

JAERI-Data/Code
97-006



有限要素法試験行列生成プログラム
FEM2PL(Ver.1.0)利用手引書

1997年3月

市原 潔

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越しください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費領布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1997

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷(株)

有限要素法試験行列生成プログラム F E M 2 P L (Ver. 1.0) 利用手引書

日本原子力研究所計算科学技術推進センター
市原 漢

(1997年2月10日受理)

「有限要素法試験行列生成プログラム F E M 2 P L」（以下、「本プログラム」）は、連立一次方程式の数値解法サブルーチンの動作確認のための試験行列として有限要素法の剛性行列を生成するプログラムである。本プログラムでは、少数のパラメタを入力するだけで、任意規模の試験行列を容易に生成することができる。また、右辺に現れる荷重ベクトルと解である変位ベクトルの理論的厳密解も同時に生成する。

本書は、2次元応力問題の有限要素法に関する理論の概要、本プログラムの利用方法、および保守に必要なプログラム仕様についてまとめたものである。

A User's Manual of FEM2PL (Ver. 1.0) - A Generator of the Test Matrix
which Appears in the Finite Element Analysis

Kiyoshi ICHIHARA

Center for Promotion of Computational Science and Engineering
Japan Atomic Energy Research Institute
Nakameguro, Meguro-ku, Tokyo-to

(Received February 10, 1997)

"FEM2PL" is a program which generates test matrices of stiffness matrices for the finite element analysis. The generated test matrices can be used for verifying the solutions obtained by linear system's solvers.

With only a few parameters given, the users can easily obtain a stiffness matrix of any size, a force vector, and a nodal displacement vector (a theoretical solution vector).

This user's manual describes a brief theoretical background of the finite element analysis on the two-dimensional stress problem, the instructions on how to use this program, and the program specification document for maintenance.

Keywords: Test Matrix, Linear Equations, FEM (Finite Element Method)

目 次

1. 序 論	1
2. 試験行列のベースとなる有限要素モデル	2
2.1 2次元応力問題の基礎方程式	2
2.2 有限要素法による離散化	3
2.3 対象とする問題と厳密解	5
3. プログラム利用方法	7
3.1 入力データ	7
3.2 実行方法	9
4. 生成される試験行列	10
4.1 試験行列データの形式	10
4.2 試験行列の利用	11
4.2.1 対称帯行列への読み込み	11
4.2.2 一般正方行列への読み込み	13
参考文献	17
付録1. モジュール構成	18
付録2. 主要パラメタ	19
付録3. 主要変数	20
付録4. 実行環境とインストール手順	22
付録5. トラブル・シューティング等	24

Contents

1. Introduction	1
2. FEM Model for Generating the Test Matrices	2
2. 1 Basic Equations of the 2-Dimensional Stress Problem	2
2. 2 Finite Element Discretization	3
2. 3 A Special Problem which has the Strict Solution	5
3. How to Use FEM2PL	7
3. 1 Input Data	7
3. 2 Execution	9
4. Specification of the Generated Test Matrices	10
4. 1 The Format of the Generated Test Matrices	10
4. 2 The Usage of the Generated Test Matrices	11
4. 2. 1 A Program to Get into the Symmetric Banded Matrices	11
4. 2. 2 A Program to Get into the Square Matrices	13
References	17
Appendix 1. Program Modules	18
Appendix 2. Parameters	19
Appendix 3. Variables	20
Appendix 4. Computing Environments and Program Installation	22
Appendix 5. Trouble Shootings	24

1. 序論

連立一次方程式の数値解法ルーチンの開発・改良を行った場合には、適当な例題を用いて計算結果の妥当性を検証する必要がある。このような場合のテスト問題となる行列と右辺ベクトルおよび理論的厳密解を、任意の規模の方程式について生成するプログラムがあると便利である。

FEM2PL（以下、本プログラム）は、有限要素法によって2次元応力問題を解く際に現れる剛性行列（左辺行列）と荷重ベクトル（右辺ベクトル）を生成して、ファイルに格納するプログラムである。これらの他に、変位ベクトルの理論的厳密解もファイルに格納する。ユーザは、剛性行列と荷重ベクトルをファイルから読み込んで適当な連立一次方程式解法ルーチンを用いて解き、その結果を理論的厳密解と比べることができる。

本書「有限要素法2次元応力問題の試験行列生成プログラム FEM2PL 利用の手引」（以下、「本書」）は、本プログラムが生成する試験行列の物理的意味とプログラム使用方法、試験行列の形式および利用方法を示すものである。付録には、プログラムの保守に必要なドキュメントを付している。本プログラムを作成するにあたり、Smith¹⁾ および Zienkiewics and Taylor²⁾ を参考にした。

2. 試験行列のベースとなる有限要素モデル

2.1 2次元応力問題の基礎方程式

2次元応力問題における基礎方程式は以下のようになる。

(1) つり合い方程式

応力 σ と外力 F との関係を示す。

$$A^T \sigma = -F \quad (1)$$

(2) 構成方程式(一般化された Hook の法則)

応力 σ と歪 ϵ の関係を示す。

$$\sigma = A\epsilon \quad (2)$$

(3) 歪-変位関係式

歪 ϵ と変位 e との関係を示す。

$$\epsilon = Ae \quad (3)$$

ここで、 A は、歪と変位を表す作用素、 D は、応力と歪の関係を表す行列である。

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 E は Young 率、 ν は Poisson 比である。

また、外力 F 、応力 σ 、歪 ϵ 、変位 e の成分を以下のように表す。

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5)$$

基礎方程式から、応力 σ と歪 ϵ を消去し、変位 e と外力 F の関係式を得る。

$$A^T D A e = -F \quad (6)$$

あとはこの連立偏微分方程式を適当な境界条件のもとに解けばよい。一般的な問題に対しては、次節に述べる有限要素法などを用いて数値的に解くことになる。

2.2 有限要素法による離散化

有限要素法そのものの説明は専門書^{1) 2)}に譲り、ここでは、本プログラムが使用している定式化および要素形状関数について説明する。前節で得た変位 e と外力 F の関係式を Galerkin 法に基づいて定式化すると、要素剛性行列 K_M は、以下のようにになる。

$$K_M = \iint (AN)^T D(AN) dx dy \quad (7)$$

ここで、 N は形状関数である。本プログラムでは2次元4辺形8節点要素を用いる。すなわち、4辺形要素の頂点4個と辺の中点4個の計8個を節点にとり、節点の x 、 y 座標を (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, 8$)、 u 、 v 変位を (u_i, v_i) ($i = 1, 2, \dots, 8$) で表すこととする。

要素内の任意の点の x 、 y 座標および u 、 v 変位が、節点の x 、 y 座標 (x_i, y_i) と u 、 v 変位 (u_i, v_i) および要素形状関数 $N_i(\xi, \eta)$ により、次のように表現されるものとする。

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i, \quad u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i, \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (8)$$

ここで、4辺形8節点の要素形状関数 $N_i(\xi, \eta)$ は、要素局所座標 ξ 、 η によって以下のように表される。

$$N(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) \\ N_5(\xi, \eta) \\ N_6(\xi, \eta) \\ N_7(\xi, \eta) \\ N_8(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

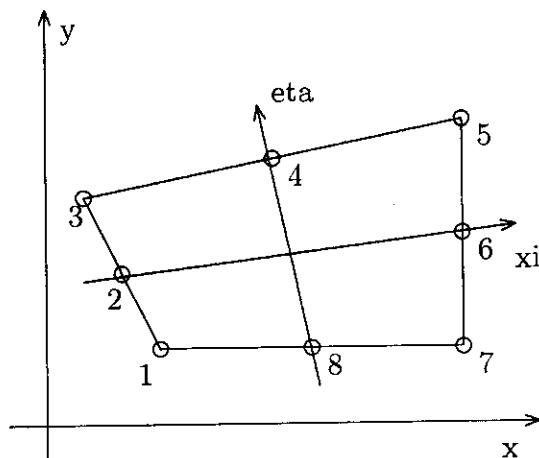


Fig. 2.2-1 The global and local coordinate systems of the 2-dimensional 8-noded element.

積分は、Gauss の求積法を用いる。本プログラムでは1つの次元について3点のサンプリング・ポイントをとっている。また、積分変数を x, y から ξ, η に置き換える必要がある。

$$\begin{aligned}
 K_M &= \iint (AN)^T D(AN) dx dy \\
 &= \iint (AN)^T D(AN) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_i k_j f(\xi_i, \eta_j)
 \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、

$$f(\xi_i, \eta_j) = (AN)^T D(AN) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| \tag{11}$$

とおいた。 ξ_i, η_j はサンプリング・ポイントであり、 k_i, k_j は重みである。3点の場合のサンプリング・ポイントと重みは以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 \xi_i, \eta_j &= -\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, +\frac{\sqrt{15}}{5} \\
 k_i, k_j &= \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}
 \end{aligned} \tag{12}$$

このようにして作成した要素剛性行列 K_M を全体行列 K_B に重ね合わせてゆくことになる。荷重ベクトルについては、一様荷重のかかっている境界に沿っての積分について、上記同様に Gauss の求積法で計算すればよい。

2.3 対象とする問題と厳密解

本節では、問題の境界条件と厳密解の導出について述べる。

本プログラムで生成する剛性行列は、以下に述べる問題に基づいている。

[問題]

x 方向に無限の長さ、 y 方向に L_y の高さを持つ2次元完全弾性体があり、この上面に一様荷重が与えられるものとする。この弾性体の任意位置における変位を求めよ。

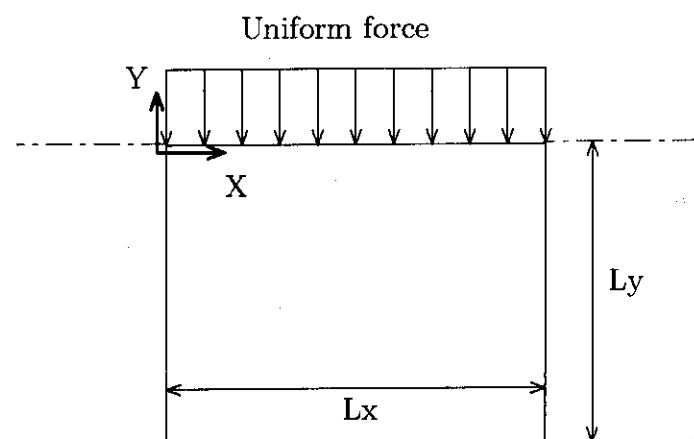


Fig. 2.3-1 Two dimensional elastic body, the upper surface
of which is uniformly loaded.

この問題は、無限長の弾性体から有限の長さの部分を切り出して、左右両端において x 方向固定の境界条件を与えたものと等価となる。すなわち、具体的には以下のように書き換えることが可能である。

[上記に等価な問題]

x 方向長さ l_x 、 y 方向長さ l_y の長方形の2次元完全弾性体がある。長方形の左上頂点に原点をとり、右向きに x 軸、上向きに y 軸をとる。

以下の境界条件を与えるとき、長方形内の任意位置における変位を求めよ。

(1) 荷重

上面 $0 \leq x \leq l_x, y = 0$ において、鉛直下向きに一様な荷重 w_y が働く。

$$S_x = 0, S_y = -w_y \quad (13)$$

(2) 側面位置変位

左右面 $x = 0, l_x, -l_y \leq y \leq 0$ において、 x 方向の変位はゼロ。

$$u = 0 \quad (14)$$

(3) 底面位置変位

底面 $0 \leq x \leq l_x, y = -l_y$ において、 x, y 方向の変位はゼロ。

$$u = 0, v = 0 \quad (15)$$

この問題の厳密解を求めてみる。いま、歪一応力関係式を書き下すと以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (16)$$

題意より、せん断応力がゼロ、したがってせん断歪もゼロ。

また、 x 方向歪もゼロである (x 方向応力はゼロとは限らないことに注意)。

y 方向応力は、上面の一様荷重 w_y (const.) と等しくなる。

$$\tau_{xy} = 0, \gamma_{xy} = 0, \varepsilon_x = 0, \sigma_y = w_y \text{ (const.)} \quad (17)$$

これから、 ε_y と σ_x を以下のように表すことができる。

$$\varepsilon_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} w_y, \quad \sigma_x = \frac{\nu}{(1+\nu)} w_y \quad (18)$$

したがって、 (x, y) における変位 (u, v) の厳密解は、以下になる。

$$u(x, y) = 0 \quad (19)$$

$$v(x, y) = \varepsilon_y(-l_y - y) = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} w_y (-l_y - y)$$

3. プログラム利用方法

プログラムとデータの関係を下図に示す。このうち、「試験行列を利用するユーザプログラム」は、ユーザが自作するものである。試験行列の読み込み方法は、4.2節を参考にされたい。

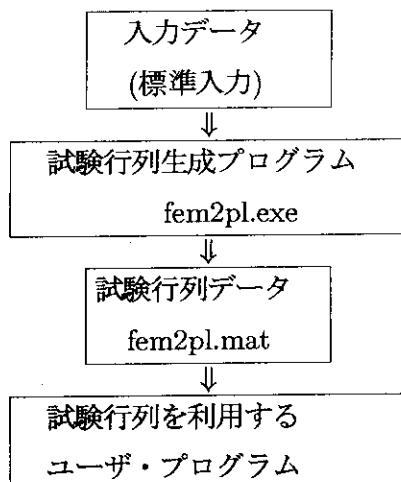


Fig. 3.-1 The relations between programs and data.

3.1 入力データ

本プログラムで試験行列生成のために入力するデータは、以下に述べる6個のみである。入力先は標準入力である。

- (1) タイトル (内部変数名 = TITLE :文字型 80 バイト)
データのタイトルを0~80バイト以内で記述する。
- (2) モードスイッチ (内部変数名 = MODE(1) :整数)
整数 1 (固定値) を指定する。
- (3) x 方向要素数 (内部変数名 = NXE :整数)
x 方向の要素数を指定する。
- (4) y 方向要素数 (内部変数名 = NYE :整数)
y 方向の要素数を指定する。
- (5) x 方向長さ (内部変数名 = XLEN :单精度実数)
2次元長方形弾性体のx 方向長さを指定する。
- (6) y 方向長さ (内部変数名 = YLEN :单精度実数)
2次元長方形弾性体のy 方向長さを指定する。

これらの入力データを用意することで、2.3節で述べた問題について、有限要素法の試験行列を生成させることができる。本プログラムでは上記入力データをフリーフォーマットで読み込むので、順序と属性を守ればカラム位置は任意でよい。例えば、以下のような要素分割を考える。

x方向要素数 = 2 \Rightarrow NXE として指定 y方向要素数 = 3 \Rightarrow NYE として指定
x方向長さ = 6.0 \Rightarrow XLEN として指定 y方向長さ = 9.0 \Rightarrow YLEN として指定
この場合の入力データは、例えば以下のように作ればよい。

TITLE: This is a comment .

1

2 3 6.0 9.0

本プログラムは、このデータに基づいて図 3.1-1 に示す要素分割および節点データ順序付けを行い、また図 3.1-2 に示す自由度順序番号付けを行う。ここで、(u,v) は変位の x,y 方向成分についての未知数の順序番号の組み合わせを示し、数字ゼロは固定境界条件である（したがって未知数ではない）ことを表す。

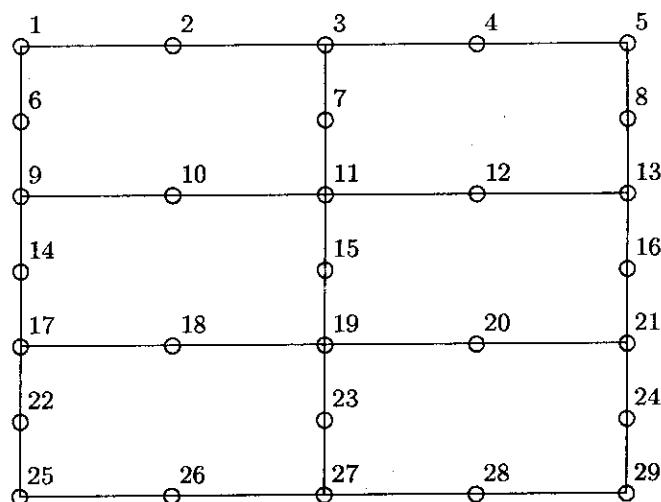


Fig. 3.1-1 Node numbering at the automatic mesh generation.

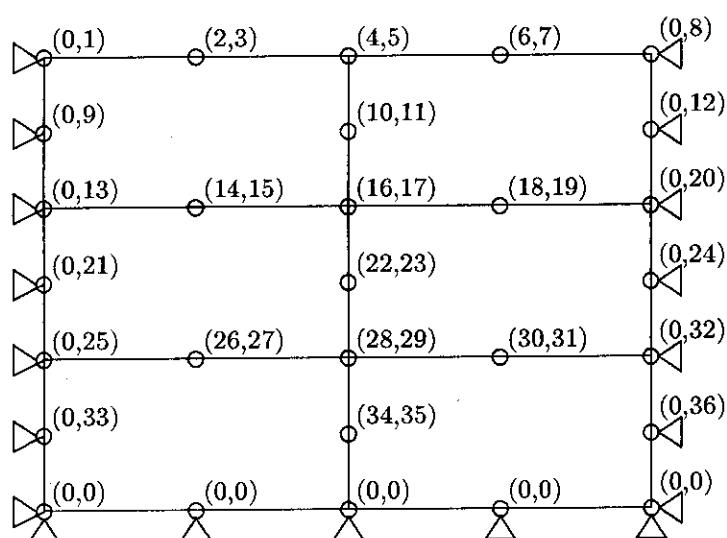


Fig. 3.1-2 Numbering of degrees of freedom at the automatic mesh generation.

3.2 実行方法

通常は、あらかじめ適当なファイルに入力データを格納しておき、リダイレクトによってプログラムにファイル内容を読み込ませるのがよい。実行形式のプログラムは fem2pl.exe である。入力データが格納されたファイルの名前を仮に case1.dat とする以下のようなコマンドを入力すればよい。

```
[起動コマンド] fem2pl.exe < case1.dat
```

以下のようなメッセージが出力された時点で、試験行列がファイルに格納されることになる。試験行列の具体的格納形式等については、4.章で述べる。

```
[終了時メッセージ] (fem2pl-I-000) A TEST MATRIX AND SO ON ARE GENERATED.
```

```
MATRIX SIZE = NNNNNNN1
```

```
HALF BAND WIDTH = NNNNNNN2
```

```
FILE = fem2pl.mat
```

MATRIX SIZE : 試験行列の次元を示す。NNNNNNN1 は8桁以下の整数である。

HALF BAND WIDTH : 対角成分を除いた半バンド幅を示す。NNNNNNN2 は8桁以下の整数である。

FILE : 試験行列の格納先ファイルを示す。通常は fem2pl.mat である。

備考1: 試験行列格納先ファイルの変更方法:

試験行列格納先ファイルを fem2pl.mat 以外に変更したい場合、メインプログラムの CFILOT の値を変更してコンパイルし直せばよい。

```
CHARACTER*32 CFILOT
```

```
DATA CFILOT /'fem2pl.mat'/
```

備考2: 有限要素解析結果の出力:

本プログラムでは、試験行列と荷重ベクトルを生成するだけでなく、それらを用いて解を求め、標準出力に出力することができる。

メインプログラムの LCALC の値を .TRUE. に変更してコンパイルし直せばよい。

```
LOGICAL LCALC
```

```
...
```

```
DATA LCALC / .TRUE. /
```

4. 生成される試験行列

4.1 試験行列データの形式

試験行列は、一般に対称帶行列となり、下三角部分がファイルに書き出される。また、右辺ベクトルと厳密解も同時に output される。

ファイルには、フォーマットなしの内部形式で出力される。以下に、本プログラムが試験行列等を出力している部分の記述と変数の説明を示す。

```

      WRITE(IUNIT) N ,IW
      DO 10 II=1,N
      WRITE(IUNIT) (KB(II,JJ),JJ=1,IW+1),LOADS (II),ANSUV (II)
10   CONTINUE

```

(1) N : 整数

総自由度数。解くべき方程式の変数の数と解釈してよい。

(2) IW : 整数

対称帶行列の対角成分を除いた半バンド幅。

(3) KB(*,*) : 単精度実数2次元配列。

剛性行列。対称帶行列の下三角部分。

(4) LOADS(*) : 単精度実数1次元配列。

右辺ベクトル。

(5) NASUV(*) : 単精度実数1次元配列。

完全弾性体2次元応力問題の理論解。

対称帶行列 KB での格納内容は以下のようになる。すなわち、正方形行列 A の i, j 成分 ($j \leq i$) が、 $KB(i, j - i + IW + 1)$ に格納されていると考える。

以下に簡単な例を示す。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & (\text{sym.}) \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix} \Rightarrow KB = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & IW-1 & IW & IW+1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} \\ \cdots & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \\ \cdots & a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,4} & \\ \cdots & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & \end{pmatrix}$$

4.2 試験行列の利用

生成した試験行列等を利用するためには、ファイルから読み込まなくてはならない。本節では、出力した形式と同じ形式で対称帯行列の下三角部分に読み込む方法と、一般正方行列の配列に読み込む方法についてサブルーチン例を示す。

4.2.1 対称帯行列への読み込み

試験行列を、対称帯行列の下三角部分に読み込むサブルーチンの例を示す。

```

SUBROUTINE MATINB(CFILIN,MAXN ,MAXBND
&           ,N      ,IW      ,KB      ,LOADS ,ANSUV )
CC
CE      THIS SUBROUTINE READS THE STIFFNESS BAND MATRIX
CE      READ    TYPE = REAL SYMMETRIC BAND MATRIX (LWR TRIANGLE)
CE      STORED TYPE = REAL SYMMETRIC BAND MATRIX (LWR TRIANGLE)
CC
C/* IN */
CHARACTER*32 CFILIN
CJ      試験行列格納ファイル名
INTEGER      MAXN ,MAXBND
CJ      総自由度数最大値、半バンド幅最大値
C/* OUT */
INTEGER      N
CJ      総自由度数
INTEGER      IW
CJ      半バンド幅
REAL        KB    (MAXN ,MAXBND)
CJ      剛性行列（対称帯行列の下三角部分を格納）
REAL        LOADS (MAXN )
CJ      右辺ベクトル
REAL        ANSUV (MAXN )
CJ      理論解
C/* OUT */
CC      (NONE)
C/* CONSTANTS */
INTEGER      IUNIT
LOGICAL      LDEBUG

```

```
DATA           IUNIT / 50 /
DATA           LDEBUG / .TRUE. /
C/** BEGIN ***
OPEN (UNIT=IUNIT,FILE=CFILIN,FORM='UNFORMATTED')
READ (IUNIT) N ,IW
IF ( N.GT.MAXN .OR. IW+1.GT.MAXBND ) THEN
  WRITE(6,*) 'INSUFFICIENT REGION SIZE.'
  WRITE(6,*) ' MAXN    MUST >= N    =',N
  WRITE(6,*) ' MAXBND MUST >= IW+1=',IW+1
  STOP
ENDIF
DO 10 II=1,N
  READ (IUNIT) (KB(II,JJ),JJ=1,IW+1),LOADS (II),ANSUV (II)
10 CONTINUE
CLOSE(IUNIT)
RETURN
C/** MATINB ***
END
```

4.2.2 一般正方行列への読み込み

試験行列を、一般の実正方行列の配列に読み込むサブルーチンの例を示す。

```

SUBROUTINE MATING(CFILIN,MAXN ,MAXBND
&           ,N      ,IW      ,KG      ,LOADS ,ANSUV )
CC
CE   THIS SUBROUTINE READS THE STIFFNESS BAND MATRIX
CE   READ   TYPE = REAL SYMMETRIC BAND MATRIX (LWR TRIANGLE)
CE   STORED TYPE = REAL GENERAL SQUARE MATRIX (FULL)
CC
C/* IN */
CHARACTER*32 CFILIN
CJ   試験行列格納ファイル名
INTEGER      MAXN ,MAXBND
CJ   総自由度数最大値、半バンド幅最大値
C/* OUT */
INTEGER      N
CJ   総自由度数
INTEGER      IW
CJ   半バンド幅
REAL         KG   (MAXN ,      1)
CJ   剛性行列 (対称正方行列)
REAL         LOADS (MAXN )
CJ   右辺ベクトル
REAL         ANSUV (MAXN )
CJ   理論解
C/* OUT */
CC   (NONE)
C/* CONSTANTS */
INTEGER      IUNIT
LOGICAL     LDEBUG
DATA        IUNIT / 50 /
DATA        LDEBUG / .TRUE. /
C/** BEGIN ***/
DO 02 JJ=1,N
DO 02 II=1,N

```

```

KG(II,JJ) = 0.0

02 CONTINUE

OPEN (UNIT=IUNIT,FILE=CFILIN,FORM='UNFORMATTED')

READ (IUNIT) N ,IW

IF ( N.GT.MAXN ) THEN
  WRITE(6,*) 'INSUFFICIENT REGION SIZE.'
  WRITE(6,*) ' MAXN MUST >= N = ',N
  STOP
ENDIF

CC /* そのままだと帶のダミー部分が正方行列からはみでるので */
CC /* ・対角成分より右の部分に左右鏡像反転して一旦読み込んで */
CC /* ・非ダミー部分のみを対角成分より左側に左右鏡像移動する */

DO 10 II=1,IW
  READ (IUNIT)(KG(II,II+IW+1-JJ),JJ=1,IW+1),LOADS (II),ANSUV (II)
  IF ( II .GE. 2 ) THEN
    DO 12 JJ=1,II-1
      KG(II,II-JJ) = KG(II,II+JJ)
      KG(II,II+JJ) = 0.0D0
    CC : 念のためゼロクリア
  ENDIF
  12 CONTINUE

10 CONTINUE

CC /* 帯行列をずらしながら格納 */
DO 20 II=IW+1,N
  READ (IUNIT)(KG(II,II-IW-1+JJ),JJ=1,IW+1),LOADS (II),ANSUV (II)

20 CONTINUE

CC /* 上三角部分<一下三角部分を代入 */
DO 30 II=2,N
  DO 30 JJ=MAX(1,II-IW),II-1
    KG(JJ,II) = KG(II,JJ)

30 CONTINUE

CLOSE(IUNIT)
RETURN

C/** MATING ***/
END

```

上記に述べたサブルーチン MGENT を用いて、試験行列を一般の実正方行列の配列に読み込んで解き、厳密解との差分を出力するテストプログラムの例を示す。

```

PROGRAM MGENT

CC
CJ    MGENT は、以下のことを行う。
CJ    (1) FEM2PL で生成され、ファイルに格納された
CJ          実対称帶行列（下三角部分）を読み込む。
CJ    (2) 実一般正方行列に格納する。
CJ    (3) 動作確認のため、方程式を解き、理論解との差分を出力する。
CC
CJ    注意：必要に応じて、下記のパラメタを変更してください。

PARAMETER(MAXN=100)
PARAMETER(ILOADS=MAXN, INF=MAXN)

C
      INTEGER N
CJ    総自由度数=方程式の次元(u,v 未知数の合計)
      INTEGER IW
CJ    対角成分を含まない半バンド幅(全バンド幅=2*IW + 1)
      REAL     KG(MAXN,MAXN)
CJ    剛性行列(実数帯対称の下三角部分を実一般正方行列に変換して格納)
      REAL     LOADS (ILOADS)
CJ    右辺ベクトル：解く前：荷重ベクトル=>解いた後：変位ベクトル
      REAL     ANSUV (ILOADS)
CJ    変位解の理論解(u,v成分が混在しているので注意すること)。
      INTEGER IP   (MAXN )
CJ    ピボッティングのための作業領域
      REAL     WK   (MAXN )
CJ    作業領域

C/* CONSTANTS */
      CHARACTER*32 CFILIN
      DATA           CFILIN /'fem2pl.mat'/

C/** BEGIN ***/
CC
      -----
      CALL      MATING(CFILIN,MAXN ,MAXBND
      &           ,N      ,IW      ,KG      ,LOADS ,ANSUV )
CC
      -----

```

```

CE      EQUATION SOLUTION
CC
CC /*** begin : 一般正方行列のソルバー ***
CC ここに、KG(MAXN,*) に格納された N 次元の行列を係数とし、
CC 右辺ベクトルを LOADS(*) とする方程式を解くルーチンを
CC 記述する。例えば以下のようになる（下記説明参照）。
CC
C      EPS = 1.0D-7
C      CALL      XXXX( KG, N, MAXN, LOADS, EPS, WK, IP, IER )
CC
CC /*** end   : 一般正方行列のソルバー ***
CC
        WRITE(6,*) '--- NUM. SOL. --- - THEOR. SOL. - ----- DIFF -----'
        DO 80 II=1,N
          WRITE(6,*) LOADS(II),ANSUV(II),ABS(LOADS(II)-ANSUV (II))
80 CONTINUE
      STOP
      END

```

上記において、一般正方行列のソルバーとしては、ユーザが自作したもの、もしくは入手し得る適当なものを用いればよい。例えば、渡部ら⁴⁾に記載されているサブルーチンGLUを倍精度から単精度に変更すれば、上記の引数の順序のまま用いることができる（サブルーチン名'XXXX'も変更する）。

なお、このテストプログラムでは単に数値解と理論解の差の絶対値を出力しているだけであるが、もし相対誤差を

$$\text{相対誤差} = \frac{\text{数値解} - \text{理論解}}{\text{理論解}}$$

の形で求める場合には、注意が必要である。すなわち、本プログラムで扱う問題の理論解のうち、 x 方向の変位 u はすべてゼロであるのでそのまま相対誤差を計算すると'zero divide' が発生する。

つまり相対誤差の形で評価したい場合は、理論解のうちゼロ成分をスキップし、非ゼロ成分のみについて、相対誤差の計算を行う必要がある。

また、本ツールで生成される剛性行列と荷重ベクトルが離散化誤差を含むものであるのに対し、変位ベクトルの厳密解は連続体を仮定して得た丸め誤差のみのものであるので、本ツールで生成した A 、 x 、 b について $Ax - b = 0$ が必ずしも成り立つわけではない。したがって、上記プログラムの実行結果である数値解と理論解との差は、必ずしもゼロにならないことに注意されたい。

参考文献

- 1) I.M.Smith (戸川隼人訳). 有限要素法のプログラミング 構造・流体・地盤への応用. ウィリー・ジャパン、(1984).
- 2) O.C.Zienkiewics and R.L.Taylor. The Finite Element Method 4th. ed. Vol.1. McGRAW-Hill、(1994).
- 3) J.E.Akin. Finite Element Analysis for Undergraduate. Academic Press、(1986).
- 4) 渡部力、名取亮、小国力 編. Fortran77による数値計算ソフトウェア. 丸善、(1993).

Appendix: プログラムFEM2PLの仕様

付録1. モジュール構成

プログラムFEM2PLは、以下のモジュールで構成される。

FEM2PL メインプログラム

- +--INPTNF 節点自由度のデータを配列NF(*,2)に読み込む。
- +--CLRVEC ベクトルをゼロクリアする。
- +--DGEN28 分割数等に基づき、有限要素解析に必要なデータを生成する。
- +--CLRMAT 行列をゼロクリアする。
- +--FORMD 2次元応力一歪行列(3*3)を生成する。
- +--GAUSCO ガウス求積法の重み係数と分点位置を格納する。
- +--TAB2D8 2次元要素8節点の座標と全体系の節点との対応表を生成する。
- +--SHP2D8 形状関数の要素座標系に対する導関数を求める。
- +--MATMAT 行列と行列の積を求める。
- +--INV2X2 2*2行列の逆行列を求める。
- +--FORMB 歪一変位行列を生成する。
- +--MATTRAN 転置行列を求める。
- +--MATSCA 行列をスカラー一倍する。
- +--MATADD 行列と行列の和を求める。
- +--FORMKB 要素行列を全体行列(対称帶行列の下三角部分)に重ね合わせる。
- +--MATOUT 生成した行列、右辺ベクトル等をファイルに出力する。
- +--CHOLES コレスキー分解する(圧縮形式対称帶行列)。
- +--CHOSUB コレスキー分解の結果を用いて後退代入により解を得る。
- +--PRINTV ベクトルの内容を標準出力に出力する。
- +--MATVEC 行列とベクトルの積を求める。

付録2. 主要パラメタ

主要パラメタは以下の通りである。

MAXN	: INTEGER : 総自由度数許容最大値。 : 出荷時のデフォルト値は400。
MAXBND	: INTEGER : 半バンド幅+1の値の許容最大値。 : 出荷時のデフォルト値は100。
IKB1	: INTEGER : 剛性行列の行数(変数の数)の許容最大値。 : 通常は MAXN の値と等しい値とする。
IKB2	: INTEGER : 剛性行列の列数(半バンド幅+1)の許容最大値。 : 通常は MAXBND の値と等しい値とする。
ILOADS	: INTEGER : 荷重ベクトルLOADS(*)の長さの許容最大値。 : 通常は MAXN の値と等しい値とする。
INF	: INTEGER : 境界固定の有無を示す配列NF(*,2)の第1添え字の長さの許容最大値。 : 通常は MAXN の値と等しい値とする。

主要パラメタ間の関係は以下の通りである。

```
PARAMETER(MAXN=400,MAXBND=100)
```

```
PARAMETER(IKB1=MAXN,IKB2=MAXBND,ILOADS=MAXN,INF=MAXN)
```

つまり、領域不足等が起きた場合は、総自由度数許容最大値 MAXN または半バンド幅+1許容最大値 MAXBND のいずれかを調整すればよい。

付録3. 主要変数

主要変数の説明を以下に示す。

TITLE	: CHARACTER*80
	: データタイトル。
MODE(1)	: INTEGER
	: モード・スイッチ。1を指定する。
NXE	: INTEGER
	: X方向要素数。
NYE	: INTEGER
	: Y方向要素数。
XLEN	: REAL
	: X方向長さ。
YLEN	: REAL
	: Y方向長さ。
N	: INTEGER
	: 総自由度数=方程式の次元(u,v 未知数の合計)
IW	: INTEGER
	: 対角成分を含まない半バンド幅(全バンド幅=2*IW+1)
NN	: INTEGER
	: 分割ノード数。
	: u,v の自由度の有無を考慮せずに節点を数え上げたもの。
NR	: INTEGER
	: 拘束条件の数(u,vについて別々に数える)。
NGP	: INTEGER
	: ガウス求積法の選択番号(=プログラム内で3に固定:2次元8節点)
ELENX	: REAL
	: 要素のX方向長さ。
ELENY	: REAL
	: 要素のY方向長さ。
E	: REAL
	: ヤング率(=1.0E06)。
V	: REAL
	: ポアソン比(=0.3)。

KB(*,*)	: REAL : 剛性行列（実数帶対称の下三角部分を格納）。
LOADS(*)	: REAL : 右辺ベクトル。連立一次方程式のルーチンを呼ぶ前は荷重ベクトル、呼んだ後は変位ベクトルが格納されている。
ANSUV(*)	: REAL : 変位解の厳密解(u,v成分が混在しているので注意すること)。
NF(*,2)	: INTEGER : 境界固定の有無(I番目ノードのu,v成分について)。 : 0のとき固定、1のとき自由(未知数)。
CFILOT	: CHARACTER*80 : 試験行列データ等の格納先ファイル。 : 初期値は、'fem2pl.mat'。

付録4. 実行環境とインストール手順

実行環境は以下の通りである。

[実行環境]

(1) Fortran コンパイラ

本プログラムのソースファイルをコンパイルして、実行形式を作成するために Fortran 77 以上が必要である。通常の UNIX ワークステーションにおいて普及している "f77" 等でよい。

(2) 計算機

上記の Fortran コンパイラを実行するためとコンパイル済みの本プログラム実行形式を実行するための計算機が必要である。通常の UNIX ワークステーションでよい。Fortran コンパイラが使用可能であれば、パソコンまたは汎用計算機でもよい。

インストール手順を以下に述べる。ここでは、通常の UNIX ワークステーションを仮定する。

[インストール手順]

(1) 本プログラムのソースファイルの複写

適当なディレクトリを必要に応じて作成し、その下に本プログラムのソースファイルやコンパイル時に make コマンドが参照する 'Makefile' 等を格納する。

(2) 'Makefile' の修正

使用するコンパイラの名称に応じて、'Makefile' を適宜修正する。'Makefile' については、下記で例を挙げて解説する。

(3) コンパイル

make コマンドを投入し、正常に終了することを確認する。本プログラムの実行形式 'fem2pl.exe' が生成されていることを、UNIX の 'ls -l' コマンド等で確認する。

参考までに 'Makefile' の例を以下に示す。

```
## [makefile]
##
## /* BEGIN:Modify here ! */
FL      =ftn
FFLAGS ==03
## /* END  :Modify here ! */
fem2pl.exe:      fem2pl.o femlib.o
$(FL)  fem2pl.o femlib.o \
-o fem2pl.exe $(FFLAGS)
```

Fig. A.4-1 An example of 'Makefile'

'Makefile' の中で、変更の可能性があるのは、変数 'FL' と 'FFLAGS' である。

FL =ftn

FFLAGS =-O3

変数 'FL' には、Fortran コンパイラを起動するためのコマンド名を与える。上記例では、「ftn」がコマンド名であることを示す。もし、自分のシステムでのFortran コンパイラのコマンド名が'f77'の場合は、そのように変更する必要がある。

変数 'FFLAGS' には、コンパイラ・オプションを与える。上記例では、「-O3」が指定されているので、「レベル3の最適化」が行われることになる。ユーザの利用するFortran コンパイラのコンパイラ・オプションを調べた上で、適切なパラメタに変更する必要がある。

付録5. トラブル・シーティング等

ここでは典型的なエラーに対する原因と対処方法について述べる。

(1) 問題の総自由度数が大きすぎる。

(fem2pl-E-001) INSUFFICIENT REGION SIZE FOR UNKNOWN-VAR-COUNT.

MAXN MUST \geq NNN3 AND NNN4

意味 : 解こうとしている問題の総自由度数が大きすぎる。

原因 : 解こうとしている問題の総自由度数に比べて、プログラム内で用意している配列の大きさが小さすぎる。NNN3は、解こうとしている問題の総自由度数を表す。NNN4は、解こうとしている問題の節点数を表す。

対策 : メインプログラム内のPARAMETER文のMAXNの値を、上記NNN3、NNN4のいずれよりも大きくなるように変更してコンパイルし直す。

PARAMETER (MAXN=400,MAXBND=100)

(2) バンド幅が大きすぎる。

(fem2pl-E-002) INSUFFICIENT REGION SIZE FOR HALF-BAND-WIDTH .

MAXBND MUST \geq NNN5

意味 : 解こうとしている問題のバンド幅が大きすぎる。

原因 : 解こうとしている問題のバンド幅に比べて、プログラム内で用意している2次元配列のバンド幅の大きさが小さすぎる。NNN5は、解こうとしている問題のバンド幅を表す。

対策 : メインプログラム内のPARAMETER文のMAXBNDの値を、上記NNN5よりも大きくなるように変更してコンパイルし直す。

PARAMETER(MAXN=400,MAXBND=100)