

JAERI-Data/Code

95-011



MARG1D : 1次元外部領域接続データコード

1995年8月

徳田伸二・渡邊朋子*

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1995

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 株原子力資料サービス

MARG1D : 1次元外部領域接続データコード

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部

徳田 伸二・渡邊 朋子*

(1995年7月25日受理)

1次元Newcomb 方程式の外部領域接続データを数値的に求めるMARG1Dコードを開発した。接続データはトカマク・プラズマの抵抗性MHD (および非理想MHD) 安定性解析で重要な役割をはたす。MARG1Dコードでは接続データを境界値問題法および固有値問題法によって接続データを求める。解くべき問題に対応する変分原理を導き、有限要素法を適用する。臨界安定な場合を除けば、境界値問題法と固有値問題法は同等である。しかし、固有値問題法はいくつかの利点を持っている。すなわち、この方法は臨界安定な状態を同定できる、理想MHD安定性解析の新しい方法である。また、臨界安定に近い場合の接続データを計算するにあたって数値的安定性を保証する。解析的な解の得られるモデル方程式および $m=1$ モードの安定性理論におけるNewcomb 方程式に対して詳細な数値実験を行う (m :ポロイダル・モード数)。この実験から、MARG1Dコードは数値的に安定なコードであり、高精度な接続データを与えることを示す。

MARG1D : One Dimensional Outer Region Matching Data Code

Shinji TOKUDA and Tomoko WATANABE *

Department of Fusion Plasma Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received July 25,1995)

A code MARG1D has been developed which computes outer region matching data of the one dimensional Newcomb equation. Matching data play an important role in the resistive (and non ideal) Magneto-hydrodynamic (MHD) stability analysis in a tokamak plasma. The MARG1D code computes matching data by using the boundary value method or by the eigenvalue method. Variational principles are derived for the problems to be solved and a finite element method is applied. Except for the case of marginal stability, the eigenvalue method is equivalent to the boundary value method. However, the eigenvalue method has the several advantages: it is a new method of ideal MHD stability analysis for which the marginally stable state can be identified, and it guarantees numerical stability in computing matching data close to marginal stability. We perform detailed numerical experiments for a model equation with analytical solutions and for the Newcomb equation in the $m=1$ mode theory. Numerical experiments show that MARG1D code gives the matching data with numerical stability and high accuracy.

Keywords: Newcomb Equation, Resistive MHD Stability, Tokamak, Regular Singular Point, Matching Data, Eigenvalue Problem, Boundary Value Problem, Singular Equation, Finite Element Method

* CUSTOMER SYSTEM Co., LTD

目 次

| | |
|----------------------------------|----|
| 1. 序 論 | 1 |
| 2. 理論的背景 | 2 |
| 2.1 外部領域接続データ | 2 |
| 2.2 固有値問題および特異方程式 | 3 |
| 2.3 接続データ公式 | 5 |
| 3. 数値計算法 | 6 |
| 3.1 変分原理 | 6 |
| 3.2 有限要素法 | 8 |
| 3.3 1次元Newcomb 方程式の具体形 | 11 |
| 3.4 節点の作成方法 | 13 |
| 3.5 固有値問題・境界値問題の数値計算法 | 14 |
| 3.6 大きい解を含む定積分 | 15 |
| 3.7 大きい解の再定義 | 17 |
| 4. MARG1Dの概要 | 18 |
| 4.1 $q, dp/dx$ の与え方 | 19 |
| 4.2 計算パラメータ | 19 |
| 4.3 出力一覧 | 23 |
| 4.4 PARAMETER文 | 26 |
| 4.5 ツリー構造図 | 27 |
| 4.6 副プログラム一覧 | 30 |
| 4.7 プログラム・フロー | 33 |
| 4.8 ディレクトリ構造 | 35 |
| 5. テスト計算 | 36 |
| 5.1 簡単な例題 | 36 |
| 5.2 計算パラメータ | 37 |
| 5.3 テスト結果 | 38 |
| 6. $m=1$ モード理論との比較 | 49 |
| 6.1 円柱プラズマにおける $m=1$ モード理論 | 49 |
| 6.2 数値計算結果との比較 | 52 |
| 7. 結 論 | 66 |
| 謝 辞 | 66 |
| 参考文献 | 67 |
| 付録A 端点で特異性のある関数の数値積分 | 68 |
| 付録B 接続データの変換 | 69 |

Contents

| | |
|---|----|
| 1. Introduction | 1 |
| 2. Theoretical Background | 2 |
| 2.1 Outer Region Matching Data | 2 |
| 2.2 Eigenvalue Problem and Singular Equation | 3 |
| 2.3 Formula for Matching Data | 5 |
| 3. Numerical Method | 6 |
| 3.1 Variational Principle | 6 |
| 3.2 Finite Element Method | 8 |
| 3.3 Form of the 1-dimensional Newcom Equation | 11 |
| 3.4 Method of Producing Nodal Points | 13 |
| 3.5 Numerical Methods of Eigenvalue Problem and Boundary Value Problem | 14 |
| 3.6 Definite Integrals Including the Big Solution | 15 |
| 3.7 Redefinition of the Big Solution | 17 |
| 4. Brief Description of MARG1D | 18 |
| 4.1 Definition of q and dp/dx | 19 |
| 4.2 Input Parameters | 19 |
| 4.3 Lists of Outputs | 23 |
| 4.4 PARAMETER Statements | 26 |
| 4.5 Tree Structure | 27 |
| 4.6 Lists of Subroutines | 30 |
| 4.7 Program Flows | 33 |
| 4.8 Directory Structure | 35 |
| 5. Test Problems | 36 |
| 5.1 Simple Examples | 36 |
| 5.2 Input Parameters | 37 |
| 5.3 Results | 38 |
| 6. Comparison with the $m=1$ Mode Theory | 49 |
| 6.1 the $m=1$ Mode Theory in a Cylindrical Plasma | 49 |
| 6.2 Comparison with the Numerical Results | 52 |
| 7. Conclusions | 66 |
| Acknowledgements | 66 |
| References | 67 |
| Appendix A Numerical Quadrature of Functions with Singularities at Terminal Points | 68 |
| Appendix B Transformation of Matching Data | 69 |

1 序 論

このレポートでは、1次元 Newcomb 方程式に対する境界値問題の解の接続データ（外部領域接続データ）を数値的に求めるコード MARG1D の説明を行うとともに数値計算結果を示す。

外部領域接続データは、プラズマの抵抗性 MHD（および非理想 MHD）安定性を決める上で重要な役割をはたす量である [1]。電気抵抗や粘性などのプラズマの散逸効果は、平衡磁場の傾き（トロイダル磁場とポロイダル磁場の比）が有理数である有理面近傍の薄い層（内部層）でのみ働き、それ以外の領域（外部領域）では散逸効果およびプラズマの慣性を無視できる。そのため、外部領域におけるプラズマの運動はそれらの効果は無視した臨界安定な理想 MHD 方程式（Newcomb 方程式）で記述される [2]。一方、内部層におけるプラズマの運動は、変数の引き伸ばしの手法によって、もとの MHD 方程式にくらべて簡単な方程式に帰着される。そして、両方の領域における解を漸近的に接続することによってプラズマの全領域における運動が決定される [1, 3]。

Newcomb 方程式は有理面を確定特異点とする同次な微分方程式であり、抵抗性 MHD 安定解析では、その「境界値問題」を解かねばならない。境界値問題の解は、有理面近傍で 2 乗可積分でない「大きい解」と 2 乗可積分な「小さい解」（Newcomb 方程式の基本解）の線形結合で表わされ、その混合比は外部領域接続データと呼ばれる。この接続データは内部層方程式に対する境界条件を与える [3]。

MARG1D コードは次の 2 つの方法で外部領域接続データを求める。ひとつは、Newcomb 方程式に対する境界値問題を直接解く方法（境界値問題法）であり [4]、いまひとつは、方程式の固有値問題とそれに伴う特異方程式を解く方法（固有値問題法）である [5]。両者とも、対応する変分原理に対して有限要素法を適用する。

プラズマが理想 MHD 的に臨界安定な場合を除いて、境界値問題法と固有値問題法は同等である。しかしながら、固有値問題法は次のような応用上重要な利点を持っている。すなわち、この方法では臨界安定状態の同定を含んだ理想 MHD 安定性が可能である。また、この方法ではプラズマが臨界安定に近い場合でも接続データを求めることができる。

本レポートの第 2 章は、まず、確定特異点を持つ常微分方程式の境界値問題を固有値問題とそれに伴う特異方程式を解くことに翻訳する定式化を示し、次に接続データを積分関係式を用いて計算する公式を与える。この定式化により臨界安定状態の同定および臨界安定に近い場合の接続データの計算が可能になる。第 3 章では、特異方程式に対応する変分原理と MARG1D で採用している混成有限要素法について述べる。また、このコードで用いている特徴的な数値計算法と「大きい解」の再定義について詳述する。第 4 章で MARG1D コードの概要について述べた後、解が Bessel 関数で与えられるモデル方程式について詳細なテスト計算を第 5 章で行う。次に、第 6 章では、臨界安定に近い場合の例として $m = 1$ モード理論をとりあげ (m :ポロイダル・モード数)、数値計算と理論との比較を行う。最後に、このコードの将来の応用に関する議論とともに結論を与える。

2 理論的背景

2.1 外部領域接続データ

1次元円柱モデルにおける Newcomb 方程式は、一般的に

$$\frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{d\xi}{dx} \right) - g(x)\xi = 0, \quad x \in (0, a) \quad (2.1)$$

で与えられる。物理的には未知関数 $\xi(x)$ は MHD 平衡のまわりの微小変位の半径方向成分を表す。上の方程式で $f(x), g(x)$ は確定特異点 $x = x_0 \in (0, a)$ のまわりで

$$f(x) = f_0(x - x_0)^2 + f_1(x - x_0)^3 + \dots \quad (2.2)$$

$$g(x) = g_0 + g_1(x - x_0) + \dots \quad (2.3)$$

と展開でき、他の点 $x \neq x_0$ では $f(x) > 0$ である。また解 $\xi(x)$ の境界条件は

$$\xi(x=0) = \xi(x=a) = 0 \quad (2.4)$$

とする。確定特異点 x_0 は領域 $[0, a]$ を左側の領域 $[0, x_0)$ と右側の領域 $(x_0, a]$ に分離する [6]。方程式 (2.1) の基本解は確定特異点 x_0 のまわりで Frobenius 級数 ($t = x - x_0$)

$$\xi_p(x) = t_p^{-1/2 \pm \mu} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j t^j \right), \quad p = R, L \quad (2.5)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{g_0}{f_0}} \quad (2.6)$$

で与えられる。ここで

$$|x - x_0|_L \equiv t_L \equiv \begin{cases} x_0 - x, & x < x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$|x - x_0|_R \equiv t_R \equiv \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ x - x_0, & x > x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

である。(2.6) 式で与えられる定数 μ は Suydam 指数とよばれ [2]、以下、 $0 < \mu < 1$ とする (多くの実際の問題ではこの条件が満たされる)。また、(2.5) 式で表される解のうち、ベキ $-1/2 - \mu$ を持つ 2 乗可積でない解は「大きい解」、ベキ $-1/2 + \mu$ を持つ 2 乗可積な解は「小さい解」とよばれる。境界値問題の左側の解 $\xi_L(x)$ は x_0 の近傍で、 $\xi_L^s(x), \xi_L^b(x)$ を方程式 (2.1) の左側 ($0 \leq x < x_0$) の「小さい解」および「大きい解」として

$$\xi_L(x) = \begin{cases} C_L(\xi_L^b(x) + \Delta_L \xi_L^s(x)), & x < x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

と表される。ここで C_L は任意定数である (Newcomb 方程式は同次であるため)。右側の解 $\xi_R(x)$ ($\xi_R(x) = 0, x < x_0$) も同様である。(2.9) 式において、定数 Δ_p ($p = L, R$) は接続データとよばれ、抵抗性 (および非理想) MHD 安定性解析で重要な役割を果たす。MARG1D コードは、この接続データを数値的に求めるコードである。

2.2 固有値問題および特異方程式

Newcomb 方程式 (2.1) の境界値問題を (2.9) 式の形式で有限要素法で解いて接続データを求める有力な数値計算法が提案されている [4, 7]。しかしながら、小さい解 $\xi_L^s(x)$ (あるいは $\xi_R^s(x)$) だけで境界条件を満たす場合がある。これはプラズマが考えているモードに対して臨界安定な場合である。この場合、解形式 (2.9) において、対応する接続データが $|\Delta_p| \rightarrow \infty$ になるので、 $\xi_p(x)$ は (2.9) 式で表現できない。そこで、一般的に考えるために、次の固有値問題

$$\mathcal{L}\xi \equiv \frac{d}{dx} \left(f \frac{d\xi}{dx} \right) - g\xi = -\lambda\rho(x)\xi \quad (2.10)$$

$$\xi \in \{ 2 \text{ 乗可積分}, \xi(x=0) = \xi(x=a) = 0 \} \quad (2.11)$$

を考える。ここで重み関数 $\rho(x)$ は $x = x_0$ のまわりで

$$\rho(x) = \rho_0(x - x_0)^2 + \dots, \quad \rho_0 > 0 \quad (2.12)$$

と展開でき、 $x \neq x_0$ に対して $\rho(x) > 0$ とする。臨界安定な場合は $\xi_p^s(x)$ ($p = L$ または R) が固有値問題 (2.10) の固有値 $\lambda = 0$ の固有関数になっている。したがって、プラズマが臨界安定に近い場合は、方程式 (2.10) が $|\lambda|$ の小さい固有値を持つことに対応している。また、方程式 (2.10) に対応するエネルギー積分 $W(\xi, \xi)$ は

$$W(\xi, \xi) = \int_0^a \left(f \left| \frac{d\xi}{dx} \right|^2 + g|\xi|^2 \right) dx \quad (2.13)$$

$$= \lambda \int_0^a \rho |\xi|^2 dx \quad (2.14)$$

であるので $\lambda < 0$ ならばプラズマは理想 MHD 的に不安定、 $\lambda > 0$ ならばプラズマは安定である。以下、(2.14) 式で表される積分を運動エネルギー積分と、 $W(\xi, \xi)$ をポテンシャル・エネルギー積分とよぶ。さらに、固有値問題 (2.10) に関して次の定理が成立する。

- 確定特異点 x_0 が領域 $[0, a]$ を左右に分離することに対応して、固有関数には左側の固有関数 $\xi_L(x)$ ($\xi_L(x) = 0, x > x_0$) と右側の固有関数 $\xi_R(x)$ ($\xi_R(x) = 0, x < x_0$) が存在する。また、左右の固有関数に対する $x = x_0$ の適切な境界条件は自然境界条件である [8]。
- 重み関数 $\rho(x)$ が条件 (2.12) を満たすので、すべての固有関数は $x = x_0$ の近傍で同じべき $-1/2 + \mu$ を持つ「小さい解」のように挙動する。さらに固有関数の x_0 のまわりの Frobenius 級数の最初の 2 項は「小さい解」のそれと一致する。
- 固有値と固有関数について古典的な Sturm-Liouville 定理が成り立つ [8]。すなわち、固有値は実数で可算無限個あり、固有値は下に有界である。また、異なる

る固有値に属する2つの固有関数 ξ_j, ξ_k は重み ρ に関して直交する:

$$(\xi_j, \rho \xi_k) = 0 \equiv \int_0^a \xi_j^*(x) \rho(x) \xi_k(x) dx = 0$$

最後に、任意の2乗可積分な関数 $\zeta(x)$ は固有関数 $\{\xi_j\}$ で展開できる:

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi_j(x)$$

すなわち、重み関数 $\rho(x)$ を(2.12)式のように選び、確定特異点における境界条件として自然境界条件を課すと、エルミート作用素 \mathcal{L} のスペクトラムは可算無限個の点スペクトル(固有値)のみからなり、しかもスペクトルは下に有界である。したがって、固有値問題(2.10)はよく知られた有限要素法で数値的に解くことができる。これは物理的に言えば、固有値問題(2.10)の最低固有値を求めることによって、プラズマが理想MHD的に安定かどうかを判定できること、特に、臨界安定状態を同定できることを意味する。この結果は重み関数 $\rho(x)$ の選択と確定特異点における境界条件の設定から帰着する著しい特徴である。たとえば、重み関数 $\rho(x)$ を、これまでの多くの理想MHD安定性解析で仮定されていたように、全区間 $[0, a]$ で正とすれば、Suydam指数 μ は λ に依存し、 λ のとり値によって μ は複素数になる。これは作用素 \mathcal{L} が連続スペクトルを持つことを意味する。そのため、上に述べた結論および以下の議論がもはや成立しない。この点から、重み関数 $\rho(x)$ を(2.12)式のように選択することと確定特異点で自然境界条件を課することが以下の定式化において本質的に重要である。

議論を明確にするために、方程式(2.10)は $|\lambda|$ が最小の固有関数として左側の固有関数 $\xi_{L0}(x)$ を持つとし、その固有値を λ_0 とする(右側についても以下、同様である)。Newcomb方程式(2.1)の解を(2.9)式の代わりに、 Ω_L を未定定数として

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \xi_{L0}(x) + \lambda_0 \zeta(x) + \lambda_0 \Omega_L \hat{\xi}_L^b(x) \\ &= c_f (\xi_L^s(x) + \Delta_L^{-1} \cdot \hat{\xi}_L^b(x)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\hat{\xi}_L^b(x) = H(x) \xi_L^b(x) \quad (2.16)$$

の形式で求める。ここで $\xi_L^b(x)$ は有限項で打ち切られた大きい解のFrobenius展開で与えられる。また、 $H(x)$ は中心が x_0 、幅が δ の台関数であり、MARG1Dコードでは

$$H(x) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{2k(t/\delta)^{2k}}{1 - (t/\delta)^{2k}} \right] & , |t| < \delta \\ 0 & , |t| > \delta \end{cases} \quad (2.17)$$

を採用している($t = x - x_0, k = 2$)。したがって、 $\hat{\xi}_L^b(x)$ は $x = x_0$ のまわりで「大きい解」の挙動をし、 $|x - x_0| > \delta$ ではゼロである[4]。特に、 $\hat{\xi}_L^b(x)$ は境界条件を満たす。以下、(2.15)式において、 $\hat{\xi}_L^b(x)$ を $\xi(x)$ の無限エネルギー部分とよび、残

りを有限エネルギー部分とよぶ。未知関数 $\zeta(x)$ は $x = x_0$ の近傍で「小さい解」の挙動をする 2 乗可積分な関数である。そして、 $\zeta(x)$ は $\xi_{L0}(x)$ に直交する、すなわち

$$(\xi_{L0}, \rho\zeta) \equiv \int_0^a \rho(x)\xi_{L0}^*(x)\zeta(x)dx = 0 \quad (2.18)$$

とする。これは、上に述べた定理から可能である。 $\xi(x)$ は (2.1) 式の解であるので、(2.15) 式の両辺に \mathcal{L} を作用させると、 $\zeta(x)$ に対する方程式

$$\mathcal{L}\zeta(x) = \rho(x)\xi_{L0}(x) - \Omega_L \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x) \quad (2.19)$$

を得る。これは特異方程式の形式をしている。その可解条件は (2.18) 式より

$$\|\xi_{L0}\|^2 - \Omega_L(\xi_{L0}, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b) = 0 \quad (2.20)$$

で与えられる。ただし

$$\|\xi_{L0}\|^2 \equiv (\xi_{L0}, \rho\xi_{L0}) \quad (2.21)$$

これより定数 Ω_L が決定され、方程式 (2.19) は境界条件

$$\zeta(x=0) = \zeta(x=a) = 0 \quad (2.22)$$

のもとで一意的に解くことができる。また、方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ は積分関係式

$$W(\zeta, \zeta) = \Omega_L(\zeta, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b) \quad (2.23)$$

を満たす。

2.3 接続データ公式

接続データ $\Delta_L^{-1} = \lambda_0\Omega_L/c_f$ は次のようにして求めることができる。方程式 (2.10) に対する微分関係式

$$\zeta^*\mathcal{L}\xi - \xi^*\mathcal{L}\zeta = \frac{d}{dx}P[\xi, \zeta; x] \quad (2.24)$$

$$P[\xi, \zeta; x] \equiv f(x) \left(\zeta^* \frac{d\xi}{dx} - \xi^* \frac{d\zeta}{dx} \right) \quad (2.25)$$

に

$$\xi_f(x) = \xi_{L0}(x) + \lambda_0\zeta(x) \quad (2.26)$$

と $\hat{\xi}_L^b(x)$ を代入して区間 $[0, a]$ にわたって積分すると、積分関係式

$$\begin{aligned} (\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\xi_f) - (\xi_f, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left[\hat{\xi}_L^{b*}(x) \frac{d\xi_f}{dx} - \xi_f^*(x) \frac{d\hat{\xi}_L^b}{dx} \right] \\ &= -2f_0\mu c_f \end{aligned} \quad (2.27)$$

を得る。これと $\mathcal{L}\xi_f = -\lambda_0\Omega_L\mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x)$ より係数 c_f が

$$\frac{1}{c_f} = \frac{2f_0\mu}{(\xi_f, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b) + \lambda_0\Omega_L(\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b)} \quad (2.28)$$

で与えられる。さらに可解条件 (2.20), 積分関係式 (2.23), および (2.26) 式を用いて、接続データ Δ_L^{-1} を与える公式として

$$\Delta_L^{-1} = \lambda_0 \frac{2f_0\mu\Omega_L^2}{\|\xi_{L0}\|^2 + \lambda_0 [W(\zeta, \zeta) + \Omega_L^2(\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b)]} \quad (2.29)$$

を得る。

なお、Pletzer-Dewar の方法 [4] では (2.9) 式で表される解形式を用い、境界値問題

$$\mathcal{L}\zeta = -\mathcal{L}\hat{\xi}_L^b, \quad \zeta(x=0) = \zeta(x=a) = 0 \quad (2.30)$$

を解く。この境界値問題の解 $\zeta(x)$ は $x = x_0$ の近傍で「小さい解」の挙動をする 2 乗可積分な関数である。接続データ Δ_L は、この $\zeta(x)$ と $\hat{\xi}_L^b$ に対して、再び微分関係式 (2.24) を適用することによって得ることができ、それは

$$\Delta_L = \frac{W(\zeta, \zeta) + (\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b)}{2f_0\mu} \quad (2.31)$$

で与えられる。

以後、方程式 (2.30) を解いて接続データを求める方法を「境界値問題法」とよび、それに対して、固有値問題を解いて接続データを求める方法を「固有値問題法」とよぶ。固有値問題法と境界値問題法は、プラズマが理想 MHD 的に臨界安定である場合を除いて、同値である。臨界安定なとき、さらには、臨界安定に近い場合には、境界値問題 (2.30) を解くことができない。この場合には固有値問題法に従って接続データを求めることができる。すなわち、境界値問題法と固有値問題法を併用することにより、臨界安定な場合を含んで接続データを求めることができる。さらには、固有値問題法では理想 MHD 安定性解析を同時に行うことができる。

3 数値計算法

3.1 変分原理

固有値問題 (2.10) と境界値問題 (2.19) に対しては変分原理を用いて有限要素法を適用する。固有値問題 (2.10) を導く変分原理はよく知られている。ここでは境界値問題 (2.19) に対応する変分原理を導く。

汎関数

$$\mathcal{F}(\zeta) = W(\zeta, \zeta) + 2(\zeta, h) \quad (3.1)$$

$$h(x) = \rho(x)\xi_{L0}(x) - \Omega_p\mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x) \quad (3.2)$$

を得る。これと $\mathcal{L}\xi_f = -\lambda_0\Omega_L\mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x)$ より係数 c_f が

$$\frac{1}{c_f} = \frac{2f_0\mu}{(\xi_f, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b) + \lambda_0\Omega_L(\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b)} \quad (2.28)$$

で与えられる。さらに可解条件 (2.20), 積分関係式 (2.23), および (2.26) 式を用いて、接続データ Δ_L^{-1} を与える公式として

$$\Delta_L^{-1} = \lambda_0 \frac{2f_0\mu\Omega_L^2}{\|\hat{\xi}_{L0}\|^2 + \lambda_0 [W(\zeta, \zeta) + \Omega_L^2(\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b)]} \quad (2.29)$$

を得る。

なお、Pletzer-Dewar の方法 [4] では (2.9) 式で表される解形式を用い、境界値問題

$$\mathcal{L}\zeta = -\mathcal{L}\hat{\xi}_L^b, \quad \zeta(x=0) = \zeta(x=a) = 0 \quad (2.30)$$

を解く。この境界値問題の解 $\zeta(x)$ は $x = x_0$ の近傍で「小さい解」の挙動をする 2 乗可積分な関数である。接続データ Δ_L は、この $\zeta(x)$ と $\hat{\xi}_L^b$ に対して、再び微分関係式 (2.24) を適用することによって得ることができ、それは

$$\Delta_L = \frac{W(\zeta, \zeta) + (\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b)}{2f_0\mu} \quad (2.31)$$

で与えられる。

以後、方程式 (2.30) を解いて接続データを求める方法を「境界値問題法」とよび、それに対して、固有値問題を解いて接続データを求める方法を「固有値問題法」とよぶ。固有値問題法と境界値問題法は、プラズマが理想 MHD 的に臨界安定である場合を除いて、同値である。臨界安定なとき、さらには、臨界安定に近い場合には、境界値問題 (2.30) を解くことができない。この場合には固有値問題法に従って接続データを求めることができる。すなわち、境界値問題法と固有値問題法を併用することにより、臨界安定な場合を含んで接続データを求めることができる。さらには、固有値問題法では理想 MHD 安定性解析を同時に行うことができる。

3 数値計算法

3.1 変分原理

固有値問題 (2.10) と境界値問題 (2.19) に対しては変分原理を用いて有限要素法を適用する。固有値問題 (2.10) を導く変分原理はよく知られている。ここでは境界値問題 (2.19) に対応する変分原理を導く。

汎関数

$$\mathcal{F}(\zeta) = W(\zeta, \zeta) + 2(\zeta, h) \quad (3.1)$$

$$h(x) = \rho(x)\xi_{L0}(x) - \Omega_p\mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x) \quad (3.2)$$

を制約条件

$$(\zeta, \rho\xi_{L0}) = 0 \quad (3.3)$$

のもとで停留にする。Lagrange の未定定数 ν を導入して汎関数

$$\mathcal{F}(\zeta, \nu) \equiv W(\zeta, \zeta) + 2(\zeta, h) + 2\nu(\zeta, \rho\xi_{L0}) \quad (3.4)$$

を考える。 ζ, ν の変動に対して、この汎関数を停留にすることにより未知関数 $\zeta(x)$ とスカラー変数 ν に対する Euler - Lagrange 方程式

$$\mathcal{L}\zeta - \nu\rho\xi_{L0} = h \quad (3.5)$$

$$(\zeta, \rho\xi_{L0}) = 0 \quad (3.6)$$

を得る。(3.5) 式において $h(x)$ が可解条件 $(\xi_{L0}, h) = 0$ を満足するので上の連立方程式は $\nu = 0$ を解に持つ。したがって、可解条件 (2.20) のもとでの方程式 (2.19) と連立方程式 (3.5), (3.6) は同値である。さらに連立方程式 (3.5), (3.6) は、作用素 \mathcal{L} が特異に近い場合、すなわち、臨界安定に近い場合でも、数値的に安定に解ける形式になっている。そのため、方程式 (2.19) を解く代わりに汎関数 (3.4) を有限要素近似を用いて停留にする。このとき、(3.4) 式の各汎関数は未知ベクトル $\vec{\zeta}$ を含む 2 次形式

$$W(\zeta, \zeta) \Rightarrow \langle \vec{\zeta} | \mathcal{A} | \vec{\zeta} \rangle \quad (3.7)$$

$$(\zeta, h) \Rightarrow \langle \vec{\zeta}, \vec{h} \rangle \quad (3.8)$$

$$(\zeta, \rho\xi_{L0}) \Rightarrow \langle \vec{\zeta} | \mathcal{B} | \vec{\xi}_{L0} \rangle \quad (3.9)$$

に帰着し ($\langle \rangle$ はベクトルの内積)、停留にすべき汎関数 $\mathcal{F}(\zeta, \nu)$ は 2 次形式 $\mathcal{F}(\vec{\zeta}, \nu)$ で近似される:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\zeta, \nu) &\Rightarrow \langle \vec{\zeta} | \mathcal{A} | \vec{\zeta} \rangle + 2 \langle \vec{\zeta}, \vec{h} \rangle + 2\nu \langle \vec{\zeta} | \mathcal{B} | \vec{\xi}_{L0} \rangle \\ &\equiv F(\vec{\zeta}, \nu) \end{aligned} \quad (3.10)$$

この 2 次形式が $\vec{\zeta}$ と ν について停留であることから、ベクトル $\vec{\zeta}$ および ν に対する 1 次方程式

$$\mathcal{A}\vec{\zeta} + \nu\mathcal{B}\vec{\xi}_{L0} = -\vec{h} \quad (3.11)$$

$$\langle \vec{\xi}_{L0} | \mathcal{B} | \vec{\zeta} \rangle = 0 \quad (3.12)$$

を得る。

また (2.29) 式において、1 次方程式 (3.11), (3.12) の解 $\vec{\zeta}$ に対しては

$$\begin{aligned} W(\zeta, \zeta) &= \langle \vec{\zeta} | \mathcal{A} | \vec{\zeta} \rangle \\ &= -\nu \langle \vec{\zeta} | \mathcal{B} | \vec{\xi}_{L0} \rangle - \langle \vec{\zeta}, \vec{h} \rangle = -\langle \vec{\zeta}, \vec{h} \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

であるので、有限要素近似解 $\vec{\zeta}$ で表した接続データ Δ_L^{-1} に対する公式は

$$\Delta_L^{-1} = \lambda_0 \frac{2f_0\mu\Omega_L^2}{\|\xi_{L0}\|^2 + \lambda_0 \left[-\langle \vec{\zeta}, \vec{h} \rangle + \Omega_L^2 (\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b) \right]} \quad (3.14)$$

で与えられる。

3.2 有限要素法

MARGID コードでは混成有限要素法を用いる [9]。この有限要素法における基底関数 $\{e_{j+1/2}(x)\}$ は

$$e_{j+1/2}(x) = \begin{cases} 1, & x_j \leq x < x_{j+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.15)$$

で与えられる。このとき、関数 $\xi(x)$ およびその微分 $d\xi/dx$ は、それぞれ

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2} e_{j+1/2}(x) \quad (3.16)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \sum_{j=1}^N \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{x_{j+1} - x_j} e_{j+1/2}(x)$$

と表現される。

確定特異点 x_0 で固有関数および境界値問題 (3.5), (3.6) の解は自然境界条件を満足しなければならない。そこで節点 $\{x_j\}$ を

$$0 = x_1, \dots, x_{J-1}, x_{JL} = x_0 = x_{JR}, x_{J+1}, \dots, x_{N+1} = a \quad (3.17)$$

とし、それに対応して節点値 $\{\xi_j\}$ も

$$\vec{\xi} = \{\xi_j\}^T = \{\xi_1, \dots, \xi_{J-1}, \xi_{JL}, \xi_{JR}, \xi_{J+1}, \dots, \xi_{N+1}\}^T \quad (3.18)$$

とする (T :転置を表す)。

エネルギー積分 (2.13) および (2.14) に (3.16) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 dx &= \sum_{j=1}^N f(x_{j+1/2}) \left(\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{x_{j+1} - x_j} \right)^2 (x_{j+1} - x_j) \\ &= \sum_{j=1}^N (\xi_{j+1} a_j \xi_{j+1} - \xi_j a_j \xi_{j+1} - \xi_{j+1} a_j \xi_j + \xi_j a_j \xi_j) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$a_j = \frac{f(x_{j+1/2})}{x_{j+1} - x_j} ; \quad x_{j+1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^a g(x) \xi^2 dx &= \sum_{j=1}^N g(x_{j+1/2}) \left(\frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2} \right)^2 (x_{j+1} - x_j) \\ &= \sum_{j=1}^N (\xi_{j+1} b_j \xi_{j+1} + \xi_j b_j \xi_{j+1} + \xi_{j+1} b_j \xi_j + \xi_j b_j \xi_j) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$b_j = \frac{1}{4} g(x_{j+1/2}) (x_{j+1} - x_j) \quad (3.22)$$

$$\int_0^a \rho(x) \xi^2 dx = \sum_{j=1}^N \rho(x_{j+1/2}) \left(\frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2} \right)^2 (x_{j+1} - x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^N (\xi_{j+1} c_j \xi_{j+1} + \xi_j c_j \xi_{j+1} + \xi_{j+1} c_j \xi_j + \xi_j c_j \xi_j) \quad (3.23)$$

$$c_j = \frac{1}{4} \rho(x_{j+1/2})(x_{j+1} - x_j) \quad (3.24)$$

であり、固有値問題に対応する汎関数 (2.13) 式はベクトル $\vec{\xi}$ の 2 次形式

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} - \lambda \vec{\xi}^T B \vec{\xi} \quad (3.25)$$

に帰着する。これより、ベクトル $\vec{\xi}$ に関する一般固有値問題

$$A \vec{\xi} = \lambda B \vec{\xi} \quad (3.26)$$

を得る。ここで行列 A は対称行列、 B は正值対称行列である。これから分かるように、混成有限要素法では、係数関数 $f(x), g(x)$ をそれぞれ $f(x_{j+1/2}), g(x_{j+1/2})$ に等しい区分的な階段関数で近似している。それゆえ、通常の有限要素法にくらべて、行列 A, B の要素の計算が容易である。その上、後で示すように固有値の収束は節点数 N の逆 2 乗収束である。これらの性質は 2 次元問題に拡張する場合、利点になる。

行列 A, B は三重対角行列であり、(3.19),(3.21),(3.23) 式に従って、有限要素法でよく知られた上書きの手法によって作ることができる。このとき、 ξ_{JL} と ξ_{JR} の結合をはずすことによって自然境界条件を課すことができる。すなわち、 $J-1$ 回めの上書きは

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & J-1 & JL & JR & J+1 \\ & & & & \\ & & & & \\ a_{J-1} + b_{J-1} & -a_{J-1} + b_{J-1} & 0 & & J-1 \\ -a_{J-1} + b_{J-1} & a_{J-1} + b_{J-1} & 0 & & JL \\ 0 & 0 & 0 & & JR \\ & & & & J+1 \\ & & & & \dots \\ & & & & \dots \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$B = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & J-1 & JL & JR & J+1 \\ & & & & \\ & & & & \\ c_{J-1} & c_{J-1} & 0 & & J-1 \\ c_{J-1} & c_{J-1} & 0 & & JL \\ 0 & 0 & 0 & & JR \\ & & & & J+1 \\ & & & & \dots \\ & & & & \dots \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

と表される。右辺の被積分関数 $\mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x)$ は $x = x_0$ で特異性を持ち得る。この特異性から生じる摂動誤差を除くため、定積分

$$b_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x) dx \quad (3.35)$$

の数値計算においては、被積分関数を階段関数で近似しない、より精度の高い数値積分法を用いる（これについては後述）。次に、(3.4) 式右辺第 2 項に、混成有限要素法を適用すると

$$(\zeta, h) = \int_0^a \zeta(x) \cdot (\rho(x)\xi_{L0}(x) - \Omega_L \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x)) dx \quad (3.36)$$

$$= \langle \vec{\zeta} | \mathcal{B} | \vec{\xi}_{L0} \rangle - \Omega_L \sum_{j=1}^N \frac{\zeta_j + \zeta_{j+1}}{2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b(x) dx \quad (3.37)$$

$$= \langle \vec{\zeta} | \mathcal{B} | \vec{\xi}_{L0} \rangle - \Omega_L \langle \vec{\zeta}, \vec{b} \rangle \quad (3.38)$$

したがって、(3.10) 式におけるベクトル \vec{h} として

$$\vec{h} = \mathcal{B}\vec{\xi}_{L0} - \Omega_L \vec{b} \quad (3.39)$$

を得る。ここで、ベクトル \vec{b} は再び上書きの手法によって以下のようにして求められる（以下、 $p = L$ の場合である。 $p = R$ の場合も同様にして \vec{b} を計算できる）。 $J - 1$ 回めの上書き

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_{J-1} & J-1 \\ b_{J-1} & J_L \\ 0 & J_R \\ & J+1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

J 回めの上書き

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ & J-1 \\ b_J & J_L \\ 0 & J_R \\ 0 & J+1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

3.3 1次元 Newcomb 方程式の具体形

1次元円柱プラズマの静止 MHD 平衡からの微小変位 $\vec{X}(r, \theta, \phi)$ は

$$\vec{X}(r, \theta, \phi) = \vec{X}(r) \exp(im\theta - in\phi) \quad (3.42)$$

と表すことができる。ここで (r, θ, ϕ) は円柱座標系 ($z = R_0\phi$) であり、整数 m, n はそれぞれ、変位のポロイダル・モード数およびトロイダル・モード数である ($m \neq 0$ とする)。プラズマ半径 a および特徴的なトロイダル磁場の強さ B_0 を規格化定数としたとき、ポテンシャル・エネルギー積分 W および運動エネルギー積分 W_k は、それぞれ

$$W = \int_0^1 \mathcal{L} dx = \int_0^1 \left\{ f \left| \frac{dY}{dx} \right|^2 + \frac{g}{x^2} |Y|^2 \right\} dx \quad (3.43)$$

$$f(x) = xF^2 \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)^2 \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \quad (3.44)$$

$$g(x) = xF^2 \left[A + N + E + \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right) M_1 + M_2 \right] \quad (3.45)$$

$$W_k = \int_0^1 \rho(x) |Y|^2 dx \quad (3.46)$$

$$\rho(x) = F^2 \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 \quad (3.47)$$

で表される。ここで $Y = r \vec{X} \cdot \nabla r$, $x = r/a$, $\epsilon = a/R_0$ である。また F は規格化されたトロイダル磁場であり、(3.45) 式の A, N, E, M_1, M_2 は以下で与えられる。

$$A = \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 \quad (3.48)$$

$$N = \left(\frac{2}{q} \right)^2 \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \quad (3.49)$$

$$E = \frac{2/q^2}{1 + \epsilon^2 x^2/q^2} \left\{ \frac{x}{F^2} \frac{dp}{dx} - \left(2 - \frac{x}{q} \frac{dq}{dx} \right) \right\} \quad (3.50)$$

$$M_1 = \frac{2x}{q} \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \left\{ \frac{1}{q} \frac{dq}{dx} + \frac{2n^2 \epsilon^2 x}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} + \frac{1}{F^2} \frac{2}{1 + \epsilon^2 x^2/q^2} \left[\frac{dp}{dx} + \left(\frac{\epsilon F x}{q} \right)^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{q} \frac{dq}{dx} \right) \right] \right\} \quad (3.51)$$

$$M_2 = \frac{2x}{q} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} \right) \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \quad (3.52)$$

これから分かるように、(3.43) 式から導かれる Newcomb 方程式では磁気軸 $x = 0$ も確定特異点である。この場合にも固有値が Sturm-Liouville 列をなすように重み関数 $\rho(x)$ が選ばれている。

MHD 平衡に対しては、圧力勾配 dp/dx と安全係数 $q(x)$ の関数形が与えられているものと仮定する。そして、規格化トロイダル磁場 F は平衡方程式

$$\frac{d}{dx} F^2 = -2 \frac{\frac{dp}{dx} + \epsilon^2 \frac{F^2}{q} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{q} \right)}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{x}{q} \right)^2} \quad (3.53)$$

$$F^2(x=1) = 1 \quad (3.54)$$

から決定される。この微分方程式を F^2 について、区間 $0 \leq x \leq 1$ にわたって4次の Runge-Kutta 法で解く。このとき、キザミ幅は一定である。また、節点 $\{x_j\}$ での F の値はスプライン補間より求め、 dF/dx は (3.53) 式の右辺から計算する。なお、Suydam 指数 μ は

$$\mu^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{x} \left(\frac{q}{dq/dx} \right)^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{F^2} \quad (3.55)$$

であり、一般に $dp/dx \leq 0$ であるので

$$0 < \mu \leq \frac{1}{2} \quad (3.56)$$

である。

3.4 節点の作成方法

固有関数および境界値問題の解は確定特異点 x_0 の近傍で $|x - x_0|^{-1/2+\mu}$ ($0 < \mu \leq 1/2$) の特異性を持つ。その特異性を基底関数 (3.15) で表現し、固有値および接続データの節点数 N に対する逆2乗収束を保障するためには x_0 の近傍で集中した節点 $\{x_j\}$ を作る必要がある。MARGID コードでは

$$F_m = \begin{cases} 0 & , m = 1 \\ F_2(\text{入力値}) & , m = 2 \\ x_0 - (x_0 - F_2) \left(1 - \frac{m-2}{N_0-2} \right)^\gamma & , 2 < m < N_0 \\ x_0 & , m = N_0 \\ x_0 + (1 - x_0) \left(\frac{m - N_0}{N + 1 - N_0} \right)^\gamma & , N_0 < m \leq N + 1 \end{cases} \quad (3.57)$$

で与えられる生成関数 F_m を用いて節点 $\{x_j\}$ ($j = 1, \dots, N+1$) を作る。ここで、 γ は x_0 の近傍での節点の集中度を表すパラメータ、 N_0 は $N_0 = x_0(N+1)$ で与えられ、そして、 $x_2 = F_2$ は入力値である。これから分かるように節点数が増加しても、節点 x_2 は $x_1 = 0$ に近づかない。これは、もう1つの確定特異点である原点の近傍での係数関数の精度を確保するために行っている。(3.57) 式において最適な収束率を得る γ の値の目安は

$$\gamma > \frac{1}{\mu} \quad (3.58)$$

で与えられる ($\mu \neq 1/2$) [4]。なお $\mu = 1/2$ の場合は線形分布 ($\gamma = 1$) で十分である。

3.5 固有値問題・境界値問題の数値計算法

一般固有値問題 (3.26) において、ベクトル $\vec{\xi}$ は境界条件

$$\zeta_1 = \zeta_{N+1} = 0 \quad (3.59)$$

を満足しなければならない。この境界条件は次のようにして課することができる。上書きの手法 (3.27) ~ (3.32) に従って作られた行列 A, B をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & & \vdots \\ & \tilde{A} & & & 0 \\ \vdots & & & a_{N,N+1} & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & & & & \vdots \\ & \tilde{B} & & & 0 \\ \vdots & & & b_{N,N+1} & \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N+1,N} & b_{N+1,N+1} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

とするとき (A, B は三重対角行列である)、それらを

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ & \tilde{A} & & \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ & \tilde{B} & & \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

と変更する。ここで、 ϵ は小さい正数 (コードでは $\epsilon = 10^{-5}$ に設定される) である。このように変更された行列 A, B に対しては、そのエルミート性は保存され、かつ、 $\lambda \neq \epsilon^{-1}$ の固有値 λ に属する固有関数 $\vec{\zeta}$ は自動的に境界条件 (3.59) を満足する。そして $\lambda \neq \epsilon^{-1}$ であるかぎり、もとの固有値問題の固有値・固有ベクトルと変更された行列 A, B に対する固有値問題のそれとは一致する。

変更された行列 A, B に対する一般固有値問題 (3.26) は固有値シフトを併用するよく知られた逆ベキ法で解く [10]。このとき、固有ベクトル $\vec{\zeta}$ は

$$\langle \vec{\zeta} | B | \vec{\zeta} \rangle = 1 \quad (3.62)$$

のように規格化される。

次に、1次方程式系 (3.11), (3.12) は、次のようにして解くことができる。まず、 $B\vec{\xi}_{L0} = \vec{c}$ とおくと方程式系は

$$A\vec{\zeta} + \nu\vec{c} = -\vec{h} \quad (3.63)$$

$$\langle \vec{c}, \vec{\zeta} \rangle = 0 \quad (3.64)$$

と書き替えられる。(3.63) 式より $\vec{\zeta}$ は形式的に

$$\vec{\zeta} = -A^{-1}\vec{h} - \nu A^{-1}\vec{c} \quad (3.65)$$

となり、これを (3.64) 式に代入すると

$$\langle \vec{c} | \mathcal{A}^{-1} | \vec{h} \rangle + \nu \langle \vec{c} | \mathcal{A}^{-1} | \vec{c} \rangle = 0 \quad (3.66)$$

を得る。これより、Lagrange 定数 ν が

$$\nu = - \frac{\langle \vec{c} | \mathcal{A}^{-1} | \vec{h} \rangle}{\langle \vec{c} | \mathcal{A}^{-1} | \vec{c} \rangle} \quad (3.67)$$

で与えられる。また (3.67) 式を (3.65) 式に代入して、ベクトル $\vec{\zeta}$ が決定される。なお、(3.67) 式に従って ν を計算する場合、行列 \mathcal{A}^{-1} を計算しない。その代わりに、たとえば

$$\vec{d} = \mathcal{A}^{-1} \vec{c} \quad (3.68)$$

の計算においては、三重対角行列 \mathcal{A} の LU 分割法によって、1 次方程式

$$\mathcal{A} \vec{d} = \vec{c} \quad (3.69)$$

を解く。

ベクトル $\vec{\zeta}$ は、境界条件

$$\zeta_1 = \zeta_{N+1} = 0 \quad (3.70)$$

を満足せねばならない。固有ベクトル $\vec{\xi}_{L0}(x)$ および $\mathcal{L}\hat{\xi}_p^b$ も (3.70) 式と同じ境界条件を満たすので、方程式 (3.63), (3.64) において

$$c_1 = c_{N+1} = 0, h_1 = h_{N+1} = 0 \quad (3.71)$$

である ((3.39) 式参照)。したがって、(3.61) 式のように行列 \mathcal{A} を変更すれば、解 $\vec{\zeta}$ は自動的に境界条件 (3.71) を満足する。

(3.65), (3.66) 式にもとづく解法は、行列 \mathcal{A} が特異に近い場合 (固有値 λ_0 がゼロに近い場合) 適用できない。ただし、この場合でも、拡大行列

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \vec{c} \\ \vec{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

は正則であるので、この拡大行列を密行列として取り扱い、ピボットニングを併用する LU 分割法によって、1 次方程式系 (3.63), (3.64) を解いている。

3.6 大きい解を含む定積分

境界値問題 (3.11), (3.12) を解くとき、および (3.14) 式に従って接続データを計算するとき、大きい解を含む定積分

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x) dx \quad (3.73)$$

および $(\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b)$ を数値的に実行しなければならない。関数 $\mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x), \hat{\xi}_p^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x)$ は $x = x_0$ で発散する関数であるので、それらの数値積分には注意を要する。まず、関数 $\hat{\xi}_p^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x)$ が可積である条件を求めておく。無限エネルギー部分 $\hat{\xi}_p^b(x)$ が m 次で打ち切った、大きい解の Frobenius 級数から作られる場合

$$\mathcal{L}\hat{\xi}_p^b = r_m |x - x_0|_p^{-1/2-\mu} (x - x_0)^m + \dots, \quad x \rightarrow x_0 \quad (3.74)$$

である。ここで r_m は定数である。したがって $\hat{\xi}_p^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x)$ の $x = x_0$ のまわりの主要項は $r_m |x - x_0|_p^{-1-2\mu} (x - x_0)^m$ で与えられるので、 $0 < \mu < 1/2$ に対しては、Frobenius 級数を第 1 項で打ち切ることができる:

$$\hat{\xi}_p^b = |x - x_0|_p^{-1/2-\mu} \quad (3.75)$$

そして、 $1/2 < \mu < 1$ のときは第 2 項まで必要である。また、 μ が $1/2$ に近い場合は別の取り扱いが必要であり、これについては次節で述べる。Frobenius 級数を第 1 項で打ち切った場合

$$\mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x) = r_1 \operatorname{sgn}(x - x_0) |x - x_0|_p^{1/2-\mu} + s_p(x) \quad (3.76)$$

$$\hat{\xi}_p^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x) = r_1 \operatorname{sgn}(x - x_0) |x - x_0|_p^{-2\mu} + r_p(x) \quad (3.77)$$

を得る。ここで

$$r_1 = \alpha(\alpha + 2)f_1 - g_1, \quad \alpha = -\frac{1}{2} - \mu \quad (3.78)$$

である。また、 $s_p(x)$ および $r_p(x)$ は $x = x_0$ で、ゼロ、または有限確定値に収束する関数である。したがって

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x) dx &= r_1 \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_j}^{x_{j+1}} |x - x_0|_p^{1/2-\mu} dx \\ &\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} s_p(x) dx \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$(\hat{\xi}_L^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_L^b) = -r_1 \frac{\delta^{1-2\mu}}{1-2\mu} + \int_{x_0-\delta}^{x_0} r_L(x) dx \quad (3.80)$$

$$(\hat{\xi}_R^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_R^b) = r_1 \frac{\delta^{1-2\mu}}{1-2\mu} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} r_R(x) dx \quad (3.81)$$

となる。ここで、 $\int s_p(x) dx, \int r_p(x) dx$ の計算は、端点 x_0 を、 ϵ_b を与えられた正数として $x_0 + \epsilon_b$ ($p = R$ のとき) または $x_0 - \epsilon_b$ ($p = L$ のとき) として、Gauss-Legendre の数値積分法 [11] を用いる。なお、定数 r_1 の計算には、 $f(x), g(x)$ の展開

$$f(x) = w(x) \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 = f_0(x - x_0)^2 + f_1(x - x_0)^3 + \dots \quad (3.82)$$

$$w(x) = F^2 \frac{m^2 x}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \quad (3.83)$$

および

$$g(x) = g_0 + g_1(x - x_0) + \dots \quad (3.84)$$

における展開係数 f_1, g_1 が必要である。係数 f_1 は (3.82), (3.83) 式より

$$f_1 = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} \right) \right]^2 \left[\frac{dw}{dx} + 2aw(x_0) \right] \quad (3.85)$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{q} \right) / \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} \right) \quad (3.86)$$

で与えられる。また、 $g_1 = dg/dx(x = x_0)$ であるけれども、 $g(x)$ の微分演算を解析的に行うことは現実的でない。そこで、コードでは $g(x)$ の 3 次のスプライン補間を行い、数値的に x_0 における微分係数 dg/dx を求めている。

3.7 大きい解の再定義

前節の (3.80), (3.81) 式からも分かるように、Suydam 指数 μ が $1/2$ に等しい場合 (これはゼロ・ベータの場合に相当する)、大きい解の Frobenius 展開 (3.74) は破綻するので、 $\log|x - x_0|_p$ を含む別の Frobenius 解を作る必要がある [12]。そのため、 $\mu \rightarrow 1/2$ の極限で $\log|x - x_0|_p$ を含む項が自動的に現れるように、大きい解を再定義することが必要である。第 2 項までの大きい解の Frobenius 級数は

$$\xi_p^b(x) = t_p^{-1/2-\mu} + s(\mu) \operatorname{sgn}(t) \cdot t_p^{1/2-\mu} ; t = x - x_0 \quad (3.87)$$

$$s(\mu) = \frac{g_1 - \alpha(\alpha + 2)f_1}{2(\alpha + 1)f_0} \quad (3.88)$$

で与えられる。これから分かるように、 $\mu = 1/2 + \delta\mu$ で $\delta\mu \rightarrow 0$ のとき、係数 $s(\mu)$ は

$$s(\mu) = -\frac{s}{2} \frac{1}{\delta\mu} + \hat{s}(\mu) \quad (3.89)$$

$$\hat{s}(\mu) = \frac{f_1}{2f_0} \delta\mu, \quad s = \frac{f_1 + g_1}{f_0} \quad (3.90)$$

のように発散する。また、小さい解の Frobenius 級数は

$$\xi_p^s(x) = t_p^{-1/2+\mu} + \dots \quad (3.91)$$

であるので、 $\mu \rightarrow 1/2$ のとき、大きい解に現れるべき $t_p^{1/2-\mu}$ と、小さい解に現れるべき $t_p^{-1/2+\mu}$ の 1 次独立性が失われる。これを避けるため、大きい解を

$$\xi_{pr}^b(x) \equiv \xi_p^b(x) - s(\mu) \operatorname{sgn}(t) \xi_p^s(x) \quad (3.92)$$

$$= t_p^{-1/2-\mu} + s(\mu) \operatorname{sgn}(t) (t_p^{1/2-\mu} - t_p^{-1/2+\mu}) \quad (3.93)$$

と再定義する。このとき右辺第2項は

$$\lim_{\mu \rightarrow 1/2} s(\mu)(t_p^{1/2-\mu} - t_p^{-1/2+\mu}) = \lim_{\delta\mu \rightarrow 0} s \cdot \frac{t_p^{\delta\mu} - t_p^{-\delta\mu}}{2\delta\mu} = s \log t_p \quad (3.94)$$

を満たす。すなわち、再定義された大きい解においては、 $\mu \rightarrow 1/2$ のとき、Frobenius 級数の各係数は有限確定値に収束するとともに、自動的に $\log t_p$ の項を作り出す。

再定義された大きい解を用いた場合、 $\mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b(x)$ ($\hat{\xi}_{pr}^b(x) = H(x)\xi_{pr}^b(x)$) は、 $x = x_0$ でゼロに収束するので、定積分 (3.73) には Gauss-Legendre の数値積分法を適用できる。一方、 $\hat{\xi}_{pr}^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b(x)$ は $x = x_0$ で特異性が残り、その定積分 ($\hat{\xi}_{pr}^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b$) に Gauss-Legendre の数値積分法を適用すると精度が悪い。しかし、(3.77) 式で表したように、 $\hat{\xi}_{pr}^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b(x)$ の特異性を解析的に表現するためには、係数関数 $f(x), g(x)$ の $x = x_0$ における高次の微分係数を要するため、それは不可能である。そのため、端点を無限遠点に写す変数変換法を用いる (付録 A 参照)。この方法は、端点に特異性のある関数の定積分 ($\hat{\xi}_{pr}^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b$) に有効な方法である [13]。

再定義された大きい解を用いて求めた接続データ $\bar{\Delta}_p$ と再定義しない大きい解を用いた場合の接続データ Δ_p との間には

$$\Delta_R = \bar{\Delta}_R - s(\mu) \quad , \quad \Delta_L = \bar{\Delta}_L + s(\mu) \quad (3.95)$$

の関係が成立する。なお、大きい解の打ち切り項数の接続データに与える影響について次の定理がなりたつ [5]。

- 無限エネルギー部分において、積分 ($\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b$) が存在するように大きい解の Frobenius 級数が打ち切られていれば、(2.29) 式および (2.31) 式から計算される接続データは打ち切り項数に依存せず、一意的である。

4 MARG1D の概要

MARG1D コードは UNIX fortran でコーディングされており、コマンド f77 を用いてコンパイル・リンクが実行される。第5章、第6章で示す数値計算結果はすべて MARG1D コードを SUN SPARC station 10 (SUNOS4.1.3, SPARCCompiler fortran2.0.1) 上で実行して得た。

以下、MARG1D コードの概要を示す。4.1 節では安全係数 q と圧力勾配 dp/dx の与え方を述べる。4.2 節では MARG1D コードを実行する上で必要な計算パラメータを示す。4.3 節ではコードが出力する変数名を、出力している副プログラムとともに示し、4.4 節では必要な配列サイズを指定する parameter 文を示す。プログラムのツリー構造、副プログラム一覧およびプログラム・フローをそれぞれ 4.5、4.6 および 4.7 節に示す。

と再定義する。このとき右辺第2項は

$$\lim_{\mu \rightarrow 1/2} s(\mu)(t_p^{1/2-\mu} - t_p^{-1/2+\mu}) = \lim_{\delta\mu \rightarrow 0} s \cdot \frac{t_p^{\delta\mu} - t_p^{-\delta\mu}}{2\delta\mu} = s \log t_p \quad (3.94)$$

を満たす。すなわち、再定義された大きい解においては、 $\mu \rightarrow 1/2$ のとき、Frobenius 級数の各係数は有限確定値に収束するとともに、自動的に $\log t_p$ の項を作り出す。

再定義された大きい解を用いた場合、 $\mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b(x)$ ($\hat{\xi}_{pr}^b(x) = H(x)\xi_{pr}^b(x)$) は、 $x = x_0$ でゼロに収束するので、定積分 (3.73) には Gauss-Legendre の数値積分法を適用できる。一方、 $\hat{\xi}_{pr}^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b(x)$ は $x = x_0$ で特異性が残り、その定積分 ($\hat{\xi}_{pr}^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b$) に Gauss-Legendre の数値積分法を適用すると精度が悪い。しかし、(3.77) 式で表したように、 $\hat{\xi}_{pr}^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b(x)$ の特異性を解析的に表現するためには、係数関数 $f(x), g(x)$ の $x = x_0$ における高次の微分係数を要するため、それは不可能である。そのため、端点を無限遠点に写す変数変換法を用いる (付録 A 参照)。この方法は、端点に特異性のある関数の定積分 ($\hat{\xi}_{pr}^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_{pr}^b$) に有効な方法である [13]。

再定義された大きい解を用いて求めた接続データ $\bar{\Delta}_p$ と再定義しない大きい解を用いた場合の接続データ Δ_p との間には

$$\Delta_R = \bar{\Delta}_R - s(\mu), \quad \Delta_L = \bar{\Delta}_L + s(\mu) \quad (3.95)$$

の関係が成立する。なお、大きい解の打ち切り項数の接続データに与える影響について次の定理がなりたつ [5]。

- 無限エネルギー部分において、積分 ($\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b$) が存在するように大きい解の Frobenius 級数が打ち切られていれば、(2.29) 式および (2.31) 式から計算される接続データは打ち切り項数に依存せず、一意的である。

4 MARG1D の概要

MARG1D コードは UNIX fortran でコーディングされており、コマンド f77 を用いてコンパイル・リンクが実行される。第 5 章、第 6 章で示す数値計算結果はすべて MARG1D コードを SUN SPARC station 10 (SUNOS4.1.3, SPARCCompiler fortran2.0.1) 上で実行して得た。

以下、MARG1D コードの概要を示す。4.1 節では安全係数 q と圧力勾配 dp/dx の与え方を述べる。4.2 節では MARG1D コードを実行する上で必要な計算パラメータを示す。4.3 節ではコードが出力する変数名を、出力している副プログラムとともに示し、4.4 節では必要な配列サイズを指定する parameter 文を示す。プログラムのツリー構造、副プログラム一覧およびプログラム・フローをそれぞれ 4.5、4.6 および 4.7 節に示す。

4.1 $q, dp/dx$ の与え方

安全係数 q とその微分および圧力勾配 dp/dx の関数形は関数副プログラム FQ, FQ1, FQ2, および DPDX で指定できる。第 6 章の数値計算で用いる $q(x)$ の関数形は

$$q = q_0 \left[1 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^a \right]^b \quad (4.1)$$

であり、以下の 2 つのオプションが可能である。1 つのオプションでは、 q_0, q_a (表面の安全係数)、 a, b を与え、 x_0 は

$$x_0 = \left[\left(\frac{q_a}{q_0} \right)^{1/b} - 1 \right]^{-1/a} \quad (4.2)$$

より決められる。今ひとつのオプションでは、 q_0, a の他に有理面の位置 x_0 と有理面での安全係数の値 $q_r = m/n$ を指定し、 b は

$$b = \frac{\log(q_r/q_0)}{\log 2} \quad (4.3)$$

より決められる。

また、圧力勾配 dp/dx は (3.55) 式を利用して

$$\frac{dp}{dx} = - \left(\frac{1}{4} - \mu^2 \right) \frac{x}{2} F^2 \left(\frac{dq/dx}{q} \right)^2 \quad (4.4)$$

で与える。ここで μ は $0 < \mu \leq 1/2$ の入力パラメータである。すなわち、Suydam 指数 μ がプラズマ半径に依存せず一定である MHD 平衡を作る。

4.2 計算パラメータ

計算パラメータの入力項目はすべて Namelist 形式で与えられる。MARG1D で用いる Namelist は NMRG1D, NCYL, および DLTNML である。それらは、それぞれ、サブルーチン RDNMLC, CYNML, DLNML で宣言および入力を行う。

上の 3 つの Namelist を格納するファイル名は NML1.DATA, そのファイルを読み込むファイル NO は 55 である。

ネームリスト名: NMRG1D

| 項目 | 配列 | 型 | 意味 | デフォルト値 |
|-------|----|-----|----------------------------|--------|
| LR | 1 | C | 'L': 左, 'R': 右 | 要指定 |
| LMBD0 | 1 | R*8 | 固有値問題の逆べき法の初期値 λ_0 | 要指定 |

| 項目 | 配列 | 型 | 意味 | デフォルト値 |
|-------|----|-----|--|--------------------|
| NR | 10 | I | (x 節点数) - 1 , すなわち分割数。 $NR(j) = 0$ ならプログラム終了, $NR(j) \neq 0$ なら接続データ計算。 収束チェックができる。 | 1000, 0, ..., 0 |
| RR2 | 1 | R*8 | x 節点の 2 番目 x_2 | 0.006 |
| NN | 1 | I | トロイダル・モード数 n | 1 |
| MM | 1 | I | ポロイダル・モード数 m | 1 |
| FFPOW | 1 | R*8 | 節点生成関数 F_m の γ | 2.2 |

ネームリスト名 : NCYL (円柱プラズマ近似データ)

| 項目 | 配列 | 型 | 意味 | デフォルト値 |
|--------|----|-----|--|--------|
| QZERO | 1 | R*8 | (4.1) 式の q_0 | 0.9 |
| QAPOW | 1 | R*8 | (4.1) 式の a | 4.0 |
| IQBFLG | 1 | I | (4.1) 式の b 設定フラグ = 0 : b は入力データ (QBPOW) $\neq 0$: b は (4.3) 式 | 1 |
| QBPOW | 1 | R*8 | (4.1) 式の b (IQBFLG = 0 のとき有効) | 0.0 |
| QR | 1 | R*8 | 有理面での安全係数 $q_r (= q(x_0))$ (IQBFLG $\neq 0$ のとき有効) | 1.0 |
| IMUFLG | 1 | I | Suydam 指数 μ 設定フラグ = 0 : μ は入力データ (RMU) $\neq 0$: $\mu = (1/2)\sqrt{1-\epsilon^2}$ | 1 |
| RMU | 1 | R*8 | Suydam 指数 μ (IMUFLG = 0 のとき有効) | 0.0 |
| RZERO | 1 | R*8 | x_0 | 0.5 |
| CEPSLN | 1 | R*8 | 逆アスペクト比 ϵ (IMUFLG $\neq 0$ のとき $\epsilon^2 \leq 3/4$) | 0.1 |

ネームリスト名: DLTNML

| 項目 | 配列 | 型 | 意味 | デフォルト値 |
|--------|----|-----|--|-----------|
| IDLFLG | 1 | I | 接続データ計算フラグ = 0: 計算しない = 1: 固有値問題法 (Δ_p^{-1}) = 2: 境界値問題法 (Δ_p) | 1 |
| IZTFLG | 1 | I | ζ 計算のとき行列 A を = 0: LU 分解しない = 1: LU 分解する | 1 |
| DELTA | 1 | R*8 | 台関数 $H(x)$ の幅 δ | 0.05 |
| NDIV | 1 | I | Gauss 積分の積分領域の分割数の 初期値 収束しない場合、max.1024 まで 分割する。 | 8 |
| NGAUSS | 1 | I | Gauss 積分の次数 | 3 |
| GEPS | 1 | R*8 | Gauss 積分収束判定値 NDIV, NGAUSS, GEPS は $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}_{\xi_p^b}^b dx, (\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}_{\xi_p^b}^b)$ の計算で使用する。 | 10^{-7} |
| DLTLXI | 1 | R*8 | $\mathcal{L}_{\xi_p^b}^b(x)$ を使う積分の端点 ϵ_b | 10^{-6} |
| JTMNO | 1 | I | 大きい解フラグ (*1) = 1: 第1項で打ち切り = 2: 第2項まで = -2: 大きい解再定義 = -3: 大きい解再定義 ($ \delta\mu < \delta\mu_{min}$ 用, $\delta\mu_{min} = 10^{-4}$) | 1 |

(*1) 大きい解フラグ (JTMNO)

| JTMNO | 大きい解の定義 | $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x) dx$ | $(\hat{\xi}_p^b(x) \cdot \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x))$ | 接続データの補正 |
|-------|---|---|--|---------------------------|
| = 1 | Frobenius 級数を第 1 項で打ち切る | (3.79) 式 | (3.80) , (3.81) 式 | (3.95) 式より Δ_p を計算 |
| = 2 | Frobenius 級数を第 2 項で打ち切る | (3.79) 式 | Appendix A の変数変換を使う | (3.95) 式より Δ_p を計算 |
| = -2 | (3.92) 式により再定義する | (3.79) 式 | Appendix A の変数変換を使う | なし |
| = -3 | (3.93), (3.94) 式により再定義する ($\mu \rightarrow 1/2$ のとき使用) | (3.79) 式 | Appendix A の変数変換を使う | なし |

4.3 出力一覧

・標準出力 (ファイル NO : 6)

| <u>SUBROUTINE</u> | <u>出力</u> | <u>内容</u> |
|-------------------|--|---|
| RDNMLC | LR LAMBDA_0 NR R(2) M N FFPOW | 計算パラメータ |
| CYNML | QZERO QAPOW IQBFLG QBPOW QR IMUFLG MU RZERO CEPSLN | 計算パラメータ |
| DLNML | IDLFLG IZTFLG GEPS DLTLXI JTMNO | 計算パラメータ |
| MKMESH | R | 節点 $\{x_j\}$ |
| MAIN | IQNOE | 有理面の節点 NO |
| OPE2 | MU**2 = 0.25 + ... | (3.55) 式の μ^2 理論値 |
| CYTST | EIGEN VALUE (TEST FUNCTION) | 試行関数法 λ |
| GUSSEV | (1) INTEGRAL HAT. G (ANALYTIC) (2) INTEGRAL HAT. RHO (ANALYTIC) (3) INTEGRAL (HAT. F + HAT. G) (1)/(2) EIGEN VALUE (ORIGINAL THEORY) (3)/(2) EIGEN VALUE (F(X) + G(X)) | $W_p = \epsilon^2 \int_0^{x_0} \hat{g}(x) dx$ ($\hat{g}(x)$ は (6.3) 式) $W_k = \int_0^{x_0} \hat{\rho}(x) dx$ ($\hat{\rho}(x) = F^2 x^2 (n - m/q)^2$) $W = \int_0^{x_0} (f(x) + g(x)) dx$ (6.7), (6.8) 式の λ 近似値 理論値 $\lambda = W/W_k$ |

| <u>SUBROUTINE</u> | <u>出力</u> | <u>内容</u> |
|-------------------|---|---|
| EPSEV | EIGEN VALUE = C * EPSILON**2 | (6.8) 式で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限の場合の固有値 |
| CCEIGN | MAXCUL = 30 Y EPSILON = 0.1000000D-07 NSGN EIGEN VALUE | 逆べき法計算 max. 回数 ベクトルの成分収束判定値 初期値 λ_0 より小さい 固有値の数 固有値 λ |
| XMSS4 | Y1(REAL) | \vec{Y}_{p0} |
| F1G1R1 | DELTA_MU ALPHA F0 F1 G1 R1 S(MU) (XI_P ^ B SECOND TERM) BAR_S(MU) S EPSILON $\rightarrow 0$ HAT_F0 | $\delta\mu = \mu - 1/2$ $\alpha = -1/2 - \mu$ $f(x)$ の係数 f_0 $f_0 = w(x_0)[d/dx(1/q)]^2$ $f(x)$ の係数 f_1 ((3.85) 式) $g(x)$ の係数 g_1 大きい解の係数 r_1 ((3.78) 式) (3.88) 式の $s(\mu)$ (3.90) 式の $\hat{s}(\mu)$ (3.90) 式の s $\epsilon \rightarrow 0$ の \hat{f}_0 $\hat{w}(x) = x^3/(1 + \epsilon^2 x^2)$ $\rightarrow x^3(\epsilon \rightarrow 0)$ $\hat{f}(x) = \hat{w}(1/q - 1)^2$ $\hat{f}_0 = \hat{w}(x_0)[d/dx(1/q)]^2$ $\epsilon \rightarrow 0$ の \hat{f}_1 $\hat{f}_1 = [d/dx(1/q)]^2$ $\times [d\hat{w}/dx + 2a\hat{w}(x_0)]$ |
| SDLTH | (XL L0, L-HAT-XI^ B) DELTA_L^ (-1)(H) OMEGA_L | $(\xi_{L0}, \mathcal{L}\xi_p^b)$ $\Delta_L^{-1}(H)$ Ω_p |
| DELPRC | ZETA MU | 一次方程式 (3.11), (3.12) の Lagrange の未定定数 ν |

| <u>SUBROUTINE</u> | <u>出力</u> | <u>内容</u> |
|-------------------|--|--|
| SDLTI | (HAT_XI L^ B, L-HAT_XI L^ B) (ZETA, VECTOR H) DELTA_L^ (-1) (DELTA_L) | $(\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b)$ $(\hat{\zeta}, \vec{h})$ 固有値問題法から 求めた Δ_p^{-1} 固有値問題法から 求めた Δ_p |
| DELANA | INTEGRAL HAT_G HAT_F0 BAR_DELTA_P BAR_DELTA_P^ -1/EPSLN**2 INTEGRAL G / F0 | $\int_0^{x_0} \hat{g}(x) dx$ $(\hat{g}(x) \text{ は (6.3) 式})$ $\hat{f}_0 = x_0^3 / (1 + \epsilon^2 x_0^2)$ $\times [d/dx(1/q)]^2$ (3.95) 式の Δ_p $\bar{\Delta}_p^{-1} / \epsilon^2$ $\frac{1}{f_0} \int_0^{x_0} \hat{g}(x) dx$ |
| DELPRC | DELTA_P DELTA_P^ -1 | 境界値問題法から 求めた Δ_p 境界値問題法から 求めた Δ_p^{-1} |
| DRANA | ANALYTIC DELTA_R | $\Delta_R(\epsilon \rightarrow 0)$ 理論値 (6.25) 式 $+(1/x_0)$ |

・平衡データ出力 (ファイル NO : 40, ファイル名 : FOUT.DAT)

| <u>出力</u> | <u>内容</u> |
|-----------|-----------|
| R | x |
| Q | q |
| DQ/DR | dq/dx |
| DP/DR | dp/dx |
| F | F |

・解データ出力 (ファイル NO : 41, ファイル名 : SOUT.DAT)

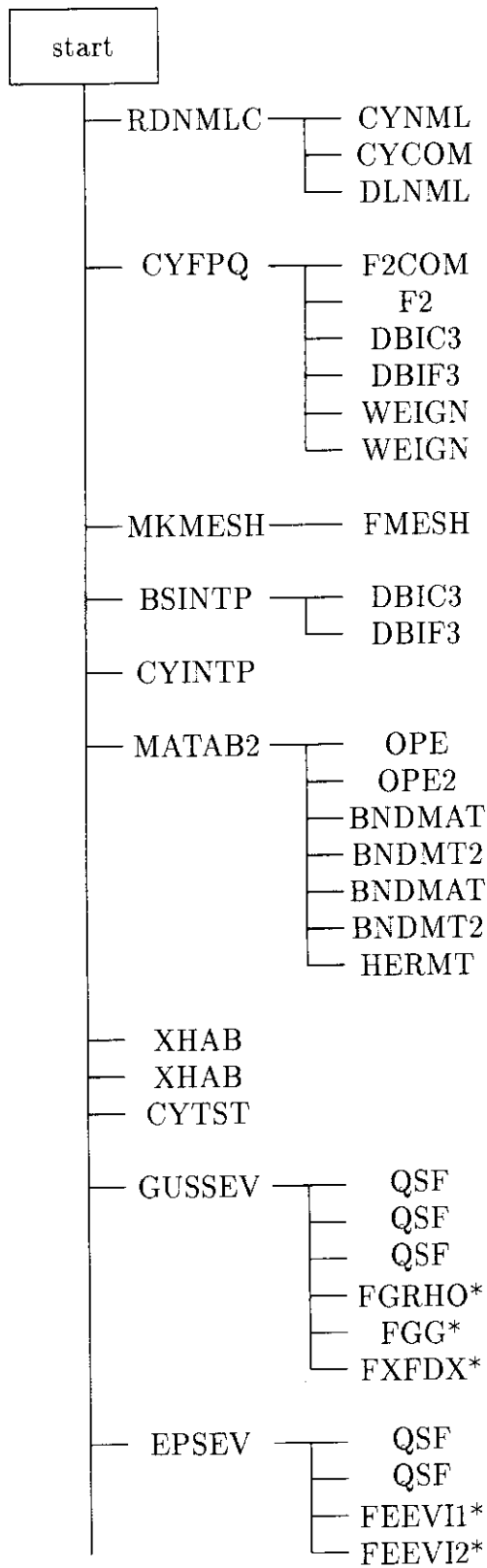
| <u>出力</u> | <u>内容</u> |
|-----------|---|
| R | x |
| XI | \vec{Y}_{p0} |
| ZETA_P | ζ |
| XIB_L_XIB | $\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b$ |

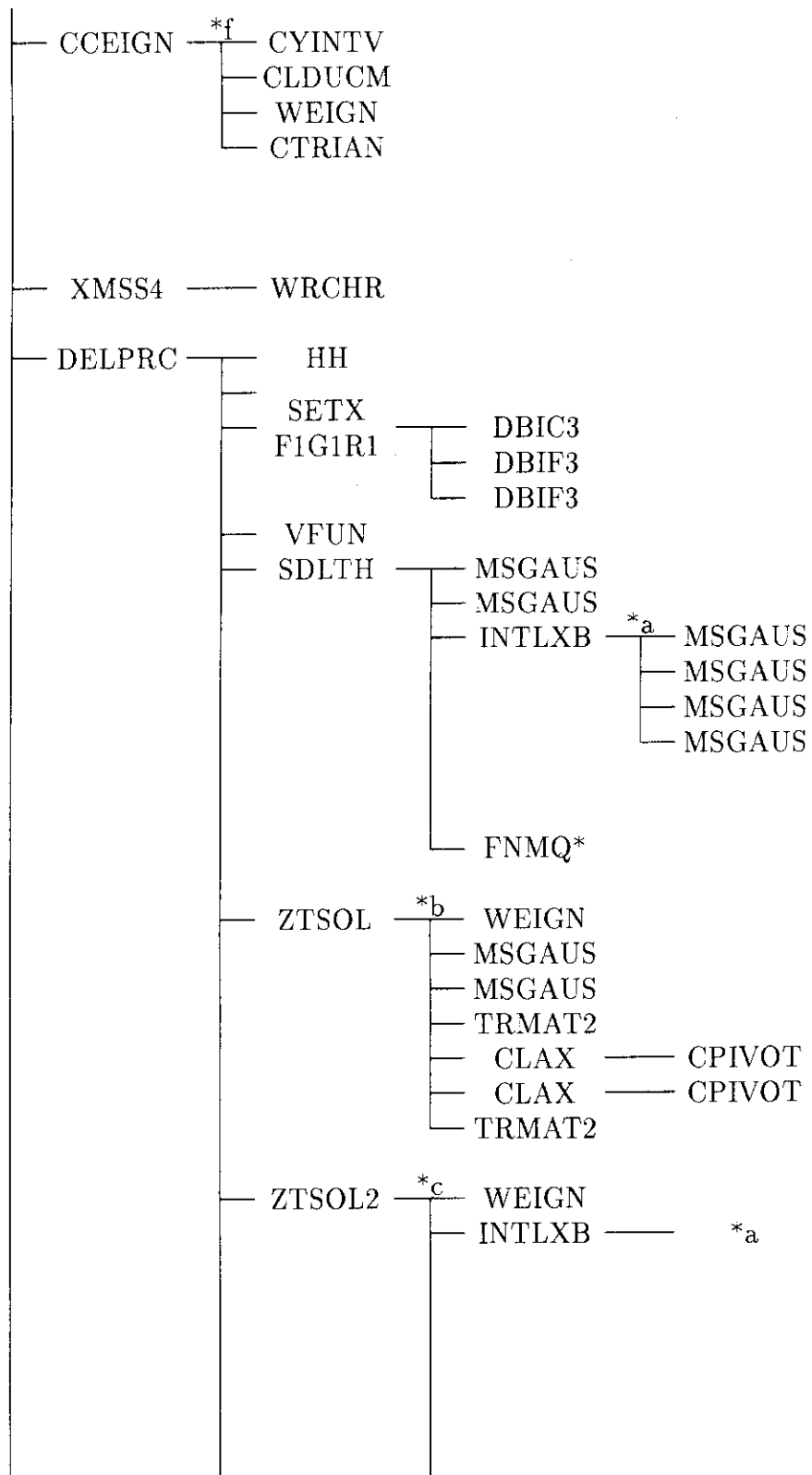
4.4 PARAMETER 文

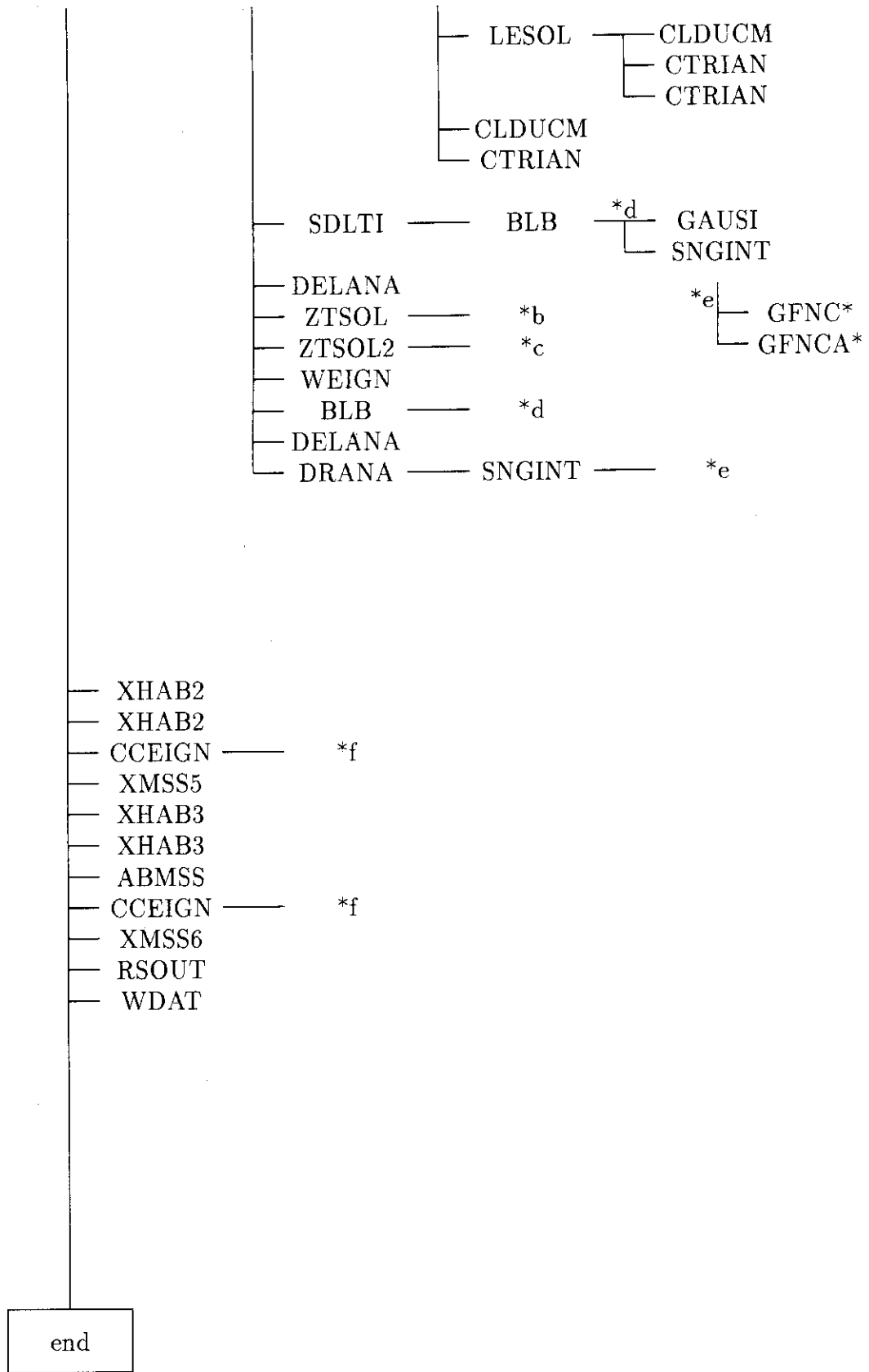
paraarr.f で 配列サイズの設定を行う。

| <u>定数名</u> | <u>定数</u> | <u>内容</u> |
|------------|-----------|---|
| IAE | 2002 | x の節点数 + 1 |
| IAEGN | 20010 | 行列 A, B の対角要素を格納する配列の大きさ $\geq (IAE \times 3 - 2)$ |

4.5 ツリー構造図







4.6 副プログラム一覧

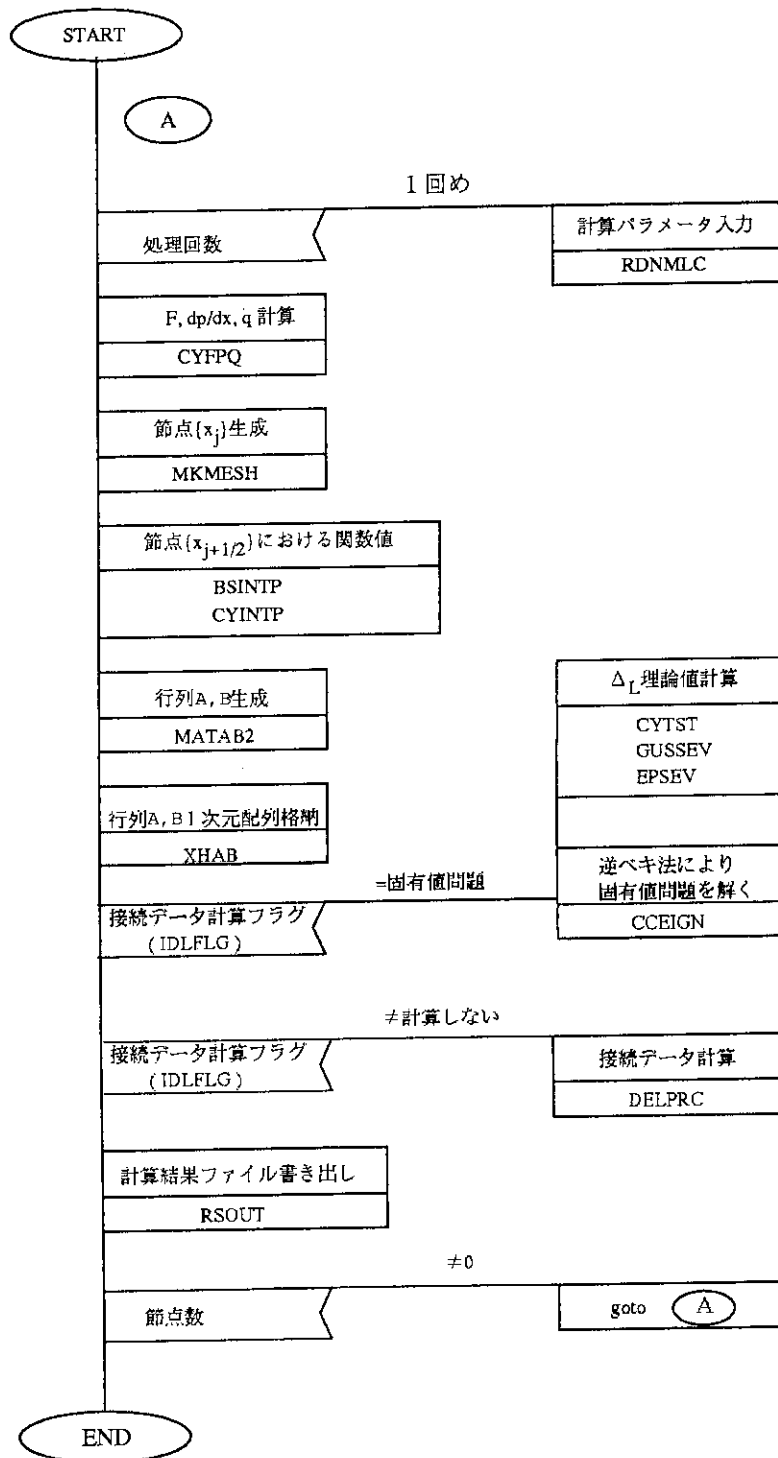
| 名前 | 種類 | 内容 |
|--------|----|---|
| BLB | S | $(\hat{\xi}_p^b(x), \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b(x))$ |
| BNDMAT | S | 行列 A, B の有理面の処理 (自然境界) |
| BSINTP | S | F のスプライン補間による $x_{j+1/2}$ での値 |
| CCEIGN | S | 逆べき法により固有値問題を解く |
| WEIGN | S | $B\vec{Y}$ |
| CLAX | S | $A\vec{x} = \vec{b}$ を解く |
| CLDUCM | S | 対角行列 LU 分解 |
| CTRIAN | S | LU 分解行列の 1 次方程式を解く |
| CTRAPZ | S | 台形則積分 |
| CYFPQ | S | コモン変数、定数設定と $\hat{F}, d\hat{F}/dx, d\hat{p}/dx, q, dq/dx$ の計算 |
| CYINTP | S | $\hat{F}, d\hat{F}/dx, d\hat{p}/dx, q, dq/dx$ の $x_{j+1/2}$ における値計算 |
| CYINTV | S | 固有値問題ベクトル初期化 |
| CYNML | S | 円柱近似計算パラメータ入力 |
| CYTST | S | 試行関数法固有値計算 |
| DELANA | S | (6.18) 式により $\bar{\Delta}_p$ と理論値の比較 |
| DELPRC | S | 接続データ計算 |
| DLNML | S | 接続データ計算パラメータ入力 |
| DRANA | S | (6.25) 式により $\Delta_R(\epsilon \rightarrow 0)$ 理論値 |
| EPSEV | S | (6.8) 式において $\epsilon \rightarrow 0$ の λ |
| FEEVI1 | F | $x^3 \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{q} \frac{dq}{dx} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \left(\frac{1}{q} + 3 \right) \right)$ |
| FEEVI2 | F | $x^2 \left(1 - \frac{1}{q} \right)^2$ |
| F1G1R1 | S | $\mathcal{L}\hat{\xi}_p^b, f(x), g(x)$, の展開係数計算 $r_1, g_1, f_0, f_1, s(\mu)$ |
| CYCOM | S | 円柱プラズマ近似サブルーチン用コモン変数設定 |
| F2COM | S | 円柱プラズマ近似サブルーチン用コモン変数設定 |
| F2 | S | $F(x)$ |
| DBZ | F | dF/dx |
| DBZ2 | F | dF^2/dx |
| DPDX | F | dp/dx |
| FQ | F | q |
| FQ1 | F | dq/dx |
| FQ2 | F | d^2q/dx^2 |

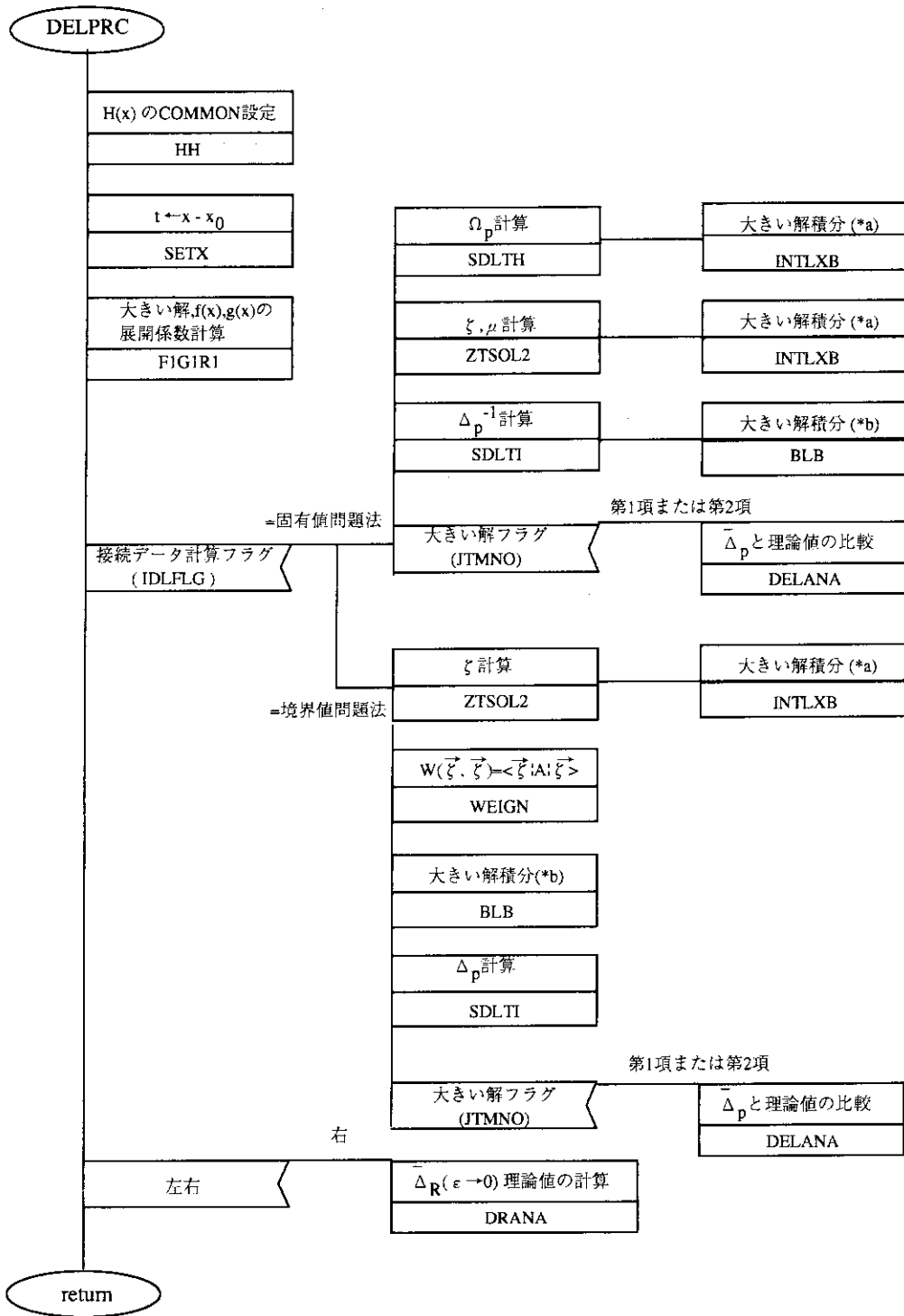
| 名前 | 種類 | 内容 |
|--------|----|--|
| FMESH | S | 生成関数 F_m により節点計算 |
| HH | S | 台関数 $H(x)$ 外部変数設定 |
| H | F | 台関数 $H(x)$ |
| HP | F | dH/dx |
| H2 | F | d^2H/dx^2 |
| GAUSI | S | Gauss - Legendre の数値積分 (収束するまで繰り返す。max.1024 分割) |
| GUSSEV | S | 固有値の理論値 |
| FGRHO | F | $\hat{\rho}(x) = F^2 x^2 (n - m/q)^2$ |
| EGG | F | $\epsilon^2 \cdot \hat{g}(x)$ |
| FXFDX | F | $x \cdot df/dx$ |
| INTLXB | S | $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}_{S_p}^b(x) dx$ |
| LESOL | S | 連立方程式を解く $\begin{pmatrix} A & \vec{c} \\ \vec{c}^t & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{h} \\ d \end{pmatrix}$ |
| MATAB2 | S | 行列 A, B 作成 ((3.61) 式により境界条件設定) |
| MKMESH | S | 節点 $x_j, x_{j+1/2}$ 作成 |
| MSGAUS | S | Gauss - Legendre の数値積分 (節点 1 区間の積分) |
| OPE | S | 行列 B の上書き 1 回分のデータ計算 |
| OPE2 | S | 行列 A の上書き 1 回分のデータ計算 |
| QSET | S | 有理面における x 設定 |
| RDNMLC | S | 計算パラメータ入力 |
| RSOUT | S | 計算結果ファイル書き出し |
| SDLTH | S | (2.20) 式により Ω_p 計算 |
| SDLTI | S | 境界値問題法による Δ_p^{-1} |
| SETX | S | $t \leftarrow x - x_0$ |
| SNGINT | S | 端点で特異性を持つ関数の変数変換と台形則 による数値積分 |
| GFNC | F | $g(z)$ (上限が特異) |
| GFNCA | F | $g(z)$ (下限が特異) |
| DBIC3 | S | スプライン補間の補間係数設定 |
| DBIF3 | S | スプライン補間 |
| TRMAT2 | S | 行列を 2 次元配列へ格納 |
| TSTDAT | S | テスト結果整理用固有値 λ ファイル出力 |
| WDAT | S | テスト結果整理用ファイル書き出し |
| XHAB | S | 行列 $A(B)$ を 1 次元配列に格納 (自然境界用) |

| 名前 | 種類 | 内容 |
|--------|----|---|
| QSF | S | Simpson の積分 |
| ZTSOL | S | ζ, μ (LU 分解しない) |
| ZTSOL2 | S | ζ, μ (LU 分解する) |
| DGAUSP | F | Gauss - Legendre の数値積分 (GAUSI, MSGAUS から CALL される) |
| FNMQ | F | $(n - m/q)^2$ |
| FHF | F | $F(x)$ (スプライン補間) |
| FHFD | F | $d/dx F$ (スプライン補間) |
| FF | F | $f(x)$ |
| FFDX | F | df/fx |
| FGR2 | F | $g(x)/x^2$ |
| FGR | F | $g(x)$ |
| FRHO | F | $\rho(x)$ |
| FXIB | F | $\hat{\xi}_p^b$ |
| FXBDX | F | $d/dx(\hat{\xi}_p^b)$ |
| FXBDX2 | F | $d^2/dx^2(\hat{\xi}_p^b)$ |
| FLXB | F | $\mathcal{L}\hat{\xi}_p^b$ |
| FXBLXB | F | $(\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}\hat{\xi}_p^b)$ |
| FWF | F | $w(x)$ |
| FWFDR | F | dw/dx |
| FSP | F | $s_p(x)$ |
| FRP | F | $r_p(x)$ |
| FALX | F | $sgn(x - x_0)r_1 x - x_0 ^{1/2-\mu}$ |
| FAXLX | F | $sgn(x - x_0)r_1 x - x_0 ^{-2\mu}$ |
| FXBD0 | F | ξ_p^b |
| FXBD1 | F | $d/dx \xi_p^b$ |
| FXBD2 | F | $d^2/dx^2 \xi_p^b$ |
| FXS | F | $\hat{\xi}_p^s$ |
| FFR | F | (6.14) 式の $\hat{f}_r(x)$ |

ここで種類の欄にある S はサブルーチン、F は REAL*8 のファンクションである。

4.7 プログラム・フロー





(*a) : $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L} \hat{\xi}_p^b(x) dx$, (*b) : $(\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L} \hat{\xi}_p^b)$

4.8 ディレクトリ構造

MARG1D のディレクトリの下には、/ver2, /MARG1Dtest, /doc の3つのディレクトリがあり、以下のような構造を持つ。

| <u>ディレクトリ</u> | <u>ファイル内容</u> | <u>ファイル名</u> |
|----------------|------------------|--------------------------|
| /ver2 | MARG1D コードディレクトリ | |
| | メイン・プログラム | main.F |
| | サブルーチン、ファンクション | *.F |
| | インクルード・ファイル | *.f |
| | メイクファイル | makefile |
| | オブジェクト | *.o |
| | 実行可能ファイル | a.out |
| | 計算パラメータ | NML1.DATA |
| | 実行コマンド | wex |
| | 実行結果出力 | |
| | 標準出力の切り換え | ww |
| | 平衡データ | FOUT.DAT |
| | 解データ | SOUT.DAT |
| | /MARG1Dtest | テスト計算コード ディレクトリ |
| メイン・プログラム | | main.F |
| サブルーチン、ファンクション | | *.F |
| インクルード・ファイル | | *.f |
| メイクファイル | | makefile |
| オブジェクト | | *.o |
| 実行可能ファイル | | a.out |
| 計算パラメータ | | NMLB.DATA |
| 実行コマンド | | wex |
| 実行結果出力 | | |
| 標準出力の切り換え | | ww |
| Y_{p0} | | KGXI1.DATA KGXI2.DATA |
| ζ | | KGZT1.DATA KGZT2.DATA |
| /doc | | 仕様書 ディレクトリ |
| | LATEX 原稿 | *.tex |
| | グラフ、プログラム・フロー | *.eps |

5 テスト計算

5.1 簡単な例題

(2.10) 式のモデル方程式として、 α, β を与えられた正の定数として

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - x_0)^2 \\ g(x) &= \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) - \beta^2(x - x_0)^2 \quad (\alpha > 0) \\ \rho(x) &= (x - x_0)^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

を考える。ここで、 α, β は与えられた正の定数である。このモデル方程式では「大きい解」 $\xi^b(x)$ 、「小さい解」 $\xi^s(x)$ を解析的に表すことができ、それぞれ

$$\xi_p^b(x) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^\alpha \Gamma(1 - \alpha) |x - x_0|_p^{-1/2} J_{-\alpha}(\beta|x - x_0|_p) \quad (5.2)$$

$$\xi_p^s(x) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) |x - x_0|_p^{-1/2} J_\alpha(\beta|x - x_0|_p) \quad (5.3)$$

で与えられる。ここで $J_{\pm\alpha}$ は Bessel 関数

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \quad (5.4)$$

である。したがって、この例では、Suydam 指数は α に等しい。以下、 $a = 1$ 、すなわち、 $0 \leq x \leq 1$ とする。境界条件

$$\xi_L^s(0) + \Delta_L^{-1} \cdot \xi_L^b(0) = 0 \quad (5.5)$$

$$\xi_R^s(1) + \Delta_R^{-1} \cdot \xi_R^b(1) = 0 \quad (5.6)$$

から、接続データ Δ_p^{-1} は

$$\Delta_L^{-1} = -\frac{\xi_L^s(0)}{\xi_L^b(0)} = -\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-2\alpha} \frac{\Gamma(1 + \alpha) J_\alpha(\beta x_0)}{\Gamma(1 - \alpha) J_{-\alpha}(\beta x_0)} \quad (5.7)$$

$$\Delta_R^{-1} = -\frac{\xi_R^s(1)}{\xi_R^b(1)} = -\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-2\alpha} \frac{\Gamma(1 + \alpha) J_\alpha(\beta(1 - x_0))}{\Gamma(1 - \alpha) J_{-\alpha}(\beta(1 - x_0))} \quad (5.8)$$

で与えられる。特に小さい解が境界条件をみたすとき、すなわち

$$\beta \equiv \beta_n = \frac{j_{\alpha,n}}{x_0} \quad (j_{\alpha,n} \text{ は Bessel 関数 } J_\alpha \text{ の } n \text{ 番目の零点}) \quad (5.9)$$

のとき、 $\Delta_L^{-1} = 0$ である。

次に固有値問題 (2.10) の固有関数は (規格化していない)

$$\xi_{L,n}(x) = |x - x_0|_L^{-1/2} J_\alpha(\sqrt{\beta^2 + \lambda_{L,n}}|x - x_0|_L) \quad (5.10)$$

$$\xi_{R,n}(x) = |x - x_0|_R^{-1/2} J_\alpha(\sqrt{\beta^2 + \lambda_{R,n}}|x - x_0|_R) \quad (5.11)$$

であり、固有値 $\lambda_{L,n}, \lambda_{R,n}$ はそれぞれ

$$\lambda_{L,n} = \left(\frac{j_{\alpha,n}}{x_0} \right)^2 - \beta^2 \quad (5.12)$$

$$\lambda_{R,n} = \left(\frac{j_{\alpha,n}}{1-x_0} \right)^2 - \beta^2 \quad (5.13)$$

で与えられる。

各表 5.1 ~ 5.4 に $\alpha = 1, x_0 = 0.4$ のときの、 $n = 4$ までの零点 $j_{\pm\alpha,n}$ 、固有値 $\lambda_{p,n}$ 、 $\Delta_p^{-1} = 0$ となる β の値および $\Delta_p = 0$ となる β の値を示す。なお、Bessel 関数 $J_{\pm\alpha}$ は文献 [11] にもとづいて数値計算し、 $j_{\pm\alpha,n}$ は Newton 法で求めた。

5.2 計算パラメータ

テスト計算プログラムはディレクトリ MARG1Dtest にある。テスト計算用の入力データは Namelist BSL から読み込まれる。以下に計算パラメータの入力項目を示す。

ネームリスト名：BSL

| 項目 | 配列 | 型 | 意味 | デフォルト値 |
|--------|----|-----|---|--------|
| NR | 1 | I | x 節点数 -1、すなわち分割数 | 1000 |
| LR | 1 | C | 'L': 左, 'R': 右 | 要指定 |
| MARGNL | 1 | I | 接続データ計算フラグ = 0: 固有値問題法 (Δ_L^{-1}) = 1: 境界値問題法 (Δ_L) | 0 |
| IZTFLG | 1 | I | ζ 計算のとき = 0: LU 分解しない = 1: LU 分解する | 1 |
| JTMNO | 1 | I | Bessel 級数展開 = 1: 第 1 項で打ち切り = 2: 第 2 項まで | 1 |
| LMBD0 | 1 | R*8 | 固有値問題の逆べき法の初期値 λ_0 | 要指定 |

| 項目 | 配列 | 型 | 意味 | デフォルト値 |
|--------|----|-----|---|--------|
| FFPOW | 1 | R*8 | 節点生成関数 F_m の γ , ($\gamma > 1, \alpha \neq 1/2$ のとき $\gamma > 1/\alpha$) | 1.5 |
| RR0 | 1 | R*8 | x_0 | 0.4 |
| BBETA | 1 | R*8 | β | 8.6 |
| BALPHA | 1 | R*8 | α | 0.75 |
| DELTA | 1 | R*8 | 台関数 $H(x)$ の幅 δ | 0.05 |
| NDIV | 1 | I | Gauss 積分の積分領域の分割数の 初期値 収束しない場合、max.1024 まで 分割する。 | 32 |
| NGAUSS | 1 | I | Gauss 積分の次数 NDIV, NGAUSS は $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathcal{L}_{\xi_p}^b dx, (\hat{\xi}_p^b, \mathcal{L}_{\xi_p}^b)$ の計算で使用する。 | 5 |

5.3 テスト結果

係数関数が (5.1) 式で表されるモデル方程式では、 $\alpha < 1/2$ のとき解が確定特異点 $x = 0.4$ で発散し、 $\alpha \geq 1/2$ のとき $x = 0.4$ で有限確定 (またはゼロ) である。そこで、テスト計算では、 $\alpha = 3/8, 1/2$ および $\alpha = 3/4$ を選び、各々の場合について MARG1D コードより求めた固有値と接続データの解析値との比較および固有値問題法と境界値問題法との比較を行った。

図 5.1 および 5.2 は、それぞれ、 $\alpha = 3/8, \beta = 7.4$, 節点の集中度 $\gamma = 2.7$ の場合 ((3.57) 式参照) の左側の第 1 固有関数 ξ_{L0} と方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ ($N = 800$) および固有値と左側の接続データの節点数 N に対する依存性を示している。なお、 $\beta = 7.407147$ で $\Delta_L^{-1} = 0$ である。固有関数 ξ_{L0} および $\zeta(x)$ が $x = 0.4$ で発散する傾向がよく捕えられており、これは確定特異点で課した自然境界条件が適切であることを示している。このことは、 $\alpha = 1/2$ および $\alpha = 3/4$ の場合も後に確認される。また、コードから求めた固有値・接続データは解析値とよく一致している。また、固有値も接続データも節点数 N に対して逆 2 乗収束を示す。特に、接続データに関する逆 2 乗収束性は、固有値問題法に対しても境界値問題法に対しても成立しており、その収束の早さは 2 つの方法に対してほぼ同じである。

図 5.3 は一次方程式 (3.11), (3.12) を有限要素法で解いた場合の Lagrange の未定数 ν の収束を表わしている。この図から、 ν は有限の節点数に対して非ゼロの値をもってゼロに逆 2 乗収束することが分かる。

図 5.4 は、異なる β の値に対して固有値問題法で求めた接続データ Δ_L^{-1} の収束を示している ($\alpha = 3/4, \gamma = 2.7$)。 $\beta = 7.407147$ で $\Delta_L^{-1} = 0$ であり、また、 $\beta = 4.486590$ で $\Delta_L = 0$ である。 $\beta = 7.4$ および $\beta = 6.0$ では固有値問題法で求めた接続データは解析値へ逆 2 乗的に早く収束する。一方、 $\beta = 4.4$ の場合、接続データは解析値へ収束するが、その収束は遅い。この場合、境界値問題法で求めた接続データ Δ_L (「×」印) の収束も遅い。これは、一般に、 Δ_p がゼロに近い場合、有限エネルギー部分 ξ_f には番号の大きい固有値に属する固有関数の比率が高いためと予想される。逆に、 $\Delta_p^{-1} = 0$ に近い場合、 ξ_f のうち、第 1 固有関数 (あるいは、番号の低い固有関数) の成分が優勢であるので接続データの収束が早い。

$\alpha = 3/8, \gamma = 2.7$ のときの接続データの β 依存性を図 5.5 に示す。解析的な依存性の実線 (Δ_L^{-1}) および点線 (Δ_L) で示されている。 Δ_L は \sinh^{-1} のスケールで表わされている。「○」印は境界値問題法で、「△」印は固有値問題法で求めた接続データを表わしている ($N = 160$)。これより、境界値問題法と固有値問題法を併用することにより、 $\Delta_L = 0$ および $\Delta_L^{-1} = 0$ となる場合を含むすべての場合について接続データを安定に求めることができることが分かる。

図 5.6 は右側の第 1 固有関数 $\xi_{R0}(x)$ (△印) と方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ (○印) を、図 5.7 はそのときの固有値と接続データの収束を示している (「□」印：固有値問題法、○印：境界値問題法)。パラメータは $\alpha = 3/8, \beta = 5.0, \gamma = 2.7$ である。また、図 5.6 では $N = 800$ である。固有値・接続データとも解析値へ逆 2 乗収束している。

図 5.8 と図 5.9 は $\alpha = 1/2$ の場合の、それぞれ、左側第 1 固有関数と方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ ($\beta = 8.0, \gamma = 1.5, N = 800$) と右側の境界値問題の解 ($\beta = 7.8, \gamma = 1.5, N = 800$) を示している。いずれも、 $x = 0.4$ に近づくと、有限値に収束する傾向が表現されている。図 5.8 では有限エネルギー部分において第 1 固有関数の成分が優勢であるので、接続データは解析値へ早く収束する。一方、図 5.9 より境界値問題の解で第 1 固有関数は優勢な成分でないことが分かる。そのため、接続データの収束は遅くなっている。

次に、 $\alpha = 3/4$ を選び、大きい解の Frobenius 級数の打ち切り項数が数値的に求めた接続データに与える影響を調べる。一般的には、 $\alpha = 3/4$ の場合、Frobenius 級数を第 2 項までとることが必要であるが、(5.4) 式から分かるように、Bessel 関数が x の偶数べきで展開されるため、この例では第 1 項で打ち切っても正しい接続データが得られる。このことは図 5.10 および図 5.11 で確かめられる ($\beta = 11.0, \gamma = 1.5$)。図 5.10 において、大きい解の Frobenius 級数を第 1 項で打ち切った場合の解 $\zeta(x)$ は実線で、第 2 項で打ち切った場合のそれは点線で表わされている ($N = 800$)。確定特異点 $x = 0.4$ の近傍以外では実線と点線は図のスケールでは重なっている。この場合では、右側の第 2 固有値がゼロに近いように β の値が設定されている。 α の値の設定に対応して固有関数 $\xi_{R0}(x)$ も解 $\zeta(x)$ も $x = 0.4$ でゼロに収束する。図 5.11 は固有値問題法で求めた右側の接続データ Δ_R^{-1} の収束を示している。△印および○印は、それぞれ、大きい解の Frobenius 級数を第 1 項 ($JTMNO = 1$) および第 2 項 ($JTMNO = 2$) で打ち切った場合である。両方の場合とも逆 2 乗的に同じ解析値に収束していることが分かる。

図 5.12, 5.13 に境界値問題の右側の解およびそれから求めた接続データの N 依存性を示す ($\alpha = 3/4, \beta = 12.3$)。図 5.12 において実線および点線は大きい解の Frobenius 級数を、それぞれ、第 1 項 ($JTMNO = 1$) および第 2 項 ($JTMNO = 2$) で打ち切った場合の解 $\zeta(x)$ を表わしており、 $x = 0.4$ の近傍以外では両者は重なっている ($N = 800, \gamma = 1.5$)。接続データは、 $JTMNO = 1$ (Δ 印) および $JTMNO = 2$ (\circ 印) の場合とも逆 2 乗的に解析値へ収束しているが、その収束は図 5.11 に比べて遅い。節点の集中度を $\gamma = 2.0$ (\square 印) にすれば少し収束が改善される。しかし、これ以上節点を集中させても収束の加速はほとんど得られないことを確認している。このことは、収束の遅いことが、解に含まれる番号の大きい固有関数の成分の比率に起因していることと一致している。

今までに示した数値計算結果より MARG1D コードについて以下の結論を得る。

1. $\Delta_p \neq 0, \Delta_p^{-1} \neq 0$ に対しては、境界値問題法も固有値問題法も同程度の精度で接続データを与える。
2. 固有値問題、境界値問題において確定特異点での境界条件は自然境界条件が適切であり、この境界条件にもとづいて得られた解は Suydam 指数に従って確定特異点での発散性、収束性を正しく反映する。
3. 第 3.7 節に述べた大きい解の打ち切りに関する定理が数値計算で確認された。
4. Δ_p^{-1} が小さく、ゼロ固有値が第 1 固有値 (および第 2 固有値) の場合、固有値問題法で求めた接続データの収束は早い。このことは境界値問題法についても、それが適用できる範囲内で成立する。
5. 逆に、 Δ_p が小さい場合、境界値問題法でも固有値問題法でも、接続データの収束が遅くなる。これは、有限エネルギー部分のうち番号の低い固有関数が優勢な成分とはならないためと予想される。

$a = 1.0, x_0 = 0.4$ の場合の理論値を示す。

表 1: $\alpha = 1/4$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $j_{\alpha,n}$ | 0.2780888D+01 | 0.5906142D+01 | 0.9042384D+01 | 0.1218134D+02 |
| $j_{-\alpha,n}$ | 0.2006300D+01 | 0.5123063D+01 | 0.8257951D+01 | 0.1139647D+02 |
| $\lambda_{L,n}(\beta = 1)$ | 0.4733336D+02 | 0.2170157D+03 | 0.5100294D+03 | 0.9264065D+03 |
| $\lambda_{R,n}(\beta = 1)$ | 0.2048149D+02 | 0.9589587D+02 | 0.2261242D+03 | 0.4111807D+03 |
| $\beta_n(\Delta_L^{-1} = 0)$ | 0.6952220D+01 | 0.1476535D+02 | 0.2260596D+02 | 0.3045335D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R^{-1} = 0)$ | 0.4634813D+01 | 0.9843570D+01 | 0.1507064D+02 | 0.2030223D+02 |
| $\beta_n(\Delta_L = 0)$ | 0.5015750D+01 | 0.1280766D+02 | 0.2064488D+02 | 0.2849118D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R = 0)$ | 0.3343833D+01 | 0.8538438D+01 | 0.1376325D+02 | 0.1899412D+02 |

表 2: $\alpha = 3/8$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $j_{\alpha,n}$ | 0.2962859D+01 | 0.6095693D+01 | 0.9234316D+01 | 0.1237443D+02 |
| $j_{-\alpha,n}$ | 0.1794636D+01 | 0.4919644D+01 | 0.8057068D+01 | 0.1119679D+02 |
| $\lambda_{L,n}(\beta = 1)$ | 0.5386583D+02 | 0.2312342D+03 | 0.5319537D+03 | 0.9560407D+03 |
| $\lambda_{R,n}(\beta = 1)$ | 0.2338482D+02 | 0.1022152D+03 | 0.2358683D+03 | 0.4243514D+03 |
| $\beta_n(\Delta_L^{-1} = 0)$ | 0.7407147D+01 | 0.1523923D+02 | 0.2308579D+02 | 0.3093607D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R^{-1} = 0)$ | 0.4938098D+01 | 0.1015949D+02 | 0.1539053D+02 | 0.2062405D+02 |
| $\beta_n(\Delta_L = 0)$ | 0.4486590D+01 | 0.1229911D+02 | 0.2014267D+02 | 0.2799198D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R = 0)$ | 0.2991060D+01 | 0.8199407D+01 | 0.1342845D+02 | 0.1866132D+02 |

表 3: $\alpha = 1/2$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $j_{\alpha,n}$ | 0.3141593D+01 | 0.6283185D+01 | 0.9424778D+01 | 0.1256637D+02 |
| $j_{-\alpha,n}$ | 0.1570796D+01 | 0.4712389D+01 | 0.7853982D+01 | 0.1099557D+02 |
| $\lambda_{L,n}(\beta = 1)$ | 0.6068504D+02 | 0.2457401D+03 | 0.5541653D+03 | 0.9859603D+03 |
| $\lambda_{R,n}(\beta = 1)$ | 0.2641557D+02 | 0.1086623D+03 | 0.2457401D+03 | 0.4376490D+03 |
| $\beta_n(\Delta_L^{-1} = 0)$ | 0.7853982D+01 | 0.1570796D+02 | 0.2356194D+02 | 0.3141592D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R^{-1} = 0)$ | 0.5235988D+01 | 0.1047198D+02 | 0.1570796D+02 | 0.2094395D+02 |
| $\beta_n(\Delta_L = 0)$ | 0.3926990D+01 | 0.1178097D+02 | 0.1963495D+02 | 0.2748893D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R = 0)$ | 0.2617993D+01 | 0.7853982D+01 | 0.1308997D+02 | 0.1832595D+02 |

表 4: $\alpha = 3/4$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $j_{\alpha,n}$ | 0.3491008D+01 | 0.6652636D+01 | 0.9801612D+01 | 0.1294703D+02 |
| $j_{-\alpha,n}$ | 0.1058508D+01 | 0.4284054D+01 | 0.7440454D+01 | 0.1058818D+02 |
| $\lambda_{L,n}(\beta = 1)$ | 0.7516961D+02 | 0.2756098D+03 | 0.5994475D+03 | 0.1046660D+04 |
| $\lambda_{R,n}(\beta = 1)$ | 0.3285316D+02 | 0.1219377D+03 | 0.2658655D+03 | 0.4646266D+03 |
| $\beta_n(\Delta_L^{-1} = 0)$ | 0.8727520D+01 | 0.1663159D+02 | 0.2450403D+02 | 0.3236757D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R^{-1} = 0)$ | 0.5818347D+01 | 0.1108773D+02 | 0.1633602D+02 | 0.2157838D+02 |
| $\beta_n(\Delta_L = 0)$ | 0.2646270D+01 | 0.1071013D+02 | 0.1860113D+02 | 0.2647045D+02 |
| $\beta_n(\Delta_R = 0)$ | 0.1764180D+01 | 0.7140090D+01 | 0.1240076D+02 | 0.1764697D+02 |

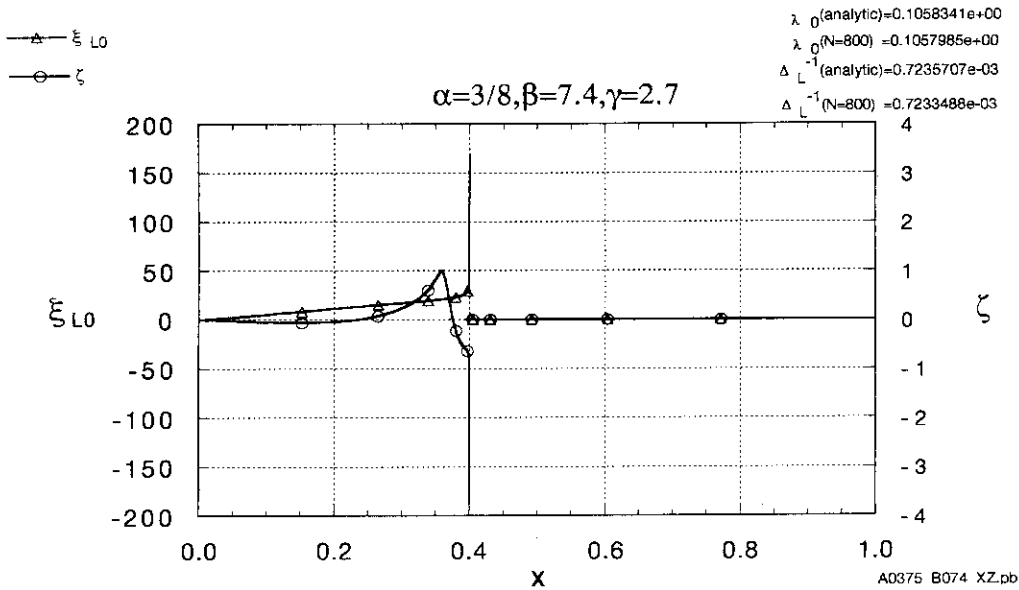


図 5.1:

$\alpha = 3/8, \beta = 7.4, x_0 = 0.4$ に対する左側の第 1 固有関数 $\xi_{L0}(x)$ (Δ 印) と方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ (\circ 印)。いずれも $x = 0.4$ に近づくと発散する傾向がとらえられている。節点数 $N = 800$ 、節点の集中度 $\gamma = 2.7$ ((3.57) 式参照)。固有値 λ_0 と接続データ Δ_L^{-1} (解析値および $N = 800$ の場合の数値計算) を図右上に示す。

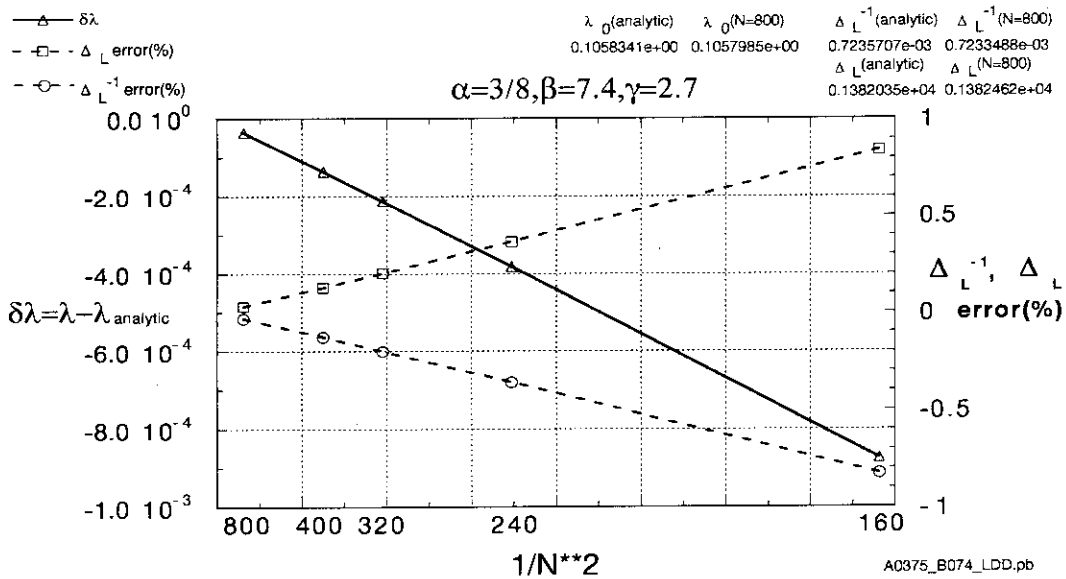


図 5.2:

固有値 λ (Δ 印) と固有値問題法より求めた接続データ Δ_L^{-1} (\circ 印) および境界値問題法より求めた接続データ Δ_L (\square 印) の節点数 N 依存性。パラメータは図 5.1 と同じ。すべて N に対して逆 2 乗収束であり、解析値との一致は良好である。

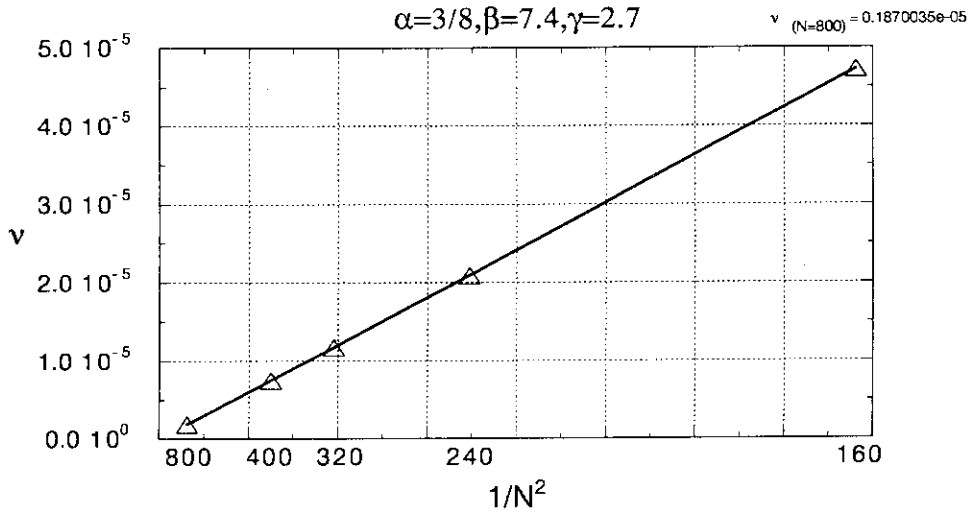


図 5.3:

1 次方程式 (3.11), (3.12) における Lagrange 未定定数 ν の節点数 N 依存性。パラメータは 図 5.1 に同じ。 ν は N に対して逆 2 乗的にゼロに収束する。

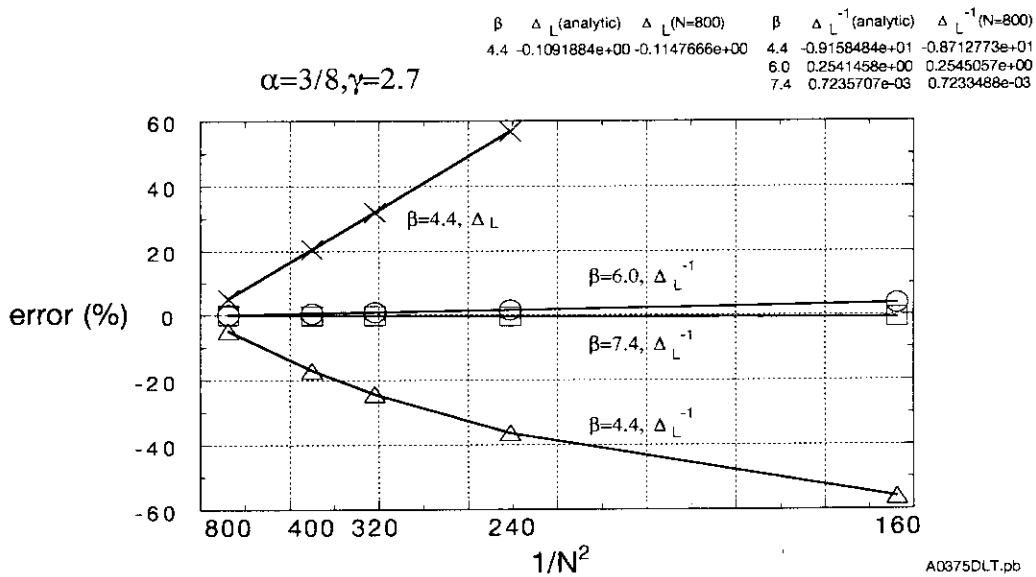


図 5.4:

$\beta = 4.4$ (Δ 印), 6.0 (\circ 印) および $\beta = 7.4$ (\square 印) の場合の接続データ Δ_L^{-1} の N 依存性 ($\alpha = 3/8$)。 $\Delta_L = 0$ となる β の値は $\beta = 4.486590$ である。一方、 $\Delta_L^{-1} = 0$ となる β の値は $\beta = 7.407147$ である。 $\beta = 6.0$ および $\beta = 7.4$ の場合、固有値問題法で求めた Δ_L^{-1} は N に対して逆 2 乗的に早く収束する。しかし $\beta = 4.4$ の場合、接続データの収束は遅い。比較のため、 $\beta = 4.4$ に対して境界値問題法で求めた接続データ Δ_L の N 依存性 (\times 印) も示されている。

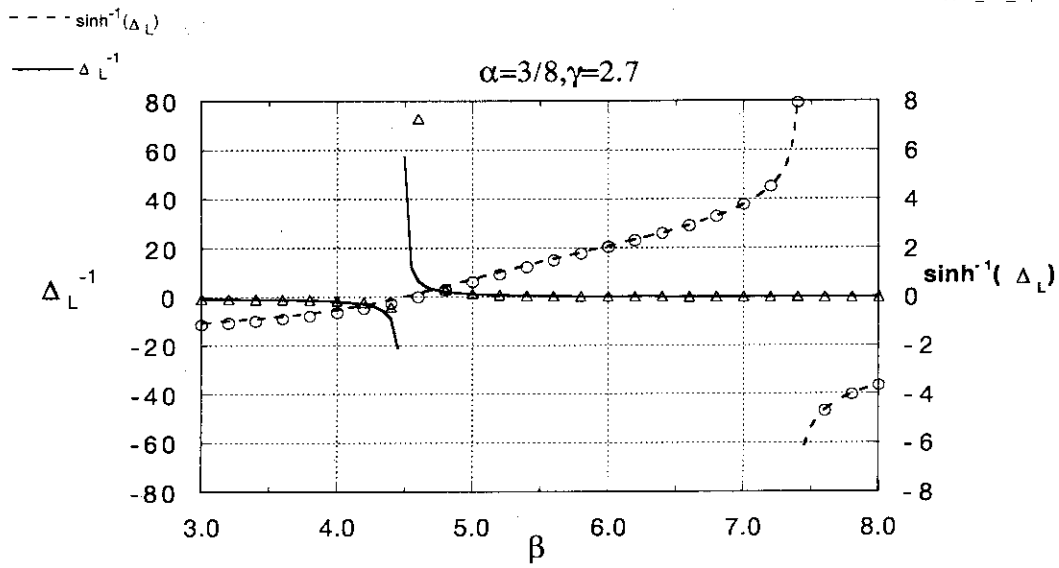


図 5.5:

接続データ Δ_L (点線) および Δ_L^{-1} (実線) の β 依存性 ($\alpha = 3/8$)。 Δ_L は \sinh^{-1} のスケールで表されている。○印は境界値問題法で△印は固有値問題法で求めた接続データである ($N = 160$)。境界値問題法と固有値問題法を併用することにより $\Delta_L = 0$ および $\Delta_L^{-1} = 0$ となる場合を含むすべての場合について接続データを数値的に求めることができる。

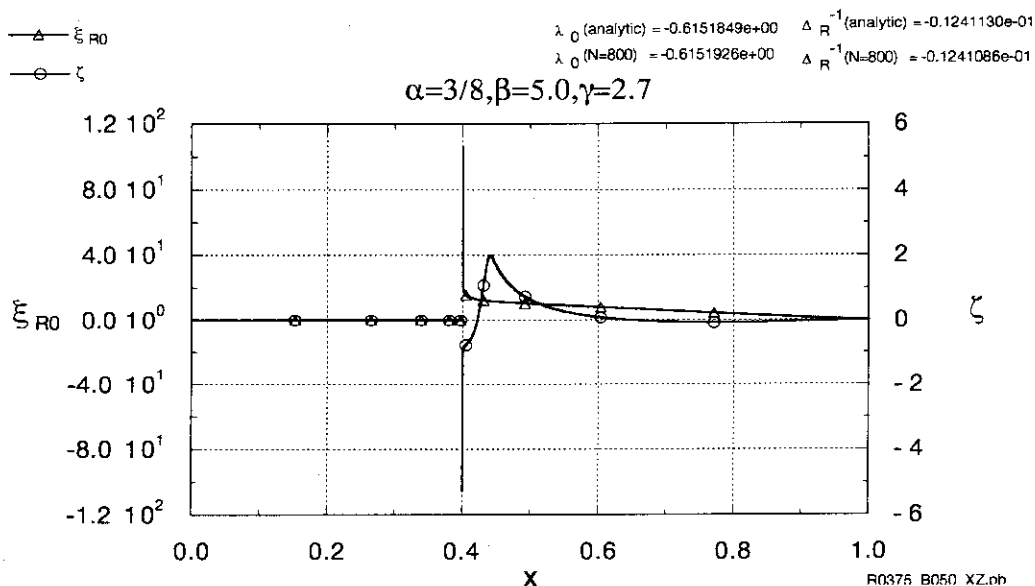


図 5.6:

$\alpha = 3/8, \beta = 5.6$ に対する右側の第1固有関数 $\xi_{R0}(x)$ (Δ 印) と方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ (\circ 印)。節点数 $N = 800$, 節点の集中度 $\gamma = 2.7$ 。

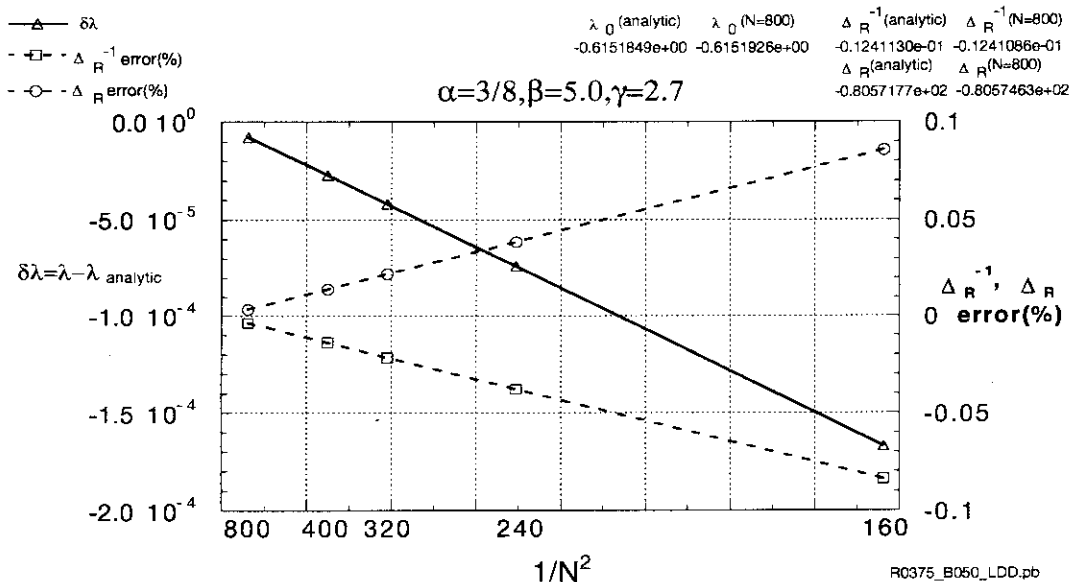


図 5.7:

右側の第1固有値 λ (Δ 印), 固有値問題法より求めた接続データ Δ_R^{-1} (\square 印), および境界値問題法より求めた Δ_R (\circ 印) の N 依存性。パラメータは 図 5.6 に同じ。すべて N に対して逆2乗収束であり、解析値との一致は良い。

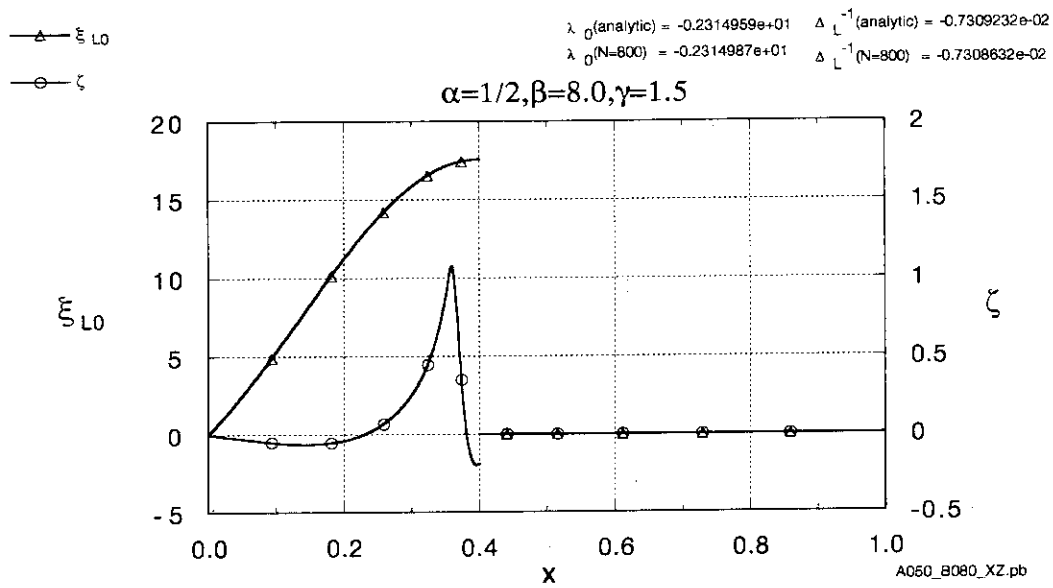


図 5.8:

$\alpha = 1/2, \beta = 8.0$ に対する左側の第1固有関数 $\xi_{L0}(x)$ (Δ 印) と方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ (\circ 印)。いずれも、 $x = 0.4$ に近づくと、有限値に収束する傾向が表現されている ($N = 800, \gamma = 1.5$)。有限エネルギー部分の成分のうち第1固有関数の優勢であるので数値的に求めた固有値および接続データの解析値への収束は早い。

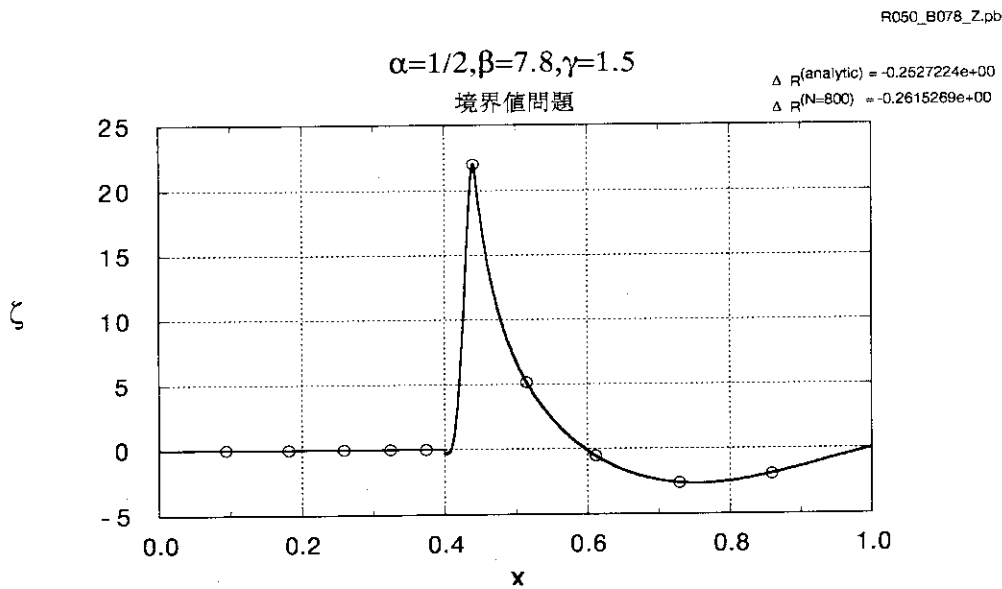


図 5.9:

$\alpha = 1/2, \beta = 7.8$ の場合の境界値問題 (2.30) の右側の解および接続データ $\Delta_R(N = 800, \gamma = 1.5)$ 。第1固有関数が境界値問題の解の優勢な成分でないので、接続データの収束は遅くなっている。

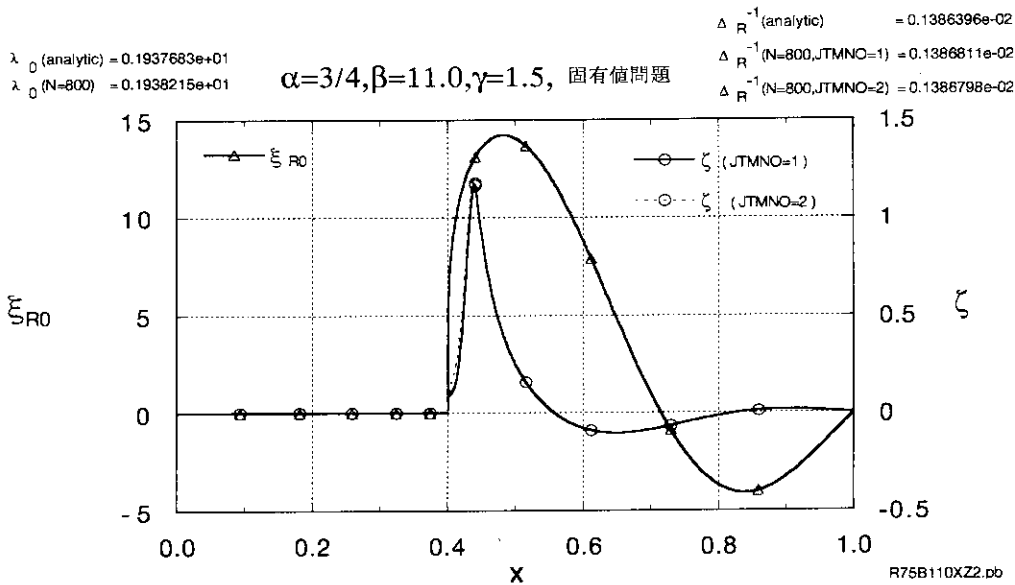


図 5.10:

$\alpha = 3/4, \beta = 11.0$ の場合の右側の第2固有関数 $\xi_{R0}(x)$ (Δ 印) と方程式 (2.19) の解 $\zeta(x)$ (\circ 印)。
 $\zeta(x)$ のグラフで実線および点線は、それぞれ、大きい解の Frobenius 級数を第1項 ($JTMNO = 1$)
 および、第2項 ($JTMNO = 2$) で打ち切った場合を示す ($N = 800, \gamma = 1.5$)。 $x = 0.4$ の近傍以外
 では、実線と点線は重なっている。 $x = 0.4$ で $\xi_{R0}(x)$ も $\zeta(x)$ もゼロに収束する傾向がとらえられ
 ている。有限エネルギー部分は第2固有関数が優勢である。

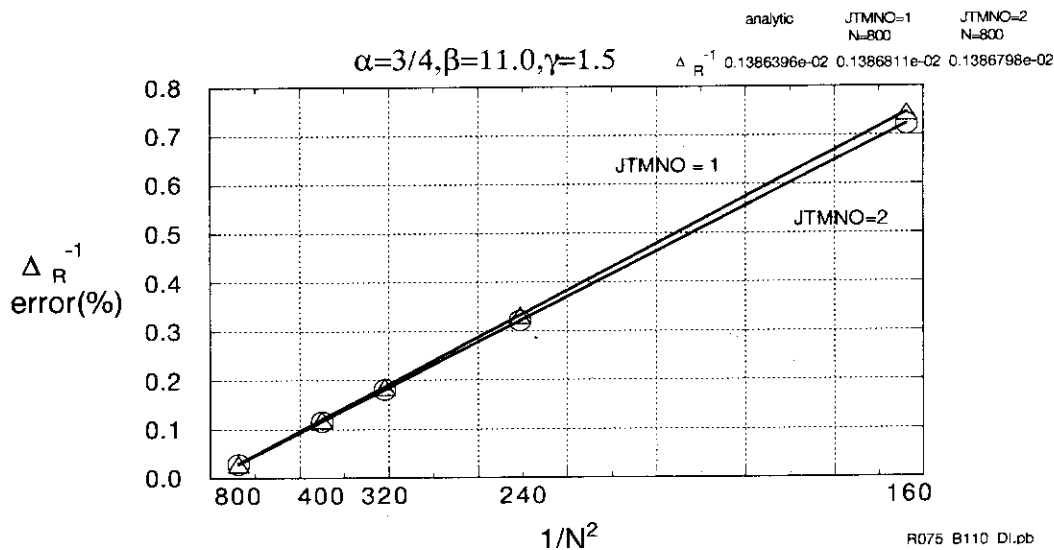


図 5.11:

$\alpha = 3/4, \beta = 11.0$ の場合の固有値問題法で求めた接続データ Δ_R^{-1} の N 依存性。 Δ 印および \circ 印
 は、それぞれ、大きい解の Frobenius 級数を第1項 ($JTMNO = 1$) および第2項 ($JTMNO = 2$)
 で打ち切った場合である。それぞれの場合について、接続データは N の逆2乗収束を示し、解析値
 への収束は良好である (このテスト計算では、第1項で打ち切っても正しい接続データが得られる
 ことに注意)。

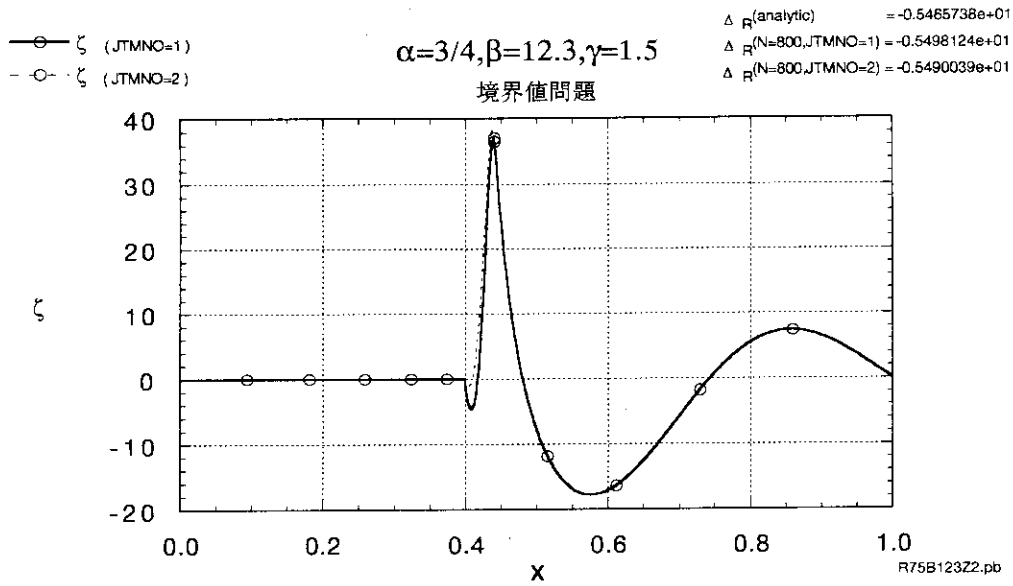


図 5.12:

$\alpha = 3/4, \beta = 12.3$ の場合の境界値問題 (2.30) の解 ($N = 800, \gamma = 1.5$)。実線および点線は、それぞれ、大きい解の Frobenius 級数を第 1 項および第 2 項で打ち切った場合を示す。 $x = 0.4$ の近傍以外では、実線と点線は重なっている。

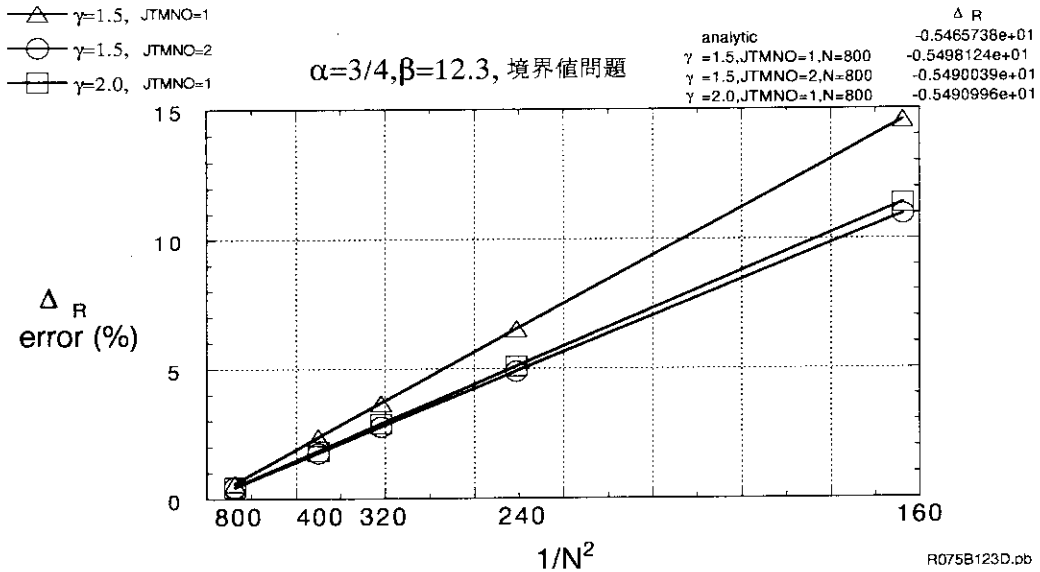


図 5.13:

$\alpha = 3/4, \beta = 12.3$ の場合の境界値問題法によって求めた接続データ Δ_R の N 依存性 (Δ 印: $JTMNO = 1$, \circ 印: $JTMNO = 2$)。両者とも N に対して逆 2 乗収束で、解析値へ収束している。 \square 印は $JTMNO = 1$ の場合で、節点の集中度を $\gamma = 2.0$ にした場合を示す。

6 $m = 1$ モード理論との比較

プラズマが理想 MHD 的に臨界安定に近い場合の理論的に重要な例として $m = 1$ モード理論があげられる [14]。 $m = 1$ モードの Newcomb 方程式は近似的に解くことができる。そこで MARG1D コードを $m = 1$ モード Newcomb 方程式に適用して固有値と接続データを求め、それらを理論値と比較する。これによって固有値問題法と境界値問題法の検証を行う。次節では $m = 1$ モードに対する Newcomb 方程式を近似的に解いて固有値と接続データを求め、6.2 節で数値計算結果の比較を行う。このとき、収束性の検証に加え、大きい解の再定義に関する定理の数値的な確認も行う。

6.1 円柱プラズマにおける $m = 1$ モード理論

6.1.1 $m = 1$ モードに対する Newcomb 方程式

$m = n = 1$ の場合、Newcomb 方程式は

$$\frac{d}{dx} \left(\hat{f}(x) \frac{d\xi}{dx} \right) - \epsilon^2 \hat{g}(x) \xi(x) = 0 \quad (6.1)$$

$$\hat{f}(x) = \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left(\frac{1}{q} - 1 \right)^2 = f_0(x - x_0)^2 + f_1(x - x_0)^3 + \dots \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) = & \frac{2x^2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left[\frac{1}{\epsilon^2} \frac{dp}{dx} \right] \\ & + F^2 \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \left[\left(\frac{1}{q} - 1 \right) - \frac{2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left(\frac{1}{q} + 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

に帰着する [2]。ここで $\xi = \vec{X} \cdot \nabla r$ であり、(6.3) 式において

$$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{dp}{dx} = O(1) \quad (6.4)$$

と仮定する (低ベータ近似)。また、方程式 (6.1) に対応する重み関数 $\rho(x)$ は

$$\hat{\rho}(x) = F^2 x^2 \left(\frac{1}{q} - 1 \right)^2 \quad (6.5)$$

で与えられる。

方程式 (6.1) は、 $\epsilon^2 \ll 1$ のとき、逐次近似で解くことができる。まず、左側の解に対応して $O(\epsilon^2)$ までの固有値と接続データを求め [14]、次に右側の解に対応して第ゼロ近似 (ゼロ・ベータ近似) での接続データを導き、それぞれ、数値計算結果と比較する。

6.1.2 左側の固有値および接続データ

原点 $x = 0$ での自然境界条件より ($d\xi/dx = 0, x = 0$), $\epsilon^2 = 0$ の場合、方程式 (6.1) は

$$\xi_L(x) = \begin{cases} 1 & , x < x_0 \\ 0 & , x > x_0 \end{cases} \quad (6.6)$$

を解に持つ。これは、固有値 $\lambda = 0$ の臨界安定状態における小さい解を表している。したがって、 $O(\epsilon^2)$ における固有値は

$$\lambda = \epsilon^2 c \quad (6.7)$$

$$c = \frac{\int_0^{x_0} \hat{g}(x) dx}{\int_0^{x_0} \hat{\rho}(x) dx} \quad (6.8)$$

で与えられる。

また、 $\xi_L(x) = 1 + \epsilon^2 \zeta(x)$ を方程式 (6.1) に代入すると、 $\zeta(x)$ に対する方程式

$$\frac{d}{dx} \left[\hat{f}(x) \frac{d\zeta}{dx} \right] = \hat{g}(x), \quad \frac{d\zeta}{dx} = 0, \quad x = 0 \quad (6.9)$$

を得る。これはすぐに積分できて

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{c_1}{\hat{f}(x)} \hat{w}(x) + \frac{c_2}{\hat{f}(x)} \quad (6.10)$$

$$\hat{w}(x) = \int_0^x \hat{g}(z) dz \quad (6.11)$$

(6.2), (6.3) 式より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\hat{w}(x)}{\hat{f}(x)} = 0 \quad (6.12)$$

であるので、 $x = 0$ での境界条件より $c_2 = 0$ を得る。これより

$$\zeta(x) = c_1 \int_0^x \frac{\hat{w}(z)}{\hat{f}(z)} dz \quad (6.13)$$

を得る。ここで

$$\frac{1}{\hat{f}(x)} = \frac{f_{-2}}{(x-x_0)^2} + \frac{f_{-1}}{x-x_0} + \hat{f}_r(x) \quad (6.14)$$

$$\hat{w}(x) = w_0 + w_1(x-x_0) + \dots \quad (6.15)$$

と展開する ($\hat{f}_r(x)$ は $x = x_0$ について Taylor 級数展開できる正則関数)。これを用いて (6.13) 式の右辺を $x = x_0$ で大きい解および小さい解の挙動をする項に分ける

ことにより $O(\epsilon^2)$ までの左側の解として

$$\begin{aligned} \xi_L(x) = & c_1 \left[(1 + \epsilon^2 d_L) + \epsilon^2 \frac{g_0}{f_0} \log(x_0 - x) \right] \\ & + c_1 \epsilon^2 \frac{w_0}{f_0} \left[\frac{1}{x_0 - x} - \frac{g_0}{f_0} \log(x_0 - x) \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

を得る。ここで

$$f_{-2} = \frac{1}{f_0}, \quad f_{-1} = -\frac{f_1}{f_0^2} \quad (6.17)$$

を使った。また d_L は定数解に対する $O(\epsilon^2)$ の補正を与える定数である。右辺第1項が小さい解の挙動をする項、第2項が大きい解の挙動をする項である。 \log 関数が現れていることから分かるように (6.17) 式では大きい解が再定義されている。したがって、接続データはそれに対応した再定義接続データであり (これは右側についても同様)、それは

$$\bar{\Delta}_L^{-1} = \epsilon^2 \frac{w_0}{f_0} = \frac{\epsilon^2}{f_0} \int_0^{x_0} \hat{g}(x) dx \quad (6.18)$$

で与えられる。

6.1.3 右側の接続データ

$O(1)$ での Newcomb 方程式

$$\frac{d}{dx} \left[\hat{f}(x) \frac{d\xi}{dx} \right] = 0 \quad (6.19)$$

はすぐに積分でき、境界条件 $\xi(x=1) = 0$ を満たす解は

$$\xi_R(x) = a \int_1^x \frac{dy}{\hat{f}(y)} \quad (6.20)$$

となる。右辺に対して (6.14) 式を用いると

$$\xi_R(x) = a \left\{ -\frac{f_{-2}}{x - x_0} + f_{-1} \log(x - x_0) + d_0 + h_r(x) \right\} \quad (6.21)$$

を得る。ここで

$$d_0 = \frac{f_{-2}}{1 - x_0} - f_{-1} \log(1 - x_0) - \int_{x_0}^1 \hat{f}_r(x) dx \quad (6.22)$$

$$h_r(x) = \int_{x_0}^x \hat{f}_r(x) dx \quad (6.23)$$

である。そして $h_r(x)$ は x_0 のまわりで Taylor 級数展開でき、かつ定数項を含まない正則関数である。 $x = x_0$ の近傍で大きい解は

$$\xi(x) = - \left[\frac{1}{x - x_0} + \frac{f_1}{f_0} \log(x - x_0) + \dots \right] \quad (6.24)$$

また、小さい解は $\xi(x) = 1$ であるので、再定義された接続データ $\bar{\Delta}_R$ は

$$\bar{\Delta}_R = -\frac{d_0}{f_{-2}} = -\frac{1}{1-x_0} - \frac{f_1}{f_0} \log(1-x_0) + f_0 \int_{x_0}^1 \hat{f}_r(x) dx \quad (6.25)$$

で与えられる。

6.2 数値計算結果との比較

前節で示した理論的な結果を MARD1D コードの結果と比較する。図 6.1 および 図 6.2 は数値計算で用いた安全係数 $q(x)$ と圧力勾配 dp/dx である。 $q = 1$ の有界面は $x = 0.5$ に選ばれており、磁気軸 $x = 0$ での安全係数は $q = 0.9$ 、(4.1) 式の定数 a は $a = 4.0$ である。圧力勾配が (6.4) 式のオーダリングを満たすように、Suydam 指数 μ を、逆アスペクト比 ϵ を用いて

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

で与える。このとき、規格化されたトロイダル磁場 $F(x)$ は平衡方程式 (3.53) を解いて求める。

6.2.1 固有値・接続データの ϵ^2 依存性

図 6.3 は左側の第 1 固有値の ϵ^2 依存性 ($0.05 \leq \epsilon \leq 0.85$) を示し、図 6.4 はその $0.05 \leq \epsilon \leq 0.4$ までの拡大図である。「×」印は左側の節点数が $N = 200$ の場合の接続データ、「□」印は (6.7), (6.8) 式より求めた固有値の近似値、「△」印は、(6.8) 式で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限の場合を表わしている。 ϵ が小さい場合のこれらの一致は非常によく、たとえば、 $\epsilon = 0.05$ に対して、それらは、それぞれ

$$-0.05388804, \quad -0.05401794, \quad -0.05406589$$

である。また、すべての ϵ の範囲で固有値 λ は負であり、これは、 $m = 1$ モードが理想 MHD 的に不安定であることを意味している。

図 6.5 は右側の第 1 固有値の ϵ^2 依存性を示している ($0.05 \leq \epsilon \leq 0.90$)。右側の節点数は $N = 200$ である。すべての ϵ の範囲で $\lambda > 0$ である。 ϵ が 1 に近づくことは、圧力勾配の不安定項が大きくなって Suydam 安定条件が破れる方向に変化することを意味する。そのため第 1 固有値は小さくなる。

図 6.6 は MARG1D コードより得られた左側および右側の第 1 固有関数 $Y_{L0}(x)$, $Y_{R0}(x)$ を示している。左右とも $N = 200$, $\epsilon = 0.05$ であり、確定特異点 $x = 0.5$ のまわりの節点の集中度を表わすパラメータ γ の値は 2.2 である。図には $Y(x) = r \vec{X} \cdot \nabla r$ が示されていることに注意 (\vec{X} は (3.42) 式に定義されている)。したがって、 Y_{L0} は $x = 0$ でゼロになり、かつ直線に近い挙動をする。また、ベキ $-1/2 + \mu$ がゼロに近いいため、 $x = 0.5$ での発散性が弱く、そこで有限確定値に近づいている。しかし、後で示すように、固有値・接続データとも理論値との一致および収束性は良好である。

図 6.7は左側の接続データ $\bar{\Delta}_L^{-1}$ の ϵ^2 依存性を示しており、図 6.8はその拡大図である。×印は(6.18)式より求めた接続データを表わしている。ここでは、Appendix Bに示すように、未知関数の変換($Y(x) = x\xi(x)$)による接続データの補正が加えられている((B.17)式参照)。「○」印および△印は固有値問題法で求めた接続データ $\bar{\Delta}_L^{-1}$ であり、前者は大きい解のFrobenius級数の第1項だけを用いた場合($JTMNO = 1$)、後者は再定義された大きい解を用いた場合($JTMNO = -2$)である。節点数はいずれも $N = 200$ である。両者の一致は非常によく、 $\epsilon = 0.05$ の場合

$$\bar{\Delta}_L^{-1} = -0.2097229 \times 10^{-3} \text{ for } JTMNO = 1,$$

$$\bar{\Delta}_L^{-1} = -0.2097123 \times 10^{-3} \text{ for } JTMNO = -2$$

である。一方、解析値は

$$\bar{\Delta}_L^{-1} = -0.2112248 \times 10^{-3}$$

である。

図 6.9は固有値問題法で求めた右側接続データ $\bar{\Delta}_R$ の ϵ^2 依存性を示している($N = 200$)。○印および△印の意味は図 6.7と同じである。「●」印は $\epsilon = 0$ の場合の理論値を示しており、それは

$$\bar{\Delta}_R = 15.32481$$

である。一方、 $\epsilon = 0.05$ の場合

$$\bar{\Delta}_R = 15.12310 \text{ for } JTMNO = 1,$$

$$\bar{\Delta}_R = 15.30819 \text{ for } JTMNO = -2,$$

である((B.16)式参照)。図からも分かるように、 ϵ の小さいときは、再定義された大きい解を用いたほうがより理論値との一致がよい。また、 $\epsilon^2 = 0.64$ までは $JTMNO = 1$ の場合と $JTMNO = -2$ の場合との一致は良いが、 $\epsilon^2 = 0.81$ のとき両者の一致は悪くなる。これは、大きい解の再定義が $\epsilon = 0$ ($\mu = 1/2$)の場合に最適になるように行われているため、 $\epsilon \rightarrow 1$ の場合、この再定義がかえって数値的に精度の悪い結果を招いていると考えられる。

6.2.2 固有値・接続データの収束

図 6.10は $\epsilon = 0.05$ の場合の左側固有値の節点数 N に対する依存性を示している($\gamma = 2.2$)。固有値は節点数 N に対して逆2乗収束し、また、5.3節の結果から予想されるように、その収束も早いことが分かる。図 6.11に $m = 1$ モードに対する方程式(2.19)の解 ζ_p , $p = L, R$ を示す($N = 200$, $\gamma = 2.2$)。なお、(2.19)式で大きい解は再定義されている。

接続データの計算には大きい解を含む定積分、それは数値的に実行される、が必要なため、その収束性は固有値の収束性に比べて微妙である。大きい解を含む定積分の計算法が再定義した場合としない場合で異なることに注意。

図 6.12 は固有値問題法において、(2.20) 式より決められる定数 Ω_L の N 依存性を示している ($\epsilon = 0.05, \gamma = 2.2$)。また、図 6.13 は、接続データ $\bar{\Delta}_L^{-1}$ の N 依存性を示している。いずれも、○印は大きい解を第 1 項で打ち切った場合 ($JTMNO = 1$) を、△印は大きい解を再定義した場合 ($JTMNO = -2$) を表わしている。図 6.13 の縦軸は $\bar{\Delta}_L^{-1}/\epsilon^2$ である。大きい解を再定義した場合としない場合で、一般に、定数 Ω_p は異なる値を持つ。図 6.12, 6.13 は、大きい解を含む定積分の 2 つの計算法が十分な精度を持ち、 Ω_L および $\bar{\Delta}_L^{-1}$ の逆 2 乗収束を保証していると考えられる。特に、大きい解の定義を変更しても、実質的に同じ (この例では 5 ケタまで一致) 接続データを得ている。

図 6.14 は $\epsilon = 0.6$ の場合の右側第 1 固有値の収束を示している ($\gamma = 2.2$)。 $\epsilon = 0.6$ では固有値はゼロより十分離れていて、また、Frobenius 級数で表わされる大きい解と小さい解の 1 次独立性も十分成立していると考えられる。したがって、境界値問題法も固有値問題法も同じ精度で接続データを与え、さらに、大きい解の再定義にかかわらず、結果は変わらないと予想される。図 6.15 はこの予想を確認している ($N = 1000, \gamma = 2.2$)。図で●印および○印は、それぞれ、固有値問題法および境界値問題法で大きい解の Frobenius 級数を第 1 項で打ち切った場合を、「▲」印および△印は、それぞれ、固有値問題法および境界値問題法で大きい解を再定義した場合を示している。図のスケールでは●印と○印、▲印と△印は重なっている。また、逆 2 乗収束の早さは、大きい解の再定義にかかわらず、ほぼ同じである。 $N = 1000$ における大きい解を再定義した場合としないばあいの接続データのわずかの差は、大きい解を含む定積分の計算法の違いに起因すると考えられる。

原理的には、境界値問題法も固有値問題法も Suydam 指数が $\mu > 0$ である限り接続データは計算可能である。しかし、このとき、固有関数も境界値問題の解も確定特異点で強い発散性を示す。図 6.16, 6.17 および 6.18 は $\epsilon = 0.9$ ($\mu = 0.2179449$) の場合の、それぞれ、右側の第 1 固有関数、方程式 (2.19) の解および境界値問題 (2.30) の解を示している ($N = 200$)。Suydam 指数が小さいので、いずれも確定特異点 $x = 0.5$ で強く発散する性質を持つ。この場合でも、確定特異点のまわりで節点を強く集中させれば図 6.19, 6.20 に示すように固有値・接続データの逆 2 乗収束を得ることができる。このときの節点の集中度は $\gamma = 3.5$ である。また、図 6.20 で●印および○印は、それぞれ、固有値問題法および境界値問題法より求めた接続データ $\bar{\Delta}_R$ を示しており、図のスケールでは両者は重なっている。なお、大きい解の Frobenius 級数は第 1 項で打ち切っている。

q.pb

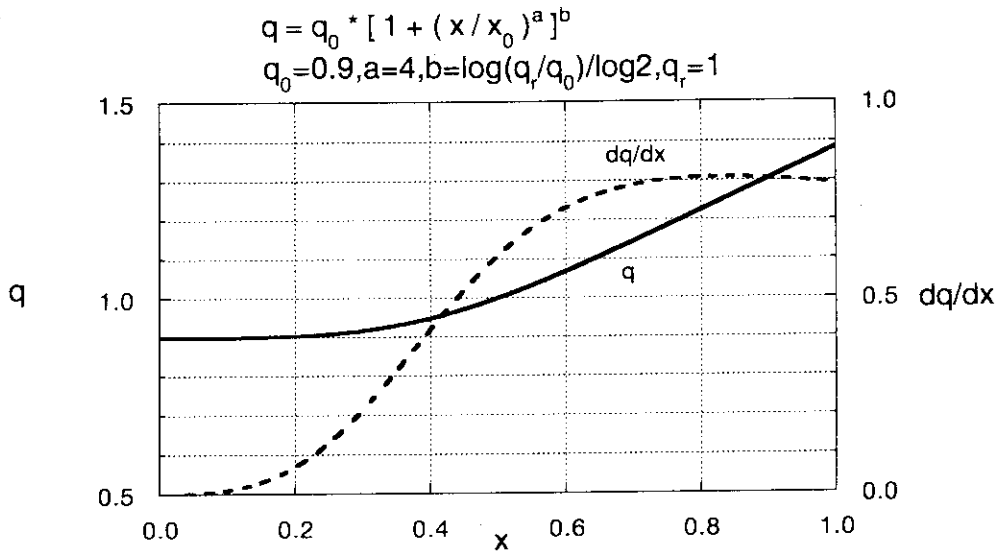


図 6.1:

$m = 1$ モードの接続データ計算に用いる安全係数 $q(x)$ (実線) とその微分 dq/dx (点線)。 $q(x)$ は (4.1) 式で与えられ、 $q_0 = 0.9, a = 4, x_0 = 0.5, q_r = 1$ である。

dpdr.pb

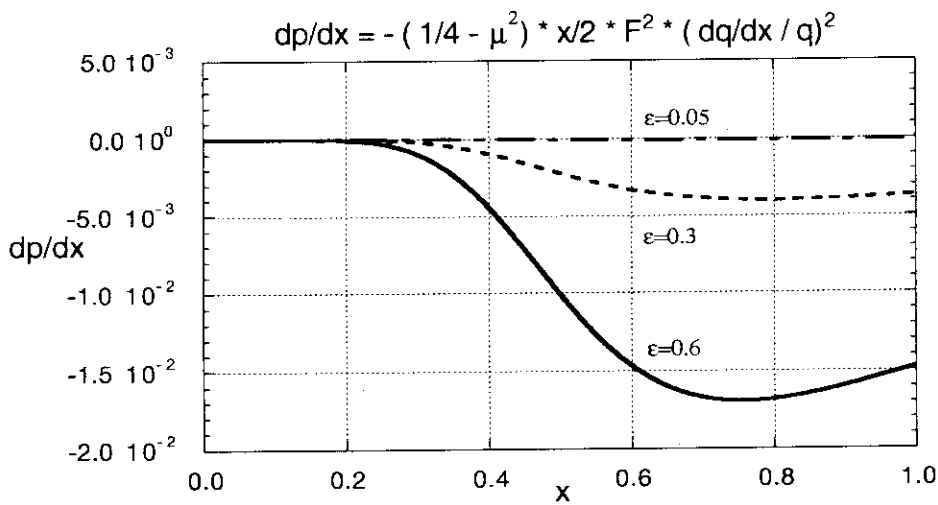


図 6.2:

$m = 1$ モードの接続データ計算に用いる圧力勾配 dp/dx 。このとき、Suydam 指数 μ は、逆アスペクト比を ϵ とするとき、 $\mu = (1/2)\sqrt{1 - \epsilon^2}$ で与える。トロイダル磁場 F は微分方程式 (3.53) を解いて求める。

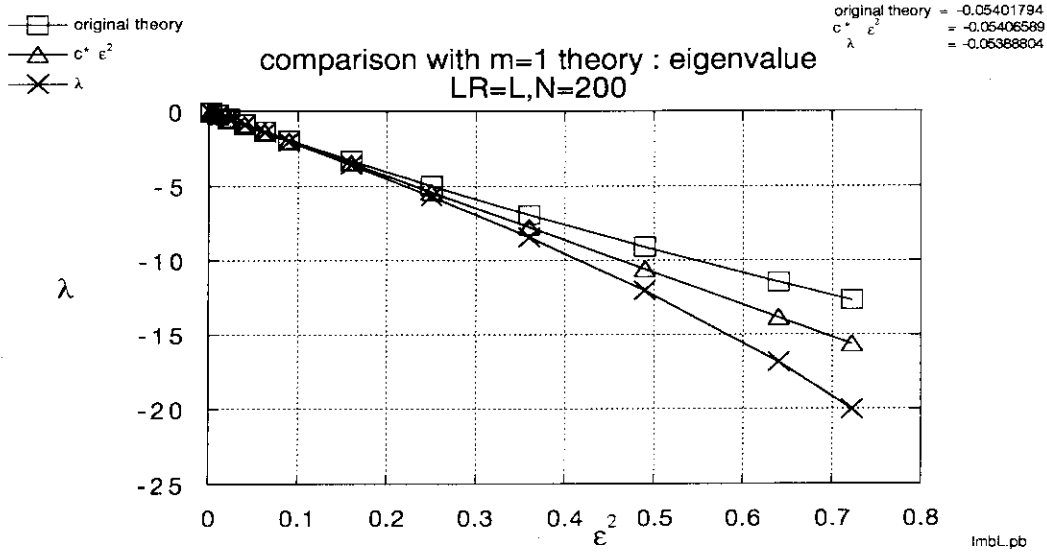


図 6.3:

(a) 左側の第1固有関数 $\xi_{L0}(x)$ の固有値 λ の ϵ^2 依存性 ($0.05 \leq \epsilon \leq 0.85$)。×印は左側の節点数 N が 200 の場合の数値計算結果、□印は (6.7), (6.8) 式より求めた固有値の近似値、△印は (6.8) 式で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限の場合。 $\epsilon = 0.05$ に対して、それらは、それぞれ $-0.05388804, -0.05401794, -0.05406589$ である。すべての ϵ の範囲で固有値 λ は負であり、 $m=1$ モードは理想 MHD 的に不安定である。

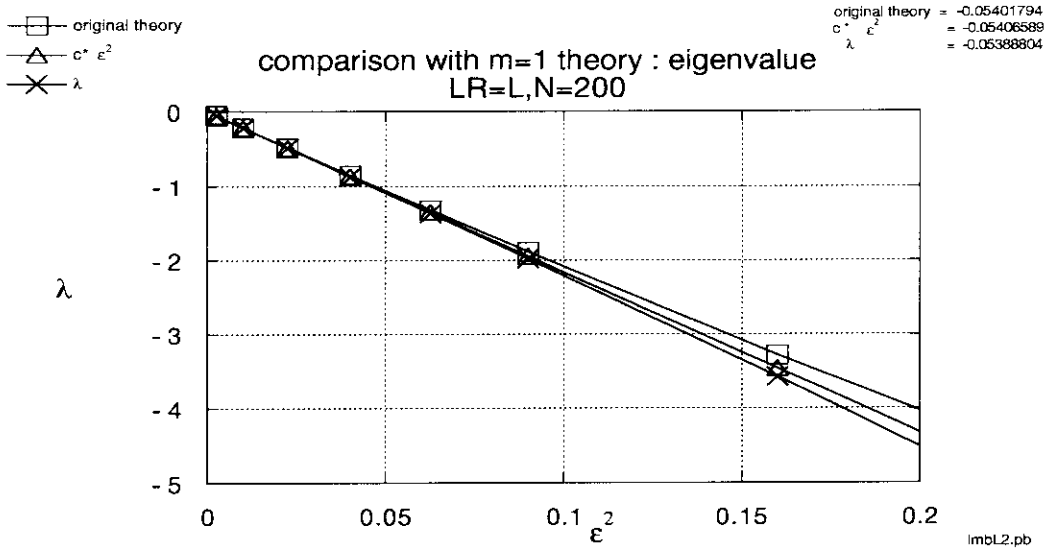


図 6.4:

(b) 図 6.3 の $0.05 \leq \epsilon \leq 0.4$ までの拡大図。

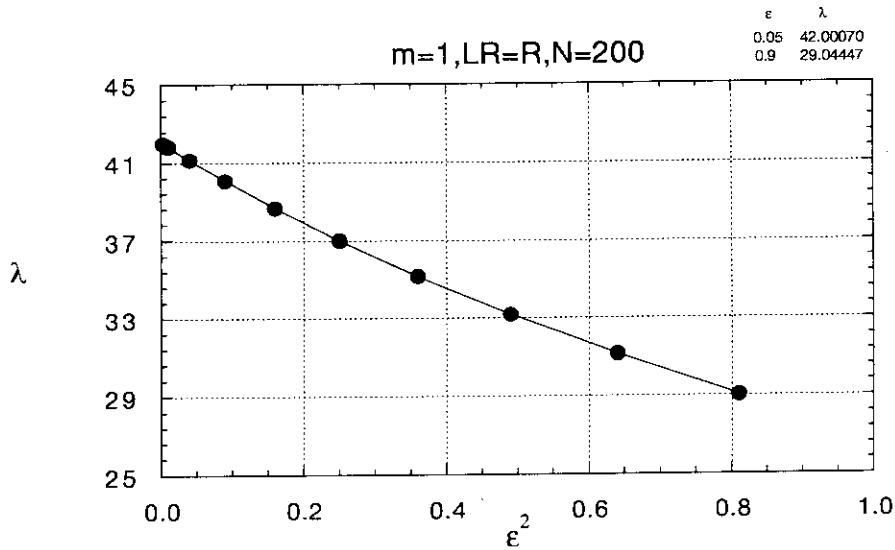


図 6.5:

右側の第1固有関数 $Y_{R0}(x)$ の固有値 λ の ϵ^2 依存性 ($0.05 \leq \epsilon \leq 0.90$)。右側の節点数 $N = 200$ 。すべての ϵ の範囲で $\lambda > 0$ であるけれども ϵ が 1 に近づくと、圧力勾配の不安定化項が大きくなって (Suydam 安定条件が破れる方向になって) 固有値は小さくなる。

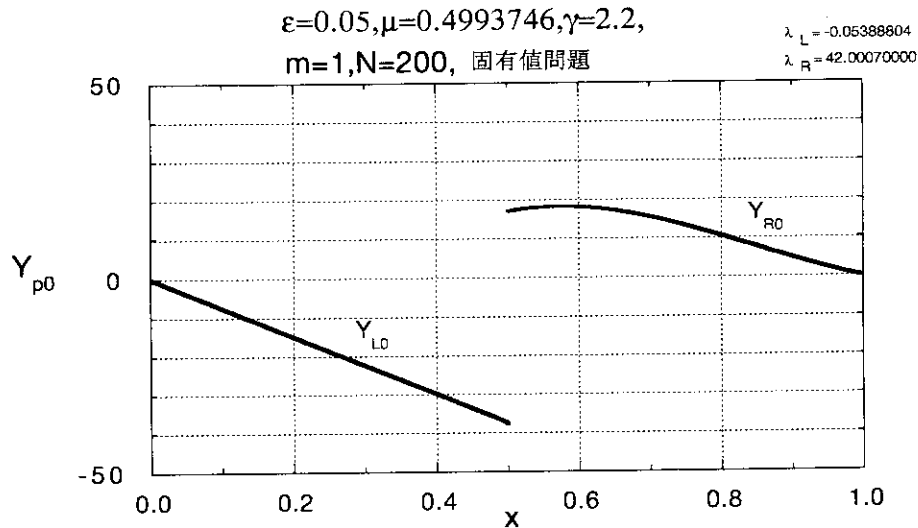


図 6.6:

MARG1D コードで求めた、左側および右側の第1固有関数 $Y_{L0}(x), Y_{R0}(x)$ 。ここで $Y(x) = r\vec{X} \cdot \nabla r$ で、 \vec{X} は (3.42) 式で定義されている。左右とも節点数 $N = 200$, $\epsilon = 0.05$ 、確定特異点 $x_0 = 0.5$ のまわりの節点の集中度を表すパラメータ γ は 2.2 である ((3.57) 式参照)。

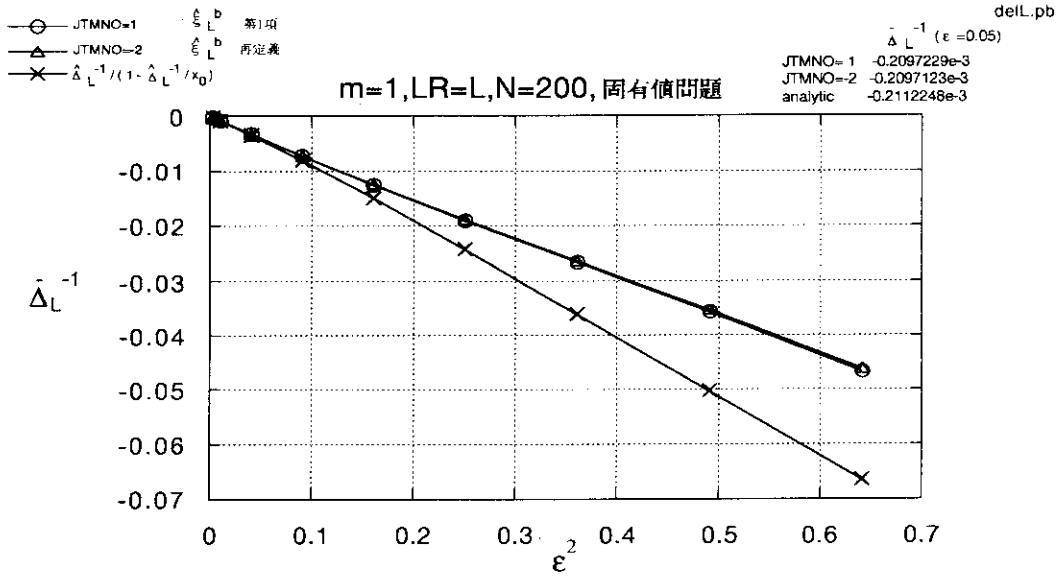


図 6.7:

左側の接続データ $\bar{\Delta}_L^{-1}$ の ϵ^2 依存性。×印は (6.18) 式より求めた接続データを表している。未知関数の変換による接続データの補正が加えられている ((B.17) 式参照)。○印および△印は固有値問題法で求めた接続データ $\bar{\Delta}_L^{-1}$ であり、前者は大きい解の Frobenius 級数の第1項だけを用いた場合 (JTMNO = 1)、後者は再定義された大きい解を用いた場合 (JTMNO = -2) である。節点数 $N = 200$ 。両者の一致は非常に良い。特に $\epsilon = 0.05$ の場合、 $\bar{\Delta}_L^{-1}$ は

$$\begin{aligned} & -0.2097229 \times 10^{-3} \quad \text{for} \quad JTMNO = 1 \\ & -0.2097123 \times 10^{-3} \quad \text{for} \quad JTMNO = -2 \end{aligned}$$

である。一方、解析的に求めた $\bar{\Delta}_L^{-1}$ は $-0.2112248 \times 10^{-3}$ である。

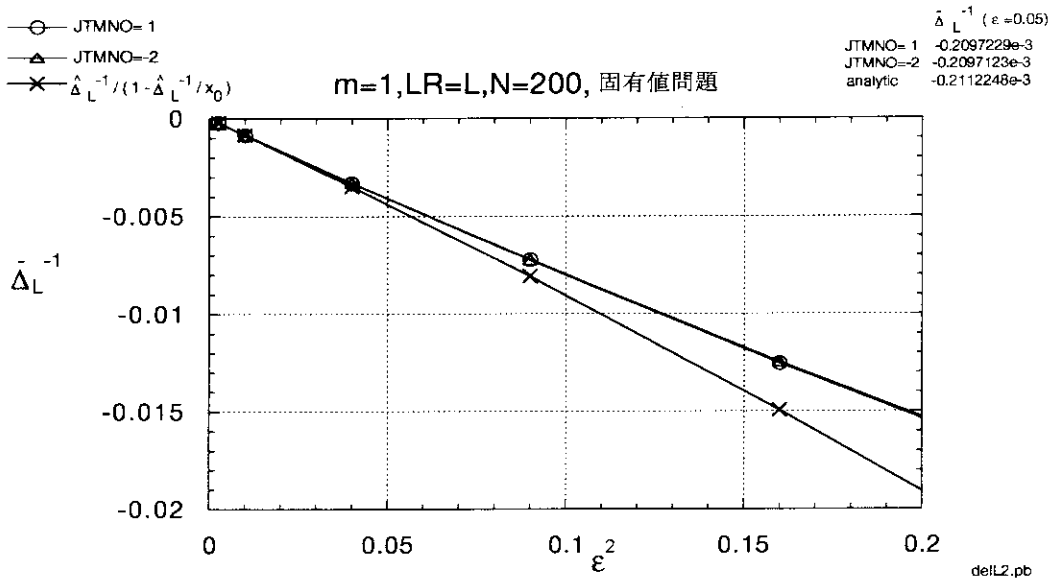


図 6.8:

図 6.7 の $0.05 \leq \epsilon \leq 0.4$ までの拡大図。

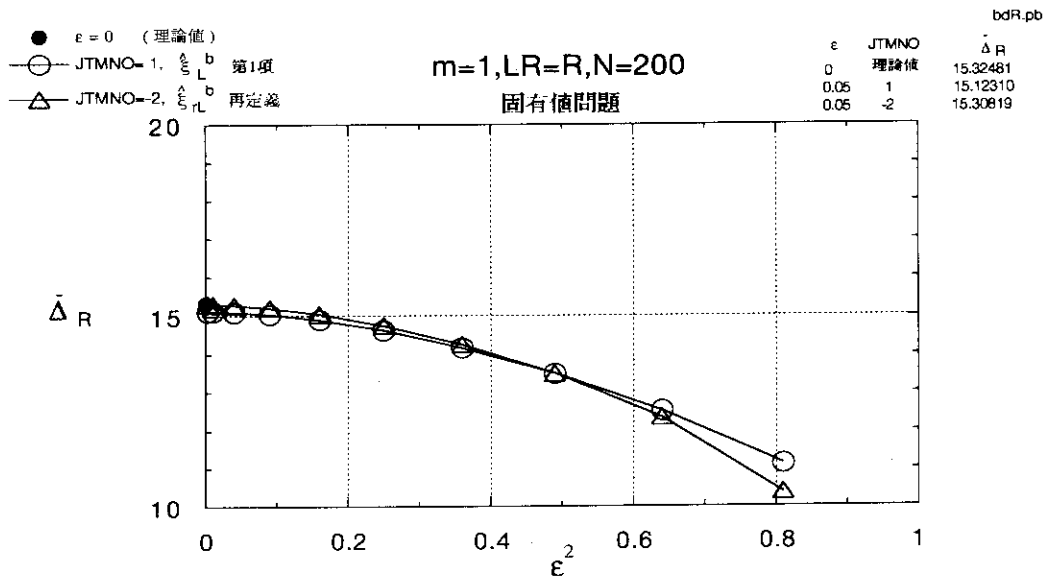


図 6.9:

固有値問題法より求めた右側接続データ $\bar{\Delta}_R$ の ϵ^2 依存性 ($N = 200$)。○印および△印の意味は図 6.7 と同じである。●印は $\epsilon = 0$ の場合の理論値であり、それは 15.32481 である ((B.16) 式参照)。一方、 $\epsilon = 0.05$ の場合

15.12310 for JTMNO = 1
15.30819 for JTMNO = -2

である。 $\epsilon^2 = 0.64$ まで両者の一致は良い。 $\epsilon^2 = 0.81$ のとき、両者の一致は悪くなる。これは、大きい解の再定義が $\epsilon = 0$ ($\mu = 1/2$) の場合に最適になるように行われているため、 $\epsilon \rightarrow 1$ の場合、再定義がかえって数値的に精度の悪い結果を招いていると考えられる。

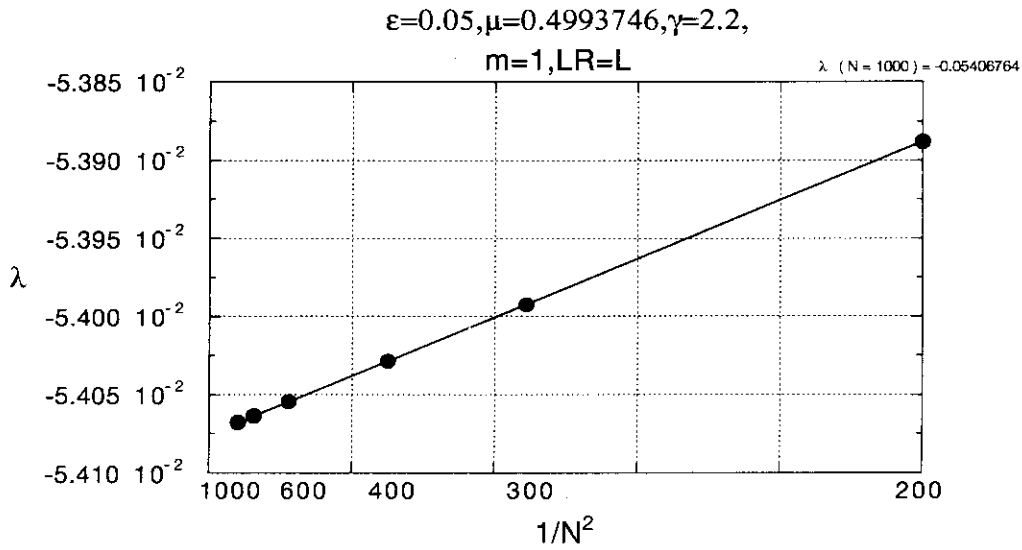


図 6.10:

$\epsilon = 0.05$ の場合の左側第 1 固有値の節点数 N 依存性 ($\gamma = 2.2$)。固有値は節点数 N に対して逆 2 乗収束する。

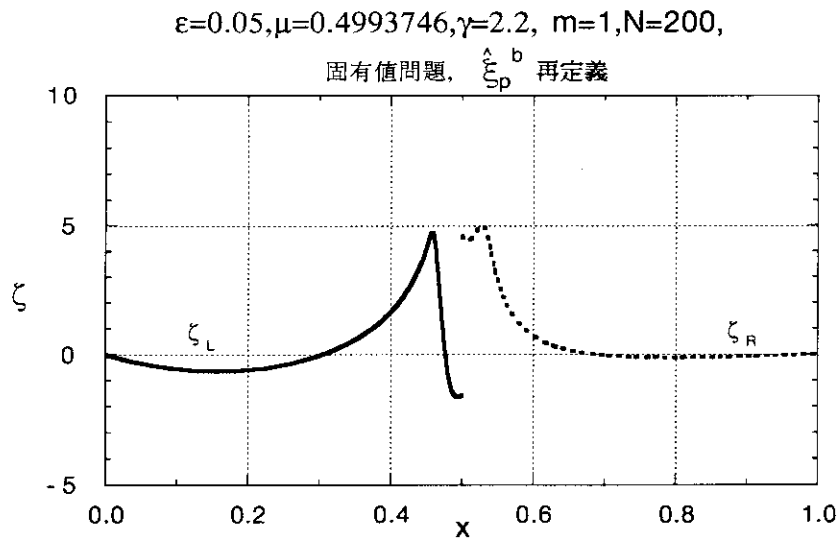


図 6.11:

$\epsilon = 0.05$ の場合の方程式 (2.19) の解 $\zeta_p(x)$ (図 6.6 参照)。なお、(2.19) 式において大きい解は再定義されている。また、左右とも節点数 $N = 200$ 。

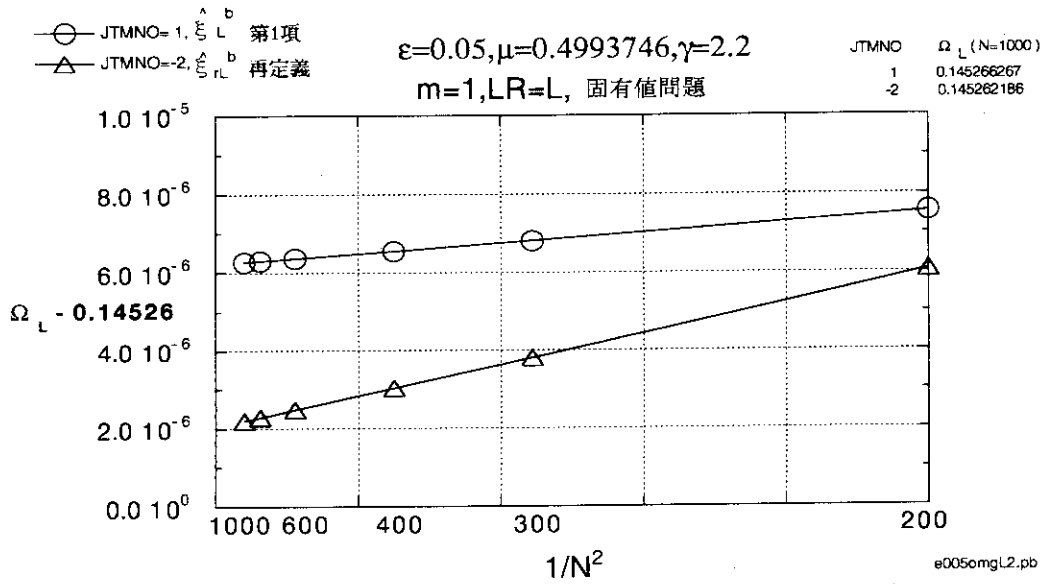


図 6.12:

(2.20) 式より決まる定数 Ω_L の N 依存性 ($\epsilon = 0.05, \gamma = 2.2$)。○印は大きい解を第1項で打ち切った場合 ($JTMNO = 1$)、△印は大きい解を再定義した場合 ($JTMNO = -2$) を表す。

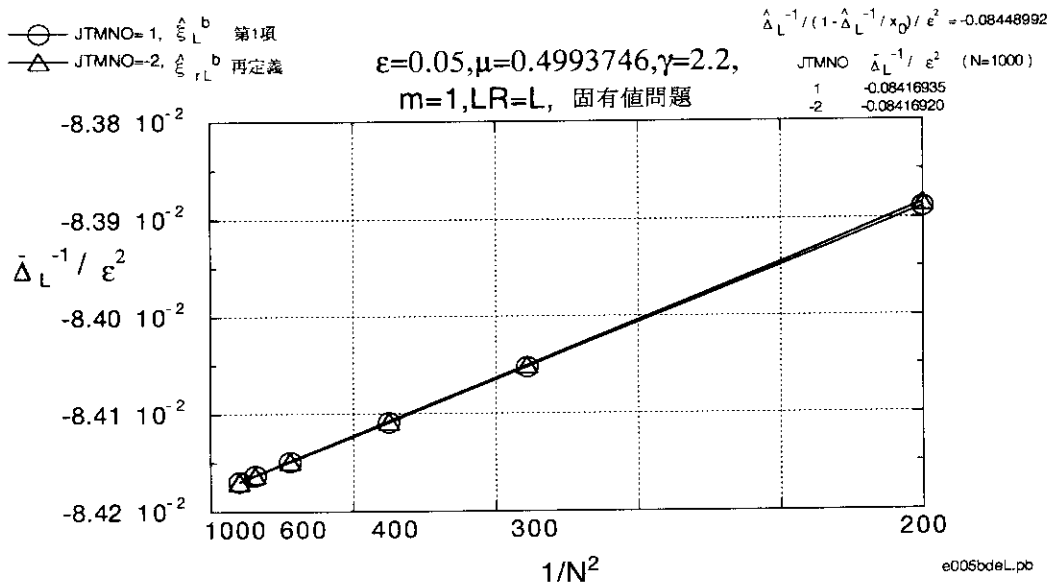


図 6.13:

固有値問題法で求めた左側の接続データ $\bar{\Delta}_L^{-1}$ の N 依存性 ($\epsilon = 0.05, \gamma = 2.2$)。縦軸は $\bar{\Delta}_L^{-1} / \epsilon^2$ で示されている。○印および △印は、それぞれ、大きい解の Frobenius 級数を第1項で打ち切った場合 ($JTMNO = 1$) および大きい解を再定義した場合 ($JTMNO = -2$) を表す ((3.95) 式参照)。両方の場合とも N について逆2乗収束し、 $N \geq 300$ での両者の一致は良い。

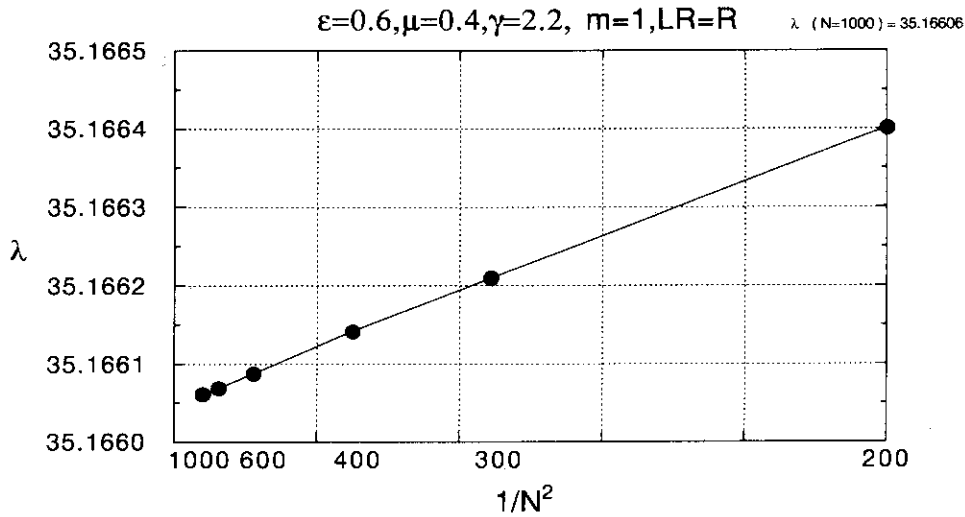


図 6.14:

$\epsilon = 0.6$ の場合の右側第 1 固有値の N 依存性 ($\gamma = 2.2$)。

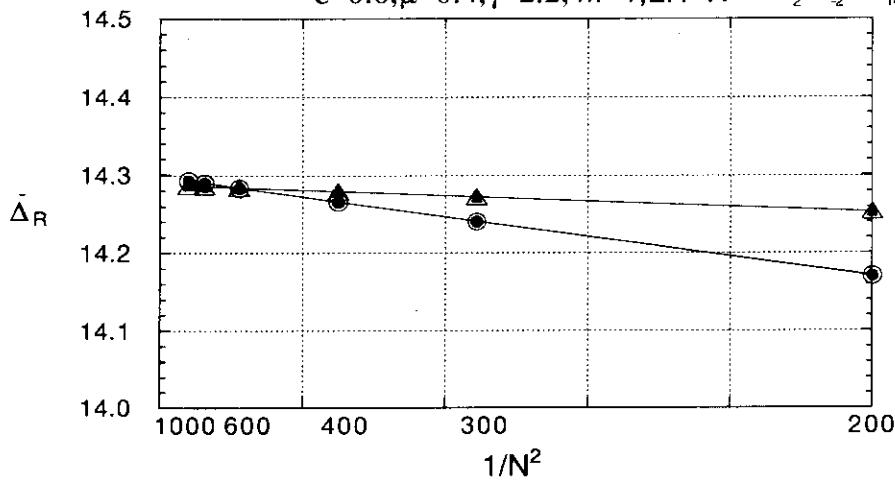
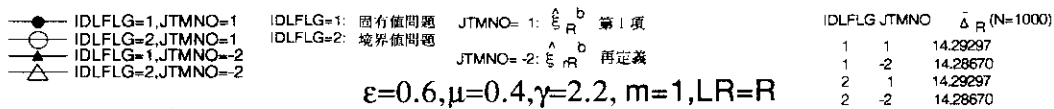


図 6.15:

$\epsilon = 0.6$ の場合の右側の接続データ $\bar{\Delta}_R$ の N 依存性 ($\gamma = 2.2$)。●印および○印は、それぞれ、固有値問題法および境界値問題法で大きい解の Frobenius 級数を第 1 項で打ち切った場合を、▲印および△印は、それぞれ、固有値問題法および境界値問題法で大きい解を再定義した場合を示している。図のスケールでは●印と○印、▲印と△印は重なっている。 $N = 1000$ における大きい解を再定義した場合としない場合の接続データのわずかの差は大きい解を含む定積分の計算法の違いに起因すると考えられる。

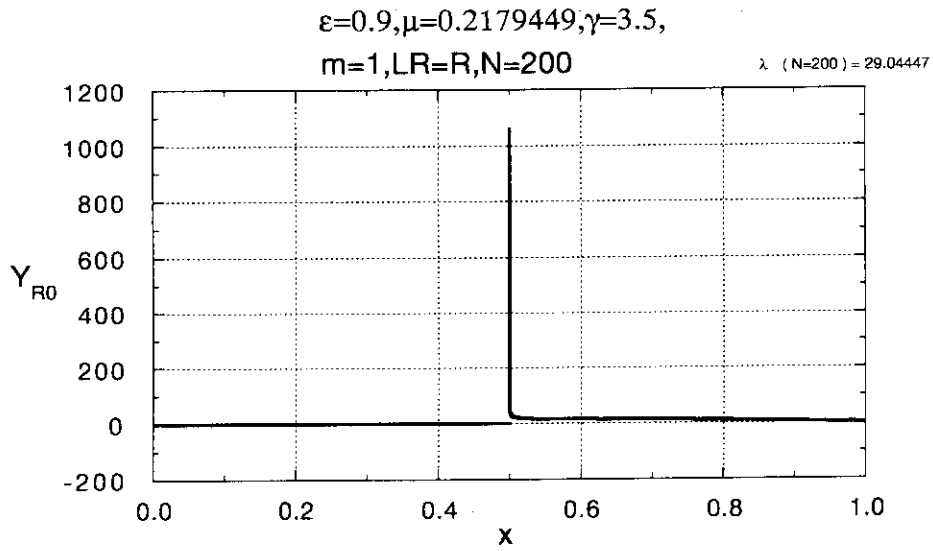


図 6.16:

$\epsilon = 0.9$ の場合の右側の第 1 固有関数 $Y_{R0}(x) (N = 200)$ 。Suydam 指数 μ が小さくなるので、固有関数は確定特異点 $x = 0.5$ において強い発散性を示す。そのため、 $x = 0.5$ において節点を集中させねばならず、 $\gamma = 3.5$ である。

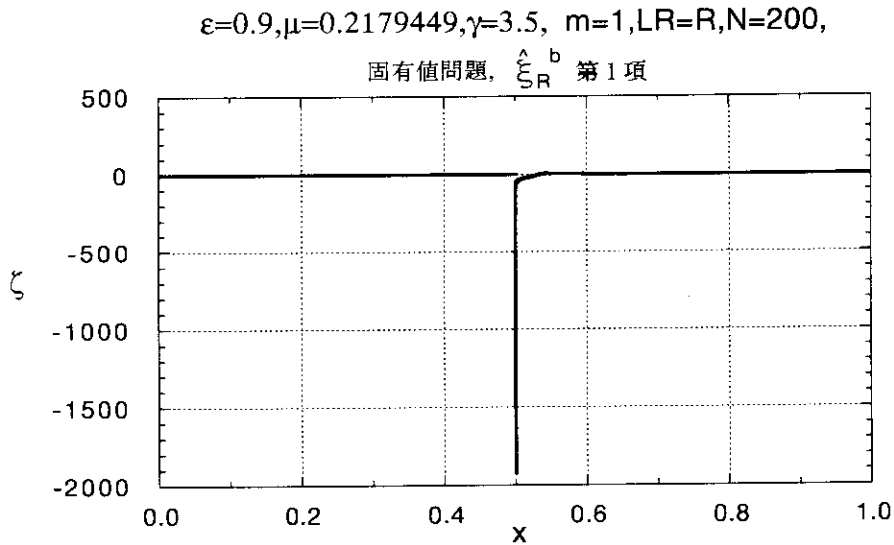


図 6.17:

$\epsilon = 0.9$ の場合の方程式 (2.19) の右側の解 $\zeta(x) (N = 200, \gamma = 3.5)$ 。大きい解の Frobenius 級数は第 1 項で打ち切っている。

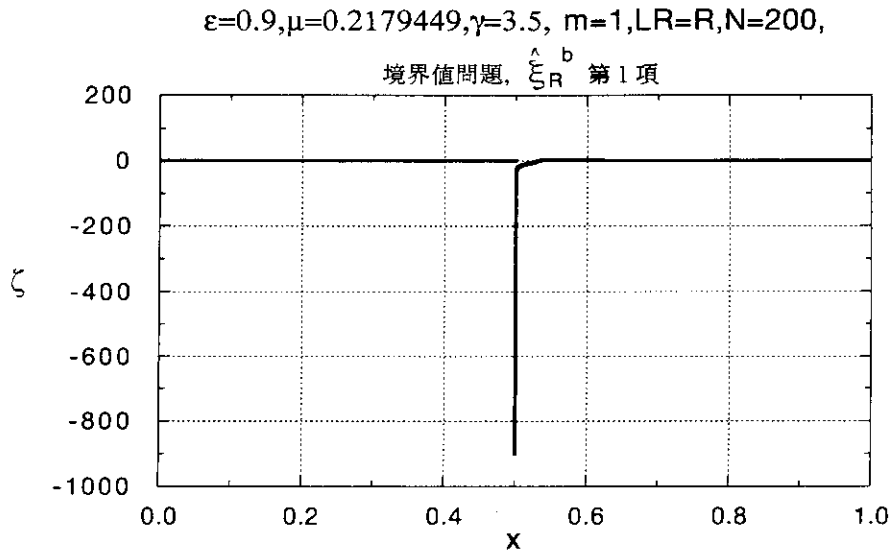


図 6.18:

$\epsilon = 0.9$ の場合の境界値問題 (2.30) の右側の解 $\zeta(x) (N = 200, \gamma = 3.5)$ 。大きい解の Frobenius 級数は第1項で打ち切られている。

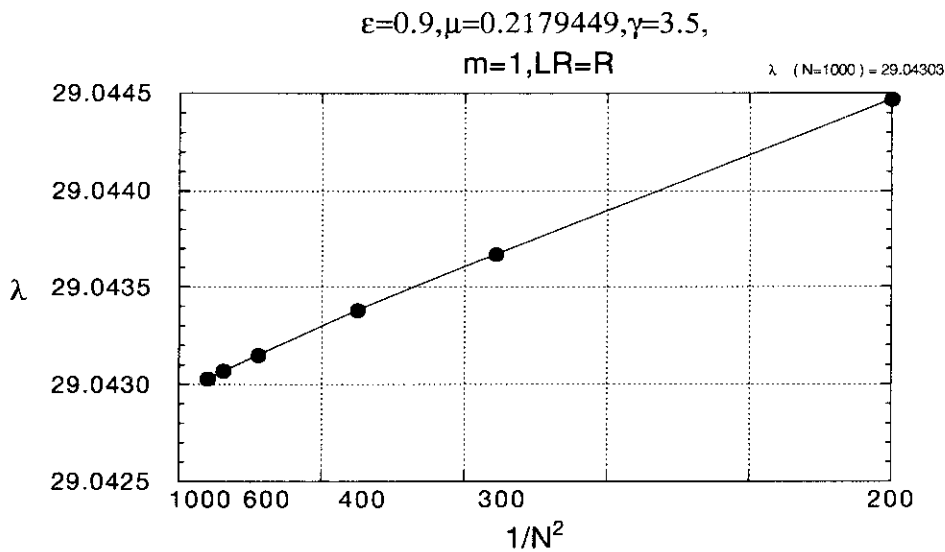


図 6.19:

$\epsilon = 0.9$ の場合の右側第1固有値の N 依存性 ($\gamma = 3.5$)。確定特異点 $x = 0.5$ のまわりで節点の集中度をあげるにより、固有値の逆2乗収束が得られる。

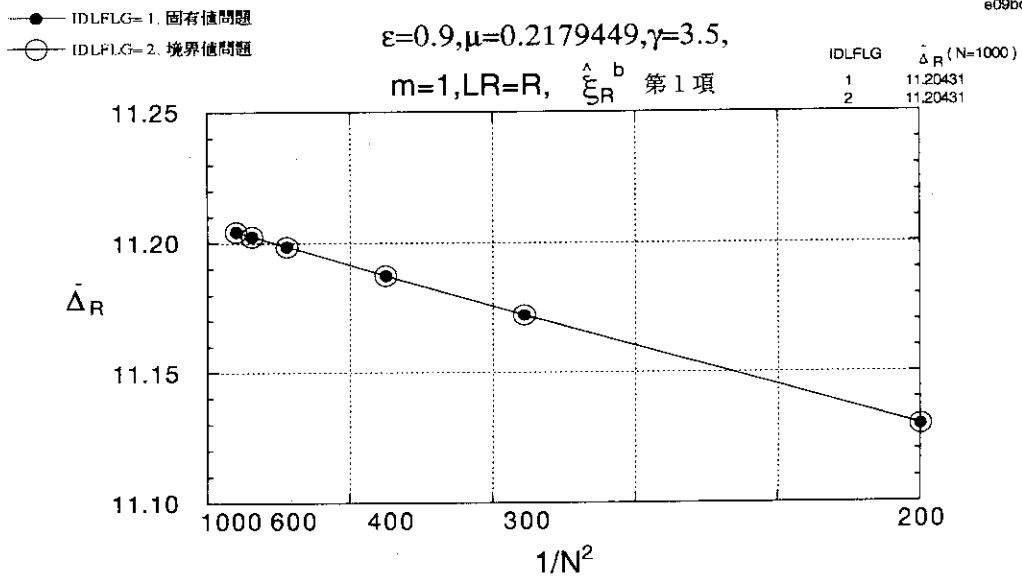


図 6.20:

$\epsilon = 0.9$ の場合の右側の接続データ $\bar{\Delta}_R$ の N 依存性 ($\gamma = 3.5$)。●印および○印は、それぞれ、固有値問題および境界値問題法より求めた接続データを表している。また、大きい解の Frobenius 級数は第1項で打ち切っている。図のスケールでは両者は重なっている。 $x = 0.5$ のまわりの節点の集中度をあげるにより接続データの逆2乗収束が得られる。

7 結 論

本レポートでは1次元Newcomb方程式の外部領域接続データを求めるMARG1Dコードについて述べた。そして、詳細なテスト計算によって、このコードを用いて外部領域接続データが数値的に安定にかつ高精度で計算できることを示した。

MARG1Dコードは境界値問題法および固有値問題法によって接続データを求める。その数値計算法として変分原理にもとづく有限要素法を用いている。テスト計算で示されたように、臨界安定になる場合を除けば、境界値問題法と固有値問題法は同等である。しかし、固有値問題法は、理想MHD安定性解析が可能であること、および、臨界安定な場合でも数値的な安定性が保証されているという利点を持つ。

このコードは、応用上重要なSuydam指数が $1/2$ に近い場合に大きい解を再定義するようになっている。そして、大きい解のFrobenius級数の打ち切りに関する、および、大きい解の再定義に関する定理が成立することを数値実験で検証した。

固有値問題法の定式化においては、重み関数および確定特異点における境界条件を適切に選択することによって、Newcomb方程式の作用素のスペクトラムが古典的なSturm-Liouville列をなす固有値のみからなる、したがって連続スペクトルをもたない、ことが本質的に重要である。このことが、通常の有限要素法にもとづく数値計算法で臨界安定状態の同定を可能にするとともに、境界値問題法と固有値問題法の同等性を保証する。1次元のNewcomb方程式に対しては、確定特異点における適切な境界条件は自然境界条件である。このことは数値実験で確認された。この自明であるように見える境界条件は確定特異点におけるNewcomb方程式の基本解が「大きい解」と「小さい解」の2つの特異な解からなっていることに対応している。しかし、2次元Newcomb方程式ではこれはあてはまらない。2次元問題では確定特異点における基本解として「大きい解」と「小さい解」のほかに「正則解」が存在するため、自然境界条件は不適切になる。

MARG1Dコードで求めた接続データを境界条件として「内部層方程式」を解けばプラズマの抵抗性MHD(および非理想MHD)安定性解析ができる。また、実際のトカマク・プラズマ実験における抵抗性MHD安定性の解析には2次元Newcomb方程式を解くことが必要になる(MARG2D)。これらのコードは現在開発中であり、今後、順次、報告していく予定である。また、固有値問題法に関連した固有値問題・特異方程式の解法コードとしてMulti-Grid法にもとづく反復解法コードも開発中である[15]。この解法コードは固有値問題法にとって適切であり、2次元問題に特に有力であると期待される。

謝 辞

MARG1Dコードの開発にあたり、貴重なご助言をいただいた電気通信大学牛島照夫、加古孝両教授に感謝します。

7 結 論

本レポートでは1次元Newcomb方程式の外部領域接続データを求めるMARG1Dコードについて述べた。そして、詳細なテスト計算によって、このコードを用いて外部領域接続データが数値的に安定にかつ高精度で計算できることを示した。

MARG1Dコードは境界値問題法および固有値問題法によって接続データを求める。その数値計算法として変分原理にもとづく有限要素法を用いている。テスト計算で示されたように、臨界安定になる場合を除けば、境界値問題法と固有値問題法は同等である。しかし、固有値問題法は、理想MHD安定性解析が可能であること、および、臨界安定な場合でも数値的な安定性が保証されているという利点を持つ。

このコードは、応用上重要なSuydam指数が $1/2$ に近い場合に大きい解を再定義するようになっている。そして、大きい解のFrobenius級数の打ち切りに関する、および、大きい解の再定義に関する定理が成立することを数値実験で検証した。

固有値問題法の定式化においては、重み関数および確定特異点における境界条件を適切に選択することによって、Newcomb方程式の作用素のスペクトラムが古典的なSturm-Liouville列をなす固有値のみからなる、したがって連続スペクトルをもたない、ことが本質的に重要である。このことが、通常の有限要素法にもとづく数値計算法で臨界安定状態の同定を可能にするとともに、境界値問題法と固有値問題法の同等性を保証する。1次元のNewcomb方程式に対しては、確定特異点における適切な境界条件は自然境界条件である。このことは数値実験で確認された。この自明であるように見える境界条件は確定特異点におけるNewcomb方程式の基本解が「大きい解」と「小さい解」の2つの特異な解からなっていることに対応している。しかし、2次元Newcomb方程式ではこれはあてはまらない。2次元問題では確定特異点における基本解として「大きい解」と「小さい解」のほかに「正則解」が存在するため、自然境界条件は不適切になる。

MARG1Dコードで求めた接続データを境界条件として「内部層方程式」を解けばプラズマの抵抗性MHD(および非理想MHD)安定性解析ができる。また、実際のトカマク・プラズマ実験における抵抗性MHD安定性の解析には2次元Newcomb方程式を解くことが必要になる(MARG2D)。これらのコードは現在開発中であり、今後、順次、報告していく予定である。また、固有値問題法に関連した固有値問題・特異方程式の解法コードとしてMulti-Grid法にもとづく反復解法コードも開発中である[15]。この解法コードは固有値問題法にとって適切であり、2次元問題に特に有力であると期待される。

謝 辞

MARG1Dコードの開発にあたり、貴重なご助言をいただいた電気通信大学牛島照夫、加古孝両教授に感謝します。

参考文献

- [1] B. Coppi, J. M. Greene, and J. L. Johnson, Resistive Instabilities in a Diffuse Linear Pinch, Nuclear Fusion, **6** 101-117 (1966).
- [2] W. A. Newcomb, Hydromagnetic Stability of a Diffuse Linear Pinch, Annals of Phys., **10** 232-267 (1960).
- [3] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, Plasma Confinement, Addison-Wesley, New York, (1992).
- [4] A. Pletzer and R. L. Dewar, Non-ideal Stability: Variational Method for the Determination of the Outer-region Matching Data, J. Plasma Phys., **45** 427-451 (1991).
- [5] 徳田伸二, 渡邊朋子, Computation of the outer-region matching data for a plasma close to the marginal ideal MHD stability, 統計数理研究所共同研究リポート 72 「MHD 数値モデルによる核融合計算と最適設計」, 統計数理研究所 (1995).
- [6] J.M.Greene, Introduction to Resistive Instabilities, Lausanne Report, LRP 114/76, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne (1976).
- [7] 徳田伸二, 熊倉利昌, 吉村更一, 接続データを求める有限要素法の数値実験, JAERI-M 93-075 (1993).
- [8] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol.1, Interscience, New York, (1953).
- [9] R. Gruber and J. Rappaz, Finite Element Methods in Linear Ideal Magnetohydrodynamics, Springer-Verlag, Berlin, (1985).
- [10] G.Strang, Linear Algebra and its Applications, Academic Press, New York, (1976).
- [11] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, Numerical Recipes in Fortran, 2nd ed., Cambridge, New York, (1992).
- [12] C.M.Bender and S.A.Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and engineers, McGraw- Hill, New York, (1978).
- [13] 森正武, 数値解析と複素関数論, 筑摩書房, 東京, (1975).
- [14] G. Ara, B. Basu, B. Coppi, G. Laval, M.N. Rosenbluth, and B. V. Waddell, Magnetic Reconnection and $m = 1$ Oscillations in Current Carrying Plasmas, Annals of Phys., **112** 443-476 (1978).
- [15] 神吉隆司, 徳田伸二, 宇山忠男, Multi-Grid Method による固有値問題と特異方程式の数値解法 - 常微分方程式への適用 -, JAERI-Research 95-050 (1995).

付録 A 端点で特異性のある関数の数値積分

端点で特異性のある関数の数値積分を変数変換と台形則を用いて行う。以下、定積分

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad ; \quad f(x) \text{ は端点 } x = b \text{ で特異性を持つ} \quad (\text{A.1})$$

において、被積分関数 $f(x)$ は、端点 $x = b$ で特異性 (たとえば $x \rightarrow b$ のとき $f(x) \sim (b-x)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$) を持つとする。変数変換

$$x = a + (b-a) \tanh z \quad , \quad 0 \leq z \leq \infty \quad (\text{A.2})$$

$$dx = (b-a) \frac{1}{\cosh^2 z} dz \quad (\text{A.3})$$

を行えば、積分 (A.1) は

$$I = (b-a) \int_0^\infty F(z) \frac{dz}{\cosh^2 z} \quad (\text{A.4})$$

$$F(z) = f(a + (b-a) \tanh z) \quad (\text{A.5})$$

に変換される。これによって、 $f(x)$ が $x \rightarrow b$ で $(b-x)^\alpha$ のように発散しても ($\alpha < -1$)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F(z)}{\cosh^2 z} \rightarrow 0 \quad (\text{A.6})$$

になる。次に、定積分 (A.4) に対して最適な数値積分法である台形則を適用する [13]。すなわち

$$g(z) = \frac{F(z)}{\cosh^2 z} \quad (\text{A.7})$$

とにおいて、 $0 \leq z \leq z_{max}$ を N 等分し

$$\int_0^\infty g(z) dz = \frac{h}{2} g(0) + h \sum_{k=1}^N g(kh) \quad (\text{A.8})$$

定数 z_{max} は以下のように設定する。数値計算上の右側の端点を $x - \epsilon_b$ とすると

$$\epsilon_b = \delta(1 - \tanh z_{max}) \rightarrow 2\delta e^{-2z_{max}} \quad (\text{A.9})$$

より

$$z_{max} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2\delta}{\epsilon_b} \right) \quad (\text{A.10})$$

を得る。同様に、積分 (A.1) で、 $f(x)$ が端点 $x = a$ で特異性を持つとき、変数変換を

$$x = a + (b-a)[1 + \tanh z] \quad , \quad -\infty \leq z \leq 0 \quad (\text{A.11})$$

とする。台形則は区間 $z_{min} \leq z \leq 0$ を N 等分して

$$\int_{-\infty}^0 g(z) dz = \frac{h}{2} g(Nh) + h \sum_{k=0}^{N-1} g(kh) \quad (\text{A.12})$$

となる。定数 z_{min} は、数値計算上の左側の端点を $x + \epsilon_b$ とすると

$$\epsilon_b = \delta(1 + \tanh z_{max}) \rightarrow 2\delta e^{2z_{max}} \quad (\text{A.13})$$

より

$$z_{min} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\epsilon_b}{2\delta} \right) \quad (\text{A.14})$$

で与えられる。

付録 B 接続データの変換

ここでは、Newcomb 方程式において未知関数を $\xi(x)$ から $Y(x) = x\xi(x)$ に変換したときの接続データの変換性を調べる。まず、関数 x は $x = x_0$ で正則であるので Suydam 指数 μ は不変であることが分かる。

以下、右側で考える。確定特異点 x_0 のまわりの $\xi_R(x)$ の Frobenius 級数は

$$\xi_R^b(x) = (x - x_0)^{-1/2-\mu} \left[1 + \xi_1^b(x - x_0) + \xi_2^b(x - x_0)^2 + \dots \right] \quad (\text{B.1})$$

$$\xi_R^s(x) = (x - x_0)^{-1/2+\mu} \left[1 + \xi_1^s(x - x_0) + \xi_2^s(x - x_0)^2 + \dots \right] \quad (\text{B.2})$$

であるので

$$\begin{aligned} x\xi_R^b(x) &= (x - x_0)\xi_R^b(x) + x_0\xi_R^b(x) \\ &= x_0(x - x_0)^{-1/2-\mu} + x_0\xi_1^b(x - x_0)^{1/2-\mu} + x_0\xi_2^b(x - x_0)^{3/2-\mu} + \dots \\ &\quad + (x - x_0)^{1/2-\mu} + \xi_1^b(x - x_0)^{3/2-\mu} + \dots \\ &= x_0(x - x_0)^{-1/2-\mu} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \left(\xi_1^b + \frac{1}{x_0} \right) (x - x_0) + \left(\xi_2^b + \frac{\xi_1^b}{x_0} \right) (x - x_0)^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

同様に

$$\begin{aligned} x\xi_R^s(x) &= x_0(x - x_0)^{-1/2+\mu} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \left(\xi_1^s + \frac{1}{x_0} \right) (x - x_0) + \left(\xi_2^s + \frac{\xi_1^s}{x_0} \right) (x - x_0)^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

である。 $2\mu \neq$ 整数であるので $Y(x)$ の $x = x_0$ のまわりの Frobenius 級数の形式は $\xi(x)$ のそれと同じである。特に、 $x\xi_R^b(x)$ に小さい解が混合することはない。したがって、 $\xi(x)$ を用いた場合の接続データ $\hat{\Delta}_p$ と $Y(x)$ を用いて計算した接続データ Δ_p は等しいことが分かる：

$$\hat{\Delta}_p = \Delta_p \quad (\text{B.5})$$

次に $\mu = 1/2$ の場合を考える。このとき、 $\xi(x)$ の $x = x_0$ のまわりの Frobenius 級数は

$$\xi_R^b(x) = \frac{1}{x - x_0} + \alpha \log(x - x_0) [1 + P(x - x_0)] + Q(x - x_0) \quad (\text{B.6})$$

$$\xi_R^s(x) = 1 + R(x - x_0) \quad (\text{B.7})$$

で表される [12]。ここで $P(t), Q(t), R(t)$ は t のべき級数で定数項を含まない。したがって

$$\begin{aligned}
 x\xi_R^b(x) &= \frac{x}{x-x_0} + \alpha x \log(x-x_0)[1 + P(x-x_0)] + xQ(x-x_0) \\
 &= 1 + \frac{x_0}{x-x_0} \\
 &\quad + \alpha \log(x-x_0)[(x-x_0) + (x-x_0)P(x-x_0) + x_0 + x_0P(x-x_0)] \\
 &\quad + [x_0Q(x-x_0) + (x-x_0)Q(x-x_0)] \\
 &= x_0 \left\{ \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x-x_0} \right. \\
 &\quad \left. + \alpha \log(x-x_0)[1 + \tilde{P}(x-x_0)] + \tilde{Q}(x-x_0) \right\} \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 x\xi_R^s(x) &= x + xR(x-x_0) \\
 &= x_0 + [(x-x_0) + (x-x_0)R(x-x_0) + x_0R(x)] \\
 &= x_0[1 + \tilde{R}(x-x_0)] \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

である。ここで $\tilde{P}(t), \tilde{Q}(t), \tilde{R}(t)$ は定数項を含まない t のべき級数である。一方、 $Y(x)$ に対する方程式の「大きい解」および「小さい解」はそれぞれ (B.6) および (B.7) と同じ形式で表現されるはずであるから、(B.8) より $x\xi_R^b(x)$ には「大きい解」と「小さい解」が混じっていることが分かる。すなわち、 $Y(x)$ に対する「大きい解」と「小さい解」を、それぞれ、 $\Xi_R^b(x), \Xi_R^s(x)$ とすると

$$x\xi_R^b(x) \propto \Xi_R^b(x) + \frac{1}{x_0}\Xi_R^s(x) \tag{B.10}$$

が成立する。したがって

$$\xi_R(x) = \xi_R^b(x) + \hat{\Delta}_R \xi_R^s(x) \tag{B.11}$$

のとき

$$\begin{aligned}
 Y_R(x) &= x\xi_R(x) = x\xi_R^b(x) + \hat{\Delta}_R x\xi_R^s(x) \\
 &= x_0 \left[\Xi_R^b(x) + \frac{1}{x_0}\Xi_R^s(x) + \hat{\Delta}_R \Xi_R^s(x) \right] \\
 &= x_0 \left[\Xi_R^b(x) + \bar{\Delta}_R \Xi_R^s(x) \right] \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

すなわち、 $\mu = 1/2$ の場合、接続データは

$$\bar{\Delta}_R = \hat{\Delta}_R + \frac{1}{x_0} \tag{B.13}$$

のように変換される。

最後に、再定義された大きい解を用いた場合の接続データの変換性を調べる。 $Y(x)$ および $\xi(x)$ に対する (3.88) 式右辺をそれぞれ、 $s(\mu)$ および $\hat{s}(\mu)$ とすれば (B.3) 式と同様の議論により

$$\hat{s}(\mu) = s(\mu) - \frac{1}{x_0} \quad (\text{B.14})$$

を得る。これを (3.95) 式に代入して、 Δ_R と Δ_L は不変であることを使うと

$$\Delta_R = (\bar{\Delta}_R - \frac{1}{x_0}) - \hat{s}(\mu), \quad \Delta_L = (\bar{\Delta}_L + \frac{1}{x_0}) + \hat{s}(\mu) \quad (\text{B.15})$$

を得る。したがって

$$\hat{\Delta}_R = \bar{\Delta}_R - \frac{1}{x_0}, \quad \hat{\Delta}_L = \bar{\Delta}_L + \frac{1}{x_0} \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{\Delta}_L^{-1} = \frac{1}{\hat{\Delta}_L - 1/x_0} = \hat{\Delta}_L^{-1} \frac{1}{1 - \hat{\Delta}_L^{-1}/x_0} \quad (\text{B.17})$$

を得る。 $m=1$ モード理論で与えられる接続データは $\hat{\Delta}_p$ であり、MARG1D コードが計算している接続データは $\bar{\Delta}_p$ である。また (B.16) 式と (B.13) 式より $\mu \rightarrow 1/2$ になっても接続データ $\bar{\Delta}_p$ の変換性は保持されることが分かる。