{m0} + \alpha_{n0})}, \quad \tilde{H}_{m0} \approx \frac{1}{l_m}, \quad n, m \geq 1 \text{ の時}. \quad (7.24)$$

$$H_n(\alpha_{mj}) \approx \frac{1}{l_n \alpha_{n0}}, \quad \tilde{H}_{mj} \approx \frac{\lambda_j - \alpha_{mj}}{l_m \alpha_{m0}}, \quad n, m \geq 2 \text{ の時, ただし, } j = 1, 2, \dots, I. \quad (7.25)$$

* Reproduced from Ref. (2)

** 2時点相関関数 $\Gamma_{2c}(\tau)$ と $P_{cor}(\tau)$ との関係は、

$$\Gamma_{2c}(\tau) = C_1 \delta(\tau) + P_{cor}(\tau)$$

である。(cf. Eq. (4.144)) ところで、 C_1 は、平均の検出率。この関係を (7.13) 式に用いれば、(7.19) が得られる。

基本モードの遅発中性子成分は、特に遅発中性子を一組にまとめ、平均の崩壊定数を $\bar{\lambda}$ とおくと次のようにかける。

$$H_1[\alpha_{m1}] \approx \frac{2\bar{\lambda}}{l_1 \alpha_{10}(\bar{\lambda} + \alpha_{11})}, \quad m \geq 2 \text{ の時.}$$

$$H_1[\alpha_{11}] \approx \frac{\alpha_{11} + \bar{\lambda}}{2 l_1 \alpha_{10} \alpha_{11}},$$

$$\hat{H}_{11} \approx \frac{-\alpha_{11} + \bar{\lambda}}{l_1 \alpha_{10}}. \quad (7.26)$$

そこで、(7.20) 式に現われる次の項の大小を考えてみよう。

$$l_n H_n[\alpha_{mj}] \hat{H}_{mj} l_m \alpha_{mj}. \quad (7.27)$$

遅発中性子成分の寄与は、即発中性子成分の寄与より大きい。高次空間モード遅発中性子成分と基本モード遅発中性子成分との比は、未臨界度が高くなると大きくなるが、 $|\rho_1| = \beta$ では $|\beta/\rho_n| |\beta/\rho_m|$ 程度で無視できる。また、基本モードの即発中性子成分と遅発中性子成分との比は、 $\left(\frac{x^2}{1-2x}\right)$ 程度 (ただし、 $|\rho_1|/\beta = x$ とおいた) で、臨界に近づくと小さくなるが、高次モードの遅発中性子成分より大きく (比は、 $\rho_n \rho_m / [2(\beta - \rho_1)^2]$ 程度) $|\rho_1| = \beta$ 程度の未臨界炉では、高次モード項はやはり無視できるようになる。そこで、炉が未臨界でも、 $|\rho_1| = \beta$ 程度であれば、基本モード項のみで、近似できるようになる。一方、観測時間 T と減衰係数 α_{mj} との関数 $1 - (1 - e^{-\alpha_{mj}T})/(\alpha_{mj}T)$ が、 $\alpha_{mj}T \ll 1$ の時 $\frac{1}{2}\alpha_{mj}T$ となり、(7.27) 式における $1/\alpha_{mj}$ をうち消すので原子炉が $\bar{\lambda}T (= 10 T\beta)$ 以上の未臨界で、観測時間 T が短かく $\alpha_{11}T \ll 1$ 程度ならば、遅発中性子成分は、即発中性子成分に比べて無視できるようになる (cf. Fig. 27 in page 103).

○ 数値計算上のテクニック

(7.17) あるいは、(7.20) 式の即発中性子成分に注目すると、次のような和がある。

$$\langle \nu(\nu-1) \rangle \bar{R}_1 \sum_{n=1} \varepsilon_n l_n H_n[\alpha_{m0}] \hat{H}_{m0} h_{nm} l_m$$

$$= \int d\mathbf{x} v \Sigma_d(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}_m(\mathbf{x}).$$

ここで

$$\tilde{\Psi}_m(\mathbf{x}) = \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(\mathbf{x})}{\alpha_{n0} + \alpha_{m0}}$$

$$\times \int d\mathbf{x}' \Psi_n(\mathbf{x}') R_{1f}(\mathbf{x}') \Psi_m(\mathbf{x}'). \quad (7.27^*)$$

この関数は、次の方程式 (Borgwaldt 方程式とよぼう) を満足する。

$$(-D_s v \Delta_{\mathbf{x}} - \nu \langle \nu \rangle (1-\beta) \Sigma_f + \nu \Sigma_a + \alpha_{m0}) \tilde{\Psi}_m(\mathbf{x})$$

$$= \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle R_{1f}(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}). \quad (7.28)$$

解を固有関数展開してみよう。

$$\tilde{\Psi}_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=1} X_{mi} \Psi_i(\mathbf{x}). \quad (7.29)$$

これを (7.28) 式に代入する。(6.109), (6.114) 式を用いると次の結果が得られる。

$$\sum_{i=1} (\alpha_{i0} + \alpha_{m0}) X_{mi} \Psi_i(\mathbf{x})$$

$$= \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle R_{1f}(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}). \quad (7.30)$$

ここで

$$\alpha_{i0} = [1 - (1-\beta)k_i]/l_i.$$

(7.30) 式に $\Psi_n(\mathbf{x})$ を乗じ全領域にわたって積分する。正規直交関係 (6.110) を用いると、結果は次のようになる。

$$(\alpha_{n0} + \alpha_{m0}) X_{mn}$$

$$= \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle \int d\mathbf{x} \Psi_n(\mathbf{x}) R_{1f}(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}). \quad (7.31)$$

これから、方程式 (7.28) の解が (7.27) のように表わされる事がわかる。実用上は、(7.28) 式の数値解を直接求め (7.17), (7.19) 式を次のように定め、2重和をとるわずらわしさを避ける。

$$P_{\text{cor}}(\tau) = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' v \Sigma_d(\mathbf{x})$$

$$\times \sum_{m=1} \tilde{\Psi}_m(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}') v \Sigma_d(\mathbf{x}') e^{-\alpha_{m0}\tau}.$$

(即発中性子成分のみ) (7.32)

$$\bar{\sigma}_2(T) = 2 \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' v \Sigma_d(\mathbf{x})$$

$$\times \sum_{m=1} \tilde{\Psi}_m(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}') v \Sigma_d(\mathbf{x}')$$

$$\times \frac{T}{\alpha_{m0}} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha_{m0}T}}{\alpha_{m0}T} \right],$$

(即発中性子成分のみ). (7.33)

BORGWALDT は、エネルギー依存のある一般の場合に、(7.27), (7.28) ような関係を証明し²⁵⁾、反射体付高速炉で Rossi- α 公式の数値解を求めている²⁶⁾。

まず、(4.218) 式で与えた相関関数の表式

$${}^B\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', u)$$

$$= \int_{-\infty}^u dt_0 \int d\mathbf{x}_0 \int d\mathbf{v}_0 \int d\mathbf{v}_1$$

$$\times [Gr(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_1, t_0)$$

$$\times \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle R_{1f}(\mathbf{x}_0) \chi(\mathbf{v}_1) \chi(\mathbf{v}_2)$$

$$\times Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', u | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_2, t_0)]. \quad (7.34)$$

におけるグリーン関数をモード展開する。

$$Gr(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \phi_m^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) e^{-\alpha_{m0}(t-t_0)}. \quad (7.35)$$

ここで、 α_{m0}, ϕ_m は、次の固有値問題の固有値および固有関数である。

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha_{m0} \phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.36)$$

ただし、 B は、(3.8) 式で定義したボルツマン作用素*である。一方、 ϕ_m^+ は、 B の随伴作用素 B^+ の固有関数であり、次の方程式の解として与えられる。

$$B^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \phi_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha_{m0} \phi_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.37)$$

ϕ_m と ϕ_m^+ とは、次の直交関係をみたす。

* (6.6) 式を用いて、 $(1-\beta)^2 \langle \nu(\nu-1) \rangle = \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle$ とした。

* 遅発中性子の存在を無視しているから、 $\langle \nu \rangle$ を $(1-\beta)\langle \nu \rangle$ とおきかえる必要がある。

$$\iint dx dv \phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \phi_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \delta_{mn}. \quad (7.38)$$

(7.35) 式を用いると, (7.34) 式は, 次のように表わせることがわかる.

$$\begin{aligned} & {}^B\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', u) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \phi_m(\mathbf{x}', \mathbf{v}') e^{-\alpha_m(t-u)}, \\ & \quad \text{ただし, } t \geq u. \end{aligned} \quad (7.39)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\alpha_m + \alpha_n} \int dx \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle R_{1f}(\mathbf{x}) \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}_0 \chi(\mathbf{v}_0) \phi_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0) \right] \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}_0 \chi(\mathbf{v}_0) \phi_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0) \right]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

上式が, 次の方程式 (Borgwaldt equation) をみたすことは, 一群モデルの (7.27) 式の場合と同様にして証明できる.

$$\begin{aligned} & [B(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \alpha_m] \tilde{\phi}_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &= \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle R_{1f}(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{v}) \left[\int d\mathbf{v}_0 \chi(\mathbf{v}_0) \phi_m^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0) \right]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

7.2 確率分布関数の評価—Pál-Bell 方程式の近似解 (2 又基本モード近似)

ポアソン源のある定常炉における中性子数, 観測量の確率分布の階乗キュムラントは, 5 にのべたように, 中性子家系の分枝図と物理的な対応をつけて定義される多時点積密度分布関数を用いて, 順次, 低次のものから算出できる. 特に, 観測量の 2 次の階乗キュムラント (=分散-期待値) は, Feynman- α 法による炉雑音実験の解析公式であり, また, 2 時点相関関数は, ORNDOFF¹¹⁰⁾ が行ったような Rossi- α 法の解析公式となる. しかしながら, Mogil'ner⁹⁸⁾ 法による炉雑音解析, あるいは, 計数確率分布の測定の解析, または, GODIVA のようなパルス炉の安全評価にとっては, 確率分布の階乗キュムラントは間接量であり, 直接データとの比較ができる分布確率を求めておく必要がある. 原理的には, 階乗キュムラントがわかれば, (5.217)~(5.219) 式を用いて確率を評価することができる. しかしそのためには, まず, 低次のキュムラントから, 順次高次のものを求め, ついで無限の項数をとらなければならない実用的ではない. 近似式ではあるが, 確率分布の評価に実用上便利な母関数にたいする表式を求めておこう.

a) 中性子の存在確率 (非定常炉)

まず, 2 又近似を行なう. これは, 中性子家系図 (Fig. 13 参照) で, 3 以上の分枝線を無視する近似である.

いいかえれば, 方程式 (5.17) 右辺の和を, $j=2$ のみにとどめる近似*である.

$$\begin{aligned} & L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \tilde{G}(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= -\frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{2} v \Sigma_f \left[\int d\mathbf{v}' \tilde{G}(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \chi(\mathbf{v}') \right]^2. \end{aligned} \quad (7.42^*)$$

$$\tilde{G} = 1 - G. \quad (7.43)$$

増倍系の種々な核反応断面積, 幾何学的条件は, 時間的にかわらないとし, 随伴作用素の空間固有関数を求めよう.

$$[\alpha_n^+ + B^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})] \phi_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (7.44)$$

ただし,

$$B^+ = L^+ + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (7.45)$$

また, $-\alpha_i^+$ は, i 番目の固有値である.

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_n^+ = -\alpha_n^+ \phi_n^+$$

同様に, B^+ の随伴作用素 (通常のボルツマン作用素**, cf. (3.8) 式) の固有関数も求めておく.

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_m = -\alpha_m \phi_m$$

$$[-\alpha_m + B(\mathbf{x}, \mathbf{v})] \phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (7.46)$$

(7.44) 式に, ϕ_m を乗じたものから, (7.46) 式に ϕ_n^+ を乗じたものを引き, 全相空間にわたって積分すると, 次の直交関係が得られる.

$$(\alpha_n^+ + \alpha_m) \iint dx dv \phi_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (7.47)$$

ここで, 固有関数のセット $\{\phi_n^+\}$, $\{\phi_m\}$, いずれも, 完全性を満足していると仮定しよう. ϕ_n^+ は, すべての ϕ_m と直交はしないから, (7.47) 式から, 次のことがわかる***.

$$\alpha_n^+ = -\alpha_n. \quad (7.48)$$

また, 次のように正規化することもできる.

$$\iint dx dv \phi_n^+ \phi_m = \delta_{nm}. \quad (7.49)$$

さて, ここで, \tilde{G} を固有関数展開しよう. すなわち,

$$\tilde{G}(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z, t) \phi_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.50)$$

終期条件 (5.22) に上式を用い, 直交関係を利用すると, 展開係数は, 次の終期条件を満足すべきことがわかる.

$$g_n(z, t_i) = (1-z) \iint_{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V} dx dv \phi_n(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.51)$$

(7.50) 式を (7.42) 式に代入し, ϕ_m を乗じて全相空間にわたって積分する. 結果は, 次のようになる.

* 方程式 (5.60) 式に対しては, 右辺における E_0 に対する表式 (5.58) の和を $\sum_{i=0}^1 L_i=2$ のみにとどめる近似である.

方程式 (5.80), (5.99) についても同様に考えられよう.

** 遅発中性子の存在を無視する. したがって, $\langle \nu \rangle$ を $(1-\beta) \langle \nu \rangle$ でおきかえたものを用いる.

*** α_n は, 7.1.2 で用いた α_{n0} に対応するものである.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_m^+ \right] g_m(z, t) \\ &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{2} \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} v \Sigma_f \psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z, t) \psi_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}') \right]^2. \end{aligned} \quad (7.52)$$

g_m に対するこの運動方程式は、簡単にはとけない。そこで、2 叉近似に対して得られた固有関数展開 (7.50) をさらに、近似して、第 1 項のみに和をとどめる。すなわち、基本モード近似を行なう。

$$\bar{G}(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = g_1(z, t) \psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.53)$$

この時、(7.52) は g_1 のみを含む。すなわち、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1^+ \right) g_1(z, t) = \bar{\lambda} g_1^2(z, t). \quad (7.54)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{2} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} v \Sigma_f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ & \quad \times \left[\int d\mathbf{v}' \chi(\mathbf{v}') \psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}') \right]^2. \end{aligned} \quad (7.55)$$

2 叉、基本モード近似のこのような手続きは、BELL¹⁷⁾ が示したものである。Riccati 型の方程式 (7.54) は、すでに一点炉モデルで考察されているもの (cf. Eq. (51) in Ref. 15) と等価である。特解が、 $\alpha_1^+/\bar{\lambda}$ であること、および終期条件 (7.51) を用いると解は、次のように求められる。

$$g_1(z, t) = \frac{-(z-1)e^{-\alpha_1(t-t)}}{1-(z-1)\bar{\lambda}\bar{\psi}_1/\alpha_1(1-e^{-\alpha_1(t-t)})}. \quad (7.56)$$

ここで*、 $\alpha_1 = -\alpha_1^+$ 、また

$$\bar{\psi}_1 = \iint_{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in V} d\mathbf{x} d\mathbf{v} \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.57)$$

したがって、2 叉・基本モード近似の時、時刻 t に相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に 1 箇の中性子を投入することにより起動された非定常な原子炉で、時刻 t_f に領域 V 中に存在する中性子数の確率母関数は、(7.43)、(7.53)、(7.56) 式から次のように表わされる。

$$\begin{aligned} G(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= 1 + \frac{(z-1)\psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})\bar{\psi}_1 e^{-\alpha_1(t-t)}}{1-(z-1)\bar{\lambda}\bar{\psi}_1/\alpha_1(1-e^{-\alpha_1(t-t)})}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

INABA⁷⁷⁾ は、グリーン関数として基本モード近似のもの、すなわち、

$$\begin{aligned} Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t'|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= e^{-\alpha_1(t'-t)} \psi_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

とおいて、2 叉近似で、まず、5.4 に示した手続きで順次階乗モーメントを求め、その結果を (5.103) に代入して、確率母関数を定めている。結果は、(7.58) に一致している。

(7.58) 式から、中性子が N 箇存在する確率は、次のようになることがわかる。

$$P(0, V, t_f|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

* α_1 は、7.1.1 で用いた α_0 、7.1.2 で用いた α_{10} に対応するものである。

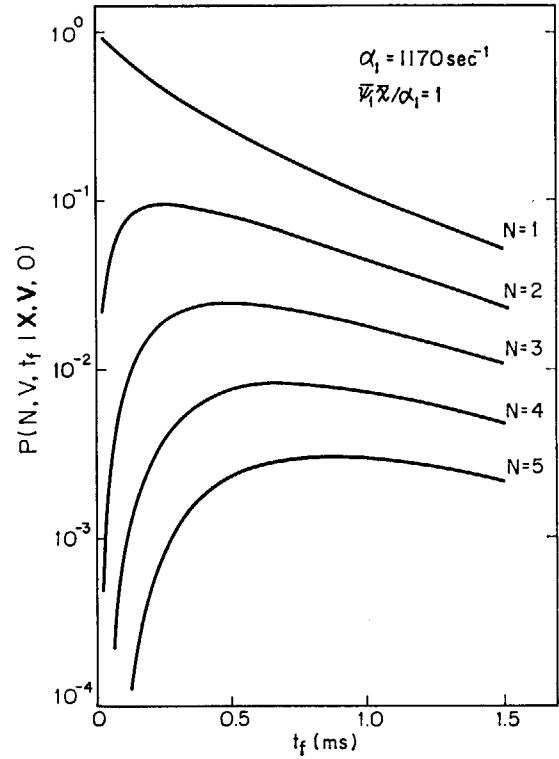


Fig. 28 Probabilities that a neutron born at time $t=0$ will lead to exactly N neutrons at final time t_f . (Normalized by the relation $P(1, V, 0|\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = 1$)*

$$= 1 - \frac{\psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})\bar{\psi}_1 e^{-\alpha_1(t-t)}}{1 + \bar{\lambda}\bar{\psi}_1/\alpha_1(1 - e^{-\alpha_1(t-t)})}. \quad (7.59a)$$

$$\begin{aligned} P(N, V, t_f|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{\psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})\bar{\psi}_1^N (\bar{\lambda}/\alpha_1)^{N-1} (1 - e^{-\alpha_1(t-t)})^{N-1} e^{-\alpha_1(t-t)}}{[1 + \bar{\lambda}\bar{\psi}_1/\alpha_1(1 - e^{-\alpha_1(t-t)})]^{N+1}}, \\ N &\geq 1. \end{aligned} \quad (7.59b)$$

Fig. 28 に

$$P(1, V, 0|\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = 1$$

とおいた場合の存在確率を示す。

○ 中性子の存在確率 (定常炉)

さて、ポアソン源が、無限の過去から存在し、中性子場は、定常になっているとしよう。この時、領域 V 中に存在する中性子数の確率母関数は、(5.102)、(7.58) 式を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} G(z|S) &= \exp \left[\int_{-\infty}^{t_f} dt' \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' S(\mathbf{x}') \chi_s(\mathbf{v}') \right. \\ & \quad \left. \times (G(z|\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) - 1) \right] \\ &= [1 - (z-1)\langle N \rangle / 2\sigma]^{-2\sigma}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

ただし、 $\langle N \rangle$ は領域 V 中の中性子数の期待値。すなわち、

$$\langle N \rangle = \bar{S}/\alpha_1 \bar{\psi}_1. \quad (7.61)$$

また

$$\sigma = \frac{\bar{S}}{2\bar{\lambda}} \quad (7.62)$$

* Reproduced from Ref. (77)

$$\bar{S} = \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' S(\mathbf{x}') \chi_s(\mathbf{v}') \psi_1^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}'). \quad (7.63)$$

なお、基本モード近似では、中性子数の平均分布は、次のように書ける。

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \bar{S} / \alpha_1 \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.64)$$

(7.60) を用いて、確率分布を定めると、次のようになる。

$$P(0, V|S) = [1 + \langle N \rangle / 2\sigma]^{-2\sigma}. \quad (7.65a)$$

$$P(1, V|S) = \langle N \rangle [1 + \langle N \rangle / 2\sigma]^{-2\sigma-1}. \quad (7.65b)$$

$$P(N, V|S) = (2\sigma)^{-N} \frac{\Gamma_m(N+2\sigma\langle N \rangle)}{\Gamma_m(2\sigma\langle N \rangle)} [1 + \langle N \rangle / (2\sigma)]^{-(2\sigma+N)}, \quad (7.65c)$$

$N \geq 1$ の時.

ここで、 $\Gamma_m(y)$ は、ガンマ関数、すなわち、次の漸化式を満足する。

$$\Gamma_m(y+1) = y \Gamma_m(y). \quad (7.66)$$

特に、 z が 1 に近く、 N が大きい時、確率母関数は次のように、ラプラス変換で与えられると近似的にみなしてよい¹⁵⁾。

$$G(z|S) = \sum_{N=1}^{\infty} z^N P(N, V|S) \\ \approx \int_0^{\infty} dN e^{N \ln z} P(N, V|S).$$

したがって、確率分布は次のような逆ラプラス変換で与えられる。

$$P(N, V|S) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(z|S) e^{-N \ln z} d(-\ln z). \quad (7.67)$$

(7.60) 式で与えられる母関数を

$$G(z|S) \approx [1 - \langle N \rangle / 2\sigma \ln z]^{-2\sigma}.$$

とおいて、(7.67) 式に代入すると、 N が大きい時の確率分布は、次のようになる。

$$P(N, V|S) dN = \left(\frac{2\sigma N}{\langle N \rangle} \right)^{2\sigma-1} \frac{2\sigma dN}{\langle N \rangle \Gamma_m(2\sigma)} \\ \times \exp\left[-\frac{2\sigma N}{\langle N \rangle} \right]. \quad (7.68)$$

すなわち、 $N/\langle N \rangle$ は、指数 $(2\sigma-1)$ のガンマ分布にしたがう。分散は、 $\langle N \rangle^2 / (2\sigma)$ である。

一群均質炉では、 σ は、

$$\sigma = \frac{\bar{S}}{2\bar{\lambda}} \\ = \frac{\langle \nu \rangle}{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle} \frac{1 - (1-\beta)k_1}{k_1 g_{11}} \frac{P l_t}{3.2 \times 10^{-14}}$$

と表わされる。ここで、 g_{11} は、(6.148) 式で定義した一点炉モデルに対する補正因子、 P は、kilo-watt 単位で表わした炉出力である。中性子源 \bar{S} が大きく σ の値が、1 に比べて十分大きいとみなせる場合、(7.68) 式は、次のように近似できる。

$$P(x, V|S) dx = \left[1 + \frac{2\sigma}{2\sigma-1} x \right]^{2\sigma-1} e^{-2\sigma x} P_{\max} dx \\ \approx e^{-\sigma x^2} P_{\max} dx$$

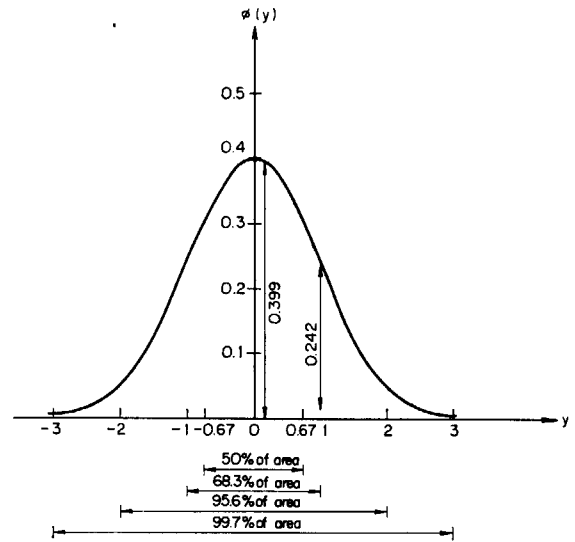


Fig. 29 Probability distribution of neutrons in a steadily operating core (the normal distribution)
 $y = (N - N_{\max}) / \sqrt{2\sigma} / \langle N \rangle$, $N_{\max} = \langle N \rangle (2\sigma - 1) / 2\sigma$

$$= \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} e^{-(\sqrt{\sigma} x)^2} dx. \quad (7.68b)$$

ここで

$$x = \frac{N}{\langle N \rangle} - x_{\max}. \quad (7.69)$$

ピークの位置 $x_{\max} = N_{\max} / \langle N \rangle = (2\sigma - 1) / 2\sigma \approx 1$ であり、そこでの確率の大きさを P_{\max} とした。(7.68b) 式から、中性子源 \bar{S} が大きい場合、分布は、ピークの位置 N_{\max} を中心とするガウス分布とみなしてさしつかえないことがわかる。Fig. 29 に、ガウス分布の図を示す。(7.68b) と対比させるためには、座標 y を $\sqrt{2\sigma} x$ とよみかえればよい。

c) 観測量の確率分布 (非定常炉)

観測量の確率母関数に対しても、同様な手続きを用いる。遅発中性子の存在を無視し、検出反応の際、中性子は放出されず、また反応 1 回当たり 1 単位の観測量が常に得られるとしよう。基本モード近似を行なう。

$$\tilde{G}(z_1, z_2, \dots, z_J | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \equiv 1 - G(z_1, z_2, \dots, z_J | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \approx g_1(z_1, z_2, \dots, z_J, t) \psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.70)$$

g_1 の従う方程式は、2 叉近似で次のように表わされる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_1 \right] g_1 = \bar{\lambda} g_1^2 + \sum_{j=1}^J (z_j - 1) \bar{\epsilon}^{(j)} \Delta_j'. \quad (7.71)$$

ここで、

$$\bar{\epsilon}^{(j)} = \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} v \Sigma_{d_j}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.72)$$

$$\Delta_j' = 1; \quad t_{ij} \leq t \leq t_{ij} + T_j \\ = 0; \quad \text{上記以外の時.} \quad (7.73)$$

ただし、 T_j は、 j 番目の観測時間間隔。

終期条件は、最後の観測を終った時刻 t_i において、

次のように与えられる。

$$g_1(z_1, z_2, \dots, z_J; t_i) = 0. \quad (7.74)$$

(7.71) の方程式は、一点炉モデルですでに PÁL が考察しているもの [cf. Eq. (4.8) in Ref. (119)] あるいは、BABALA が考察しているもの [cf. Eq. (16) in Ref. (6) (1967 年)] と等価である。一般に、終期条件

$$g(t_i) = g_i$$

を満足する Riccati の方程式

$$\frac{d}{dt}g = \alpha g + \chi g^2$$

の解は、次のようになる。

$$g(t) = \frac{g_i e^{-\alpha(t-t_i)}}{1 + g_i \chi / \alpha (1 - e^{-\alpha(t-t_i)})}. \quad (7.75)$$

また、終期条件

$$g(t_i) = g_i$$

を満足する方程式

$$\frac{d}{dt}g(t) = \alpha g + \chi g^2 + \varepsilon$$

の場合には、解は、次のようになる。

$$g(t) = \frac{s_2(g_i - s_1) - s_1(g_i - s_2) e^{-\alpha \zeta(t-t_i)}}{(g_i - s_2) - (g_i - s_1) e^{-\alpha \zeta(t-t_i)}}. \quad (7.76)$$

ここで、 s_1, s_2 は、特解で、次のように与えられる。

$$s_1 = \frac{\alpha}{2\chi}(\zeta - 1).$$

$$s_2 = -\frac{\alpha}{2\chi}(\zeta + 1).$$

また、

$$\zeta = (1 - 4\varepsilon\chi/\alpha^2)^{1/2}.$$

方程式 (7.71) の解は、終期条件 (7.74) を用いた解 (7.76) から始めて、順次、(7.75) または (7.76) の形で求められる。

特に、 $J=1$ 、すなわち、一時点観測の場合には、まず、

$$g_1(z, t) = s_1 s_2 \frac{e^{-\alpha_1 \zeta(t+T-t)} - 1}{s_1 e^{-\alpha_1 \zeta(t+T-t)} - s_2}, \quad (7.77 a)$$

ただし、 $t_i \leq t \leq t_i + T$.

ついで、終期条件

$$g_i = s_1 s_2 \frac{e^{-\alpha_1 \zeta T} - 1}{s_1 e^{-\alpha_1 \zeta T} - s_2}. \quad (7.78)$$

を用いて、

$$g_1(z, t) = \frac{g_i e^{-\alpha_1 \zeta(t-t_i)}}{1 + g_i \bar{\chi} / \alpha_1 (1 - e^{-\alpha_1 \zeta(t-t_i)})}, \quad (7.77 b)$$

ただし、 $t \leq t_i$

が得られる。ここで

$$s_1 = \frac{\alpha_1}{2\bar{\chi}}(\zeta - 1). \quad (7.79)$$

$$s_2 = -\frac{\alpha_1}{2\bar{\chi}}(\zeta + 1). \quad (7.80)$$

$$\zeta = [1 - 4(z-1)\bar{\varepsilon}\bar{\chi}/\alpha_1^2]^{1/2}. \quad (7.81)$$

特に、 $\alpha_1 \zeta T \ll 1$ である場合には、(7.77 b) 式を用いて、観測量の確率母関数 (5.69) 式は、次のように表わすことができる。

$$G(z, V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 + \frac{(z-1)\phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})\bar{\varepsilon} T e^{-\alpha_1(t-t_i)}}{1 - (z-1)\bar{\varepsilon} T \bar{\chi} / \alpha_1 (1 - e^{-\alpha_1(t-t_i)})},$$

ただし、 $t \leq t_i$ および $\alpha_1 \zeta T \ll 1$ の時。 (7.82)

これから、 N 単位の観測量が得られる確率が次のように求まる。

$$P(0, V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 - \frac{\phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})\bar{\varepsilon} T e^{-\alpha_1(t-t_i)}}{1 + \bar{\varepsilon} T \bar{\chi} / \alpha_1 (1 - e^{-\alpha_1(t-t_i)})}. \quad (7.83 a)$$

$$P(N, V_d, t_i, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})(\bar{\varepsilon} T)^N (\bar{\chi} / \alpha_1)^{N-1}}{[1 + \bar{\varepsilon} T \bar{\chi} / \alpha_1 (1 - e^{-\alpha_1(t-t_i)})]^{N+1}} \times [1 - e^{-\alpha_1(t-t_i)}]^{N-1} e^{-\alpha_1(t-t_i)}. \quad (7.83 b)$$

Fig. 30 に、

$$P(1, V_d, 0, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = 1$$

とおいた場合の確率を示す。

一方、観測時間 T が十分長い場合には、(7.77 a) 式から

$$g_1(z, t) = s_1. \quad (7.84)$$

したがって、確率母関数は、次のように表わせる。

$$G(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = 1 - g_1(z, 0) \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 1 - \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\alpha_1}{2\bar{\chi}} \times [\sqrt{1 - 4(z-1)\bar{\varepsilon}\bar{\chi}/\alpha_1^2} - 1],$$

ただし、 $T \rightarrow \infty$ の場合。 (7.85)

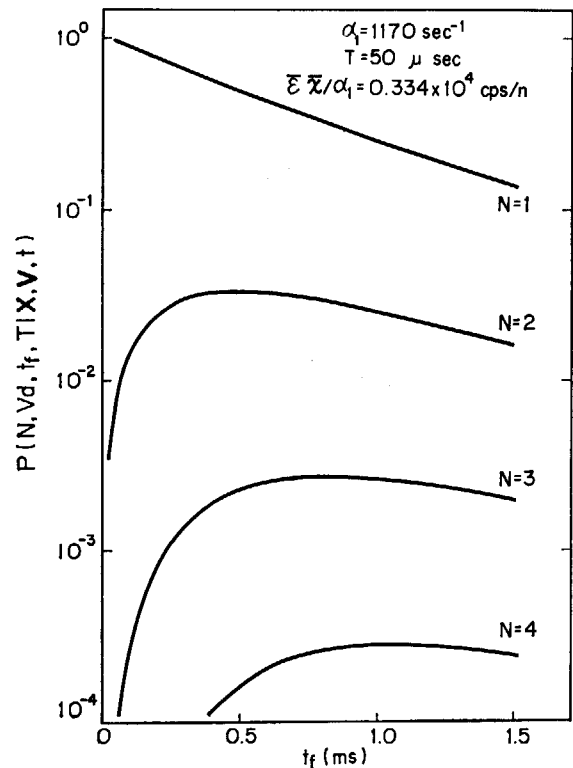


Fig. 30 Probabilities of obtaining exactly N counts from a detector between t_f and $t_f + T$ due to a single neutron born at time $t=0$ (normalized by $P(1, V_d, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = 1$)*

* Reproduced from Ref. (77)

これから、時刻 $t=0$ に1箇の中性子を場所 \mathbf{x}, \mathbf{v} に投入した時、検出器が、 $t=\infty$ までに検出する観測量が N 単位である確率が、次のように求まる。

$$P(0, V_d, \infty, \infty | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = 1 - \phi^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\alpha_1}{2\bar{\lambda}} [V\sqrt{1+4\bar{\epsilon}\bar{\lambda}/\alpha_1^2} - 1]. \quad (7.86a)$$

$$P(1, V_d, \infty, \infty | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\bar{\epsilon}}{V\sqrt{\alpha_1^2 + 4\bar{\epsilon}\bar{\lambda}}}. \quad (7.86b)$$

$$P(N, V_d, \infty, \infty | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \bar{\epsilon} / \alpha_1 [(2N-3)!!] (2\bar{\epsilon}\bar{\lambda})^{N-1} \times [\alpha_1^2 + 4\bar{\epsilon}\bar{\lambda}]^{-(2N-1)/2}, \quad (7.86c)$$

ただし、

$$\begin{aligned} N!! &= N(N-2)(N-4)\cdots 4 \times 2; \quad N=\text{偶数の時}, \\ &= N(N-2)(N-4)\cdots 5 \times 3; \quad N=\text{奇数の時}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Fig. 31 に、時刻 $t=0$ に投入した1箇の中性子が、 N 単位の検出量をうみだす確率を示す。なお、そこでの理論値は、一点炉モデルでの値である。

すなわち、中性子エネルギーを単色とし、均質炉を想定して、

$$\bar{\epsilon}\bar{\lambda} = \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{2L^2} g_{11} \frac{\int d\mathbf{x} \nu \Sigma_d(\mathbf{x}) \Psi_1(\mathbf{x})}{\int d\mathbf{x} \nu \Sigma_f \Psi_1(\mathbf{x})} \quad (7.88)$$

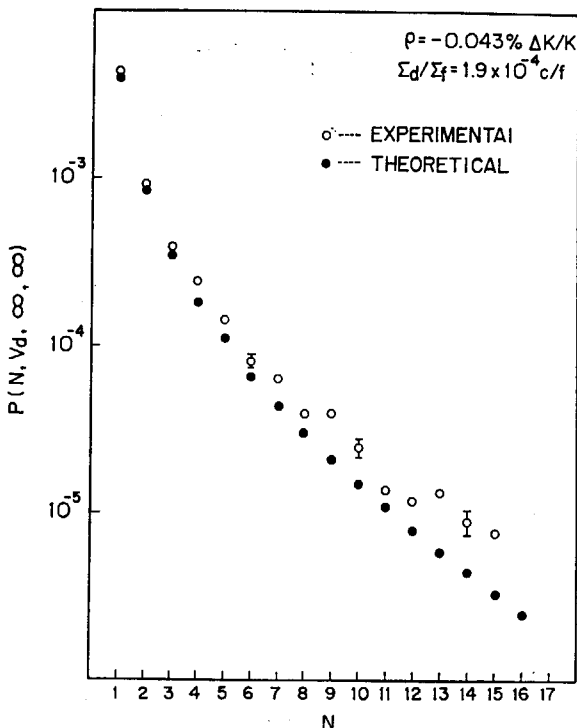


Fig. 31 Probabilities of obtaining exactly N counts per source neutron when the detection interval is infinitely long*

* Reproduced from Ref. (75)

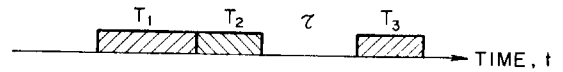


Fig. 32 Time scale of the "three-intervals" probability generating function

とおき、さらに検出器断面積は、炉内に一様に分布している事、また、幾何学的因子 g_{11} (cf. Eq. (6.148)) を、1とおいたこと*に対応している。実験は、30 cm 厚の天然ウラン・ブランケットで囲まれた 20% 濃縮ウラン金属 (~ 100 kg ^{235}U) 炉心から構成された FCA-I-1 で行なわれたものである。

d) 観測量の確率分布 (定常炉)

ポアソン源があって、炉は定常に保たれているとしよう。観測は、Fig. 32 のように、始め T_1 時間行ない、続いて T_2 時間、さらに τ 時間において T_3 時間観測したとしよう。これは、Rossi- α 実験を模擬したものである [cf. Ref. 6 (1967年)]

この時の、観測量の確率母関数は、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \ln G(z_1, z_2, z_3 | S) &= - \int_{-\infty}^{t_1+T_1} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} S(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \tilde{G}(z_1, z_2, z_3 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= - \frac{\bar{S}}{2\bar{\lambda}} [(\zeta_1-1)\alpha_1 T_1 + (\zeta_2-1)\alpha_1 T_2 + (\zeta_3-1)\alpha_1 T_3 \\ &\quad + 2 \ln \frac{e_3(e_2 e_1 - b_2 b_1) - 2 b_3(b_2 d_1 + a_2 b_1) e^{-\alpha_1 \tau}}{64 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}]. \end{aligned} \quad (7.89)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_i &= (\zeta_i - 1) + (\zeta_i + 1) - \alpha_i \zeta_i T_i \\ b_i &= (\zeta_i^2 - 1) (1 - e^{-\alpha_i \zeta_i T_i}) \\ d_i &= (\zeta_i + 1) + (\zeta_i - 1) e^{-\alpha_i \zeta_i T_i} \\ e_i &= (\zeta_i + 1)^2 - (\zeta_i - 1)^2 e^{-\alpha_i \zeta_i T_i} \\ \zeta_i &= [1 - 4(z_i - 1) \bar{\epsilon}^{(i)} \bar{\lambda} / \alpha_1^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (7.90)$$

$i = 1, 2, 3.$

BABALA は、一点炉モデルで (7.89) 式と同形のものを求め、これをもとに、Rossi- α 実験解析用の公式の導出⁶⁾、中性子カウント時系列の間隔分布を解析するための公式の導出⁷⁾を行なっている。

特に、 T_1 の間に得られる観測量の確率分布は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \ln G(z_1, 1, 1 | S) &= - \sigma \left[(\zeta_1 - 1) \alpha_1 T_1 + 2 \ln \frac{e_1}{4 \zeta_1} \right]. \end{aligned} \quad (7.91)$$

観測量が、0 である確率 $P_0(T_1)$ は、上式から次のように与えられる。

$$\ln P_0(T_1) = \ln G(0, 1, 1 | S)$$

* 炉体積を V_i とした時、
 $\Psi_1(\mathbf{x}) = \Psi_1^+(\mathbf{x}) = \text{Const.} = V_i^{-1/2}$

とおいたことに相当する。

$$= -C_0 T \frac{2}{\zeta_0 + 1} \left[1 + \frac{2}{(\zeta_0 - 1)\alpha_1 T_1} \times \ln \frac{(\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 e^{-\alpha_1 \zeta_0 T_1}}{4\zeta_0} \right] \quad (7.92)$$

ここで

$$\zeta_0 = [1 + 4\bar{\epsilon}^{(1)}\bar{\lambda}/\alpha_1^2]^{1/2} \quad (7.93)$$

また,

$$C_0 = \frac{1}{2} \sigma(\zeta_0^2 - 1)\alpha_1 = \bar{\epsilon}^{(1)}\bar{S}/\alpha_1 \quad (7.94)$$

ところが、この C_0 は、平均の検出率 C_1 でなければならない。

T_1 を十分小さくし、 ΔT とおくと、この間に2箇以上検出カウントがある確率は、 $(\Delta T)^2$ 以上の高次の無限小になり、1箇ある確率 $P_1(\Delta T)$ に比べて無視できるはずである (Ramakrishnan の仮定)。したがって、 ΔT の間に得られる平均のカウント数は、

$$C_1 \Delta T = \sum_{N=0}^{\infty} N P_N(\Delta T) = P_1(\Delta T) + O(\Delta T)^2$$

という関係をみます。ここで、 C_1 は、単位時間当たり得られるカウント数の期待値である。確率 $P_N(\Delta T)$ は

$$\sum_{N=0}^{\infty} P_N(\Delta T) = 1$$

という規格化条件をみたしていることを考え合わせると、 ΔT の間に検出カウントのない確率 $P_0(\Delta T)$ は、次のように書けることがわかる。

$$P_0(\Delta T) = 1 - C_1 \Delta T + O(\Delta T)^2$$

したがって、 $P_0(T)$ の $T=0$ における微係数は、次の条件を満足していなければならない。

$$\left. \frac{d}{dT} P_0(T) \right|_{T=0} = -C_1 \quad (7.95)$$

一方、(7.92) 式からは、

$$\left. \frac{d}{dT} P_0(T) \right|_{T=0} = -C_0$$

が得られる。この C_0 は、平均の検出率 C_1 のはずである*。(7.92) 式の導出の際、遅発中性子の寄与を無視してきたが、その効果を含めると、 C_0 が C_1 であることが確かめられるであろう。以後の議論では、したがって、 C_0 を C_1 として取り扱う。

(7.92) 式は、Mogil'ner 法による雑音解析の背景になる公式で、一点炉モデルですでに、ZOLOTUKHIN and MOGIL'NER [cf. Ref. 159 (1963年)], PÁL¹¹⁹⁾ が求めているものと同形である。

さらに、ZOLOTUKHIN らは、平均の観測量 $\langle N \rangle$ が十分少ない時、観測量が N である確率 $P_N(T)$ にたいする近似式も (7.91) から求めている。

* このことは、また、(7.91) 式の確率母関数を用い、

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \ln G(z, 1, 1 | S) \right|_{z_1=1} = C_1 T$$

でなければならないことから確かめられる。

時間差 τ だけ離して、2回、それぞれ T_2, T_3 時間観測した時得られる観測量の確率母関数は、(7.89) 式で、 $z_1=1$ とおけばよい。一方、2つの検出器を用いて同時に、 T_1 時間観測した時の確率母関数は、(7.91) 式で、 ζ_1 を、次のようにおきかえればよい。

$$[(1 - 4((z_1 - 1)\bar{\epsilon}^{(1)} + (z_2 - 1)\bar{\epsilon}^{(2)})\bar{\lambda}/\alpha_1^2)]^{1/2}$$

e) 自発核分裂の効果

自発核分裂以外に外部源のない場合、観測時間 T の間に得られる検出カウント数の確率母関数は、(5.101) 式を用いると次のように与えられることがわかる。

$$\ln G(z | S) = \int_{-\infty}^{t+T} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \left[\sum_{\nu_0=0}^{\infty} p_s(\nu_0) \times \left\{ \int d\mathbf{v} \chi_s(\mathbf{v}) G(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right\}^{\nu_0} - 1 \right] \quad (7.96)$$

ここで、 $S(\mathbf{x})$ は、場所 \mathbf{x} のまわりの単位体積中におこる平均の自発核分裂率、 $p_s(\nu_0)$ は、自発核分裂反応1回当たり放出される二次即発中性子数 ν_0 の確率分布、 $\chi_s(\mathbf{v})$ は、二次中性子の速度分布を表す。一方、 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に放出された1箇の中性子により起動された非定常炉における検出カウント数の確率母関数 $G(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は、2又基本モード近似では、(7.77a, b) 式で与えられている $g_1(z, t)$ を用いて、次のように表わせる。

$$G(z | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 - g_1(z, t) \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (7.97)$$

さて、 $p_s(\nu)$ の母関数を $(z-1)$ のまわりで展開して始めの3項までとる。すなわち、3又以上の高次の分枝反応を無視する。この時

$$\sum_{\nu_0=0}^{\infty} p_s(\nu_0) X^{\nu_0} - 1 = \langle \nu_{s0} \rangle (X - 1) + \frac{\langle \nu_{s0}(\nu_{s0} - 1) \rangle}{2} (X - 1)^2 \quad (7.98)$$

とおける。

(7.97), (7.98) 式を用いて、(7.96) 式右辺の積分を実行すると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \ln G(z | S) &= -\frac{\bar{S} \langle \nu_{s0} \rangle}{2\bar{\lambda}} \left[(\zeta_1 - 1)\alpha_1 T + 2 \ln \frac{e_1}{4\zeta_1} \right] \\ &\quad - \frac{\bar{S}_2 \langle \nu_{s0}(\nu_{s0} - 1) \rangle \alpha_1}{4\bar{\lambda}^2} \left[-\frac{(\zeta_1 - 1)^2}{2} \alpha_1 T + 2 \ln \frac{e_1}{4\zeta_1} \right] \end{aligned} \quad (7.99a)$$

ここで、

$$\bar{S} = \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} S(\mathbf{x}) \chi_s(\mathbf{v}) \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (7.100)$$

$$\bar{S}_2 = \iint d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \left[\int d\mathbf{v} \chi_s(\mathbf{v}) \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right]^2 \quad (7.101)$$

いま、1エネルギー群拡散均質モデルを用い、かつ、自発核分裂と誘導核分裂により生ずる二次中性子数のモーメントが等しい、すなわち

$$\langle \nu_{s0}(\nu_{s0} - 1) \rangle = \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle$$

と仮定しよう。自発核分裂率の分布 $S(\mathbf{x})$ は、定数 S_0 と

する。

また、観測時間幅 T は、短かく、遅発中性子は、即発中性子とは独立な外部源として加えることにしよう。すなわち、(7.100), (7.101) 式で、 $S(\mathbf{x})$ を次のようにおきかえる。

$$S(\mathbf{x}) \rightarrow S_0 + \beta R_{1f}(\mathbf{x})$$

ここで、 $R_{1f}(\mathbf{x})$ は誘導核分裂率である。定常状態での中性子数の期待値 $f_{1s}(\mathbf{x})$ が、

$$f_{1s}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \nu \rangle S_0 L_1}{1 - k_1} \Psi_1(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x}' \Psi_1(\mathbf{x}')$$

で与えられることを用いると (cf. Eq. (6.143)), $R_{1f}(\mathbf{x})$ は次のようになる。

$$R_{1f}(\mathbf{x}) = \frac{k_1 S_0}{1 - k_1} \Psi_1(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x}' \Psi_1(\mathbf{x}')$$

ここで、 k_1 は、実効増倍率 (cf. Eq. (6.114)) である。また、一群拡散モデルでは、 ψ_1 と ψ_1^+ とが等しいから、

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \psi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &\equiv \Psi_1(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

とおいた。 $\Psi_1(\mathbf{x})$ は、Helmholtz 方程式 (6.109) の基本解である。

このようなおきかえを用いると、(7.99a) 式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \ln G(z|S) &= C_1 T (z-1) \frac{2}{\zeta_1 + 1} \left[1 + \frac{2}{(\zeta_1 - 1) \alpha_1 T} \ln \frac{e_1}{4\zeta_1} \right] \\ &\quad \times \frac{1 - k_1 + k_1 q_{11}}{k_1 q_{11}} - C_1 T (z-1) \frac{1 - k_1 + \beta k_1 q_{11}}{k_1 q_{11}}. \end{aligned} \quad (7.99b)$$

ただし、ここで、 C_1 は、平均の検出率、すなわち、

$$C_1 = \int d\mathbf{x} v \Sigma_d(\mathbf{x}) f_{1s}(\mathbf{x})$$

また、 q_{11} は、(6.148) 式で定義した幾何学的因子である。

(7.99b) 式から得られる分散の値は、(7.23) 式の即発中性子成分、あるいは、後に得られる (7.195) 式と一致するが、期待値は、 $(1 - \beta) C_1 T$ となり、また

$$\left. \frac{d}{dT} P_0(T) \right|_{T=0} = -(1 - \beta) C_1$$

となる。この難点は、(7.99b) 式右辺第2項に現われる $\beta k_1 q_{11}$ を落せば救われる。遅発中性子の効果を厳密にとりいれた計算を実行すれば、このことが確かめられるであろう。

したがって、 T 時間の観測でカウントのない確率 $P_0(T)$ は、自発核分裂以外に外部源のない場合、2又基本モード近似で次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \ln P_0(T) &= -C_1 T \frac{2}{\zeta_0 + 1} \left[1 + \frac{2}{(\zeta_0 - 1) \alpha_1 T} \right] \\ &\quad \times \ln \frac{(\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 e^{-\alpha_1 \zeta_0 T}}{4\zeta_0} \end{aligned}$$

$$\times \frac{1 - k_1 + k_1 q_{11}}{k_1 q_{11}} + C_1 T \frac{1 - k_1}{k_1 q_{11}}. \quad (7.102)$$

なお、本節で行なった2又近似は、分散、2時点相関関数、自己および相互スペクトル密度に関しては正しい結果を与える。核分裂に伴ない発生する3又以上の分枝過程の存在は、運動方程式が3次以上の非線型性をもつようになるので、5でのベタモーメント展開の形で考慮していく方法がとられる。

これに対して、Kolmogorov の前向き方程式に対応する Courant-Wallace 方程式は、(3.12) 式に示したように線型であり、その解を求めることは可能である⁸²⁾。

また、高叉分枝過程をとりいれた実験解析公式の表示を求めることもできる⁸⁶⁾。

7.3 待ち時間分布の解析公式

検出カウントが得られるまでの待ち時間分布の実験解析には、3つの種類がある。

A. ある検出カウント $-a$ により、時間分析器をスタートさせ、次の検出カウント $-b$ があるまでの待ち時間 T の分布 (count-to-count interval distribution) $P_{cc}(T)$ を測定する。検出カウント $-b$ が得られると同時に、時間分析器のスイープは中断させ、再スタートする。すなわち、あらゆる検出カウントが起点となる。

B. 時間分析器の起動はランダムに行ない*、検出カウントのあるまでの待ち時間 T の分布 (random origin interval distribution) $P_{ro}(T)$ を測定する。

C. 時間分析器の起動は、ランダムに行ない*、待ち時間 T の間に1度も検出カウントが存在しない確率 (zero-probability) $P_0(T)$ を測定する。

A, B の実験法は、BABALA⁷⁾ により提案されたものであり、C の実験法は、MOGIL'NER and ZOLOTUKHIN⁹⁸⁾ の提案したものである。このほかに、検出カウント数が N 箇 ($N=0, 1, 2, \dots$) 得られるまでの所要時間 T の確率分布を測定**したり、一定時間 T に得られるカウント数 N ($=0, 1, 2, \dots$) の確率分布を一気に求めてポアソン分布からのずれを観察しようという試みも行なわれている***。

さて、 $P_{cc}(T)$, $P_{ro}(T)$ および $P_0(T)$ の間には、物理的に密接な関係がある。まず、実験Cにおける $P_0(T)$ は、実験Bにおける検出カウントが、 T 以上の待ち時間

* 何回か反復して行なわれる測定で、起動時刻相互間には、統計的には、ポアソンのもの以外に相関をもたないようにする。

** 成田正邦 “零出力原子炉雑音の時間分布”，JAERI-memo 2427 (1966) (未公開)

*** 葛西峯夫、杉 暉夫，“Count-to-pulse height converter による増倍体系の中性子計数のゆらぎの測定法”，昭和41年日本原子力学会年会要旨集 D49

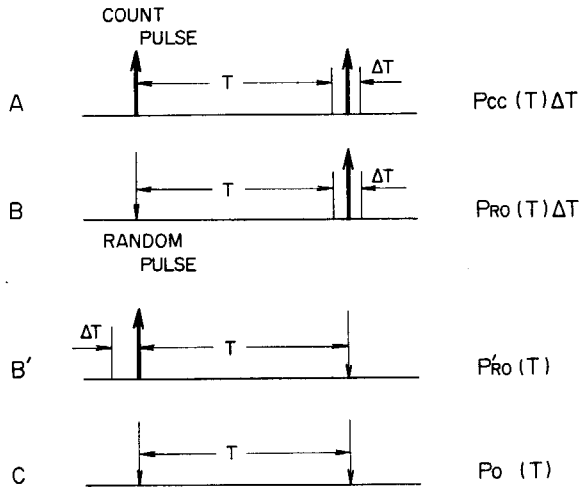


Fig. 33 Time scale of waiting time distribution

で現われる全確率に等しい。すなわち、

$$P_0(T) = \int_T^\infty dt P_{Ro}(t). \quad (7.103)$$

次に、実験 B によく似た次のような思考実験 B' を考えてみよう。

B'. ある検出カウントにより時間分析器を起動させ、起動後、時間 T の間に 1 度も検出カウントが存在しない確率を測定する。起点には、あらゆるカウントを用いる。

この確率 $P_{Ro}'(T)$ は、実験 A における第 2 の検出カウントが T 以上の待ち時間で現われる全確率に等しい。すなわち、

$$P_{Ro}'(T) = \int_T^\infty dt P_{cc}(t). \quad (7.104)$$

ところで、 $P_{Ro}'(T)$ と $P_{Ro}(T)$ とのちがいは、前者が、時間分析器の起動に検出カウントが必要である点である。スイープを打ち切る時間は、 T 時間後であり、この間に検出カウントのない場合の数を起動総数でわったものが、 $P_{Ro}'(T)$ である。これにたいして后者では、ランダムに起動させ、 T 時間後の微小時間 dT の間に始めて検出カウントのある場合の数を起動総数でわったものが $P_{Ro}(T)dT$ となる。そこで、Fig. 33 B, B' のような時間間隔を考えてみる。B' 図において、 ΔT の間に N カウント、 T の間に M カウント得られる結合確率を $P'(N, \Delta T; M, T)$ としよう。 $P_{Ro}'(T)$ は、次のように表わされる。

$$P_{Ro}'(T) = \frac{\sum_{N=1}^{\infty} P'(N, \Delta T; 0, T)}{\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} P'(N, \Delta T; M, T)} \Bigg|_{\Delta T \rightarrow 0}. \quad (7.105)$$

一方、Fig. 33 B において、 T の間に M カウント、 ΔT の間に N カウント得られる結合確率を $P(M, T; N, \Delta T)$ としよう。

ΔT が十分小さい時、 $P'(N, \Delta T; 0, T)$ も $P(0, T; N, \Delta T)$ も、 $(\Delta T)^N$ のオーダーとなって、 $N=1$ の場合を除いては、無視できる。この時、

$$P_{Ro}(T)\Delta T = P(0, T; 1, \Delta T) = P'(1, \Delta T; 0, T), \Delta T \rightarrow 0 \quad (7.106)$$

とおける。(証明は、付録 F にのべる。)

(7.105), (7.106) から、

$$P_{Ro}'(T) = P_{Ro}(T)/C_1. \quad (7.107)$$

であることがわかる。ここで、 C_1 は、平均の検出率であり、

$$C_1 = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} P'(N, \Delta T; M, T)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{P(1, \Delta T)}{\Delta T}$$

で与えられる。上式で $P(N, \Delta T)$ は、時間 ΔT の間に N カウントの観測量が得られる確率である。微小時間 ΔT の間では、

$$P(1, \Delta T) = C_1 \Delta T + O(\Delta T)^2$$

$$P(N, \Delta T) = O(\Delta T)^N, N \geq 2$$

という関係がある。

したがって、まず、(7.103) 式から、

$$R_{Ro}(T) = -\frac{d}{dT} P_0(T). \quad (7.108)$$

が得られる。さらに、(7.104), (7.107) 式から

$$P_{cc}(T) = -\frac{1}{C_1} \frac{d}{dT} P_{Ro}(T) = \frac{1}{C_1} \frac{d^2}{dT^2} P_0(T). \quad (7.109)$$

が得られる。

KURIHARA and SEKIYA⁸⁶⁾ は、この 2 つの関係式を Courant-Wallace 方程式に演算子法を用いて導いている*。

この関係式が、確率母関数を算出するモデルには、無関係に (単純) マルコフ過程であれば、成り立つことは、本報で行った導出の手続きから明らかであろう**。ただし検出器として、核分裂計数管のように、検出反応に伴ない二次中性子を放出するような場合には、マルコフ性は失われ、(7.106) の関係式は成立せず、したがって、(7.109) の関係も成立しなくなる。

さて、 $P_0(T)$ は、2 叉基本モード近似を用いると、(7.92) 式のように与えられる。(7.95) の関係式を満足するように修正すると、結果は、次のようになる。

$$\ln P_0(T) = -C_1 T \frac{2}{\zeta_0 + 1} \left[1 + \frac{2}{(\zeta_0 - 1)\alpha_0 T} \times \ln \frac{(\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 e^{-\alpha_0 T}}{4\zeta_0} \right]. \quad (7.110)$$

ここで、 C_1 は、平均の検出率、 α_0 は、

即発中性子減衰係数*** ($= [1 - k_1(1 - \beta)]/l_1$)、また、均

* $P_{cc}(T)$ と $\frac{d^2}{dT^2} P_0(T)$ との比例定数が、平均の検出率 C_1 の逆数であることは、本報で始めて明らかにされた点である。

** なお、(7.95) 式に示したように、 $\frac{d}{dT} P_0(T) \Big|_{T=0} = -C_1$

という関係もモデルには無関係に成立する。

*** 前節 7.2 で用いた α_1 に対応するものである。

質一群炉においては,

$$\zeta_0 = \left[1 + 2 \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{\alpha_0^2 l_1^2} \varepsilon g_{11} \right]^{1/2} \quad (7.111)$$

となる。ただし、 l_1 は、中性子生成時間 ($= 1/\nu \Sigma_1$)、 g_{11} は、(6.148) 式で定義した幾何学的因子、また、 ε は、検出器効率、すなわち、

$$\varepsilon = \frac{\int dx v \Sigma_d(x) \Psi_1(x)}{\int dx v \Sigma_f(x) \Psi_1(x)} \quad (7.112)$$

である。 $\Psi_1(x)$ は、Helmholtz 方程式 (6.109) の基本解である。

次に、(7.108)、(7.110) 式から

$$P_{RO}(T) = 2C_1 P_0(T) \frac{(\zeta_0 + 1) + (\zeta_0 - 1)e^{-\alpha_0 \zeta_0 T}}{(\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 e^{-\alpha_0 \zeta_0 T}} \quad (7.113)$$

が得られる。

さらに、(7.109) 式を用いると

$$P_{CC}(T) = 2P_{RO}(T) \frac{(\zeta_0 + 1) + (\zeta_0 - 1)e^{-\alpha_0 \zeta_0 T}}{(\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 e^{-\alpha_0 \zeta_0 T}} \times \left[1 + \frac{4\zeta_0^2 \bar{\lambda} e^{-\alpha_0 \zeta_0 T}}{S[(\zeta_0 + 1) + (\zeta_0 - 1)e^{-\alpha_0 \zeta_0 T}]^2} \right] \quad (7.114^*)$$

これらの結果は、BABALA⁷⁾ が確率母関数 (7.89) 式を用い、次式から算出した結果と一致している。

$$P_{RO}(T) = \lim_{T_2 \rightarrow 0} \frac{1}{T_2} [G(0, 1, 1) - G(0, 0, 1)]_{\substack{T_1=T \\ \tau=0}} \quad (7.115)$$

$$P_{CC}(T) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow 0} \frac{1}{T_3} \frac{\sum_{N_1=1}^{\infty} \sum_{N_2=1}^{\infty} P(N_1, 0, N_3)}{\sum_{N_1=1}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \sum_{N_3=0}^{\infty} P(N_1, N_2, N_3)} = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow 0} \frac{1}{T_3} [(G(1, 0, 1) - G(0, 0, 1)) - G(1, 0, 0) + G(0, 0, 0)] / (1 - G(0, 1, 1)) \Big|_{\substack{T_3=T \\ \tau=0}} \quad (7.116)$$

Fig. 34 に、 P_0 、 P_{RO} 、 P_{CC} の関係を示す。放射性物質の自然崩壊のように、反応が全くポアソンの起こる場合を点線で示してある。この場合、

$$P_0(T) = 1 - e^{-C_1 T} \quad (7.117)$$

したがって

$$P_{RO}(T) = P_{CC}(T) = C_1 e^{-C_1 T} \quad (7.118)$$

となる。

Kobayashi⁸²⁾ は、 $P_0(T)$ から、次式で定義される $R(T)$ を用いて、即発中性子の減衰定数 α_0 を測定した。

$$R(T) = 1 + \frac{\ln P_0(T)}{C_1 T}$$

* (7.93)、(7.94) 式を用いて

$$\alpha_0(\zeta_0^2 - 1)/C_1 = \frac{4\bar{\lambda} C_0}{S C_1}$$

さらに、 $C_0 = C_1$ であるという事実を用いた。

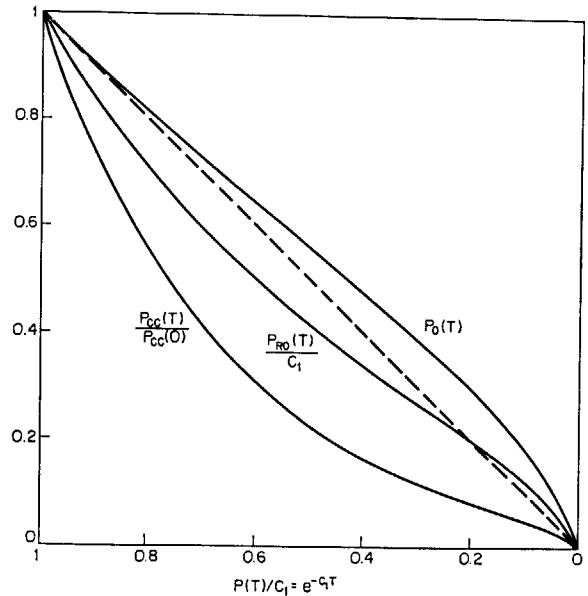


Fig. 34 Waiting time distributions.* (The dashed straight line represents $P(T)/C_1 = e^{-C_1 T}$.)

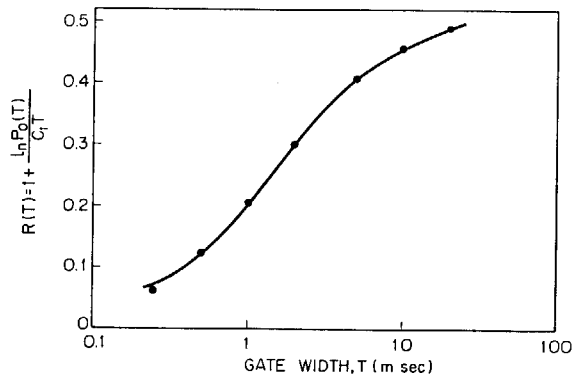


Fig. 35 Measurement by P_0 -method for $\rho = -0.5\%$ (Experimental value of α_0 : $291 \pm 16 \text{ sec}^{-1}$)**

$$R(T) = \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0 + 1} - \frac{4}{(\zeta_0^2 - 1)\alpha_0 T} \times \ln \frac{(\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 e^{-\alpha_0 \zeta_0 T}}{4\zeta_0} \quad (7.119)$$

Fig. 35 に、 $R(T)$ の測定値を示す。実験は、2.6% 濃縮酸化ウランを用いた軽水減速臨界実験装置 TCA で行なわれたものである。少なくとも 2 つの異なる時間幅 T で $R(T)$ の測定を行えば、 α_0 と ζ_0 とが得られる。

Fig. 36 は、待ち時間分布 $P_{RO}(T)$ の観測結果である。(7.113) 式は、次のように表わされる。

$$P_{RO}(T) = C r e^{-Cr T} \left[\frac{e_0}{4\zeta_0} \right]^{-2\sigma} \frac{\alpha_0}{e_0} (\zeta_0 + 1) \quad (7.120)$$

ここで、

$$\alpha_0 = (\zeta_0 - 1) + (\zeta_0 + 1) \exp[-\alpha_0 \zeta_0 T],$$

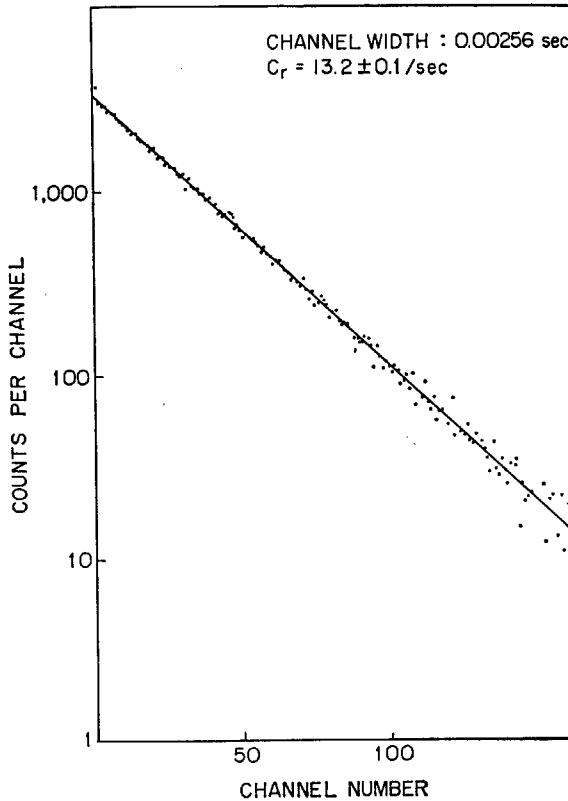
$$e_0 = (\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 \exp[-\alpha_0 \zeta_0 T],$$

また、

$$Cr = \sigma(\zeta_0 - 1)\alpha_0 \quad (7.121a)$$

* Reproduced from Ref. (7)

** Reproduced from Ref. (82)

Fig. 36 Measurement of $P_{Ro}(T)$ *

$$= \frac{2C_1}{\zeta_0 + 1} \quad (7.121b)**$$

ところで、(7.86a) 式を用いると、

$$Cr = \iint dx dv S(\mathbf{x}, \mathbf{v}) [1 - P(0, V_d, \infty, \infty | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)] \quad (7.122)$$

ということがわかる。すなわち、 Cr は、分布 $S(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ をもって、放出された中性子またはその子孫のうち、検出にかかるものの割合を示しており、Izumi⁷⁸⁾ は、これを“chain register rate”と名づけている。(7.120) 式右辺における最後の3項の積は、 $T \geq 2/\alpha_0$ 程度になるとほぼ1に等しくなる。したがって、

$$P_{Ro}(T) \approx Cr e^{-CrT}, \quad T \geq 1/\alpha_0 \quad (7.123)$$

ということがわかる。Fig. 36 からわかるように、 Cr を実験的に定めることは、容易である。中性子数のゆらぎに関する情報を含んだ Cr と、即発中性子減衰係数 α_0 、および、平均の検出率 C_1 は、相関実験の3基本量と呼ばれる⁷⁸⁾。

ポアソン過程における P_{Ro} の表式 (7.118) と比較するとわかるように、 $T \geq 1/\alpha_0$ における表式 (7.123) は、検出カウントを生みだした中性子は、それぞれ、異なる中性子源から生みだされた子孫であることを意味する。 T が小さくなると、 $P_{Ro}(T)$ は、(7.123) 式からずれてよ

り大きくなるが、これは、同一の中性子源から発生した子孫中性子が、“群”をなしていて、そのうちの1箇が検出カウントを生みだすと、ひきつづいて、その群に属する他の中性子が検出カウントを生みだす頻度が高いことを意味している。

検出カウント数が、ちょうど、 N 箇得られるまでの所要時間 T の確率分布 $P_{Ro}(N, T)$ は、次式を用いて算出すればよい。

$$P_{Ro}(N, T) \propto \lim_{T_2 \rightarrow 0} \frac{1}{T_2} \frac{\partial^{N-1}}{\partial z_1^{N-1}} [G(z_1, 1, 1) - G(z_1, 0, 1)]_{\substack{T_1=T \\ \tau=0}} \quad (7.124)$$

比例定数は、規格化条件

$$\int_0^{\infty} dT P_{Ro}(N, T) = 1$$

を満足するように定める。

なお、自然核分裂以外に外部中性子源のない場合の解析公式は、 $P_0(T)$ として (7.102) の表式を用いて求めることができる。

7.4 Rossi- α 法の解析公式

この実験では、ある検出カウント (trigger count と名づけられる) により時間分析器のスweepが始まり、以後、遅れて到達した検出カウント (analysis count) は、それぞれの遅れ時間に応じて、次々に時間分析器の各チャンネルに記録される。最後のチャンネルでの記録が終ると、次のトリガ・カウントの到着をまって、時間分析器の再スweepが行なわれる。

遅延ケーブルを用いて、ORNDORFF¹¹⁰⁾ が高速炉を対象に始めて行なった実験では、トリガ・カウントの到着までの待ち時間はゼロで、検出記録されたカウントは、それ自身、次のアナリシスのためのトリガ・カウントになっている。これを通常、タイプ I の Rossi- α 実験と呼び、これにたいして、待ち時間が、前節 (7.113) 式に示したような確率分布に従う場合を、タイプ II の Rossi- α 実験と呼んでいる。さらに、Iijima⁷⁵⁾ は、第1の検出カウントは見送り、第2の検出カウントがあって始めて、時間分析器のスweepを行う方法 (これを、タイプ II-2 の実験と呼ぼう)、一般には、第 N 番目の検出カウントをトリガ・カウントとする方法 (タイプ II-N) も試みている。

いま、トリガ・カウントにより時間分析器のスweepの行なわれた回数を N_i 、時間分析器の第 n 番目のチャンネルに貯えられた検出カウントの総数を $N(n)$ とする。解析の対象になるのは、第 n チャンネルに検出カウントの存在する確率 P_n であり、これは、次のように定義される。

* Reproduced from Ref. (78)

** 上の式から下の式を導くには (7.114) 式脚注でのべた操作を行なった。相関源 $\tau=0$ 、すなわち、 $\zeta_0=1$ の場合には、 $Cr=C_1$ となるはずである。関係式 (7.121b) から、このことはわかる。

$$P_n = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{N_t} \quad (7.125)$$

タイプ I の実験では, P_n は, 次のように書め改めることができる.

$$P_n \equiv P_I(\tau) \Delta\tau \\ = P(1, t+\tau, \Delta\tau | 1, t, \Delta t). \quad (7.126 a)$$

ここで, τ は, 第 n チャンネルにおける時間推移を表わし, $\Delta\tau$ は, チャンネル幅である, $P(N_2, t+\tau, \Delta\tau | N_1, t, \Delta t)$ は, 時刻 t のまわりの Δt 時間中に N_1 箇の検出カウントがあるという条件のもとで, 時刻 $t+\tau$ のまわりの $\Delta\tau$ 時間中に N_2 箇の検出カウントの存在する条件付き確率を表わす. Bayes's rule* と用いると, これは, 次のように書き改めることができる.

$$P_I(\tau) \Delta\tau = \frac{P(1, t, \Delta t; 1, t+\tau, \Delta\tau)}{P(1, t, \Delta t)}. \quad (7.126 b)$$

ここで, $P(N_1, t, \Delta t; N_2, t+\tau, \Delta\tau)$ は, 時刻 t のまわりの Δt 時間中に N_1 箇の検出カウントが存在し, かつ, 時刻 $t+\tau$ のまわりの $\Delta\tau$ 時間中に検出カウントが N_2 箇存在するという結合確率を表わす. これに対して, $P(N_1, t, \Delta t)$ は, Δt 中に, N_1 箇の検出カウントの存在する確率である.

3 で紹介した Feynman の方法は, もともと, この定義による $P_I(\tau)$ と中性子分枝過程との関連を定めたものであり, その後, 空間, エネルギー依存の効果が入れられるよう拡張が行われた. 時間幅 $\Delta t, \Delta\tau$ が十分短かいとすると, 確率 $P(N_1, t, \Delta t; N_2, t+\tau, \Delta\tau)$ は, $(\Delta t)^{N_1} (\Delta\tau)^{N_2}$ のオーダー, したがって, $N_1 = N_2 = 1$ の場合に比べて, $N_1 + N_2 \geq 3$ の場合は無視できること, また, $P(N_1, t, \Delta t)$ は, $(\Delta t)^{N_1}$ のオーダー, したがって, $N_1 = 1$ の場合に比べて, $N_1 \geq 2$ の場合は無視できるという RAMAKRISHNAN の考えを用いると, (7.126 b) 式は, 次のように書き改めることができる.

$$P_I(\tau) \Delta\tau \\ = \frac{\sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} N_1 N_2 P(N_1, t, \Delta t; N_2, t+\tau, \Delta\tau)}{\sum_{N_1=0}^{\infty} N_1 P(N_1, t, \Delta t)} \\ = \frac{\gamma_{2c}(t, t+\tau) \Delta t \Delta\tau}{C_1(t) \Delta t}. \quad (7.126 c)$$

ここで, $\gamma_{2c}(t, t+\tau)$ は, 検出カウントについての 2 時点相関関数, C_1 は平均の検出率である.

あるいは, $P(N_1, t, \Delta t; N_2, t+\tau, \Delta\tau)$ にたいする母関数 $G(z_1, z_2)$ を用いて,

$$P_I(\tau) \Delta\tau = \frac{1}{\langle N_1 \rangle} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} G(z_1, z_2) \Big|_{z_1=z_2=1} \quad (7.126 d)$$

とも表わされる. この定義による $P_I(\tau)$ の導出は, 一点炉モデルで BABALA⁶⁾ により行なわれた.

一方, タイプ II の実験では, トリガ・カウントの現われるまでの待ち時間を考慮しなければならない. 時間分

析器がスイープを終るまでの時間は, 十分長く, スイープの終わった時刻, いいかえれば, 次のトリガ・カウントを受けるために待機し始めた時刻はランダムであり, 統計的には, ポアソンの相関をもつにすぎないものと仮定しよう.

次のような確率を導入する.

$P(N-1, T; N_1, \Delta T; N_2, \tau, \Delta\tau)$: T 時間まって, その間に検出カウントが $(N-1)$ 箇, T 時間後の ΔT 中に N_1 箇, さらに, τ 時間後の $\Delta\tau$ 中に N_2 箇存在する結合確率.

$P(N_2, \tau, \Delta\tau | N-1, T; N_1, \Delta T)$: T 時間まってその間に検出カウントが $(N-1)$ 箇, かつ, T 時間後の ΔT 中に N_1 箇の検出カウントが存在するという条件のもとで, τ 時間後の $\Delta\tau$ 中に N_2 箇の検出パルスが存在するという条件確率.

$P(N-1, T; N_1, \Delta T)$: T 時間中に $(N-1)$ 箇, ΔT 中に N_1 箇存在する結合確率とする.

タイプ II の実験では, T 時間後に始めて, 検出カウントの存在する確率分布についての平均操作が加わり (7.125) 式で定義される P_n は, 次のようになる.

$$P_n \equiv P_{II}(\tau) \Delta\tau \\ = \sum_{T=0}^{\infty} P(1, \tau, \Delta\tau | 0, T; 1, \Delta T) \\ \times P(0, T; 1, \Delta T) \\ = \sum_{T=0}^{\infty} \frac{P(0, T; 1, \Delta T; 1, \tau, \Delta\tau)}{P(0, T; 1, \Delta T)} \\ \times P(0, T; 1, \Delta T). \quad (7.127 a)$$

和 $\sum_{T=0}^{\infty}$ は, $T=0$ から $T=\infty \times \Delta T$ まで行なう.

積分でおきかえると

$$P_{II}(\tau) \Delta\tau = \int_0^{\infty} P(0, T; 1, \Delta T; 1, \tau, \Delta\tau) \Big|_{\Delta T=dT}. \quad (7.127 b)$$

が得られる.

同様に, タイプ II-N の実験では,

$$P_{II-N}(\tau) \Delta\tau = \int_0^{\infty} P(N-1, T; 1, \Delta T; 1, \tau, \Delta\tau) \Big|_{\Delta T=dT}. \quad (7.128 a)$$

(7.127 a) 式は, また, $P(N-1, T; N_1, \Delta T; N_2, \tau, \Delta\tau)$ にたいする確率母関数 $G(z, z_1, z_2)$ を導入し, RAMAKRISHNAN の考えを用いると,

$$P_{II}(\tau) \Delta\tau \\ = \sum_{T=0}^{\infty} \left\{ \sum_{N_1=0}^{\infty} \left(\sum_{N_2=0}^{\infty} N_2 P(0, T; N_1, \Delta T; N_2, \tau, \Delta\tau) \right) \right. \\ \left. - \sum_{N_2=0}^{\infty} N_2 P(0, T; 0, \Delta T; N_2, \tau, \Delta\tau) \right\} \\ = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z_2} [G(0, 1, z_2) - G(0, 0, z_2)] \Big|_{z_2=1} \Big|_{\Delta T=dT}. \quad (7.127 c)$$

と表わすこともできる. さらにまた,

* 附録 A 参照

$$P_{II}(\tau) \Delta\tau = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} G(0, z_1, z_2) \Big|_{\substack{z_1=z_2=1 \\ dT=d\tau}} \quad (7.127 d)$$

とおいてもよい。同様に、(7.128a) 式は、次のように現わすこともできる。

$$P_{II-N}(\tau) d\tau = \frac{1}{(N-1)!} \frac{\partial^{N-1}}{\partial z^{N-1}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z_2} [G(z, 1, z_2) - G(z, 0, z_2)] \Big|_{\substack{z=0 \\ z_1=z_2=1 \\ dT=d\tau}} \quad (7.128 b)$$

あるいは、

$$P_{II-N}(\tau) d\tau = \frac{1}{(N-1)!} \frac{\partial^{N-1}}{\partial z^{N-1}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} G(z, z_1, z_2) \Big|_{\substack{z=0 \\ z_1=z_2=1 \\ dT=d\tau}} \quad (7.128 c)$$

電子回路による時間分析器を用いた Rossi- α 実験の結果が、遅延ケーブルを用いて ORNDOFF *et al.*,¹¹⁰⁾ が行なった Rossi- α 実験の解析公式には乗らないことが、実験的に明らかになり (たとえば、文献 (30), (144) 参照), まず、SCHULZE¹³⁵⁾ により、モンテ・カルロ計算が行なわれ、中性子の確率素過程の記述に、誤りがあるのではないことが確められ、ついで、BABALA が、時間分析器の機能の定式化に見落しのあったことを指摘し、Orndoff 型の Rossi- α 実験との差異を、(7.126 d) および (7.127 c) 式を用いて明らかにし、さらに、その物理的内容が IJIMA⁷⁵⁾, IZUMI⁷⁸⁾ により詳細に検討された。

7.4.1 Orndoff 型の Rossi- α 法

これは、(7.126 c) 式の示すように、いわば、2時点相関関数の測定を行なうものである。

定常系では、2時点相関関数 $\Gamma_{2c}(\tau)$ 、スペクトル密度関数 $\Phi(\omega)$ 、一定時間 T の間に得られる検出カウント数の分散 $\sigma_2(T)$ との関連を用いて、(7.126 c) 式は、

$$P_I(\tau) = C_1 + \Gamma_{2c}(\tau)/C_1 = \frac{1}{2\pi C_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi(\omega) e^{-i\omega\tau} = C_1 + \frac{1}{2C_1} \frac{d^2}{dT^2} \sigma_2(T) \Big|_{T=\tau} \quad (7.129)$$

といった関係で結ばれる (付録 A. Wiener-Khinchin の定理、および (7.13) 式参照)。したがって、 $\Phi(\omega)$ や $\sigma_2(T)$ についてすでに、6 および、7.1 で議論してきた事柄を $P_I(\tau)$ の公式の導出に應用できる。零出力炉における 2時点相関関数の一般形は (4.219') で与えられているから、これを用いて、

$$P_I(\tau) = \frac{1}{C_{1T}} \iint_{(x, v) \in V_T} dx dv \iint_{(x', v') \in V_A} dx' dv' \times {}^T A \Gamma(x, v, t, x', v', t + \tau) \quad (7.130)$$

とおいたものが、空間・エネルギー依存の他に、中性子源の放出反応や検出器の検出反応に伴う分枝過程の存在

も考慮した最も一般的な表式となる。上式で、添字 T, A は、それぞれ、トリガ・カウントおよびアナライザ・カウントを生み出す検出器を意味する。

a) 一点炉モデル

検出器として吸収型のものを用い、外部源は、放出反応の際、1箇しか中性子を放出しないと考えると、(7.4) 式で与えられた分散にたいする表式と (7.129) 式から、次の結果をうる。

$$P_I(\tau) = C_1 + \frac{\epsilon}{2\alpha_0 l_i^2} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle e^{-\alpha_0 \tau} \quad (7.131)$$

上式右辺第 2 項は、トリガ・カウントを生みだした中性子とアナライザ・カウントを生みだした中性子がある共通の核分裂により生じた中性子の子孫同士で、互いに相関のあるものの寄与である。振幅 $\epsilon \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle / (2\alpha_0 l_i^2)$ を特に Orndoff の相関項振幅とよび、後に求めるタイプ II の Rossi- α 法の相関項振幅と区別している。これにたいして、第 1 項は、1対の中性子が、異なる中性子源から生みだされた互いに相関のないものの寄与である。FEYNMAN は、この考えを用いて、(7.131) 式を導出している。(cf. 3.2.3)

b) 自発核分裂の効果⁵³⁾

特に、自発核分裂以外に、外部源のない場合、(7.5) 式を用いて、

$$P_I(\tau) = C_1 + \frac{\epsilon}{2\alpha_0 l_i^2 k} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle e^{-\alpha_0 \tau} \quad (7.132)$$

ϵ は、誘導核分裂 1 回当たりの検出率である (cf. (6.13)). (7.131) 式と比べると、右辺第 2 項、いわゆる相関項の振幅が $1/k$ 倍になっていることがわかる。

c) 分裂型計数管の効果

自発核分裂のほかに、さらに、検出反応も、分枝反応である場合には、(7.9) 式を用いて

$$P_I(\tau) = C_1 + \frac{\epsilon \left[1 + \epsilon k + 2 \frac{\langle \nu_0 \rangle^2}{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle} \frac{1 - (1 - \beta)k}{1 - \beta} \right]}{2\alpha_0 l_i^2 k} \times \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle e^{-\alpha_0 \tau} \quad (7.133)$$

d) 遅発中性子の効果*

遅発中性子を考慮すると、(7.131) 式は、(7.10) 式を用いて、次のようになる。

$$P_I(\tau) = C_1 + \frac{\epsilon l^2}{l_i^2} \langle \nu(\nu - 1) \rangle \sum_{j=0}^1 H(\alpha_j) \tilde{H}_j e^{-\alpha_j \tau} \quad (7.134)$$

特に、遅発中性子を一組にまとめて考えてみよう。(7.24) および (7.26) 式を用いて、次の結果を得る。

$$l^2 H(\alpha_0) \tilde{H}_0 = \frac{1}{2\alpha_0} \quad (7.135)$$

* A. FURUHASHI; private communication (1966, March, 22) を参考にした。

$$l^2 H(\alpha_1) \tilde{H}_1 = \frac{\bar{\lambda}^2 - \alpha_1^2}{2\alpha_0^2 \alpha_1} \quad (7.136)$$

反応度を ρ とおくと,

$$\alpha_1 = -\bar{\lambda} \rho / (\rho - \beta).$$

したがって、炉が臨界に近づくと、(7.136) 式で表わされる遅発中性子成分は、急激に大きくなり、臨界炉では発散する。これは、すでに、2, 3 でのべたように、臨界炉では、定常なゆらぎが存在しないことを反映している。しかしながら、即発中性子モードの減衰係数 $\alpha_0 (= (\beta - \rho) / l)$ に比べて、 α_1 は、十分小さく、したがって、遅発中性子モードは、普通の実験では、ほとんど平坦になり、非相関項成分 C_1 にくみいれられてしまう。しかも、 C_1 との比 (いわゆる S/N 比)

$$\begin{aligned} & \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle \varepsilon \frac{\bar{\lambda} - \alpha_1^2}{2\alpha_0^2 \alpha_1 l^2} / C_1 \\ & \approx \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle \bar{\lambda}}{\langle \nu_0 \rangle^2} \frac{1}{2\beta S_0} \end{aligned}$$

は、臨界炉でも発散はせず、概略の数値をいれると、 $2/S_0$ となる。自然核分裂による以外に外部源がないとすれば、 S_0 は 10^4 程度のオーダーであるから (天然ウラン 2 ton), 遅発中性子モードの寄与は、無視できる。ただし、炉が臨界に近く、 $|\rho|$ が、 λl 程度になると、即発中性子成分は、遅発中性子成分より小さくなり、S/N 比が極めて悪くなる。

e) 一群拡散モデル

(7.17), (7.19) および (7.129) 式を用いると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} P_1(\tau) = & C_1 + \frac{\bar{R}_{1f}}{C_1} \langle \nu(\nu - 1) \rangle \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_n l_n \\ & \times \sum_{j=0}^1 H_n(\alpha_{mj}) \tilde{H}_{mj} \\ & \times h_{nm} l_m \varepsilon_m e^{-\alpha_m \tau}. \end{aligned} \quad (7.137)^*$$

特に、均質炉の場合、基本モード、即発中性子成分のみをとりだすと、(7.21) 式を用いて

$$P_1(\tau) = C_1 + \frac{\varepsilon}{2\alpha_{10} l_1^2} g_{11} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle e^{-\alpha_{10} \tau}. \quad (7.138)^{**}$$

が得られる。ここで、 ε は検出器効率で、(7.22) 式で定義される。また、 g_{11} は、(6.148) 式で与えられる幾何学的因子である。

自発核分裂以外に外部源のない場合には (7.23) 式を用いて、

$$P_1(\tau) = C_1 + \frac{\varepsilon}{2\alpha_{10} l_1^2} \frac{1 - k_1 + k_1 g_{11}}{k_1} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle e^{-\alpha_{10} \tau}. \quad (7.139)$$

が得られる。ここで、 k_1 は実効増倍率であり (cf. Eq. (6.114)), (7.132), (7.133) 式で用いた k に対応するものである。

* α_{10} は、(7.131) 以降用いられてきた α_0 に対応するものである。

** (6.6) 式を用いて、 $(1 - \beta)^2 \langle \nu(\nu - 1) \rangle = \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle$ とした。

(7.139) の表式は、Rossi- α 法の解析公式としてよく用いられる。

さて、高次モードにたいする反応度

$$|\rho_n| \gg \beta \quad (n \geq 2 \text{ の時})$$

として、(7.137) 式に現われる $l_n H_n(\alpha_{mj}) \tilde{H}_{mj} l_m$ の大小を比較してみよう。(7.24) ~ (7.26) 式を用いて、次の結果をうる。

$$\begin{aligned} l_n H_n(\alpha_{nj}) \tilde{H}_{mj} l_m & \\ & = \frac{1}{\alpha_{n0} + \alpha_{m0}}; \quad j=0, \quad n \text{ and } m \geq 1 \\ & = \frac{\bar{\lambda} - \alpha_{m1}}{\alpha_{n0} \alpha_{m0}}; \quad j=1, \quad n \text{ and } m \geq 2 \\ & = \frac{(\lambda_1 - \alpha_{m1})(\bar{\lambda} + \alpha_{11})}{2\alpha_{11} \alpha_{10} \alpha_{m0}}; \quad j=n=1, \quad m \geq 2 \\ & = \frac{\bar{\lambda} - \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_{n0}}; \quad j=m=1, \quad n \geq 2 \\ & = \frac{\bar{\lambda}^2 - \alpha_{11}^2}{2\alpha_{10}^2 \alpha_{11}}; \quad j=n=m=1 \end{aligned} \quad (7.140)$$

高次空間モード項 ($n, m \geq 2$) のうちで、即発中性子成分 ($j=0$) と遅発中性子成分 ($j=1$) とを比較すると前者の寄与のほうが大きい。即発中性子成分だけを比較すると基本モード項 ($n=m=1$) に対する高次モード項 ($n+m \geq 3$) の比は、次のようになる。

$$\left| \frac{2\alpha_{10}}{\alpha_{m0} + \alpha_{n0}} \right| < \left| \frac{2\alpha_{10}}{\alpha_{10} + \alpha_{20}} \right| \approx \frac{2(\beta - \rho_1)}{2\beta - \rho_1 - \rho_2}.$$

したがって、原子炉が臨界に近く、 $|\rho_1| = \beta$ のオーダーであれば、この比は、 $\beta / |\rho_2| \ll 1$ となって高次空間モードの寄与は基本モードに比べて十分小さくなる。

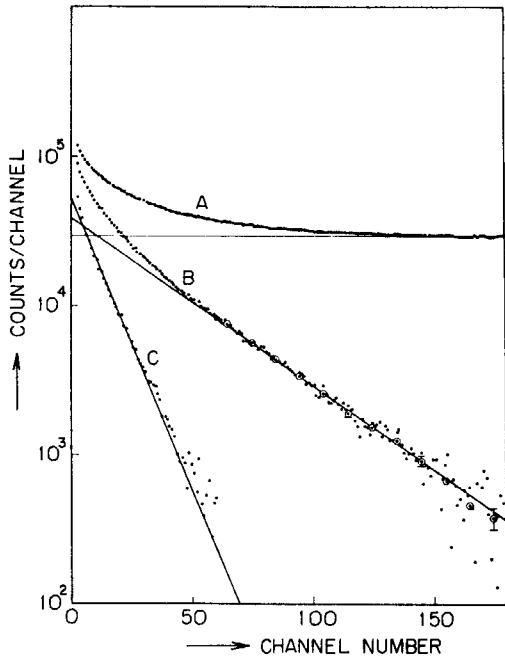
基本モードの遅発中性子成分と即発中性子成分との関係については、(7.134) 式に関連した議論と全く同じことがいえる。しかしながら、遅発中性子成分は、原子炉が臨界から遠ざかるにつれて極端に小さくなり、 $|\rho_1| = \beta$ のオーダーになると、即発中性子成分にたいする比は、 $\lambda l / \beta (= 10^{-3})$ 程度になる。したがって、基本モード項の遅発中性子成分より高次モードの寄与のほうが大きくなる可能性がある。

そこで、実際上は、(7.137) 式の即発中性子成分のみをとりだして解析に用いればよい。(7.140) 式を利用すると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} P_1(\tau) = & C_1 + \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle \\ & \times \frac{\bar{R}_{1f}}{C_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_n h_{nm} \varepsilon_m \frac{e^{-\alpha_{m0} \tau}}{\alpha_{n0} + \alpha_{m0}}. \end{aligned} \quad (7.141)$$

ここで、 \bar{R}_{1f} は、炉単位体積当りの核分裂率、 ε_n, h_{nm} はそれぞれ、(6.119), (6.142) 式で定義したものである。

UKAI *et al.*,¹⁵⁾ は、有限高の円筒形炉で、Iijima *et al.*,⁷⁶⁾ は、立方体炉について、それぞれ行なわれた実験の解析を (7.141) 式を用いて行なっている。Fig. 37 は、立方体炉の中心におかれた検出器による測定結果で、基本モードのほかにも第 3 モードが存在していることがわかる。なお、立方体炉については、SHEFF¹⁴⁰⁾ により、数値解析の結果も報告されている。



CHANNEL WIDTH : 8 μ sec
 A = TOTAL COUNTS
 B = CORRELATED COUNTS
 = A-(RANDOM COUNTS)
 C = B-(FUNDAMENTAL MODE)
 \odot = DATA FROM 10 CHANNELS

Fig. 37 Rossi- α data obtained by a He-filled proportional counter located at the center of a bare cubical core*

一方, BORGWALDT²⁶⁾ は, (7.141) 式における 2 重和を行なうのを避けて,

$$P_1(\tau) = C_1 + \sum_{m=1} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' v \Sigma_d(\mathbf{x}) \times \tilde{\Psi}_m(\mathbf{x}) \Psi_m(\mathbf{x}') v \Sigma_d(\mathbf{x}') / C_1. \quad (7.142)$$

を用いて, 反射体付高速炉での Rossi- α 解析を行っている. 上式で, $\Psi_m(\mathbf{x})$ は, 第 m 空間モード, $\tilde{\Psi}_m$ は, 方程式 (7.28) の解である.

f) 一群無限媒質モデル

大型炉では, モード展開では, 収束が悪い. 一つの極限をおさえるという意味で, 無限媒質モデルは, 意義があろう. この場合, (7.130) 式における 2 空間点相関関数は, 次のように表わされる.

$$\begin{aligned} & {}^{ab} \Gamma(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t+\tau) \\ &= C_1 \delta_{ab} \delta(\tau) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &+ v \Sigma_d(\mathbf{x}) v \Sigma_d(\mathbf{x}') \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle R_{1f} \\ &\times \int_{-\infty}^t dt_0 \int d\mathbf{x}_0 Gr(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \\ &\times Gr(\mathbf{x}', t+\tau; \mathbf{x}_0, t_0). \end{aligned} \quad (7.143)$$

ここで, C_1 は, 単位体積当りの平均の検出率である. 無限媒質では, グリーン関数 $Gr(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ は, 差

$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, t - t_0$ のみの関数である. これを $Gr(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, t - t_0)$ と表わすことにしよう. (7.143) 式において, 核分裂の行なわれた場所 \mathbf{x}_0 について, 積分を実行すると, 次の結果を得る.

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{x}_0 Gr(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, t - t_0) Gr(|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'|, t + \tau - t_0) \\ &= Gr(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, 2t + \tau - 2t_0). \end{aligned} \quad (7.144)$$

拡散カーネル

$$Gr(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t) = \frac{\exp\left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{4 D_s v t} - \alpha_0 t\right]}{(4 \pi D_s v t)^{3/2}} \quad (7.145)$$

を用いて, (7.143) 式における時間に関する積分を実行する.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t dt_0 Gr(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, 2t + \tau - 2t_0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(4 \pi D_s v)^{3/2}} \int_{\tau}^{\infty} dt t^{-3/2} \\ &\times \exp\left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{4 D_s v t} - \alpha_0 t\right]. \end{aligned} \quad (7.146)$$

まず, $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ の場合には, 上式は, 不完全ガンマ関数

$$\Gamma_m(a, y) = \int_y^{\infty} dt t^{a-1} e^{-t}. \quad (7.147)$$

を用いて, 書き表わすことができる.

したがって, 検出器体積 V_d が十分小さい時の $P_1(\tau)$ として, 次の結果をうる.

$$\begin{aligned} P_1(\tau) &= C_1 V_d + \frac{v \Sigma_d V_d \sqrt{\alpha_0}}{2 l_f (4 \pi D_s v)^{3/2}} \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle \\ &\times \Gamma_m\left(-\frac{1}{2}, \alpha_0 \tau\right). \end{aligned} \quad (7.148)$$

特に, $\alpha_0 \tau \ll 1$ の場合には,

$$\Gamma_m\left(-\frac{1}{2}, \alpha_0 \tau\right) \approx -3.54 + \frac{2}{\sqrt{\alpha_0 \tau}} - 2\sqrt{\alpha_0 \tau} + \dots \quad (7.149)$$

となる.

無限媒質中におかれた小さな検出器では, その近傍で生まれた, 比較的若い中性子対が検出にかかりやすい. したがって, どの中性子対も同じ確率で検出される一点炉モデルにおける相関項 ($\propto e^{-\alpha_0 \tau}$) とは, 異なった時間依存を示す. Fig. 38 に, (7.148) 式で与えられる $P_1(\tau)$ の相関項を示す.

$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ の場合にも, (7.146) 式の積分はやはり不完全ガンマ関数を用いて表わすことができる¹⁴⁰⁾. すなわち,

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\infty} dt t^{-3/2} \exp\left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{4 D_s v t} - \alpha_0 t\right] \\ &= \frac{\sqrt{4 \pi D_s v}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \exp\left[-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \sqrt{\frac{\alpha_0}{D_s v}}\right] \\ &- \int_0^{\tau} dt t^{-3/2} \exp\left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{4 D_s v t} - \alpha_0 t\right]. \end{aligned} \quad (7.150)$$

右辺第 2 項の積分は, ラプラス変換を行なって求める. 結果は,

* Reproduced from Ref. (76)

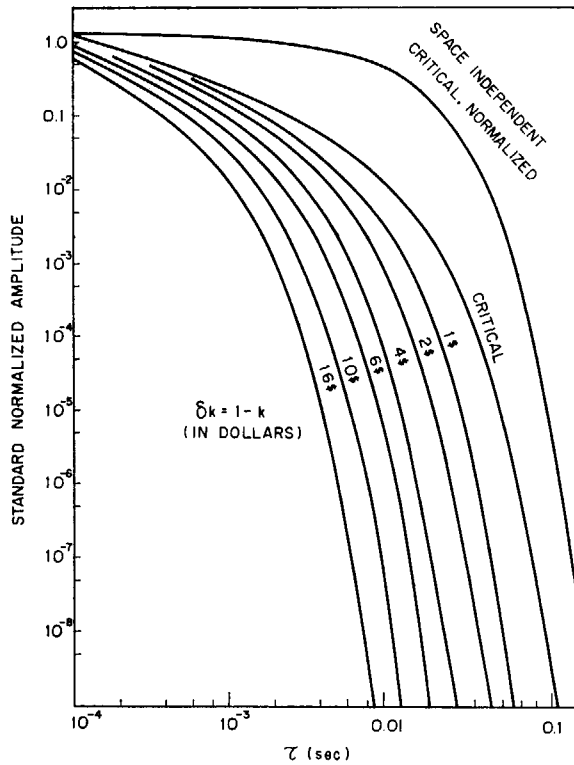


Fig. 38 Comparison of the space-independent auto-correlation function and the auto-correlation function of the count rate of a point detector located in an infinite homogeneous reactor*

$$\frac{\sqrt{4\pi D_s v}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left[\exp\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sqrt{\frac{\alpha_0}{D_s v}}\right) \times \operatorname{Erfc}\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{\sqrt{4D_s v \tau}} + \sqrt{\frac{\alpha_0}{D_s v}} \tau\right) + \exp\left(-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sqrt{\frac{\alpha_0}{D_s v}}\right) \times \operatorname{Erfc}\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{\sqrt{4D_s v \tau}} - \sqrt{\frac{\alpha_0}{D_s v}} \tau\right) \right]. \quad (7.151)$$

誤差関数 (Complementary error function) をさらに不完全ガンマ関数で表わすと

$$\begin{aligned} \operatorname{Erfc}(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty dy e^{-y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma_m\left(\frac{1}{2}, t^2\right) \quad ; t \geq 0 \\ &= 2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma_m\left(\frac{1}{2}, t^2\right) \quad ; t \leq 0. \end{aligned} \quad (7.152)$$

これらの結果を用いると、距離 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|$ だけ離してトリガ用の検出器とアナライザ用の検出器をおいた場合の $P_I(\tau)$ が次のように求まる。ただし、検出器体積は十分小さいものとし、それぞれ、 V_a, V_b とおいた。

$$\begin{aligned} P_I(\tau) &= C_1 V_b + \frac{v \sum_d V_b k_\infty \langle \nu_0 (\nu_0 - 1) \rangle}{16 \pi^{3/2} L^2 \langle \nu \rangle} \frac{1}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} \\ &\quad \times \left[\exp\left[-|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b| \frac{\sqrt{\alpha_0} l}{L}\right] \right. \\ &\quad \times \left[\sqrt{\pi} + \left\{ 1 - 2u\left(\tau - \frac{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|}{2\sqrt{\alpha_0} l L}\right) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left[\sqrt{\pi} - \Gamma_m\left(\frac{1}{2}, -\right) \right] \right] \right] \end{aligned}$$

* Reproduced from Ref. (140)

$$-\exp\left[|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b| \frac{\sqrt{\alpha_0} l}{\pi}\right] \Gamma_m\left(\frac{1}{2}, +\right)]. \quad (7.153)$$

ここで、 L は、拡散距離、また、 $u(t-a)$ は、階段関数で、次のように定義される。

$$\begin{aligned} u(t-a) &= 1 \quad ; t \geq a \text{ の時,} \\ &= 0 \quad ; t < a \text{ の時.} \end{aligned} \quad (7.154)$$

また、

$$\begin{aligned} \Gamma_m\left(\frac{1}{2}, \mp\right) &= \Gamma_m\left(\frac{1}{2}, \alpha \tau \mp |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b| \frac{\sqrt{\alpha_0} l}{L} \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|^2 \frac{l}{4L^2 \tau}\right). \end{aligned} \quad (7.155)$$

Fig. 39 は、(7.153) 式で与えられる $P_I(\tau)$ の相関項成分を示したものである。拡散距離を単位とした2つの検出器間の距離 $|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|/L$ が、パラメータとなっている。

いままでの議論では、検出器をおいたことによる中性子束のひずみ、いわゆる自己遮蔽効果は無視している。この効果については、6.6.3 で行なった議論が参考になる。また、多群拡散モデルでの解析公式は、(7.39) に示した相関関数を用いて、容易に導くことができよう。

7.4.2 待ち時間のある Rossi- α 法

この場合、(7.127c) 式における確率母関数として、

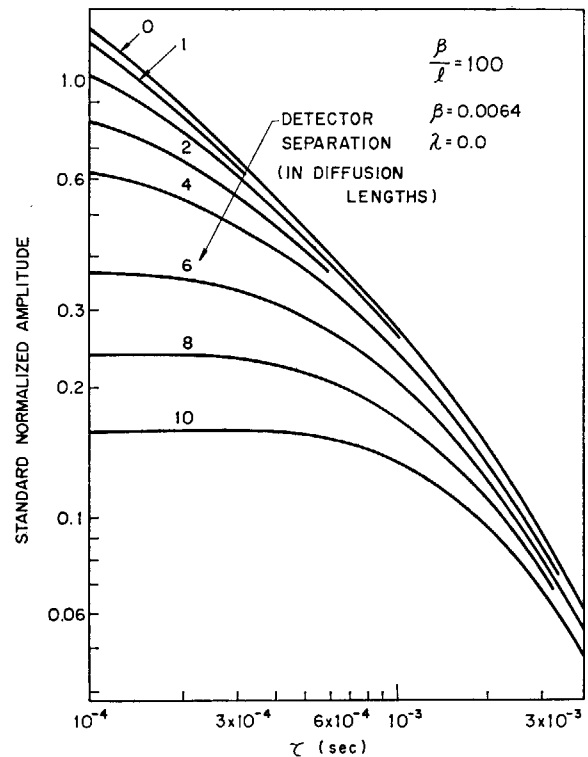


Fig. 39 Cross-correlation function of the count rates of two point detectors in an infinite homogeneous reactor as a function of detector separation distances in terms of the diffusion lengths*.

* Reproduced from Ref. (140)

2又基本モード近似の表式 (7.89) を用いると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} P_{11}(\tau) &= C_1 \left[1 - e^{-\alpha\tau} + \left(1 + \frac{1}{2\sigma} \right) \frac{2}{\zeta_0 + 1} I e^{-\alpha\tau} \right] \\ &= C_1 \left[1 - \left(1 - \frac{Cr}{C_{1T}} \right) I e^{-\alpha\tau} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_0 \left(\frac{1}{Cr} - \frac{1}{C_{1T}} \right) I e^{-\alpha\tau} \right]. \end{aligned} \quad (7.156)$$

ここで、 C_1 は、アナライザ用の検出器の平均の検出率、 C_{1T} は、トリガ用の検出器の平均検出率、 Cr は、(7.121) 式で定義した “chain register rate”^{*}、また、 I は、次式で定義される。

$$I = \int_0^\infty dT P_{RO}(T) \frac{(\zeta_0 + 1)^2 + (\zeta_0^2 - 1) e^{-\alpha_0 T}}{(\zeta_0 + 1)^2 - (\zeta_0 - 1)^2 e^{-\alpha_0 T}} \quad (7.157)$$

$P_{RO}(T)$ は、(7.113) 式で定義した待ち時間分布である。 Cr および I に含まれる検出器効率、トリガ用の検出器のものである。

因子 I は、1 より大きい。また、被積分関数の第2項における指数関数を1とおく事により、 I の大きさは、次の範囲にあることがわかる。

$$1 < I < (\zeta_0 + 1)/2. \quad (7.158)$$

$P_{RO}(T) = \delta(T)$ 、すなわち、待ち時間がつねにゼロの場合、 $I = (\zeta_0 + 1)/2$ となって、(7.156) 式は、当然のことながら Orndoff 型の Rossi- α 公式 (7.138) と等しくなる^{**}。また、トリガ用の検出器効率が小さく、 $\zeta_0 \rightarrow 1$ の場合には、 $I \rightarrow 1$ 、 $Cr \rightarrow C_{1T}$ となり、(7.156) 式は、やはり Orndoff 型の Rossi- α 公式と等しくなる。これは、トリガ検出カウンタ相互間の統計的相関が弱まり、待ち時間分布が、等確率分布となることに対応している。

$P_{11}(\tau)$ の内容を、物理的に解釈するためのモデルとして、BABALA⁶⁾ は、“family-first-count” という概念を導入している。源から放出された中性子は、分枝反応によりその子孫をふやしていくが、源が弱く、放出頻度が少なければ、これらの中性子(これを総称して“家族(family)”と呼ぶ)は、“群”をなして、異なる家系に属する中性子の群とは、十分距離をおいて、炉内を遊泳することになるであろう。時間分析器が1回のスイープに要する時間は、十分長く、一つの家系に属する中性子が生みだす検出カウンタは、1回のスイープの間にすべて記録されるものと考えよう。スイープが終って、時間分析器がトリガ検出カウンタを得るべく待機し始める時刻はしたがって、群と群とのきれ目にあたり、トリガ検出カウンタを生みだす中性子は、ある家族に属する中性子のう

ちで、始めて、検出にかかる中性子であると考え。

いま、トリガ検出器とアナライザ検出器は、同一のものとしよう。トリガがかかった後、 τ 時間後には、その家系の大きさは、 $e^{-\alpha\tau}$ に減衰している。そこで、1回のスイープで記録される検出カウンタ数の期待値は、相関項振幅を A_1 とおくと、

$$\int_0^\infty d\tau A_1 e^{-\alpha\tau} + 1 = \frac{A_1}{\alpha_0} + 1. \quad (7.159)$$

となる。1は、トリガに用いた検出カウンタである。一方、ある時刻に放出された1箇の中性子が、その後、 N 箇の検出カウンタを生みだす確率 $P(N, V_d, \infty, \infty | \mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ は、(7.86) 式で与えられている。(7.159) 式右辺は、これを用いて、

$$\frac{A_1}{\alpha_0} + 1 = \frac{\sum_{N=1}^\infty NP(N)}{1 - P(0)}. \quad (7.160)$$

と表わすことができる。したがって、

$$\frac{A_1}{\alpha_0} + 1 = \frac{\zeta_0 + 1}{2}.$$

これから、

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_0 \frac{\zeta_0 - 1}{2} \\ &= \alpha_0 C_1 \left(\frac{1}{Cr} - \frac{1}{C_{1T}} \right). \end{aligned} \quad (7.161)$$

こうして、“family-first-pulse” トリガの場合の相関項振幅 A_1 は、(7.156) 式最後の項の振幅で、 $I=1$ とおいたものに等しいことがわかる。 $I=1$ は、“family-first-pulse” トリガのための必要条件になっている。

(7.156) 式で、残った項は、

$$B_1(\tau) \equiv C_1 - (C_1 - Cr) e^{-\alpha\tau}. \quad (7.162)$$

は、非相関項である。中性子家系の群と群とは、実際には、重なり合い、一回のスイープの間に、異なる家系に属する中性子による検出カウンタが混入してくる。この検出カウンタが、非相関であるためには、“family-first-pulse triggering” モデルにおいては、次の2つの条件がみたされなければならない⁷⁴⁾。

- i) トリガ検出カウンタを生みだした中性子とは、別な家族 F' に属する中性子によるカウンタであること。
- ii) その家族 F' とは、それに属するどの中性子も、 $\tau < 0$ で、トリガ検出カウンタを生みだしたことがないこと。

トリガ検出器とアナライザ検出器が同一の場合には、非相関カウンタを生みだした中性子は、トリガ検出カウンタとは、別な家系に属し、しかも、 $\tau < 0$ で、検出にかかったことのない家系に属していなければならない。このような家系に属する中性子が、トリガ時点 $\tau=0$ 後、 $\Delta\tau$ 時間に1カウンタ検出量を生みだす確率は、“chain register rate” Cr と $\Delta\tau$ との積で表わされる。一般には、

$$C_1 \left[1 - \int_{-\infty}^0 dt' P(t' | \tau) \right] \Delta\tau. \quad (7.163)$$

* Iijima⁷⁵⁾ は、これを記号 C_1 を用いて表わしている。また YAMAMURO *et al.*,¹⁵⁸⁾ は、“family first counting rate” と名づけ、やはり記号 C_1 を用いている。

** 一群均質炉モデルでは、

$$\frac{C_1}{2\sigma} = \frac{\epsilon}{2\alpha_0 l^2} g_{11} \langle \nu_0 (\nu_0 - 1) \rangle$$

である。

と表わされる。ここで、 $P(t'|\tau)dt'$ は、時刻 τ に検出カウンタがあった場合、この中性子と同一の家系に属する中性子が、時刻 t' のまわりの微小時間 dt' の間に、“family-first-count” を生みだす条件付確率である。 $P(t'|\tau)$ が、指数関数 $e^{-\alpha|t'-\tau|}$ の形であること、および $\tau=0$ で (7.163) 式が、 Cr に等しいことを用いると、(7.162) 式が得られる⁷⁴⁾。

一般には、因子 I があるために、 $P_{II}(\tau)$ の相関項振幅 A と、非相関項 $B(\tau)$ とは、次の関係をみだす。

$$A_1 < A < A_0 = \frac{C_1}{2\sigma} \quad (7.164)$$

$$B_1(\tau) < B(\tau) < B_0 = C_1. \quad (7.165)$$

A_0, B_0 は、 $I=(\zeta_0+1)/2$ の場合の値で、Orndoff 型の Rossi- α 公式の相関項振幅、非相関項である。 $\tau=0$ における相関項と非相関項の比、いわゆる S/N 比は、次の関係にある。

$$\frac{A_1}{B_1(0)} = \frac{A}{B(0)} = \frac{A_0}{B_0}, \quad \text{SN ratio at } \tau=0. \quad (7.166)$$

因子 I は、“chain splitting” 効果として説明される⁷⁵⁾。 $I=1$ の場合は、トリガ検出カウントを生みだした中性子は、ある家系に属する中性子のうちで始めて、検出カウントを生みだしたもので構成されている。 $I=(\zeta_0+1)/2$ の場合は、Orndoff 型の Rossi- α 実験であり、これは、アナライザ検出カウントは同時にトリガ検出カウントにもなっていて、次のアナライザ検出カウントを待つという“continuous triggering and registration” になっている*。この場合には、ある家系から生みだされる検出カウントは、いわば、つねに分断されていることになる。炉の未臨界度が高くなると、 $\zeta_0 \rightarrow 1$ となって、 A_0 は、 A_1 に近くなる。これは、 A_0 にたいする A_1 の寄与が、大きくなることを意味する。

因子 $I > 1$ で、したがって、相関項振幅 $A > A_1$ であることは、Iijima⁷³⁾ により導入された“巨大家族 (giant family)” の概念により説明できる。いま、トリガ検出器にかかった最初の $(N-1)$ 箇のカウントは、無視し、第 N 番目の検出カウントでトリガする、いわゆる、タイプ II- N の Rossi- α 実験を行なったとしよう。 N 箇もの検出カウントを生みだした家族に属する中性子の数は、相対的にみて、多く、したがって、その後、得られる相関検出カウント数も多い。この相関項振幅を A_N とすると、(7.160) 式を導いたと同様な考え方で、

* 相関項を $A_0 e^{-\alpha\tau}$ とおく。ある家族が、 N 箇のトリガ検出カウントを生みだすものとする、アナライザ検出カウントは、 $(N-1) + (N-2) + \dots + 1 + 0$ である。したがって、相関項を生みだす検出カウントの期待値は、

$$\int_0^\infty d\tau A_0 e^{-\alpha\tau} = \frac{\langle N(N-1) \rangle}{2\langle N \rangle}$$

と表わされる。右辺の平均操作は、(7.160) 式右辺で用いたと同じく、(7.86) 式で与えられる確率分布について行なう。これから、

$$A_0 = \frac{C_1}{2\sigma}$$

が得られる。

$$\frac{A_N}{\alpha_0} + N = \frac{\sum_{M=N}^{\infty} MP(M)}{1 - \sum_{M=0}^{N-1} P(M)}. \quad (7.167)$$

が得られる。関係式

$$A_N < A_{N+1} \quad (7.168)$$

は、物理的には、理解しやすい。すなわち、 $(N+1)$ 番目の検出カウントを生みだす中性子は、平均的にみて、 N 番目の検出カウントを生みだす中性子よりは、“老化” している。源から、時刻 t_0 に中性子が放出されたとしよう。時刻 $t' (\geq t_0)$ に分枝反応がおこり、そのうちの 1 箇が、時刻 $t_1 (\geq t')$ にトリガ検出反応を、時刻 $t_2 (\geq t_1)$ にアナライザ検出反応をうみだすものとしよう。Feynman の流儀に従って、この場合の相関項振幅を求めよう。まず、時刻 t_1 のまわりの dt_1 に 1 箇、時刻 t_2 のまわりの dt_2 に 1 箇検出カウントのある結合確率は、次のように求まる。

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt' [v \Sigma_f e^{-\alpha_0(t'-t_0)}] \\ & \quad \times \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle \varepsilon v \Sigma_f dt_1 e^{-\alpha_0(t_1-t')} \\ & \quad \times \varepsilon v \Sigma_f dt_2 e^{-\alpha_0(t_2-t')} \\ & = P(t_1-t_0) e^{-\alpha_0(t_2-t_1)} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (7.169)$$

ここで、

$$P(t_1-t_0) = \frac{\varepsilon^2 (v \Sigma_f)^3}{\alpha_0} [1 - e^{-\alpha_0(t_1-t_0)}] e^{-\alpha_0(t_1-t_0)}. \quad (7.170)$$

一方、時刻 t_1 のまわりの dt_1 に 1 箇検出カウントのある確率

$$P(t_1|t_0) = \varepsilon v \Sigma_f e^{-\alpha_0(t_1-t_0)} dt_1. \quad (7.171)$$

(7.169) と (7.171) 式から、相関項振幅

$$A(t_1-t_0) = \frac{\varepsilon (v \Sigma_f)^2}{\alpha_0} [1 - e^{-\alpha_0(t_1-t_0)}]. \quad (7.172)$$

となる。

すなわち、 $A(t_1-t_0)$ は、その家族が生まれてから、検出にかかるまでの時間 (t_1-t_0) が大きいほど大きい⁷³⁾。

因子 $I > 1$ で、相関項振幅 $A > A_1$ であるのは、ある家族の生みだす一連の検出パルスが、トリガ検出カウントにより分断されて、記録される。そして、このような家族は、トリガ検出カウントが、第 1 カウントである家族に比べて、大きく、ふくれ上っているからである。

Fig. 40 に、 A_N の実験値を示す。

Orndoff 型の Rossi- α 実験の相関項振幅 A_0 は、 $A(t_1-t_0)$ を (7.171) 式で与えた確率を重みとして平均をとったものである。すなわち、

$$A_0 = \frac{\int_{t_0}^{\infty} dt_1 P(t_1|t_0) A(t_1-t_0)}{\int_{t_0}^{\infty} dt_1 P(t_1|t_0)}. \quad (7.173)$$

あるいは、また、 A_N を、 N 番目の検出カウント率、 Cr_N で重みをつけて平均をとったものに等しい。すなわち、

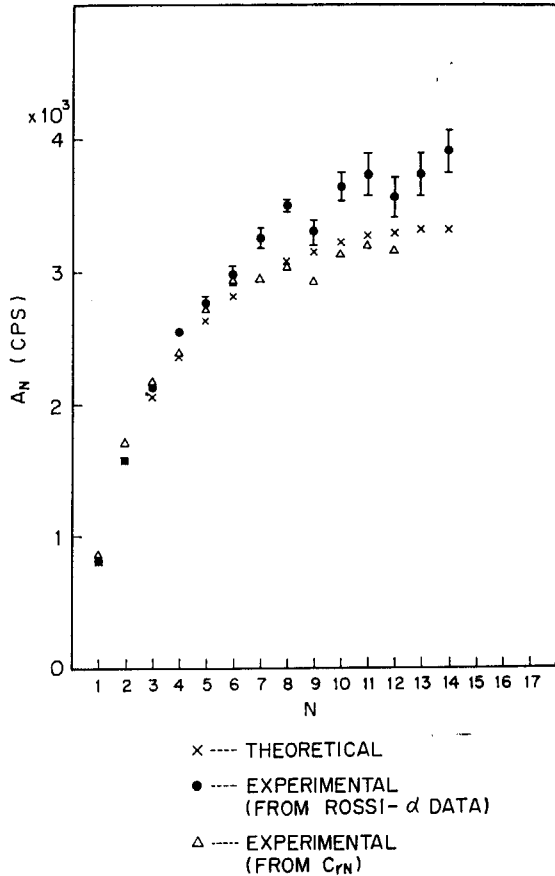


Fig. 40 Correlation amplitudes when triggered by the family-Nth count*

$$A_0 = \frac{\sum_{N=1}^{\infty} Cr_N A_N}{\sum_{N=1}^{\infty} Cr_N} \quad (7.174)$$

Cr_N が、(7.86) 式で与えられている N 箇の検出カウントを生みだす確率 $P(N)$ を用いて、

$$Cr_N \propto \sum_{M=N}^{\infty} P(M)$$

とかけることおよび (7.167) 式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{N=1}^{\infty} Cr_N A_N}{\sum_{N=1}^{\infty} Cr_N} &= \alpha_0 \frac{\sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{M=N}^{\infty} (M-N) P(M) \right)}{\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=N}^{\infty} P(M)} \\ &= \alpha_0 \frac{\sum_{M=1}^{\infty} \frac{M(M-1)}{2} P(M)}{\sum_{M=1}^{\infty} M P(M)} = \frac{C_1}{2\sigma} \end{aligned}$$

となつて、(7.174) 式の正しいことがわかる。なお、 Cr_1 は (7.122) 式で定義した chain register rate, また、平均の検出率 C_1 は、

$$C_1 = \sum_{N=1}^{\infty} Cr_N \quad (7.175)$$

と表わせる。 Cr_N は、検出器効率 ϵ とは、比例関係にはない。また、 A_N は、

$$\int_0^{\infty} d\tau A_N e^{-\alpha_0 \tau} = \frac{\sum_{M=N+1}^{\infty} Cr_M}{Cr_N}$$

という関係を用いて、

$$A_N = \alpha_0 \left[\frac{\sum_{M=N}^{\infty} Cr_M}{Cr_N} - 1 \right] \quad (7.176)$$

と表わせる。これを、(7.174) 式に用いると、

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{C_1} \sum_{M=1}^{\infty} (M-1) Cr_M \quad (7.177)$$

となる。 Cr_M を測定することにより、時間分析器を用いずに、 A_N , A_0 を定めることができる⁷⁵⁾。

待ち時間のある Rossi- α 実験の解析公式 $P_n(\tau)$ は、一般には、(7.156) 式を導いた場合のように、確率母関数の計算というやっかいな手続きをふまないかぎり、得ることができない。(7.156) 式では、2 又基本モード近似を前提としている。 $P_n(\tau)$ には、Orndoff の $P_1(\tau)$ とは異なり、3 又以上の寄与は、原理的には存在する。しかし、その寄与は、高未臨界の場合を除いては、無視しうる程小さいことが予想され⁵⁵⁾、通常の実験条件では、2 又近似は妥当であることを示すいくつかの実験例も報告されている⁷⁵⁾。

7.5 動特性パラメータの推定原理

相関実験 (時間分析のみならず周波数分析も含めて) から得られる情報量について、Izumi⁷⁸⁾ は、“3 基本量 (three fundamental parameters)” という概念を提案した。2 又基本モード近似で、しかも、中性子源から放出反応 1 回当たり 1 箇の中性子しか放出されないというモデルが、妥当な限り、相関実験のみで独立に定められる物理量は 3 つしかなく、したがって、それ以上の情報を得るには、他の補助実験に頼らなければならない。

確率母関数 (7.89) は、次の 3 つの物理量から構成されている。

$$\sigma \equiv \frac{\bar{S}}{2\bar{\lambda}}; \text{ 中性子源の強さに関係したもの。} \quad (7.178)$$

$$\alpha_0; \text{ 即発中性子の増倍度に関係したもの。} \quad (7.179)$$

$$y = 4\bar{\epsilon} \frac{\bar{\lambda}}{\alpha_0^2}; \text{ 検出器効率に関係したもの。} \quad (7.180)$$

TABLE 15 は、種々な相関量を、 σ , α_0 , y を用いて表わしたものである。この 3 つの物理量は、実は、 \bar{S} , $\bar{\lambda}$, α_0 , $\bar{\epsilon}$ といった 4 つのよりマイクロ量から構成されている。これら 4 つがわかれば、中性子寿命 l , 中性子生成時間 l_i , 即発中性子増倍率 $k_p = (1-\beta)k$, 炉出力 P の絶対値がわかるが、2 又一点炉モデルで十分説明しうる相関実験をいろいろ試みても、その結果は、3 つの独立な量しか含まない。Izumi は、 α_0 , C_1 (平均の検出率) および Cr (chain register rate) を、測定対象とし、これを 3 基本量

* Reproduced from Ref. (75)

TABLE 15 Physical parameters included in the measured quantity

Quantity	Expression by σ, α_0 & γ	Reference equation number
Average counting rate, C_1	$\sigma \alpha_0 \gamma / 2$	*
Break angular frequency of the noise spectrum	α_0	(6.19)
Absolute value of the noise spectrum in the flat region	$\sigma \alpha_0 \gamma^2 / 4$	(6.27)**
$Y_{\text{saturated}}$ of the Feynman- α method at $T = \text{infinity}$	$\gamma / 2$	(7.1) & (7.4)
$Z_{\text{saturated}}$ of the Feynman- α method at $T = 0$	$\frac{1}{2\sigma}$	(7.2) & (7.4)
ζ_0 in $P_0(T)$, $P_{\text{RO}}(T)$ & $P_{\text{CC}}(T)$	$\sqrt{1+\gamma}$	(7.93)
Chain register rate, C_r	$\sigma \alpha_0 (\sqrt{1+\gamma} - 1)$	(7.121 a)
Orndoff's correlated amplitude of the Rossi- α experiment, A_0	$\frac{\alpha_0 \gamma}{4}$	(7.131)
Amplitude of τ -dependent part in the Rossi- α formula of the 2-nd type, when $I=1$	$\frac{1+2\sigma}{2} \alpha_0 (\sqrt{1+\gamma} - 1) - \frac{1}{2} \sigma \alpha_0 \gamma$	(7.156)
Coherence function between the fast and the thermal neutron fluctuations, $R(\omega)$	$e^{i\omega t}$	(6.59)
$Y_{\text{saturated}}$, when spontaneous fissions are extraneous source	$\frac{\gamma}{2k}$	(7.7)
$Z_{\text{saturated}}$, when spontaneous fissions are extraneous source	$\frac{1}{2\sigma k}$	(7.8)
Coherence function of the coupled-core	Transit time of neutrons between the nodes	Table 12

と名づけている。

他の補助実験により、たとえば、検出器効率 $\bar{\epsilon}$ か中性子源の強さ \bar{S} を求める必要がある。あるいは、また、2又一点炉 (基本モード) 近似では、説明できない雑音現象を定式化し、第4の物理量を見いだす測定法を開発する必要がある。その試みとして、速中性子と熱中性子とにわけて、それぞれのゆらぎの自己スペクトル密度と、相互間のスペクトル密度とから干渉関数を求める方法 (cf. 6.3)、あるいは結合炉における干渉関数の測定等が提案されている。また DRAGT⁴⁹⁾ および FURUHASHI⁵⁵⁾⁵⁶⁾⁵⁷⁾ は、次節でのべるように、3又分枝過程に起因する相関カウントを検出する試みを提案している。

7.6 三又分枝過程の寄与

中性子カウント数の分散あるいは2時点相関関数には、Fig. 10 で示したように、二又分枝過程のみを考慮すればよいが、3次 (階乗) モーメント、3次 (階乗) キュームラントあるいは3時点相関関数には、Fig. 12 で示したような二又分枝を2段行なった中性子家系の寄与の他に、Fig. 11 のような三又分枝過程の寄与が加わる。この三又部分を上手に拾い出す実験方法を開発すれば、前節でのべたような測定原理の制約からぬけ出すことができ、動特性に関する新しい情報をつかむことができる。この可能性は、近年、DRAGT⁴⁹⁾、FURUHASHI *et al.*,

⁵⁵⁾⁵⁶⁾⁵⁷⁾ により検討がすすめられている。

一方、待ち時間分布、タイプIIのRossi- α 法、あるいは、カウント数の確率分布そのものの評価においては、三又以上の分枝過程の寄与は、無視している。この近似の妥当性については、KURIHARA⁸⁶⁾ による数値的検討、IIJIMA⁷⁵⁾ による実験的な検討が報告されている。

a) 中性子数の三次モーメント

出発点は、3又近似のPál-Bell方程式である。遅発中性子を無視した場合、(5.17)式の右辺の和を $j=3$ まで打ちきると、時刻 t に、相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に投入した1箇の中性子により起動された非定常炉において、存在する中性子数の確率母関数 G を1からさし引いた $\tilde{G} (\equiv 1 - G)$ は、次の方程式を満足することがわかる。

$$\begin{aligned}
 L^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{2} \nu \Sigma_f \left[\int d\mathbf{v}' \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \chi(\mathbf{v}') \right]^2 \\
 &+ \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1)(\nu_0 - 2) \rangle}{6} \\
 &\times \nu \Sigma_f \left[\int d\mathbf{v}' \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \chi(\mathbf{v}') \right]^3. \quad (7.181)
 \end{aligned}$$

この方程式は、 \tilde{G} に関する3次の非線形方程式となっているので、基本モード近似でも、直接解くことは、困難である。そこで5.4.で行なったように階乗モーメント展開

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \gamma_m(V, t|\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (7.182)
 \end{aligned}$$

の形に解を求めることを考える。結果は、(5.111)、(5.112) および (5.116) 式で与えられている。特に、グリーン関数を基本モード近似で求めよう。すなわち、

* 即発中性子減衰係数 α_0 を用いており正確な表式ではない。

** C_1 にたいする近似式を用いている。

$$Gr(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t' | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = e^{-\alpha_0(t'-t)} \phi_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (7.183)$$

ここで、 α_0, ϕ は固有値問題* (7.46) を、また、 $-\alpha_0, \phi^+$ は、(7.44) を満足する基本解とする。これらを用いると時刻 t_f に、領域 V 中に存在する中性子数の階乗モーメントが、次のように求まる。

$$\begin{aligned} \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= e^{-\alpha_0(t_f-t)} \left[\iint_{(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \in V} d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' \phi_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \right] \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (7.184)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{l_f} \int_t^{t_f} dt_0 \iint d\mathbf{x}_0 d\mathbf{v}_0 \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}^* \chi(\mathbf{v}^*) \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}^*, t_0) \right]^2 \\ &\times Gr(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \\ &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{\alpha_0 l_f} [e^{-\alpha_0(t_f-t)} - e^{-2\alpha_0(t_f-t)}] \\ &\times \left[\iint_{(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \in V} d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' \phi_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \right]^2 \\ &\times \left[\int d\mathbf{x}_0 \left\{ \int d\mathbf{v}^* \chi(\mathbf{v}^*) \phi_1^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}^*) \right\}^2 \right. \\ &\times \left. \int d\mathbf{v}_0 \phi_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \right] \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (7.185)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{l_f} \int_t^{t_f} dt_0 \iint d\mathbf{x}_0 d\mathbf{v}_0 \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}^* \chi(\mathbf{v}^*) \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}^*, t_0) \right]^3 \\ &\times Gr(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &+ 3 \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{l_f} \int_t^{t_f} dt_0 \iint d\mathbf{x}_0 d\mathbf{v}_0 \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}^* \chi(\mathbf{v}^*) \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}^*, t_0) \right] \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}^* \chi(\mathbf{v}^*) \gamma_2(V, t_f | \mathbf{x}_0, \mathbf{v}^*, t_0) \right] \\ &\times Gr(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ &= \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{2\alpha_0 l_f} [e^{-\alpha_0(t_f-t)} - e^{-3\alpha_0(t_f-t)}] \\ &\times \left[\iint_{(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \in V} d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' \phi_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \right]^3 \\ &\times \left[\int d\mathbf{x}_0 \left\{ \int d\mathbf{v}^* \chi(\mathbf{v}^*) \phi_1^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}^*) \right\}^3 \right. \\ &\times \left. \int d\mathbf{v}_0 \phi_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \right] \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &+ 3 \left[\frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{\alpha_0 l_f} \right]^2 \\ &\times [e^{-\alpha_0(t_f-t)} - 2e^{-2\alpha_0(t_f-t)} + e^{-3\alpha_0(t_f-t)}] \\ &\times \left[\iint_{(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \in V} d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' \phi_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \right]^3 \end{aligned}$$

* 遅発中性子を無視する。したがって、 $\langle \nu \rangle$ を $(1-\beta)\langle \nu \rangle$ で置きかえた場合の固有値 α_0 が得られる。 α_0 は、即発中性子の減衰係数である。

$$\begin{aligned} &\times \left[\int d\mathbf{x}_0 \left\{ \int d\mathbf{v}^* \chi(\mathbf{v}^*) \phi_1^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}^*) \right\}^2 \right. \\ &\times \left. \int d\mathbf{v}_0 \phi_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \right] \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (7.186)$$

ここで、炉は均質とし、

$$l_f \equiv 1/\nu \Sigma_f$$

とおいた。非均質の場合には、 $\phi^+(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ の直前にある積分と $\nu \Sigma_f$ との積を、次のようにおきかえればよい。

$$\begin{aligned} \nu \Sigma_f \int d\mathbf{v}_0 \phi_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) &\rightarrow \\ \int d\mathbf{v}_0 \nu_0 \Sigma_f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \phi_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0). \end{aligned}$$

ポアソン状の外部中性子源のある定常炉での中性子数にたいする確率母関数を $G(z|S)$ とおくと、これは、(5.101) 式によって、非定常炉での確率母関数と次の関係にあることがわかる。

$$\begin{aligned} \ln G(z|S) &= \int_{-\infty}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} p_s(\nu_0 \leftarrow \mathbf{x}) \right. \\ &\times \left. \left[\int d\mathbf{v}' \chi_s(\mathbf{v}') G(z|\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right]^{\nu_0} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (7.187)$$

外部中性子源は、定常で、即発中性子のみ放出するものとした。上式に、(7.182) 式を代入すると、次の結果が得られる。

$$\ln G(z|S) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \bar{\sigma}_m(V, t_f | S). \quad (7.188)$$

右辺の展開係数 $\bar{\sigma}_m$ は、中性子数の階乗キュームラントで、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1(V, t_f | S) &= \int_{-\infty}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \langle \nu_{s0} \rangle \\ &\times \int d\mathbf{v}' \chi_s(\mathbf{v}') \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}', t). \end{aligned} \quad (7.189)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2(V, t_f | S) &= \int_{-\infty}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \langle \nu_{s0}(\nu_{s0}-1) \rangle \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}_s \chi(\mathbf{v}_s) \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}_s, t) \right]^2 \\ &+ \int_{-\infty}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \langle \nu_{s0} \rangle \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}_s \chi(\mathbf{v}_s) \gamma_2(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}_s, t) \right]. \end{aligned} \quad (7.190)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_3(V, t_f | S) &= \int_{-\infty}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \langle \nu_{s0}(\nu_{s0}-1)(\nu_{s0}-2) \rangle \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}_s \chi(\mathbf{v}_s) \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}_s, t) \right]^3 \\ &+ 3 \int_{-\infty}^{t_f} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \langle \nu_{s0}(\nu_{s0}-1) \rangle \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}_s \chi(\mathbf{v}_s) \gamma_1(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}_s, t) \right] \\ &\times \left[\int d\mathbf{v}_s \chi(\mathbf{v}_s) \gamma_2(V, t_f | \mathbf{x}, \mathbf{v}_s, t) \right] \end{aligned}$$

$$+\int_{-\infty}^{t'} dt \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \langle \nu_{s0} \rangle \times \left[\int d\mathbf{v}_s \chi(\mathbf{v}_s) \gamma_3(V, t_1 | \mathbf{x}, \mathbf{v}_s, t) \right]. \quad (7.191)$$

すなわち、定常炉における中性子数の m 次の階乗キュームラントは、先に求めた階乗モーメント (7.184)~(7.186) を用いて表わすことができる。

さて、原子炉には、自発核分裂によるもの以外に外部中性子源はないものとしよう。また、遅発中性子は、即発中性子とは、相関のない外部源とみなし、放出中性子数のモーメントおよび速度分布は、即発中性子の場合と同じと考えよう。この時、中性子源は、次のように表わされる。

$$S(\mathbf{x}) = S_0 \left[1 + \frac{\beta k}{1-k} \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' \phi^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \times \int d\mathbf{v} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right]. \quad (7.192)$$

ここで、 S_0 は、単位体積当りの自発核分裂率であり、炉内に一様に分布しているものとした。 k は、実効増倍率 ($=k_1$ in Eq. (6.114)) である。特に、1群モデルでは、

$$\int d\mathbf{v} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{v} \phi_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv \Psi_1(\mathbf{x}) \equiv g(\mathbf{x}). \quad (7.193)$$

とおくことができる。 Ψ_1 は、Helmholtz 方程式 (6.109) の基本解である。これを用いると、自然核分裂により定常に保たれている炉内における中性子数の階乗キュームラントが、次のように得られる⁵⁵⁾。

$$\bar{\sigma}_1(V, t_1 | S) = \frac{\langle \nu \rangle S_0 l_1}{(1-k_1)} \int_{\mathbf{x} \in V} d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x}' g(\mathbf{x}'). \quad (7.194)^*$$

$$\frac{\bar{\sigma}_2}{[\bar{\sigma}_1]^2} = \frac{\langle \nu(\nu_0-1) \rangle}{2\alpha_0 \langle \nu \rangle^2 l^2} \frac{1-k}{S_0} \times \frac{1-k+k \int d\mathbf{x} g^3(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x})}{\left[\int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \right]^2}. \quad (7.195)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_3}{[\bar{\sigma}_1]^3} = \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{3\alpha_0 \langle \nu \rangle^3 l^3} \left(\frac{1-k}{S_0} \right)^2 \times \frac{(1-k) \int d\mathbf{x} g^3(\mathbf{x}) + k \int d\mathbf{x} g^4(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x})}{\left[\int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \right]^3} + \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle^2}{2\alpha_0^2 \langle \nu \rangle^4 l^4} k \left(\frac{1-k}{S_0} \right)^2 \times \frac{(1-k) \int d\mathbf{x} g^3(\mathbf{x}) + k \left[\int d\mathbf{x} g^2(\mathbf{x}) \right]^2 \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x})}{\left[\int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \right]^3}. \quad (7.196)$$

上式で、 l は中性子寿命であり、(6.114) 式で定義した l_1 に相当する。(7.196) 式で与えられる三次の階乗キュームラントは、2つの項から構成されている。右辺第1項は、Fig. 11 に示したような3又分枝過程の寄与である。第2項は、Fig. 12 のように、2又分枝を2段重ねてきたものの寄与である。特に、 $g(\mathbf{x}) = V^{-1/2}$ とおいた一点炉モデルで、両者の比をとってみると、

$$\frac{2 \langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{3 \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle^2 k} \langle \nu \rangle [1 - (1-\beta)k] \approx 0.5 \frac{1 - (1-\beta)k}{k}.$$

したがって、3又分枝の寄与は、臨界に近い炉では、ごく小さいことがわかる。

b) 検出カウント数の3次モーメント

核反応の際、二次中性子を放出しない吸収型の検出器で、 T 時間検出を行なった時得られる計数値の確率母関数 $G(z, V_d, t_1, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ を1からさしひいた \tilde{G} は (7.181) と同形の運動方程式をみたす。ただし、中性子の投入時刻 t が、計数時間 ($t_1 < t < t_1 + T$) 内にある場合には、右辺に

$$(z-1) \nu \Sigma_d$$

が加わる。

中性子数の場合と同じように、 \tilde{G} を階乗モーメント展開の形に求める。この場合、階乗モーメント $\gamma_m(V_d, t_1, T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は、 t が t_1 と $t_1 + T$ の間にある場合と、 t が t_1 以前である場合とにわけて求めなければならない。こうして、得られた階乗モーメントを、(7.189)~(7.191) に代入すれば、ポアソン状中性子源のある定常炉におけるカウント数の階乗キュームラントが求まる。

特に、自発核分裂によるもの以外に外部中性子源のない一群炉では、次の結果が得られる⁵⁵⁾。

$$\bar{\sigma}_1(V, t_1, T | S) = \frac{\langle \nu \rangle S_0 l}{1-k} T \int d\mathbf{x} \nu \Sigma_d(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}). \quad (7.197)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_2}{[\bar{\sigma}_1]^2} = \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{\alpha_0^2 \langle \nu \rangle^2 l^2} \frac{1-k}{S_0 T} \left(1 - \frac{1-e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \times \frac{(1-k) + k \int d\mathbf{x} g^3(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x})}{\left[\int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \right]^2}. \quad (7.198)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_3}{[\bar{\sigma}_1]^3} = \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{2\alpha_0^3 \langle \nu \rangle^3 l^3} \left(\frac{1-k}{S_0 T} \right)^2 \times \left[2 - \frac{3-4e^{-\alpha_0 T} + e^{-2\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right] \times \frac{(1-k) \int d\mathbf{x} g^3(\mathbf{x}) + k \int d\mathbf{x} g^4(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x})}{\left[\int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \right]^3}$$

$$+ 3 \frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle^2 k}{\alpha_0^4 \langle \nu \rangle^4 l^4} \left(\frac{1-k}{S_0 T} \right)^2 \times$$

* $\bar{\sigma}_1$ の算出においては、遅発放出中性子も考慮し、(7.189) 式で $\langle \nu_{s0} \rangle$ を $\langle \nu \rangle$ でおきかえた。

$$\begin{aligned} & \times \left[1 - \frac{2 - (2 + \alpha_0 T) e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right] \\ & \times \frac{(1-k) \int dx g^3(x) + k \left[\int dx g^3(x) \right]^2 \int dx g(x)}{\left[\int dx g(x) \right]^3}. \end{aligned} \tag{7.199}$$

3次の階乗キュームラント δ_3 における3又と2又の寄与の比をとってみよう。 $\alpha T \ll 1$ の時、3又の寄与は強調されるが、それでも

$$\frac{2}{3} \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1)(\nu_0 - 2) \rangle \langle \nu \rangle}{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle^3} \frac{1 - (1 - \beta)k}{k}$$

であり、臨界に近い炉では、ごく小さい。しかしながら、3又の寄与の分子には、 k が独立に入りこんできている。一点炉モデルでは、したがって、

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \text{Contribution of the three-forked to } \frac{\delta_3}{[\delta_1]^3} \right\} \\ & = 2k Z_{\text{sat}}^2 \end{aligned} \tag{7.200}$$

となる。ここで、 Z_{sat} は、Feynman- α 法において、FURUHASHIの導入した指標で、次のように定義される。(cf. Eq. (7.2) & (7.9))

$$Z_{\text{sat}} \equiv \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\delta_2}{[\delta_1]^2}$$

こうして、3又分枝過程のカウンタ数の3次階乗キュームラントへの寄与には、Feynman- α 法における指標 Z_{sat} の他に、新たに、実効増倍率 k が含まれていることがわかる。

c) 検出カウンタの3時点相関関数

時刻 t のまわりの微小時間 Δ の間に得られる検出カウンタ数を、 $N(t, \Delta)$ としよう。時刻 t と $t + \tau_B$, $t + \tau_B + \tau_C$ の3点で観測を行ない、得られる観測量の期待値のまわりのゆらぎ δN の3時点相関関数 $\Gamma_3(\tau_B, \tau_C)$ にたいする表式を求めてみよう。(cf. Fig. 41). $\Gamma_3(\tau_B, \tau_C)$ は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \Gamma_3(\tau_B, \tau_C) & \equiv \lim_{\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_A \Delta_B \Delta_C} \\ & \times \langle \delta N(t, \Delta_A) \delta N(t + \tau_B, \Delta_B) \\ & \times \delta N(t + \tau_B + \tau_C, \Delta_C) \rangle. \end{aligned} \tag{7.201}$$

各検出時点における検出器が、相異なるものであれば、あるいは、また、同一検出器を用いる場合でも、検出時点が相異なっておれば、 $\Gamma_3(\tau_B, \tau_C)$ は、すでに(5.212)式で用いたキュームラント $\delta(1, 1, 1)$ を用いて、容易に算出することができる。すなわち、基本モード近似では、次のようになる。

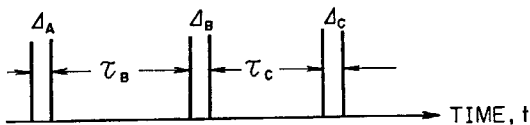


Fig. 41 Time interval of the three-time-point correlation function and the three-time-point Rossi- α experiment

$$\begin{aligned} & \Gamma_3(\tau_B, \tau_C) \\ & = \left[\prod_{i=1}^3 \iint_{(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \in V_{d_i}} d\mathbf{x}_i d\mathbf{v}_i v \Sigma_d(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \phi_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \right] \\ & \times \left[\frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1)(\nu_0 - 2) \rangle}{3 \alpha_0^2 l_f^2} e^{-\alpha_0(2\tau_B + \tau_C)} \right. \\ & \times \int d\mathbf{x}_0 \left\{ \int d\mathbf{v}'' \chi(\mathbf{v}'') \phi_1^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}'') \right\}^3 \\ & \times \int d\mathbf{v}_0 \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) + \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle^2}{2 \alpha_0^3 l_f^2} e^{-\alpha_0(\tau_B + \tau_C)} \\ & \times \left\{ \int d\mathbf{x}_0 \left(\int d\mathbf{v}'' \chi(\mathbf{v}'') \phi^+(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}'') \right)^2 \right. \\ & \left. \times \int d\mathbf{v}_0 \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \right\} \left. \right] \\ & \times \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} S(\mathbf{x}) \chi_s(\mathbf{v}) \phi^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned} \tag{7.202}$$

特に、一点炉モデルでは、検出器効率を $\varepsilon (= \Sigma_d / \Sigma_t)$ とおくと、次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \Gamma_3(\tau_B, \tau_C) & = \frac{\varepsilon^3}{l_f^2} \left[\frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1)(\nu_0 - 2) \rangle}{3 \alpha_0 l_f} e^{-\alpha_0(2\tau_B + \tau_C)} \right. \\ & \left. + \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle^2}{2 \alpha_0^2 l_f^2} e^{-\alpha_0(\tau_B + \tau_C)} \right] R_{lf}, \end{aligned} \tag{7.203a}$$

ただし、 R_{lf} は、炉内における誘導核分裂率である。

同一検出器による観測の場合には、確率密度関数に、縮退がおこる点に注意する必要がある。すなわち、(7.201)式は、 $\tau_B = \tau_C = 0$ の場合には、

$$\lim_{\Delta_A \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta_A} \right) \langle \delta N^3(t) \rangle = C_1$$

となる。ここで、 C_1 は、平均の検出率である。また、 $\tau_B = 0$ の場合には、

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta_A, \Delta_C \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta_A \Delta_C} \right) \langle \delta N^2(t) \delta N(t + \tau_C) \rangle = \Gamma(\tau_C), \\ & \text{ただし、} \tau_C \neq 0. \end{aligned}$$

同様に、 $\tau_C = 0$ の場合には、

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta_A, \Delta_B \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta_A \Delta_B} \right) \langle \delta N(t) \delta N^2(t + \tau_B) \rangle = \Gamma(\tau_B), \\ & \text{ただし、} \tau_B \neq 0. \end{aligned}$$

となることである。ここで、 $\Gamma(\tau)$ は、2時点相関関数である。一点炉モデルでは、(7.129)および(7.131)式を用いて、

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) & = \frac{\varepsilon^2 \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{l_f^2} \frac{1}{2 \alpha_0} R_{lf} e^{-\alpha_0 \tau} \\ & \text{ただし、} \tau \neq 0. \end{aligned} \tag{7.204}$$

と表わされる。これらを用いると、同一検出器による3時点相関関数は、結局、次のように表わされることがわかる。

$$\begin{aligned} \Gamma_3(\tau_B, \tau_C) & = C_1 \left[\delta(\tau_B) \delta(\tau_C) + \frac{\varepsilon \langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle}{2 \alpha_0 l_f^2} \right. \\ & \times \{ \delta(\tau_B) e^{-\alpha_0 \tau_C} + \delta(\tau_C) e^{-\alpha_0 \tau_B} \} \\ & + \frac{\varepsilon^2}{l_f^2} \left[\frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1)(\nu_0 - 2) \rangle}{3 \alpha_0 l_f} e^{-\alpha_0(2\tau_B + \tau_C)} \right. \\ & \left. + \frac{\langle \nu_0(\nu_0 - 1) \rangle^2}{2 \alpha_0^2 l_f^2} e^{-\alpha_0(\tau_B + \tau_C)} \right]. \end{aligned} \tag{7.203b}$$

この結果は、すでに、DRAGT⁴⁹⁾の得ているものと当然のことながら一致する。注意すべきことは、3 又分枝過程の寄与、すなわち、 $\langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle$ を含む上式右辺第 4 項の時間依存は、 $\exp[-\alpha(2\tau_B+\tau_C)]$ となっている点である。 $\tau_B+\tau_C$ を一定とすれば、 $\tau_B<\tau_C$ の場合のほうが、 $\tau_B>\tau_C$ の場合に比べて、3 又分枝過程の寄与は、大きくなる。二又分枝過程の寄与は、定常系では、和 $\tau_B+\tau_C$ さえ一定であれば、 $\tau_B>\tau_C$ でも、 $\tau_C<\tau_B$ でも結果はかわらない。いわば、対称性があるわけである。三又分枝過程では、定常系でも、このような対称性がないことは、FURUHASHI⁵⁶⁾によって指摘され、逆にこの非対称を用いて、3 又分枝過程の寄与のみをとりだす新しい炉物理量測定法の提案が行なわれている。

d) 3 時点 Rossi- α 法

Orndoff 型の Rossi- α 法の自然な拡張として、FURUHASHI⁵⁷⁾ は、時刻 t に検出カウントのあるという条件のもとで、 τ_A 時間後の Δ_B 間に 1 カウント、さらに、その後 τ_B 時間後の Δ_C 間に 1 カウント検出カウントの存在する条件付結合確率 $P_3(\tau_B, \tau_C)\Delta_B\Delta_C$ にたいする表式を求めた。

まず、

$$P_3(\tau_B, \tau_C)\Delta_B\Delta_C = \frac{\langle N(t, \Delta_A)N(t+\tau_B, \Delta_B)N(t+\tau_B+\tau_C, \Delta_C) \rangle}{\langle N(t, \Delta_A) \rangle} \quad (7.205)$$

とおき、ついで、 $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ が十分小さいものと考え、それぞれ、 $d\tau_A, d\tau_B, d\tau_C$ とおく。上式右辺分子は、すでに、(7.201) 式で定義した検出カウントのゆらぎ

$$\delta N = N - \langle N \rangle$$

の 3 時点相関関数を用いて、次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} & \langle N(t, \Delta_A)N(t+\tau_B, \Delta_B)N(t+\tau_B+\tau_C, \Delta_C) \rangle \\ &= \Gamma_3(\tau_B, \tau_C)\Delta_A\Delta_B\Delta_C + \langle N(t, \Delta_A) \rangle \Gamma(\tau_C)\Delta_B\Delta_C \\ & \quad + \langle N(t+\tau_B, \Delta_B) \rangle \Gamma(\tau_B+\tau_C)\Delta_A\Delta_B \\ & \quad + \langle N(t+\tau_B+\tau_C, \Delta_C) \rangle \Gamma(\tau_B)\Delta_A\Delta_C \\ & \quad + \langle N(t, \Delta_A) \rangle \langle N(t+\tau_B, \Delta_B) \rangle \\ & \quad \times \langle N(t+\tau_B+\tau_C, \Delta_C) \rangle. \end{aligned} \quad (7.206)$$

いま、炉は定常と見え、また、 τ_B, τ_C いずれもゼロではないものとしよう。すでに得られている表式 (7.203 a), (7.205) を用いると次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} & P_3(\tau_B, \tau_C)d\tau_Bd\tau_C \\ & \equiv \lim_{\substack{\Delta_A \rightarrow d\tau_A \\ \Delta_B \rightarrow d\tau_B \\ \Delta_C \rightarrow d\tau_C}} P_3(\tau_B, \tau_C)\Delta_B\Delta_C \\ &= \frac{\varepsilon^2 \langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{3\alpha_0 l_f^3} e^{-\alpha_0(2\tau_B+\tau_C)} d\tau_Bd\tau_C \\ & \quad + \frac{\varepsilon^2 \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle^2}{2\alpha_0^2 l_f^4} e^{-\alpha_0(\tau_B+\tau_C)} d\tau_Bd\tau_C \\ & \quad + \frac{\varepsilon^2 \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{2\alpha_0 l_f^2} R_{11} \{ e^{-\alpha_0\tau_C} + e^{-\alpha_0(\tau_B+\tau_C)} + e^{-\alpha_0\tau_B} \} \\ & \quad \times d\tau_Bd\tau_C + C_1^2 d\tau_Bd\tau_C. \end{aligned} \quad (7.206)$$

自発核分裂以外に外部源のない場合には、補正因子 $1/k$ を上式右辺に乗ずればよい⁵⁷⁾。ただし、最後の項 C_1^2 はそのまましておく。

FURUHASHI は、 $\tau=\tau_B+\tau_C$ が一定でも、3 又の寄与は、 $\tau_B<\tau_C$ の場合と、 $\tau_B>\tau_C$ の場合とで異なることに注目し、次のようなデータ処理方法を提案した。すなわち、 $\tau_B<\tau_C$ であるカウント・トリオには、プラス (+) の符号を、 $\tau_B>\tau_C$ であるカウント・トリオには、マイナス (-) の符号を割りふるというものである。この時、 τ だけはいれた $d\tau$ 時間後にカウント記録が存在する確率 $P_{\pm}(\tau)d\tau$ は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} P_{\pm}(\tau)d\tau &= \left[\int_0^{\tau/2} d\tau_B P_3(\tau_B, \tau-\tau_B) - \int_{\tau/2}^{\tau} d\tau_B P_3(\tau_B, \tau-\tau_B) \right] d\tau \\ &= \frac{\varepsilon^2 \langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{3\alpha_0^2 l_f^3 k} e^{-\alpha_0\tau} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_0\tau}{2}} \right)^2 d\tau. \end{aligned} \quad (7.208)$$

すなわち、3 又の寄与のみ残る。Fig. 42 に $P_{\pm}(\tau)$ の理論値を示す。振幅 $A = \varepsilon^2 \langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle / (3\alpha_0^2 l_f^3 k)$ は (7.200) 式で求めた 3 次階乗キュームラントにおける 3 又の寄与 $2kZ_{\text{sat}}^2$ と次の関係にある。

$$\frac{\alpha_0 A}{C_1^2} = 2kZ_{\text{sat}}^2.$$

したがって、 A と Z_{sat} の測定から k を定めることができる。

7.7 ま と め

時間領域での炉雑音実験のうちで、Feynman- α 法や ORNDOFF の行なったような Rossi- α 法 (タイプ I) では、6 で述べたような雑音の周波数分析の場合と同様に、二又分枝からの直接の寄与 (cf. Fig. 10) のみを考慮

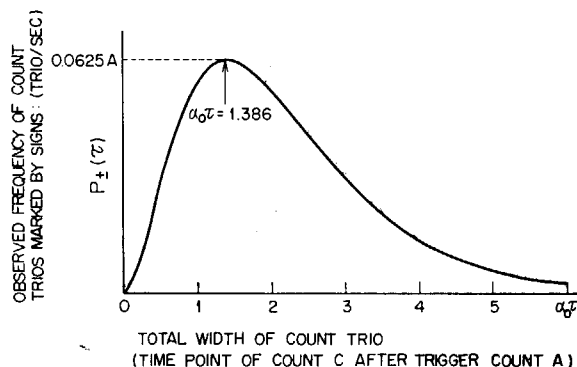


Fig. 42 Expected frequency of observation of count trios marked by signs (+) or (-) according to the relative position of the middle count represented as function of the total width of count trio*.

$$\left(A = \frac{\varepsilon^2 \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{3\alpha_0^2 l_f^3 k} \right)$$

* Reproduced from Ref. (57)

すれば十分である。したがって、遅発中性子の効果、自発核分裂の効果、空間・エネルギー依存の効果をきれいな形にとりいれていくことができる。

しかるに、近年行なわれているような電子回路で構成された時間分析器を用いた Rossi- α 法 (タイプ II) や Mogil'ner- P_0 法, Babala- P_{Ro} , P_{Cc} 法といった待ち時間分布の解析においては、二又のみならず、三又以上の高又の分枝過程の寄与を原理的にはとりいれていく必要がある。たとえば、2又近似を行なっても、ある共通の祖先から、何段かにわたって、2又分枝過程を重ねて到達してきた子孫中性子の寄与を全部ひろっていく必要がある (cf. Fig. 13).

確率母関数にたいする Pál-Bell 方程式は、遅発中性子の寄与を無視し、2又基本モード近似を行なえば、解析的に解ける Riccati 型となる。 (cf. Eq. (7.54), (7.71)). 遅発中性子や自発核分裂の効果をとりにいれて補正が施さず手続きに、炉物理的工夫が施こされる。将来、より精度の高い近似に基づく確率母関数や解析公式が得られるようになるであろう。その際、確率母関数に関しては、それから得られる分散の値が、Feynman の方法から得られるものと一致すべきであるし、また、 $P_0(T)$ の $T=0$ における微係数は、平均の検出率 (count/sec) に一致する必要がある。 $P_0(T)$ が求まれば、 $P_{Ro}(T)$, $P_{Cc}(T)$ は、(7.108), (7.109) の関係式から簡単に求まる。

(ただし、核分裂計数管のように、検出に伴ない二次中

性子が放出されると、その子孫中性子のうみだす検出カウンタは、始めの検出カウンタと相関をもち、マルコフ性が失なわれるので、(7.109) 式は厳密には成立しなくなる。))

タイプ II の Rossi- α 法の解析式 (7.156) も、二又基本モード近似の確率母関数から導出を行なったが、そこに含まれる Cr (chain register rate) や I (chain splitting factor) をそれぞれ他の精度の高い近似で求めたものにおきかえても、(7.156) の表式はそのまま保存されるかどうか検討する価値がある。 (たとえば、 I の表式 (7.157) における $P_{Ro}(T)$ を自発核分裂の相関源をとりにいれて、(7.102), (7.108) 式から算出したものにおきかえることが許されるかどうか。)

3時点 Rossi- α 法あるいは、3次モーメントにたいする表式は、5でのべた一般化された Feynman の方法を用いて面倒ではあるが、ごく初等的な演算で求めることができる。3又分枝過程の寄与をえぐりだせば、2又分枝の寄与のみを拾えば十分な他の相関実験から得られる動特性パラメータ以外の新しい情報が手に入る点が注目される。なお、7.6で指摘したように、3又分枝過程のうみだすカウンタ時系列は、定常系であっても、対称性をもたない点に注意すべきである。すなわち、時点 $t, t+\tau-\tau', t+\tau$ の3点に存在するカウンタ・トリオの頻度は、 $\tau' > 1/2\tau > 0$ の場合のほうが、 $0 < \tau' < 1/2\tau$ の場合に比べて高い。

あ と が き

線型・マルコフ過程とみなしうる零出力炉雑音現象の基礎理論は、すでに完成しており、高出力炉における雑音理論を開発するための足がかりとしての役割は十分果たしたと思われる。ただし、実際の炉雑音解析のための公式を基礎理論から導出する手続きには、泥臭い面が残っており、まして、データ処理技術面から実用的価値の高いといわれている極性相関実験あるいは、偶奇性 (parity) 相関実験に関しては、中性子分枝過程を考慮した解析公式を導出する試みが、最近、始まったばかりである。一方、2検出器相互相関法、光子雑音解析法、干渉 (coherence) 関数解析法や Chain register rate, 3 叉分枝過程に起因するカウント・トリオの測定につづく新しい炉雑音実験解析法の開発も、今後行なわれるものと期待される。また、中性子の平均的ふるまいに注目した従来の動特性解析あるいは安全性評価の信頼度をチェックするひとつのポイントとして、確率論的動特性解析は注目されつつあり、その計算コード化が急がれているのが現状である。

高出力炉雑音現象は、動特性パラメータに関する情報と共に、炉の不安定性や異常に関する情報の担い手として工学的にも強い関心がよせられている。物理的にも、熱エネルギー輸送、ボイドを含む乱流に伴う運動量輸送といった非平衡統計力学のひとつの応用分野として、高出力炉雑音理論は興味深いテーマと思われる。

ともすると、龐大な核データや計算機のためのアルゴリズムに執着せざるを得ない他の分野の炉物理理論とは

違い、炉雑音理論、特に高出力炉雑音理論は、物理屋としての思考上の欲求を十分満足させてくれるものと思われる。この分野で、より多くの若い研究者が優れた成果をあげることを念ずる次第である。

なお、本報の続篇 (II) では、確率論的動特性理論および高出力炉雑音理論についての報告を予定している。

1969年6月26日記

謝 辞

住田健二氏には、この分野へふみだす契機を与えて頂いた。三井田純一氏、黒田義輝氏、野村孜氏を始め、日本原子力学会炉雑音研究専門委員会の方々には、研究の動向をみつめる上で有効な討論の機会を与えて頂いた。大塚益比古氏には、直接御指導頂いた。小幡行雄氏にはセミナーを通じて統計現象にたいするもの見方を教えて頂いた。また西野治先生を始め、今は故人になられた石津武彦先生、あるいは、大山彰先生、安成弘先生、都甲泰正先生には、学位論文の審査を通じて有益な示唆を頂いた。高橋博氏、柱木学氏、田次呂吉氏を始め日本原子力研究所核設計研究室の方々には、理論上のこみいった議論に参加して頂いた。技術情報部、栗山実氏には、本報編集上いろいろお世話になった。

以上の方々に、深遠なる謝意を表します。

付録 A: 確率過程論に関する基礎知識

A.1 確率過程

時間 t とともに変動する偶然量 (random variable) $x(t)$ の組 $\{x_K(t)\}$ を, 確率過程 (stochastic process, random process) という. 種々な時刻で繰返し測定を行なっても, 実験誤差の範囲内で同じ結果が得られる時, 物理量は, 決定論的である (deterministic) という. そうでない時には, 確率過程 $\{x_K(t)\}$ の標本関数 (sample function) $x_K(t)$ が得られたことになる.

A.2 定常性とエルゴード性

ある時刻 t における偶然量の集合 (ensemble)

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_K(t)$$

が, 与えられたとしよう. 時刻 t における偶然量の期待値 (expected value) あるいは, 平均値 (mean) を, $\langle x(t) \rangle$ と表わす. これは, 次のように定義される.

$$\langle x(t) \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N x_K(t). \quad (\text{A.1})$$

また, 時刻 t と u における (2 時点) 相関関数 (correlation function) $\gamma(t, u)$ を, 次のように定義する.

$$\gamma(t, u) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N x_K(t)x_K(u). \quad (\text{A.2})$$

特に, $t=u$ の場合には, γ は, 2 次モーメント (moment) と呼ばれる. これに対応して, 平均値を 1 次モーメントと呼ぶことがある.

期待値のまわりのゆらぎ δx とは, 次の量をさす.

$$\delta x_K(t) \equiv x_K(t) - \langle x(t) \rangle. \quad (\text{A.3})$$

明らかに

$$\langle \delta x(t) \rangle = 0. \quad (\text{A.4})$$

ゆらぎの相関関数を, 特に $\Gamma(t, u)$ と表わす. すなわち,

$$\Gamma(t, u) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N \delta x_K(t) \delta x_K(u). \quad (\text{A.5})$$

(A.2) 式で定義した γ との間には, 次の関係があることは, 容易にわかる.

$$\Gamma(t, u) = \gamma(t, u) - \langle x(t) \rangle \langle x(u) \rangle. \quad (\text{A.6})$$

$t=u$ の場合, Γ は特に, 分散 (variance) とよばれる.

もし, すべての時刻 t, s で, 任意の時間推移 h にた

いして,

$$\langle x(t+h) \rangle = \langle x(t) \rangle, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma(t+h, s+h) = \gamma(t, s). \quad (\text{A.8})$$

という関係があるならば, 確率過程 $\{x_K(t)\}$ は, 弱い定常性がある (weakly stationary) という. この場合, 平均値 $\langle x(t) \rangle$ は, 時間によらず一定となり, また, 相関関数 $\Gamma(t, u)$ は, 時間差 $t-u$ のみの関数となる.

(A.2) 式の自然な拡張として, I 時点相関関数

$$\begin{aligned} &\gamma(t_1, t_2, \dots, t_I) \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N x_K(t_1)x_K(t_2)\dots x_K(t_I). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

を作ることができる. もし, すべての I , すべての時系列 $\{t_1, t_2, \dots, t_I\}$, 任意の時間推移 h にたいして

$$\begin{aligned} &\gamma(t_1+h, t_2+h, \dots, t_I+h) \\ &= \gamma(t_1, t_2, \dots, t_I). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

がなりたつ場合には, 確率過程 $\{x_K(t)\}$ は, 強い定常性がある (strongly stationary) という.

零出力臨界炉においては, 分散は, 時間推移に比例して増大する. したがって, 弱い定常性すらもたない.

(A.1), (A.5), (A.9) は, 偶然量の集合 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_K(t)\}$ について定義された量である. これにたいして, 1 つの標本関数 $x_K(t)$ についての平均値, 相関関数を, 次のように定義することができる.

$$\langle x_K \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt x_K(t). \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma_K(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt x_K(t+\tau)x_K(t). \quad (\text{A.12})$$

もし, これらの値があらゆる見本関数について等しい時, 確率過程 $\{x_K(t)\}$ は, エルゴード性がある (Ergodic) という. この場合には, 集合平均と値が等しく,

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_K \rangle, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma(t-u) = \gamma_K(t-u), \quad (\text{A.14})$$

がなりたつ. 定常性をもつということが, エルゴード的であるための必要条件になっている点に注意を要する. 炉雑音実験では, 通常, 標本関数 $x_K(t)$ を求め, (A.11), (A.12) の操作 (時間平均) によって, 平均値, 相関関数を定めている. 一方, 理論は, (A.1), (A.2) の操作 (集合平均) によっている. 実験解析では, エルゴード性がなりたつことを前提としている.

A. 3 確率過程の表現

確率過程を表現するには、次の3つの方法がよく用いられる。

- 1) 確率密度関数または確率分布関数
- 2) 相関関数
- 3) スペクトル密度関数

確率過程は、1) で、完全に表現されるが、目的によっては、特性の一部 2), 3) がわかればよい。

A. 3.1 確率および Bayes's rule

たとえば、銀貨を投げて、表がでるか裏がでるか、一連の実験(experiment or observation)を行なったとしよう。ある場合には、表がでるといふ事象(event) Aが起るし、また、裏がでるといふ事象 Bになるかも知れない。事象 A と事象 B とがあって、A, B が同時におこる確率(たとえば、2枚の銀貨があって、これらを投げた時、1枚が表、1枚が裏になる確率)を、事象 A, B の結合確率(joint probability)とよび、 $P(A, B)$ と表わす。

$$P(A, B) = P(A)P(B), \quad (\text{A. 15})$$

がなりたつ時、事象 A, B は、互いに独立である(independent) という。

前もって、事象 B が現われたという前提のもとで、事象 A が表われる確率を、条件付き確率(conditional probability)とよび、 $P(A|B)$ と表わす。

$P(A|B)$ と $P(A, B)$ との間には、次の関係が成りたつ。

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}. \quad (\text{A. 16})$$

これを、Bayes's rule とよぶ。この関係式は、Rossi- α 法の解析公式の導出の際、よく用いられる。

A. 3.2 確率密度関数

偶然量の値が、 x より小さい確率を $P(x)$ とおいた時、関数 $P(x)$ を確率分布関数(probability distribution function) とよぶ。いま、 $a \leq b$ とすると明らかに

$$P(a) \leq P(b), \quad (\text{A. 17})$$

がなりたつ。また、

$$P(-\infty) = 0, \quad P(+\infty) = 1, \quad (\text{A. 18})$$

である。確率変数の値が、 x と $x+dx$ の間にある確率を $p(x)dx$ とおき、関数 $p(x)$ を、確率密度関数(probability density function) とよぶ。分布関数 $P(x)$ が連続関数である場合、密度関数 $p(x)$ は、次のように表わされる。

$$p(x) = \frac{d}{dx} P(x) \geq 0. \quad (\text{A. 19})$$

あるいは、

$$P(x) = \int_{-\infty}^x d\xi p(\xi). \quad (\text{A. 20})$$

密度関数 $p(x)$ は、次のように規格化されている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1. \quad (\text{A. 21})$$

本報では、密度関数 $p(x)$ の事を確率分布関数とよんでいる。

代表的な確率密度関数を、TABLE 16 に示す。

変数 x が離散的で、整数 $n(\geq 0)$ のみをとる場合には、

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \delta(x-n) \quad (\text{A. 22})$$

と表わせる。 $p(n)$ の例も TABLE 16 には示した。2種類の偶然量があって、それぞれの値が x および y より小さい結合確率分布を $P(x, y)$ と表わす。これは、

$$P(-\infty, y) = P(x, -\infty) = 0, \quad (\text{A. 23})$$

$$P(+\infty, +\infty) = 1, \quad (\text{A. 24})$$

という値をとる。また、それぞれの値が、 x と $x+dx$, y と $y+dy$ にある確率を $p(x, y)dx dy$ と表わし、関数 $p(x, y)$ を、結合確率密度関数とよぶ。分布関数 $P(x, y)$ と密度関数 $p(x, y)$ との間には、次の関係がある。

$$p(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(x, y) \geq 0. \quad (\text{A. 25})$$

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^x d\xi \int_{-\infty}^y d\eta p(\xi, \eta). \quad (\text{A. 26})$$

密度関数は、次の規格化条件をみたす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy p(x, y) = 1. \quad (\text{A. 27})$$

また、さきに定義した一変数の密度関数との間には、次の関係がある。

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy p(x, y). \quad (\text{A. 28})$$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, y). \quad (\text{A. 29})$$

次の関係がなりたつ場合、2種類の偶然量 x, y は、統計的に独立であるという。

$$p(x, y) = p(x)p(y). \quad (\text{A. 30})$$

2変数のみならず、さらに多変数の確率分布、確率密度関数も、導入することは、容易であろう。例を、TABLE 16 に示す。

確率密度関数 $p(x)$ のフーリエ変換を、特性関数(characteristic function) という。

$$C(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} p(x) = \langle e^{i\xi x} \rangle. \quad (\text{A. 31})$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$ 。

特性関数 $C(\xi)$ の原点における m 次の導関数から、 x の m 次モーメント $\langle x^m \rangle$ が得られる。

$$\left. \frac{d^m}{d\xi^m} C(\xi) \right|_{\xi=0} = i^m \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^m p(x) = i^m \langle x^m \rangle. \quad (\text{A. 32})$$

特に, x が離散的な場合には, (A.22) 式を (A.31) に代入し,

$$z = e^{i\xi}$$

とおく. すなわち,

$$G(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n). \quad (\text{A.33})$$

これを, 確率母関数(probability generating function) という.

$G(z)$ の $z=0$ における n 次の導関数から, 確率 $p(n)$ が得られる. すなわち,

$$p(n) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dz^n} G(z) \right|_{z=0}. \quad (\text{A.34})$$

m 次モーメントは, $\left(z \frac{d}{dz}\right)^m$ を, m 回作用させた後, $z=1$ とおくことにより求められる. すなわち,

$$\langle n^m \rangle = \left. \left(z \frac{d}{dz}\right)^m G(z) \right|_{z=1}. \quad (\text{A.35})$$

一方, $z=1$ における $G(z)$ の m 次の導関数の値は, m 次の階乗(factorial) モーメントと呼ばれる. すなわち

$$\begin{aligned} \gamma_m &\equiv \langle n(n-1)\cdots(n-m+1) \rangle \\ &= \left. \frac{d^m}{dz^m} G(z) \right|_{z=1}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

m 次のモーメントは, m 次以下の階乗モーメントによって表わすことができる. すなわち,

$$\langle n^m \rangle = \sum_{l=1}^m C_l^m \langle n(n-1)\cdots(n-l+1) \rangle. \quad (\text{A.37})$$

係数 C_l^m は, Stevens の分割数とよばれる. その値は, たとえば,

$$C_1^m = C_m^m = 1, \quad C_2^m = \frac{1}{2}(2^m - 1), \dots \quad (\text{A.38})$$

となる.

階乗モーメント γ_m を用いて, 確率母関数は,

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \gamma_m \quad (\text{A.39})$$

と表わすことができる. 一方, $\ln G(z)$ の $z=1$ のまわりのテイラー展開

$$\ln G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-1)^m}{m!} \bar{\sigma}_m \quad (\text{A.40})$$

の係数 $\bar{\sigma}_m$ を, m 次の階乗キュムラント(factorial cumulant)と呼ぶ. γ_m と $\bar{\sigma}_m$ との関係は, KUBO⁸⁴⁾ によって考察されている. 例をあげると,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0 &= 0, \quad \gamma_1 = 1, \\ \bar{\sigma}_1 &= \gamma_1 = \langle n \rangle, \\ \bar{\sigma}_2 &= \gamma_2 - \gamma_1^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle, \\ \bar{\sigma}_3 &= \gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3, \\ \bar{\sigma}_4 &= \gamma_4 - 4\gamma_3\gamma_1 - 3\gamma_2^2 + 12\gamma_2\gamma_1^2 - 6\gamma_1^4, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

m 次の階乗キュムラントは, m 次以下の階乗モーメントで表わすことができる. 逆に,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \bar{\sigma}_1, \\ \gamma_2 &= \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \bar{\sigma}_3 + 3\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_1^3, \\ \gamma_4 &= \bar{\sigma}_4 + 4\bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_1 + 3\bar{\sigma}_2^2 + 6\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_1^4, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

多変数の確率密度関数についても同様に, 特性関数を導入できる. たとえば,

$$C(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\xi_1 x} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i\xi_2 y} p(x, y). \quad (\text{A.43})$$

特に, 変数が離散的な場合には, 確率母関数

$$G(z_1, z_2) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z_1^l z_2^n p(l, n). \quad (\text{A.44})$$

を導入する. いま, 事象Aが, l である確率 $p_A(l)$ と, 事象Bが n である確率 $p_B(n)$ が与えられており, 事象AとBとが, 互いに独立ならば, 和事象 $S=A+B$ において, 値が r である確率 $p_{A+B}(r)$ は, 次のように, $p_A(l)$ と $p_B(n)$ のたたみこみ(convolution) で与えられる.

$$p_{A+B}(r) = \sum_{l=0}^r p_A(l) p_B(r-l). \quad (\text{A.45})$$

この時, $p_{A+B}(r)$ の確率母関数 $G_{A+B}(z)$ は, $p_A(l)$ の確率母関数 $G_A(z)$ と $p_B(n)$ の確率母関数 $G_B(z)$ の積で与えられる. すなわち,

$$G_{A+B}(z) = G_A(z) G_B(z). \quad (\text{A.46})$$

一方, 事象Bが n であるという条件のもとで, 事象Aが l である確率 $p_{A|B}(l|n)$ が与えられているとし, その確率母関数を, $G_{A|B}(z_1|n)$ とおこう. すなわち,

$$G_{A|B}(z_1|n) = \sum_{l=0}^{\infty} z_1^l p_{A|B}(l|n). \quad (\text{A.47})$$

結合確率 $p_{AB}(l, n)$ の確率母関数 $G_{AB}(z_1, z_2)$ は, $G_{A|B}(z_1|n)$ と次の関係にある.

$$G_{AB}(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} z_2^n p_B(n) G_{A|B}(z_1|n). \quad (\text{A.48})$$

さて, 今度は, 互いに独立な偶然量 A_1, A_2, \dots , があり, $A_i(i=1, 2, \dots)$ が l である確率は, i に無関係に共通に $p_A(l)$ で与えられるとしよう. この時, 和 $S_r = A_1 + A_2 + \dots + A_r$ が l である確率 $p_{S_r}(l)$ にたいする母関数は, (A.46) 式を用いて, $[G_A(z)]^r$ と表わせる. いま, 和の項数 r も, 偶然量で, 値が r になる確率は, $p(r)$ で与えられているとしよう. この時, 項数については, 問わず, とにかく和 $S = A_1 + \dots$ が, l である確率にたいする母関数は, (A.48)式を用いて,

$$\sum_{r=0}^{\infty} p(r) [G_A(z)]^r \quad (\text{A.49})$$

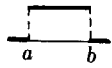
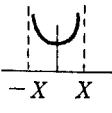
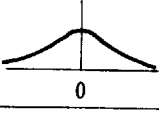
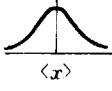
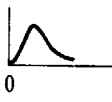
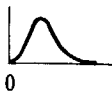
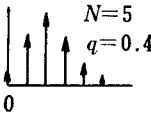
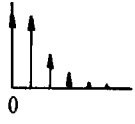
と表わせる. 特に, $p(r)$ の母関数を $g(z)$ とおくと, 上式は, $g(G_A(z))$ に等しい. この性質は, 外部中性子源の存在する定常炉における中性子数の確率母関数を求めるのに使用されている (cf. 5.3.4).

多重結合確率 $p(n_1, n_2, \dots, n_i)$ の階乗モーメントは, 一般に次のように定義される.

$$\begin{aligned} \gamma(m_1, m_2, \dots, m_i) \\ = \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2}^{\infty} \dots \sum_{n_i=m_i}^{\infty} \prod_{i=1}^i [n_i(n_i-1)\cdots(n_i-m_i+1)] \\ \times p(n_1, n_2, \dots, n_i). \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

これは, 確率母関数のテイラー展開係数になっている.

TABLE 16 Probability density function

Type	Probability density function	Mean	Variance or Covariance	Characteristic function or Probability generating function
Uniform	 $p(x) = 1/(b-a), \text{ for } a \leq x \leq b$ $= 0, \text{ otherwise}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{a^2+ab+b^2}{3}$	$\frac{e^{i\xi b} - e^{i\xi a}}{i\xi}$
Sine wave	 $p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{X^2-x^2}}, \text{ for } x < X$ $= 0, \text{ otherwise}$	0	$\frac{X^2}{2}$	$J_0(\xi X)$, where $J_0(z)$ is Bessel function.
Cauchy or Lorentzian	 $p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	Not exist	Not exist	$e^{- \xi }$
Gaussian or Normal	 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}$	$\langle x \rangle$	σ^2	$e^{i\langle x \rangle \xi - \frac{\sigma^2}{2} \xi^2}$
Rayleigh	 $p(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x^2/2a^2}, \text{ for } x \geq 0$ $= 0, \text{ otherwise}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} a$	$(2 - \frac{\pi}{2}) a^2$	$e^{-a^2 \xi^2/4} \times D_{-2}(-i \frac{a^2 \xi}{2})$, where $D_\nu(Z)$ is parabolic cylinder function.
Maxwell	 $p(x) = \frac{x^2}{a^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2a^2}, \text{ for } x \geq 0$ $= 0, \text{ otherwise}$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a$	$(3 - \frac{8}{\pi}) a^2$	$\sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-a^2 \xi^2/4} \times D_{-3}(-i \frac{a^2 \xi}{2})$
Binomial	 $p(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} q^n (1-q)^{N-n}$	Nq	$Nq(1-q)$	$[1+q(Z-1)]^N$
Poisson	 $p(n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$	a	a	$e^{a(Z-1)}$
Multidimensional Gaussian (Normal)	$p(x_1, x_2, \dots, x_1) = \frac{\exp\left\{- C /2 \cdot \sum_{i,j=1}^I \Delta_{ij} (x_i - \langle x_i \rangle) (x_j - \langle x_j \rangle)\right\}}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{ C }}$ <p>, where C is the determinant of matrix C, the i-j element of which is C_{ij}. The cofactor of C_{ij} in C is Δ_{ij}.</p>	$\langle x_i \rangle$	C_{ij}	$\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^I \Delta_{ij} \xi_i \xi_j\right\}$
Multinomial	$p(n_1, n_2, \dots, n_1) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_1!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_1^{n_1}$ <p>where $N = n_1 + n_2 + \dots + n_1$ and $p_1 + p_2 + \dots + p_1 = 1$.</p>	Np_i	$Np_i(\delta_{ij} - p_j)$	$\left[1 + \sum_{i=1}^I p_i (Z_i - 1)\right]^N$
Multiple Poisson	$p(n_1, n_2, \dots, n_1) = \frac{a_1 a_2 \dots a_1}{n_1! n_2! \dots n_1!} e^{-a_1 - a_2 - \dots - a_1}$	$\langle n_i \rangle = a_i$	$\delta_{ij} a_i$	$\exp\left\{\sum_{i=1}^I a_i (Z_i - 1)\right\}$

$$\ln C(\xi(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{i!} \int dt_1 \int dt_2 \cdots \int dt_i \gamma(t_1, t_2, \dots, t_i) \xi(t_1) \xi(t_2) \cdots \xi(t_i). \quad (\text{A. 70})$$

特に、ガウス過程においては、3時点以上の相関関数はゼロである。中性子数のゆらぎは、3時点以上の相関関数が存在し、したがって、ガウス過程ではない。

期待値のまわりのゆらぎ $\delta x(t)$ の多時点相関関数 $\Gamma(t_1, t_2, \dots, t_i)$ は、(A. 69)式において、 x を δx でおきかえた後、(A. 70) のような展開を行なって定めることができる。注意すべきことは、多時点相関関数は、キュームラントであり、モーメントではない点である。したがって、

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2) &= \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \rangle \\ \Gamma(t_1, t_2, t_3) &= \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \delta x(t_3) \rangle \end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \delta x(t_3) \delta x(t_4) \rangle \\ &\quad - \Gamma(t_1, t_2) \Gamma(t_3, t_4) \\ &\quad - \Gamma(t_1, t_3) \Gamma(t_2, t_4) \\ &\quad - \Gamma(t_1, t_4) \Gamma(t_2, t_3) \end{aligned}$$

となる。

ゆらぎ $\delta x(t)$ の相関関数 ${}^{XX}\Gamma(\tau)$ のかわりに、ゆらぎの符号のみに注目する場合には、次のような極性相関関数 (polarity correlation function) を導入する。

$${}^{XX}\Gamma_p(\tau) = \langle \text{sgn}[x(t)] \text{sgn}[x(t+\tau)] \rangle. \quad (\text{A. 71})$$

ここで、任意の実数 x にたいして、

$$\begin{aligned} \text{sgn } x &= 1, \text{ if } x > 0 \\ &= -1, \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (\text{A. 72})$$

特に、ガウス過程においては、極性相関関数は、自己相関関数と次のような関係にある⁴⁷⁾。

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} {}^{XX}\Gamma_p(\tau)\right] = \frac{{}^{XX}\Gamma(0)}{{}^{XX}\Gamma(\tau)} \quad (\text{A. 73})$$

極性相関は、データ処理が容易なので、炉雑音解析の手法として注目を集めているが、炉内の物理現象との関連については、まだ、理論的にほとんど手がつけられていない。

A. 3. 4 スペクトル密度関数

確率過程 $\{x_k(t)\}$ のフーリエ解析を行なおう。いま、

$$\begin{aligned} \delta x_{kT}(t) &= \delta x_k(t), \text{ if } 0 \leq t \leq T \\ &= 0, \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (\text{A. 74})$$

とおいて、

$$\delta x_{kT}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kT}(n) e^{i\omega_n t}, \quad (\text{A. 75})$$

とする。ここで、和 Σ' は、 $n=0$ の場合を除くという意味である。また、

$$\omega_n = 2\pi n/T. \quad (\text{A. 76})$$

$$a_{kT}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \delta x_k(t) e^{-i\omega_n t}. \quad (\text{A. 77})$$

フーリエ展開係数 $\{a_{kT}(n)\}$ は、ひとつの確率過程となる。

ところで、確率変数 $\{\delta x_k(t)\}$ が、不規則に変動する電流をあらわすものとしよう。この電流が1オームの抵抗に流れた時発生する全電力の平均値 $\langle P \rangle$ は、

$$\langle P \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt [\delta x_{kT}(t)]^2 \quad (\text{A. 78})$$

で表わされる。上式は、また、フーリエ展開の Parseval の定理によって、

$$\langle P \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{kT}(n)|^2 \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (\text{A. 79})$$

とおくことができる。ただし、

$$\Delta\omega = 2\pi/T. \quad (\text{A. 80})$$

したがって、

$$\Phi(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} T |a_{kT}(n)|^2 \quad (\text{A. 81})$$

は、 $\delta x(t)$ のフーリエ成分のうち、 $\omega - \pi\Delta\omega$ から $\omega + \pi\Delta\omega$ のもののパワー $\langle P \rangle$ への密与を表わす。したがって、 $\Phi(\omega)$ は、パワー・スペクトル密度 (power spectral density) とよばれる*。

ところで、(A. 77)式を用いると、

$$\begin{aligned} \langle |a_T(n)|^2 \rangle &= \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \rangle \\ &\quad \times e^{-i\omega_n(t_1-t_2)} \end{aligned} \quad (\text{A. 82})$$

となる。定常系においては、相関関数 $\langle \delta x(t_1) \delta x(t_2) \rangle$ は、時間差 $\tau = t_1 - t_2$ のみの関数である。さらに、 $\tau \rightarrow \infty$ の時、 $\langle \delta x(t+\tau) \delta x(t) \rangle \rightarrow 0$ と仮定すると、(A. 82)式から、次の結果をうる。

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} T \langle |a_T(n)|^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \Gamma(t_1 - t_2) e^{-i\omega_n(t_1-t_2)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \Gamma(t_1 - t_2) e^{-i\omega_n(t_1-t_2)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \Gamma(t_1 - t_2) e^{-i\omega_n(t_1-t_2)} \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T d\tau (T-\tau) \Gamma(\tau) e^{-i\omega_n \tau} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T d\tau (T-\tau) \Gamma(-\tau) e^{i\omega_n \tau} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Gamma(\tau) e^{-i\omega_n \tau}. \end{aligned} \quad (\text{A. 83})$$

したがって、(A. 81)式を用いると、

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Gamma(\tau) e^{-i\omega \tau}. \quad (\text{A. 84})$$

また、上式のフーリエ逆変換として、

$$\Gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi(\omega) e^{-i\omega \tau} \quad (\text{A. 85})$$

が得られる。すなわち、定常系における相関関数とパワー・スペクトル密度とは、互に、フーリエ変換、逆変換

* 後にでてくる相互パワー・スペクトル密度と区別するために、自己(auto)パワー・スペクトル密度とよぶことがある。

の関係にある。これを、Wiener-Khintchin の定理という。

もし、確率過程が、ガウスのかつマルコフ的であれば、相関関数は、

$$\Gamma(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \langle x^2 \rangle e^{-|t_1 - t_2|/\gamma}$$

となる。(Doob の定理)¹⁹⁰⁾ここで、 $1/\gamma$ は、相関の緩和時間である。したがって、パワー・スペクトル密度は、

$$\Phi(\omega) = 2\langle x^2 \rangle \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$

となる。周波数 ω が、 γ に比べて十分小さい範囲では、 $\Phi(\omega)$ は、周波数に依存しなくなり、“白色”とみなせる。あるいは、

$$\langle x^2 \rangle \rightarrow \infty$$

$$1/\gamma \rightarrow 0$$

$$2\langle x^2 \rangle/\gamma \rightarrow B = \text{const.}$$

という極限を考えると、

$$\Phi(\omega) \rightarrow B$$

となって、周波数 ω に依存しなくなる。すなわち、“白色”となる。この時、相関関数は、

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{2} e^{-|t|/\gamma} = \delta(t)$$

であるから、

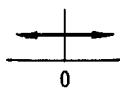
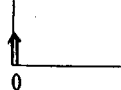

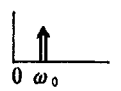
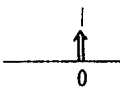
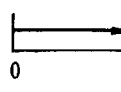
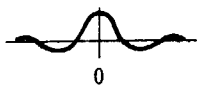
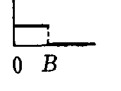
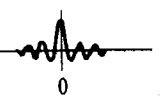
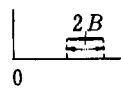
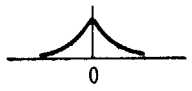
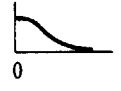

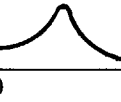

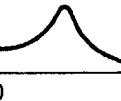
$$\Gamma(t_1 - t_2) = B\delta(t_1 - t_2)$$

となることがわかる。物理現象は、すべて有限の緩和時間をもつが、われわれの観測の尺度が、それに比べて十分粗ければ、近似的に現象は瞬間的に行なわれ、白色なパワー・スペクトル密度をもつとみなすことができる。

TABLE 17 に、相関関数とパワー・スペクトル密度との関係をいくつか示す。

相互パワー・スペクトル密度 (cross power spectral

TABLE 17 Auto-correlation and power spectral density function (cf. Ref. (172))

Autocorrelation function	Type	Power spectral density function
$\Gamma(\tau) = c^2$ 	Constant	 $\Phi(\omega) = 2\pi C^2 \delta(\omega)$
$\Gamma(\tau) = \frac{X^2}{2} \cos \omega_0 \tau$ 	Sine wave	 $\Phi(\omega) = \frac{\pi X^2}{2} \delta(\omega - \omega_0)$
$\Gamma(\tau) = a\delta(\tau)$ 	White noise	 $\Phi(\omega) = a$
$\Gamma(\tau) = 2aB \left(\frac{\sin B\tau}{2\pi B\tau} \right)$ 	Low-pass white noise	 $\Phi(\omega) = a, 0 \leq \omega \leq B; \text{ otherwise zero}$
$\Gamma(\tau) = 2aB \left(\frac{\sin B\tau}{\pi B\tau} \right) \cos \omega_0 \tau$ 	Band-pass white noise	 $\Phi(\omega) = a, 0 < \omega_0 - B \leq \omega \leq \omega_0 + B$ otherwise zero
$\Gamma(\tau) = e^{-a \tau }$ 	Exponential	 $\Phi(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\Gamma(\tau) = e^{-a \tau } \cos \omega_0 \tau$ 	Exponential cosine	 $\Phi(\omega) = a \left[\frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right]$
$\Gamma(\tau) = e^{-a \tau } (b \cos \omega_0 \tau + c \sin \omega_0 \tau)$ 	Exponential cosine, exponential sine	 $\Phi(\omega) = \frac{ab + c(\omega + \omega_0)}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{ab - c(\omega - \omega_0)}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}$

density) は, 2種類の確率過程 $\{x_k(t)\}$, $\{y_k(t)\}$ にたいして, 次のようにして求められる.

$${}^{XY}\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt {}^{XY}\Gamma(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (\text{A. 86})$$

一般に, 相互パワー・スペクトル密度 ${}^{XY}\Phi(\omega)$ は, 複素数である. 一方, 自己パワー・スペクトル密度は, $\Gamma(\tau)$ が偶関数であるから, 実数であることは, (A. 84) 式からわかる. 干渉関数 (coherence function) $R(\omega)$ は, 次のように定義される.

$$R(\omega) = \frac{|{}^{XY}\Phi(\omega)|^2}{{}^{XX}\Phi(\omega){}^{YY}\Phi(\omega)}. \quad (\text{A. 87})$$

$R(\omega)$ は, 次の範囲にある.

$$0 \leq R(\omega) \leq 1. \quad (\text{A. 88})$$

A. 4 マルコフ過程

マルコフ過程においては, 現時点 t における値 $x(t)$ がわかれば, 将来 $t' (> t)$ の値 $x(t')$ は, 予測できる. この際, 過去の情報は必要としない. いいかえれば, 条件付確率 $P(x(t')|x(t))$ を定めれば, 時刻 $t_n, t_{n-1}, \dots, t_1, t$ で値が, それぞれ, $x(t_n), x(t_{n-1}), \dots, x(t_1), x(t)$ である結合確率は, 次のように表わされてしまう.

$$\begin{aligned} P(x(t_n); x(t_{n-1}); \dots; x(t_1); x(t)) \\ = P(x(t_n)|x(t_{n-1}))P(x(t_{n-1})|x(t_{n-2})) \times \dots \\ \times P(x(t_1)|x(t))P(x(t)). \end{aligned}$$

ただし, ここで, $t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t$ とし, また, $P(x(t))$ は, 時刻 t で値が $x(t)$ である確率を表わす.

対象とする現象を記述するのに必要な確率変数が, 一般に, f_1, f_2, \dots, f_I と合わせて I 箇ある場合を考えよう. たとえば, 一点炉モデルでは, 中性子数と6組の先行核数と合わせて, 7つの確率変数で, マルコフ的な記述ができる. f_1, f_2, \dots, f_I をたてベクトル \mathbf{f} の成分と考えよう. 時刻を明示して, 条件つき確率を $P(\mathbf{f}, t|\mathbf{f}_0, t_0)$ と書く. これは, 時刻 t に, 確率変数が \mathbf{f}_0 である時, 後の時刻 $t (> t_0)$ で確率変数が \mathbf{f} である確率を表わす. この条件つき確率は, しばしば, 遷移確率 (transition probability) とよばれる. これは, 次のような規格化条件をみだす.

$$\sum_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f}, t|\mathbf{f}_0, t_0) = 1, \quad (\text{A. 89})$$

ここで, $t > t_0$.

和 $\sum_{\mathbf{f}}$ は \mathbf{f} のとりうるあらゆる値について加え合わせることを意味する. また, 次のような初期条件をみだす.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(\mathbf{f}, t|\mathbf{f}_0, t_0) = \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0). \quad (\text{A. 90})$$

すなわち, 遷移確率の値は, $t = t_0$ においては, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$ の場合のみ1である. さらに, 次の Smoluchowski の条件をみだす.

$$P(\mathbf{f}, t + \Delta t|\mathbf{f}_0, t_0)$$

$$= \sum_{\mathbf{f}'} P(\mathbf{f}, t + \Delta t|\mathbf{f}', t) P(\mathbf{f}', t|\mathbf{f}_0, t_0). \quad (\text{A. 91})$$

ここで, $\Delta t > 0$. これは, $t + \Delta t$ に \mathbf{f} へ移るには, まず, 時刻 t に \mathbf{f}' まで移り, そこから Δt 時間かけて, \mathbf{f} へ移ればよいことから当然要請される条件である.

さて, 微小時間 Δt の間の遷移確率は, 次のように展開できることが多い.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}, t + \Delta t|\mathbf{f}', t) \\ = (1 - \Gamma(\mathbf{f}', t)\Delta t)\delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}') \\ + \gamma(\mathbf{f}|\mathbf{f}', t)\Delta t + O(\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (\text{A. 92})$$

ここで, $\gamma(\mathbf{f}|\mathbf{f}', t)\Delta t$ は, 微小時間 Δt の間に \mathbf{f}' から \mathbf{f} へ遷移する確率密度, $\Gamma(\mathbf{f}', t)\Delta t$ は, \mathbf{f}' から他の状態へ遷移する確率で,

$$\Gamma(\mathbf{f}', t) = \sum_{\mathbf{f} \neq \mathbf{f}'} \gamma(\mathbf{f}|\mathbf{f}', t) \quad (\text{A. 93})$$

と与えられる. したがって, (A. 92) 式右辺第1項は, Δt だけ時間がたっても, そのまま, \mathbf{f}' という状態にとどまる確率を表わしている. (A. 92) 式を, (A. 91) 式へ代入すると, 次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}, t + \Delta t) = P(\mathbf{f}, t) - \Gamma(\mathbf{f}, t)P(\mathbf{f}, t)\Delta t \\ + \sum_{\mathbf{f}'} \gamma(\mathbf{f}|\mathbf{f}', t)P(\mathbf{f}', t)\Delta t. \end{aligned} \quad (\text{A. 94})$$

上式右辺第1項を左辺に移し, 全体を Δt で割った後, 極限操作 $\Delta t \rightarrow 0$ を施すと, 次のような運動方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{f}, t) = -\Gamma(\mathbf{f}, t)P(\mathbf{f}, t) \\ + \sum_{\mathbf{f}'} \gamma(\mathbf{f}|\mathbf{f}', t)P(\mathbf{f}', t). \end{aligned} \quad (\text{A. 95 a})$$

初期条件は,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(\mathbf{f}, t) = \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0). \quad (\text{A. 95 b})$$

(A. 95) の方程式を, 前向き (forward) Chapman-Kolmogorov 方程式という. 初期条件 (A. 95 b) から出発して, 将来, 確率分布がどうかわっていくかを記述している. Courant-Wallace 方程式 (cf. Eq. (3. 12)) は, (A. 95 a) を確率母関数を用いて書き改めたものに, ほかならない.

一方, 終期状態 \mathbf{f}_f を固定して, この状態へどの状態から遷移してくるかを問うこともできる. すなわち, (A. 91) 式を, 次のように書き改める.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}_f, t_f|\mathbf{f}, t) \\ = \sum_{\mathbf{f}'} P(\mathbf{f}_f, t_f|\mathbf{f}', t + \Delta t) P(\mathbf{f}', t + \Delta t|\mathbf{f}, t), \end{aligned}$$

ただし, $t_f \geq t + \Delta t \geq t$. (A. 96)

(A. 92) と同様な関係式

$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}', t + \Delta t|\mathbf{f}, t) = (1 - \Gamma(\mathbf{f}, t)\Delta t)\delta(\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \\ + \gamma(\mathbf{f}'|\mathbf{f}, t)\Delta t + O(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

を, (A. 96) 式に代入し整理すると次の結果がえられる.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{f}, t) = -P(\mathbf{f}, t)\Gamma(\mathbf{f}, t) \\ + \sum_{\mathbf{f}'} P(\mathbf{f}', t)\gamma(\mathbf{f}'|\mathbf{f}, t). \end{aligned} \quad (\text{A. 97 a})$$

終期条件として

$$\lim_{t \rightarrow t'} P(\mathbf{f}, t) = \delta(\mathbf{f}_f - \mathbf{f}). \quad (\text{A. 97 b})$$

(A. 97)は、後向きの (backward) Chapman-Kolmogorov 方程式という。(A. 95 a)式を作用素 L を用いて

$$L \cdot P = 0 \quad (\text{A. 95' a})$$

と表わした時、(A. 97 a)式は、

$$L^+ \cdot P = 0 \quad (\text{A. 97' a})$$

と書ける。 L^+ は、 L の随伴作用素になっている。PAL-BELL 方程式は、(A. 97)式に対応している。

さて、(A. 90)式から、 $P(\mathbf{f}, t + \Delta t | \mathbf{f}', t)$ に関する $(\mathbf{f} - \mathbf{f}')$ のモーメントは全て、 $\Delta t \rightarrow 0$ の時、ゼロになることがわかる。そこで、モーメントを Δt で展開できると考え、

$$\begin{aligned} \sum (\mathbf{f} - \mathbf{f}')^n P(\mathbf{f}, t + \Delta t | \mathbf{f}', t) \\ = n! D_n(\mathbf{f}', t) \Delta t + O(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (\text{A. 98})$$

とおけるものとしよう。ここで、 n 箇の任意なベクトル ${}^1\mathbf{a}, {}^2\mathbf{a}, \dots, {}^n\mathbf{a}$ の積は、ランク n のテンソルで、その成分 $(ij\dots)$ は、次のように与えられる

$$({}^1\mathbf{a}, {}^2\mathbf{a}, \dots, {}^n\mathbf{a})_{ij\dots} = {}^1a_i {}^2a_j \dots \quad (\text{A. 99})$$

特に、 D_1 は、 I 箇の成分をもつベクトル、 D_2 は、 $I \times I$ の正方行列である。

さて、 \mathbf{f} の関数を $G(\mathbf{f})$ とおく。これは次のように、テイラー展開ができるものとしよう。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{f}) &= G(\mathbf{f}' + \mathbf{f} - \mathbf{f}') \\ &= G(\mathbf{f}') + \frac{1}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{f} - \mathbf{f}')^n : G^{(n)}(\mathbf{f}'). \end{aligned} \quad (\text{A. 100})$$

ここで、記号 $:$ は、その左側のテンソルの成分と右側のテンソルの対応する成分とをかけ合わせたものを、すべての成分について加え合わせるという意味である。したがって、たとえば、 $n=2$ の場合には、

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} - \mathbf{f}')^2 : G^{(2)}(\mathbf{f}') \\ = \sum_{i,j=1}^I (f_i - f'_i)(f_j - f'_j) \frac{\partial^2 G(\mathbf{f}')}{\partial f'_i \partial f'_j} \end{aligned}$$

となる。(A. 91)式に $G(\mathbf{f})$ をかけて、 \mathbf{f} の全ての状態について和をとる。特に右辺においては、 $G(\mathbf{f})$ の代わりに、(A. 100)式右辺を用いる。さらに、(A. 89)式を用いると次の結果をうる。

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{f}(t + \Delta t)) \rangle &= \langle G(\mathbf{f}(t)) \rangle \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{f}'} \sum_{\mathbf{f}''} \left\{ \frac{1}{n!} (\mathbf{f} - \mathbf{f}')^n P(\mathbf{f}, t + \Delta t | \mathbf{f}', t) \right. \\ &\quad \left. : G^{(n)}(\mathbf{f}') P(\mathbf{f}', t | \mathbf{f}_0, t_0) \right\}. \end{aligned}$$

上式右辺第2項に、(A. 98)式を用いると、結果は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle G(\mathbf{f}(t)) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle D_n(\mathbf{f}) : G^{(n)}(\mathbf{f}) \rangle. \quad (\text{A. 101 a})$$

ただし、初期条件として

$$\lim_{t \rightarrow t_0} G(\mathbf{f}) = G(\mathbf{f}_0). \quad (\text{A. 101 b})$$

さて、

$$G(\mathbf{f}) = \delta(\mathbf{f} - \mathbf{y})$$

とおこう。(A. 101 a)式左辺は、 $P(\mathbf{y}, t)$ となる。一方、

右辺は、部分積分を行なって変形でき、次の結果をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{y}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right)^n : [D_n(\mathbf{y}, t) P(\mathbf{y}, t)]. \quad (\text{A. 102})$$

特に、 $n \geq 3$ の時、 $D_n = 0$ であれば、上式は、次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{y}, t) &= - \sum_{i=1}^I \frac{\partial}{\partial y_i} D_{1i} P(\mathbf{y}, t) \\ &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} D_{2ij} P(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (\text{A. 103})$$

これを、Fokker-Planck の方程式という。さらに、 $G(\mathbf{f}) = \mathbf{f}, \mathbf{f}^2, \dots$ とおくと、モーメントの満足すべき運動方程式を(A. 101 a)式からうるができる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{f}(t) \rangle = \langle D_1(\mathbf{f}) \rangle. \quad (\text{A. 104})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{f}^2(t) \rangle = \langle D_1 \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f} D_1 \rangle + 2 \langle D_2(\mathbf{f}) \rangle. \quad (\text{A. 105})$$

特に、線型な確率過程においては、

$$\langle D_1(\mathbf{f}) \rangle = D_1(\langle \mathbf{f} \rangle), \quad (\text{A. 106})$$

$$\langle D_2(\mathbf{f}) \rangle = D_2(\langle \mathbf{f} \rangle), \quad (\text{A. 107})$$

とおくことができる。中性子輸送に関するボルツマン方程式は、(A. 106)を用いた方程式(A. 104)に対応するものである。

定常状態における一次モーメントを特に、 \mathbf{f}_{1s} とおこう。線型系においては、これは、

$$D_1(\mathbf{f}_{1s}) = 0 \quad (\text{A. 108})$$

の解として定めることができる。定常な線型系に、外乱 $\mathbf{M}(t)$ が加わり、状態が \mathbf{f}_{1s} から $\mathbf{f}_{1s} + \delta \mathbf{f}_M(t)$ へかわるものとしよう。(A. 104)式から、 $\langle \delta \mathbf{f}_M \rangle$ は、次の運動方程式を満足することがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \mathbf{f}_M(t) \rangle = -L \langle \delta \mathbf{f}_M \rangle + \mathbf{M}(t). \quad (\text{A. 109})$$

ただし、ここで、 $D_1(\mathbf{f})$ が \mathbf{f} について線型であることから、

$$\langle D_1(\mathbf{f} + \delta \mathbf{f}) \rangle = D_1(\langle \mathbf{f} \rangle) - L \delta \mathbf{f} \quad (\text{A. 110})$$

と展開できることを用いた。

ところで定常系において、 \mathbf{f}_{1s} のまわりのゆらぎ

$$\delta \mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_{1s}$$

は、何らかの雑音源 $\mathbf{F}(t)$ が存在するために現われるものと考えよう。(A. 109)式の類推から、 $\delta \mathbf{f}$ は、次の運動方程式をみたすとみることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{f}(t) = -L \delta \mathbf{f} + \mathbf{F}(t). \quad (\text{A. 111})$$

偶然量 $\delta \mathbf{f}$ の運動方程式を、特に、stochastic kinetic equation あるいは、Langevin 方程式とよび、 $\mathbf{F}(t)$ を雑音源あるいは、Langevin 外力という。問題は、 $\mathbf{F}(t)$ の性質を、すべてのモーメント方程式(A. 104)、(A. 105)等と矛盾のないように定めることにある。

まず、定常系においては、 $\langle \delta \mathbf{f} \rangle = 0$ のはずであるから、

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0 \quad (\text{A. 112})$$

でなければならないことがわかる. 逆に, (A. 112)式がなりたてば, (A. 111)の解

$$\delta \mathbf{f}(t) = \int_{-\infty}^t ds e^{-Ls} \mathbf{F}(s) \quad (\text{A. 113})$$

の期待値は, ゼロになることがわかる. ここで, e^{-Ls} は, 線型作用素 L のグリーン関数行列を意味する. すなわち,

$$Gr(t|0) \equiv e^{-Lt} \quad (\text{A. 114})$$

は, 初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} Gr(t|0) = U \quad (\text{A. 115})$$

をみたす方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} Gr(t|0) = -LGr \quad (\text{A. 116})$$

の解である. (A. 115) 式で, U は, 対角行列である. すなわち, その ij 成分は,

$$\begin{aligned} U_{ij} &= 1; \quad i=j \text{ の時} \\ &= 0; \quad i \neq j \text{ の時} \end{aligned} \quad (\text{A. 117})$$

である.

さらに, また, 雑音源の相関関数

$$\langle \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(u) \rangle = 2 \langle D_2 \rangle \delta(t-u) \quad (\text{A. 118})$$

であれば, Langevin 方程式 (A. 111) から得られるゆらぎの分散, あるいは, 2時点相関関数は, (A. 105)等から得られる結果と一致することが示せる*. すなわち, マルコフ過程における雑音源のパワ・スペクトル密度は, 白色である.

以上, 本報で用いられる確率過程に関する基本的な定義および関係式を, いくつか示してきた. より詳細な議論は, たとえば, FUSHIMI¹⁷⁶⁾, FELLER¹⁷⁵⁾, BENDAT¹⁷¹⁾¹⁷²⁾, LEE¹⁸²⁾, STRATONOVICH¹⁸⁷⁾, DOOB¹⁷⁴⁾, KAWADA¹⁸⁰⁾, ITOH¹⁷⁹⁾等の書物, あるいは, LAXの論文⁸⁸⁾等¹⁹⁰⁾を参考にされるとよいであろう.

* cf. 文献(88) Classical Noise I. p. 18.

付録 B: 核分裂にともなう放出中性子数の確率分布

B. 1 即発中性子

TABLE 18 は, HAMMEL *et al.*⁶³⁾, DIVEN *et al.*⁴⁵⁾, HICKS *et al.*⁶⁸⁾ による測定値をまとめたものである. ν_0 箇の中性子が放出される確率分布 $p(\nu_0)$ は, 次のような 2 項分布に合わせることができる⁶⁸⁾.

$$p(\nu_0) = \frac{m!}{\nu_0!(m-\nu_0)!} \left(\frac{\langle \nu_0 \rangle}{m}\right)^{\nu_0} \left(1 - \frac{\langle \nu_0 \rangle}{m}\right)^{m-\nu_0} \quad (B.1)$$

m は, 5, 6, 7 のうちから最も適当なものを選ぶ. すなわち, 分布 $p(\nu_0)$ から,

$$\frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{\langle \nu_0 \rangle^2} = \frac{m-1}{m}, \quad (B.2)$$

$$\frac{\langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{\langle \nu_0 \rangle^3} = \frac{(m-1)(m-2)}{m^2}, \quad (B.3)$$

等が得られる. 測定値は, たとえば, U-235 の場合,

$$\frac{\langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle}{\langle \nu_0 \rangle^2} = 0.795. \quad (B.4)$$

$$\frac{\langle \nu_0(\nu_0-1)(\nu_0-2) \rangle}{\langle \nu_0 \rangle^3} = 0.485. \quad (B.5)$$

これから, ^{235}U では, (B.1) 式における m を 5 と選べばよいことがわかる. HARA は, モデル (B.1) をさらに発展させて, 2 項分布のたたみこみを用いて, より近似よく測定値を再現できることを示している*. 一方, TERRELL^{147, 168)} は, 期待値 $\langle \nu_0 \rangle$ のまわりの分布は, 核種に関係なく次のような正規分布で, 非常に精度よく再現できることを報告している.

$$\sum_{n=0}^{\nu_0} p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{[\nu_0 - \langle \nu_0 \rangle + 1/2 + b]/\sigma} e^{-t^2/2} dt. \quad (B.6)$$

ここで, $\sigma = 1.08$, また $b (< 0.01)$ は, ν_0 が負にはならないことに対応した補正因子である. Fig. 43 に, 測定値との比較を示す.

B. 2 遅発中性子

RAIEVSKI¹²¹⁾ は, 核分裂 1 回当たり放出される遅発中性

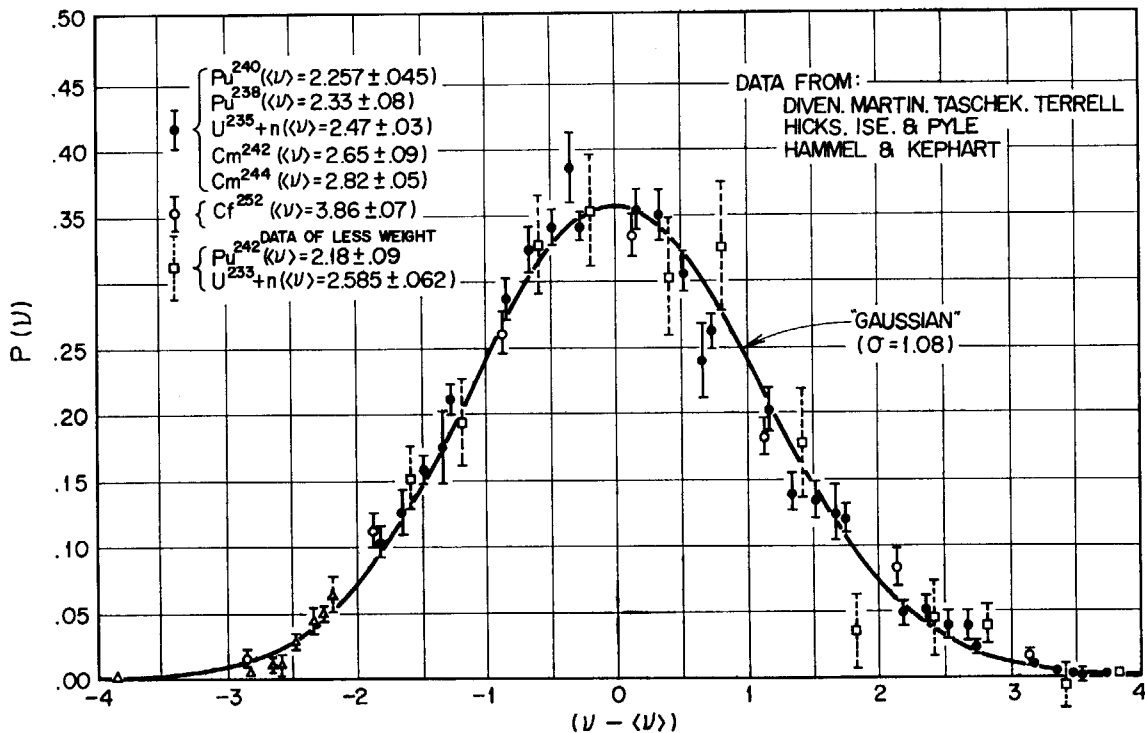


Fig. 43 Experimental noncumulative neutron emission probabilities. The continuous curve is for a "Gaussian".**

* 原文雄, "中性子放出確率の近似に関する一考察", 日本原子力学会昭和43年炉物理・炉工学分科会要旨集 C1.

** Reproduced from Ref. (147)

子先行核は、ただか1箇と仮定した。この仮定と、

$$\langle \nu_0 \rangle = (1-\beta)\langle \nu \rangle, \tag{B.7}$$

$$\langle \nu_i \rangle = \beta_i \langle \nu \rangle \tag{B.8}$$

という事実を用いると、合わせて ν 箇の2次粒子(即発中性子+先行核)が、核分裂に伴ない放出された時、 ν_0 箇の即発中性子と、 ν_i 箇の*i*群の先行核が生まれる条件付確率 $p(\nu_0, \nu_i | \nu)$ は、次のように表わされる^{1,139)}。

$$p(\nu_0, \nu_i | \nu) = 1 - \beta \nu; \nu_0 = \nu, \sum_{j=1}^I \nu_j = 0 \text{ の時,} \\ = \beta_i \nu; \nu_0 = \nu - 1, \nu_i = 1 \text{ かつ} \\ \sum_{j=1}^I \nu_j = 1 \text{ の時.} \tag{B.9}$$

この確率分布を用いると、次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \langle \nu_0^2 \rangle &= (1-2\beta)\langle \nu^2 \rangle + \beta\langle \nu \rangle, \\ \langle \nu_0 \nu_i \rangle &= \beta_i (\langle \nu^2 \rangle - 1), \\ \langle \nu_i^2 \rangle &= \beta_i \langle \nu \rangle, \\ \langle \nu_i \nu_j \rangle &= 0, \text{ ただし, } i \neq j. \end{aligned} \right\} \tag{B.10}$$

一方, SAITO¹²⁹⁾ は、次のような多項分布を仮定した。

$$p(\nu_0, \nu_i | \nu) = \frac{\nu!}{\nu_0! \nu_1! \dots \nu_i!} (1-\beta)^{\nu_0} \beta_1^{\nu_1} \dots \beta_i^{\nu_i} \tag{B.13}$$

これから、

$$\left. \begin{aligned} \langle \nu_0(\nu_0-1) \rangle &= (1-\beta)^2 \langle \nu(\nu-1) \rangle, \\ \langle \nu_0 \nu_i \rangle &= (1-\beta) \beta_i \langle \nu(\nu-1) \rangle, \\ \langle \nu_i(\nu_i-1) \rangle &= \beta_i^2 \langle \nu(\nu-1) \rangle, \\ \langle \nu_i \nu_j \rangle &= \beta_i \beta_j \langle \nu(\nu-1) \rangle, \text{ ただし, } i \neq j. \end{aligned} \right\} \tag{B.12}$$

が得られる。

なお、現在、核分裂生成物に関するデータをもとに、遅発中性子数のモーメントの値を定める研究が行なわれつつあり*、物理的背景のしっかりした値がやがて手に入ることと思われる。

* E. Takekoshi (Private communication, June, 1969)

TABLE 18 Probabilities of the number of prompt neutrons emitted by fissions

Nuclide	Neutron induced fission					
	²³³ U	²³⁵ U		²³⁸ U	²³⁹ Pu	
Reference	45	45	147	147	147	45
Energy	80 keV	80 keV	1.25 MeV	4.8 MeV	1.5 MeV	80 keV
$\langle \nu_0 \rangle$	2.585 ± 0.062	2.47 ± 0.03	2.65 ± 0.07	3.20 ± 0.08	2.65 ± 0.09	3.048 ± 0.079
$[\langle \nu_0^2 \rangle - \langle \nu_0 \rangle] / \langle \nu_0^2 \rangle$	0.786 ± 0.013	0.795 ± 0.007	0.786 ± 0.018	0.835 ± 0.013	0.845 ± 0.025	0.815 ± 0.017
p(0)	0.010 ± 0.008	0.027 ± 0.004				-0.01 ± 0.01
p(1)	0.151 ± 0.024	0.158 ± 0.010				0.11 ± 0.03
p(2)	0.326 ± 0.037	0.339 ± 0.014				0.13 ± 0.06
p(3)	0.301 ± 0.044	0.305 ± 0.015				0.56 ± 0.08
p(4)	0.176 ± 0.041	0.133 ± 0.013				0.11 ± 0.08
p(5)	0.042 ± 0.028	0.038 ± 0.009				0.06 ± 0.09
p(6)	-0.010 ± 0.017	-0.001 ± 0.003				0.05 ± 0.08
p(7)	0.006 ± 0.009	0.001 ± 0.002				0.00 ± 0.06
p(8)	-0.002 ± 0.002	0.000 ± 0.000				-0.01 ± 0.03

Nuclide	Spontaneous fission					
	²³⁶ Pu	²³⁸ Pu	²⁴⁰ Pu			
Reference	68	68	68	45	63	147
$\langle \nu_0 \rangle$	2.30 ± 0.19	2.33 ± 0.08	2.257 ± 0.046	2.257 ± 0.045		2.26 ± 0.05
$[\langle \nu_0^2 \rangle - \langle \nu_0 \rangle] / \langle \nu_0^2 \rangle$	0.807 ± 0.039	0.809 ± 0.009		0.807 ± 0.008		0.807 ± 0.005
p(0)	0.062 ± 0.035	0.044 ± 0.009	0.041 ± 0.009	0.049 ± 0.006	0.062 ± 0.06	
p(1)	0.156 ± 0.090	0.175 ± 0.026	0.219 ± 0.021	0.214 ± 0.012	0.198 ± 0.017	
p(2)	0.38 ± 0.13	0.384 ± 0.026	0.351 ± 0.021	0.321 ± 0.014	0.374 ± 0.022	
p(3)	0.28 ± 0.12	0.237 ± 0.027	0.241 ± 0.020	0.282 ± 0.017	0.228 ± 0.024	
p(4)	0.096 ± 0.086	0.124 ± 0.021	0.127 ± 0.018	0.112 ± 0.013	0.114 ± 0.022	
p(5)	0.033 ± 0.036	0.036 ± 0.009	0.020 ± 0.006	0.021 ± 0.008	0.027 ± 0.013	
p(6)			0.001 ± 0.002	0.001 ± 0.003	0.000 ± 0.005	
p(7)				0.000 ± 0.002		
p(8)				0.000 ± 0.000		

Nuclide	Spontaneous fission							
	²⁴² Pu	²⁴² Cm	²⁴⁴ Cm			²⁵² Cf		
Reference	68	68	68	45	147	68	45	147
$\langle\nu_0\rangle$	2.18 ± 0.09	2.65 ± 0.09	2.84 ± 0.09	2.810 ± 0.059	2.82 ± 0.05	3.82 ± 0.12	3.869 ± 0.078	3.86 ± 0.07
$[\langle\nu_0^2\rangle - \langle\nu_0\rangle^2]/\langle\nu_0^2\rangle$	0.792 ± 0.014	0.791 ± 0.004		0.810 ± 0.008	0.790 ± 0.005		0.850 ± 0.006	0.844 ± 0.002
p(0)	0.063 ± 0.013	0.011 ± 0.005	0.001 ± 0.004	0.009 ± 0.005		0.001 ± 0.001	0.005 ± 0.002	
p(1)	0.192 ± 0.034	0.126 ± 0.018	0.099 ± 0.017	0.109 ± 0.016		0.021 ± 0.007	0.004 ± 0.009	
p(2)	0.351 ± 0.041	0.323 ± 0.018	0.281 ± 0.022	0.292 ± 0.023		0.111 ± 0.019	0.138 ± 0.019	
p(3)	0.324 ± 0.047	0.347 ± 0.020	0.365 ± 0.018	0.315 ± 0.027		0.271 ± 0.019	0.223 ± 0.032	
p(4)	0.033 ± 0.026	0.139 ± 0.013	0.198 ± 0.020	0.224 ± 0.027		0.326 ± 0.018	0.356 ± 0.035	
p(5)	0.036 ± 0.013	0.050 ± 0.009	0.049 ± 0.009	0.030 ± 0.017		0.178 ± 0.016	0.175 ± 0.034	
p(6)		0.004 ± 0.002	0.007 ± 0.002	0.021 ± 0.010		0.077 ± 0.013	0.071 ± 0.028	
p(7)		0.001 ± 0.001		0.000 ± 0.003		0.013 ± 0.004	0.022 ± 0.017	
p(8)				0.000 ± 0.000		0.003 ± 0.001	0.006 ± 0.007	

付録 C: (4.47) 式の導出

グリーン関数のみたす次のような関係式を用いた.

$$\frac{d}{d\eta} Gr(t-\eta) = Gr(t-\eta)B. \quad (C.1)$$

$$\frac{d}{d\eta} Gr^T(t-\eta) = B^T Gr^T(t-\eta). \quad (C.2)$$

これは随伴グリーン関数 $Gr^+(t'|t)$ のみたす次のような方程式

$$-\frac{d}{dt} Gr^+(t'|t) = -B^T Gr^+(t'|t) \quad ; \quad t < t' \text{ の時}$$

$$Gr^+(t'|t) = U \quad ; \quad t = t' \text{ の時}$$

$$= 0 \quad ; \quad t > t' \text{ の時}$$

から得られる. すなわち, B が定数の時, $Gr^+(t'|t)$ は, 時間差 $\xi = t' - t \geq 0$ のみの関数である. したがって

$$Gr^+(t'|t) \equiv Gr^+(\xi),$$

とおくと Gr^+ に対する方程式は

$$\frac{d}{d\xi} Gr^+(\xi) = -B^T Gr^+(\xi) \quad (C.3)$$

あるいは転置して

$$\frac{d}{d\xi} Gr^{+T}(\xi) = -Gr^{+T}(\xi)B \quad (C.4)$$

となる. Gr^T と Gr^+ との関係は

$$Gr^+(\xi) = Gr^T(\xi) \quad (C.5)$$

とかける. (C.3) および (C.4) 式に上の関係を用い $\xi = t - \eta$ とおけばそれぞれ (C.2) および (C.1) 式が得られる.

付録 D: (4.49) 式の導出

BNES から相関関数への寄与のフーリエ変換は, 次のようにして求まる. まず, $t-u \geq 0$ 側の積分を行なう.

$$\int_0^\infty d(t-u) e^{-i\omega(t-u)} \int_{-\infty}^u d\eta Gr(t-\eta) QGr^T(u-\eta)$$

$$= \int_0^\infty d(t-u) \int_{-\infty}^u d\eta e^{-i\omega(t-\eta)} Gr(t-\eta) QGr^T(u-\eta)$$

$$\times e^{i\omega(u-\eta)}.$$

変数変換を行なう. すなわち $\xi = t-u$, $\zeta = u-\eta$ とおくと上式は, 次のようになる.

$$\int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\zeta e^{-i\omega(\xi+\zeta)} Gr(\xi+\zeta) QGr^T(\zeta) e^{i\omega\zeta}$$

$$= \int_0^\infty d\zeta \left[\int_0^\infty d\xi e^{-i\omega(\xi+\zeta)} Gr(\xi+\zeta) \right] QGr^T(\zeta) e^{i\omega\zeta}$$

$$= \int_0^\infty d\zeta \left[\int_\zeta^\infty d\eta' e^{-i\omega\eta'} Gr(\eta') \right] QGr^T(\zeta) e^{i\omega\zeta}. \quad (D.1)$$

一方 $t-u < 0$ 側の積分は次のようになる.

$$\int_{-\infty}^0 d(t-u) e^{-i\omega(t-u)} \int_{-\infty}^t d\eta Gr(t-\eta) QGr^T(u-\eta)$$

$$= \int_0^\infty d(u-t) \int_{-\infty}^t d\eta e^{-i\omega(t-\eta)} Gr(t-\eta) QGr^T(u-\eta)$$

$$\times e^{i\omega(u-\eta)}.$$

$\eta' = t-\eta$, $\xi = u-t$ とおくと, 上式は次のようになる.

$$\int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta' e^{-i\omega\eta'} Gr(\eta') QGr^T(\eta'+\xi) e^{i\omega(\eta'+\xi)}$$

$$= \int_0^\infty d\xi \int_0^\xi d\eta' e^{-i\omega\eta'} Gr(\eta') QGr^T(\xi) e^{i\omega\xi}. \quad (D.2)$$

ただし $\zeta = \xi + \eta'$. (D.1) と (D.2) を加え合わせれば結局

$$\int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\eta' e^{-i\omega\zeta} Gr(\zeta) QGr^T(\eta') e^{i\omega\eta'}$$

$$= Gr[i\omega] QGr^T[-i\omega].$$

付録 E: (5.116) 式の導出

一般に合成関数 $F(x)=f(g(x))$ の m 階導関数はいわゆる Bell の多項式を用いて次のように書ける。(たとえば岩波全書 221, 数学公式 I p 6 参照)

$$\frac{d^m}{dx^m} F(x) = \sum_{r_1! \dots r_m!} \frac{m!}{(1!)^{r_1} (2!)^{r_2} \dots (m!)^{r_m}} \dots \quad (E.1)$$

ただし, ここで和は

$$\sum_{k=1}^m kr_k = m$$

となるような 0 または正の整数の組 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 全部にわたってとられる。

また

$$g_i = \frac{d^i g(x)}{dx^i} \quad (E.2)$$

かつ, (E.1) 式を t のべきでまとめたとき得られる t^i の項を

$$f_i = \frac{d^i f(y)}{dy^i} \Big|_{y=g(x)} \quad (E.3)$$

とおきかえるものとする。

さて, われわれの問題

$$\frac{d^m}{dz^m} [\tilde{G}(z)]^j \Big|_{z=1} \quad (E.3)$$

にこの公式を適用しよう。積分 $\int dv' \chi(v')$ は, 議論の本質には関係ないので省略する。

まず次のことに注意する。

$$f_i = \frac{d^i f(y)}{dy^i} \Big|_{y=\tilde{G}(z)} = \frac{j!}{(j-i)!} [\tilde{G}(z)]^{i-j} \quad ; \text{ for } i \leq j, \\ = 0 \quad ; \text{ for } i \geq j+1. \quad (E.5)$$

ところで $\tilde{G}(z)|_{z=1}=0$ であるから

$$f_i(y)|_{y=0} = j! \delta_{ij}. \quad (E.6)$$

一方本文 (5.108) および (E.2) 式から

$$g_i = \frac{d^i \tilde{G}(z)}{dz^i} \Big|_{z=1} = -\gamma_i.$$

したがって

$$\frac{d^m}{dz^m} [\tilde{G}(z)]^j \Big|_{z=1} = (-1)^j j! \sum_{r_1! \dots r_m!} \frac{m!}{(1!)^{r_1} (2!)^{r_2} \dots (m!)^{r_m}} \dots \quad (E.7)$$

ただし, 今度は和は (E.1) 式の後でのべた条件

$$\sum_{k=1}^m kr_k = m \quad (E.8)$$

の他に (E.6) からの条件

$$\sum_{k=1}^m r_k = j \quad (E.9)$$

を満足するような 0 または正の整数の組 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 全部にわたってとる。

(E.8), (E.9) からまず

$$m \geq j$$

であることがわかる。等号が成り立つのは

$$r_1 = m \quad r_2 = \dots = r_m = 0$$

の場合である。

次に $j \geq 2$ のとき $r_m = 0$ でなければならない。

なぜならば $r_m \neq 0$ とすると (E.8) 式から

$$\sum_{k=1}^{m-1} kr_k = m(1-r_m).$$

左辺は決して負にはならないから等号が成り立つためには $r_m = 1, r_1 = r_2 = \dots = r_{k-1} = 0$ でなければならない。

ところがこのときは (E.9) 式左辺 = 1, したがって $j \geq 2$ という事実と矛盾する。

こうして (E.7) 式右辺には r_m は含まれないことがわかった。

付録 F: (7.106) 式の証明

時間幅 T を幅 ΔT の L 箇の小区域に分けよう。 $P'(1, \Delta T; 0, T)$ は, 次のように表わされる。

$$P'(1, \Delta T; 0, T) \\ = P(1, 0, \Delta T; 0, \Delta T, \Delta T; 0, 2\Delta T, \Delta T; \dots; \\ 0, T-2\Delta T, \Delta T; 0, T-\Delta T, \Delta T) \quad (F.1)$$

上式右辺は, 1 カウントの検出量が時刻 $t=0$ から ΔT 時間の観測でえられ, $t=\Delta T$ から ΔT 時間の観測ではゼロ, $t=2\Delta T$ から ΔT 時間の観測でもゼロ, ..., $t=T-\Delta T$ から ΔT 時間の観測でもゼロという多重結合確率を表わす。ところで, 上式は, もし, カウント時

系列が定常マルコフ過程であるとする、次のように分解できる。

$$\begin{aligned} P'(1, \Delta T; 0, T) \\ = P(1, 0, \Delta T) p(0, \Delta T, \Delta T | 1, 0, \Delta T) \\ \times [p(0, \Delta T, \Delta T | 0, 0, \Delta T)]^{L-2}. \end{aligned} \quad (\text{F. 2})$$

ここで、 $p(0, \Delta T, \Delta T | 0, 0, \Delta T)$ は、 ΔT 時間の間の観測でカウントがないという条件の基で、ひき続いて行なわれた ΔT の間の観測でもカウントのないという条件付確率である。定常系では、この確率は、2つの観測時点間の差のみに関係し、時間原点のとり方には無関係である。

同様に、 $P(0, T; 1, \Delta T)$ も定常マルコフ過程では、次のように表わされるはずである。

$$\begin{aligned} P(0, T; 1, \Delta T) \\ = P(0, 0, \Delta T) [p(0, \Delta T, \Delta T | 0, 0, \Delta T)]^{L-2} \\ \times p(1, \Delta T, \Delta T | 0, 0, \Delta T). \end{aligned} \quad (\text{F. 3})$$

したがって、 $P'(1, \Delta T; 0, T)$ と $P(0, T; 1, \Delta T)$ とが等しいことをいうためには、

$$\begin{aligned} P(1, 0, \Delta T) p(0, \Delta T, \Delta T | 1, 0, \Delta T) \\ = P(0, 0, \Delta T) p(1, \Delta T, \Delta T | 0, 0, \Delta T). \end{aligned} \quad (\text{F. 4})$$

であること、いいかえれば、等時間幅 ΔT であいついで2回観測を行なった時、始めに1カウント得られ、後はゼロである結合確率 $P(1, \Delta T; 0, \Delta T)$ と、始めはゼロで後で1カウント得られる確率 $P(0, \Delta T; 1, \Delta T)$ とが等しいことを示せばよい。3又分枝過程の寄与は、7.6でのべたように非対称性があるので一般には、前後いれかわっても、結合確率の値が変わらないことを示すのは困難である。しかしながら、 ΔT が十分小さい時、確率母関数

$$\begin{aligned} G(z_1, z_2 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \equiv \sum_{N=0} \sum_{M=0} z_1^N z_2^M P(N, \Delta T; M, \Delta T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (\text{F. 5})$$

は、右辺の始めの3項のみで近似できる(他は、 $(\Delta T)^2$ 以上のオーダー)。ここで、 $P(N, \Delta T; M, \Delta T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は、時刻 $t < 0$ に相空間点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) に投入された1箇の中性子により起動された非定常炉で、時刻 $t=0$ から ΔT 時間の観測で N カウント、ひきつづいて行なわれた ΔT 時間の観測で M カウント得られる条件つき結合確率を表わす。さらに、

$$\begin{aligned} \tilde{G} = 1 - G = (1 - z_1) P(1, \Delta T; 0, \Delta T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ + (1 - z_2) P(0, \Delta T; 1, \Delta T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (\text{F. 6})$$

のみたす Pál-Bell 方程式(5.99)における非同次項 E_0 は、 $(\Delta T)^2$ 以上のオーダーになるから、無視でき、 \tilde{G} は、線型方程式

$$L^+ \tilde{G} = (1 - z_1) v \Sigma_d \Delta_1 + (1 - z_2) v \Sigma_d \Delta_2. \quad (\text{F. 7})$$

の解として与えられることになる。ここで、 Δ_1 は、前後2回の観測で、始めの ΔT の間のみ1、他はゼロ、 Δ_2 は後の ΔT の間のみ1、他はゼロである。

この線型方程式の構造からわかるように、 $z_1=0, z_2=1$ とおいて得られる $P(1, \Delta T; 0, \Delta T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t - \Delta t)$ と $z_1=1, z_2=0$ とおいて得られる $P(0, \Delta T; 1, \Delta T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ とは、同じになる。($t < 0$)*

そこで、外部源のある定常炉での確率母関数

$$G(z_1, z_2 | S) = \sum_{N=0} \sum_{M=0} z_1^N z_2^M P(N, \Delta T; M, \Delta T) \quad (\text{F. 8})$$

のみたす関係式

$$\begin{aligned} \ln G(z_1, z_2 | S) \\ = - \int_{-\infty}^{2\Delta T} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} S(\mathbf{x}, t) \chi_s(\mathbf{v}) \tilde{G}(z_1, z_2 | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \end{aligned} \quad (\text{F. 9})$$

は、次のように整理される。

$$\begin{aligned} \ln G(z_1, z_2 | S) \\ = - [1 - z_1 + 1 - z_2] \int_{-\infty}^{\Delta t} dt \iint d\mathbf{x} d\mathbf{v} S(\mathbf{x}, t) \chi_s(\mathbf{v}) \\ \times P(1, \Delta T; 0, \Delta T | \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + O(\Delta T)^2 \end{aligned} \quad (\text{F. 10})$$

したがって、 $G(1, 0 | S)$ と $G(0, 1 | S)$ 、いいかえれば、 $P(1, \Delta T; 0, \Delta T)$ と $P(0, \Delta T; 1, \Delta T)$ とは、等しくなる。自発核分裂の効果がある場合には、(F.9)式は、(5.101)式のように複雑になるが、 \tilde{G}^n といった項は $(\Delta T)^n$ のオーダーであるから、結局 $n=1$ の場合のみ残り、 ΔT が無限小の場合、やはり、

$$P(1, \Delta T; 0, \Delta T) = P(0, \Delta T; 1, \Delta T). \quad (\text{F. 11})$$

であるという結論が得られる。こうして、(7.106)式、すなわち、

$$P(0, T; 1, \Delta T) = P'(1, \Delta T; 0, T) + O(\Delta T)^2 \quad (\text{F. 12})$$

ということが証明できた。なお、核分裂計数管のように検出に伴ない二次中性子が放出されるような場合には、カウント時系列の単純マルコフ性が失なわれ、(7.106)式は、成立しなくなる。

* 中性子投入時刻 t が $0 < t < 2\Delta T$ の場合の P は、 $G(z_1, z_2 | S)$ へは $O(\Delta T)^2$ の寄与となるので考えない。

REFERENCES

- 1) AKCASU A. Z., OSBORN R. K., "Application of Langgevin's Technique to Space-and Energy-Dependent Noise Analysis", *Nucl. Sci. Eng.*, **26**, 13-25 (1966)
- 2) ALBRECHT R. W., "The Measurement of Dynamic Nuclear Reactor Parameters Using the Variance of the Number of Neutrons Detected", *Nucl. Sci. Eng.*, **14**, 153-158 (1962)
- 3) ALBRECHT R. W., "Statistical Uncertainties in Pulsed Neutron and Excursion Experiments", *Noise Analysis in Nuclear Systems*, AEC Symp. Series No. 4, TID-7679, pp. 347-355 (1964)
- 4) ALBRECHT R. W., SEIFRITZ, W., "Fundamental Properties of the Coherence Function in Symmetrical Two-Node Systems", *Nukleonik*, **11**, 143-148 (1968)
"The Coherence Function: A Measure of Spatially Dependent Nuclear Reactor Properties", Japan-United States Seminar on Nuclear Reactor Noise Analysis, Preprints, pp. 285-306 (1968)
- 5) ARAI E., "Zeitanalyse mit Hilfe der Rossi- α -Methode", *Nukleonik*, **5**, 338-342 (1963)
- 6) BABALA D., "On the Theory of Rossi-Alpha Experiment in Reactor Noise Studies", *Nucl. Sci. Eng.*, **26**, 418-419 (1966)
"Point-Reactor Theory of Rossi-Alpha Experiment", *Nucl. Sci. Eng.*, **28**, 237-242 (1967)
- 7) BABALA D., "Interval Distributions in Neutron Counting Statistics", *Nucl. Sci. Eng.*, **28**, 243-246 (1967)
- 8) BALCOMB J. D., DEMUTH H. B., GYFTOPOULOS E. P., "A Crosscorrelation Method for Measuring the Impulse Response of Reactor Systems", *Nucl. Sci. Eng.*, **11**, 159-166 (1961)
- 9) BALL R. M., BATCH M., "Measurement of Noise in Three Pressurized-Water Reactors", *Noise Analysis in Nuclear Systems*, AEC Symposium Series No. 4, TID-7679, pp. 387-404 (1964)
- 10) BARRETT P. R., THOMPSON J. J., "A Stochastic Approach to the Kinetics of Zero Power Heterogeneous Lattices", *Nukleonik*, **11**, 4-9 (1968)
- 11) BARRETT P. R., THOMPSON J. J., "A Stochastic Approach to the Equations of Power Reactor Kinetics", *Energia Nucleare* (Milano), **15**, 455-466 (1968)
- 12) BÄRS B., "Stochastic Fluctuations in the Power Burst of a Reactor", *Nukleonik*, **9**, 118-122 (1967)
- 13) BÄRS B., "Stochastic Fluctuations in the Power Pulses of TRIGA Reactors", *Nukleonik*, **9**, 301 (1967)
- 14) BÄRS B., "The Delayed Neutron Fraction—Neutron Lifetime Ratio in a TRIGA Reactor from Noise Analysis", *Nucl. Sci. Eng.*, **30**, 104-108 (1967)
- 15) BELL G. I., "Probability Distribution of Neutrons and Precursors in a Multiplying Assembly", *Annals of Physics*, **21**, 243-283 (1963)
- 16) BELL G. I., ANDERSON W. A., GALBRAITH D., "Probability Distribution of Neutrons and Precursors in a Multiplying Medium, II", *Nucl. Sci. Eng.*, **16**, 118-123 (1963)
- 17) BELL G. I., "On the Stochastic Theory of Neutron Transport", *Nucl. Sci. Eng.*, **21**, 390-401 (1965)
- 18) BENNET E. F., "The Rice Formulation of Pile Noise", *Nucl. Sci. Eng.*, **8**, 53-61 (1961)
- 19) BENTLEY P. G., BURTON E. J., "The Measurement and Analysis of Can Temperature Fluctuations in Chapelcross Reactors", *J. Nucl. Energy, A/B*, **19**, 313-324 (1965)
- 20) BIERMAN S. R., GARLID K. L., ALBRECHT R. W., "Complementary Use of Pulsed-Neutron and Reactor Noise Measurements", *Nucl. Sci. Eng.*, **22**, 206-214 (1965)
- 21) BLAQUIERE A., PACHOWSKA R., "Fluctuations d'un Systeme Dependante de Plusieurs Parametres Aleatoires", CEA-2115 (1962)
- 22) BLOKHIN G. E., BLOKHINTSEV D. I., BLYUMKINA Yu. A., *et al.*, "Pulsed Fast-Neutron Reactor", *Atomnaya Energiya*, **10**, 437-446 (1961)
- 23) BORGWALDT H., SANITZ D., "Die Impulskorrelation zweier Neutronendetektoren im stationären Reaktor", *Nukleonik*, **5**, 239-249 (1963)
- 24) BORGWALDT H., STEGEMANN D., "A Common Theory for Neutronic Noise Analysis Experiments in Nuclear Reactors", *Nukleonik*, **7**, 313-325 (1965)
- 25) BORGWALDT H., "Einheitliche Theorie der Korrelations Experimente in Nulleinstungsreaktoren", *Externer Berichte* INR-4/66-5, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1966)
- 26) BORGWALDT H., MURLEY T. E., SANITZ D., "The Modal Synthesis of Rossi-alpha Data for Moderator Reflected Fast Assemblies", *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, AEC Symposium Series No. 9, USAEC Report CONF-660206, pp. 747-761 (1967) and KFK-409
- 27) BORGWALDT H., "Neutron Noise in a Reactor with an External Control Loop", *Nukleonik*, **11**, 76-84 (1968)
- 28) BOYNTON A. R., UHRIG R. E., "Evaluation of Two-Region-Reactor Parameters by Random Noise Measurements", *Nucl. Sci. Eng.*, **18**, 220-229 (1964)
- 29) BRUNSON G. S., CURRAN R. N., GASIDLO J. M., HUBER R. J., "A Survey of Prompt-Neutron Lifetimes in Fast Critical Systems", ANL-6681 (1963)
- 30) BRYCE D. H., "Some Comments on the Rossi- α Experiment", *Nukleonik*, **7**, 428 (1965)
- 31) CARLSON B. G., "Numerical Formulation and Solution of Neutron Transport Problems", Los Alamos Report LA-2996 (1964)
- 32) CLARKE W. G., HARRIS D. R., NATELSON M., WALTER J. F., "Variances and Covariances of Neutron and Precursor Populations in Time-Varying Reactors", *Nucl. Sci. Eng.*, **31**, 440-457 (1968)
- 33) COHN C. E., "Determination of Reactor Kinetic Parameters by Pile Noise Analysis", *Nucl. Sci. Eng.*, **5**, 331-335 (1959)
- 34) COHN C. E., "A Simplified Theory of Pile Noise", *Nucl. Sci. Eng.*, **7**, 472-475 (1960)
- 35) COHN C. E., JOHNSON R. J., MACDONALD R. N., "Calculating Space-Dependent Transfer Functions Using Statics Techniques", *Nucl. Sci. Eng.*, **26**, 198-206 (1966)
- 36) COURANT E. D., WALLACE P. R., "Fluctuations of the Number of Neutrons in a Pile", *Phys. Rev.*, **72**, 1038-1048 (1947)
- 37) DALFES A., "A Study of Stochastic Kinetics of Nuclear Reactors", *Nukleonik*, **4**, 299-303 (1962)

- 38) DALFES A., "The Fokker-Planck and Langevin Equations of a Nuclear Reactor", *Nukleonik*, **5**, 348-352 (1963)
- 39) DALFES A., "The Correlation Function and Power Spectre Density of Nuclear Reactors", *Nukleonik*, **6**, 53-58 (1964)
- 40) DALFES A., "Some Considerations on Nuclear Reactor Noise", *Nukleonik*, **7**, 426-427 (1964)
- 41) DALFES A., "The Random Processes of a Nuclear Reactor and Their Detection", *Nukleonik*, **8**, 94-101 (1966)
- 42) DALFES A., "Notion de Fonction de Transfert pour un Reacteur Nucleaire", CEA-R 3102 (1966)
- 43) DALFES A., "Functional Analysis of the Random Processes in Nuclear Reactors", *Nukleonik*, **9**, 123-129 (1967)
- 44) DANOFSKY R. A., "A Space-Dependent Reactor Noise Formulation Utilizing Modal Expansions", *Nucl. Sci. Eng.*, **36**, 28-38 (1969)
- 45) DIVEN B. C., MARTIN H. C., TASCHEK R. F., TERREL J., "Multiplicities of Fission Neutrons", *Phys. Rev.*, **101**, 1012-1015 (1956)
- 46) DRAGT J. B., "Accurate Reactor Noise Measurements in a Low Power Critical Reactor", *Nukleonik*, **8**, 188-193 (1966)
- 47) DRAGT J. B., "Reactor Noise Analysis by Means of Polarity Correlation", *Nukleonik*, **8**, 225-226 (1966)
- 48) DRAGT J. B., "Bias due to Finite Measuring Time in Nuclear Reactor Noise Analysis", RCN-64 (1967)
- 49) DRAGT J. B., "Threefold Correlations and Third Order Moments in Reactor Noise", *Nukleonik*, **10**, 7-13 (1967)
- "Modal Effects in the Triple Correlation Reactor Noise Experiment", RCN-Int-67-104 & IAEA Symp. on Fast Reactor Physics, Karlsruhe, 30, Oct. 1967 SM-101/36 (1967)
- 50) EDELMANN M., MURLEY T. E., STEGEMANN D., "Investigation of Prompt Neutron Kinetics in the Fast-Thermal Argonaut-Reactor STARK by Noise Analysis", KFK-522 (1967)
- 51) FEYNMAN R., de HOFFMAN F., SERBER R., "Dispersion of Neutron Emission in U-235 Fission", *J. Nucl. Energy, A/B* **3**, 64-69 (1956)
- 52) FRISCH O. R., LITTLER D. J., "Pile Modulation and Statistical Fluctuations in Piles", *Phil. Mag.*, **45**, 126-140 (1954)
- 53) FURUHASHI A., INABA G., "Eine Korrektur der Formel für die Rossi- α Methode", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **3**, 305-306 (1966)
- 54) FURUHASHI A., IZUMI S., "A Proposal on Data Treatment in the Feynman- α Experiment", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **4**, 101-103 (1967)
- 55) FURUHASHI A., IZUMI A., "The Third Moment of the Number of Neutrons Detected in Short Time Intervals", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 48-59 (1968)
- 56) FURUHASHI A., "Analyzing Neutron Count Trios into Two-and Three-Forked Components", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **6**, 156-158 (1969)
- 57) FURUHASHI A., "A Remark on the Three-Time-Point Rossi- α Method", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **6**, 343-346 (1969)
- 58) GELINAS R. J., OSBORN R. K., "Reactor Noise Analysis by Photon Observation", *Nucl. Sci. Eng.*, **24**, 184-192 (1966)
- "Reactor Noise Analysis from Observations of the High-Energy Radiation from the Reactor Core", *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, AEC Symposium Series No. 9, USAEC Report CONF-660206, pp. 689-711 (1966)
- 59) GOTOH S., "Transfer Function Measurement of Ionization Chambers with Use of Uncorrelated Reactor Noise", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **3**, 359-362 (1966)
- 60) GOTOH Y., "Measurement of Neutron Life in a D₂O-System by Neutron Fluctuation", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **1**, 193-196 (1964)
- 61) GOVORKOV A. B., "On the Statistical Fluctuation of Pulse Amplitude in Fast Pulsed Reactor", *Atomnaya Energiya*, **13**, 152-154 (1962)
- 62) GOVORKOV A. B., "Statistical Reactor Kinetics Equation", *Atomnaya Energiya*, **17**, 474-479 (1964)
- 63) HAMMEL J. E., KEPHART J. F., "Distribution of the Number of Prompt Neutrons from the Spontaneous Fission of Pu²⁴⁰", *Phys. Rev.*, **100**, 190-192 (1955)
- 64) HANSEN G. E., "Assembly of Fissionable Material in the Presence of a Weak Neutron Source", *Nucl. Sci. Eng.*, **8**, 709-719 (1960)
- 65) HARA M., USUI H., FUJII Y., SUDA N., "Application of the Pseudo Random Binary Signals to JRR-3 High Power Dynamics Measurements", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 79-85 (1968)
- 66) HARRIS D. R., "Stochastic Fluctuations in a Power Reactor", WAPD-TM-190 (1958)
- 67) HARRIS D. R., "Neutron Fluctuations in a Reactor of Finite Size", *Nucl. Sci. Eng.*, **21**, 369-381 (1965)
- 68) HICKS D. A., ISE, J., PYLE, R. V., "Probabilities of Prompt Neutron Emission from Spontaneous Fission", *Phys. Rev.*, **101**, 1016-1020 (1956)
- 69) HOFFMAN de, F., "Statistical Aspects of Pile Theory", *The Science and Engineering of Nuclear Power*, Vol. II, Chap. 9, Addison-Wesley Press Inc., Cambridge, Massachusetts (1949)
- 70) HOSHINO T., WAKABAYASHI J., HAYASHI S., "New Approximate Solution of Space-and Energy-Dependent Reactor Kinetics", *Nucl. Sci. Eng.*, **23**, 170-182 (1968)
- 71) HOSHINO T., WAKABAYASHI, J., "Calculation of Space Dependent Reactor Transfer Function by Few-Pole Expansion Method", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 229-235 (1968)
- 72) HURWITZ H. Jr., MACMILLAN D. B., SMITH J. H., STORM M. L., "Kinetics of Low Source Reactor Startups. Part I and II", *Nucl. Sci. Eng.*, **15**, 166-196 (1963)
- 73) IJIMA T., "A Remark on the Rossi- α Experiment", *Nukleonik*, **10**, 93-94 (1963)
- 74) IJIMA T., "On the Background Counts in the Rossi- α Experiment", *Nukleonik*, **11**, 157-159 (1968)
- 75) IJIMA T., "Basic Studies on the Rossi-Alpha Experiment", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 624-634 (1968)
- 76) IJIMA T., SUGI T., EZURE H., KASAI M., "Space-Dependent Effects in Rossi-Alpha Experiments", *Nucl. Sci. Eng.*, **33**, 344-348 (1968)
- 77) INABA G., "Time Dependent Probability of the Number of Neutrons and Their Counts in a Multiplying Medium", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 378-380 (1968)
- 78) IZUMI A., "Analysis of the Rossi- α Experiment through Pál-Bell's Equation", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **6**, 248-260 (1969)
- 79) JANOSSAY L., "Note on the Fluctuation Problem of Cascades", *Proc. Phys. Soc.*, **A 68**, 241-249 (1950)

- JANOSSAY L., MESSEL H., "Fluctuations of the Electron-Photon Cascade—Moments of the Distribution", *Proc. Phys. Soc.*, **A 68**, 1101-1115 (1950)
- 80) KENNEY E. S., "Noise Analysis of Nuclear Reactors with the Use of Gamma Radiation", *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, AEC Symposium Series No. 9, USAEC Report CONF-660206, pp. 399-411 (1966)
- 81) KLYSTRA C. D., UHRIG R. E., "Spatially Dependent Transfer Function for Nuclear Systems", *Nucl. Sci. Eng.*, **22**, 191-205 (1965)
- 82) KOBAYASHI T., "A Study on the Zero-Probability Method", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 145-152 (1968)
- 83) KOZIK B., "A Statistical Basis for the Application of a Dynamic Model to Stationary Nuclear Reactors", *Atomnaya Energiya*, **20**, 21-26 (1966) (Engl. Trans. in *J. Nucl. Energy, Part A/B* **21**, 73-80 (1967))
- 84) KUBO R., "Generalized Cumulant Expansion Method", *J. Phys. Soc. Japan*, **17**, 1100-1120 (1962)
- 85) KUBO R., "The Fluctuation-Dissipation Theorem and Brownian Motion", *Many Body Theory*, Chap. 1, W. A. Benjamin Inc., New York and Shoka-bo, Tokyo (1966)
- 86) KURIHARA K., SEKIYA T., "A Stochastic Operator Method Calculating the Time Interval Distribution in Neutron Detection", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **6**, 28-34 (1969)
- 87) LARISSE J., BRAFFORT P., "Equations Differentielles Stochastique Regissant L'evolution de la Densite Neutronique dans un Milieu Multiplicateur", *J. Nucl. Energy.*, Part A, **13**, 133-140 (1961)
- 88) LAX M., "Fluctuations from Nonequilibrium Steady State", *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 25-63 (1960)
"Classical Noise III: Nonlinear Markoff Processes", *Rev. Mod. Phys.*, **38**, 359-379 (1966)
"Classical Noise IV: Langevin Methods", *Rev. Mod. Phys.*, **38**, 541-566 (1966)
- 89) LEHTO W. K., CARPENTER J. M., "Determination of Reactor Kinetic Parameters by Photon Observation", *Nucl. Sci. Eng.*, **33**, 225-237 (1968)
- 90) MACMILLAN D. R., STORM M. L., "Kinetics of Low Source Reactor Startups—Part III". *Nucl. Sci. Eng.* **16**, 369-380 (1963)
- 91) MARCHUK G. L., ORLOV V. V., "The Theory of Adjoint Function", *Soviet Progress in Neutron Physics*, pp. 24-34. Edited by Krupchitskii, Consultants Bureau Enterprises Inc., New York (1963)
- 92) MATTHES W., "Statistical Fluctuations and their Correlation in Reactor Neutron Distributions", *EUR 26. e* (1962) and *Nukleonik*, **4**, 213-226 (1962)
- 93) MATTHES W., "The Concept of Neutron Importance in Reactor Physics", *EUR 1897. e* (1964)
- 94) MATTHES W., "Theory of Fluctuations in Neutron Fields", *Nukleonik*, **8**, 87-94 (1966)
- 95) MATTHES W., "Noise Analysis of Periodically Pulsed Reactors", *Nukleonik*, **8**, 329-333 (1966)
- 96) MEDINA A., "Stochastic Models for Nuclear Reactors", *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 16, pp. 697-700 (1958)
- 97) MIN Lu., SHABALIN E. P., YAZVITSKII Yu. S., "Experimental Study on Pulsed Reactor Fluctuation", *Atomnaya Energiya* **16**, 12-16 (1964) (Engl. Trans. in *J. Nucl. Energy, Parts A/B* **19**, 107-113 (1965))
- 98) MOGIL'NER A. I., ZOLOTUKHIN V. G., "Measuring the Characteristics of Kinetics of a Reactor by the Statistical P-method", *Atomnaya Energiya*, **10**, 377-379 (1961)
- 99) MOGIL'NER A. I., SHVETSOV D. M., "Statistical Methods of Measuring the Absolute Power of a Reactor", *Atomnaya Energiya*, **20**, 117-123 (1966) (Engl. Trans. in *J. Nucl. Energy, Parts A/B* **21**, 87-95 (1967))
- 100) MOORE M. N., "The Determination of Reactor Transfer Functions from Measurements at Steady Operation", *Nucl. Sci. Eng.*, **3**, 387-394 (1958) See also, "Reactor Transfer Functions: Addendum", *Nucl. Sci. Eng.*, **4**, 134-135 (1958)
- 101) MOORE M. N., "The Power Noise Transfer Function of a Reactor", *Nucl. Sci. Eng.*, **6**, 448-452 (1959)
- 102) MORITZ U., VIERKE H., WESSER U., WOLF L., ZEISSET, W., "Bestimmung Reaktorkinetischer Kenngrößen am SUR 100 BE mit determinierten und stochastischen Signalen", TUBIK-5 (1967)
- 103) NATELSON N., OSBORN R. K., SHURE F., "Space and Energy Effects in Reactor Fluctuation Experiments", *J. Nucl. Energy, Parts A/B*, **20**, 557-585 (1966)
"Recent Developments in the Analysis of Neutron Noise Experiments", *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, AEC Symposium Series No. 9, USAEC Report CONF-660206, pp. 669-687 (1966)
- 104) NIETO J. M., AKHTAR P., ACKERMANN Jr., N. J., "Two-Group Reactor Noise Analysis by Langevin's Technique", *J. Nucl. Energy*, **22**, 675-685 (1968)
- 105) NOMURA T., "Some Aspects of Zero Power Reactor Transfer Function", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **1**, 41-50 (1964)
- 106) NOMURA T., YAMAKI K., "Measurements of Subcritical Reactor Noise Spectra by Correlation Method", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **2**, 236-237 (1965)
- 107) NOMURA T., "Improvement in S/N Ratio of Reactor Noise Analysis using Two-Detector Correlation Method", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **2**, 76-77 (1965)
"Reactivity Measurements by Reactor Noise Analysis using Two-Detector Correlation Method", *ibid.*, **3**, 14-19 (1966)
- 108) NOMURA T., GOTOH S., YAMAKI K., "Reactivity Measurements by Neutron Noise Analysis using Two-Detector Correlation Method and Supercritical Reactor Noise Analysis", *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, AEC Symposium Series No. 9, USAEC Report CONF-660206, pp. 217-246 (1967)
- 109) NOMURA, T., "Noise Analysis of Boiling Water Reactor", Japan-United States Seminar on Nuclear Reactor Noise Analysis, Preprints, pp. 197-210 (1968)
- 110) ORNDOFF J. D., "Prompt Neutron Periods of Metal Critical Assemblies", *Nucl. Sci. Eng.*, **2**, 450-460 (1957)
- 111) OSBORN R. K., NATELSON M., "Kinetic Equations for Neutron Distributions", *J. Nucl. Energy*, **19**, 619-639 (1965)
- 112) OSBORN R. K., NIETO J. M., "Detector Effects on the Statistics of Neutron Fluctuations", *Nucl. Sci. Eng.*, **26**, 511-516 (1968)
- 113) OTSUKA M., SAITO K., "Fluctuations in a Multipoint Reactor", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **2**, 40-42 (1965)
- 114) OTSUKA M., SAITO K., "Space-Time Correlations in Neutron Distributions in a Multiplying Medium", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **2**, 191-198 (1965)
- 115) OTSUKA M., IJIMA T., "Space-Dependent Formula for Rossi- α Measurements", *Nukleonik*, **7**, 488-491 (1965)

- 116) OTSUKA M., SAITO K., "Neutron Fluctuations in a Multiplying Medium", *Nucl. Sci. Eng.*, **24**, 412-414 (1966)
- 117) PÁL L., "On the Theory of Stochastic Processes in Nuclear Reactors", *Nuovo Cimento Supplement to Vol. 7*, 25-42 (1958)
"Statistical Fluctuations of Neutron Multiplication", *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 16, pp. 687-696 (1958)
"Statistical Theory of Chain Reactions in Nuclear Reactors, Parts I, II, III", *Acta Physica Hung.*, **14**, 345-380 (1962) (Engl. Trans. by Shibayev, V., NP-TR-951, Harwell (1962)):
"Statistical Theory of Neutron Chain Reactors", *Proceedings of the Third United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 2, pp. 218-224 (1964)
- 118) PÁL L., NEMETH G., "Fluctuation of the Neutron Yield in Pulsed Fast Reactors" *Pile Neutron Research in Physics*, pp. 491-507, Proc. Symp. Vienna, 17-21 October, 1960
- 119) PÁL L., "Determination of the Prompt Neutron Period from the Fluctuations of the Number of Neutrons in a Reactor", *J. Nucl. Energy*, Parts A/B **17**, 395-409 (1963)
- 120) PLUTA P. R., "An Analysis of Fluctuations in a Boiling Water Reactor by Methods of Stochastic Processes", APED-4071, General Electric Company (1962)
"Probabilistic Analysis of Reactor Kinetics", *Reactor Kinetics and Control*, AEC Symposium Series 2, TID-7662, pp. 136-147 (1964)
- 121) RAJEVSKI V., "Fluctuations Statistique due Nombre de Neutrons dans une Pile", CEA-917 (1958)
"Fluctuations Statistique dans les Piles", CEA-1673 (1960)
- 122) RAMAKRISHNAN A., "Stochastic Processes Relating to Particles Distributed in Continuous Infinity of States", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **46**, 595-602 (1950)
- 123) RICE S. O., "Mathematical Analysis of Random Noise", *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, pp. 133-295, Edited by Wax, N., Dover Publications, INC., New York (1954)
- 124) RICKER C. W., HANAUER S. H., MANN E. R., "Measurement of Reactor Fluctuations Spectra and Subcritical Reactivity", ORNL-TM-1066 (1965)
- 125) ROUX D. P., FRY D. N., ROBINSON J. S., "Application of Gamma-Ray Detection for Reactor Diagnosis" ORNL-TM-2144 (1968)
- 126) SAITO K., OTSUKA M., "Theory of Statistical Fluctuations in Neutron Distributions", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **2**, 304-314 (1965)
- 127) SAITO K., OTSUKA M., "Transfer Function and Power Spectral Density in a Zero-Power Reactor", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **3**, 45-50 (1966)
"Some Aspects of the Theory of Neutron Fluctuations in a Zero-Power Reactors", *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, AEC Symposium Series No. 9, USAEC Report CONF-660206, pp. 567-589 (1966)
- 128) SAITO K., "Noise-Equivalent Source in Nuclear Reactors", *Nucl. Sci. Eng.*, **28**, 452-456 (1967)
- 129) SAITO K., "On the Noise-Equivalent Source in a Zero-Power Reactor", *Nucl. Sci. Eng.*, **28**, 452-456 (1967)
- 130) SAITO K., TAJI Y., "Theory of Branching Processes of Neutrons in a Multiplying Medium", *Nucl. Sci. Eng.*, **30**, 54-64 (1967)
- 131) SAITO K., TAJI Y., "Stochastic Formulation of Neutron Multiple Collision Processes by the First Collision Probability Method", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 315-317 (1968)
"Its Generalizations and Some Applications" is in JAERI-memo 3056 (1968)
- 132) SAITO K., "Markoffian Description of At-Power Reactor Noise", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **6**, 261-272 (1969)
"Input Noise Sources of At-Power Reactors with Temperature Feedback Effect", *Nucl. Sci. Eng.*, **37**, 380-396 (1969)
- 133) SAITO K., "NESAP-Zero, An IBM-7044 Code of Calculating Noise Spectra in Zero-Power Reactors", JAERI-memo 3739 (1969)
- 134) SCHRÖDER, R., "Bestimmung der Reaktorleistung mit Hilfe des Reaktorrauchens", *Nukleonik*, **4**, 227-229 (1962)
- 135) SCHULZE E., "Untersuchungen zum Rossi- α Experiment", *Nukleonik*, **9**, 85-97 (1967)
- 136) SEIFRITZ W., STEGEMANN D., "Ein Zwei-Delektor-Kreuzkorrelationsexperiment zur Bestimmung von Reaktorparametern aus dem Neutronerauschen", *Nukleonik*, **9**, 169-179 (1967)
- 137) SEIFRITZ W., STEGEMANN D., "Comments on the Comparison between Cross-and Auto-spectral Density Measurements", *Nukleonik*, **10**, 158-161 (1967)
- 138) SEIFRITZ W., ALBRECHT R. W., "Measurement and Analysis of Coupled Core Coherence Function in a Two Node Symmetrical Reactor", *Nukleonik*, **11**, 149-154 (1968)
- 139) SHEFF J. R., ALBRECHT R. W., "The Space Dependence of Reactor Noise I—Theory", *Nucl. Sci. Eng.*, **24**, 246-259 (1966)
- 140) SHEFF J. R., ALBRECHT R. W., "The Space Dependence of Reactor Noise II—Calculations", *Nucl. Sci. Eng.*, **20**, 207-221 (1966)
SHEFF R., "Space-Dependent Cross Spectral Density in a Bare Cube", *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, AEC Symposium Series, No. 9, USAEC Report CONF-660206, pp. 623-648 (1966)
- 141) SHEFF J. R., "Fluctuation Measurement of Reactor Power", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **4**, 443-445 (1967)
- 142) SHEFF J. R., "Neutron Fluctuations at Full Power", Japan-United States Seminar on Nuclear Reactor Noise Analysis, Preprints, pp. 211-225 (1968)
- 143) STACEY, Jr. W. M., "Stochastic Kinetic Theory for a Space-and Energy-Dependent Zero Power Nuclear Reactor Model", *Nucl. Sci. Eng.* **36**, 389-401 (1969)
- 144) STRIBEL T., "Neutronen Lebensdauer-und Reaktivitätsmessungen an thermischen Reaktoren mit Hilfe der Rossi- α Methode", *Nukleonik*, **5**, 170-173 (1963)
"Weitere Ergebnisse von Rossi- α Messungen an thermischen Reaktoren", *Nukleonik*, **6**, 196-199 (1964)
- 145) SUZUKI E., "A Method for Measuring Absolute Reactor Power through Neutron Fluctuation", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **3**, 98-105 (1966)
- 146) TAJI Y., "Two-Time Doublet Boltzmann Equation in Reactor Kinetics and It's Applications", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **4**, 518-527 (1967)
TAJI Y., SAITO K., "Two-Time Doublet Boltzmann Equation Including Delayed Neutrons", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 374-376 (1968)

- 147) TERRELL J., "Distributions of Fission Neutron Numbers", *Phys. Rev.*, **108**, 783-789 (1957)
- 148) THIE J. A., "Theoretical Reactor Statics and Kinetics of Boiling Reactor", *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 11, pp. 440-446, United Nations, New York (1958)
- 149) THIE J. A., "Noise Sources in Power Reactor", *Noise Analysis in Nuclear Systems*, AEC Symposium Series, No. 4, TID-7679, pp. 357-368 (1964)
- 150) TÜRKCAN E., DRAGT J. B. "Experimental Study of Different Techniques of Analysing Reactor Noise Measured by a Neutron Counter", RCN-75 (1967)
- 151) UKAI S., TAKEDA S., YAMADA S., "A Generalized Analysis of Rossi- α Experiments", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **2**, 355-362 (1965)
- 152) UTSURO M., SHIBATA T., "Power Noise Spectra of a Water Reactor in Low Frequency Region", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **4**, 267-272 (1967)
- 153) WILLIAMS M. M. R., "An Application of Slowing Down Kernels to Thermal Neutron Density Fluctuations in Nuclear Reactors", *J. Nucl. Energy*, Parts A/B, **21**, 321-340 (1967)
- 154) WILLIAMS, M. M. R., "Reactor Noise in Heterogeneous Systems: I. Plate Type Elements", *Nucl. Sci. Eng.*, **30**, 188-198 (1967)
- 155) WIMET T. F., WHITE R. H., STRATTON W. R., WOOD D. P., "Godiva II—An Unmoderated Pulsed-Irradiation Reactor", *Nucl. Sci. Eng.*, **8**, 691-708 (1960)
- 156) UHLENBECK G. E., ORNSTEIN L. S., "On the Theory of Brownian Motion", *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, pp. 93-132. Edited by Wax, N., Dover Publications Inc., New York (1954)
- 157) YAMADA S., "Reactor Noise Analysis of Swimming Pool Type Reactor", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **1**, 130-136 (1964)
- 158) YAMAMURO N., INABA G., "SN Ratio in the Rossi- α Experiment", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **5**, 140-141 (1968)
- 159) ZOLUTUKIN V. G., MOGIL'NER, A. I., "Distribution of the Counting of a Neutron Detector Placed in a Reactor", *Atomnaya Energiya*, **10**, 379-381 (1961) (Engl. Trans. in *J. Nucl. Energy*, Parts A/B **17**, 578-579 (1963))
"On the Distribution of the Counting of a Neutron Detector Placed in a Reactor", *Atomnaya Energiya*, **15**, 11-16 (1963)

Conference Proceedings

- 160) *Noise Analysis in Nuclear Systems*, TID-7679 Gainesville, Florida (1964) (See also its review paper by Valerino, M. F., in *Power Reactor Technology*, **7**, 248-264 (1964))
- 161) *Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation*, CONF-660206, USAEC (1966) (See also its review papers, by Fry D. N., in *Nuclear Safety*, **8**, 37-40 (1966) and by Cohn C. E., in *Power Reactor Technology*, **9**, 142-144 (1966))
- 162) *Incipient Failure Diagnosis for Assuring Safety and Availability of Nuclear Power Plants*, CONF-671011, USAEC (1967)
- 163) *Statistical Methods in Experimental Reactor Kinetics and Related Techniques*, RCN-98 (1968)
- 164) Preprints of Japan-United States Seminar on Nuclear

Reactor Noise Analysis, 2nd-7th September 1968, Tokyo and Kyoto

Review Papers

- 165) BELL G. I., "Stochastic Formulation of Neutron Transport", Invited paper presented at the American Mathematical Society's Symposium on Transport Theory held in New York, April 5-7, (1967)
- 166) 大塚益比古, 斎藤慶一, "炉雑音解析研究専門委員会の活動-I 炉雑音の基礎理論" 日本原子力学会誌 **7**, 359-364 (1965)
- 167) 須田信英, 野村孜, 住田健二 "炉雑音解析研究専門委員会の活動-II" 日本原子力学会誌 **9**, 455-463 (1967)
- 168) TERRELL J., "Prompt Neutrons from Fission" *Physics and Chemistry of Fissions*, Vol. 2, pp. 3-24, Proc. Symp. Salzburg, IAEA, Vienna (1965)
- 169) THIE J. A., "Noise Analysis in Reactor Safety", *Nuclear Safety* **7**, 271-278 (1966)
- 170) OSBORN R. K., "Gamma-Ray Fluctuation Measurements Versus Neutron Fluctuation Measurements", Japan-United States Seminar on Nuclear Reactor Noise Analysis, Preprints, pp. 25-33 (1968)

Books

- 171) BENDAT J. S., *Principles and Applications of Random Noise Theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1958)
- 172) BENDAT J. S., PIERSOL A. G., *Measurement and Analysis of Random Data*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1966)
- 173) DAVISON B., SYKES J. B., *Neutron Transport Theory*, Oxford Univ. Press (1958)
- 174) DOOB J. L., *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1953)
- 175) FELLER W., *An Introduction to Probability Theory and Its Application*, Vol. I & II, John Wiley Sons, Inc., New York (1957 & 1966)
- 176) 伏見康治, "確率及び統計論", 河出書房 (1942)
- 177) GOLDSTEIN H., *Fundamental Aspects of Reactor Shielding*, Addison-Wesley Pub. Co. Inc. Massachusetts (1959)
- 178) HARRIS T. E., *The Theory of Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin (1963)
- 179) 伊藤清, "確率過程", 岩波講座, 現代応用数学, 岩波書店 (1957)
- 180) 河田竜夫, "確率過程論の応用", 岩波講座, 現代応用数学, 岩波書店 (1957)
- 181) KEEPIN G. B., *Physics of Nuclear Kinetics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts (1965)
- 182) LEE Y. W., *Statistical Theory of Communication*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1960)
- 183) LEWINS J., *Importance—The Adjoint Function*, Pergamon Press, New York (1964)
- 184) OSBORN R. K., YIP S., *Foundations of Neutron Transport Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York (1966)
- 185) 関英男, "雑音", 岩波全書 195, 岩波書店 (1954)
- 186) 須田信英, "原子炉の動特性と制御", 同文書院 (1969)
- 187) STRATONOVICH R. L., *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. I & II, Translated from Russian by Silverman, R. A., Gordon and Breach Science

- Publishers, New York (1963 & 1967)
- 188) THE J. A., *Reactor Noise*, AEC Monograph, Rowman and Littlefield Inc., New York (1963)
- 189) WEINBERG A. M., WIGNER E. P., *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, Univ. Chicago Press (1958)

Selected Papers

- 190) *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, Edited by Wax, N., Dover Publications Inc., New York (1954)

索引

—ア 行—

Einstein の関係式17, 19, 25, 30, 47
 因果律 (causality)30, 34, 35, 37, 61
 インポートランス関数 (importance function)53, 69, 70
 Wiener-Khintchin の定理131
 エルゴード性 (Ergodic property)6, 125
 おくれ効果 (retarded effect)30, 81
 Orndoff の相関項振巾111, 115

—カ, ガ行—

階乗キュムラント (factorial cumulant)127, 129
 階乗モーメント (factorial moment)127, 129
 — と積密度グリーン関数64
 ガウス過程 (Gaussian processes)50, 129, 130, 131
 ガウス分布 (Gaussian distribution)102, 128
 カウント→検出カウント, 検出反応の項をみよ
 Count-to-count interval distribution
 →検出カウント時系列の間隔分布の項をみよ
 核分裂に伴ない放出される中性子数の確率分布135
 確率母関数 (probability generating function)127
 — (中性子数の)12, 52, 100
 — (中性子数・先行核数の)54
 — (一回観測量の)57, 70, 103
 — (多数回観測量の)59, 102, 104
 — (ポアソン状外部源のある体系での)12, 60, 101, 104, 105
 確率論的動特性理論1
 Galton-Watson 型の分枝過程2, 9, 72
 干渉関数 (coherence function)79, 82, 132
 ガンマ線のゆらぎ→光子数のゆらぎの項をみよ
 ガンマ分布 (Gamma distribution)102
 緩和時間 (relaxation time constant)2, 6
 基本モード近似 (fundamental mode approximation)101
 — と一点炉近似との関係104
 — (Feynman- α 法の)98
 — (パワー・スペクトル密度の)87
 — (P_0 -法, P_{RO} -法, P_{CC} -法の)105, 106, 108
 — (Rossi- α 法の)111, 115
 極性相関関数 (polarity correlation function)130
 巨大家族 (giant family)116
 Courant-Wallace の方程式10
 結合係数 (coupling parameters)
 — (結合炉の)81
 — (Helmholtz モード間の)87
 検出カウント時系列の間隔分布108
 検出カウント・トリオ122
 検出カウント対15, 33, 39, 111, 115
 検出器の形状効果92
 — の雑音44
 — の雑音のもたらす効果35, 48, 76
 — の自己遮蔽効果94

検出反応数の分散71, 96
 — の確率母関数57, 59, 102, 104
 — の階乗キュムラント70, 120
 — の相関関数14, 33, 35, 72, 97, 113
 — のモーメント70
 検出反応数のゆらぎと光子数のゆらぎとの関連42
 — と中性子数のゆらぎとの関連8, 45
 — と検出器出力のゆらぎとの関連31, 39, 45, 48
 クロス・パワー・スペクトル密度
 →スペクトル密度の項をみよ
 光子検出反応数のゆらぎのパワー・スペクトル密度43
 光子数のゆらぎ40
 — と中性子数のゆらぎとの関連40, 43, 44, 49
 高次空間モードの寄与87, 99, 112
 Coherence function→干渉関数の項をみよ
 Kolmogorov の方程式9, 132
 — の方法9
 — サ, ザ行—
 雑音源 (noise-equivalent source)
 — (中性子場にたいする)14, 20
 — (中性子・先行核場にたいする)22, 28, 79, 81
 — (光子場にたいする)41, 43
 — (検出反応率にたいする)34, 36
 — (検出器出力にたいする)45, 46
 3 基本量109, 117
 3 又分枝過程67, 118
 — の寄与120, 121
 3 次階乗キュムラント (定常炉における検出反応数の)
 — (定常炉における中性子数の)120
 3 次階乗モーメント (非定常炉における中性子数の)119
 3 時点相関関数 (検出カウント数の)121
 3 時点 Rossi- α 法122
 自発核分裂の寄与20, 28, 72, 75, 87, 96, 98, 105, 111, 122
 Smoluchowski の条件26, 130
 初衝突法 (first collision probability method)9, 12, 51
 Schottky の公式14, 19, 21, 27, 34, 35, 37, 41, 45, 47
 Sink frequency→零周波数の項をみよ
 シングル雑音源14, 20, 27, 29, 47
 シングレット (singlet)8
 随伴作用素 (adjoint operator)53
 随伴ボルツマン作用素12, 52, 56
 スペクトル密度129
 — (光子数のゆらぎの)42
 — (光子検出反応率のゆらぎの)42
 — (検出器出力の)33, 45, 46
 — (中性子数のゆらぎの)20, 22, 26
 — (中性子検出反応率の)35, 39, 75, 76, 79, 81, 87, 89, 90, 94
 — と相関関数75, 97, 111, 131
 積密度分布関数 (product density distribution

- function)63, 64, 69
 — のグリーン関数64, 66
 — と階乗モーメントとの関連64, 69
 折点周波数 (break or roll-off frequency)77, 79, 86
 零周波数 (null or sink frequency)83, 91
 零出力未臨界定常炉モデル 5
 線型性 5
 遷移確率 (transition probability)130
 相関関数 (correlation function) → (3時点相関関数
 および多時点相関関数の項のみよ)125, 128
 — (検出器出力の)32
 — (中性子数のゆらぎの)15, 20, 22, 26
 — (中性子検出反応率の)35, 38, 97, 111, 113
 — と分散20, 34, 97, 111
 — とスペクトル密度75, 97, 111, 131
 相関係数 (correlation coefficient)128
 相関実験の3基本量 → 3基本量の項のみよ
 相関のある検出カウンタ対 → 検出カウンタ対の項のみよ
- タ, ダ行 —
- 多時点相関関数72, 130
 ダブルレット (doublet) 8
 Chapman-Kolmogorov 方程式
 → Kolmogorov の方程式の項のみよ
 Chain splitting 効果116
 Chain register rate109, 117
 中性子家族 (neutron family)115
 — 家系図15, 65, 67, 68
 — のふるまい50
 中性子数
 — の階乗モーメント (非定常炉における)13, 61
 — の3次階乗モーメント (非定常炉における)119
 — の階乗キュムラント (定常炉における)13, 62
 — の3次階乗キュムラント (定常炉における)119
 — の確率分布52, 55, 56, 101, 102
 — の積密度グリーン関数66
 — の積密度分布関数69, 72
 — の分散10, 13, 19
 中性子のゆらぎ
 — のスペクトル密度20, 22, 26
 — の相関関数14, 20, 22, 26
 — と検出反応率のゆらぎとの関連8, 45
 中性子波減衰距離91
 中性子波長91
 遅発中性子の効果97, 106, 111, 120
 定常性5, 125
 伝達関数22, 35, 75, 77, 78, 81, 84
 Doob の定理131
 特性関数126
 特性汎関数129
- Nyquist の定理30, 47
 2又近似100
 Null frequency → 零周波数の項のみよ
- ハ, バ, パ行 —
- Pál-Bell 方程式12, 52
 バイナリ雑音源14, 20, 27, 29, 38, 41, 43, 47, 79, 81
 白色雑音14, 18, 21, 41, 46, 130
 パワー・スペクトル密度 → スペクトル密度の項のみよ
 P_0 -法 → 検出カウンタ時系列の間隔分布の項のみよ
 非相関項 → 検出カウンタ対の項のみよ
 Feynman- α 法1, 96
 Feynman の方法15, 111, 116
 — の拡張65
 Family-first-pulse triggering115
 Brown 運動17
 分割数61
 分散
 — (中性子数の)10, 13, 19
 — (中性子検出反応率の)71, 96
 — と相関関数20, 34, 97, 111
 分裂型計数管の効果97, 107, 111
 Bayes's rule110, 126
 Helmholtz モード85
 Bell-(Pál) の方程式 → Pál-Bell の方程式の項のみよ
 Fokker-Planck の方程式131
 Borgwaldt の方程式99
 ポアソン分布 (Poisson distribution)128
 ポアソン状外部中性子源60
- マ 行 —
- 待ち時間分布 → 検出カウンタ時系列の間隔分布の項のみよ
 Mogil'ner の P_0 -法 → 検出カウンタ時系列の間隔分布の項のみよ
 マルコフ性2, 9, 26, 132
- ラ 行 —
- Ramakrishnan の方法11, 63, 110
 Langevin の方法13, 18, 48
 Langevin 外力 → 雑音源の項のみよ
 Langevin 方程式132
 — (中性子数にたいする)14, 18, 21, 25
 — (光子数にたいする)41
 — (おくれ効果のある場合)30, 81
 — (検出反応率にたいする)34, 37
 — (検出器雑音についての)44, 46
 Random origin interval distribution
 → 検出カウンタ時系列の間隔分布の項のみよ
 臨界炉における中性子数のゆらぎ6, 11, 19
 Rossi- α 法1, 15, 109
- ナ 行 —