

JAERI-Data/Code

97-040



MARG2D コードの開発(1)
2次元 Newcomb 方程式の固有値問題

1997年10月

徳田伸二・渡邊朋子*

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1997

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 (株)原子力資料サービス

MARG2D コードの開発 (1)
2次元Newcomb方程式の固有値問題

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部

徳田 伸二・渡邊 朋子*

(1997年10月1日受理)

トカマクのような2次元軸対称トロイダル・プラズマの磁気流体力学的(MHD)安定性解析において重要な役割を果たす2次元Newcomb方程式の新しい解法を考案し、それに基づくコード(MARG2D)を開発した。新しい解法では2次元Newcomb方程式を固有値問題として解く。この際、固有関数が有理面における小さい解と正則解を正しく捉えるように重み関数(運動エネルギー積分)と有理面における境界条件を選定し、従来の困難を克服した。このコードを使うことにより、2次元配位において理想MHDモードの臨界安定状態の同定が可能になる。また、このコードは抵抗性MHD安定性解析において必要となる外部領域接続データを計算する上で不可欠である。従来の理想MHD安定性解析コードERATOJとのベンチマーク・テストにより、MARG2Dコードで安定状態および臨界安定状態が同定できることを実証した。

MARG2D Code (1) : Eigenvalue Problem
for Two Dimensional Newcomb Equation

Shinji TOKUDA and Tomoko WATANABE*

Department of Fusion Plasma Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 1, 1997)

A new method and a code MARG2D have been developed to solve the 2-dimensional Newcomb equation which plays an important role in the magneto-hydrodynamic (MHD) stability analysis in an axisymmetric toroidal plasma such as a tokamak. In the present formulation, an eigenvalue problem is posed for the 2-D Newcomb equation, where the weight function (the kinetic energy integral) and the boundary conditions at rational surfaces are chosen so that an eigenfunction correctly behaves as the linear combination of the small solution and the analytical solutions around each of the rational surfaces. Thus, the difficulty on solving the 2-D Newcomb equation has been resolved. By using the MARG2D code, the ideal MHD marginally stable state can be identified for a 2-D toroidal plasma. The code is indispensable on computing the outer-region matching data necessary for the resistive MHD stability analysis. Benchmark with ERATOJ, an ideal MHD stability code, has been carried out and the MARG2D code demonstrates that it indeed identifies both stable and marginally stable states against ideal MHD motion.

Keywords: 2-dimensional Newcomb Equation, Multi Rational Surfaces, Ideal MHD Marginal Stability, Frobenius Expansion, Small Solution, Eigenvalue Problem, Boundary Condition

* Research Organization for Information Science & Technology

目 次

| | |
|---|----|
| 1. 序 論 | 1 |
| I 理 論 | 3 |
| 2. 座 標 系 | 3 |
| 3. 2次元 Newcomb 方程式に対するラグランジアン | 4 |
| 3.1 理想 MHD ポテンシャル・エネルギー | 5 |
| 3.2 V に関するオイラー方程式 | 5 |
| 3.3 ポテンシャル・エネルギーの簡約 | 9 |
| 3.4 規格化 | 11 |
| 4. ラグランジアン密度の標準化 | 13 |
| 5. 2次元 Newcomb 方程式 | 21 |
| 5.1 $l=0$ モードと $l \neq 0$ モードの分離 | 21 |
| 5.2 フロベニウス展開 | 23 |
| 6. 2次元 Newcomb 方程式に対する固有値問題 | 28 |
| 6.1 運動エネルギー積分と固有値問題 | 28 |
| 6.2 境界条件 | 28 |
| II 数値計算法 | 30 |
| 7. 混成有限要素法 | 30 |
| 8. ポテンシャル・エネルギー行列 | 33 |
| 9. 運動エネルギー行列 | 36 |
| 10. 境界条件の処理 | 37 |
| 11. $m=1$ モードに対する試行関数法 | 39 |
| 12. テスト計算結果 | 41 |
| 12.1 磁気面が円の場合の Solovév 平衡のテスト (有理面 $q=1$) | 42 |
| 12.2 磁気面が楕円の場合の Solovév 平衡のテスト (有理面 $q=1$) | 42 |
| 12.3 磁気面が楕円の場合の Solovév 平衡のテスト (有理面 $q=2$) | 44 |
| 12.4 磁気面が円の場合の数値平衡のテスト | 44 |
| 12.5 磁気面が楕円の場合の数値平衡のテスト | 45 |
| 13. CPU 時間の測定とメモリサイズ | 71 |
| 14. 要約と議論 | 73 |
| 謝 辞 | 73 |
| 参考文献 | 74 |
| 付録 A ディレクトリ構造 | 76 |
| 付録 B 実行手順 | 78 |

| | | |
|-----|------------------------------|----|
| 付録C | SELENEJとのインターフェイス..... | 79 |
| 付録D | インターフェイスプログラムの平衡データファイル..... | 80 |
| 付録E | インターフェイスプログラムの入出力ファイル..... | 82 |
| 付録F | インターフェイスプログラムの計算パラメータ..... | 82 |
| 付録G | インターフェイスプログラムの副プログラム一覧..... | 83 |
| 付録H | MARG2Dコードの入出力ファイル..... | 84 |
| 付録I | MARG2Dコードの副プログラム一覧..... | 87 |
| 付録J | MARG2Dコードの計算パラメータ..... | 91 |
| 付録K | MARG2Dコードのインクルードファイル..... | 92 |
| K.1 | 定数定義..... | 92 |
| K.2 | COMMON..... | 93 |
| 付録L | 計算パラメータ例..... | 99 |

Contents

| | |
|---|----|
| 1. Introduction | 1 |
| I Theory | 3 |
| 2. Coordinate System | 3 |
| 3. Lagrangian for the 2-D Newcomb Equation | 4 |
| 3.1 Ideal MHD Potential Energy | 5 |
| 3.2 Euler Equation for V | 5 |
| 3.3 Reduction of the Potential Energy | 9 |
| 3.4 Normalization | 11 |
| 4. Canonical Form of the Lagrangian Density | 13 |
| 5. 2-D Newcomb Equation | 21 |
| 5.1 Separation of the $l = 0$ Mode from the $l \neq 0$ Modes | 21 |
| 5.2 Frobenius Expansion | 23 |
| 6. Eigenvalue Problem for the 2-D Newcomb Equation | 28 |
| 6.1 Kinetic Energy Integral and Eigenvalue Problem | 28 |
| 6.2 Boundary Conditions | 28 |
| II Numerical Method | 30 |
| 7. Hybrid Finite Element Method | 30 |
| 8. Potential Energy Matrix | 33 |
| 9. Kinetic Energy Matrix | 36 |
| 10. Implement of the Boundary Conditions | 37 |
| 11. Trial Function Method for the $m = 1$ Mode | 39 |
| 12. Test Problems | 41 |
| 12.1 Solovév Equilibrium with a Circular Cross Section ($q = 1$) | 42 |
| 12.2 Solovév Equilibrium with an Elliptic Cross Section ($q = 1$) | 42 |
| 12.3 Solovév Equilibrium with an Elliptic Cross Section ($q = 2$) | 44 |
| 12.4 Numerical Equilibrium with a Circular Cross Section | 44 |
| 12.5 Numerical Equilibrium with an Elliptic Cross Section | 45 |
| 13. CPU Time and Memory Size | 71 |
| 14. Summary and Discussions | 73 |
| Acknowledgements | 73 |
| References | 74 |
| Appendix A Directory Structure | 76 |
| Appendix B Execution Processure | 78 |

| | | |
|------------|--|----|
| Appendix C | Interface to SELENEJ | 79 |
| Appendix D | Equilibrium Data Files of Interface Program..... | 80 |
| Appendix E | Input / Output Files of Interface Program | 82 |
| Appendix F | Parameters in Interface Program..... | 82 |
| Appendix G | List of Subroutines in Interface Program | 83 |
| Appendix H | Input / Output Files of MARG2D Code..... | 84 |
| Appendix I | List of Subroutines in MARG2D Code | 87 |
| Appendix J | Parameters in MARG2D Code | 91 |
| Appendix K | Include Files in MARG2D Code..... | 92 |
| K.1 | Definetion of Constants..... | 92 |
| K.2 | Common | 93 |
| Appendix L | Examples of Paramters | 99 |

1 序論

本報告書では、2次元 Newcomb 方程式の固有値問題の理論とそれに基づいて開発したコード MARG2D について述べる。

臨界安定な理想 MHD 方程式である Newcomb 方程式を2次元軸対称トロイダル配位で解くことはトカマクの MHD 安定性理論において、長い間、懸案であった。

Newcomb 方程式を解くことにより、プラズマが理想 MHD 的に安定か不安定かを判定することができる。一方、ERATOJ[1]のような従来の安定性解析コードでは、プラズマが理想 MHD 的に不安定であることを判定できるだけである。これは、採用している基礎方程式(線形理想 MHD 方程式)がゼロ固有値(臨界安定状態)を含んで安定側に連続スペクトルを持つためである。

Newcomb 方程式の重要性はそれだけにとどまらない。漸近接続法に基づくトカマクの抵抗性(および、非理想)MHD 安定性理論は Furth- Killeen- Rosenbluth[2] による提唱以来、単に線形安定性理論 [3, 4, 5, 6] のみならず、トカマク・プラズマの MHD 安定性理論で中心的な役割を果たしている。その例として、ティアリング・モードの成長による磁気島の非線形発展理論 [7, 8, 9]、エラー磁場と磁気島との相互作用理論 [10, 11, 12]、ブートストラップ電流によるティアリング・モードの不安定化の問題(新古典ティアリング・モード理論)[13, 14, 15]、さらには、アルファ粒子との相互作用を含む $m = 1$ モード理論 (m : ポロイダル・モード数) があげられる [16, 17, 18]。

この漸近接続法では、プラズマを有理面近傍(内部層)と有理面から離れた外部領域(理想 MHD 領域)とに分ける [19]。外部領域では、プラズマは電気抵抗や粘性などの散逸効果およびプラズマの慣性を無視できる理想 MHD 方程式(すなわち、Newcomb 方程式)で記述される [20]。そして、内部層におけるプラズマの運動を決める運動方程式(内部層方程式)の解と Newcomb 方程式の解を漸近的に接続することにより、プラズマの大域的な運動が決定される。それゆえ、上にあげた種々の理論をトカマクに適用して抵抗性 MHD 安定性を解析するためには、2次元軸対称トロイダル配位で Newcomb 方程式を解くことが不可欠である。

しかしながら、Newcomb 方程式では有理面が確定特異点になっているため、この2次元問題を大域的に解こうとすると困難に遭遇する。この困難は1次元問題と比較することで良く理解できる。1次元問題では、Newcomb 方程式の有理面の周りの局所解は特異解(いわゆる、「小さい解」と「大きい解」)[20]から成り、そのため、Newcomb 方程式を解くべき領域が有理面の左右に分離される [21, 22]。したがって、たとえば、射撃法(shooting method)によって1次元 Newcomb 方程式を大域的に解くことは可能である。一方、2次元問題では、ポロイダル・モード間の結合によって有理面の周りの局所解は、この特異解のほかに解析解からなる [23]。そのため、2次元 Newcomb 方程式の大域解は、有理面では特異解と解析解の線形結合で表わされる。このことは、2次元問題では、有理面が Newcomb 方程式の解かれるべき領域を左右に分離しないことを意味する。また、2次元問題では一般的に有理面が複数枚存在する。そのため、2次元問題に射撃法を適用することは非現実的である。

Newcomb 方程式を解く問題は大域的な問題であるので、これを、近代的な関数解析理論や有限要素法等の数値解析法 [24] を適用できる境界値問題および固有値問題の枠組に捉えることが望ましい [25]。この方向の最初の仕事は Pletzer-Dewar によってなされた [22]。文献 [22] では、1 次元 Newcomb 方程式を変分原理を持つ境界値問題として再定式化し、これを有限要素法で解き、抵抗性 MHD 安定性解析に必要な外部領域接続データの計算に成功した。また、文献 [22] では、2 次元 Newcomb 方程式を境界値問題として解くことも議論されている。次いで、我々は、重み関数を適切に設定して、Newcomb 方程式を連続スペクトルを持たない固有値問題として解き、これによって外部領域接続データを求めることを提唱した [21]。そこでは、文献 [22] で十分に議論されていなかった有理面における正しい境界条件を明らかにした。さらに、この固有値問題法は、有理面が 2 枚ある負磁気シア配位に拡張され、この方法が負磁気シア配位での抵抗性 MHD 安定性解析に不可欠であることが示された [26, 27]。

文献 [26, 27] で定式化した方法は 2 次元 Newcomb 方程式を解く有力な方法と期待される。しかし、2 次元問題に拡張する場合、既に述べたように固有関数が有理面近傍で特異解と解析解の線形結合として正しく表現されるような重み関数と境界条件を設定することが必要である。

本報告書は、理論的定式化を述べる第 1 部 (第 2 章から第 6 章) と数値計算法を述べる第 2 部 (第 7 章から第 13 章) とからなる。第 2 章で MARG2D で用いる磁束座標系 (r, θ) を導入する。この座標系では r は長さの次元を持つ径方向の座標、 θ は磁力線を直線に見るポロイダル角である。第 3 章では線形理想 MHD 安定性理論におけるエネルギー原理に基づき、ポテンシャル・エネルギー積分から 2 次元 Newcomb 方程式に対するラグランジアン密度を導く。Newcomb 方程式はプラズマの微小変位ベクトルの径方向成分 $\xi(r, \theta)$ を未知関数とし、 r と θ を独立変数とするが、我々は $\xi(r, \theta)$ をポロイダル角 θ についてフーリエ級数展開し、各フーリエ成分を未知関数とするラグランジアン密度を導く。有理面における境界条件を正しく設定する上で、ラグランジアン密度をフーリエ成分で表現することが不可欠である。第 4 章では、特異点を持つ固有値問題を有限要素法で解く上で必要なラグランジアン密度の標準化について議論する。このラグランジアン密度より 2 次元 Newcomb 方程式を第 5 章で導く。この方程式は ξ のフーリエ成分からなる連立 2 階常微分方程式系であり、有理面を確定特異点とする。有理面のまわりの局所解を研究し、特異解のフロベニウス展開を求める。これは 2 次元 Newcomb 方程式の固有値問題を設定する上で必要であるとともに、本報告書ではふれないが、接続データを計算する上で重要な役割を果たす。第 5 章の結果に基づき、第 6 章で 2 次元 Newcomb 方程式の固有値問題を作る。このとき、方程式のスペクトルが点スペクトル (すなわち離散固有値) だけから成り、連続スペクトルを含まないように重み関数と有理面における境界条件を設定する。そのための境界条件として、有理面での共鳴条件を満たすフーリエ成分 (共鳴モード) に対しては自然境界条件が、その他の非共鳴モードには連続条件が課せられる。そのため、Newcomb 方程式の未知関数がフーリエ成分で表されることが本質的である。

第1部で行った定式化に基づいて、Newcomb 方程式の固有値問題に有限要素法を適用する。第7章では MARG2D コードで用いる混成有限要素法を述べた後、ポテンシャル・エネルギー行列および運動エネルギー行列を、それぞれ、第8章、第9章で求める。第10章は、有理面における境界条件の処理法にあてられる。特に、 $m=1$ モード理論においては、 $m=1$ 成分の近似解を与え、残りのフーリエ成分に関する方程式を境界値問題として解く方法(試行関数法)が知られている[28]。第11章ではこの試行関数法によって固有値問題を近似的に解く方法を論じる。第12章では MARG2D コードのテスト計算例を示す。そこでは MARG2D コードの数値計算上の特性とともに、ERATOJ コードとのベンチマークテストから、MARG2D コードにより理想 MHD モードに対して安定状態および臨界安定状態が同定できることを検証する。また、MARG2D コードを実行する上で要する計算時間とメモリーサイズを第13章に示す。本研究の要約と議論を第14章にあてる。また、MARG2D コードの概略を付録に示す。

Part I 理論

2 座標系

トカマクプラズマの MHD 安定性解析では、有理面における共鳴条件を正確に表現するため、ポロイダル磁束関数 ψ をもとに作られる磁束座標系を用いることが不可欠である。ここでは、MARG2D コードで用いる磁束座標系を定義する。トカマクの対称軸を Z -軸、対称軸のまわりの回転角(トロイダル角)を ϕ とする円柱座標系 (R, Z, ϕ) において MHD 平衡磁場は、ポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$ を用いて

$$\mathbf{B} = \nabla\phi \times \nabla\psi + F\nabla\phi \quad (2.1)$$

と表される。ここで ψ の関数である F はトロイダル磁場関数である。MHD 平衡条件

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad \text{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (2.2)$$

において、プラズマ圧力 p は ψ だけの関数であり、(2.2) 式より ψ に関する Grad-Shafranov 方程式

$$R^2 \text{div} \left(\frac{\nabla\psi}{R^2} \right) = -R^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (2.3)$$

を得る。

磁束座標系 (r, θ, ϕ) においてポロイダル角 θ は

$$q \equiv \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\phi}{\mathbf{B} \cdot \nabla\theta} \quad (2.4)$$

第1部で行った定式化に基づいて、Newcomb 方程式の固有値問題に有限要素法を適用する。第7章では MARG2D コードで用いる混成有限要素法を述べた後、ポテンシャル・エネルギー行列および運動エネルギー行列を、それぞれ、第8章、第9章で求める。第10章は、有理面における境界条件の処理法にあてられる。特に、 $m=1$ モード理論においては、 $m=1$ 成分の近似解を与え、残りのフーリエ成分に関する方程式を境界値問題として解く方法(試行関数法)が知られている[28]。第11章ではこの試行関数法によって固有値問題を近似的に解く方法を論じる。第12章では MARG2D コードのテスト計算例を示す。ここでは MARG2D コードの数値計算上の特性とともに、ERATOJ コードとのベンチマークテストから、MARG2D コードにより理想 MHD モードに対して安定状態および臨界安定状態が同定できることを検証する。また、MARG2D コードを実行する上で要する計算時間とメモリーサイズを第13章に示す。本研究の要約と議論を第14章にあてる。また、MARG2D コードの概略を付録に示す。

Part I 理論

2 座標系

トカマクプラズマの MHD 安定性解析では、有理面における共鳴条件を正確に表現するため、ポロイダル磁束関数 ψ をもとに作られる磁束座標系を用いることが不可欠である。ここでは、MARG2D コードで用いる磁束座標系を定義する。トカマクの対称軸を Z -軸、対称軸のまわりの回転角(トロイダル角)を ϕ とする円柱座標系 (R, Z, ϕ) において MHD 平衡磁場は、ポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$ を用いて

$$\mathbf{B} = \nabla\phi \times \nabla\psi + F\nabla\phi \quad (2.1)$$

と表される。ここで ψ の関数である F はトロイダル磁場関数である。MHD 平衡条件

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad \text{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (2.2)$$

において、プラズマ圧力 p は ψ だけの関数であり、(2.2)式より ψ に関する Grad-Shafranov 方程式

$$R^2 \text{div} \left(\frac{\nabla\psi}{R^2} \right) = -R^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (2.3)$$

を得る。

磁束座標系 (r, θ, ϕ) においてポロイダル角 θ は

$$q \equiv \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\phi}{\mathbf{B} \cdot \nabla\theta} \quad (2.4)$$

が ψ だけの関数であるように、すなわち、この座標系では磁力線を直線に見るように定義される。このとき、 q は安全係수에等しい。次に、径方向の座標 r を

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{r}{R_0} \frac{F}{q} \quad (2.5)$$

$$r^2(\psi) = 2R_0 \int_0^\psi \frac{q}{F} d\psi \quad (2.6)$$

で定義する [28]。上式で R_0 は磁気軸の R 座標である。座標 r は長さの次元を持ち、平均プラズマ半径 a を

$$a^2 = 2R_0 \int_0^{\psi_a} \frac{q}{F} d\psi \quad (\psi_a : \text{プラズマ表面}) \quad (2.7)$$

で定義する。

この座標系のヤコビアン \sqrt{g} は

$$\sqrt{g} = \frac{R^2}{R_0} r \quad (2.8)$$

である。座標系 (r, θ, ϕ) は非直交座標系であり、非直交度を表す量 $\beta_{r\theta}$ を

$$\beta_{r\theta} = \frac{\nabla r \cdot \nabla \theta}{|\nabla r|^2} \quad (2.9)$$

で定義する。このとき、 ∇r 方向の微分 ∂_\perp は

$$\partial_\perp \equiv \partial_r + \beta_{r\theta} \partial_\theta \quad (2.10)$$

で与えられる。また、この (r, θ, ϕ) 座標系で表した Grad-Shafranov 方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{d\psi}{dr} |\nabla r|^2 \right] + \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla r \cdot \nabla \theta] = -R^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (2.11)$$

である。

3 2次元 Newcomb 方程式に対するラグランジアン

ここではプラズマの微小変位に関する理想 MHD ポテンシャル・エネルギーに臨界安定な条件を課して、2次元 Newcomb 方程式に対するラグランジアンを導く。このラグランジアンは径方向の変位成分 X を未知関数とする。また、変位ベクトルをポロイダル方向にフーリエ級数展開し、有理面における共鳴条件が陽に表されたラグランジアンの表式を与える。

3.1 理想 MHD ポテンシャル・エネルギー

軸対称配位を考えているので、プラズマの微小変位 $\vec{\xi}$ について、 $\vec{\xi} \propto \exp(-in\phi)$ と仮定でき、このとき、整数 n をトロイダル・モード数とよぶ。臨界条件では変位 $\vec{\xi}$ は非圧縮($\text{div}\vec{\xi}=0$)であるので、2つの変数 X 、 V を

$$X = \xi \cdot \nabla r, \quad V = r(\xi \cdot \nabla \theta - \frac{1}{q}\xi \cdot \nabla \phi) \quad (3.1)$$

とすると、理想 MHD ポテンシャル・エネルギー W_p およびラグランジアン \mathcal{L} は次式で表される [29]。

$$W_p = \pi \int dr \int d\theta \mathcal{L} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & a|D_\theta(X)|^2 + b[inV + \frac{1}{q}\partial_r(rX) + hX + r\beta_{r\theta}D_\theta(X)]^2 \\ & + c|\partial_r(rX) + \partial_\theta V|^2 + e|X|^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで

$$D_\theta(X) = \frac{1}{q}\partial_\theta X - inX \quad (3.4)$$

であり、係数 a, b, c, h, e はそれぞれ次式で与えられる。

$$a = a(r, \theta) = \left(\frac{F}{R}\right)^2 \frac{1}{|\nabla r|^2} \frac{r}{R_0} \quad (3.5)$$

$$b = b(r, \theta) = \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 |\nabla r|^2 \frac{r}{R_0} \quad (3.6)$$

$$c = c(r) = \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{R_0}{r} \quad (3.7)$$

$$h = h(r, \theta) = -\frac{1}{q} \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \partial_\perp |\nabla r|^2 + r \partial_\theta \beta_{r\theta} \right) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} e = e(r, \theta) = & \frac{1}{R_0} \left(R^2 \frac{dp}{dr} + F \frac{dF}{dr} \right) \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \partial_\perp |\nabla r|^2 + 2r \partial_\theta \beta_{r\theta} \right) \\ & + \frac{r}{R_0} \frac{dp}{dr} \partial_\perp R^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

また、係数に現れる演算子 ∂_\perp は(2.10)式で定義されている。

3.2 V に関するオイラー方程式

ラグランジアン(3.3)より V に関するオイラー方程式として

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(rX) \right] = -in \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 |\nabla r|^2 \left[inV + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r}(rX) + \hat{H}X \right] \quad (3.10)$$

$$\hat{H}X \equiv hX + r\beta_{r\theta}D_\theta(X) \quad (3.11)$$

を得る。式(3.10)を式(3.3)に代入するとラグランジアン \mathcal{L} は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & a|D_\theta(X)|^2 + e|X|^2 \\ & + \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \left(\frac{R_0}{r}\right)^3 \frac{1}{n^2|\nabla r|^2} |\partial_\theta(\partial_\theta V + \partial_r(rX))|^2 \\ & + c|\partial_\theta V + \partial_r(rX)|^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる。したがって、方程式(3.10)を V について解いて、式(3.12)に現れる V を消去すれば X を未知関数とする Newcomb 方程式に対するラグランジアンが得られる。

まず、 $V(r, \theta), X(r, \theta)$ をフーリエ級数

$$V(r, \theta) = -iV_0(r) + \sum_{m \neq 0} (-i)V_m(r) \exp(im\theta) \quad (3.13)$$

$$X(r, \theta) = X_0(r) + \sum_{m \neq 0} X_m(r) \exp(im\theta)$$

で表す。式(3.10)の可解条件は

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta |\nabla r|^2 \left(inV + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r}(rX) + \hat{H}X \right) = 0 \quad (3.14)$$

である。ここで

$$(|\nabla r|^2)_{l,m} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-il\theta) (|\nabla r|^2) \exp(im\theta) d\theta \quad (3.15)$$

$$\hat{H}_{l,m} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-il\theta) (|\nabla r|^2 \hat{H}) \exp(im\theta) d\theta \quad (3.16)$$

とする。なお、式(3.11)で

$$\hat{H} \exp(im\theta) = h \exp(im\theta) + ir\beta_{r\theta} \left(\frac{m}{q} - n \right) \exp(im\theta) \quad (3.17)$$

より

$$\hat{\mathcal{H}}_{lm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\nabla r|^2 h(r, \theta) \exp(i(m-l)\theta) d\theta \quad (3.18)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_{lm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\nabla r|^2 r \beta_{r\theta} \exp(i(m-l)\theta) d\theta \quad (3.19)$$

とすれば

$$\begin{aligned} \hat{H}_{l,m} = & \hat{\mathcal{H}}_{lm} + i\hat{\mathcal{B}}_{lm} \text{Diag} \left(\frac{m}{q} - n \right) \\ & m = 0, 1, \dots \\ & l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

すなわち

$$\hat{H} = \hat{\mathcal{H}} + i\hat{\mathcal{B}}\text{Diag}\left(\frac{m}{q} - n\right) \quad (3.21)$$

である。可解条件 (3.14) より、 V_0 に対する方程式

$$nV_0 + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r}(rX_0) = -\frac{1}{\langle |\nabla r|^2 \rangle} \mathbf{b} \cdot \left[n\hat{V} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r}(r\hat{X}) \right] - \frac{1}{\langle |\nabla r|^2 \rangle} \mathbf{h} \cdot \vec{X} \quad (3.22)$$

$$\langle |\nabla r|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\nabla r|^2 d\theta \quad (3.23)$$

を得る。ここでベクトル \mathbf{b} 、 \mathbf{h} は

$$\mathbf{b} = (|\nabla r|^2)_{0,1}, (|\nabla r|^2)_{0,2}, \dots \quad (3.24)$$

$$\mathbf{h} = (\hat{H}_{0,0}, \hat{H}_{0,1}, \hat{H}_{0,2}, \dots) \quad (3.25)$$

で与えられ、 \hat{X} 、 \vec{X} 、 \hat{V} は次式で定義される (T : 転置を行う演算子)。

$$\hat{X} = (X_1, X_2, \dots)^T, \quad \vec{X} = (X_0, X_1, X_2, \dots)^T \quad (3.26)$$

$$\hat{V} = (V_1, V_2, \dots)^T \quad (3.27)$$

式 (3.22) を式 (3.10) に使うと \hat{V} に対する一次方程式

$$\left[\text{Diag}(m^2) + n^2 \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 G \right] \hat{V} = - \left[\text{Diag}(m) + \frac{n}{q} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 G \right] \frac{\partial}{\partial r}(r\hat{X}) - n \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 H_B \vec{X} \quad (3.28)$$

を得る。ここで、 $\text{Diag}(m^2)$ および $\text{Diag}(m)$ は、それぞれ、対角要素が m^2 および m の対角行列、また、行列 G および H_B は

$$G_{l,m} = (|\nabla r|^2)_{l,m} - \frac{1}{\langle |\nabla r|^2 \rangle} (|\nabla r|^2)_{l,0} (|\nabla r|^2)_{0,m} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} H_{Bl,m} &= \hat{H}_{l,m} - \frac{1}{\langle |\nabla r|^2 \rangle} (|\nabla r|^2)_{l,0} \hat{H}_{0,m} \\ &= \hat{\mathcal{H}}_{lm} + i\hat{\mathcal{B}}_{lm} \left(\frac{m}{q} - n \right) - \frac{(|\nabla r|^2)_{l,0}}{\langle |\nabla r|^2 \rangle} \left\{ \hat{\mathcal{H}}_{0m} + i\hat{\mathcal{B}}_{0m} \left(\frac{m}{q} - n \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

である。そこで

$$\mathcal{H}_{lm} = \hat{\mathcal{H}}_{lm} - \frac{(|\nabla r|^2)_{l,0}}{\langle |\nabla r|^2 \rangle} \hat{\mathcal{H}}_{0m} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{B}_{lm} = \hat{\mathcal{B}}_{lm} - \frac{(|\nabla r|^2)_{l,0}}{\langle |\nabla r|^2 \rangle} \hat{\mathcal{B}}_{0m} \quad (3.32)$$

とすれば

$$H_B = \mathcal{H} + iB \text{Diag} \left(\frac{m}{q} - n \right) \quad (3.33)$$

と表せる。方程式 (3.28) は解くことができて

$$\begin{aligned} \hat{V} &= -P^{-1}Q \frac{\partial}{\partial r}(r\hat{X}) - n \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 P^{-1}H_B \vec{X} \\ P &= \text{Diag}(m^2) + n^2 \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 G \\ Q &= \text{Diag}(m) + \frac{n}{q} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 G \end{aligned} \quad (3.34)$$

を得る。

次にラグランジアン (3.12) において、 V を含む各項は

$$\partial_\theta V + \partial_r(rX) = [\text{Diag}(m)\hat{V} + \partial_r(r\hat{X})] \cdot \vec{e}(\theta) + \partial_r(rX_0) \quad (3.35)$$

$$\partial_\theta(\partial_\theta V + \partial_r(rX)) = i\text{Diag}(m) [\text{Diag}(m)\hat{V} + \partial_r(r\hat{X})] \cdot \vec{e}(\theta) \quad (3.36)$$

と表せる。ただし $\vec{e}(\theta) = (\exp(i\theta), \exp(2i\theta), \dots)$ である。式 (3.35) において式 (3.34) を使うと

$$\begin{aligned} &\text{Diag}(m)\hat{V} + \partial_r(r\hat{X}) \\ &= [-\text{Diag}(m)P^{-1}Q + I] \partial_r(r\hat{X}) - n \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \text{Diag}(m)P^{-1}H_B \vec{X} \end{aligned} \quad (3.37)$$

ここで

$$H = \text{Diag}(m)P^{-1}H_B \quad (3.38)$$

とおき、また

$$-\text{Diag}(m)P^{-1}Q + I = \text{Diag}(m)P^{-1}[-Q + P\text{Diag}(1/m)] \quad (3.39)$$

に注意する。式 (3.34) より

$$\begin{aligned} -Q + P\text{Diag}(1/m) &= -\text{Diag}(m) - \frac{n}{q} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 G + \text{Diag}(m) \\ &\quad + n^2 \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 G\text{Diag}(1/m) \\ &= n \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 G\text{Diag}\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

であるので

$$D \equiv \text{Diag}\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right) \quad (3.41)$$

を導入すると

$$-\text{Diag}(m)P^{-1}Q + I = n \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \text{Diag}(m)P^{-1}GD \quad (3.42)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} & \text{Diag}(m)\hat{V} + \partial_r(r\hat{X}) \\ &= n \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 [\text{Diag}(m)P^{-1}GD\partial_r(r\hat{X}) - H\hat{X}] \end{aligned} \quad (3.43)$$

そこで行列 \hat{L} を

$$\hat{L} \equiv \text{Diag}(m)P^{-1}G \quad (3.44)$$

で定義すれば

$$\text{Diag}(m)\hat{V} + \partial_r(r\hat{X}) = n \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 [\hat{L}D\partial_r(r\hat{X}) - H\hat{X}] \quad (3.45)$$

を得る。ここで、有理面における共鳴条件 ($m = nq$) は式 (3.41) で与えられる対角行列 D で表されている。

3.3 ポテンシャル・エネルギーの簡約

式 (3.45) を使ってラグランジアン (3.12) の V を消去でき、ポテンシャル・エネルギーを X だけで表現できる。そのために $f(\theta)$ を任意の周期関数、また $w(\theta)$ を

$$w(\theta) = \sum_{m \neq 0} w_m \exp(im\theta) = \vec{e}(\theta) \cdot \vec{w} \quad (3.46)$$

とするとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) |w(\theta)|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l,m} w_l^* w_m f(\theta) \exp(i(m-l)\theta) d\theta \\ &= \langle \vec{w} | (f) | \vec{w} \rangle \end{aligned} \quad (3.47)$$

となることに注意する。ここで (f) は $f(\theta)$ から作られる行列で

$$(f)_{l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \exp(i(m-l)\theta) d\theta \quad (3.48)$$

である。これを利用すると

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2\pi} \int |\partial_\theta V + \partial_r(rX)|^2 d\theta \\ &= \left(\frac{F}{R_0} \right)^2 \frac{R_0}{r} |\partial_r(rX_0)|^2 + \left(\frac{F}{R_0} \right)^2 \frac{R_0}{r} |\text{Diag}(m)\hat{V} + \partial_r(r\hat{X})|^2 \\ &= \left(\frac{F}{R_0} \right)^2 \frac{R_0}{r} |\partial_r(rX_0)|^2 + n^2 \left(\frac{F}{R_0} \right)^2 \left(\frac{r}{R_0} \right)^3 \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \end{aligned} \quad (3.49)$$

を得る。ここで

$$\vec{v} = \hat{L}D\partial_r(r\hat{X}) - H\vec{X} \quad (3.50)$$

である。同様にして

$$\begin{aligned} & \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \left(\frac{R_0}{r}\right)^3 \frac{1}{n^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\nabla r|^2} |\partial_\theta(\partial_\theta V + \partial_r(rX))|^2 d\theta \\ &= \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{r}{R_0} \langle \vec{v} | \text{Diag}(m) \left(\frac{1}{|\nabla r|^2}\right) \text{Diag}(m) | \vec{v} \rangle \end{aligned} \quad (3.51)$$

を得る。したがって、ポテンシャル・エネルギーのうち V を含む積分は

$$\begin{aligned} & c \frac{1}{2\pi} \int |\partial_\theta V + \partial_r(rX)|^2 d\theta \\ &+ \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \left(\frac{R_0}{r}\right)^3 \frac{1}{n^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\nabla r|^2} |\partial_\theta(\partial_\theta V + \partial_r(rX))|^2 d\theta \\ &= \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{R_0}{r} |\partial_r(rX_0)|^2 \\ &+ \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{r}{R_0} \langle \vec{v} | \text{Diag}(m) \left(\frac{1}{|\nabla r|^2}\right) \text{Diag}(m) + n^2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 I | \vec{v} \rangle \quad (3.52) \\ &= \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{R_0}{r} |\partial_r(rX_0)|^2 \\ &+ \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{r}{R_0} [\langle \partial_r(r\hat{X}) | DLD | \partial_r(r\hat{X}) \rangle + \langle \partial_r(r\hat{X}) | DM^+ | \vec{X} \rangle \\ &+ \langle \vec{X} | MD | \partial_r(r\hat{X}) \rangle + \langle \vec{X} | N | \vec{X} \rangle] \end{aligned} \quad (3.53)$$

と表すことができる。ここで、行列 \hat{G} を

$$\hat{G} \equiv \text{Diag}(m) \left(\frac{1}{|\nabla r|^2}\right) \text{Diag}(m) + n^2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 I \quad (3.54)$$

と定義すると式(3.52)第2項は

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} | \hat{G} | \vec{v} \rangle &= \langle \hat{L}D\partial_r(r\hat{X}) - H\vec{X} | \hat{G} | \hat{L}D\partial_r(r\hat{X}) - H\vec{X} \rangle \\ &= \langle \partial_r(r\hat{X}) | D\hat{L}^+ \hat{G} \hat{L}D | \partial_r(r\hat{X}) \rangle \\ &\quad - \langle \partial_r(r\hat{X}) | D\hat{L}^+ \hat{G} H | \vec{X} \rangle - \langle \vec{X} | H^+ \hat{G} \hat{L}D | \partial_r(r\hat{X}) \rangle \\ &\quad + \langle \vec{X} | H^+ \hat{G} H | \vec{X} \rangle \end{aligned} \quad (3.55)$$

と展開できる。したがって、式(3.53)における行列 L, M, N は

$$L = \hat{L}^+ \hat{G} \hat{L}, \quad M = -H^+ \hat{G} \hat{L}, \quad N = H^+ \hat{G} H \quad (3.56)$$

で表される。次に

$$\frac{1}{2\pi} \int d\theta a |D_\theta(X)|^2 = \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{r}{R_0} \langle \vec{X} | A | \vec{X} \rangle \quad (3.57)$$

$$A = \text{Diag} \left(\frac{m}{q} - n \right) \left(\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{|\nabla r|^2} \right) \text{Diag} \left(\frac{m}{q} - n \right) \quad (3.58)$$

であるので、結局、ポテンシャル・エネルギー W_p は次のように簡約される。

$$W_p = 2\pi^2 \int \mathcal{L} dr \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{R_0}{r} |\partial_r(rX_0)|^2 + \langle \vec{X} | K | \vec{X} \rangle \\ & + \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{r}{R_0} [\langle \partial_r(r\hat{X}) | DLD | \partial_r(r\hat{X}) \rangle + \langle \partial_r(r\hat{X}) | DM^+ | \vec{X} \rangle \\ & + \langle \vec{X} | MD | \partial_r(r\hat{X}) \rangle] \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$K = \left(\frac{F}{R_0}\right)^2 \frac{r}{R_0} (A + N) + E \quad (3.61)$$

$$E = (e(r, \theta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(r, \theta) \exp(i(m-l)\theta) d\theta \quad (3.62)$$

式(3.54)、(3.56)、(3.62)より行列 L 、 K はエルミートである。

3.4 規格化

長さを a 、磁場をトロイダル磁場の特徴的な強さ B_0 (実際には、磁気軸でのトロイダル磁場) を単位にして

$$\hat{r} = r/a \quad (3.63)$$

$$F = R_0 B_0 \hat{F}, \quad p = B_0^2 \hat{p} \quad (3.64)$$

および

$$\psi = R_0^2 B_0 \hat{\psi} \quad (3.65)$$

と規格化する。また

$$\epsilon = \frac{a}{R_0} \quad (3.66)$$

とする。このとき、 $\beta_{r\theta}$ 、 ∂_\perp は a で規格化される：

$$\beta_{r\theta} = \frac{\nabla r \cdot \nabla \theta}{|\nabla r|^2} = \frac{1}{a} \hat{\beta}_{r\theta} \quad (3.67)$$

$$\partial_\perp = \partial_r + \beta_{r\theta} \partial_\theta = \frac{1}{a} \hat{\partial}_\perp \quad (3.68)$$

次に、 $|\nabla r|^2$ および

$$h = -\frac{1}{q} \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \partial_\perp |\nabla r|^2 + r \partial_\theta \beta_{r\theta} \right) \quad (3.69)$$

は無次元量であるので、 A 、 G 、 P 、 \hat{G} 、 \hat{H} 、 H および \hat{L} は無次元量の行列であり、それゆえ、 L 、 M 、 N も無次元量の行列である。次に、式(3.9)において

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{B_0}{R_0^2} \text{DPR} \quad (3.70)$$

とするとき

$$\frac{r}{R_0} \frac{dp}{dr} \partial_{\perp} R^2 = \frac{a}{R_0} B_0^2 \frac{\hat{F}}{q} \hat{r} \partial_{\perp} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \cdot \text{DPR} \quad (3.71)$$

である。したがって

$$e(r, \theta) = \frac{a}{R_0} B_0^2 \hat{e}(r, \theta) \quad (3.72)$$

とするとき

$$\begin{aligned} \hat{e}(r, \theta) = & - \left(\hat{r} \left(\frac{\hat{F}}{q} \right)^2 \left[r \partial_r |\nabla r|^2 + r \partial_{\theta} (\nabla r \cdot \nabla \theta) \right] + \frac{\hat{F}}{q} \hat{\partial}_r \left(\hat{r}^2 \frac{\hat{F}}{q} \right) |\nabla r|^2 \right) \\ & \times \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \partial_{\perp} |\nabla r|^2 + 2r \partial_{\theta} \beta_{r\theta} \right) \\ & + \frac{\hat{F}}{q} \hat{r}^2 \hat{\partial}_{\perp} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \cdot \text{DPR} \end{aligned} \quad (3.73)$$

である。ここで

$$r \partial_r |\nabla r|^2 + r \partial_{\theta} (\nabla r \cdot \nabla \theta) \quad (3.74)$$

および

$$\frac{r}{|\nabla r|^2} \partial_{\perp} |\nabla r|^2 + 2r \partial_{\theta} \beta_{r\theta} \quad (3.75)$$

は無次元量である。したがって、行列 K は

$$K = \frac{a}{R_0} B_0^2 \hat{K} \quad (3.76)$$

$$\hat{K} = \hat{r} \hat{F}^2 (A + N) + \hat{E} \quad (3.77)$$

$$\hat{E}_{l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{e}(r, \theta) \exp(i(m-l)\theta) d\theta \quad (3.78)$$

と表すことができる。以上のことを使って、規格化されたポテンシャル・エネルギーとして

$$\hat{W}_p = 2\pi^2 \int_0^1 \hat{\mathcal{L}} d\hat{r} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & \frac{1}{e^2} \frac{\hat{F}^2}{\hat{r}} |\partial_r(rX_0)|^2 + \langle \vec{X} | \hat{K} | \vec{X} \rangle \\ & + \hat{r} \hat{F}^2 [\langle \partial_r(r\hat{X}) | DLD | \partial_r(r\hat{X}) \rangle + \langle \partial_r(r\hat{X}) | DM^+ | \vec{X} \rangle \\ & + \langle \vec{X} | MD | \partial_r(r\hat{X}) \rangle] \end{aligned} \quad (3.80)$$

を得る。

4 ラグランジアン密度の標準化

後で示されるように、式 (3.80) にそのまま有限要素近似を適用すると、右辺最後の 2 項の持つ性質よりスペクトル汚染が起こるので、式 (3.80) に以下のような標準化を行う。まず

$$\vec{Y} = r\vec{X} \quad (4.1)$$

とおくと、式 (3.80) の最後の 2 項は

$$\hat{r}\hat{F}^2[\langle \partial_r(r\hat{X})|DM^+|\vec{X} \rangle + \langle \vec{X}|MD|\partial_r(r\hat{X}) \rangle] \quad (4.2)$$

$$= \hat{F}^2[\langle \partial_r\hat{Y}|DM^+|\vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y}|MD|\partial_r\hat{Y} \rangle] \quad (4.3)$$

と書ける。ここで、行列 M を対角行列と非対角な行列に分けて

$$\begin{aligned}
 M &= M_d + M_o \\
 &= \begin{pmatrix} \cdots & & & & & \\ & M_{-1,-1} & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & M_{1,1} & 0 & & \\ & 0 & 0 & M_{2,2} & & \\ & & & & \cdots & \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} & \vdots & & & & \\ & 0 & M_{-1,1} & M_{-1,2} & & \\ \cdots & M_{0,-1} & M_{0,1} & M_{0,2} & & \\ & M_{1,-1} & 0 & M_{1,2} & \cdots & \\ & M_{2,-1} & M_{2,1} & 0 & & \\ & & \vdots & & & \end{pmatrix} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

とすると、式 (4.3) は

$$\begin{aligned}
 &\hat{F}^2[\langle \partial_r\hat{Y}|DM_o^+|\vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y}|M_oD|\partial_r\hat{Y} \rangle] \\
 &+ \underbrace{[\langle \partial_r\hat{Y}|\hat{F}^2DM_d^+|\vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y}|\hat{F}^2M_dD|\partial_r\hat{Y} \rangle]}_{*b} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

と表される。 M_d のかわりに

$$M_D = \begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & M_{11} & 0 & & \\ & 0 & M_{22} & & \\ & & & \cdots & \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

を使うと式(4.5)の *b は

$$*b = \langle \partial_r \hat{Y} | \hat{F}^2 D M_D^\dagger | \hat{Y} \rangle + \langle \hat{Y} | \hat{F}^2 M_D D | \partial_r \hat{Y} \rangle \quad (4.7)$$

である。上下対称のとき、 M は実行列なので(上下非対称の場合は後述)

$$(M_D D)^\dagger = D M_D^\dagger = D M_D \quad (4.8)$$

すなわち

$$M_H \equiv \hat{F}^2 M_D D \quad (4.9)$$

とおくと M_H は実対角行列(エルミート行列)であり

$$*b = \langle \partial_r \hat{Y} | M_H | \hat{Y} \rangle + \langle \hat{Y} | M_H | \partial_r \hat{Y} \rangle \quad (4.10)$$

ここで、次のことに注意する。

A をエルミート行列とすると

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \left[\langle \partial_r \hat{Y} | A | \hat{Y} \rangle + \langle \hat{Y} | A | \partial_r \hat{Y} \rangle \right] dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dY_j^*}{dr} A_{jk} Y_k dr + \int_{r_1}^{r_2} Y_j^* A_{jk} \frac{dY_k}{dr} dr \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$= \langle \hat{Y} | A | \hat{Y} \rangle \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \langle \hat{Y} | \frac{dA}{dr} | \hat{Y} \rangle dr \quad (4.12)$$

である。ここで、境界項(式(4.12)右辺第1項)を評価する。今の場合 M_H は実対角行列であることから

$$\langle \hat{Y} | M_H | \hat{Y} \rangle = \sum_j M_{Hjj} |Y_j|^2 \quad (4.13)$$

であるので各 j 成分ごとに考えるとよい。有理面を持たない成分に対しては $r_1 = 0, r_2 = a$ ととれて

$$M_{Hjj} |Y_j|^2 \Big|_0^a = M_{Hjj}(r=a) |Y_j(r=a)|^2 \quad (4.14)$$

を得る。一方、有理面を持つ成分 Y_m に対しては

$$\int_0^a \frac{d}{dr} \left[M_{Hmm} |Y_m|^2 \right] dr \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} &= M_{Hmm}(r_m - 0) |Y_m(r_m - 0)|^2 - M_{Hmm}(r_m + 0) |Y_m(r_m + 0)|^2 \\ &+ M_{Hmm}(r=a) |Y_m(r=a)|^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

を得る。ところが、 $|Y_m(r)|^2$ は $r = r_m$ の近傍で、高々、 $|r - r_m|^{-1+2\mu}$ (μ :Mercier-Suydam 指数) のふるまいをし、一方

$$M_{Hmm}(r) \sim r - r_m \quad (4.17)$$

であるので

$$M_{Hm}(r)|Y_m(r)|^2 \sim |r - r_m|^{2\mu} \rightarrow 0 \quad (4.18)$$

すなわち、有理面における境界項は落ちて

$$\int_0^a \frac{d}{dr} \langle \hat{Y} | M_H | \hat{Y} \rangle dr = \sum_j M_{Hj}(r=a) |Y_j(r=a)|^2 \quad (4.19)$$

と表面項のみになる。そして固定境界条件

$$Y_j(r=a) = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

に対しては表面項も落ちる。

以上の考察から

$$*b = - \langle \hat{Y} | \frac{d}{dr} M_H | \hat{Y} \rangle \quad (4.21)$$

となることが分る。したがって、式(4.3)は

$$\begin{aligned} & \hat{F}^2 [\langle \partial_r \hat{Y} | D M_O^\dagger | \vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y} | M_O D | \partial_r \hat{Y} \rangle] \\ & + \langle \hat{Y} | - \frac{d}{dr} M_H | \hat{Y} \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。数値計算では

$$\frac{d}{dr} M_H = \frac{d}{dr} (\hat{F}^2 M_D D) \quad (4.23)$$

$$= \frac{d\hat{F}^2}{dr} M_D D + \hat{F}^2 \left(\frac{1}{q^2} \frac{dq}{dr} \right) M_D + \hat{F}^2 \frac{dM_D}{dr} D \quad (4.24)$$

において、 dM_D/dr は M_D (対角成分のみ非ゼロである) のスプライン補間により求める。

以上より、式(3.80)は

$$\begin{aligned} \hat{L} = & \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\hat{F}^2}{\hat{r}} |\partial_r Y_0|^2 + \langle \vec{Y} | \frac{\hat{K}}{r^2} | \vec{Y} \rangle + \hat{r} \hat{F}^2 \langle \partial_r \hat{Y} | D L D | \partial_r \hat{Y} \rangle \\ & + \langle \hat{Y} | - \frac{d}{dr} M_H | \hat{Y} \rangle \\ & + \hat{F}^2 [\langle \partial_r \hat{Y} | D M_O^\dagger | \vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y} | M_O D | \partial_r \hat{Y} \rangle] \end{aligned} \quad (4.25)$$

に変形される。MARG2D では式(4.25)で与えられるラグランジアン密度に対して有限要素法を適用する。もし、式(4.3)を採用すると、有理面の左右で発散する偽の固有関数が出現し、それは、絶対値の非常に大きい固有値を持つ。この固有関数は、式(4.16)で有理面で消えるべき境界項から生じると考えられる。

次に、上下非対称の場合、 M_H は対角ではあるけれども実行列ではない。そこで

$$M_H \equiv \hat{M}_H + i\hat{M}_A \quad (4.26)$$

$$\hat{M}_H = \text{Diag}(a_{Hj}) \quad (4.27)$$

$$\hat{M}_A = \text{Diag}(b_{Hj}) = \hat{F}^2 \hat{M}_D D \quad (4.28)$$

とおく。ここで \hat{M}_D は対角行列 M_D の虚数成分である。これを使うと

$$\begin{aligned}
 & \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{dY_j^*}{dr} M_{Hjj}^* Y_j + Y_j^* M_{Hjj} \frac{dY_j}{dr} \right] dr \\
 = & \int_{r_1}^{r_2} a_{Hj} \left(\frac{dY_j^*}{dr} Y_j + Y_j^* \frac{dY_j}{dr} \right) dr + i \int_{r_1}^{r_2} b_{Hj} \left(Y_j^* \frac{dY_j}{dr} - \frac{dY_j^*}{dr} Y_j \right) dr \\
 = & \int_{r_1}^{r_2} a_{Hj} \frac{d}{dr} |Y_j|^2 dr + i \int_{r_1}^{r_2} b_{Hj} \left(Y_j^* \frac{dY_j}{dr} - \frac{dY_j^*}{dr} Y_j \right) dr \\
 = & a_{Hj} |Y_j|^2 \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{da_{Hj}}{dr} |Y_j|^2 dr + i \int_{r_1}^{r_2} b_{Hj} \left(Y_j^* \frac{dY_j}{dr} - \frac{dY_j^*}{dr} Y_j \right) dr \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

を得る。式(4.5)における*b項は

$$\begin{aligned}
 *b &= - \left\langle \hat{Y} \left| \frac{d}{dr} \hat{M}_H \right| \hat{Y} \right\rangle \\
 &+ i \left\langle \hat{Y} \left| \hat{M}_A \right| \frac{d\hat{Y}}{dr} \right\rangle - i \left\langle \frac{d\hat{Y}}{dr} \left| \hat{M}_A \right| \hat{Y} \right\rangle \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

となる。以上から、上下非対称の場合、ラグランジアン(3.80)は

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{L}} &= \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\hat{F}^2}{\hat{r}} |\partial_r Y_0|^2 + \left\langle \vec{Y} \left| \frac{\hat{K}}{r^2} \right| \vec{Y} \right\rangle \\
 &+ \hat{r} \hat{F}^2 \left\langle \partial_r \hat{Y} \left| DLD \right| \partial_r \hat{Y} \right\rangle + \left\langle \hat{Y} \left| - \frac{d}{dr} \hat{M}_H \right| \hat{Y} \right\rangle \\
 &+ \hat{F}^2 \left[\left\langle \partial_r \hat{Y} \left| DM_O^\dagger \right| \vec{Y} \right\rangle + \left\langle \vec{Y} \left| M_O D \right| \partial_r \hat{Y} \right\rangle \right] \\
 &+ i \hat{F}^2 \left[- \left\langle \partial_r \hat{Y} \left| D\hat{M}_D^\dagger \right| \hat{Y} \right\rangle + \left\langle \vec{Y} \left| \hat{M}_D D \right| \partial_r \hat{Y} \right\rangle \right] \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

と変形される。右辺最後の2項からは境界項はでてこないなので、この部分からスペクトル汚染は生じないと予想される。

ここで、式(4.31)において必要な行列と行列計算の流れを表1~表4にまとめた。表1は平衡量から求める行列、表2はそれらの行列演算から作られる行列の一覧表である。

表 1: 平衡量を使う行列の計算

| no | 行列 | 大きさ |
|----|--|----------------------|
| 1. | $\left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{1}{ \nabla r ^2} \right)$ | $M \times M$ |
| 2. | $\left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right)$ | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 3. | $\hat{E} = (\hat{e}(r, \theta))$ | $M \times M$ |
| 4. | $A = \text{Diag} \left(\frac{m}{q} - n \right) \left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{1}{ \nabla r ^2} \right) \text{Diag} \left(\frac{m}{q} - n \right)$ | $M \times M$ |
| 5. | $\hat{G} = \text{Diag}(m) \left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right) \text{Diag}(m) + n^2 \epsilon^2 \hat{r}^2 I$ | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 6. | $G_{l,m} = (\nabla r ^2)_{l,m} - \frac{1}{\langle \nabla r ^2 \rangle} (\nabla r ^2)_{l,0} (\nabla r ^2)_{0,m}$ | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 7. | $P = \text{Diag}(m^2) + n^2 \epsilon^2 \hat{r}^2 G$ | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 8. | $H_B = \mathcal{H} + i\mathcal{B} \text{Diag} \left(\frac{m}{q} - n \right)$ | $(M-1) \times M$ |
| | $\hat{\mathcal{H}}_{lm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla r ^2 h(r, \theta) \exp(i(m-l)\theta) d\theta$ | $(M-1) \times M$ |
| | $\hat{\mathcal{B}}_{lm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla r ^2 r \beta_{r\theta} \exp(i(m-l)\theta) d\theta$ | $(M-1) \times M$ |
| | $\mathcal{H}_{lm} = \hat{\mathcal{H}}_{lm} - \frac{(\nabla r ^2)_{l,0}}{\langle \nabla r ^2 \rangle} \hat{\mathcal{H}}_{0m}$ | $(M-1) \times M$ |
| | $\mathcal{B}_{lm} = \hat{\mathcal{B}}_{lm} - \frac{(\nabla r ^2)_{l,0}}{\langle \nabla r ^2 \rangle} \hat{\mathcal{B}}_{0m}$ | $(M-1) \times M$ |
| 9. | $D = \text{Diag} \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)$ | $(M-1) \times (M-1)$ |

表 2: 行列演算のみの計算

| no | 行列 | 大きさ |
|-----|---|----------------------|
| 1. | P^{-1} | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 2. | $H = \text{Diag}(m)P^{-1}H_B$ | $(M-1) \times M$ |
| 3. | H^\dagger | $M \times (M-1)$ |
| 4. | $N = H^\dagger \hat{G}H$ | $M \times M$ |
| 5. | $\hat{K} = \hat{r}\hat{F}^2(A+N) + \hat{E}$ | $M \times M$ |
| 6. | $\hat{L} = \text{Diag}(m)P^{-1}G$ | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 7. | \hat{L}^\dagger | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 8. | $L = \hat{L}^\dagger \hat{G} \hat{L}$ | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 9. | DLD | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 10. | $M = -H^\dagger \hat{G} \hat{L}$ | $M \times (M-1)$ |
| 11. | M_O | $M \times (M-1)$ |
| 12. | M_O^\dagger | $(M-1) \times M$ |
| 13. | $M_O D$ | $M \times (M-1)$ |
| 14. | $D M_O^\dagger$ | $(M-1) \times M$ |
| 15. | M_D | $(M-1) \times (M-1)$ |
| 16. | $M_D D$ | $(M-1) \times (M-1)$ |

表 3: 行列計算の流れ

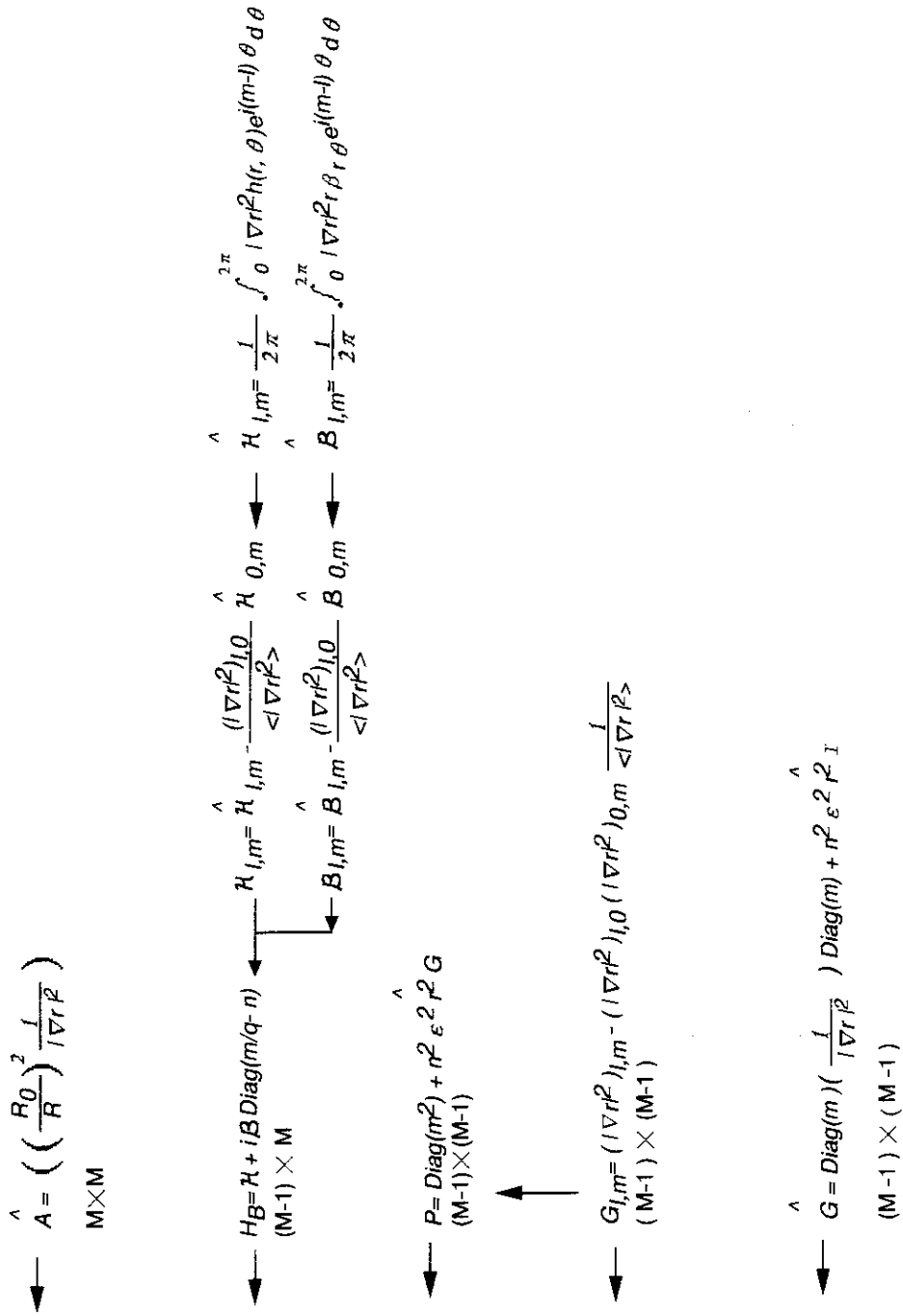
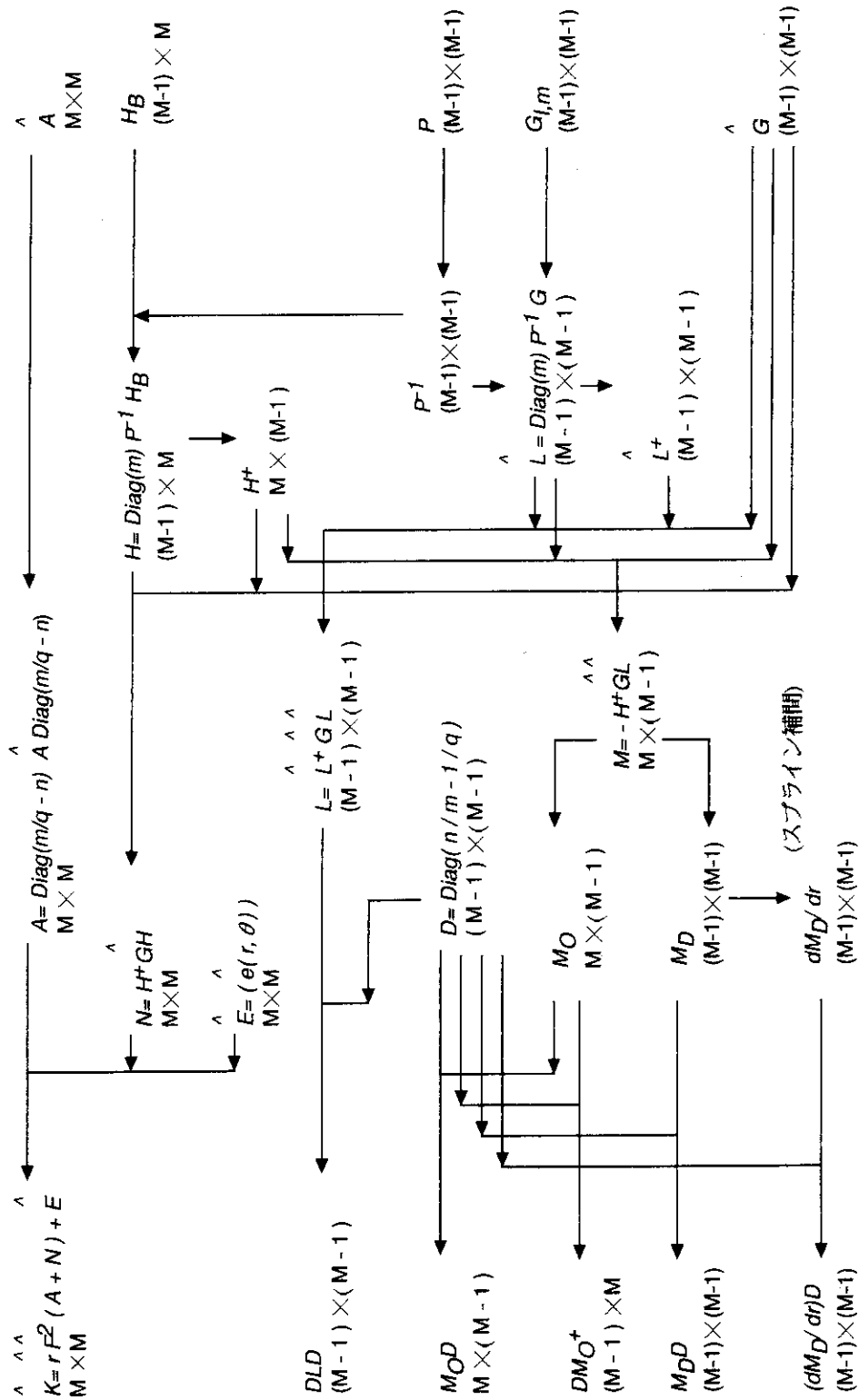


表 4: 行列計算の流れ (続き)



5 2次元 Newcomb 方程式

5.1 $l=0$ モードと $l \neq 0$ モードの分離

以下、まず、MHD 平衡は上下対称と仮定する。

規格化された量であることを示す記号「 $\hat{\cdot}$ 」を省いて、式(4.25)を

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{\epsilon^2} \frac{F^2}{r} \left| \frac{dY_0}{dr} \right|^2 + \langle \vec{Y} | \frac{K}{r^2} | \vec{Y} \rangle + rF^2 \langle \frac{d\hat{Y}}{dr} | DLD | \frac{d\hat{Y}}{dr} \rangle \\ & + \langle \hat{Y} | -\frac{d}{dr} M_H | \hat{Y} \rangle \\ & + F^2 \left[\langle \frac{d\hat{Y}}{dr} | DM_O^\dagger | \vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y} | M_O D | \frac{d\hat{Y}}{dr} \rangle \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

と表す。MHD 平衡は上下対称としているので各行列は実数である。次に、これを $l=0$ モードと $l \neq 0$ モードに対するラグランジアンに分離して

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \hat{\mathcal{L}} \quad (5.2)$$

と書くと \mathcal{L}_0 は

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{F^2}{r} \left| \frac{dY_0}{dr} \right|^2 + \frac{K_{00}}{r^2} |Y_0|^2 + \underbrace{Y_0^* \frac{K_{0l}}{r^2} Y_l + Y_0^* F^2 (M_O D)_{0l} \frac{dY_l}{dr}}_{l=0 \text{ モードと } l \neq 0 \text{ モードとの相互作用}} \quad (5.3)$$

である。ここで、最後の2項は $l=0$ モードと $l \neq 0$ モードとの相互作用を表す。式(5.3)より導かれる $Y_0(r)$ に対するオイラー方程式は

$$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{F^2}{r} \frac{dY_0}{dr} \right] - \frac{K_{00}}{r^2} Y_0 = \frac{K_{0l}}{r^2} Y_l + F^2 (M_O)_{0l} \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \frac{dY_l}{dr} \quad (5.4)$$

である。次に、 $l \neq 0$ モードに対するラグランジアン密度は

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & rF^2 \langle \frac{d\hat{Y}}{dr} | DLD | \frac{d\hat{Y}}{dr} \rangle + \langle \hat{Y} | \mathcal{K} | \hat{Y} \rangle \\ & + F^2 \left[\langle \frac{d\hat{Y}}{dr} | DM_O^\dagger | \hat{Y} \rangle + \langle \hat{Y} | M_O D | \frac{d\hat{Y}}{dr} \rangle \right] \\ & + \underbrace{Y_l^* \frac{K_{l0}}{r^2} Y_0 + F^2 \frac{dY_l^*}{dr} \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) (M_O)_{0l}^* Y_0}_{*b} \end{aligned} \quad (5.5)$$

*c: $l=0$ モードと $l \neq 0$ モードとの相互作用

$$\mathcal{K} = \frac{K}{r^2} - \frac{d}{dr} M_H \quad (5.6)$$

である。式 (5.5) より $Y_l(r)$ に対するオイラー方程式を導く。*b のオイラー方程式への寄与は

$$\begin{aligned} & -F^2 M_O D \frac{d\hat{Y}}{dr} + \frac{d}{dr} (F^2 D M_O^\dagger \hat{Y}) \\ & = F^2 (D M_O^\dagger - M_O D) \frac{d\hat{Y}}{dr} + \frac{d}{dr} (F^2 D M_O^\dagger) \hat{Y} \end{aligned} \quad (5.7)$$

である。次に、*c のオイラー方程式への寄与は

$$-\frac{K_{l0}}{r^2} Y_0 + \frac{d}{dr} \left[F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) (M_O)_{0l}^* Y_0 \right] \quad (5.8)$$

である。以上から、 Y_l に対するオイラー方程式として

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[r F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) L_{lp} \frac{dY_p}{dr} \right] \\ & + F^2 \left[\left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) M_{Opl} - \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) M_{Olp} \right] \frac{dY_p}{dr} \\ & + \frac{d}{dr} \left[F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) M_{Opl} \right] Y_p - \mathcal{K}_{lp} Y_p \\ & - \frac{K_{l0}}{r^2} Y_0 + \frac{d}{dr} \left[F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) (M_O)_{0l} Y_0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

を得る。ここで、行列 M_O の対角成分はゼロである。以上をまとめて、2次元 Newcomb 方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[r F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right)^2 L_{ll} \frac{dY_l}{dr} \right] - \mathcal{K}_{ll} Y_l \\ & + \sum_{p \neq l} \left\{ \frac{d}{dr} \left[r F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) L_{lp} \frac{dY_p}{dr} \right] \right. \\ & + \left. F^2 \left[\left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) M_{Opl} - \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) M_{Olp} \right] \frac{dY_p}{dr} \right\} \\ & + \sum_{p \neq l} \left\{ \frac{d}{dr} \left[F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) M_{Olp} \right] - \mathcal{K}_{lp} \right\} Y_p \\ & - \frac{K_{l0}}{r^2} Y_0 + \frac{d}{dr} \left[F^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) (M_O)_{0l} Y_0 \right] \\ & = 0, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

および

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{F^2}{r} \frac{dY_0}{dr} \right] - \frac{K_{00}}{r^2} Y_0 - \sum_{l \neq 0} \left[\frac{K_{0l}}{r^2} Y_l + F^2 (M_0)_{0l} \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \frac{dY_l}{dr} \right] = 0 \quad (5.11)$$

で与えられる。

5.2 フロベニウス展開

最大のポロイダル・モード数を M とすると (すなわち、 $l = \pm 1, \dots, \pm M$)、Newcomb 方程式 (5.10)、(5.11) は $(2M+1)$ 元の連立 2 階常微分方程式系である。したがって、Newcomb 方程式は有理面 $r = r_m (nq(r_m) = m)$ のまわりで $2 \times (2M+1)$ 個の 1 次独立な基本解を持ち、そのうち 2 個は、「大きい解」および「小さい解」から成る特異解、残りはすべて正則解である。以下、フロベニウス展開の方法によって、有理面のまわりの特異解を求める。すなわち

$$x \equiv r - r_m$$

として、特異解を

$$\vec{Y}(r) = x^\alpha [\vec{y}^{(0)} + x\vec{y}^{(1)} + \dots] \quad (5.12)$$

と表す。ここで α は、これから決める指数である。また、ベクトル $\vec{y}^{(0)} = (y_l^{(0)})$ は

$$\vec{y}_m^{(0)} = y_m^{(0)}, \quad \vec{y}_l^{(0)} = 0, \quad l \neq m \quad (5.13)$$

とし

$$\frac{n}{m} - \frac{1}{q} = \left[\frac{q'}{q^2} \right]_{r=r_m} x + \frac{1}{2} \left[\frac{q''}{q^2} - 2 \frac{q'}{q^3} \right]_{r=r_m} x^2 + \dots \quad (5.14)$$

と展開する。

まず、式 (5.10) で $l = m$ に対して最低次のべきは

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[r F^2 \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)^2 L_{mm} \frac{dY_m}{dr} \right] \\ &= \left[r F^2 \left(\frac{q'}{q^2} \right)^2 L_{mm} \right]_{r=r_m} \alpha(\alpha+1) x^\alpha y_m^{(0)} + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$-\mathcal{K}_{mm} Y_m = -(\mathcal{K}_{mm})_{r=r_m} x^\alpha y_m^{(0)} + \dots \quad (5.16)$$

次に、 Y_p は $x^{\alpha+1}$ から始まるので

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[r F^2 \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) L_{mp} \frac{dY_p}{dr} \right] \\ &= \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) \left[r F^2 \frac{q'}{q} L_{mp} \right] (\alpha+1)^2 x^\alpha y_p^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

また

$$F^2 \left[\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right) M_{Opm} - \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) M_{Omp} \right] \frac{dY_p}{dr} = - \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) [F^2 M_{Omp}] (\alpha + 1) x^\alpha y_p^{(1)} \quad (5.18)$$

である。式 (5.10) でその他の項は $x^{\alpha+1}$ のベキから始まるので $l = m$ モードに対する方程式は x^α から始まり、これがゼロになることから方程式

$$\left\{ \left[rF^2 \left(\frac{q'}{q^2} \right)^2 L_{mm} \right] \alpha(\alpha + 1) - \mathcal{K}_{mm} \right\} y_m^{(0)} + \underbrace{\sum_{p \neq m} \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) (\alpha + 1) \left\{ \left[rF^2 \frac{q'}{q^2} L_{mp} \right] (\alpha + 1) - [F^2 M_{Omp}] \right\}}_{*d} y_p^{(1)} = 0 \quad (5.19)$$

を得る。

次に、式 (5.10) で $l \neq m, l \neq 0$ モードに対して展開を行うと、まず

$$\frac{d}{dr} \left[rF^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right)^2 L_{ll} \frac{dY_l}{dr} \right] = \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right)^2 [rF^2]_{r=r_m} L_{ll} \alpha(\alpha + 1) x^{\alpha-1} y_l^{(1)} \quad (5.20)$$

次に、式 (5.10) 左辺第 2 項で $p \neq m$ モードに対して

$$\frac{d}{dr} \left[rF^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) L_{lp} \frac{dY_p}{dr} \right] = \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) [rF^2]_{r=r_m} L_{lp} \alpha(\alpha + 1) x^{\alpha-1} y_p^{(1)} \quad (5.21)$$

したがって、式 (5.20)+式 (5.21) は

$$\left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \alpha(\alpha + 1) [rF^2] \left\{ \sum_{p \neq m} \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \right) L_{lp} y_p^{(1)} \right\} x^{\alpha-1} \quad (5.22)$$

となる。次に、式 (5.10) 左辺第 2 項で $p = m$ モードに対して

$$\frac{d}{dr} \left[rF^2 \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right) L_{lm} \frac{dY_m}{dr} \right] = \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) \left[rF^2 \frac{q'}{q^2} L_{lm} \right] \alpha^2 x^{\alpha-1} y_m^{(0)} \quad (5.23)$$

である。式 (5.10) 左辺第 3 項で $p = m$ モードについて

$$F^2 \left[\left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) M_{Oml} - \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right) M_{Olm} \right] \frac{dY_m}{dr} = \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q} \right) [F^2 M_{Oml}] \alpha x^{\alpha-1} y_m^{(0)} \quad (5.24)$$

を得る。他の項は x^α のベキから始まるので、式 (5.10) で $l \neq m$ 、 $l \neq 0$ モードに対する方程式は $x^{\alpha-1}$ から始まり、これがゼロになる条件より、方程式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q}\right) \alpha(\alpha+1) \sum_{p \neq m} \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q}\right) [r F^2 L_{lp}] y_p^{(1)} \\ & + \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q}\right) \alpha \left\{ \left[r F^2 \frac{q'}{q^2} L_{lm} \right] \alpha + [F^2 M_{ml}^*] \right\} y_m^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

を得る。

次に、ゼロ・モードに対する方程式 (5.11) で

$$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{F^2}{r} \frac{dY_0}{dr} \right] = \frac{1}{\epsilon^2} \alpha(\alpha+1) \left[\frac{F^2}{r} \right]_{r=r_m} x^{\alpha-1} y_0^{(1)} + \dots \quad (5.26)$$

$$-\frac{\mathcal{K}_{00}}{r^2} Y_0 = x^{\alpha+1} + \dots \quad (5.27)$$

式 (5.11) 左辺第3項は $l \neq m$ モードについて

$$F^2 M_{ol} \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q}\right) \frac{dY_l}{dr} = x^\alpha + \dots \quad (5.28)$$

また、 $l = m$ モードについて

$$F^2 M_{om} \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right) \frac{dY_m}{dr} = x^\alpha + \dots \quad (5.29)$$

したがって

$$y_0^{(1)} = 0 \quad (5.30)$$

を得る。すなわち、ゼロ・モードは $x^{\alpha+2}$ から始まる。

以上で、 $y_m^{(0)}$ 、 $y_p^{(1)}$ ($p \neq m$) に対する方程式 (同次方程式) は式 (5.19) および式 (5.25) で与えられる。この同次方程式が自明でない解を持つ条件から指数 α が決定される。

$\alpha \neq 0$ とすると式 (5.25) は $y_p^{(1)}$ に対する1次方程式

$$\begin{aligned} [L_{lp}] z_p^{(1)} &= - \left\{ \left[\frac{q'}{q^2} L_{lm} \right] \alpha + \left[\frac{M_{Oml}}{r} \right] \right\} y_m^{(0)} \\ z_p^{(1)} &= \left(\frac{n}{p} - \frac{1}{q}\right) (\alpha+1) y_p^{(1)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

を得る。 \hat{L} を $[L_{lp}]$ ($l \neq m, p \neq m$) から作られる行列とすると

$$\begin{aligned} z_l^{(1)} &= - \left\{ \alpha \frac{q'}{q^2} (\hat{L}^{-1})_{lp} [L_{pm}] + (\hat{L}^{-1})_{lp} \left[\frac{M_{Omp}}{r} \right] \right\} y_m^{(0)} \\ y_l^{(1)} &= \left(\frac{n}{l} - \frac{1}{q}\right)^{-1} \frac{z_l^{(1)}}{\alpha+1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

である。ここで、 $\alpha \neq -1$ とする。これを式 (5.19) の *d に代入する：

$$\begin{aligned}
 *d &= - \sum_{l \neq m} \left\{ \left[r F^2 \frac{q'}{q^2} L_{ml} \right] (\alpha + 1) - \left[F^2 M_{Oml} \right] \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \alpha \left(\frac{q'}{q^2} \right) \hat{L}_{lp}^{-1} [L_{pm}] + \hat{L}_{lp}^{-1} \left[\frac{M_{Omp}}{r} \right] \right\} y_m^{(0)} \\
 &= - \left\{ \left[r F^2 \left(\frac{q'}{q^2} \right)^2 \right] (L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} L_{pm}) \alpha (\alpha + 1) \right. \\
 &\quad + \left[F^2 \frac{q'}{q^2} \right] (L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{Omp} - M_{Oml} \hat{L}_{lp}^{-1} L_{pm}) \alpha \\
 &\quad \left. + \left(\left[F^2 \frac{q'}{q^2} \right] L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{Omp} - \left[\frac{F^2}{r} \right] M_{Oml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{Omp} \right) \right\} y_m^{(0)} \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

ここで、 \hat{L} 、 L がともに実対称行列であることを使うと

$$L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{Omp} = L_{mp} \hat{L}_{pl}^{-1} M_{Oml} = M_{Oml} \hat{L}_{lp}^{-1} L_{pm} \quad (5.34)$$

であるので、式 (5.33) 右辺第 2 項は消える。したがって、式 (5.19) は

$$\begin{aligned}
 &\left\{ r F^2 \left(\frac{q'}{q^2} \right)^2 [L_{mm} - L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} L_{pm}] \alpha (\alpha + 1) \right. \\
 &\quad \left. - \left[\mathcal{K}_{mm} + \left[F^2 \frac{q'}{q^2} \right] L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{mp}^* - \left[\frac{F^2}{r} \right] M_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{mp}^* \right] \right\} y_m^{(0)} \\
 &= 0 \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

となる。そこで

$$a \equiv \left[r F^2 \left(\frac{q'}{q^2} \right)^2 \right] [L_{mm} - L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} L_{pm}] \quad (5.36)$$

$$c \equiv \mathcal{K}_{mm} + \left[F^2 \frac{q'}{q^2} \right] L_{ml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{Omp} - \left[\frac{F^2}{r} \right] M_{Oml} \hat{L}_{lp}^{-1} M_{Omp} \quad (5.37)$$

とおくと、上下対称の場合、すべての行列は実行列であるから、 a 、 c は実数である。そして、 $y_m^{(0)} \neq 0$ の解を持つ条件は

$$a \alpha (\alpha + 1) = c \quad (5.38)$$

と表される。この方程式を解いて

$$\alpha^{(b)} = -\frac{1}{2} - \mu, \quad \alpha^{(s)} = -\frac{1}{2} + \mu, \quad (5.39)$$

を得る。ここで、Mercier 指数は

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{c}{a}} \quad (5.40)$$

で与えられる。また、式 (5.39) から決まる α を式 (5.32) に使うとフロベニウス展開

$$\vec{Y} = x^\alpha [\vec{y}^{(0)} + x\vec{y}^{(1)} + \dots] \quad (5.41)$$

のうち $y_m^{(0)}$ 、 $y_l^{(1)} (l \neq m)$ が決定される。

なお、Mercier 指数は平衡量の磁気面平均で表すことができ [23]、これから求めた値と式 (5.40) で求めた値との比較によって、本研究における定式化の検証が可能である (図 3、図 9 参照)。

6 2次元 Newcomb 方程式に対する固有値問題

6.1 運動エネルギー積分と固有値問題

未知関数 $\vec{Y} = (Y_m(r))^T$ の正定値 2 次形式 (運動エネルギー積分) W_k を作り

$$W_p - \lambda W_k$$

を停留にする \vec{Y} の方程式 (オイラー方程式) を作れば、 λ を固有値とする Newcomb 方程式に対する固有値問題を導く。MARG2D コードでは、文献 [21] の定式化を 2 次元問題に拡張し、運動エネルギー積分として

$$W_k = 2\pi^2 \int \sum_m \rho_m(r) |Y_m(r)|^2 dr \quad (6.1)$$

$$\rho_m(r) = \begin{cases} F^2 \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 & Y_m(r) \text{ が有理面を持つとき} \\ F^2 & Y_m(r) \text{ が有理面を持たないとき} \end{cases} \quad (6.2)$$

を採用する。このとき、以下に議論するように、有理面における境界条件を適切に選ぶと、スペクトル λ は連続スペクトルを持たず離散固有値だけからなる。また、離散固有値は実数であり、固有関数は Newcomb 方程式の小さい解の構造を保持する。そして、固有値の符号によってプラズマの理想 MHD 安定性が決定される。すなわち

$\lambda < 0$ ならば不安定

$\lambda > 0$ ならば安定

$\lambda = 0$ ならば臨界安定

である。したがって、この固有値問題を解くことにより臨界安定状態を同定することができる。なお、固有値問題の一般より

$$\lambda = \frac{W_p}{W_k} \quad (6.3)$$

が成立する。ただし、各エネルギー W_p および W_k は固有値 λ に対応する固有関数で評価される。

6.2 境界条件

一次元問題では有理面 (確定特異点) における適切な境界条件は「自然境界条件」である。二次元 Newcomb 方程式の固有関数の有理面 ($m = nq$) のまわりの解は特異解 (小さい解) および正則解からなる。このような場合の境界条件を一般的に論じるため、式 (3.80) の形式を含むより一般的な作用積分

$$W = \int_0^a \left\{ \left\langle \frac{d\vec{Y}}{dr} \middle| L \middle| \frac{d\vec{Y}}{dr} \right\rangle + \langle \vec{Y} \middle| K \middle| \vec{Y} \right\rangle + \left\langle \frac{d\vec{Y}}{dr} \middle| M^{\dagger} \middle| \vec{Y} \right\rangle + \langle \vec{Y} \middle| M \middle| \frac{d\vec{Y}}{dr} \right\rangle \right\} dr \quad (6.4)$$

を考える。ここで、行列 L 、 K はエルミート行列である。この作用積分の変分は

$$\delta W = - \int_0^a \delta \vec{Y} \cdot \mathcal{L} \vec{Y} dr + \left\langle \delta \vec{Y} \left| L \frac{d\vec{Y}}{dr} + M^+ \vec{Y} \right. \right\rangle_0^a = 0 \quad (6.5)$$

ここで

$$\mathcal{L} \vec{Y} \equiv \frac{d}{dr} \left(L \frac{d\vec{Y}}{dr} \right) + \frac{d}{dr} (M^+ \vec{Y}) - M \frac{d\vec{Y}}{dr} - K \vec{Y} \quad (6.6)$$

であり、式(6.5)の右辺第2項は境界項である。今、 $r=0$ 、 a で \vec{Y} に固定境界条件が課せられており、また、簡単のため、1点 $r=r_m$ が特異点とすると、境界項は

$$\left\langle \delta \vec{Y} \left| L \frac{d\vec{Y}}{dr} + M^+ \vec{Y} \right. \right\rangle_{r=r_m-0} - \left\langle \delta \vec{Y} \left| L \frac{d\vec{Y}}{dr} + M^+ \vec{Y} \right. \right\rangle_{r=r_m+0} \quad (6.7)$$

となる。 $\delta \vec{Y}$ が任意であるとする、方程式 (Newcomb 方程式)

$$\mathcal{L} \vec{Y} = 0 \quad (6.8)$$

と境界条件 (自然境界条件)

$$\left[L \frac{d\vec{Y}}{dr} + M^+ \vec{Y} \right]_{r=r_m-0} = \left[L \frac{d\vec{Y}}{dr} + M^+ \vec{Y} \right]_{r=r_m+0} \quad (6.9)$$

を得る。ここで、既に論じたように $\vec{Y}(r)$ は $r=r_m$ の近傍で正則部分 $\vec{Y}^{(a)}(r)$ および特異部分 $\vec{Y}^{(s)}(r)$ から成る。しかし、 $\vec{Y}^{(a)}(r)$ については $L d\vec{Y}^{(a)}/dr + M^+ \vec{Y}^{(a)}$ は連続であるから式(6.9)は自動的に満足される。一方、特異成分については有理面 $r=r_m$ の左右で独立であるから、自然境界条件

$$\left[L \frac{d\vec{Y}^{(s)}}{dr} + M^+ \vec{Y}^{(s)} \right]_{r=r_m-0} = 0 \quad (6.10)$$

$$\left[L \frac{d\vec{Y}^{(s)}}{dr} + M^+ \vec{Y}^{(s)} \right]_{r=r_m+0} = 0 \quad (6.11)$$

を得る (この条件は自動的に満足される)。

さらに、特異成分のうち、 $\vec{Y}_l^{(s)}(r) (l \neq m)$ は $x^{1/2+\mu} (x=r-r_m)$ のべきから始まるので $l \neq m$ について $Y_l(r) = Y_l^{(s)}(r) + Y_l^{(a)}(r)$ は $r=r_m$ で連続である。したがって、 $\vec{Y}(r)$ の $r=r_m$ の境界条件として

$Y_m(r)$ について自然境界条件

$Y_l(r) (l \neq m)$ について連続条件

を課せばよいことが分る。また、以上の議論から分るように $\mu > 1/2$ の場合、 $Y_m(r)$ の特異部分は $x^{-1/2+\mu}$ のべきから始まるので特異成分は $r=r_m$ でゼロになり $Y_m(r)$ は $r=r_m$ で角 (かど) を持つ連続解のように見える (図 10、図 11、図 17 参照)。

Part II

数値計算法

7 混成有限要素法

式(4.31)、(6.1)に有限要素法を適用して固有値問題を導く際、混成有限要素法を用いる。 r -方向のグリッド(節点)を

$$0 = r_1 < r_2 \cdots < r_M = \text{有理面} < r_{M+1} \cdots < r_{N+1} = 1 \quad (7.1)$$

とする。 r -方向の積分を行う評価点は

$$r_{j+1/2} = \frac{r_j + r_{j+1}}{2} \quad (\text{評価点}) \quad (7.2)$$

である。未知のベクトル関数 \vec{X} を

$$\vec{X}(r) = (\cdots, X_{-1}(r), X_0(r), X_1(r), X_2(r), \cdots)^T \quad (7.3)$$

とし、エネルギー積分 W 、ラグランジアン密度 \mathcal{L} が

$$W = \int \mathcal{L} dr \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \langle \partial_r \vec{X} | A | \partial_r \vec{X} \rangle + \langle \partial_r \vec{X} | B^\dagger | \vec{X} \rangle \\ & + \langle \vec{X} | B | \partial_r \vec{X} \rangle + \langle \vec{X} | C | \vec{X} \rangle \end{aligned} \quad (7.5)$$

で与えられる場合を考える。混成有限要素法の基底関数 $e_{j+1/2}(r)$ は

$$e_{j+1/2}(r) = \begin{cases} 1 & (r_j \leq r \leq r_{j+1}) \\ 0 & (r < r_j, r > r_{j+1}) \end{cases} \quad (7.6)$$

であり、 $\vec{X}(r)$ 、 $\partial_r \vec{X}(r)$ は

$$\vec{X}(r) = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{X}_j + \vec{X}_{j+1}}{2} e_{j+1/2}(r) \quad (7.7)$$

$$\partial_r \vec{X}(r) = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{X}_{j+1} - \vec{X}_j}{\Delta r_{j+1/2}} e_{j+1/2}(r) \quad (7.8)$$

と表される。ここで

$$\Delta r_{j+1/2} \equiv r_{j+1} - r_j \quad (7.9)$$

である。また

$$A_{j+1/2} = A(r_{j+1/2}) \quad (7.10)$$

$$B_{j+1/2} = B(r_{j+1/2}) \quad (7.11)$$

$$C_{j+1/2} = C(r_{j+1/2}) \quad (7.12)$$

とおくと、行列 A 、 B 、 C は

$$A(r) = \sum_{j=1}^N A_{j+1/2} e_{j+1/2}(r) \quad (7.13)$$

$$B(r) = \sum_{j=1}^N B_{j+1/2} e_{j+1/2}(r) \quad (7.14)$$

$$C(r) = \sum_{j=1}^N C_{j+1/2} e_{j+1/2}(r) \quad (7.15)$$

と近似的に表現される。これらのことを用いると式(7.4)の各項は

$$\int \langle \vec{X} | C | \vec{X} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \vec{X}_j + \vec{X}_{j+1} | C_{\Delta} | \vec{X}_j + \vec{X}_{j+1} \rangle \quad (7.16)$$

$$= \sum_{j=1}^N \{ \langle \vec{X}_j | C_{\Delta} | \vec{X}_j \rangle + \langle \vec{X}_{j+1} | C_{\Delta} | \vec{X}_j \rangle \\ + \langle \vec{X}_j | C_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} \rangle + \langle \vec{X}_{j+1} | C_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} \rangle \} \quad (7.17)$$

$$C_{\Delta} = \frac{C_{j+1/2}}{4} \Delta r_{j+1/2} \quad (7.18)$$

$$\int \langle \partial_r \vec{X} | A | \partial_r \vec{X} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \vec{X}_{j+1} - \vec{X}_j | A_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} - \vec{X}_j \rangle \quad (7.19)$$

$$= \sum_{j=1}^N \{ \langle \vec{X}_{j+1} | A_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} \rangle - \langle \vec{X}_j | A_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} \rangle \\ - \langle \vec{X}_{j+1} | A_{\Delta} | \vec{X}_j \rangle + \langle \vec{X}_j | A_{\Delta} | \vec{X}_j \rangle \} \quad (7.20)$$

$$A_{\Delta} = \frac{A_{j+1/2}}{\Delta r_{j+1/2}} \quad (7.21)$$

$$\int \langle \vec{X} | B | \partial_r \vec{X} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \vec{X}_j + \vec{X}_{j+1} | B_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} - \vec{X}_j \rangle \quad (7.22)$$

$$= \sum_{j=1}^N \{ \langle \vec{X}_j | B_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} \rangle + \langle \vec{X}_{j+1} | B_{\Delta} | \vec{X}_{j+1} \rangle \\ - \langle \vec{X}_j | B_{\Delta} | \vec{X}_j \rangle - \langle \vec{X}_{j+1} | B_{\Delta} | \vec{X}_j \rangle \} \quad (7.23)$$

$$B_{\Delta} = \frac{B_{j+1/2}}{2} \quad (7.24)$$

$$\int \langle \partial_r \vec{X} | B^{\dagger} | \vec{X} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \vec{X}_{j+1} - \vec{X}_j | B_{\Delta}^{\dagger} | \vec{X}_j + \vec{X}_{j+1} \rangle \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^N \{ \langle \vec{X}_{j+1} | B_{\Delta}^{\dagger} | \vec{X}_j \rangle - \langle \vec{X}_j | B_{\Delta}^{\dagger} | \vec{X}_j \rangle \\
 &\quad + \langle \vec{X}_{j+1} | B_{\Delta}^{\dagger} | \vec{X}_{j+1} \rangle \\
 &\quad - \langle \vec{X}_j | B_{\Delta}^{\dagger} | \vec{X}_{j+1} \rangle \} \tag{7.26}
 \end{aligned}$$

$$B_{\Delta}^{\dagger} = \frac{B_{j+1/2}^{\dagger}}{2} \tag{7.27}$$

となる。ベクトル \mathbf{Z} を

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X_{0,1} \\ X_{1,1} \\ X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{0,N+1} \\ X_{1,N+1} \\ X_{2,N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 \\ \vdots \\ \vec{X}_{N+1} \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

とすると、式(7.4)は、未知ベクトルに対するエルミートな2次形式

$$W = \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} \tag{7.29}$$

に表せる。ここで \mathbf{A} はエルミートな三重対角ブロック行列である。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N-1,N-2} & A_{N-1,N-1} & A_{N-1,N} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{N,N-1} & A_{N,N} & A_{N,N+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & A_{N+1,N} & A_{N+1,N+1} \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

行列 \mathbf{A} の対角要素を格納する配列の大きさは $M^2 \times (N+1) \times 2$ (自然境界条件のときは $(M+1)^2 \times (N+1) \times 2$) である。

$$\mathbf{A} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{diagonal} \\ \text{off diagonal} \end{array} \tag{7.31}$$

\mathbf{A} の要素 $a_{i,j}$ は $M \times M$ の行列であり、次の計算を $j = 1 \sim N$ 繰り返すことにより行列 \mathbf{A} が作られる。

$$A_{j,j} = C_{\Delta} + A_{\Delta} - B_{\Delta} - B_{\Delta}^{\dagger} \tag{7.32}$$

$$A_{j+1,j+1} = C_{\Delta} + A_{\Delta} + B_{\Delta} + B_{\Delta}^{\dagger} \tag{7.33}$$

$$A_{j,j+1} = C_{\Delta} - A_{\Delta} + B_{\Delta} - B_{\Delta}^{\dagger} \tag{7.34}$$

$$A_{j+1,j} = C_{\Delta} - A_{\Delta} - B_{\Delta} + B_{\Delta}^{\dagger} \tag{7.35}$$

ここで

$$(B_{\Delta} - B_{\Delta}^{\dagger})^{\dagger} = -B_{\Delta} + B_{\Delta}^{\dagger} \quad (7.36)$$

より

$$A_{j,j+1} = A_{j+1,j} \quad (7.37)$$

となる (エルミート性)。

8 ポテンシャル・エネルギー行列

上下対称の場合のポテンシャル・エネルギー式の場合を考える。

$$-\frac{d}{dr}\hat{M}_H = \mathcal{M} \quad (\mathcal{M}: \text{対角行列}) \quad (8.1)$$

とおき

$$\hat{K}_{j+1/2} = \hat{K}(r_{j+1/2}) \quad (8.2)$$

$$D_{j+1/2} = D(r_{j+1/2}) \quad (8.3)$$

$$L_{j+1/2} = L(r_{j+1/2}) \quad (8.4)$$

$$M_{O,j+1/2} = M_O(r_{j+1/2}) \quad (8.5)$$

$$M_{O,j+1/2}^{\dagger} = M_O^{\dagger}(r_{j+1/2}) \quad (8.6)$$

$$\mathcal{M}_{j+1/2} = \mathcal{M}(r_{j+1/2}) \quad (8.7)$$

とおく。前章の結果を適用して、ポテンシャル・エネルギー式の各項は

$$\int \langle \vec{Y} | \frac{\hat{K}(r)}{r^2} | \vec{Y} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \vec{Y}_j + \vec{Y}_{j+1} | K_{\Delta} | \vec{Y}_j + \vec{Y}_{j+1} \rangle \quad (8.8)$$

$$K_{\Delta} = \frac{\hat{K}_{j+1/2}}{4r_{j+1/2}^2} \Delta r_{j+1/2} \quad (8.9)$$

$$\int \langle \partial_r \hat{Y} | DLD | \partial_r \hat{Y} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \hat{Y}_{j+1} - \hat{Y}_j | L_{\Delta} | \hat{Y}_{j+1} - \hat{Y}_j \rangle \quad (8.10)$$

$$L_{\Delta} = \frac{D_{j+1/2} L_{j+1/2} D_{j+1/2}}{\Delta r_{j+1/2}^2} \Delta r_{j+1/2} \quad (8.11)$$

$$\int \langle \vec{Y} | M_O D | \partial_r \hat{Y} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \vec{Y}_j + \vec{Y}_{j+1} | M_{\Delta} | \hat{Y}_{j+1} - \hat{Y}_j \rangle \quad (8.12)$$

$$M_{\Delta} = \frac{M_{O,j+1/2} D_{j+1/2}}{2\Delta r_{j+1/2}} \Delta r_{j+1/2} \quad (8.13)$$

$$\int \langle \partial_r \hat{Y} | D M_{\Delta}^{\dagger} | \vec{Y} \rangle dr = \sum_{j=1}^N \langle \hat{Y}_{j+1} - \hat{Y}_j | M_{\Delta}^{\dagger} | \vec{Y}_j + \vec{Y}_{j+1} \rangle \quad (8.14)$$

$$M_{\Delta}^{\dagger} = \frac{D_{j+1/2} M_{\Delta, j+1/2}^{\dagger}}{2 \Delta r_{j+1/2}} \Delta r_{j+1/2} \quad (8.15)$$

$$\int |\partial_r Y_0|^2 dr = \sum_{j=1}^N \langle Y_{0, j+1} - Y_{0, j} | R_{\Delta} | Y_{0, j+1} - Y_{0, j} \rangle \quad (8.16)$$

$$R_{\Delta} = \frac{1}{\Delta r_{j+1/2}} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \int \langle \hat{Y} | -\frac{d}{dr} \hat{M}_H | \hat{Y} \rangle dr &= \int \langle \hat{Y} | \mathcal{M} | \hat{Y} \rangle dr \\ &= \sum_{j=1}^N \langle \hat{Y}_j + \hat{Y}_{j+1} | \mathcal{M}_{\Delta} | \hat{Y}_j + \hat{Y}_{j+1} \rangle \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\mathcal{M}_{\Delta} = \frac{M_{j+1/2}}{4} \Delta r_{j+1/2} \quad (8.19)$$

となる。 $\vec{Y}(r) = (\dots, Y_{-1}(r), Y_0(r), Y_1(r), Y_2(r), \dots)^T$ とすると、行列 K_{Δ} は $M \times M$ であり、行列 L_{Δ} は $(M-1) \times (M-1)$ で

$$\langle \hat{Y} | L_{\Delta} | \hat{Y} \rangle = \langle \vec{Y} | L'_{\Delta} | \vec{Y} \rangle \quad (8.20)$$

$$L'_{\Delta} = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & L_{\Delta} & \vdots & L_{\Delta} & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & L_{\Delta} & \vdots & L_{\Delta} & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

行列 M_{Δ} は $M \times (M-1)$ で

$$\langle \vec{Y} | M_{\Delta} | \hat{Y} \rangle = \langle \vec{Y} | M'_{\Delta} | \vec{Y} \rangle \quad (8.22)$$

$$M'_{\Delta} = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & M_{\Delta} & \vdots & M_{\Delta} & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

行列 M_{Δ}^{\dagger} は $(M-1) \times M$ で

$$\langle \hat{Y} | M_{\Delta}^{\dagger} | \vec{Y} \rangle = \langle \vec{Y} | M_{\Delta}^{\dagger} | \vec{Y} \rangle \quad (8.24)$$

$$M_{\Delta}^{\dagger} = \begin{pmatrix} & M_{\Delta}^{\dagger} & \\ 0 & \dots & 0 \\ & M_{\Delta}^{\dagger} & \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

行列 R_Δ は 1×1 で

$$\langle Y_0 | R_\Delta | Y_0 \rangle = \langle \vec{Y} | R_\Delta' | \vec{Y} \rangle \quad (8.26)$$

$$R_\Delta' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_\Delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

行列 M_Δ は $(M-1) \times (M-1)$ で

$$\langle \hat{Y} | M_\Delta | \hat{Y} \rangle = \langle \vec{Y} | M_\Delta' | \vec{Y} \rangle \quad (8.28)$$

$$M_\Delta' = \begin{pmatrix} \dots & & & & & \\ & M_{\Delta j,j} & & & & 0 \\ & & \dots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & M_{\Delta k,k} \\ 0 & & & & & \dots \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

と書きかえられる。行列 A は次の計算を $j = 1 \sim N$ 繰り返すことにより作られ、エルミートな行列である。

$$A_{j,j} = K_\Delta + r\hat{F}^2 L_\Delta' + \hat{F}^2(-M_\Delta' - M_\Delta^{\dagger'}) + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\hat{F}^2}{r} R_\Delta' + M_\Delta' \quad (8.30)$$

$$A_{j,j+1} = K_\Delta - r\hat{F}^2 L_\Delta' + \hat{F}^2(M_\Delta' - M_\Delta^{\dagger'}) - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\hat{F}^2}{r} R_\Delta' + M_\Delta' \quad (8.31)$$

$$A_{j+1,j} = K_\Delta - r\hat{F}^2 L_\Delta' + \hat{F}^2(-M_\Delta' + M_\Delta^{\dagger'}) - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\hat{F}^2}{r} R_\Delta' + M_\Delta' \quad (8.32)$$

$$A_{j+1,j+1} = K_\Delta + r\hat{F}^2 L_\Delta' + \hat{F}^2(M_\Delta' + M_\Delta^{\dagger'}) + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\hat{F}^2}{r} R_\Delta' + M_\Delta' \quad (8.33)$$

ここで

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & M_\Delta & \\ 0 & & \end{pmatrix}^\dagger + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & -M_\Delta^{\dagger'} \\ & & \end{pmatrix}^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & M_\Delta^{\dagger'} \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & -M_\Delta & \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.34)$$

より

$$a_{j,j+1} = a_{j+1,j} \quad (8.35)$$

となる (エルミート性)。ベクトル \mathbf{Z} を

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Y_{0,1} \\ Y_{1,1} \\ Y_{2,1} \\ \vdots \\ Y_{0,N+1} \\ Y_{1,N+1} \\ Y_{2,N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_1 \\ \vdots \\ \vec{Y}_{N+1} \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

として、ポテンシャル・エネルギー W_p は

$$W_p = 2\pi^2 \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} \quad (8.37)$$

と表せる。

9 運動エネルギー行列

式 (6.1) の運動エネルギー W_k は

$$W_k = 2\pi^2 \lambda \sum_m \sum_{j=1}^N \langle Y_{m,j} + Y_{m,j+1} | Q_{m\Delta} | Y_{m,j} + Y_{m,j+1} \rangle \quad (9.1)$$

$$Q_{m\Delta} = \frac{\rho_m(r_{j+1/2})}{4} \Delta r_{j+1/2} \quad (9.2)$$

ここで

$$\sum_m \langle Y_m | Q_{m\Delta} | Y_m \rangle = \langle \vec{Y} | Q'_{m\Delta} | \vec{Y} \rangle \quad (9.3)$$

$$Q_{m\Delta}' = \begin{pmatrix} Q_{0\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{1\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{2\Delta} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

と置きかえられる。 W_k は

$$W_k = 2\pi^2 \lambda \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{Z} \quad (9.5)$$

と表せる。 \mathbf{B} は \mathbf{A} と同様の方法で作ることができ、正值なエルミートな三重対角ブロック行列である。

ポテンシャル・エネルギー (8.37) および運動エネルギー (9.5) より固有方程式は

$$\mathbf{A} \mathbf{Z} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{Z} \quad (9.6)$$

となる。

10 境界条件の処理

有理面を $q(r_J) = m/n$ とするとき、 $Y_m(r)$ における節点 $Y_{m,J}$ を $Y_{m,JL}, Y_{m,JR}$ として、その結合をはずすことにより自然境界を課す。

j 回めの上書き $A_{j,j}, A_{j,j+1}, A_{j+1,j}, A_{j+1,j+1}$ は $M \times M$ のブロックであるが、 $(J-1)$ 回めの上書きは

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & 0, J-1 & 1, J-1 & 2, J-1 & \cdots & 0, J & 1, JL & 1, JR & 2, J & \cdots & & \\ \cdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ & a & a & a & \cdots & a & a & 0 & a & \cdots & & 0, J-1 \\ & a & a & a & & a & a & 0 & a & & & 1, J-1 \\ & a & a & a & & a & a & 0 & a & & & 2, J-1 \\ & & & & \cdots & & & & & & & \vdots \\ & a & a & a & & a & a & 0 & a & & & 0, J \\ & a & a & a & & a & a & 0 & a & & & 1, JL \\ & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 1, JR \\ & a & a & a & & a & a & 0 & a & & & 2, J \\ & & & & & & & & & \cdots & & \vdots \end{array} \right) \quad (10.1)$$

J 回めの上書きは

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & & & & & 0, J & 1, JL & 1, JR & 2, J & \cdots & 0, J+1 & 1, J+1 & 2, J+1 & \cdots \\ \cdots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & b & 0 & b & b & \cdots & b & b & b & & 0, J \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 1, JL \\ & & & & & b & 0 & b & b & & b & b & b & & 1, JR \\ & & & & & b & 0 & b & b & & b & b & b & & 2, J \\ & & & & & & & & & \cdots & & & & & \vdots \\ & & & & & b & 0 & b & b & & b & b & b & & 0, J+1 \\ & & & & & b & 0 & b & b & & b & b & b & & 1, J+1 \\ & & & & & b & 0 & b & b & & b & b & b & & 2, J+1 \\ & & & & & & & & & \cdots & & & & & \vdots \end{array} \right) \quad (10.2)$$

とする。行列 A は、行数、列数とも $(M \times (N+1) + \text{有理面数})$ 、幅 $(M \times 2 + 1)$ の対角行列となる。行列 B も同様。

固有値問題 (9.6) において、ベクトル $Y_k(r)$ は境界条件

$$Y_{k,1} = Y_{k,N+1} = 0 \quad (10.3)$$

を満足しなければならない。この境界条件は次のようにして課することができる。上

書きの手法に従って作られた行列 A, B をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & & & & \vdots \\ 0 & & \tilde{A} & & 0 \\ \vdots & & & & A_{N,N+1} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N+1,N} & A_{N+1,N+1} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{21} & & & & \vdots \\ 0 & & \tilde{B} & & 0 \\ \vdots & & & & B_{N,N+1} \\ 0 & \cdots & 0 & B_{N+1,N} & B_{N+1,N+1} \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

とすると、それらを

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & & & \tilde{A} & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.6)$$

$$B = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & & & \\ 0 & & & \tilde{B} & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \\ & & & & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

と変更する。ここで、 ϵ は小さい正数 (コードでは $\epsilon = 10^{-5}$ に設定される) である。このように変更された行列 A, B に対しては、そのエルミート性は保存され、かつ、 $\lambda \neq \epsilon^{-1}$ の固有値 λ に属する固有関数 \vec{Y}_k は自動的に境界条件 (10.3) を満足する。そして $\lambda \neq \epsilon^{-1}$ であるかぎり、もとの固有値問題の固有値・固有ベクトルと変更された行列 A, B に対する固有値問題のそれとは一致する。

11 $m = 1$ モードに対する試行関数法

ここでは、 $m = 1$ モードに対して、固有値問題を試行関数を用いて近似的に解く方法を述べる。 r_M を $nq(r_M) = 1$ となる節点とする。 $Y_1(r)$ の推測解

$$Y_1(r_j) = \begin{cases} r_j, & r \leq r_M \\ 0, & r > r_M \end{cases} \quad (11.1)$$

を

$$\mathcal{A}\mathbf{Z} = 0 \quad (11.2)$$

に与えると、 $\dots, Y_{-1}(r_j), Y_0(r_j), Y_2(r_j), \dots$ の方程式ができる。この式の第 j 行に着目すると

$$\mathcal{A}_{j,j-1}\mathbf{Z}_{j-1} + \mathcal{A}_{j,j}\mathbf{Z}_j + \mathcal{A}_{j,j+1}\mathbf{Z}_{j+1} = 0 \quad (11.3)$$

$$\mathbf{Z}_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ Y_0(r_j) \\ Y_1(r_j) \\ Y_2(r_j) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

$$\mathcal{A}_{j,j} = \begin{pmatrix} \vdots & & & & \\ \cdots & (\mathcal{A}_{j,j})_{0,0} & (\mathcal{A}_{j,j})_{0,1} & (\mathcal{A}_{j,j})_{0,2} & \\ & (\mathcal{A}_{j,j})_{1,0} & (\mathcal{A}_{j,j})_{1,1} & (\mathcal{A}_{j,j})_{1,2} & \\ & (\mathcal{A}_{j,j})_{2,0} & (\mathcal{A}_{j,j})_{2,1} & (\mathcal{A}_{j,j})_{2,2} & \cdots \\ & & & \vdots & \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

であり、 Y_1 を入れると

$$\bar{\mathcal{A}}_{j,j-1}\bar{\mathbf{Z}}_{j-1} + \bar{\mathcal{A}}_{j,j}\bar{\mathbf{Z}}_j + \bar{\mathcal{A}}_{j,j+1}\bar{\mathbf{Z}}_{j+1} = -\bar{\mathbf{b}}_j \quad (11.6)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ Y_0(r_j) \\ Y_2(r_j) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{j,j} = \begin{pmatrix} \vdots & & & & \\ \cdots & (\mathcal{A}_{j,j})_{0,0} & (\mathcal{A}_{j,j})_{0,2} & & \\ & (\mathcal{A}_{j,j})_{2,0} & (\mathcal{A}_{j,j})_{2,2} & \cdots & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

$$\vec{b}_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ (\mathcal{A}_{j,j-1})_{0,1}Y_1(r_{j-1}) + (\mathcal{A}_{j,j})_{0,1}Y_1(r_j) + (\mathcal{A}_{j,j+1})_{0,1}Y_1(r_{j+1}) \\ (\mathcal{A}_{j,j-1})_{2,1}Y_1(r_{j-1}) + (\mathcal{A}_{j,j})_{2,1}Y_1(r_j) + (\mathcal{A}_{j,j+1})_{2,1}Y_1(r_{j+1}) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

と表せ、式(11.2)は解くことができる。解 $\dots, Y_{-1}(r), Y_0(r), Y_2(r), \dots$ と推測解 $Y_1(r)$ から \mathbf{Z} を作成し、固有値

$$\lambda = \frac{(\mathbf{Z}, \mathcal{A}\mathbf{Z})}{(\mathbf{Z}, \mathcal{B}\mathbf{Z})} \quad (11.10)$$

を求める。

12 テスト計算結果

MARG2D コードの特徴は、プラズマが理想 MHD 的に安定な場合でも、安定側の固有値が計算でき、したがって、臨界安定を同定できることである。テスト計算では、ERATOJ コードと比較しながら、それを検証した。また、式 (5.40) に基づくメルシエ指数を従来の計算方法に基づく計算結果 (インターフェイスで計算される) と比較して、本研究で行った定式化を検証した。また、メルシエ指数は、将来、MARG2D コードを 2 次元外部領域接続データの計算コードに拡張する上で重要な役割を果たす。6.2 節でも述べたようにメルシエ指数は、固有関数の有理面における挙動を決定する。テスト計算では、このメルシエ指数と固有関数の挙動との関係にも着目する。

$m = 1$ 内部キンク・モードでは、従来、ポテンシャル・エネルギー (固有値) を評価する方法として、試行関数法がよく知られている。テスト計算を行って、この試行関数法の妥当性を調べる。

MARG2D コードでは変位関数 $Y(r, \theta)$ をポロイダル方向にフーリエ級数展開し、径方向について混成有限要素法を適用している。一方、ERATOJ コードではフーリエ級数展開を用いず、両方向とも混成有限要素法を適用している。テスト計算では、固有値のグリッド数およびフーリエモード数に対する依存性を調べ、両コードの収束特性を比較した。

なお、テスト計算では、解析平衡 (Solovév 平衡) と平衡コード SELENEJ より求めた数値平衡を用いた。解析平衡は数値誤差を考慮する必要がないので MARG2D コードの数値的な特性を調べるのに適する。一方、実際の安定性解析では数値平衡を用いるので、ERATOJ との比較には数値平衡を用いる。

Solovév 平衡 $\psi(R, Z)$ は次式で与えられる:

$$\psi(R, Z) = \frac{\psi_s}{a^2 R_0^2} \left[\frac{(1-d)R^2 + dR_0^2}{E^2} Z^2 + \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{4} \right] \quad (12.1)$$

この平衡では磁気軸 ($R = R_0, Z = 0$) およびプラズマ表面における ψ の値が、それぞれ、ゼロおよび ψ_s になっている。また、圧力 p 、トロイダル磁場関数 F は

$$p(\psi) = \frac{1}{\mu_0} \frac{2d\psi_s}{a^2 R_0^2} \left(1 + \frac{1-d}{E^2} \right) (\psi_s - \psi) \quad (12.2)$$

$$F^2(\psi) = (R_0 B_t)^2 - \frac{2d\psi_s}{a^2 E^2} \psi \quad (12.3)$$

である (B_t : 磁気軸でのトロイダル磁場)。 ψ_s は磁気軸での安定係数 q_0 を用いて

$$\psi_s = \frac{a^2 E}{2q_0} B_t \quad (12.4)$$

で表される。Solovév 平衡 (12.1)、(12.2)、(12.3) は、プラズマの形状を決定するパラメータ、すなわち、主半径 R_M 、小半径 r_p 、楕円度 E および三角度 d と、磁気軸でのトロイダル磁場 B_t と安全係数 q_0 によって決定される。

なお、以下のテスト計算ではトロイダル・モード数はすべて $n = 1$ である。

12.1 磁気面が円の場合の Solovév 平衡のテスト (有理面 $q = 1$)

テスト計算に用いるインターフェイスのパラメータは

$$\begin{aligned} RMSOL(R_M) &= 0.93417, & RPSOL(r_p) &= 0.35682, \\ ESOL(E) &= 1.0, & DSOL(d) &= 0.0, & QOSOL(q_0) &= 0.8, \\ NPSI &= 100, & NCHI &= 128, & NR = NZ &= 257 \end{aligned}$$

である。このときの、磁気面 $(R(r, \theta), Z(r, \theta))$ を図 1 に、 $p(r)$ と $q(r)$ を図 2 に示す。また、MARG2D はすべてモード数 = 16 ($m = -16 \sim 16$) で計算した。

1. メルシエ指数の比較

図 3 で実線はインターフェイスで計算したメルシエ指数である。また、 Δ 印は MARG2D で式 (5.40) により求めた $q = 1$ の有理面 ($s = 0.6892569$) でのメルシエ指数を示している。その値は

$$\mu = 0.65642942$$

であり、インターフェイスで計算した値とよく一致している。

2. 固有値のテスト

固有値の計算においては、行列要素の精度をあげるため、 $NR = NZ = 513$ とした。図 4、5 は、それぞれ、第 1 固有関数 ($\lambda = 1.9382825$) および第 2 固有関数 ($\lambda = 5.2720460$) の各フーリエ成分 $Y_m(r)$ を示す (実線)。なお、点線は $q(r)$ である。第 1 固有関数の $Y_1(r)$ は $q(r) < 1$ の領域で、ほぼ直線であり、 $q(r) > 1$ では早く減衰するという $m = 1$ モードの特徴をよく捉えている。また、 $\mu > 0.5$ であるため、 $Y_1(r)$ は有理面 $q = 1$ で連続に見える。また、第 2 固有関数は、 $0 < r < 1$ で $Y_1(r) = 0$ となる節点を 1 つ持つ。

図 6 は、試行関数法により求めた固有関数を示す。このときの固有値の近似値は

$$\lambda = 2.7066746$$

である。逆アスペクト比 $\epsilon (= 1/3)$ が大きいことを考慮すると、この値は真の固有値の近似値を与えているとみなせる。

12.2 磁気面が楕円の場合の Solovév 平衡のテスト (有理面 $q = 1$)

テスト計算に用いるインターフェイスのパラメータは

$$\begin{aligned} RMSOL(R_M) &= 0.93417, & RPSOL(r_p) &= 0.35682, \\ ESOL(E) &= 1.2, & DSOL(d) &= 0.0, & QOSOL(q_0) &= 0.8, \\ NPSI &= 100, & NCHI &= 128, & NR = NZ &= 257 \end{aligned}$$

である。このときの、磁気面 ($R(r, \theta), Z(r, \theta)$) を図 7 に、 $p(r)$ と $q(r)$ を図 8 に示す。また、MARG2D はすべてモード数 = 16 ($m = -16 \sim 16$) で計算した。

1. メルシエ指数の比較

図 9 で実線はインターフェイスで計算したメルシエ指数である。また、 Δ 印は MARG2D で式 (5.40) により求めた $q = 1$ の有理面 ($s = 0.6892569$) でのメルシエ指数を示している。その値は

$$\mu = 0.54737995$$

であり、インターフェイスで計算した値とよく一致している。

2. 固有値のテスト

固有値の計算においては、行列要素の精度をあげるため、 $NR = NZ = 513$ とした。図 10、11 は、それぞれ、第 1 固有関数 ($\lambda = 1.4168502$) および第 2 固有関数 ($\lambda = 5.0417612$) の各フーリエ成分 $Y_m(r)$ を示す (実線)。なお、点線は $q(r)$ である。図 4 の場合と同様に、第 1 固有関数の $Y_1(r)$ は $q(r) < 1$ の領域で、ほぼ直線であり、 $q(r) > 1$ では早く減衰するという $m = 1$ モードの特徴をよく捉えている。しかし、 $\mu \sim 0.5$ であるため、有理面における $Y_1(r)$ の特異な挙動が現れている。また、第 2 固有関数は、 $0 < r < 1$ で $Y_1(r) = 0$ となる節点を 1 つ持つ。

図 12 は、試行関数法により求めた固有関数を示す。この場合、固有値の近似値は

$$\lambda = 1.7816983$$

であり、図 6 の場合よりも真の固有値に近い値が得られた。

3. 固有値の収束

円形断面平衡 (図 1)、楕円断面平衡 (図 7) の固有値のグリッド数 (NR) 依存性を図 13 に、モード数依存性 ($\log |\lambda_\infty - \lambda|$) を図 14 に示す。円形断面、楕円断面の場合について、それぞれ

$$\lambda_\infty = \lambda_{M=64} = 1.938197034004673$$

$$\lambda_\infty = \lambda_{M=64} = 1.416831089155400$$

として計算した。○印は円 ($ESOL = 1.0$) を、 Δ 印は楕円 ($ESOL = 1.2$) を表す。これから固有値は NR については逆 2 乗収束であり、モード数については、逆 2 乗より早い exp 型であることが分る。

12.3 磁気面が楕円の場合の Solovév 平衡のテスト (有理面 $q = 2$)

次に、 $q = 2$ の有理面を持つ Solovév 平衡を用いて、 $m = 1$ モード以外のモードについてテストを行う。テスト計算に用いるインターフェイスのパラメータは

$$\begin{aligned} RMSOL(R_M) &= 0.93417, & RPSOL(r_p) &= 0.35682, \\ ESOL(E) &= 1.2, & DSOL(d) &= 0.0, & QOSOL(q_0) &= 1.5, \\ NPSI &= 100, & NCHI &= 128, & NR = NZ &= 513 \end{aligned}$$

である。このときの磁気面 ($R(s, \theta), Z(s, \theta)$) を図 15 に、 $p(s)$ と $q(s)$ を図 16 に示す。図 16 から分るように、この平衡は $q = 2$ だけの有理面を持つ。また、MARG2D はすべてモード数 = 16 ($m = -16 \sim 16$) で計算した。固定境界条件のもとでは $n = 1$ の理想 MHD モードは安定であるため、従来の ERATOJ では TAE モードを除いて、安定性を判定するための固有値計算は不可能である。

図 17 は、第 1 固有関数 ($\lambda = 0.67863555$ 、 $\mu = 1.0754563$) の各フーリエ成分 $Y_m(r)$ (実線) と $q(r)$ (点線) を示す。この場合、 $\mu > 0.5$ であるので $m = 2$ のフーリエ成分は連続になっている。

固有値のグリッド数依存性を図 18 に、モード数依存性を図 19 に示す。なお

$$\lambda_\infty = \lambda_{M=64} = 0.67863496455285$$

とした。

12.4 磁気面が円の場合の数値平衡のテスト

テスト計算に用いる上下対称 SELENEJ のパラメータは

$$NR = NZ = 513$$

インターフェイスのパラメータは

$$NAN = 10$$

MARG2D のパラメータは

$$NR = 200, \quad \text{モード数} = 16$$

ERATOJ のパラメータは

$$NPSI = 200, \quad NCHI = 60$$

である。 $\beta_J = 1.0$ の場合の磁気面 ($R(s, \theta), Z(s, \theta)$) および $p(s)$ と $q(s)$ をそれぞれ図 20、図 21 に示す。

図 22では、 β_J の増加とともに、固有値 λ が安定側 ($\lambda > 0$) から不安定側 ($\lambda < 0$) に、滑らかに変化する様子がよく捉えられている。この図より β_J の安定限界値 $\beta_{J,\text{lim}}$ が、 $q_0 = 0.6$ および $q_0 = 0.9$ に対して、それぞれ

$$\beta_{J,\text{lim}} = 1.1 \text{ および } \beta_{J,\text{lim}} = 0.6$$

と同定できる。一方、ERATOJでは安定側の固有値を得ることができない。図 23 および図 24にそれぞれ $q_0 = 0.6$ および $q_0 = 0.9$ の場合の ERATOJ で求めた固有値の β_J 依存性を示す (●印)。比較のため、MARG2Dより求めた固有値も示した (○印)。ERATOJでは β_J の値がそれ以下になったとき、ほとんど変化しなくなり始める値を安定限界値に採用していた。図はその経験則の妥当性を確認している。

次に、固有値 λ の q_0 依存性を図 25に示す。 $\beta_J = 0.8$ であり、○印はMARG2Dで、●印はERATOJで求めた固有値である。これから分るようにMARG2Dコードでは q_0 の不安定領域 ($0.62 < q_0 < 0.98$) を正しく求めることができる。なお、ERATOJでは $q_0 = 0.98$ での固有値を正常に求めることができず、 $|\lambda| > 10^{-4}$ の負の固有値が得られたため、図には $q_0 = 0.98$ のときのERATOJの結果を示していない。

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときのMARG2Dで計算した第1固有関数を図 26、27(Y_1 、 Y_2 の拡大図)に示す。固有値は -0.49423218 (不安定固有値)、有理面 $q = 1, 2$ における μ は 0.49391865 、 0.51930555 である。実線は固有関数、点線は q を表す。一方、ERATOJで計算した第1固有関数を図 28、29(Y_1 、 Y_2 の拡大図)に示す。固有値は $-0.38729e-04$ (不安定固有値)である。これより、不安定固有値の場合、MARG2Dで求めた固有関数は有理面で不連続であることを除けば、両者ともトロイダル配位における $m = 1$ モードの特徴をよく捉えていることが分る。

次に、MARG2DおよびERATOJの固有値の収束特性を比較する。 $\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ の平衡について収束を調べた。MARG2Dで計算した固有値のグリッド数依存性を図 30に、モード数依存性 ($\log |\lambda_\infty - \lambda|$) を図 31に示す。このとき

$$\lambda_\infty = \lambda_{M=64} = -0.4942352151708179$$

である。ERATOJで計算した固有値のグリッド数 ($NPSI$) 依存性およびモード数依存性 ($NCHI$) をそれぞれ図 32および図 33に示す。これらは、径方向のグリッド数に対する収束性は、MARG2D、ERATOJとも逆2乗収束であるが、モード数(等価的にポロイダル方向のグリッド数)に対する収束性は、ERATOJでは逆2乗収束、MARG2Dでは、それより早いexp型であることを検証している。

12.5 磁気面が楕円の場合の数値平衡のテスト

SLENEJで求めた楕円断面平衡の磁気面 ($R(s, \theta)$, $Z(s, \theta)$) および $p(s)$ と $q(s)$ をそれぞれ図 34、図 35に示す。平衡計算およびインターフェイスのパラメータは12.4節と同じであり、また、 $\beta_J = 1.0$ である。

$q_0 = 0.6$ と $q_0 = 0.9$ のときの固有値の β_J 依存性を図 36に示す。○印は $q_0 = 0.6$ を、△印は $q_0 = 0.9$ を表す。これから得られた $m = 1$ モードに対する β_J の安定限界

値は

$$\beta_{J,\text{lim}} = 1.2 \quad (q_0 = 0.6 \text{ の場合})$$

および

$$\beta_{J,\text{lim}} = 0.55 \quad (q_0 = 0.9 \text{ の場合})$$

である。ERATOJ より求めた固有値の β_J 依存性は図 37($q_0 = 0.6$) および図 38($q_0 = 0.9$) になる (●印)。比較のため、MARG2D の結果を○印で示した。また、図 39は $\beta_J = 0.8$ の場合に、ERATOJ(●印) および MARG2D(○印) より求めた固有値の q_0 依存性を示す。ERATOJ より求めた固有値は円形断面の場合と同様の挙動を示す。また、MARG2D では、安定領域、不安定領域を明確に特定できることが分る。

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した第 1 固有関数 (実線) を図 40、41(拡大図) に示す。固有値は -0.59396895 、有理面 $q = 1, 2$ における μ は、それぞれ、 0.48016952 、 0.52519973 である。点線は q を表す。一方、ERATOJ で計算した第 1 固有関数は図 42、43(拡大図) に示される (固有値： $-0.47753e-04$)。円形断面の場合と同様、MARG2D、ERATOJ より求めた不安定固有値の固有関数は、両者とも、 $m = 1$ モードの特徴をよく捉えている。

楕円平衡 ($\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$) の場合の MARG2D の収束特性を図 44、図 45に、ERATOJ の収束特性を図 46、図 47に示す。図 45においては

$$\lambda_\infty = \lambda_{M=64} = -0.5940456553402190$$

とした。MARG2D および ERATOJ とも、円形断面平衡の場合と同じ収束特性を示していることが確認できる。

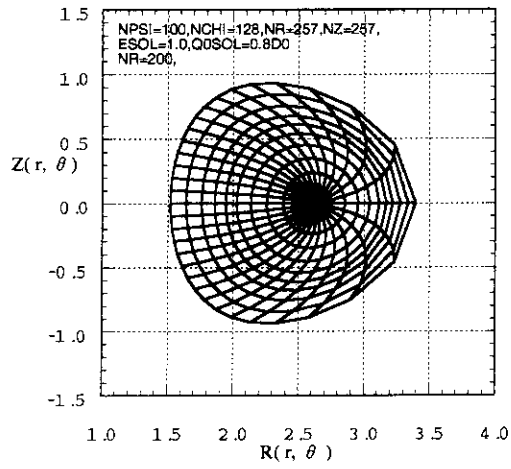


図 1:

$RMSOL(R_M) = 0.93417$ 、 $RPSOL(r_p) = 0.35682$ 、 $ESOL(E) = 1.0$ 、 $DSOL(d) = 0.0$ 、 $QOSOL(q_0) = 0.8$ のときの Solovév 平衡の磁気面。他の計算パラメータは $NPSI = 100$ 、 $NCHI = 128$ 、 $NR = NZ = 257$ である。

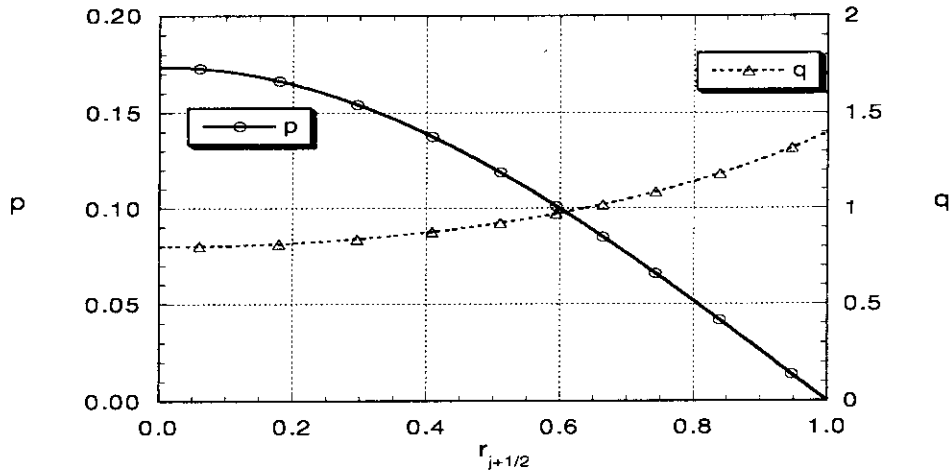


図 2:

図 1 における Solovév 平衡に対する圧力 $p(r)$ と安全係数 $q(r)$ 。

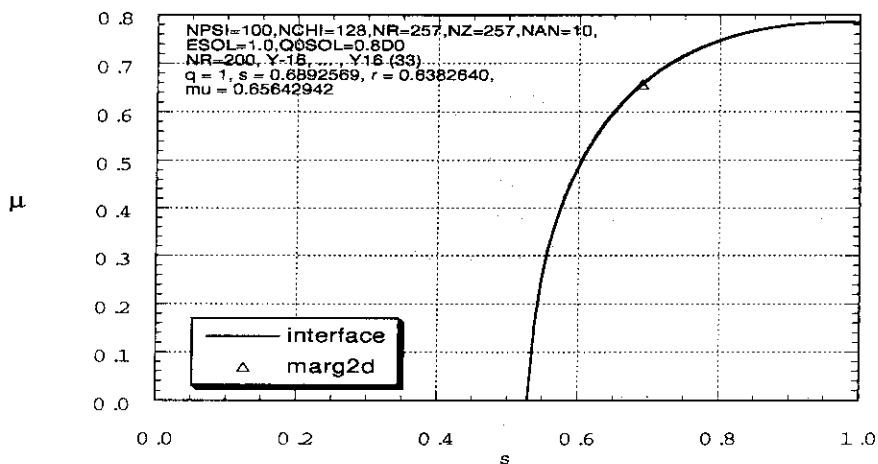


図 3:

インターフェイス (実線) と MARG2D (△印) で計算したメルシエ指数 μ 。MARG2D で求めた有理面 $q = 1$ ($s = 0.6892569$) でのメルシエ指数は $\mu = 0.65642942$ であり、これはインターフェイスで計算した値とよく一致している。

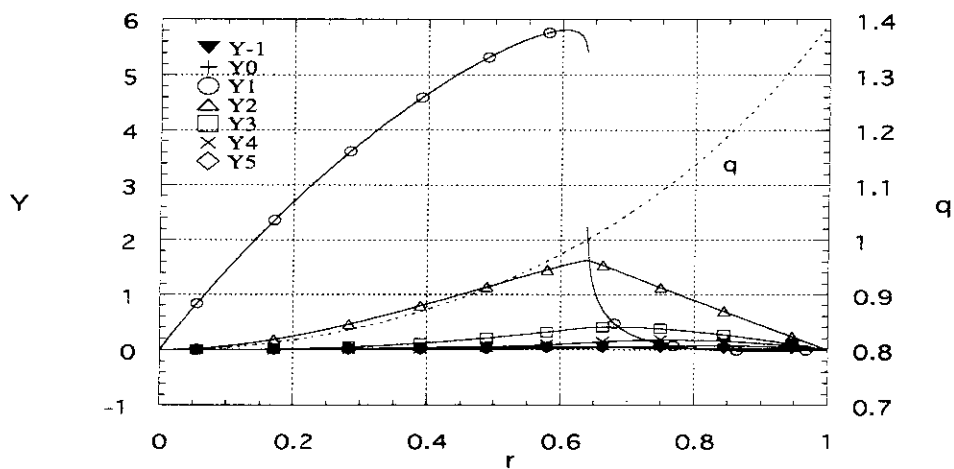


図 4:

第 1 固有関数 ($\lambda = 1.9382825$) の各フーリエ成分 $Y_m(r)$ (実線)。 $\mu > 0.5$ であるので有理面 $q = 1$ における $Y_1(r)$ は連続に見える。なお、点線は $q(r)$ を示す。

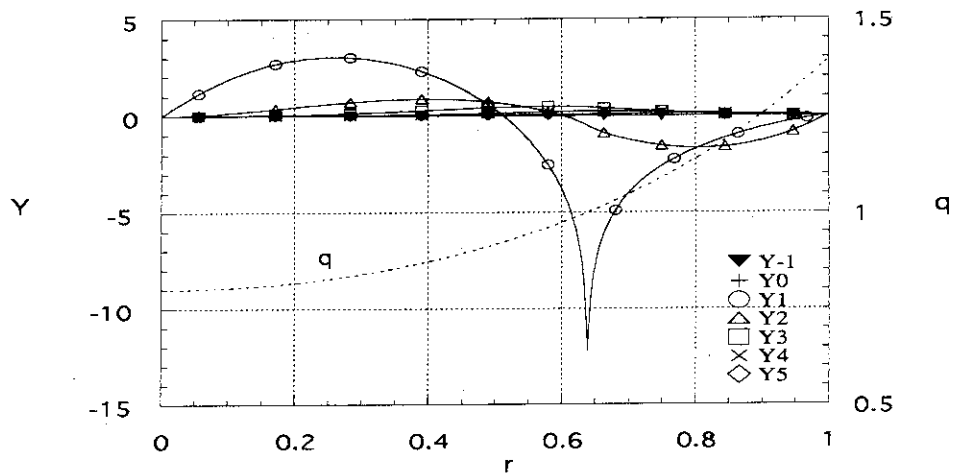


図 5:
第 2 固有関数 ($\lambda = 5.2720460$) の各フーリエ成分 $Y_m(r)$ (実線) および $q(r)$ (点線)。

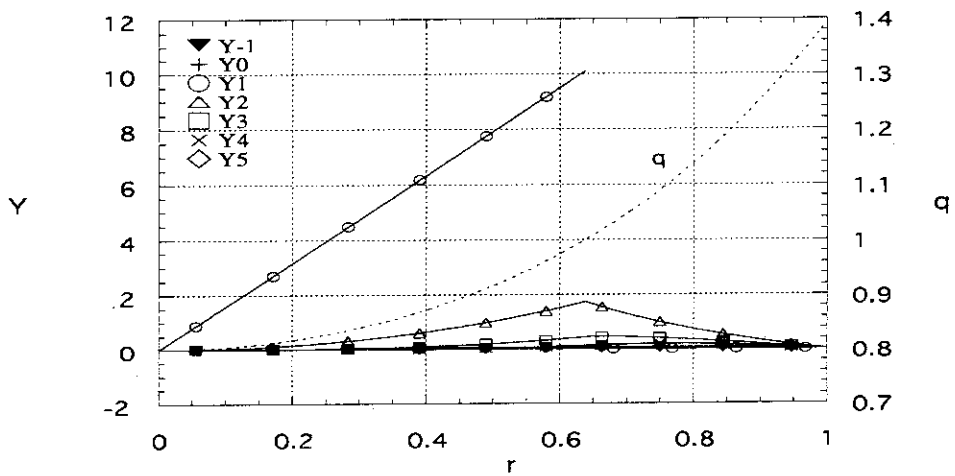


図 6:
試行関数法より求めた固有関数のフーリエ成分 $Y_m(r)$ 。固有値の近似値は

$$\lambda = 2.7066746$$

である。

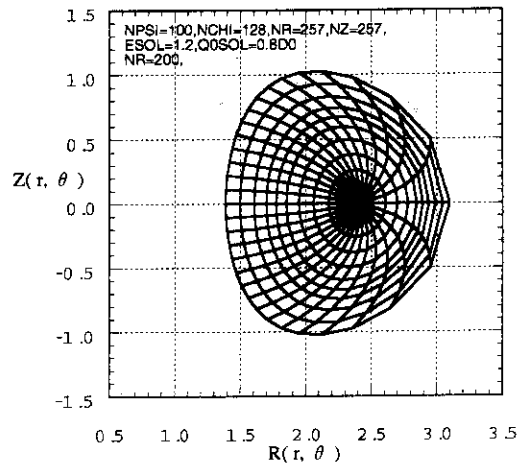


図 7:

$RMSOL(R_M) = 0.93417$, $RPSOL(r_p) = 0.35682$, $ESOL(E) = 1.2$, $DSOL(d) = 0.0$, $Q0SOL(q_0) = 0.8$ のときの Solovév 平衡の磁気面。他の計算パラメータは $NPSI = 100$, $NCHI = 128$, $NR = NZ = 257$ である。

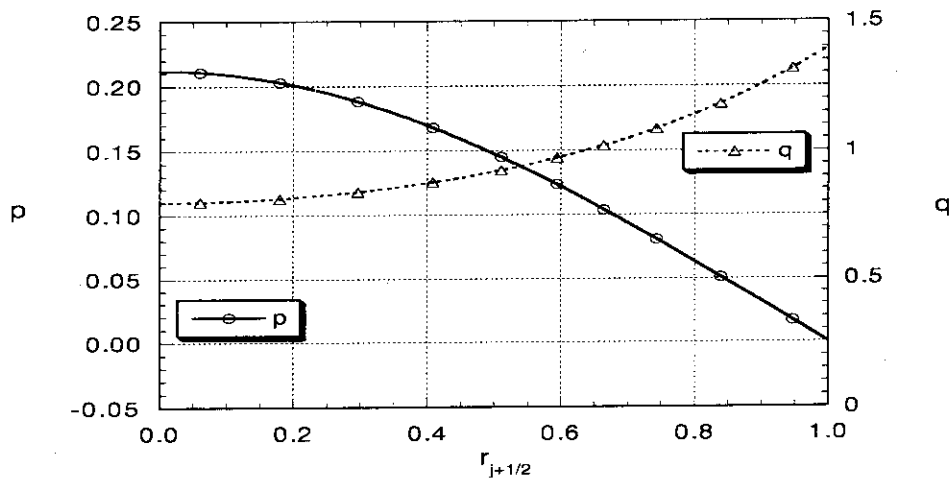


図 8:

図 7 における Solovév 平衡に対する圧力 $p(r)$ と安全係数 $q(r)$ 。

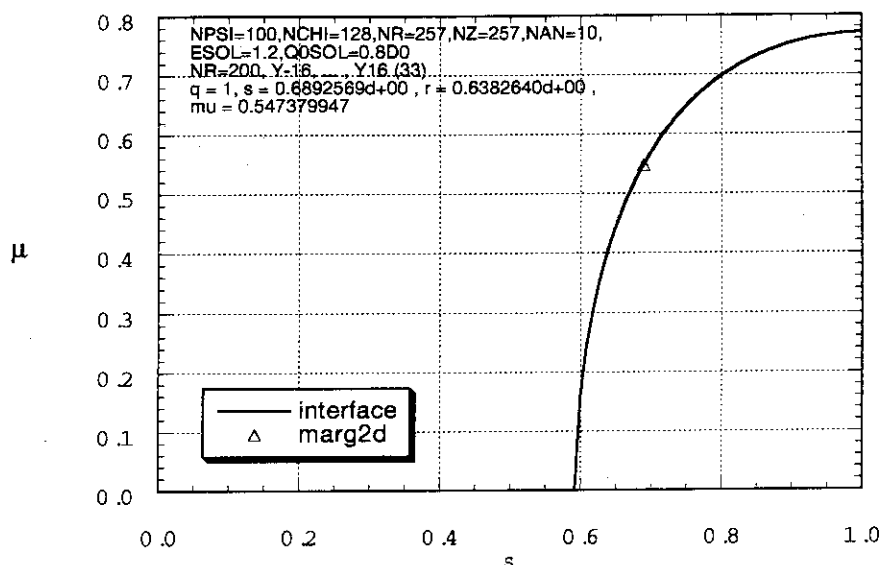


図 9:

インターフェイス(実線)とMARG2D(△印)で計算したメルシエ指数 μ 。MARG2Dで求めた有理面 $q = 1$ ($s = 0.6892569$) でのメルシエ指数は $\mu = 0.54737995$ であり、これはインターフェイスで計算した値とよく一致している。

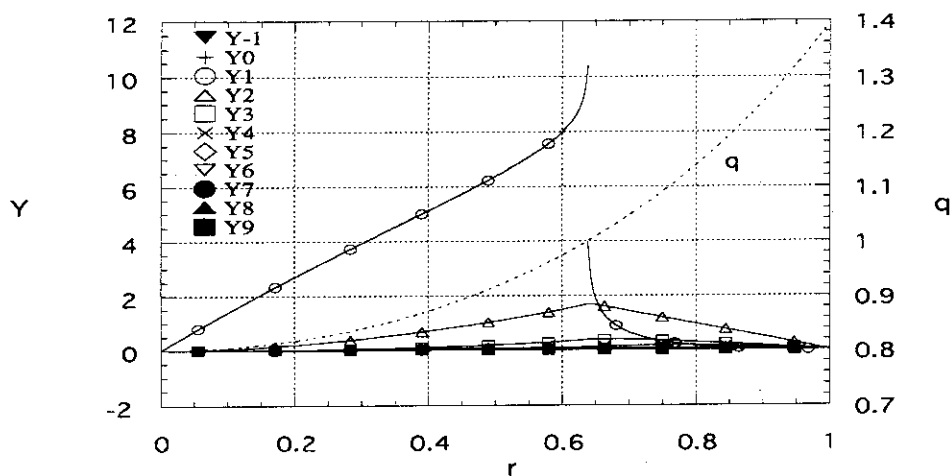


図 10:

第1固有関数 ($\lambda = 1.4168502$) の各フーリエ成分 $Y_m(r)$ (実線)。なお、点線は $q(r)$ を示す。 $Y_1(r)$ は $q(r) < 1$ の領域で、ほぼ直線であり、 $q(r) > 1$ では早く減衰するという $m = 1$ モードの特徴をよく捉えている。しかし、 $\mu \sim 0.5$ であるため、有理面における $Y_1(r)$ の特異な挙動が現れている。

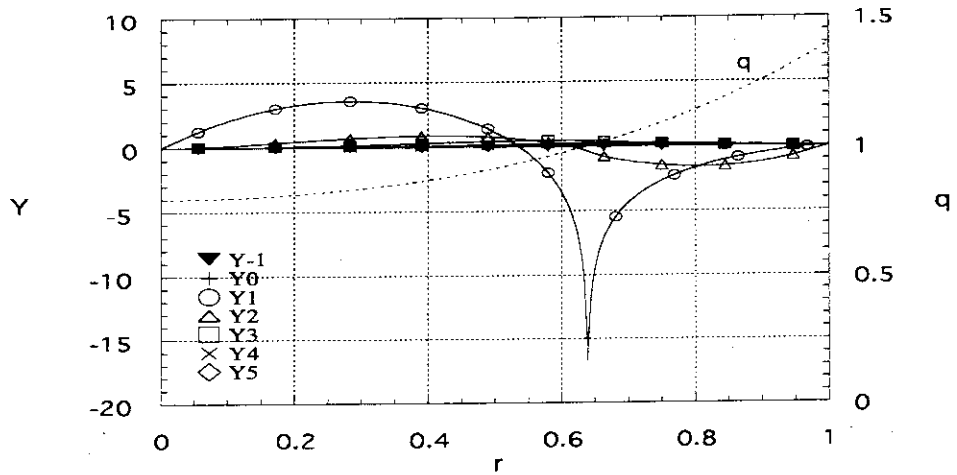


図 11:
第2固有関数 ($\lambda = 5.0417612$) の各フーリエ成分 $Y_m(r)$ (実線) および $q(r)$ (点線)。

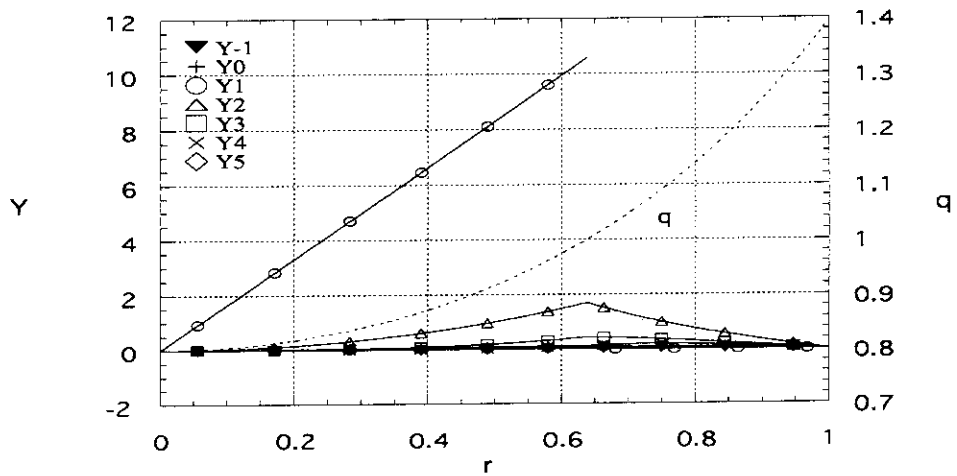


図 12:
試行関数法より求めた固有関数のフーリエ成分 $Y_m(r)$ 。固有値の近似値は

$$\lambda = 1.7816983$$

である。

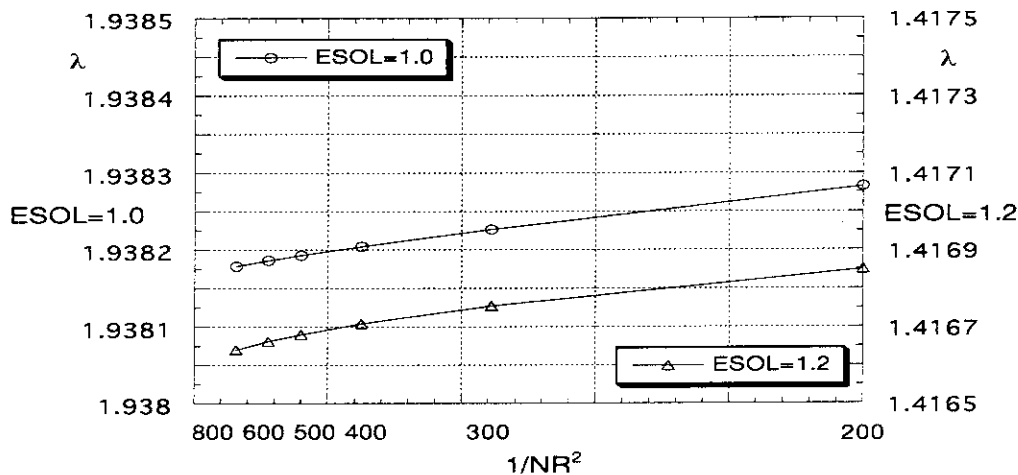


図 13:

円形断面平衡 (図 1)、楕円断面平衡 (図 7) の固有値のグリッド数依存性。これから固有値は NR については逆 2 乗収束であることが分る。

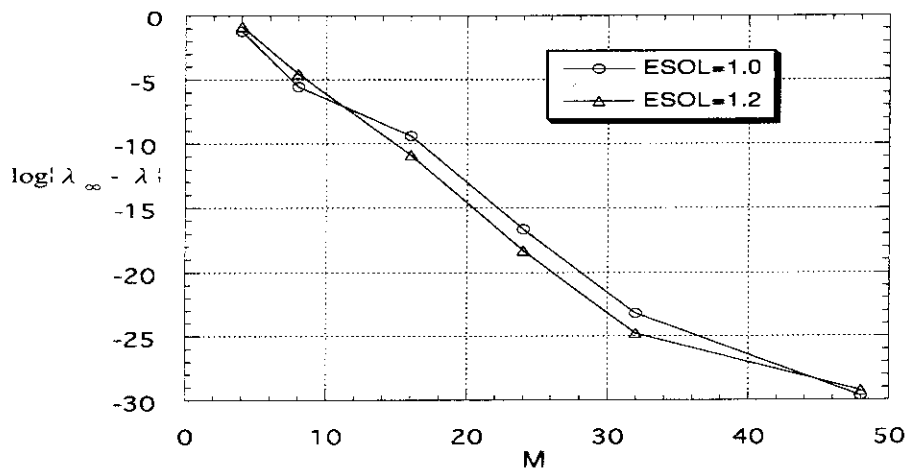


図 14:

円形断面平衡 (図 1)、楕円断面平衡 (図 7) の固有値のモード数依存性。円形断面、楕円断面の場合について、それぞれ

$$\lambda_{\infty} = \lambda_{M=64} = 1.938197034004673, \quad \lambda_{\infty} = \lambda_{M=64} = 1.416831089155400$$

として計算した。これから固有値はモード数については、逆 2 乗より早い exp 型であることが分る。

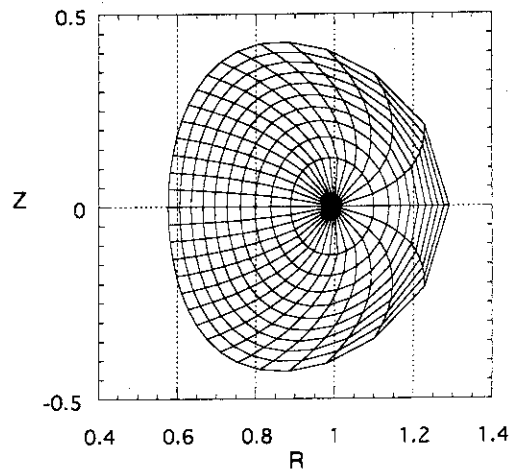


図 15:

$RMSOL(R_M) = 0.93417$ 、 $RPSOL(r_p) = 0.35682$ 、 $ESOL(E) = 1.2$ 、 $DSOL(d) = 0.0$ 、 $Q0SOL(q_0) = 1.5$ のときの Solovév 平衡の磁気面 $(R(s, \theta), Z(s, \theta))$ 。他の計算パラメータは $NPSI = 100$ 、 $NCHI = 128$ 、 $NR = NZ = 513$ である。 $q = 2$ の有理面を持つ。

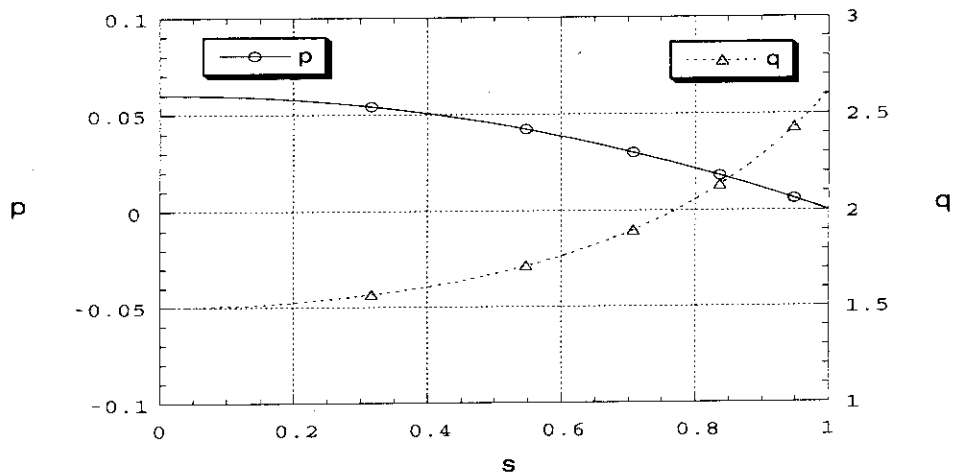


図 16:

図 15における Solovév 平衡に対する圧力 $p(s)$ と安全係数 $q(s)$ 。

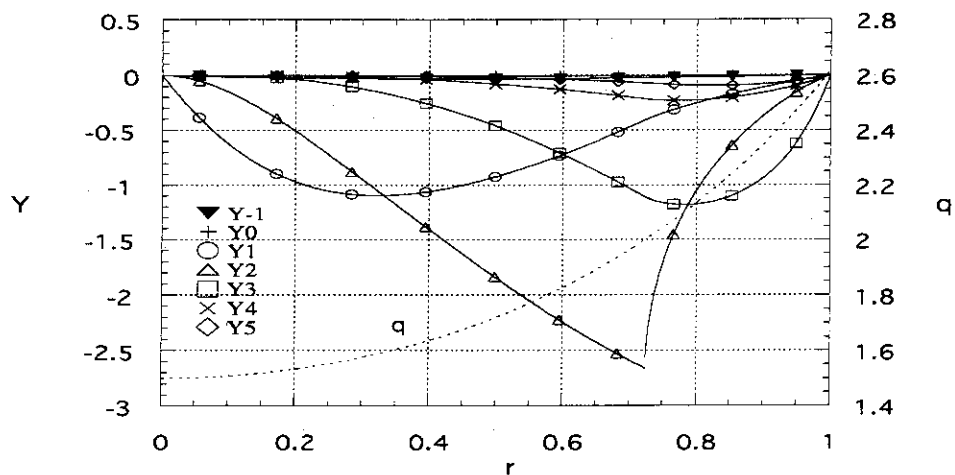


図 17:

第1固有関数。 $\lambda = 0.67863555$ 、 $\mu = 1.0754563$ 。この場合、 $\mu > 0.5$ であるので $m = 2$ のフーリエ成分は連続になっている。

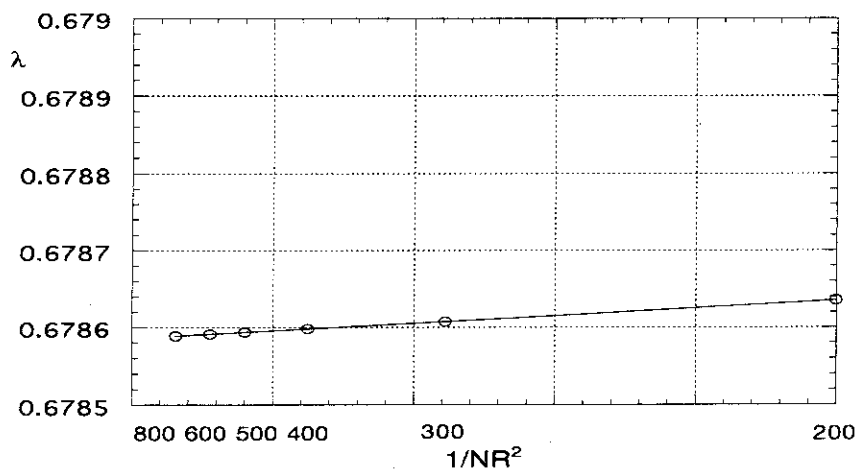


図 18:

固有値のグリッド数依存性。

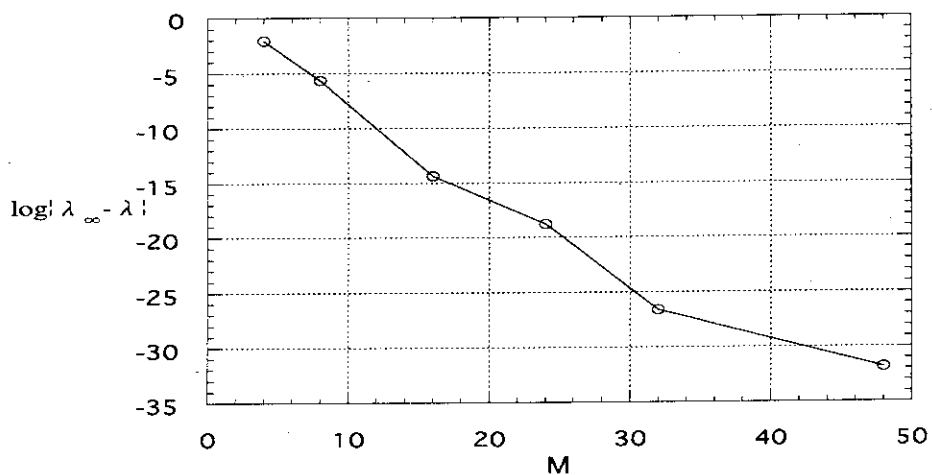


図 19:

固有値のモード数依存性。

$$\lambda_{\infty} = \lambda_{M=64} = 0.67863496455285$$

として計算した。

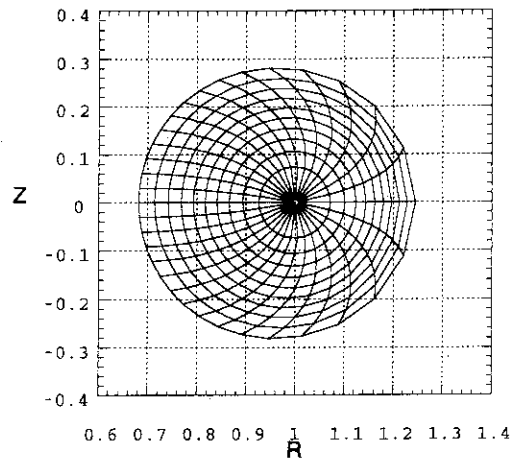


図 20:

SELENEJ より求めた円形断面平衡 ($\beta_J = 1.0$) の磁気面 ($R(s, \theta), Z(s, \theta)$)。ここで、SELENEJ のパラメータは $NR = NZ = 513$ 、インターフェイスのパラメータは $NAN = 10$ 、MARG2D のパラメータは $NR = 200$ 、モード数 = 16。

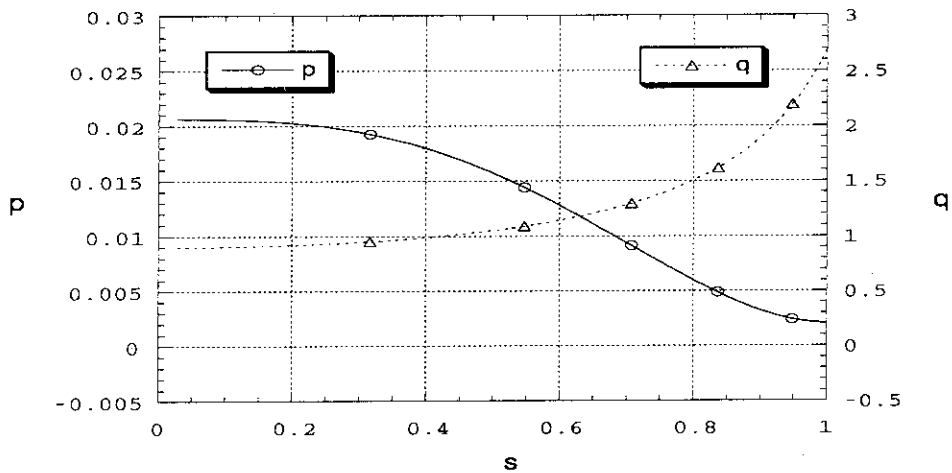


図 21:

図 20 における SELENEJ より求めた円形断面平衡に対する圧力 $p(s)$ と安全係数 $q(s)$ 。

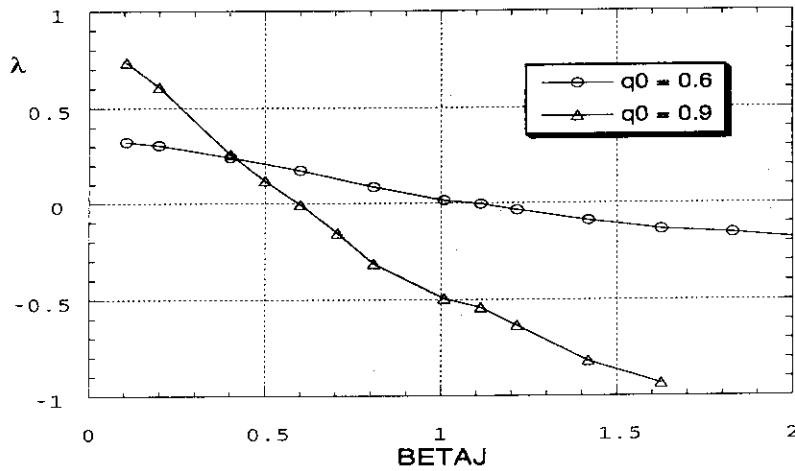


図 22:

$q_0 = 0.6$ と $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した固有値の β_J 依存性。この図より β_J の安定限界値 $\beta_{J,lim}$ が、 $q_0 = 0.6$ および $q_0 = 0.9$ に対して、それぞれ

$$\beta_{J,lim} = 1.1 \text{ および } \beta_{J,lim} = 0.6$$

と同定できる。

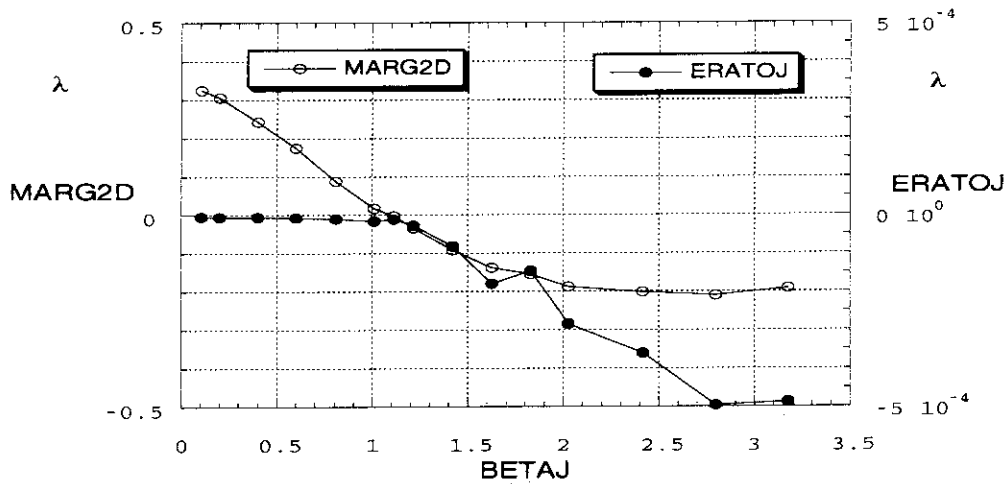


図 23:

$q_0 = 0.6$ のときの固有値の β_J 依存性の MARG2D と ERATOJ の比較。MARG2D で求めた固有値が安定側 ($\lambda > 0$) に入ると、ERATOJ で求めた固有値は、小さい正の値をもってほとんど変化しない。

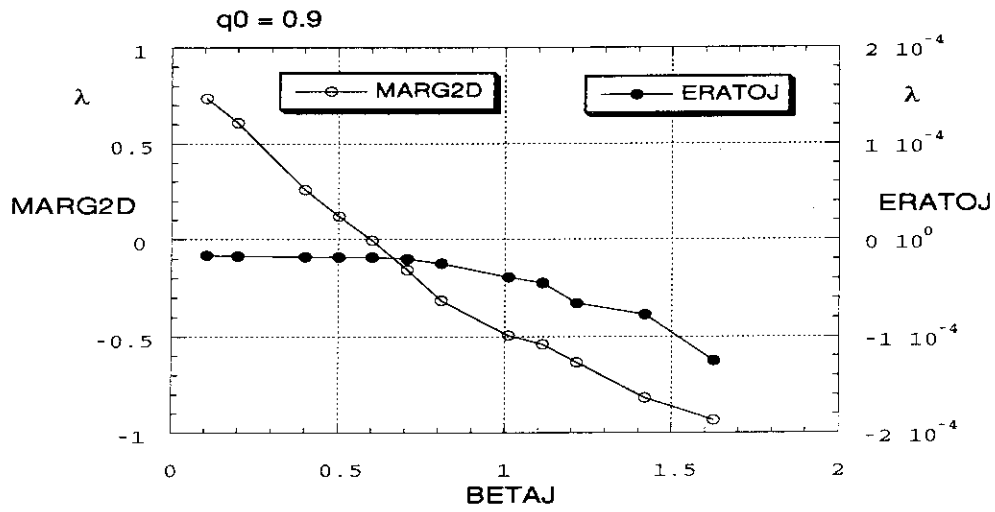


図 24:
 $q_0 = 0.9$ のときの固有値の β_J 依存性の MARG2D と ERATOJ の比較。

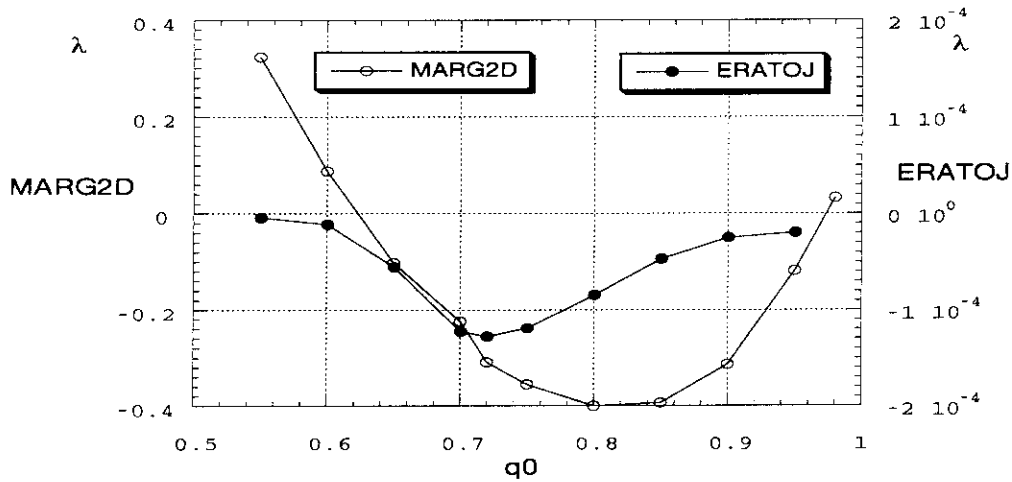


図 25:
 $\beta_J = 0.8$ のときの固有値の q_0 依存性の MARG2D と ERATOJ の比較。MARG2D コードでは q_0 の安定領域と不安定領域 ($0.62 < q_0 < 0.98$) を特定できる。

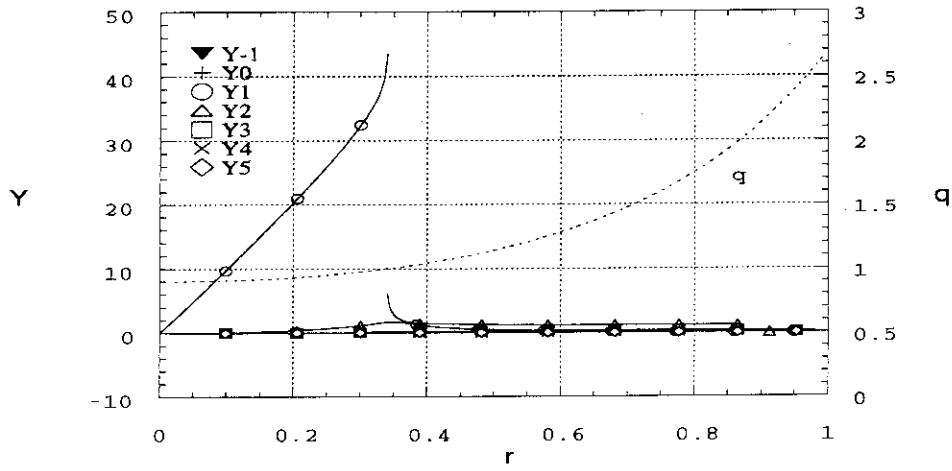


図 26:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した第 1 固有関数。 $\lambda = -0.49423218$ 、有理面 $q = 1, 2$ において $\mu = 0.49391865$ 、 0.51930555 である。

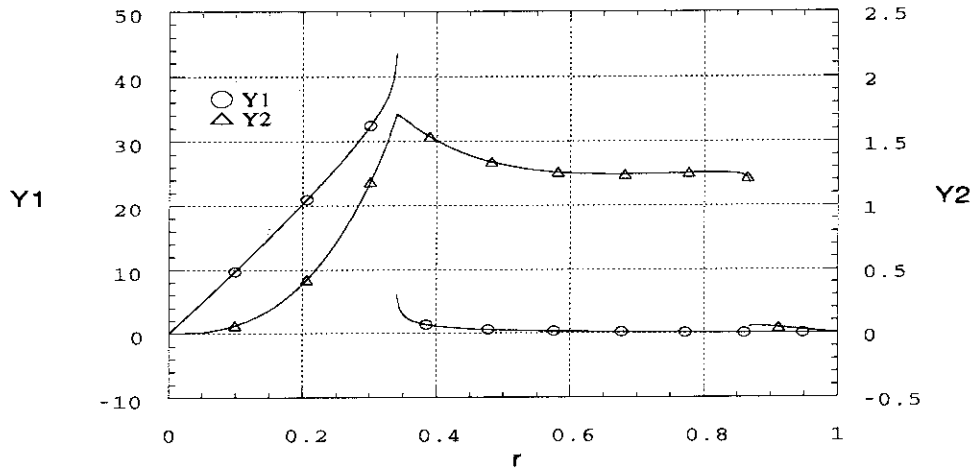


図 27:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した第 1 固有関数 (拡大図)。

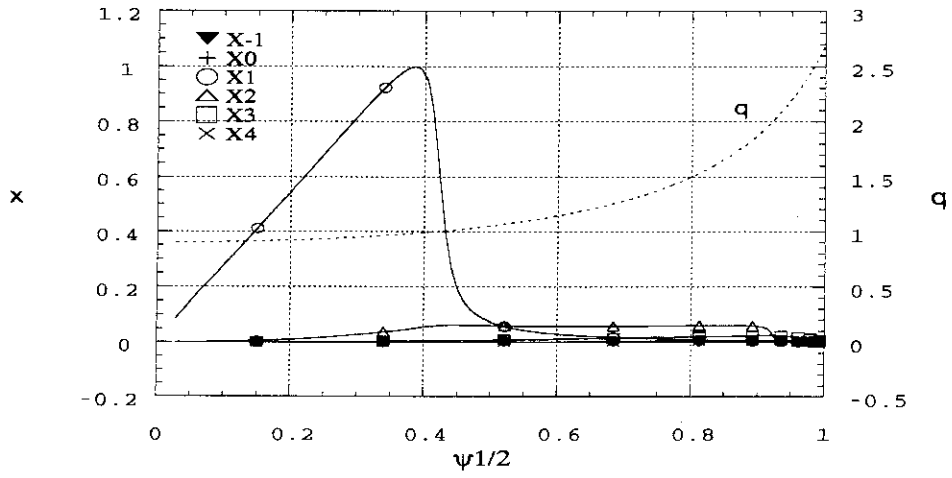


図 28:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した第 1 固有関数 ($\lambda = -0.38729e - 04$)。

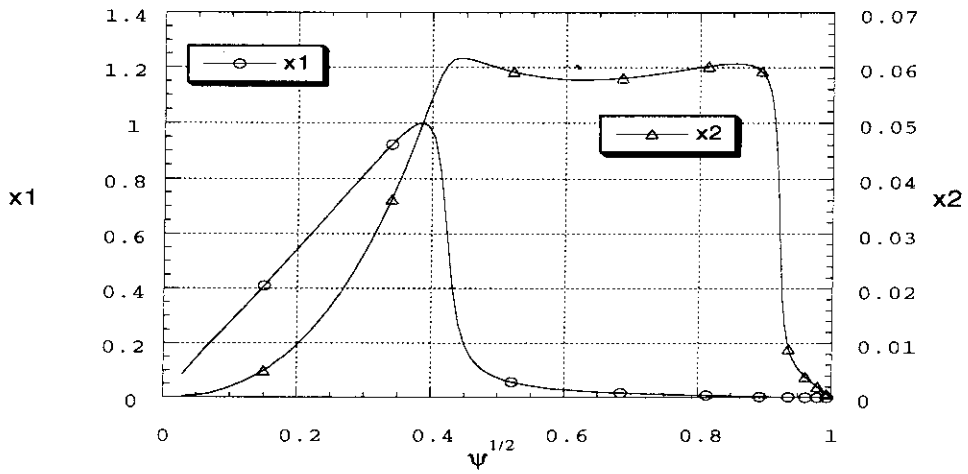


図 29:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した第 1 固有関数 (拡大図)。

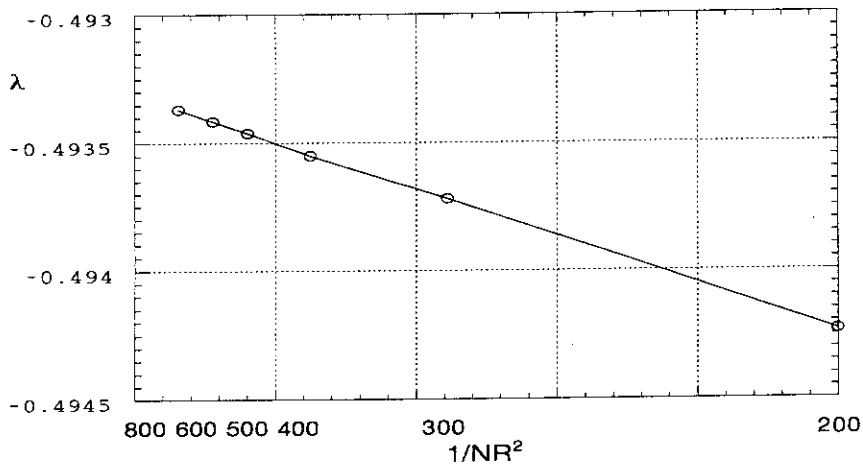


図 30:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した固有値のグリッド数依存性。

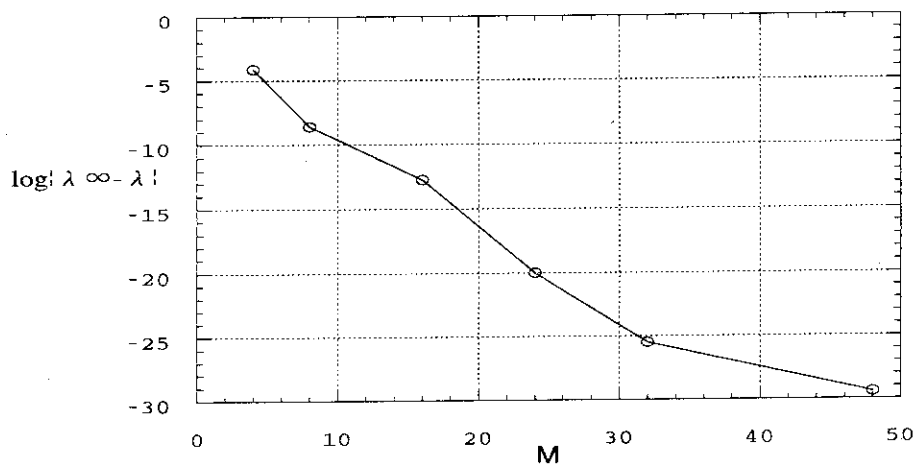


図 31:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した固有値のモード数依存性。

$$\lambda_\infty = \lambda_{M=64} = -0.4942352151708179$$

で計算した。

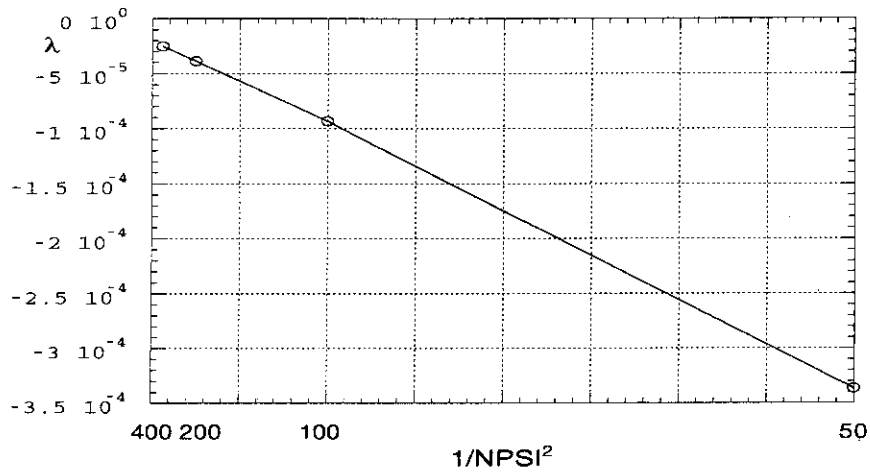


図 32:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した固有値のグリッド数依存性。

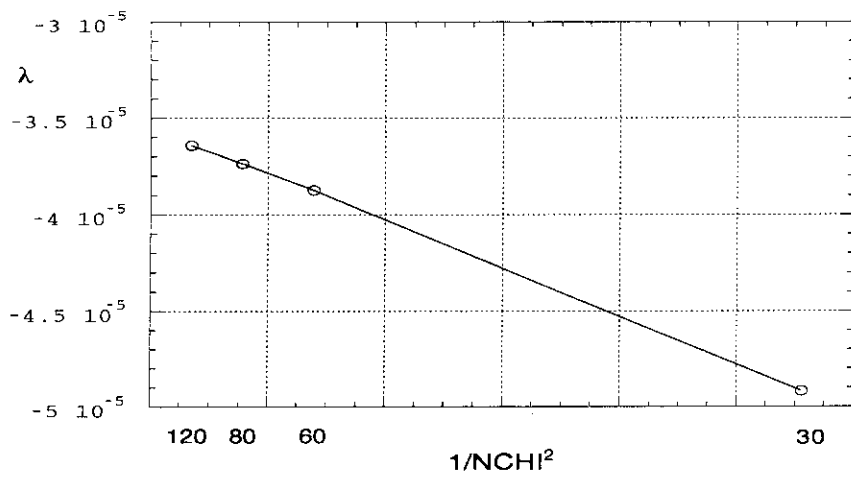


図 33:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した固有値のモード数依存性。

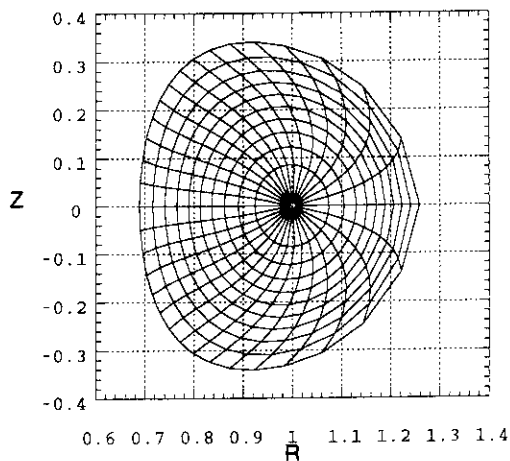


図 34:

SELENEJ より求めた楕円断面平衡 ($\beta_J = 1.0$) の磁気面 ($R(s, \theta), Z(s, \theta)$)。ここで、SELENEJ のパラメータは $NR = NZ = 513$ 、インターフェイスのパラメータは $NAN = 10$ 、MARG2D のパラメータは $NR = 200$ 、モード数=16。

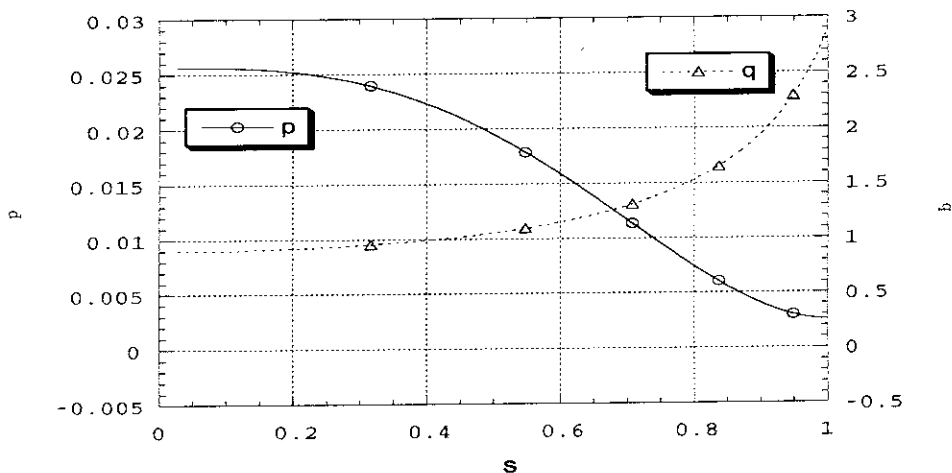


図 35:

図 34における SELENEJ より求めた楕円断面平衡に対する圧力 $p(s)$ と安全係数 $q(s)$ 。

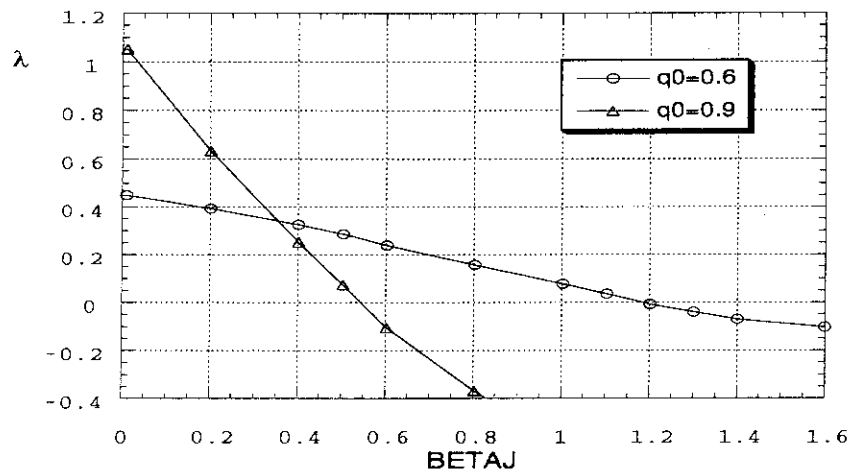


図 36:

$q_0 = 0.6$ と $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した固有値の β_J 依存性。 $m = 1$ モードに対する β_J の安定限界値は $q_0 = 0.6$ および $q_0 = 0.9$ に対して、それぞれ

$$\beta_{J,\text{lim}} = 1.2 \text{ および } \beta_{J,\text{lim}} = 0.55$$

と同定できる。

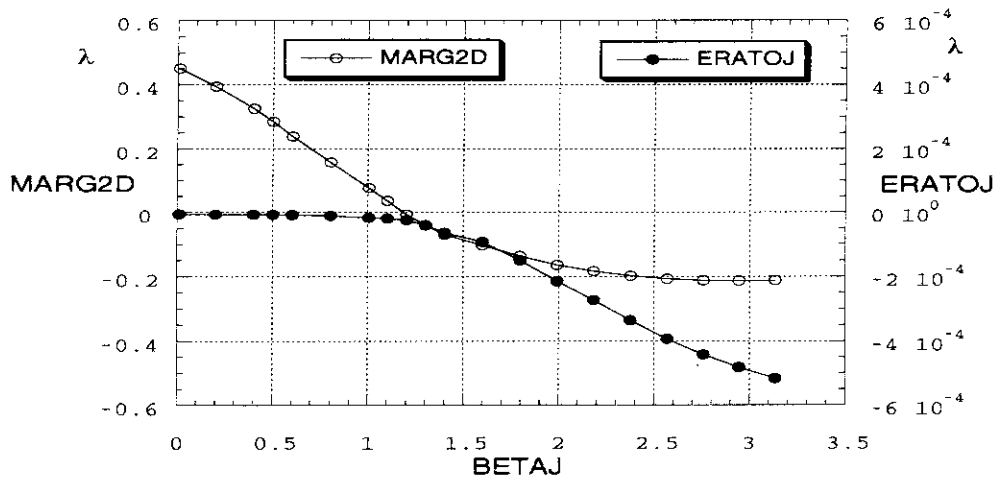


図 37:

$q_0 = 0.6$ のときの固有値の β_J 依存性の MARG2D と ERATOJ の比較。

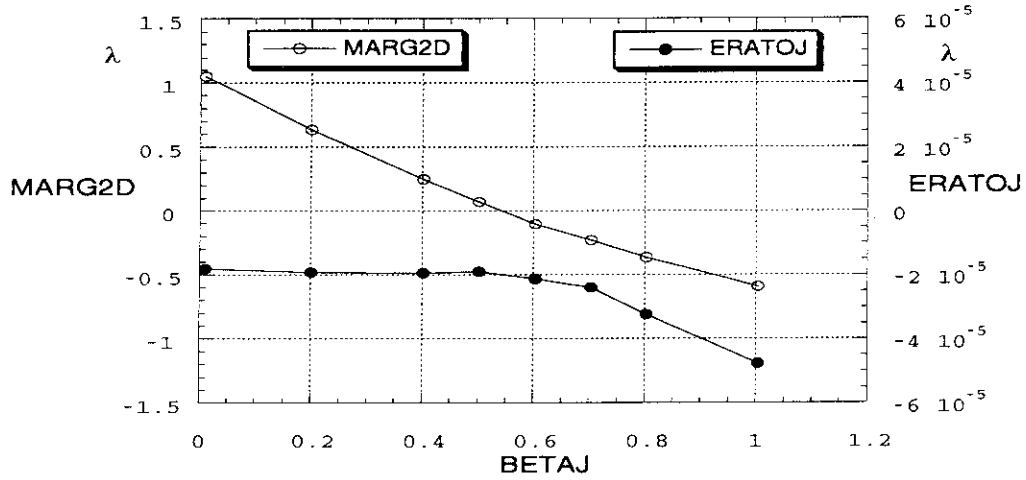


図 38:
 $q_0 = 0.9$ のときの固有値の β_J 依存性の MARG2D と ERATOJ の比較。

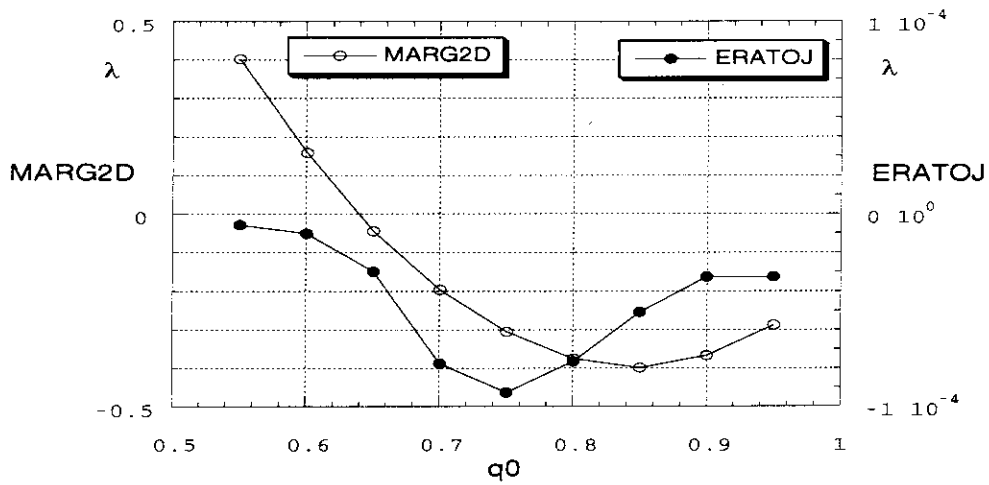


図 39:
 $\beta_J = 0.8$ のときの固有値の q_0 依存性の MARG2D と ERATOJ の比較。

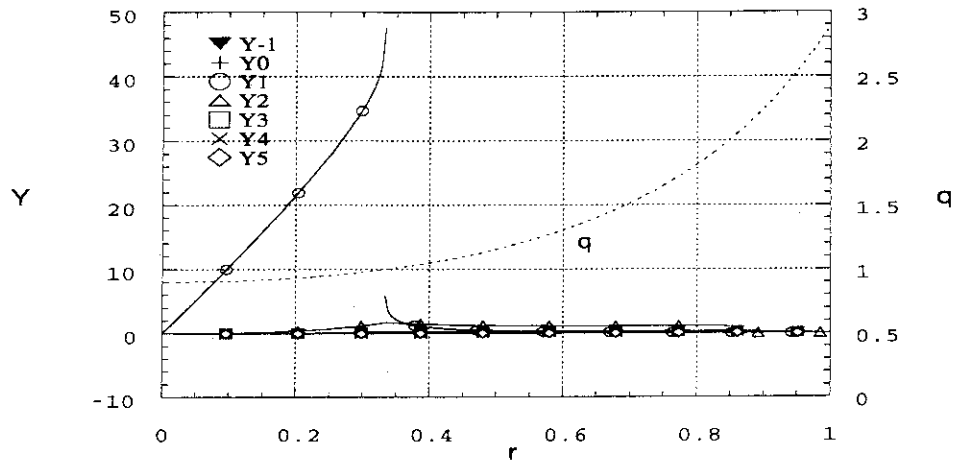


図 40:

$\beta_J = 1.0$, $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した第 1 固有関数。 $\lambda = -0.59396895$ 、有理面 $q = 1, 2$ において $\mu = 0.48016952, 0.52519973$ である。

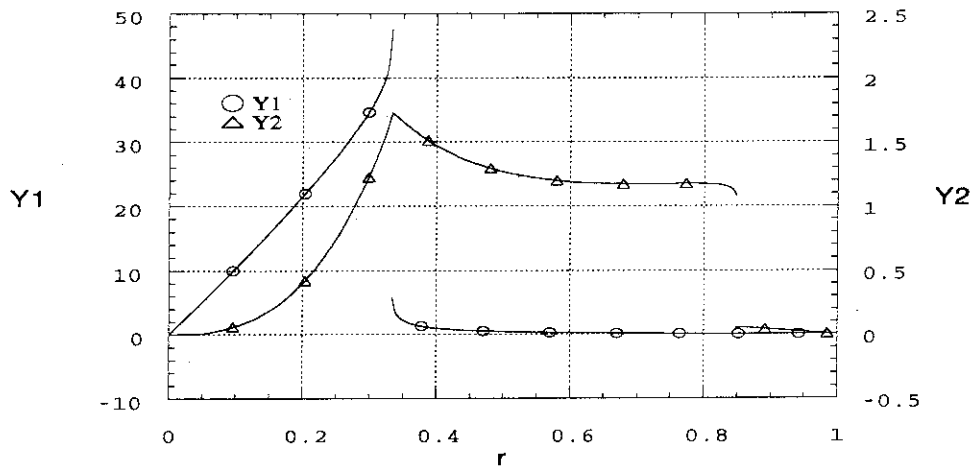


図 41:

$\beta_J = 1.0$, $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した第 1 固有関数 (拡大図)。

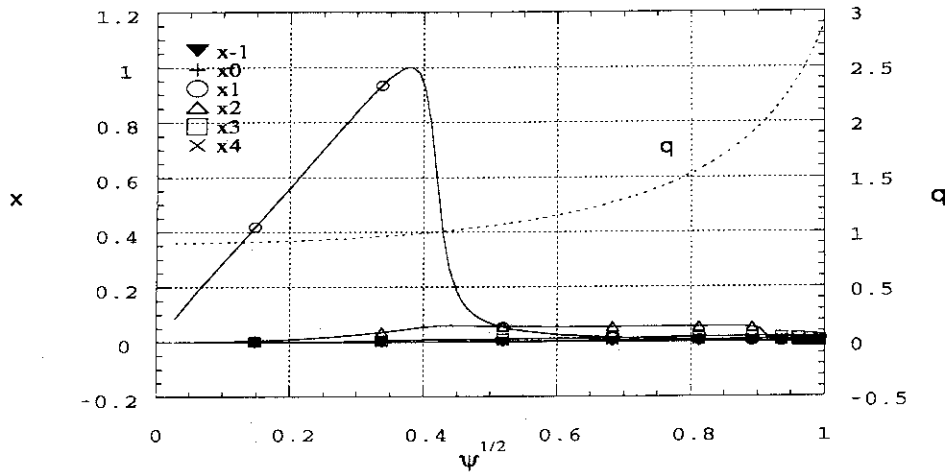


図 42:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した第 1 固有関数 ($\lambda = -0.47753e - 04$)。

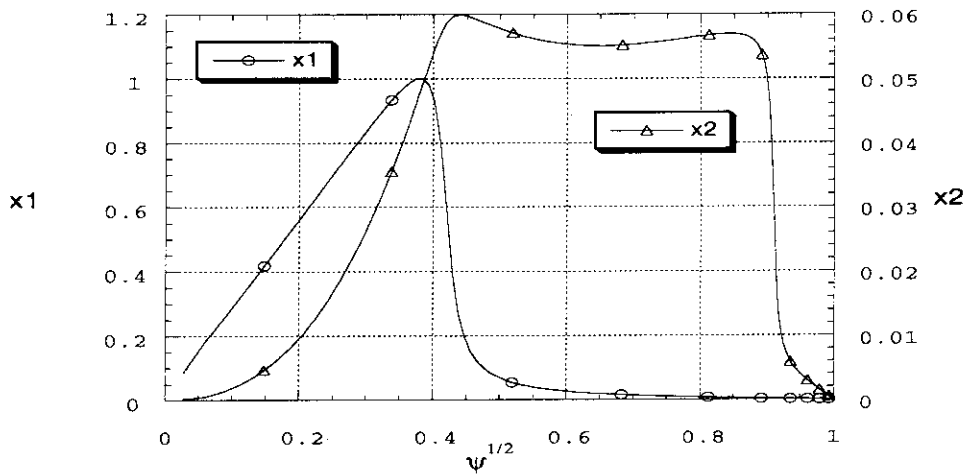


図 43:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した第 1 固有関数 (拡大図)。

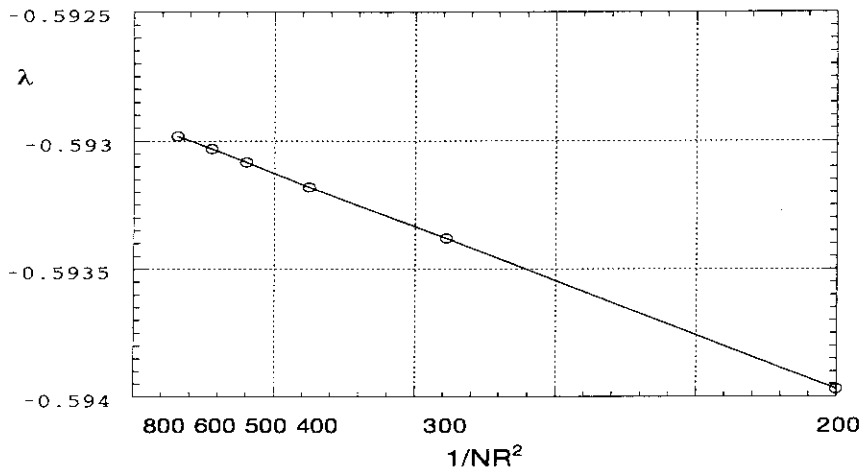


図 44:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した固有値のグリッド数依存性。

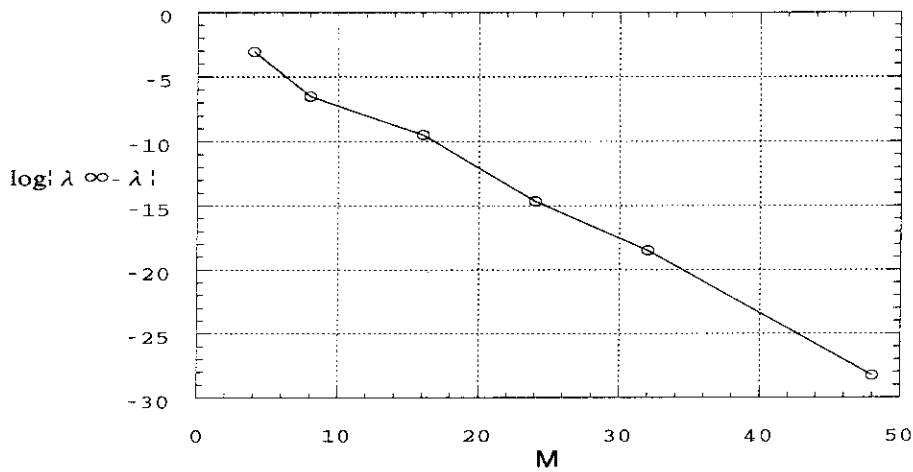


図 45:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの MARG2D で計算した固有値のモード数依存性。

$$\lambda_\infty = \lambda_{M=64} = -0.5940456553402190$$

で計算した。

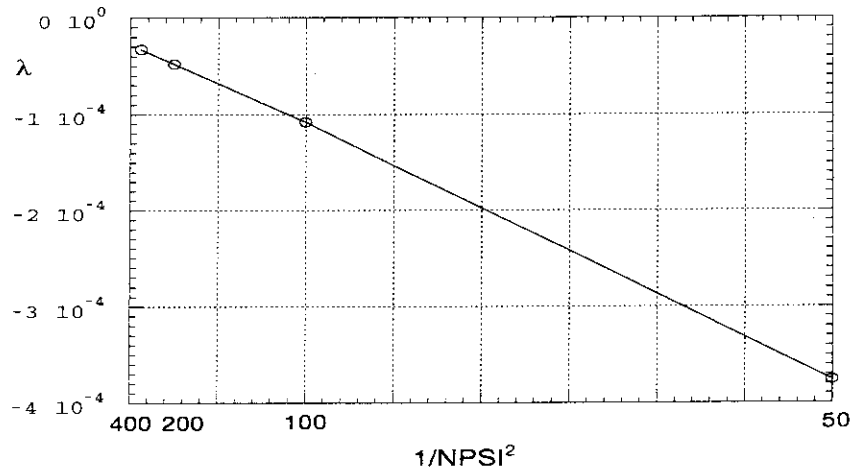


図 46:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した固有値のグリッド数依存性。

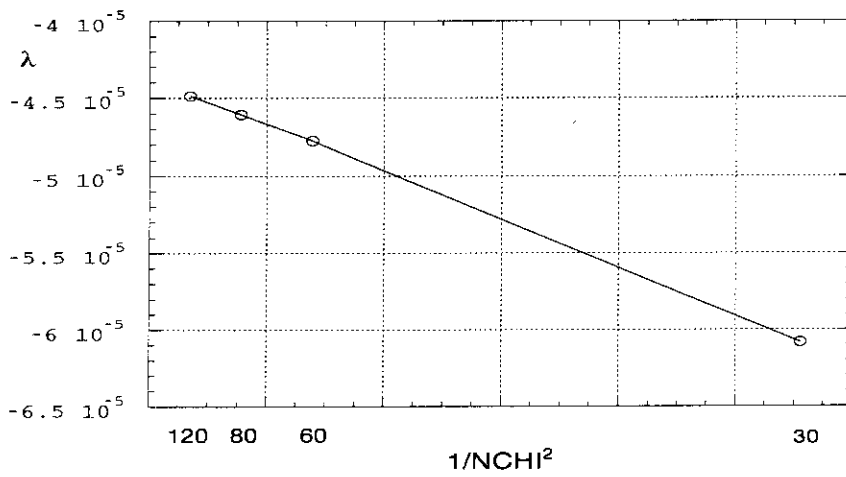


図 47:

$\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ のときの ERATOJ で計算した固有値のモード数依存性。

13 CPU 時間の測定とメモリサイズ

1. CPU 時間の測定

モード数、グリッド数に対する CPU 時間の変化を図 48、49 に示す。磁気面が楕円の Solovév 平衡 (図 7、図 10 参照) で測定した。グリッド数 = 200、モード数 = 16 のときは

| | |
|----------------------------------|------|
| MARG2D | 51.4 |
| Spline 補間による M_D 、 $d/dr(M_D)$ | 6.19 |
| 行列 A 、 B | 15.7 |
| 逆ベキ法 | 27.3 |
| LU 分解 | 18.9 |
| 1 次方程式のループ (6 回) | 7.5 |
| その他 | 0.9 |

となった (単位:秒)。行列の積の計算時間はモード数の 3 乗に依存する。

2. メモリサイズ

大きな配列として、行列 A 、 B を格納する 2 つのタイプの配列がある。

(a) 対角ブロックと非対角ブロックを格納するタイプ

- complex*16 AMT(IAXF,IAXF,IAE,2)
- $IAXF \geq m+1$ 、 m は $M \times 2 + 1$ (M : モード数)、自然境界用に +1 している。
- $IAE \geq n$ 、 n はグリッド数 ($= NR + 1$)
- サイズ = $((m+1)^2 \times n \times 2) \times 16$ バイト $\times 3$ 変数

(b) バンド行列を左上から右下へ 1 次元配列に格納するタイプ

- complex*16 A2(IAEGN)
- サイズ = $((m \times n + \text{有理面数}) \times (4m+1) - 2m(2m+1)) \times 16$ バイト $\times 3$ 変数

グリッド数、モード数に対して必要なメモリサイズを以下に示す。

| グリッド数 | $m = 2M + 1$ | モード数 M | サイズ (単位:メガバイト) |
|-------|--------------|----------|----------------|
| 200 | 33 | 16 | 65 |
| 200 | 65 | 32 | 240 |
| 200 | 129 | 64 | 900 |
| 200 | 257 | 128 | 3510 |
| 200 | 513 | 256 | 14000 |
| 800 | 33 | 16 | 240 |
| 800 | 65 | 32 | 900 |
| 800 | 129 | 64 | 3500 |
| 800 | 257 | 128 | 13800 |
| 800 | 513 | 256 | 54500 |

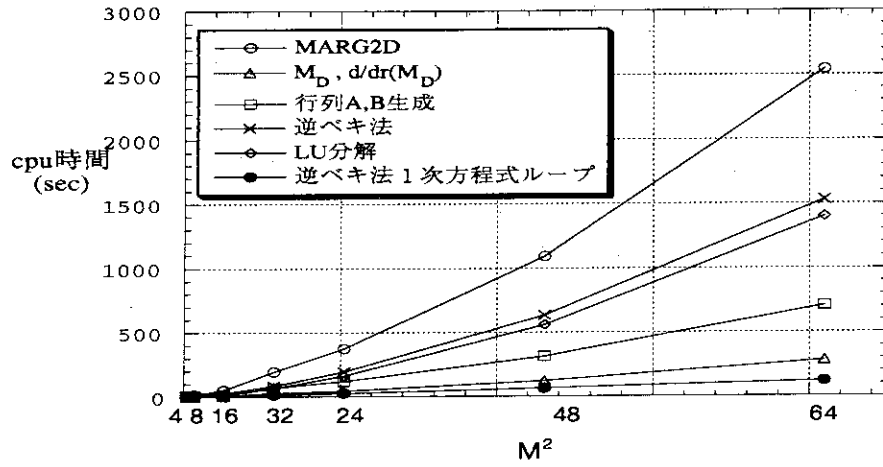


図 48: CPU 時間のモード数に対する変化。 M はモード数。

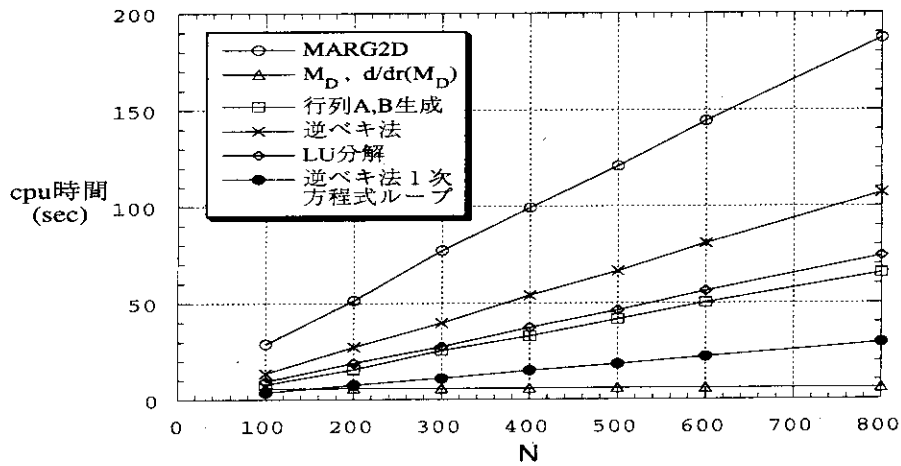


図 49: CPU 時間のグリッド数に対する変化。 N はグリッド数。

14 要約と議論

本報告書では、軸対称トロイダル配位における大域的な MHD 安定性解析を行う上で必要な 2 次元 Newcomb 方程式を固有値問題として解いた。径方向の微小変位のポロイダル・フーリエ成分を未知関数とする固有値問題のラグランジアン密度を導き、適切な重み関数を設定した。ついで、有理面における境界条件を共鳴モードと非共鳴モードについて別々に課した。この結果、導かれる固有値問題のスペクトルは点スペクトル(離散固有値)だけからなり、連続スペクトルを持たないとともに固有関数の正しい有理面での挙動が保証され、Newcomb 方程式を解く上での困難が解決された。MARG2D コードによって、低トロイダル・モード数の理想 MHD 安定性が、従来のコードに較べて、より正しく、より効率的に解析できる。現在の MARG2D コードは固定境界条件であるが、ラグランジアン密度に真空中の摂動磁場エネルギーの寄与を加えることにより、外部キルク・モードのスペクトル構造の研究が可能になる。また、このコードを用いて $m = 1$ モード理論において必要な理想 MHD ポテンシャル・エネルギーを求めることができるので、非円形断面、有限アスペクト比での非理想 $m = 1$ モード (α 粒子の効果を含む) の安定性解析が可能になる。さらに、2 次元配位における抵抗性 MHD 安定性解析における外部領域接続データの計算において MARG2D コードは重要な役割を果たす。これらに関しては、以後、順次報告する予定である。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部部長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

14 要約と議論

本報告書では、軸対称トロイダル配位における大域的な MHD 安定性解析を行う上で必要な 2 次元 Newcomb 方程式を固有値問題として解いた。径方向の微小変位のポロイダル・フーリエ成分を未知関数とする固有値問題のラグランジアン密度を導き、適切な重み関数を設定した。ついで、有理面における境界条件を共鳴モードと非共鳴モードについて別々に課した。この結果、導かれる固有値問題のスペクトルは点スペクトル(離散固有値)だけからなり、連続スペクトルを持たないとともに固有関数の正しい有理面での挙動が保証され、Newcomb 方程式を解く上での困難が解決された。MARG2D コードによって、低トロイダル・モード数の理想 MHD 安定性が、従来のコードに較べて、より正しく、より効率的に解析できる。現在の MARG2D コードは固定境界条件であるが、ラグランジアン密度に真空中の摂動磁場エネルギーの寄与を加えることにより、外部キルク・モードのスペクトル構造の研究が可能になる。また、このコードを用いて $m = 1$ モード理論において必要な理想 MHD ポテンシャル・エネルギーを求めることができるので、非円形断面、有限アスペクト比での非理想 $m = 1$ モード (α 粒子の効果を含む) の安定性解析が可能になる。さらに、2 次元配位における抵抗性 MHD 安定性解析における外部領域接続データの計算において MARG2D コードは重要な役割を果たす。これらに関しては、以後、順次報告する予定である。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部部長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

参考文献

- [1] 徳田 伸二、「計算機シミュレーションによるトカマク・プラズマの安定性の研究」、JAERI-M 84-040 (1984).
- [2] H. P. Furth, J. Killeen and M. N. Rosenbluth, *Phys. Fluids* **6** (1963) 459.
- [3] B. Coppi, J. M. Greene and J. L. Johnson, *Nuclear Fusion* **6** (1966) 101.
- [4] A. H. Glasser, J.M. Greene and J. L. Johnson, *Phys. Fluids* **18** (1975) 875.
- [5] A. H. Glasser, J.M. Greene and J. L. Johnson, *Phys. Fluids* **19** (1976) 567.
- [6] J. W. Connor and Liu Chen, *Phys. Fluids* **28** (1985) 2201.
- [7] P. H. Rutherford, *Phys. Fluids* **16** (1973) 1903.
- [8] M. Kotschenreuther, R. D. Hazeltine and P. J. Morrison, *Phys. Fluids* **28** (1985) 294.
- [9] A. I. Smolyakov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **35** (1993) 657.
- [10] T. S. Hahm and R. M. Kulsrud, *Phys. Fluids* **28** (1985) 2412.
- [11] R. Fitzpatrick and T. C. Hender, *Phys. Fluids B* **3** (1991) 644.
- [12] X. Wang and A. Bhattacharjee, *Phys. Plasmas* **4** (1997) 748.
- [13] R. Carrera, R. D. Hazeltine and M. Kotschenreuther, *Phys. Fluids* **29** (1986) 899.
- [14] R. Fitzpatrick, *Phys. Plasmas* **2** (1995) 825.
- [15] H. R. Wilson, J. W. Connor, R. Hastie and C. C. Hegna, *Phys. Plasmas* **3** (1996) 248.
- [16] G. Ara, B. Basu, B. Coppi, G. Laval, M.N. Rosenbluth and B. V. Waddell, *Annals of Phys.* **112** (1978) 443.
- [17] S. Migliuolo, *Nucl. Fusion* **33** (1993) 1721.
- [18] F. Porcelli, *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** (1991) 1601.
- [19] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison- Wesley, New York, 1992).
- [20] W. A. Newcomb, *Annals of Phys.* **10** (1960) 232.

- [21] S. Tokuda and T. Watanabe, "Eigenvalue Method for the Outer-Region Matching Data in Resistive MHD Stability Analysis," Submitted to J. Plasma and Fusion Research.
- [22] A. Pletzer and R. L. Dewar, J. Plasma Phys. **45** (1991) 427.
- [23] R. L. Dewar and A. Pletzer, J. Plasma Phys. **43** (1990) 291.
- [24] R. Gruber and J. Rappaz, *Finite Element Methods in Linear Ideal Magnetohydrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [25] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Interscience, New York, 1953) Vol.1.
- [26] 徳田 伸二、渡辺 朋子、「負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論」、JAERI-Res. 96-057 (1996).
- [27] 徳田 伸二、渡辺 朋子、「負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論 (II) -Newcomb 方程式の大域解-」、JAERI-Res. 97-034 (1997).
- [28] M. N. Bussac, R. Pellat, D. Edery and J. L. Soule, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1638.
- [29] R. Gruber, F. Troyon, D. Berger, L.C. Bernard, S. Rousset, R. Schreiber, W. Kerner, W. Schneider and K.V. Roberts, Comput. Phys. Commun. **21** (1975) 323.

付録A ディレクトリ構造

AP300 におけるディレクトリ構造を示す。

| <u>ディレクトリ</u> | <u>ファイル内容</u> |
|---------------------|---|
| / SELENEJ | SELENEJ ディレクトリ |
| /SELENEJ / src | プログラム メイクファイル (Makefile) |
| /SELENEJ /include | インクルード ファイル |
| /SELENEJ /execdabt | テストデータディレクトリ (楕円断面) 計算パラメータ IN.daen AP3000 バッチ用シェル スクリプト go.sh 平衡データ selj66.daen |
| /SELENEJ /execdab07 | 楕円断面テストデータ ($\beta_J = 0.7$) ディレクトリ 計算パラメータ IN.b07.daen シェル スクリプト wex 平衡データ selj66.dat |
| /SELENEJ /execenbt | テストデータディレクトリ (円形断面) 計算パラメータ IN.en AP3000 バッチ用シェル スクリプト go.sh 平衡データ selj66.en |
| / WJERATOV | ERATOJ ディレクトリ |
| /WJERATOV / src | プログラム |
| /WJERATOV / exec | 実行ディレクトリ ($\beta_J = 1.0$ の平衡を $q_0 = 0.9$ にスケール するテストデータが設定されている。) 計算パラメータ NML.b10 実行シェル gob10 バッチ用シェル go.sh 結果出力リスト Bx.e10220 Bx.o10220 |
| /WJERATOV /ftwork | 実行時のワークファイルディレクトリ |
| / MARG2D | MARG2D ディレクトリ |
| /MARG2D / intfaceV4 | 「SELENEJ とのインターフェイス」ディレクトリ |
| /MARG2D / ver7 | MARG2D ディレクトリ |

MARG2D/interfaceV4 「SELENEJ とのインターフェイス」ディレクトリ

| <u>ディレクトリ</u> | <u>ファイル内容</u> |
|---------------|--|
| / source | プログラム |
| /include | インクルード ファイル |
| / exec | 実行ディレクトリ ($\beta_J = 1.0$ の数値平衡 (円形断面) を $q_0 = 0.9$ に スケールするテストデータが設定されている。) 計算パラメータ TEST0.b10 実行シェル gob10 バッチ用シェル gob10.sh 結果出力リスト list.b10 |

MARG2D/ver7 MARG2D コードディレクトリ

| <u>ディレクトリ</u> | <u>ファイル内容</u> |
|---------------|---|
| /source | プログラム |
| /include | $M = 16$ 、 $NR = 200$ インクルード ファイル |
| /l16incl | $M = 16$ 、 $NR = 5000$ インクルード ファイル |
| /l16obj | $M = 16$ 、 $NR = 5000$ 用オブジェクト、メイクファイル |
| /l64incl | $M = 64$ 、 $NR = 300$ インクルード ファイル |
| /l64incl | $M = 64$ 、 $NR = 300$ 用オブジェクト、メイクファイル |
| /m16incl | $M = 16$ 、 $NR = 1600$ インクルード ファイル |
| /m16incl | $M = 16$ 、 $NR = 1600$ 用オブジェクト、メイクファイル |
| / exec | 実行ディレクトリ 計算パラメータ NML1.b10 実行シェル gob10 バッチ用シェル gob10.sh 結果出力リスト list.b10 |

付録 B 実行手順

SELENEJ 平衡を生成し、MARG2D の固有値問題を解くまでの手順を示す。ここに示すファイルには、テスト計算に使用したパラメータが設定されている。また、対象とする MHD 平衡は円形断面の数値平衡で、 $\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$ である (図 20、26 参照)。

1. SLELENEJ 平衡データ生成

- (a) ディレクトリ `~/sydora/execenbt` に移動する。
- (b) 計算パラメータを設定する。ファイル名 `IN.en` にテストに使用したデータが設定されている。
- (c) バッチジョブを投入する。バッチ用シェルのファイル名は `go.sh`。計算パラメータは `IN.en`、平衡データは `selj66.en` に生成されるように設定している。

2. SELENEJ と MARG2D のインターフェイスの処理

(Solovév 平衡を使う場合はここからはじめる。)

- (a) ディレクトリ `~/marg2d/intfaceV4/exec` に移動する。
- (b) 計算パラメータを設定する。ファイル名は `TEST0.b10`。
- (c) 実行シェル `gob10` を実行する。MARG2D へ渡す平衡データ (85, 86, 87 番ファイル) が生成される。

3. MARG2D 実行

- (a) ディレクトリ `~/marg2d/ver7/exec` に移動する。
- (b) 計算パラメータを設定する。ファイル名は `NML1.b10`。
- (c) 実行シェル `gob10` を実行する。`list.b10` にリスト出力を設定している。

付録C SELENEJ とのインターフェイス

SELENEJ コードでファイルに出力される MHD 平衡は

(R, Z) 座標系 $R(j), Z(k) (j = 1, \dots, NR, k = 1, \dots, NZ)$ と
 その上でのポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$
 磁束関数 ψ のラベル PSIEQ(jeq) (jeq = 1, NEQUI)、
 圧力 $p = PRSEQ(jeq)$ 、 $dp/d\psi = DPREQ(jeq)$ 、
 トロイダル磁場関数 $F = TEQ(jeq)$ 、 $F dF/d\psi = TTPEQ(jeq)$

である。これらの量をファイルから読み込んで、 $Z \geq 0$ のデータから $Z < 0$ 側の Z および ψ を生成する。

s_1 は計算パラメータ NAN から計算し

$$s_j = s(\psi_j), \quad j = 2, N_\psi + 1 \quad (\text{C.1})$$

とする。また

$$\frac{d\psi}{ds} = 2\psi_s \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (\text{C.3})$$

から MARG2D コードで必要な量を計算し、ファイルへ書き出す。

付録D インターフェイスプログラムの平衡データファイル

インターフェイスプログラムはMARG2Dで使う平衡データを以下のファイルへ出力する。

平衡データファイル：85：M2OUTS.DATA

| 項目 | 型 | データ数 | 変数 |
|------------|-----|-----------|--|
| R_0 | R*8 | 1 | RAXIS |
| B_0 | R*8 | 1 | 不使用。1 |
| α | R*8 | 1 | 不使用。 $\alpha = \frac{R_0^2 B_0}{2\psi_s}$ |
| ψ_s | R*8 | 1 | |
| N_s | I | 1 | NPSI |
| N_x | I | 1 | NCHI |
| s_j | R*8 | $N_s + 1$ | CS() |
| θ_j | R*8 | $N_x + 1$ | CHI() |
| q | R*8 | $N + 1$ | QPSI() |
| dq/ds | R*8 | $N + 1$ | DQPSI() |
| F | R*8 | $N + 1$ | TMF() |
| dF/ds | R*8 | $N + 1$ | $dF/ds = d\psi/ds \cdot dF/d\psi$, TTP() : $FdF/d\psi$ |
| p | R*8 | $N + 1$ | CPR() |
| $dp/d\psi$ | R*8 | $N + 1$ | DPR() : $dp/d\psi$ |

R、Zフーリエモードファイル：86：M2ORZ.DATA

| 項目 | 型 | データ数 | 変数 |
|---------------------|-----|---------|----------|
| N_s | I | 1 | NPSI |
| s_j | R*8 | $N + 1$ | CS() |
| m | I | 1 | MRZ、モード数 |
| * | | | |
| Δ | R*8 | 1 | |
| R_m | R*8 | MRZ | |
| $\partial_s \Delta$ | R*8 | 1 | |
| $\partial_s R_m$ | R*8 | MRZ | |
| Z_m | R*8 | MRZ | |
| $\partial_s Z_m$ | R*8 | MRZ | |

(*から*までのデータ) \times ($N_s + 1$) 個

$R(s, \theta)$ 、 $Z(s, \theta)$ 、 $\partial_s R$ 、 $\partial_s Z$ は

$$R(s, \theta) = \Delta(s) + \sum_m R_m(s) \cos m\theta$$

$$Z(s, \theta) = \sum_m Z_m(s) \sin m\theta$$

$$\partial_s R(s, \theta) = \partial_s \Delta(s) + \sum_m \partial_s R_m(s) \cos m\theta$$

$$\partial_s Z(s, \theta) = \sum_m \partial_s Z_m(s) \sin m\theta$$

である。

$H(s, \theta)$ 、 $K(s, \theta)$ データファイル : 87 : M2OTHE.DATA

| 項目 | 型 | データ数 | 変数 |
|--------------------|-----|-----------|-------------------|
| N_s | I | 1 | NPSI |
| N_x | I | 1 | NCHI |
| s_j | R*8 | $N_s + 1$ | CS() |
| θ_j | R*8 | $N_x + 1$ | CHI() |
| * | | | |
| $ \nabla\psi ^2$ | R*8 | $N_x + 1$ | EQ(14,) = 1 / ZG2 |
| $\beta_{s,\theta}$ | R*8 | $N_x + 1$ | EQ(15,) |
| H | R*8 | $N_x + 1$ | EQ(19,) |
| K | R*8 | $N_x + 1$ | EQ(20,) |
| R | R*8 | $N_x + 1$ | RCHI() |

*
(*から*までのデータ) × ($N_s + 1$) 個

付録E インターフェイスプログラムの入出力ファイル

| <u>NO</u> | <u>内容</u> | <u>ファイル名</u> |
|-----------|---|--------------|
| 6 | 標準出力 | |
| 05 | 入力パラメータ (SUB DATAIN) | |
| 11 | SELENEJ 上下対称平衡データ (SELENEJ の出力) | |
| 85 | 平衡データ | M2OUTS.DATA |
| 86 | R 、 Z フーリエモード | M2ORZ.DATA |
| 87 | $H(s, \theta)$ 、 $K(s, \theta)$ | M2OTHE.DATA |
| 30 | R のフーリエモード R_m | RCO.DATA |
| 31 | $\partial_s R$ のフーリエモード $\partial_s R_m$ | RC2.DATA |
| 32 | Z のフーリエモード Z_m | ZCO.DATA |
| 33 | $\partial_s Z$ のフーリエモード $\partial_s Z_m$ | ZC2.DATA |
| 41 | Mercier index CMERC (sub INTF) | MERC.DATA |
| 42 | $s(\psi)$ 、 p 、 dp/ds 、 q 、 dq/ds 、 F 、 dF/ds | FPQ.DATA |
| 43 | $ \nabla\psi ^2$ | GPS2.DATA |
| 44 | $(R(s, \theta), Z(s, \theta))$ 、 θ 方向 | RZTS1.DATA |
| 45 | $(R(s, \theta), Z(s, \theta))$ 、 s 方向 | RZTS2.DATA |
| 46 | $\langle J \cdot B \rangle / \langle B^2 \rangle$ | JBB2.DATA |
| 60 | テスト結果整理用 | |

85、86、87 番の出力ファイルが MARG2D の入力ファイルとなる。

付録F インターフェイスプログラムの計算パラメータ

計算パラメータはネームリスト形式で与える。ERATO1 に追加した計算パラメータを示す。

ネームリスト名: M2D

MRZ R 、 Z のフーリエモード数 m

$5 \leq \text{MRZ} \leq 15$ とする。

IEQSYM SELENEJ のデータ

= 0 : 上下対称

= 1 : 上下非対称

NTCASE = 3,4 のとき有効

付録G インターフェイスプログラムの副プログラム一覧

ERATO1 に追加した副プログラムを示す。

| 名前 | 内容 |
|---------|--|
| M2CHCL | 平衡量計算、テーブル設定 |
| M2DEBR2 | スプライン補間 (sub DBIC3,DBIF3) を使って微分係数を求める |
| M2FSR | $f(\theta) = f_0 + \sum_m A_m \cos m\theta + \sum_m B_m \sin m\theta$ |
| M2WRFS | p 、 q 、 F ファイル書き出し |
| M2RZFO | $R(s, \theta)$ 、 $Z(s, \theta)$ 、 $\partial_s R$ 、 $\partial_s Z$ のフーリモード計算とファイル書き出し |
| M2FTX | $R(s, \theta)$ 、 $Z(s, \theta)$ 、 $\partial_s R$ 、 $\partial_s Z$ のファイル出力 (テキスト形式) |
| M2RZTS | $(R(s, \theta), Z(s, \theta))$ 出力 |
| M2S1MK | s_1 計算 (NTCASE=1,2 のときは使用しない) |
| M2THDT | $H(s, \theta)$ 、 $K(s, \theta)$ ファイル書き出し |
| CTRAPZ | 台形則積分 |
| FOUR1 | FFT |
| OPNCLS | ダミーサブ (ファイルの OPEN、CLOSE) |

付録H MARG2D コードの入出力ファイル

● 入力ファイル

| ファイル NO | ファイル名 | 内容 |
|---------|-------------|---------------------------------|
| 55 | NML1.DATA | 計算パラメータ (Namelist 形式) |
| 85 | M2OUTS.DATA | 平衡データ |
| 86 | M2ORZ.DATA | R 、 Z フーリエモード |
| 87 | M2OTHE.DATA | $H(s, \theta)$ 、 $K(s, \theta)$ |

● 出力ファイル

| ファイル NO | ファイル名 | 内容 |
|---------|----------|---|
| 20,40 | Ym.DATA | 固有関数のフーリエ成分 $Y_m(r)$ |
| 20 | YCP.DATA | テスト用 IAMT2 = 1(main プログラムで設定するデバッグ用フラグ) のとき、指定モード (MNOX) のみ取り出して固有値問題を解いたときの固有関数 $Y_m(r)$ |

| ファイル NO | ファイル名 | 内容 |
|---------|-------------|---|
| 41 | SR.DATA | s_j 、 $r(s)$ 、 dr/ds |
| 42 | QPF.DATA | $q(r_{j+1/2})$ 、 dq/dr 、 F 、 dF/dr 、 p 、 dp/dr 、 $dp/d\psi$ |
| 22 | RZTR1.DATA | $(R(r, \theta), Z(r, \theta))(\theta$ 方向) |
| 23 | RZTR2.DATA | $(R(r, \theta), Z(r, \theta))(r$ 方向) |
| 24 | RZTS1.DATA | $(R(s, \theta), Z(s, \theta))(\theta$ 方向) |
| 25 | RZTS2.DATA | $(R(s, \theta), Z(s, \theta))(s$ 方向) |
| 19 | DBMT.DATA | 行列計算デバッグ用 SUB MTRX で IDBFLG = 1 または 2 に設定したとき出力される。 |
| 8 | | テスト結果整理用 |
| 9 | | SUB.CLOCKM による CPU 時間の測定値 |
| * | | |
| 31 | FRGR2I.DATA | $1/ \nabla r ^2$ |
| 32 | FRGR2R.DATA | $r\partial_r \nabla r ^2$ |
| 33 | FRRGRI.DATA | $\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{ \nabla r ^2}$ |

| ファイル NO | ファイル名 | 内容 |
|---------|-------------|---|
| 34 | FE.DATA | e/r |
| 35 | FGRH.DATA | $ \nabla r ^2 h$ |
| 36 | FRRB.DATA | $ \nabla r ^2 r \beta_{r\theta}$ |
| 37 | FRPFF.DATA | $\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \frac{dp}{dr} + F \frac{dF}{dr}$ |
| 38 | FE1.DATA | $-\epsilon^2 \left[r \left(\frac{F}{q}\right)^2 \{ r \partial_r \nabla r ^2 + r \partial_\theta (\nabla r \cdot \nabla \theta) \} \right. \\ \left. + \frac{F}{q} \partial_r \left(r^2 \frac{F}{q} \right) \nabla r ^2 \right]$ |
| 69 | FRCHPW.DATA | $r \{ \partial_\perp \nabla r ^2 + \nabla r ^2 \partial_\theta \beta_{r\theta} \}$ |
| 68 | FRCHP0.DATA | $r \{ \partial_r \nabla r ^2 + \partial_\theta (\nabla r \cdot \nabla \theta) \}$ |
| 67 | FRCHP1.DATA | $-\frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{r} \left(\frac{q}{F}\right)^2 \left\{ \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \frac{dp}{dr} + F \frac{dF}{dr} \right\} \\ - \frac{1}{r} \frac{q}{F} \nabla r ^2 \partial_r \left(r^2 \frac{F}{q} \right)$ |
| 71 | FR.DATA | R |
| 72 | FRDRR.DATA | $\partial_r R$ |
| 73 | FZ.DATA | Z |
| 74 | FZDRR.DATA | $\partial_r Z$ |
| 75 | FRGR2.DATA | $r \partial_\perp \nabla r ^2$ |
| 76 | FRBRT.DATA | $r \partial_\theta \beta_{r\theta}$ |
| 77 | FRGRT.DATA | $r \partial_\theta (\nabla r \cdot \nabla \theta)$ |
| 78 | FRRR0.DATA | $r \partial_\perp (R/R_0)^2$ |
| 79 | FRGR.DATA | $ \nabla r ^2$ |
| 11 | SSGSP2.DATA | $ \nabla r ^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{q}{\hat{F}}\right)^2 \frac{ \nabla \hat{\psi} ^2}{\hat{r}^2}$ ($ \nabla \hat{\psi} ^2$ はインターフェイスの計算値) |
| 12 | SSBTRT.DATA | $r \beta_{r,\theta} = \frac{\epsilon^2}{2\psi_s} \left(\frac{\hat{F}}{q}\right) \left(\frac{\hat{r}}{s}\right)^2 s \beta_{s,\theta}$ ($\beta_{s,\theta}$ はインターフェイスの計算値) |
| 13 | SSH.DATA | $h = \epsilon^2 \left(\frac{\hat{r}}{q}\right)^2 \hat{F} H / \frac{d\psi}{ds}$ ($H(s, \theta)$ はインターフェイスの計算値) |
| 14 | SSE.DATA | $e = -2\epsilon^2 \hat{r}^3 \frac{\hat{F}}{q} K / \frac{d\psi}{ds}$ (K はインターフェイスの計算値) |
| 15 | SSRR0G.DATA | $\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{ \nabla r ^2}$ (R はインターフェイスの計算値) |

*
*印から*印までは、フーリエ成分が出力される。

| ファイル NO | ファイル名 | 内容 |
|---------|-------------|--|
| * 2 | | |
| 44 | GRGRDI.DATA | $\left((\nabla r ^2) \left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right) \right)$ の対角要素 |
| 45 | GRGRO1.DATA | $\left((\nabla r ^2) \left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right) \right)$ の非対角要素 |
| 46 | GRGRO2.DATA | $\left((\nabla r ^2) \left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right) \right)$ の非対角要素 |
| 47 | MTMH.DATA | $M_H (= F^2 M_D D)$ (対角行列) |
| 48 | MTMHDR.DATA | $r \frac{d}{dr} M_H$ (対角行列) |
| 49 | TM1D.DATA | $L^{-1}(D^{-1}M_O - M_O^\dagger D^{-1}) = 0$ の対角要素 (ゼロモードを除いた行列) |
| 50 | T1O1.DATA | $L^{-1}(D^{-1}M_O - M_O^\dagger D^{-1})$ の非対角要素 |
| 51 | T1O2.DATA | $L^{-1}(D^{-1}M_O - M_O^\dagger D^{-1})$ の非対角要素 |
| 52 | TM2D.DATA | $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1} (= \text{Diag}(m^2))$ の対角要素 (ゼロモードを除いた行列) |
| 53 | T2O1.DATA | $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ の非対角要素 |
| 54 | T2O2.DATA | $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ の非対角要素 |
| 90 | TM2EV.DATA | 評価点 $r_{j+1/2}$ の最初の 10 点の $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ の固有値 ($= m^2$) |
| 91 | TM2VC1.DATA | 評価点 $r_{1+1/2}$ における $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ の固有関数 |
| 92 | TM2VC1.DATA | 評価点 $r_{2+1/2}$ における $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ の固有関数 |
| 93 | TM2VC1.DATA | 評価点 $r_{3+1/2}$ における $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ の固有関数 |
| 94 | TM2VC1.DATA | 評価点 $r_{4+1/2}$ における $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ の固有関数 |
| 56 | TM3D.DATA | $L^{-1}D^{-1}(N + \hat{E})D^{-1}$ の対角要素 (ゼロモードを除いた行列) |
| 57 | T3O1.DATA | $L^{-1}D^{-1}(N + \hat{E})D^{-1}$ の非対角要素 |
| 58 | T3O2.DATA | $L^{-1}D^{-1}(N + \hat{E})D^{-1}$ の非対角要素 |
| 59 | TM4EV.DATA | 最初の 10 点の $L^{-1}D^{-1}AD^{-1}$ の固有値 (ゼロモードを除いた行列) |
| 60 | TM5D.DATA | $G \left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right) (= I)$ の対角要素 |
| 61 | T5O1.DATA | $G \left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right)$ の非対角要素 |
| 62 | T5O2.DATA | $G \left(\frac{1}{ \nabla r ^2} \right)$ の非対角要素 |
| 63 | AGRGT.DATA | $\langle \nabla r \cdot \nabla \theta \rangle$ |
| 64 | KMAT00.DATA | $K_{j,0} (j = -3, -2, -1, 1, 2, 3), rK_{0,0}$ |

* 2

* 2 から * 2 までのファイルは、SUB.MTAB で ITMTFL=1 と設定したとき出力される。

付録 I MARG2D コードの副プログラム一覧

| 名前 | 種類 | 内容 |
|--------|----|---|
| ADDM | S | 行列の和 |
| AMTTST | S | テスト用 |
| | | IAMT \neq 0 (main プログラムで設定する) のとき実行される。 行列 A の上書きデータを加工して、カップルを外す |
| | | IAMT = 1 : すべて |
| | | IAMT = 12 : Y_1 と Y_2 のカップルなし |
| | | IAMT = 1020 : Y_1 と Y_0 , Y_2 と Y_0 のカップルなし |
| | | IAMT = 10 : Y_0 と Y_1 のカップルなし |
| | | IAMT = 20 : Y_0 と Y_2 のカップルなし |
| BNDMAT | S | 行列 A, B の有理面の処理 (自然境界) |
| BSINTP | S | 平衡諸量の評価点 $r_{j+1/2}$ における値を s のメッシュ上の 値の Spline 補間により求める |
| CALMER | S | $a, c, \alpha, \mu, y_i^{(1)}$ の計算 |
| CALRR | S | $r(s)$ 計算 |
| CALU | S | 行列を LU 分解 |
| CINV | S | 逆行列を求める ($M \geq 4$)。sub CALU を CALL してから使う。 |
| CINV23 | S | 逆行列を求める ($M = 2, 3$)。 |
| CINVR | S | 逆行列を求める。 |
| CLDUCM | S | 対角行列 LU 分解 |
| CTRIAN | S | LU 分解行列の 1 次方程式を解く |
| COEFM | S | フーリエ係数を求めて、ファイルへ書出す。 |
| CTRAPZ | S | 台形則積分 |
| DEL0M | S | モードゼロの行、列を削除する。 |
| DGGM | S | M^\dagger |
| EGNTS1 | S | 試行関数法 (自然境界用) |
| EGNTST | S | 試行関数法 (連続境界用) |
| EGNVAL | S | 逆べき法で固有値問題を解く。 |
| BMATY | S | $B\vec{Y}$ |
| EHVAL | S | $e(r, \theta)$, $h(r, \theta)$, $\langle \nabla r ^2 \rangle$ の計算 |
| EVLDKD | S | $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ (ゼロモードは除く) の固有値、固有関数、 $L^{-1}D^{-1}AD^{-1}$ (ゼロモードは除く) の固有値の計算、ファイル書出し |
| F2MDDR | S | $d/dr[F^2M_D D]$ |
| FLOUT2 | S | 指定ファイルへダンプ出力 |

| 名前 | 種類 | 内容 |
|--------|----|--|
| FMESH | S | 生成関数 F_m により節点計算 |
| FOUR1 | S | FFT |
| FOURM | S | 指定範囲のフーリエ係数設定 |
| FPQDR | S | dF/dr 、 d^2F/dr^2 、 dp/dr 、 dq/dr 、 d^2q/dr^2 の計算 |
| HERMT3 | S | 行列 A を完全エルミート化 対角ブロックの非対角要素に対して $Re(A_{j,k}) = (Re(A_{j,k}) + Re(A_{k,j}))/2$ 非対角ブロックに対して $Im(A_{j,k}) < \epsilon$ のとき $Im(A_{j,k}) = 0$ とする。 |
| INTVEC | S | 逆べき法初期ベクトル設定 |
| MATEG3 | S | 行列 A 、 B を 1 次元配列へ格納 (自然境界条件) MATEG2 と同じ処理。引数のみ異なる。 |
| MATEGN | S | 行列 A 、 B を 1 次元配列へ格納 (連続条件) |
| MATINT | S | 行列格納変数ゼロクリア |
| MATLM | S | $(f(\theta))_{l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-il\theta) f(\theta) \exp(im\theta) d\theta$ を FFT で計算する。 |
| MDIRAT | S | s のメッシュ s_j 上で M_D を計算し Spline 補間して、 有理面 r_m 上の M_D 、 dM_D/dr を求める。 |
| MDIRR | S | s のメッシュ s_j 上で M_D を計算し Spline 補間して、 評価点 $r_{j+1/2}$ 上の M_D 、 dM_D/dr を求める。 |
| MESH | S | 一様分布、ローレンツ分布の組み合わせ分布関数によるメッシュ作成 |
| MESH3 | S | 一様分布、ローレンツ分布の組み合わせ分布関数によるメッシュ作成 (固定点設定可) |
| MESH5 | S | 一様分布、ローレンツ分布の組み合わせ分布関数によるメッシュ作成 (固定点の左右幅がほぼ等しい、固定点は 2 点まで) |
| MKMESH | S | r のメッシュ生成 ($r_j, r_{j+1/2}$) |
| MLKRAT | S | 有理面における行列 M_O 、 L 、 K を計算 |

| 名前 | 種類 | 内容 |
|--------|----|--|
| MTAB | S | 行列 A 、 B 作成 |
| MTABFL | S | $\langle \nabla r \cdot \nabla \theta \rangle$ 、 $((\nabla r ^2)(1/ \nabla r ^2))$ 、 $G(1/ \nabla r ^2)$ 、 $M_H (= F^2 M_D D)$ 、 $r d/dr(M_H)$ 、 $L^{-1}(D^{-1}M_O - M_O^\dagger D^{-1})$ (ゼロモードは除く)、 $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ (ゼロモードは除く)、 $L^{-1}D^{-1}(N + \hat{E})D^{-1}$ (ゼロモードは除く)、 $L^{-1}D^{-1}AD^{-1}$ (ゼロモードは除く)、 rK_{00} のファイル出力 |
| MTRX | S | 1メッシュ分の行列計算 |
| MULDm | S | 行列の積 DM 、 D は対角行列 |
| MULM | S | 行列の積 |
| MULMD | S | 行列の積 MD 、 D は対角行列 |
| MULMV | S | 行列とベクトルの積 |
| MULVM | S | ベクトルと行列の積 |
| NORML | S | 長さ a で規格化 |
| OPNCLS | S | ファイルの OPEN、CLOSE |
| QSET | S | 有理面となる r の設定 |
| RAINTP | S | 平衡諸量の有理面における値を Spline 補間で計算 |
| RATION | S | 有理面における行列を計算し、 μ を求める。 |
| RATNO | S | 有理面となるメッシュNO の設定 |
| RDINTR | S | インターフェイスプログラムが出力した R 、 Z フーリエ係数ファイルの読込み |
| RDINTS | S | インターフェイスプログラムが出力した平衡データファイルの読込み |
| RDINTT | S | インターフェイスプログラムが出力した $H(s, \theta)$ 、 $K(s, \theta)$ データファイルの読込み |
| RDNMLS | S | 計算パラメータ読込み |
| RTHVAL | S | $e(r, \theta)$ 、 $h(r, \theta)$ の計算に必要な値 $ \nabla r ^2$ 、 $\partial_\theta \nabla r ^2$ 、 $\partial_r \nabla r ^2$ 、 $\partial_\theta (\nabla r \cdot \nabla \theta)$ 、 $\beta_{r, \theta}$ 、 $\partial_\theta \beta_{r, \theta}$ の計算 |
| RVALFM | S | いろいろな値をフーリエ変換して、ファイルへ書出す。 |
| RZDRR | S | dr/ds 、 d^2r/ds^2 を計算し、 Δ 、 R_m 、 Z_m の $\partial/\partial r$ 、 $\partial^2/\partial r^2$ を計算する。 |
| RZRST | S | $(R(r, \theta), Z(r, \theta))$ 、 $(R(s, \theta), Z(s, \theta))$ ファイル出力 |
| SELEGN | S | 平衡データファイル、 R 、 Z フーリエ係数ファイルを読込み、Spline 補間して評価点上の M_D 、 dM_D/dr を計算し、行列 A 、 B を生成する。 |
| SELRAT | S | 平衡データファイル、 R 、 Z フーリエ係数ファイルを読込み、有理面における行列計算をして、 μ を計算する。 |
| SETRAT | S | 有理面 r_m 、 q_m 設定 |
| SOLEGN | S | 行列 A 、 B を1次元配列へ格納し、自然境界条件または連続の場合の固有値問題を解き、固有関数をファイルへ書き出す。 |

| 名前 | 種類 | 内容 |
|--------|----|--|
| TSMAT1 | S | $L^{-1}(D^{-1}M_O - M_O^{\dagger}D^{-1})$ 、 $L^{-1}D^{-1}\hat{K}D^{-1}$ 、 $L^{-1}D^{-1}(N + \hat{E})D^{-1}$ 、 $L^{-1}D^{-1}AD^{-1}$ (ゼロモードは除く)の計算 |
| VECPRO | S | ベクトル内積 |
| WRCHR | S | ファイル書出し文字列生成 |
| XHAB | S | 行列 A または B から指定モードのみ取出し、 3重対角行列を作成し、1次元配列へ格納 |
| XMSS | S | 固有関数 \bar{Y} のファイル書出し(連続) |
| XMSS4 | S | テスト用 IAMT2 = 1 (main プログラムで設定する) のとき実行される。 指定モード (MNOX) のみ取り出して解いた固有値問題の固有関数 $Y_m(r)$ のファイル書出し(自然境界) |
| YUGENY | S | 有限要素法データ K_{Δ} 、 L_{Δ} 、 M_{Δ} 、 M_{Δ}^{\dagger} 、 R_{Δ} 、 M'_{Δ} の計算 |
| YOUT | S | 固有関数 \bar{Y} のファイル書出し(自然境界条件) |
| ZNO | S | モード NO、 r のメッシュ NO を指定して固有ベクトルの配列 NO を 計算 |
| FRDRT | F | $r_{j+1/2}$ における R 、 $\partial R/\partial\theta$ 、 $\partial^2 R/\partial\theta^2$ 、 $\partial R/\partial r$ 、 $\partial^2 R/\partial r\partial\theta$ 、 $\partial^2 R/\partial r^2$ |
| FZDRT | F | $r_{j+1/2}$ における Z 、 $\partial Z/\partial\theta$ 、 $\partial^2 Z/\partial\theta^2$ 、 $\partial Z/\partial r$ 、 $\partial^2 Z/\partial r\partial\theta$ 、 $\partial^2 Z/\partial r^2$ |
| FDRDRT | F | s_j における R 、 $\partial R/\partial\theta$ 、 $\partial^2 R/\partial\theta^2$ 、 $\partial R/\partial r$ 、 $\partial^2 R/\partial r\partial\theta$ 、 $\partial^2 R/\partial r^2$ |
| FDZDRT | F | s_j における Z 、 $\partial Z/\partial\theta$ 、 $\partial^2 Z/\partial\theta^2$ 、 $\partial Z/\partial r$ 、 $\partial^2 Z/\partial r\partial\theta$ 、 $\partial^2 Z/\partial r^2$ |
| RARDRT | F | 有理面における R 、 $\partial R/\partial\theta$ 、 $\partial^2 R/\partial\theta^2$ 、 $\partial R/\partial r$ 、 $\partial^2 R/\partial r\partial\theta$ 、 $\partial^2 R/\partial r^2$ |
| RAZDRT | F | 有理面における Z 、 $\partial Z/\partial\theta$ 、 $\partial^2 Z/\partial\theta^2$ 、 $\partial Z/\partial r$ 、 $\partial^2 Z/\partial r\partial\theta$ 、 $\partial^2 Z/\partial r^2$ |

ここで種類の欄にある S はサブルーチン、F はファンクションである。ファンクションの型はすべて REAL*8 である。

付録 J MARG2D コードの計算パラメータ

計算パラメータはネームリスト形式で入力する。

ネームリスト名: NEGN

| 項目 | 配列 | 型 | 意味 | デフォルト値 |
|--------|----|-----|---|-----------|
| NS | 1 | I | 最小モード ($NS \leq 0$) | 0 |
| NE | 1 | I | 最大モード ($NE \geq 2$) | 2 |
| MNOX | 1 | I | 不要(テスト用、モード指定) | 1 |
| LR | 1 | C | 不要(テスト用、'L':左, 'R':右) | 'L' |
| LMBD0 | 1 | R*8 | 固有値問題の逆べき法の初期値 λ_0 | 要指定 |
| NR | 1 | I | r グリッド数-1(r の分割数) | 100 |
| RR2 | 1 | R*8 | r の2番目のグリッド点 r_2 | 0.01 |
| NN | 1 | I | 有理面 $q = m/n$ の n | 1 |
| MM | 5 | I | 有理面 $q = m/n$ の m | 1,0,...,0 |
| CDIST | 1 | R*8 | r のグリッド生成に用いるローレンツ分布の重み c | 0.1 |
| WDIST | 1 | R*8 | r のグリッド生成に用いるローレンツ分布の中 w | 0.01 |
| IOPTN | 1 | I | 処理フラグ = 0: Mercier index = 1: 固有値問題 = 2: 試行関数法 | 0 |
| IBOUND | 1 | I | 固有値問題境界フラグ = 0: 連続 = 1: 自然境界 | 1 |

付録K MARG2D コードのインクルードファイル

K.1 定数定義

| | |
|-----------|---|
| fnomt.f | SUB.MTAB で定数 ITMTFL=1 と設定したとき出力されるファイルの定義 |
| flnoq.f | $q(r_{j+1/2})$ 、 dq/dr 、 F 、 dF/dr 、 p 、 dp/dr 、 $dp/d\psi$ のファイルの定義 |
| flnorz.f | $(R(r, \theta), Z(r, \theta))$ (θ 方向)、 $(R(r, \theta), Z(r, \theta))$ (r 方向)、 $(R(s, \theta), Z(s, \theta))$ (θ 方向)、 $(R(s, \theta), Z(s, \theta))$ (s 方向) のファイル定義 |
| fnosr.f | s_j 、 $r(s)$ 、 dr/ds のファイルの定義 |
| paratst.f | テスト結果整理用のファイルの定義 |
| paracl.f | SUB.CLOCKM による CPU 時間の測定値のファイルの定義 |

parabnd.f (境界条件)

| 定数名 | 定数 | 内容 |
|--------|----|------|
| ICBOCO | 0 | 連続 |
| ICBOFR | 1 | 自由境界 |

paraarr.f (配列サイズ)

| 定数名 | 定数 | 内容 |
|--------|-----------|----------------------------|
| IAS | 1006 | s のメッシュ数 |
| IAS3 | 3018 | IAS \times 3 |
| IAANG | 513 | θ のメッシュ数 |
| IAFCO | 20 | R, Z のフーリエ係数個数 |
| IAL | 6 | 有理面数 |
| IAE | 201 | r のメッシュ数 + 有理面数 |
| IAEGN | 879000 | 行列 A, B の対角要素を格納する配列の大きさ |
| IAXF | 33+1 | モード数+1 |
| IAXF2 | IAXF*2 | IAXF \times 2 |
| IAXF4 | IAXF*4 | IAXF \times 4 |
| IAXFXF | IAXF*IAXF | IAXF \times IAXF |
| IAEF | IAE*IAXF | IAE \times IAXF |

paraopt.f (処理オプション)

| 定数名 | 定数 | 内容 |
|--------|----|-------------------|
| ICPMER | 0 | MERCIER INDEX の計算 |
| ICPEGN | 1 | 固有値問題 |
| ICPTST | 2 | 試行関数法 |

K.2 COMMON

comegn.f

| 共通ブロック名 | 変数名 | 型 | 内容 |
|---------|------------------|-----|--|
| EGNBLK | ERR(IAE) | R*8 | メッシュ r_j |
| | ERR2(IAE) | R*8 | メッシュ $r_{j+1/2}$ |
| | ESS(IAE) | R*8 | $s(r_{j+1/2})$ |
| | EF(IAE) | R*8 | $F(r_{j+1/2})$ |
| | EDFDR(IAE) | R*8 | $dF/dr(r_{j+1/2})$ |
| | EP(IAE) | R*8 | $p(r_{j+1/2})$ |
| | EDPDR(IAE) | R*8 | $dp/dr(r_{j+1/2})$ |
| | EDPDPS(IAE) | R*8 | $dp/d\psi(r_{j+1/2})$ |
| | EQ(IAE) | R*8 | $q(r_{j+1/2})$ |
| | EDQDR(IAE) | R*8 | $dq/dr(r_{j+1/2})$ |
| | EDL(IAE) | R*8 | $\Delta(r_{j+1/2})$ |
| | EDLDR(IAE) | R*8 | $d\Delta/dr(r_{j+1/2})$ |
| | ECR(IAE,IAFCO) | R*8 | $\rho(r_{j+1/2}), R_2(r_{j+1/2}), \dots$ |
| | ECRDR(IAE,IAFCO) | R*8 | $d\rho/dr(r_{j+1/2}), dR_2/dr(r_{j+1/2}), \dots$ |
| | ECZ(IAE,IAFCO) | R*8 | $\kappa(r_{j+1/2}), z_2(r_{j+1/2}), \dots$ |
| | ECZDR(IAE,IAFCO) | R*8 | $d\kappa/dr(r_{j+1/2}), dz_2/dr(r_{j+1/2}), \dots$ |
| | RM(IAL) | R*8 | 有理面以外で密なメッシュとする点 $r(\leq 1.0)$ |
| | NR | I | r のグリッド数-1 (分割数) |
| | IERR2(IAE) | I | $r_i(s) \leq r_{j+1/2} < r_{i+1}(s)$ となるメッシュの番号 i |
| | NS | I | $X_{NS} \sim X_{NE}$ の $NS(NS \leq 0)$ |
| | NE | I | $X_{NS} \sim X_{NE}$ の $NE(NE \geq 2)$ |
| | LOPT | I | \mathcal{L} フラグ (main プログラムで設定) = 0 : 無効 (標準化なし) = 1 : 無効 ($(M_D + DM^+)$ 標準化) = 2 : M_D 標準化 |
| | IAMT | I | モード間結合フラグ (テスト用, main プログラムで設定) = 0 : すべてのモード結合 (以下テスト用) = 1 : すべてのモードの結合なし = 10 : Y0 と Y1 の結合なし = 12 : Y1 と Y2 の結合なし = 20 : Y0 と Y2 の結合なし = 1020 : Y0 と Y1 の結合と、 Y0 と Y2 の結合なし |

| <u>共通ブロック名</u> | <u>変数名</u> | <u>型</u> | <u>内容</u> |
|----------------|------------|----------|---|
| | IAMT2 | I | モードフラグ (テスト用, main プログラムで設定) = 0 : すべてのモード = 1 : テスト用 行列 A、B から、指定モード (MNOX) を取り出して固有値問題を解く |
| | MM(IAL) | I | 有理面 $q = m/n$ の m |
| | NN | I | 有理面 $q = m/n$ の n |
| | NRM | I | 有理面以外で密なメッシュとする点 r の数 |
| | MNOX | I | X_{MNOX} 指定 |
| | LR*1 | C | 'L':左, 'R':右 |

| <u>共通ブロック名</u> | <u>変数名</u> | <u>型</u> | <u>内容</u> |
|----------------|------------|----------|------------------------------|
| QBLK | NQ | I | 有理面処理数 |
| | IQNO(IAL) | I | $q(s_i) = m/n$ となるメッシュNO i |
| | IQNOE(IAL) | I | $q(r_j) = m/n$ となるメッシュNO j |

| commat.f 共通ブロック名 | 変数名 | 型 | 内容 |
|---------------------|-------------------|------|--|
| MATBLK | EMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 \hat{E} |
| | AMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 A |
| | GHMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 \hat{G} |
| | GMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 G |
| | PMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 P |
| | HHMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 (\hat{H}) |
| | HMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 H |
| | DMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 D |
| | DGNMIQ(IAXF) | C*16 | 行列 D |
| | PINV(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 P^{-1} |
| | H(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 H |
| | NMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 N |
| | LHAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 \hat{L} |
| | L(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 L |
| | MMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 M |
| | DLD(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 $DL D$ |
| | KMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 K |
| | DFMMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 $d/dr(F^2 M_D D)$ |
| | MDIMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 M_D |
| | MOMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 M_O |
| | MODGGR(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 M_O^\dagger |
| | MODMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 $M_O D$ |
| | DMOMAT(IAXF,IAXF) | C*16 | 行列 $D M_O^\dagger$ |
| | MDIDRR(IAE,IAXF) | C*16 | $d/dr(M_D)$ |
| | MDI(IAE,IAXF) | C*16 | M_D ($M(r(s_j))$ の Spline 補間により 計算した評価点 $r_{j+1/2}$ または 有理面 r_m 上の値) |

comrat.f 有理面 ($q(r_m) = m/n$) における値

| <u>共通ブロック名</u> | <u>変数名</u> | <u>型</u> | <u>内容</u> |
|----------------|------------------|----------|---|
| EGNRAT | | | |
| | RRR(IAL) | R*8 | r_m |
| | RSS(IAL) | R*8 | $s(r_m)$ |
| | RF(IAL) | R*8 | F |
| | RDFDR(IAL) | R*8 | dF/dr |
| | RP(IAL) | R*8 | p |
| | RDPDR(IAL) | R*8 | dp/dr |
| | RDPDPS(IAL) | R*8 | $dp/d\psi$ |
| | RQ(IAL) | R*8 | q |
| | RDQDR(IAL) | R*8 | dq/dr |
| | RDL(IAL) | R*8 | Δ |
| | RDLDR(IAL) | R*8 | $\partial\Delta/\partial r$ |
| | RCR(IAL,IAFCO) | R*8 | ρ, R_2, \dots |
| | RCRDR(IAL,IAFCO) | R*8 | $\partial\rho/\partial r, \partial R_2/\partial r, \dots$ |
| | RCZ(IAL,IAFCO) | R*8 | κ, Z_2, \dots |
| | RCZDR(IAL,IAFCO) | R*8 | $\partial\kappa/\partial r, \partial Z_2/\partial r, \dots$ |
| | MMNO | I | 有理面 NO |

comsol.f

| <u>共通ブロック名</u> | <u>変数名</u> | <u>型</u> | <u>内容</u> |
|----------------|-----------------|----------|--|
| SOLBLK | | | |
| | A | R*8 | a |
| | EPSLN | R*8 | ϵ |
| | PI | R*8 | π |
| | PSIS | R*8 | ψ_s |
| MSHBLK | | | |
| | SS(IAS) | R*8 | s |
| | RR(IAS) | R*8 | $r(s)$ |
| | ANG(IAANG) | R*8 | θ |
| | NSTEP | I | s 方向グリッド数-1、分割数 |
| | NANG | I | θ 方向グリッド数-1、分割数 |
| UNTBLK | | | |
| | RON | R*8 | \hat{R}_0 |
| | R0 | R*8 | R_0 |
| FUNBLK | | | |
| | F(IAS) | R*8 | $F(s_i)$ |
| | DFDS(IAS) | R*8 | $dF/ds(s_i)$ |
| | P(IAS) | R*8 | $p(s_i)$ |
| | DPDPSI(IAS) | R*8 | $dp/d\psi(s_i)$ |
| | Q(IAS) | R*8 | $q(s_i)$ |
| | DQDS(IAS) | R*8 | $dq/ds(s_i)$ |
| | DFDR(IAS) | R*8 | $dF/dr(r(s_i))$ |
| | DPDR(IAS) | R*8 | $dp/dr(r(s_i))$ |
| | DQDR(IAS) | R*8 | $dq/dr(r(s_i))$ |
| FCOBLK | | | |
| | DEL(IAS) | R*8 | Δ |
| | DELDR(IAS) | R*8 | $\partial\Delta/\partial r$ または $\partial/\partial s$ (Δ') |
| | CR(IAS,IAFCO) | R*8 | $\rho, R_2, \dots, R_{NFCO}$ |
| | CRDR(IAS,IAFCO) | R*8 | $\partial\rho/\partial r, \partial R_2/\partial r, \dots, \partial R_{NFCO}/\partial r$ または $\partial/\partial s$ |
| | CZ(IAS,IAFCO) | R*8 | $\kappa, Z_2, \dots, Z_{NFCO}$ |
| | CZDR(IAS,IAFCO) | R*8 | $\partial\kappa/\partial r, \partial Z_2/\partial r, \dots, \partial Z_{NFCO}/\partial r$ または $\partial/\partial s$ |
| | NFCO | I | フーリエ係数個数 |

comtmp.f: SUB.RTHVAL, EHVAL, RVALFM, MTRX で参照

| 共通ブロック名 | 変数名 | 型 | 内容 |
|---------------|---------------|-----|---|
| <u>TMPBLK</u> | | | |
| | R(IAANG) | R*8 | R |
| | DRDT(IAANG) | R*8 | $\partial R / \partial \theta$ |
| | DRDR(IAANG) | R*8 | $\partial R / \partial r$ |
| | DRDT2(IAANG) | R*8 | $\partial^2 R / \partial \theta^2$ |
| | DRDRT(IAANG) | R*8 | $\partial^2 R / \partial r \partial \theta$ |
| | Z(IAANG) | R*8 | Z |
| | DZDT(IAANG) | R*8 | $\partial Z / \partial \theta$ |
| | DZDR(IAANG) | R*8 | $\partial Z / \partial r$ |
| | DZDT2(IAANG) | R*8 | $\partial^2 Z / \partial \theta^2$ |
| | DZDRT(IAANG) | R*8 | $\partial^2 Z / \partial r \partial \theta$ |
| | GR2(IAANG) | R*8 | $ \nabla r ^2$ |
| | GR2DT(IAANG) | R*8 | $\partial / \partial \theta (\nabla r ^2)$ |
| | GR2DR(IAANG) | R*8 | $\partial / \partial r (\nabla r ^2)$ |
| | GRGTD(IAANG) | R*8 | $\partial / \partial \theta (\nabla r \cdot \nabla \theta)$ |
| | BRT(IAANG) | R*8 | $\beta_{r,\theta}$ |
| | BRTDT(IAANG) | R*8 | $\partial / \partial \theta (\beta_{r,\theta})$ |
| | GR2DB(IAANG) | R*8 | $\partial_{\perp} (\nabla r ^2)$ |
| | R2DB(IAANG) | R*8 | $\partial_{\perp} (R/R_0)^2$ |
| | GRGT(IAANG) | R*8 | $\nabla r \cdot \nabla \theta$ |
| | WRR | R*8 | r |
| | WF | R*8 | F |
| | WDFDR | R*8 | dF/dr |
| | WQ | R*8 | q |
| | WDQDR | R*8 | dq/dr |
| | WDPDPS | R*8 | $dp/d\psi$ |
| | WDPDR | R*8 | dp/dr |
| | R2FQDR | R*8 | $d/dr(r^2 F/q)$ |
| <u>TMPBL2</u> | | | |
| | CHPRTW(IAANG) | R*8 | $r \partial_{\perp} (\nabla r ^2) + r \nabla r ^2 d/d\theta (\beta_{r,\theta})$ |
| | CHPRT0(IAANG) | R*8 | $rd/dr (\nabla r ^2) + rd/d\theta (\nabla r \cdot \nabla \theta)$ |
| | CHPRT1(IAANG) | R*8 | $-1/\epsilon^2 / r (q/F)^2 ((R/R_0)^2 dp/dr + F dF/dr) - q/r / F \nabla r ^2 d/dr (r^2 F/q)$ |

付録 L 計算パラメータ例

磁気面が円の場合の Solovév 平衡 (有理数 $q = 1$) の場合の計算パラメータを示す。図 1、4 参照。

SELENEJ とのインターフェイスプログラムの計算パラメータ

```
&NEWRUN WNTORE=-1.0D0, AL0=-1.00D-3,
NPSI=100, NCHI=128, NV=0,
NR=513, NZ=513,
NLGREN=.FALSE., REXT=1.0D0, NCORD=1, NTCASE=2,
WIDTH=1.0D6, NLEINQ=.FALSE.,
NSHIFT=1, SDIV=0.5D0, NAN=10,
EPSR=1.0D-5, EPSEQ=1.0D-4, EPST=1.0D-5,
NITMAX=10, ITEST=1, NFIG=0,
EPSCON=1.0D-4, EPSMAC=1.0D-12,
SCALE=1.0D0, MSPL=3, NTURN=10,
SDIST(5)=1.05D0, CDIST(5)=0.8D0,
WDIST(5)=0.02D0,
INTORE=0, NUMEQU=1, NMESH=0,
SDIST(1)=1.00D0, WDIST(1)=0.10D0, CDIST(1)=0.20,
NSHELL=-1, IFC=0,
RMSOL=0.93417D0, RPSOL=0.35682D0,
ESOL=1.0D0, DSOL=0.0D0,
QOSOL=0.8D0, VESOL=0.0D0,
RVSOL=0.0D0, TOSOL=1.0D0,
DBEQU='ITEREDA', RUNEQU=' ',
NOREQU=777, MODEL=-1, MODEU=11,
&END
&M2D
IPRFLG = 2,
MRZ = 15,
IEQSYM = 0,
&END
&RZWALL N2SHEL=0,
&END
```

MARG2D の計算パラメータ

```
&NEGN NS = -16, NE = 16,
LMBD0 = 1.9000D00,
NR = 200, RR2 = 0.001D0, NN = 1, MM = 1, 0, 0, 0, 0, 0,
CDIST = 0.2D0, WDIST = 0.20D0,
INFLG = 2, IOPTN = 1, IBOUND = 1, MSFLG = 0,
&END
```

円形断面数値平衡 ($\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$) の場合の計算パラメータを示す。図 20、26 参照。

SELENEJ の計算パラメータ

```

&DSK NPRNT=6, KTMAX=1, MCPU=1000,
IERATO = 66,
&END
==== IN.b10.en ===== JT-60 Ex. 8 TOKAMAK =====
&NEWRUN
ITMAX=1,
LOHM=.FALSE., LNEO=.FALSE., AION=2.D0,
AION=1.D0, ZION=1.D0,
BTOL=3.8D0, TCUR=2.95D6,
CIEXT= 0.0D0,
RMAJ=3.42D0, RPLA=1.00D0, ELIP=1.0D0, TRIG=0.00D0,
RCNT=3.42d0,
CD(1)=1.050D20, CD(2)=1.050D19, CD(3)=0.5D0, CD(4)=1.5D0,
CD(5)=4.D0, CD(6)=0.D0, CD(7)=0.D0,
CTE(1)=1.0D4, CTE(2)=1.0D4, CTE(3)=0.5D0,
CTI(1)=1.0D4, CTI(2)=1.0D4, CTI(3)=0.5d0,
CSE(1)=1.0D0, CSE(2)=1.0D0, CSE(3)=1.5D0,
CSE(4)=0.2D0, CSE(5)=1.0D7, CSE(6)=0.D0,
ZLOW=6.D0, ALLOW=12.D0,
CZEFF(1)=1.0D0, CZEFF(2)=1.0D0, CZEFF(3)=1.0D0, CZEFF(4)= 1.5D0,
CZEFF(5)=4.0D0,
NR = 513, NZ = 513, NV=101, NSUMAX= 101,
JSHAPE=-1, FIXSET=1.0D-2,
MABIKI=2, IGUESS=0, NUMAX=101,
IEQMAX=40, EEQMAX=1.0D-4, ESETUP=1.0D-5,
IBLMAX=50,
CFCT(1) = 1.0D0,
CFCT(3) = 0.90D0,
CFCT(4) = 0.1D0, CFCT(5) = 20.D0,
ZWAL=1.2D0, RWAL=1.2D0,
&END
&COILP
NCLNUM = 7, WIV=1.D0,
RCOIL(1,1)=1.80D0, ZCOIL(1,1)=0.10D0,
RCOIL(1,2)=1.80D0, ZCOIL(1,2)=0.50D0,
RCOIL(1,3)=1.80D0, ZCOIL(1,3)=1.00D0,
RCOIL(1,4)=2.60D0, ZCOIL(1,4)=2.00D0,
RCOIL(1,5)=4.00D0, ZCOIL(1,5)=2.00D0,
RCOIL(1,6)=4.80D0, ZCOIL(1,6)=0.90D0,
RCOIL(1,7)=4.80D0, ZCOIL(1,7)=0.30D0,
&END
&FIXP
NSFX = -13, NFREAD=0,
WNV(0)=1.0D2, WNV(1)=1.0D2, WNV(2)=1.0D2,
&END
==== E N D of J O B S =====
&NEWRUN
ITMAX=0,
&END

```

CD(1)、CD(2) のみを変化させて、異なる β_J の平衡を作成する。この場合は $\beta_J = 1.0$ となる。

SELENEJ とのインターフェイスプログラムの計算パラメータ

```

&NEWRUN WNTORE=-1.0D0, AL0=-1.00D-3,
NPSI=100, NCHI=128, NV=0,
NR=257, NZ=257,
NLGREN=.FALSE., REXT=1.0D1, NCORD=1, NTCASE=3,
WIDTH=1.0D6, NLEINQ=.FALSE.,
NSHIFT=1, SDIV=0.5D0, NAN=10,
EPSR=1.0D-5, EPSEQ=1.0D-4, EPST=1.0D-5,
NITMAX=6, ITEST=0, NFIG=0,
EPSCON=1.0D-4, EPSMAC=1.0D-12,
SCALE=0.8259D0, MSPL=5, NTURN=10,
SDIST(5)=1.05D0, CDIST(5)=0.8D0,
WDIST(5)=0.02D0,
INTORE=0, NUMEQU=8, NMESH=1,
SDIST(1)=1.00D0, WDIST(1)=0.10D0, CDIST(1)=0.20,
NSHELL=-1, IFC=0,
RMSOL=0.93417D0, RPSOL=0.35682D0,
ESOL=1.0D0, DSOL=0.0D0,
Q0SOL=0.8D0, VESOL=0.0D0,
RVSOL=0.0D0, T0SOL=1.0D0,
DBEQU='ITEREDA', RUNEQU=' ',
NOREQU=777, MODEL=-1, MODEU=11,
&END
&M2D
IPRFLG = 2,
MRZ = 15,
IEQSYM = 0,
&END
&RZWALL N2SHEL=181, MCHI = -180, NWFIL=3,
RSCL = 1.75D0, ZSCL = 2.50D0, THTSHL = 0.D0,
&END

```

MARG2D の計算パラメータ

```

&NEGN NS = -16, NE = 16,
LMBD0 = -0.500D00,
NR = 200, RR2 = 0.001D0, NN = 1, MM = 1, 2, 0, 0, 0, 0,
CDIST = 0.2D0, WDIST = 0.20D0,
INFLG = 2, IOPTN = 1, IBOUND = 1, MSFLG = 0,
&END

```

ERATOJ の計算パラメータ

```
&NEWRUN WNTORE= -1.000D0, AL0=-0.4000D-4, NUMEQU= 1,  
NPSI=200, NCHI=60, SCALE=0.8259D0,  
NCORD=1, NLGREN=.FALSE., REXT=1.0D0,  
WIDTH=1.0D+6, NV=0, NLEINQ=.FALSE.,  
NMESH=1, SDIST(1)=1.0D0, CDIST(1)=1.0D0, WDIST(1)=0.05D0,  
NTCASE=3, NEQSI=21,  
NITMAX=10, NSHIFT=1,  
NR=129, NZ=65,  
ITEST=1,  
RMSOL=3.0D0, RPSOL=1.0D0, ESOL=0.8D0, DSOL=-0.2D0,  
QOSOL=1.0D0,  
SDIV=1.0D0, IFC=0,  
NFIG=0, ANGLE(1)=0., ANGLE(2)=45., ANGLE(3)=90.,  
ALARG=20.,  
ARROW=0.8,  
IDEN=0, DENA=1.0D0, DENB=1.0D0, DENC=0.1D0,  
DBEQU='ERATO-JV3', RUNEQU=' ',  
NOREQU=777,  
NAN=10,  
EPSR=1.0D-5, EPSEQ=1.0D-4,  
EPSCON=1.0D-4, EPSMAC=1.0D-12, MSPL=3, NTURN=10,  
NSHELL=-1,  
&END  
&RZWALL N2SHEL=0,  
&END  
SDIST(5)=1.05D0, CDIST(5)=0.6D0, WDIST(5)=0.05,  
SDIST(5)=1.10D0, CDIST(5)=0.1D0, WDIST(5)=1.0D6,
```


楕円断面数値平衡 ($\beta_J = 1.0$ 、 $q_0 = 0.9$) の場合の計算パラメータを示す。

SELENEJ の計算パラメータ

```

&DSK NPRNT=6, KTMAX=1, MCPU=1000,
IERATO = 66,
&END
==== IN.b10.dat ==== JT-60 Ex. 8 TOKAMAK ====
&NEWRUN
ITMAX=1,
LOHM=.FALSE., LNEO=.FALSE., AION=2.D0,
AION=1.D0, ZION=1.D0,
BTOL=3.8D0, TCUR=3.50D6,
CIEXT= 0.0D0,
RMAJ=3.42D0, RPLA=1.00D0, ELIP=1.2D0, TRIG=0.20D0,
RCNT=3.42D0,
CD(1)=1.250D20, CD(2)=1.250D19, CD(3)=0.5D0, CD(4)=1.5D0,
CD(5)=4.D0, CD(6)=0.D0, CD(7)=0.D0,
CTE(1)=1.0D4, CTE(2)=1.0D4, CTE(3)=0.5D0,
CTI(1)=1.0D4, CTI(2)=1.0D4, CTI(3)=0.5D0,
CSE(1)=1.0D0, CSE(2)=1.0D0, CSE(3)=1.5D0,
CSE(4)=0.2D0, CSE(5)=1.0D7, CSE(6)=0.D0,
ZLOW=6.D0, ALOW=12.D0,
CZEFF(1)=1.0D0, CZEFF(2)=1.0D0, CZEFF(3)=1.0D0, CZEFF(4)= 1.5D0,
CZEFF(5)=4.0D0,
NR = 513, NZ = 513, NV=101, NSUMAX= 101,
JSHAPE=-1, FIXSET=1.0D-2,
MABIKI=2, IGUESS=0, NUMAX=101,
IEQMAX=40, EEQMAX=1.0D-4, ESETUP=1.0D-5,
IBLMAX=50,
CFCT(1) = 1.0D0,
CFCT(3) = 0.90D0,
CFCT(4) = 0.1D0, CFCT(5) = 20.D0,
ZWAL=1.2D0, RWAL=1.2D0,
&END
&COILP
NCLNUM = 7, WIV=1.D0,
RCOIL(1,1)=1.80D0, ZCOIL(1,1)=0.10D0,
RCOIL(1,2)=1.80D0, ZCOIL(1,2)=0.50D0,
RCOIL(1,3)=1.80D0, ZCOIL(1,3)=1.00D0,
RCOIL(1,4)=2.60D0, ZCOIL(1,4)=2.00D0,
RCOIL(1,5)=4.00D0, ZCOIL(1,5)=2.00D0,
RCOIL(1,6)=4.80D0, ZCOIL(1,6)=0.90D0,
RCOIL(1,7)=4.80D0, ZCOIL(1,7)=0.30D0,
&END
&FIXP
NSFX = -13, NFREAD=0,
WNV(0)=1.0D2, WNV(1)=1.0D2, WNV(2)=1.0D2,
&END
==== E N D of J O B S ====
&NEWRUN
ITMAX=0,
&END

```

CD(1)、CD(2) のみを変化させて、異なる β_J の平衡を作成する。この場合は $\beta_J = 1.0$ となる。

SELENEJ とのインターフェイスプログラムの計算パラメータ

```

&NEWRUN WNTORE=-1.0D0, AL0=-1.00D-3,
NPSI=100, NCHI=128, NV=0,
NR=257, NZ=257,
NLGREN=.FALSE., REXT=1.0D1, NCORD=1, NTCASE=3,
WIDTH=1.0D6, NLEINQ=.FALSE.,
NSHIFT=1, SDIV=0.5D0, NAN=10,
EPSR=1.0D-5, EPSEQ=1.0D-4, EPST=1.0D-5,
NITMAX=6, ITEST=0, NFIG=0,
EPSCON=1.0D-4, EPSMAC=1.0D-12,
SCALE=0.85422D0, MSPL=5, NTURN=10,
SDIST(5)=1.05D0, CDIST(5)=0.8D0,
WDIST(5)=0.02D0,
INTORE=0, NUMEQU=8, NMESH=1,
SDIST(1)=1.00D0, WDIST(1)=0.10D0, CDIST(1)=0.20,
NSHELL=-1, IFC=0,
RMSOL=0.93417D0, RPSOL=0.35682D0,
ESOL=1.0D0, DSOL=0.0D0,
Q0SOL=0.8D0, VESOL=0.0D0,
RVSOL=0.0D0, T0SOL=1.0D0,
DBEQU='ITEREDA', RONEQU=' ',
NOREQU=777, MODEL=-1, MODEU=11,
&END
&M2D
IPRFLG = 2,
MRZ = 15,
IEQSYM = 0,
&END
&RZWALL N2SHEL=181, MCHI = -180, NWFIL=3,
RSCL = 1.75D0, ZSCL = 2.50D0, THTSHL = 0.D0,
&END

```

MARG2D の計算パラメータ

```

&NEGN NS = -16, NE = 16,
LMBD0 = -0.700D00,
NR = 200, RR2 = 0.001D0, NN = 1, MM = 1, 2, 0, 0, 0, 0,
CDIST = 0.2D0, WDIST = 0.20D0,
INFLG = 2, IOPTN = 1, IBOUND = 1, MSFLG = 0,
&END

```

ERATOJ の計算パラメータ

```
&NEWRUN
WNTORE= -1.000D0, AL0=-0.5000D-4, NUMEQU= 1,
NPSI=200, NCHI=60, SCALE=0.85422D0,
NCORD=1, NLGREN=.FALSE., REXT=1.0D0,
WIDTH=1.0D+6, NV=0, NLEINQ=.FALSE.,
NMESH=1, SDIST(1)=1.0D0, CDIST(1)=1.0D0, WDIST(1)=0.05D0,
NTCASE=3, NEQSI=21,
NITMAX=10, NSHIFT=1,
NR=129, NZ=65,
ITEST=1,
RMSOL=3.0D0, RPSOL=1.0D0, ESOL=0.8D0, DSOL=-0.2D0,
QOSOL=1.0D0,
SDIV=1.0D0, IFC=0,
NFIG=0, ANGLE(1)=0., ANGLE(2)=45., ANGLE(3)=90.,
ALARG=20.,
ARROW=0.8,
IDEN=0, DENA=1.0D0, DENB=1.0D0, DENC=0.1D0,
DBEQU='ERATO-JV3', RUNEQU=' ',
NOREQU=777,
NAN=10,
EPSR=1.0D-5, EPSEQ=1.0D-4,
EPSCON=1.0D-4, EPSMAC=1.0D-12, MSPL=3, NTURN=10,
NSHELL=-1,
&END
&RZWALL N2SHEL=0,
&END
SDIST(5)=1.05D0, CDIST(5)=0.6D0, WDIST(5)=0.05,
SDIST(5)=1.10D0, CDIST(5)=0.1D0, WDIST(5)=1.0D6,
```