

JAERI-Data/Code  
98-032



ETC-Rel コード：  
トカマクにおける相対論的電子の軌道解析

1998年11月

徳田伸二・樋口高年\*

日本原子力研究所  
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費領布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1998

編集兼発行 日本原子力研究所

**ETC-Rel コード :**

トカマクにおける相対論的電子の軌道解析

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部

徳田 伸二・樋口 高年\*

(1998年10月1日受理)

トカマクにおける相対論的電子の軌道を追跡するコードETC-Relを開発した。このコードの開発のために、相対論的電子の案内中心運動に対する正準ハミルトン形式を新たに導いた。このとき、案内中心の運動方程式は Boozer 座標で記述される。そのため、軌道を実空間(デカルト座標)で可視化するための写像ルーチンも開発した。また、ETC-Rel コードを用いてシミュレーションを行い、ディスラプション時の磁場揺動が逃走電子の無衝突損失を引き起こすことを実証した。この予測は、逃走電子発生を回避するプラズマ緊急停止に関して最近行われた JT-60U 実験とよく一致する。

ETC-Rel Cede : Orbit Trace Code  
of Relativistic Electrons in a Tokamak

Shinji TOKUDA and Takatoshi HIGUCHI\*

Department of Fusion Plasma Research  
Naka Fusion Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 1, 1998)

A code ETC-Rel has been developed which traces the orbits of relativistic electrons in a tokamak. The canonical Hamiltonian form for the relativistic guiding center drift motion of an electron has been newly derived for the development of the code. The equations of motion for the guiding center are described using Boozer coordinates. Therefore, a mapping routine has also been developed to visualize the orbits in real space (Cartesian coordinates). Simulations performed using the ETC-Rel code have demonstrated that the magnetic perturbations at disruption cause a collisionless loss of runaway electrons. These predictions agree closely with recent JT-60U experiments on fast plasma shutdown, showing that it is possible to prevent the generation of runaway electrons.

**Keywords:** Relativistic Electron, Guiding Center Drift Motion, Canonical Hamiltonian Form, Boozer Coordinates, Mapping, Magnetic Perturbations, Collisionless Loss, Tokamak, JT-60U

---

\*Fuji Research Institute Co.,

## 目 次

1. はじめに	1
<b>I 理 論</b>	1
2. 座標変換	1
2.1 Boozer座標の構成	1
2.2 デカルト座標への変換	4
3. 磁力線の流れ	5
3.1 最小作用の原理	5
3.2 平衡磁場の磁力線	5
3.3 摂動磁場中の磁力線	7
4. 相対論的電子軌道	10
4.1 案内中心近似	10
4.2 物理量の規格化と正準ハミルトン形式	12
4.3 相対論的電子の運動方程式	13
4.4 摂動論による解析解	15
4.5 電子の損失機構	16
<b>II 計算結果</b>	18
5. 磁場配位	18
5.1 MHD平衡配位	18
5.2 乱雑磁場配位	18
6. 磁場揺動による電子の無衝突損失	19
6.1 電子軌道	19
6.2 損失率	20
7. まとめと議論	20
謝 辞	21
参考文献	21
付録A コモン・ブロック	31
付録B 整合配列	33
付録C ルーチン機能	35

## Contents

1. Introduction .....	1
I. Theory .....	1
2. Coordinate Transformations .....	1
2.1 Construction of Boozer Coordinate System .....	1
2.2 Transformation to Cartesian Coordinate System .....	4
3. Magnetic Field Line Flow .....	5
3.1 Variational Principle .....	5
3.2 Equilibrium Magnetic Field Lines .....	5
3.3 Perturbed Magnetic Field Lines .....	7
4. Electron Orbits .....	10
4.1 Guiding Center Approximation .....	10
4.2 Normalization and Canonical Hamiltonian Form .....	12
4.3 Canonical Equations of Motion .....	13
4.4 Analytic Solution within First Order Perturbation .....	15
4.5 Loss Mechanisms .....	16
II. Computational Results .....	18
5. Magnetic Field Configuration .....	18
5.1 MHD Equilibrium .....	18
5.2 Perturbed Magnetic Field Lines .....	18
6. Collisionless Loss of Electrons .....	19
6.1 Electron Orbit .....	19
6.2 Loss Rates .....	20
7. Summary and Discussions .....	20
Acknowledgements .....	21
References .....	21
Appendix A Common Blocks .....	31
Appendix B Adjustable Arrays .....	33
Appendix C Subroutines .....	35

## 1 はじめに

ETC-Rel (Electron orbit Trace Code Relativistic version) コードは、ハミルトン案内中心軌道理論にもとづき、乱雑磁場の存在するトロイダル配位での相対論的電子の運動を追跡するシミュレーション・コードであり、ディスラプション時の逃走電子発生回避の研究のために開発された。

JT-60Uでは、自発的に励起する、あるいは、外部から駆動される、磁場揺動が「キラーペレット入射」(Killer Pellet Injection)後の逃走電子発生を回避・抑制することが発見され [1, 2, 3]、その後の詳細な解析により、それが確認された [4]。一方、理論的には、逃走電子(相対論的電子)の閉じ込めは磁場揺動によって影響を受けないとみなされており [5]、また、アバランチュ(雪崩)効果による二次電子発生のため、KPI後に多量の逃走電子が発生すると、理論的に指摘されていた [6]。

本コード開発は、トカマク中での相対論的電子の軌道を直接追跡することにより、上に示した実験結果と理論的予想の矛盾を解消することが目的である。我々は、乱雑磁場の存在するトロイダル磁場配位での相対論的電子の運動を解析するため、相対論的な案内中心運動に対する正準ハミルトン形式を導いた。この形式により、トロイダル磁場配位での案内中心運動の解析を見通しよく行うことができ、また、軌道の近似的な解析を可能にする。

本報告書の構成は次の通りである。まず、I部では、ETC-Relコードを作成する上で用いた理論の詳細を説明する。2章では、Boozer座標の構成法を述べ、さらに、デカルト座標への変換方法を示した。次に、3章では、磁力線の流れを決める方程式を変分原理で表すことによって、力学系との対応を示した。また、4章では、非正準形式から出発して、相対論的電子の案内中心軌道に対する正準ハミルトン形式を導く。一方、II部では、数値計算によって得られた結果、特に3次元可視化例を示す。磁場配位の計算結果を5章に示し、磁場揺動によって、電子が実際に損失する様子を6章に示す。最後の7章において、まとめと議論をおこなう。巻末の付録AからCには、プログラムの可視化に関する変数、および、サブルーチン機能を説明する。

## Part I 理論

### 2 座標変換

#### 2.1 Boozer座標の構成

「磁力線を直線に見る磁束座標」 $(\psi_p, \chi, \phi)$ が与えられたときのBoozer座標の構成法を述べる。ここで $\psi_p$ はポロイダル・フラックス、 $\chi$ はポロイダル角、 $\phi$ は幾何学的なトロイダル角であり、図1のように定義される。

ところで、磁束座標 $(\psi_p, \chi, \phi)$ のヤコビアン $\sqrt{g}$ は、 $R = R(\psi_p, \chi)$ を主軸からの

距離、 $F = F(\psi_p)$  をトロイダル磁場関数、 $q = q(\psi_p)$  を安全係数として

$$\sqrt{g}(\psi_p, \chi) = \frac{q}{F} R^2 \quad (2.1)$$

で与えられる [7]。一方、平衡磁場  $\mathbf{B}_{eq}$  は磁束座標  $(\psi_p, \chi, \phi)$  において

$$\mathbf{B}_{eq} = \nabla\phi \times \nabla\psi_p + F\nabla\phi \quad (2.2)$$

と表される。ここで非直交度  $\beta_{\psi_p\chi}$  を

$$\beta_{\psi_p\chi}(\psi_p, \chi) \stackrel{def}{=} \frac{\nabla\psi_p \cdot \nabla\chi}{|\nabla\psi_p|^2} \quad (2.3)$$

と定義する。このとき、 $\mathbf{B}_{eq}$  の共変成分  $B_\alpha$  ( $\alpha = \psi_p, \chi, \phi$ ) は、 $\mathbf{e}_\alpha$  を反変基本ベクトルとして、 $B_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{B}_{eq}$  であるから、

$$B_{\psi_p} = -\frac{q}{F} \beta_{\psi_p\chi} |\nabla\psi_p|^2, \quad B_\chi = \frac{q}{F} |\nabla\psi_p|^2, \quad B_\phi = F \quad (2.4)$$

と表せる。ここで式 (2.1) および  $\nabla\psi_p \cdot \nabla\phi = \nabla\chi \cdot \nabla\phi = 0$ 、 $|\nabla\phi| = 1/R$  を用いた。つぎに以下の 2 式

$$\theta = \chi + G(\psi_p, \chi) \quad (2.5)$$

$$\zeta = \phi + qG(\psi_p, \chi) \quad (2.6)$$

で表される座標変換  $(\psi_p, \chi, \phi) \rightarrow (\psi_p, \theta, \zeta)$  を考え、新しい座標系における平衡磁場の共変表現を

$$\mathbf{B}_{eq} = \beta_*(\psi_p, \theta) \nabla\psi_p + J_t(\psi_p) \nabla\theta + J_p(\psi_p) \nabla\zeta \quad (2.7)$$

と表す。この新しい座標系  $(\psi_p, \theta, \zeta)$  を Boozer 座標系 [8] と呼ぶ。ここで、 $\theta, \zeta$  が、それぞれ、新しい座標系でトロイダル角、トロイダル角を表すためには、 $G(\psi_p, \chi)$  は  $\chi$  について周期  $2\pi$  の周期関数でなければならない。以下では、上式に現れた関数  $G$  および  $\beta_*$ 、 $J_t$ 、 $J_p$  の具体的な表式を求めることにより、式 (2.7) の共変表現が、Boozer 座標において、実際に可能であることを示す。

式 (2.5)、(2.6) を式 (2.7) に代入すると、共変成分

$$B_{\psi_p} = \beta_* + q' J_p G + (J_t + q J_p) \partial_{\psi_p} G \quad (2.8)$$

$$B_\chi = J_t + (J_t + q J_p) \partial_\chi G \quad (2.9)$$

$$B_\phi = J_p \quad (2.10)$$

を得る。ここで  $' = d/d\psi_p$  である。まず、式 (2.4) の第 3 式と式 (2.10) より、

$$J_p(\psi_p) = F(\psi_p) \quad (2.11)$$



となることが分かる。一方、式(2.9)において  $G$  が  $\chi$  の周期関数であることから、

$$J_t = \langle B_\chi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_\chi d\chi \quad (2.12)$$

でなければならない。ところで、平衡磁気面は図1の  $R$  軸に対して上下対称であると仮定しているので、式(2.4)より、 $B_\chi$  は  $\chi$  の偶関数である。すると、上式の右辺は、

$$J_t = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi B_\chi d\chi \quad (2.13)$$

と変形される。よって、この式から  $J_t = J_t(\psi_p)$  が得られる。このとき、式(2.9)は、

$$\partial_\chi G = \frac{1}{J_t + qJ_p} (B_\chi - \langle B_\chi \rangle) \quad (2.14)$$

となる。ここで右辺の  $()$  内は  $B_\chi$  の  $\chi$  についての振動部分を表しているので、 $G$  の  $\chi$  に関する周期性が保証される。初期条件は適当に課せばよいが、ここでは、 $\chi$  と  $\theta$  の原点が一致するように

$$G(\psi_p, \chi = 0) = 0 \quad (2.15)$$

と選ぶ。また、 $B_\chi$  は  $\chi$  の偶関数であるから、 $G$  は  $\chi$  の奇関数

$$G(\psi_p, -\chi) = -G(\psi_p, \chi) \quad (2.16)$$

である。ところで、式(2.14)において、 $J_t + qJ_p$  は  $\psi_p$  のみの関数だから、

$$\partial_\chi \varphi = B_\chi - \langle B_\chi \rangle, \quad \varphi(\psi_p, \chi = 0) = 0 \quad (2.17)$$

なる関数  $\varphi(\psi_p, \chi)$  を求めれば、

$$G = \frac{\varphi}{J_t + qJ_p} \quad (2.18)$$

と表される。この式を式(2.8)に代入すれば

$$\beta_* = B_{\psi_p} + (J_t' + qJ_p')G - \partial_{\psi_p} \varphi \quad (2.19)$$

が得られる。ここで、右辺の  $\partial_{\psi_p} \varphi$  は式(2.12)、(2.17)より

$$\partial_\chi (\partial_{\psi_p} \varphi) = \partial_{\psi_p} B_\chi - J_t', \quad \partial_{\psi_p} \varphi(\psi_p, \chi = 0) = 0 \quad (2.20)$$

を解いて求められる。以上より、座標変換を定義する関数  $G$  および、式(2.7)中の  $\beta_*$ 、 $J_t$ 、 $J_p$  の具体的な表式が求められた。

次に、Boozer座標系  $(\psi_p, \theta, \zeta)$  におけるヤコビアンを求める。平衡磁場の反変表現

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{eq} &= \nabla \psi_p \times \nabla (q\theta - \zeta) \\ &= q \nabla \psi_p \times \nabla \theta + \nabla \zeta \times \nabla \psi_p \end{aligned} \quad (2.21)$$

と共変表現 (2.7) の間で、内積をとると

$$\begin{aligned} B^2 &\stackrel{def}{=} |\mathbf{B}_{eq}|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}(J_t + qJ_p) \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。したがってヤコビアン  $\sqrt{g}$  は

$$\sqrt{g} = \frac{J_t + qJ_p}{B^2} \quad (2.23)$$

で与えられる。

## 2.2 デカルト座標への変換

ここでは Boozer 座標をデカルト座標  $(x, y, Z)$  に変換する式を示す。デカルト座標に移る途中で 2.1 節の「磁力線を直線に見る磁束座標」 $(\psi_p, \chi, \phi)$  および円柱座標  $(R, Z, \phi)$  を経由する [図 1 参照]。

まずはじめに式 (2.5) を  $\chi$  について解き、式 (2.6) に代入すると Boozer 座標から「磁力線を直線に見る座標」への変換式  $(\psi_p, \theta, \zeta) \rightarrow (\psi_p, \chi, \phi)$

$$\begin{cases} \chi = \chi(\psi_p, \theta) \\ \phi = \zeta - q(\psi_p)G(\psi_p, \chi(\psi_p, \theta)) \end{cases} \quad (2.24)$$

が得られる。また、ここでは図 1 の円柱座標の  $R-Z$  面 ( $\phi = \text{const.}$  面) 内において、「磁力線を直線に見る座標」 $(\psi_p, \chi)$  がすでに得られていると仮定しているので、「磁力線を直線に見る座標」から円柱座標への変換  $(\psi_p, \chi, \phi) \rightarrow (R, Z, \phi)$  は

$$\begin{cases} R = R(\psi_p, \chi) \\ Z = Z(\psi_p, \chi) \end{cases} \quad (2.25)$$

と書ける。最後に円柱座標からデカルト座標への変換  $(R, Z, \phi) \rightarrow (x, y, Z)$  は

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \\ y = -R \sin \phi \end{cases} \quad (2.26)$$

となる。ただし上式の負号は座標系  $(x, y, Z)$  が右手系をなすように導入した。結局、式 (2.24)、(2.25)、(2.26) の 3 つの変換より、デカルト座標と Boozer 座標の関係式は

$$\begin{cases} x = R(\psi_p, \chi(\psi_p, \theta)) \cos\{\zeta - q(\psi_p)G(\psi_p, \chi(\psi_p, \theta))\} \\ y = -R(\psi_p, \chi(\psi_p, \theta)) \sin\{\zeta - q(\psi_p)G(\psi_p, \chi(\psi_p, \theta))\} \\ Z = Z(\psi_p, \chi(\psi_p, \theta)) \end{cases} \quad (2.27)$$

と表せる。

### 3 磁力線の流れ

#### 3.1 最小作用の原理

ここでは、磁力線の流れを表す方程式を非正準形式によって記述する [9]。この形式を利用すると、磁力線の流れと正準形式の通常の力学系 [10] との対応づけが可能になる。

はじめにハミルトニアン  $h$  によって記述される 1 自由度の力学系を考え、正準共役な運動量と座標に、作用と角変数  $J, \theta$  をとる。このとき基本 1 形式

$$\gamma = Jd\theta - hdt \quad (3.1)$$

に最小作用の原理

$$\delta \int \gamma = 0 \quad (3.2)$$

を適用すれば、系の運動を記述する正準方程式

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial h}{\partial J} \\ \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial \theta} \end{cases} \quad (3.3)$$

が得られる [10]。

同様に磁力線の流れを表す方程式を変分原理を使って表す。いま、磁場  $\mathbf{B}$  を生成するベクトル・ポテンシャルを  $\mathbf{A}$  とし、任意の非直交曲線座標系を  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とする。このとき非正準基本 1 形式

$$\gamma = \mathbf{A}(x) \cdot dx \quad (3.4)$$

に最小作用の原理 (3.2) を適用すると、磁力線の流れを表す方程式

$$\frac{dx^1}{B^1} = \frac{dx^2}{B^2} = \frac{dx^3}{B^3} \quad (3.5)$$

が得られる。ここで  $B^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は磁場の反変成分である。したがって、磁力線の流れも基本 1 形式 (3.4) に対する最小作用の原理 (3.2) によって表すことができる。

#### 3.2 平衡磁場の磁力線

はじめに平衡磁場における磁力線の流れを考える。平衡磁場の反変表現は Boozer 座標  $(\psi_p, \theta, \zeta)$  において、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{eq} &= \nabla\psi_p \times \nabla(q\theta - \zeta) \\ &= \nabla\psi \times \nabla\theta - \nabla\psi_p \times \nabla\zeta \end{aligned} \quad (3.6)$$

と表せる。ここで  $\psi_p, \psi$  はそれぞれポロイダル・フラックスおよびトロイダル・フラックス、 $\theta, \zeta$  はそれぞれポロイダル角およびトロイダル角である。また、 $q(\psi_p)$  は安全係数であり、

$$\frac{d\psi_p}{d\psi} = \frac{1}{q(\psi_p)} \quad (3.7)$$

と定義される。すると、この磁場を生成するベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}_{eq}$  は

$$\mathbf{A}_{eq} = \psi \nabla \theta - \psi_p \nabla \zeta \quad (3.8)$$

で与えられることが分る。したがって、基本1形式(3.4)は

$$\gamma = \mathbf{A}_{eq} \cdot d\mathbf{x} = \psi d\theta - \psi_p d\zeta \quad (3.9)$$

となる。この式を力学系の基本1形式(3.1)と比べると、以下の表1の対応が成り立つことが分る。

表 1: 1自由度の力学系と磁力線の流れの対応関係。

1自由度の力学系	磁力線の流れ
ハミルトニアン $h$	ポロイダル・フラックス $\psi_p(\psi)$
時間 $t$	トロイダル角 $\zeta$
作用変数 $J$	トロイダル・フラックス $\psi$
角変数 $\theta$	ポロイダル角 $\theta$
角周波数 $\omega = \partial h / \partial J$	安全係数の逆数 $1/q = d\psi_p / d\psi$

ゆえに、平衡磁場の磁力線の流れは正準形式であり、式(3.3)の正準方程式が成り立つ。すると、表1の対応より、磁力線の流れの方程式は

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\partial \psi_p}{\partial \psi} = \frac{d\psi_p}{d\psi} = \frac{1}{q(\psi_p)} \quad (3.10)$$

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = -\frac{\partial \psi_p}{\partial \theta} = 0 \quad (3.11)$$

となる。とくに、いまの場合、ポロイダル・フラックス  $\psi_p$  がトロイダル角  $\zeta$  によらない軸対称系を考えているので、磁力線の流れは時間によらない1自由度の力学系と等価であり、可積分系である。実際、式(3.10)、(3.11)を解いて磁力線の流れは

$$\theta = \frac{1}{q(\psi_p)} \zeta + const. \quad (3.12)$$

$$\psi = const. \quad (3.13)$$

で与えられる。いま  $\psi_p = \psi_p(\psi)$  であるから、式(3.12)、(3.13)より、磁力線は2枚の曲面  $\psi_p = const.$  と  $q\theta - \zeta = const.$  の交線になることが分る。これは、式(3.6)の中辺の幾何学的な解釈である。

### 3.3 摂動磁場中の磁力線

つぎに摂動磁場が加わった場合の磁力線を考える。ここでは摂動磁場のモデルを

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{eq} + \mathbf{A}_1 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{A}_1 = \epsilon \alpha(\psi_p, \theta, \zeta) \mathbf{B}_{eq} \quad (3.15)$$

$$\alpha(\psi_p, \theta, \zeta) = \sum_{m,n} \alpha_{mn}(\psi_p) \cos(m\theta - n\zeta + \phi_{mn}) \quad (3.16)$$

とする。ここで  $\epsilon$  は、 $\alpha$  が微小量であることを明示するために導入した。したがって、計算の最後には  $\epsilon = 1$  とする。このとき 1 形式 (3.4) は、

$$\gamma = (\mathbf{A}_{eq} + \epsilon \alpha \mathbf{B}_{eq}) \cdot d\mathbf{x} \quad (3.17)$$

と表される。上式に式 (2.7)、(3.8) を代入すると、

$$\gamma = \epsilon \alpha \beta_* d\psi_p + (\psi + \epsilon \alpha J_t) d\theta + (-\psi_p + \epsilon \alpha J_p) d\zeta \quad (3.18)$$

が得られる。

はじめに、摂動磁場中の厳密な磁力線の方程式を求める。いま、 $\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$  とかくと、式 (3.14) より、磁場は

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{eq} + \mathbf{B}_1 \quad (3.19)$$

で与えられる。磁力線の方程式を式 (3.5) から決定するには、式 (3.19) の磁場  $\mathbf{B}$  の反変成分を求めればよい。まず、式 (3.6)、(3.7) より平衡磁場の反変成分は

$$B_{eq}^{\psi_p} = 0, \quad B_{eq}^{\theta} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad B_{eq}^{\zeta} = \frac{q}{\sqrt{g}} \quad (3.20)$$

となる。一方、式 (3.15) の平衡磁場  $\mathbf{B}_{eq}$  に共変表現 (2.7) を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \nabla \times \mathbf{A}_1 \\ &= \nabla(\alpha \beta_*) \times \nabla \psi_p + \nabla(\alpha J_t) \times \nabla \theta + \nabla(\alpha J_p) \times \nabla \zeta \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。右辺の微分を実行すれば、摂動磁場  $\mathbf{B}_1$  の反変成分が得られる。これを平衡磁場の反変成分 (3.20) を足し合わせて、式 (3.19) の磁場の反変成分は

$$B^{\psi_p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( J_p \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - J_t \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \right) \quad (3.22)$$

$$B^{\theta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( 1 + \beta_* \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} - J_p \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_p} - \alpha J_p' \right) \quad (3.23)$$

$$B^{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( q + J_t \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_p} + \alpha J_t' - \beta_* \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \alpha \frac{\partial \beta_*}{\partial \theta} \right) \quad (3.24)$$

となることが分る。これらを式 (3.5) へ代入したものが、摂動磁場中の磁力線の厳密な方程式である。

ところで、表1から分るように、無摂動系、すなわち、平衡磁場の振動数は、 $\zeta$  を時間とみなしたとき、 $1/q(\psi_p)$  である。一方、式 (3.15)、(3.16) で与えられる摂動は、振動数  $n/m$  のモードの重ね合わせであるから、共鳴条件は

$$\frac{1}{q(\psi_p)} = \frac{n}{m} \quad (3.25)$$

である。したがって、式 (3.25) を満たす磁気面の近傍に磁気島が形成される。

次に、非正準形式 (3.18) に対して、以下に述べる近似を導入して、正準形式に書き換える。実際のトカマクにおいては、

$$\beta_* \ll 1, \quad |J_t| \ll |J_p| \quad (3.26)$$

であるため、式 (3.18) 中の  $\beta_*$ ,  $J_t$  を含む項を落す。すると式 (3.18) は

$$\gamma = \psi d\theta - (\psi_p - \epsilon \alpha J_p) d\zeta \quad (3.27)$$

となる。この1形式は、表1と同様に、 $\zeta$  を時間、 $\psi, \theta$  をそれぞれ作用変数、角変数とみなし、ハミルトニアン  $h$  を

$$h = \psi_p - \epsilon \alpha J_p \quad (3.28)$$

とすると、正準形式であることが分る。以下では、このハミルトニアンを出発点にして、摂動磁場中の磁力線の振る舞いを調べる。

ハミルトニアン (3.28) に、式 (3.16) の摂動を代入し、共鳴する摂動モードのみ残すと、

$$h = \psi_p(\psi) - \epsilon V(\psi) \cos(m\theta - n\zeta + \phi_{mn}) \quad (3.29)$$

が得られる。ただし  $V(\psi) = \alpha_{mn}(\psi_p) J_p(\psi_p)$  とした。次に、共鳴点近傍の位相空間における磁力線構造を調べるために、母関数

$$F(\psi, \varphi, \zeta) = -\frac{1}{m} (\psi - \psi_0) (\varphi + n\zeta - \phi_{mn}) \quad (3.30)$$

による正準変換  $(\psi, \theta) \rightarrow (I, \varphi)$  を用いる。ここで  $I, \varphi$  はそれぞれ、新しい作用変数、角変数であり、 $\psi_0$  は共鳴条件 (3.25) を満足するトロイダル・フラックスの値である。すると、式 (3.30) より、変換式は、

$$I = -\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{1}{m} (\psi - \psi_0) \quad (3.31)$$

$$\theta = -\frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{1}{m} (\varphi + n\zeta - \phi_{mn}) \quad (3.32)$$

である。また、式(3.30)の母関数  $F$  は時間  $\zeta$  に依存するため、新しい変数  $(I, \varphi)$  で表したハミルトニアン  $h_{res}$  は、

$$h_{res}(I, \varphi) = h(\psi, \theta, \zeta) + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \quad (3.33)$$

となる。この式の右辺に、式(3.30)、(3.31)、(3.32)を代入すると

$$h_{res}(I, \varphi) = \psi_p(\psi_0 + mI) - \epsilon V(\psi_0 + mI) \cos \varphi - nI \quad (3.34)$$

を得る。ここで  $I$  は  $\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}})$  であると仮定して、上式を  $\mathcal{O}(\epsilon)$  まで展開すると、

$$h_{res}(I, \varphi) = \frac{1}{2}GI^2 - F \cos \varphi \quad (3.35)$$

となることが分る。ただし、 $G, F$  は定数で、

$$G = m^2 \frac{d}{d\psi} \left( \frac{1}{q} \right) \Big|_{\psi=\psi_0} \quad F = \epsilon V(\psi_0) \quad (3.36)$$

と定義した。また、定数項を落として、さらに、式(3.25)を用いて、 $I$  に比例する項を消去した。

このハミルトニアン(3.35)は、単振子のハミルトニアンであり、非線形力学系の中で起きる共鳴現象の共鳴点近傍の振るまいは、一般に、このモデルで記述されることが知られている。したがって、このハミルトニアンは、スタンダード・ハミルトニアン[11]、もしくは、ユニバーサル・ハミルトニアン[12]と呼ばれている。ハミルトニアン(3.35)の位相図を、図2に示す。ただし、ここでは、 $G < 0, F > 0$  の場合を考えているので、安定(楕円型)固定点は、 $\ell$  を整数として、 $\varphi = (2\ell + 1)\pi$ 、不安定(双曲型)固定点は、 $\varphi = 2\ell\pi$  で与えられる。

ところで、安定固定点のまわりの楕円軌道は、磁力線の場合は磁気島と呼ばれている。いま、 $\zeta = \text{const.} (= \zeta_0)$  の Poincaré 断面上の磁気島の中心位置を、 $(\psi_0, \theta_0)$  と表すと、 $\psi_0$  は共鳴条件(3.25)を満たす  $\psi$  であり、一方、式(3.32)より、

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{m}\ell + \frac{1}{m}(n\zeta_0 - \phi_{mn} + \pi) \quad \ell = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.37)$$

であることが分る。また、式(3.35)で記述される微小な位相振動の周波数は、式(3.36)より、

$$\omega = \sqrt{|G|F} = m \sqrt{\epsilon V \left| \frac{d}{d\psi} \left( \frac{1}{q} \right) \right|} \quad (3.38)$$

となる。一方、ハミルトニアン(3.35)より、セパトトリクス軌道は、

$$I = 2\sqrt{\frac{F}{|G|}} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3.39)$$

となるので、図2に示した軌道の半幅  $\Delta I$  は、

$$\Delta I = 2\sqrt{F/|G|} = \frac{2}{m} \sqrt{\epsilon V \left| \frac{d}{d\psi} \left( \frac{1}{q} \right) \right|} = \frac{2q}{m} \sqrt{\frac{\epsilon V}{dq/d\psi}} \quad (3.40)$$

で与えられる。したがって、 $I$ は $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ であり、ハミルトニアン (3.35) を導く際の仮定の正当性がしめされた。後の便宜のため、この半幅を  $\psi_p$ 、または

$$s = \sqrt{\psi_p / \psi_p^{surf}} \quad (3.41)$$

で定義されるパラメータ  $s$  を用いて、表しておく。ここで  $\psi_p^{surf}$  は、最外殻の磁気面におけるポロイダル・フラックスである。いま、式 (3.31) より、 $\Delta\psi = m\Delta I$  であるから、

$$\Delta\psi_p = \frac{d\psi_p}{d\psi} \Delta\psi = \frac{m}{q} \Delta I \quad (3.42)$$

となり、一方、式 (3.41) より、

$$\Delta s = \frac{ds}{d\psi_p} \Delta\psi_p = \sqrt{\frac{2\epsilon q J_p \alpha_{mn}}{\psi_p^{surf} s_0 dq/ds}} \quad (3.43)$$

となることが分る。ただし、 $\psi = \psi_0$  における  $s$  を  $s_0$  と表した。この式から逆に、磁気島の大きさが分っているときに、摂動  $\alpha_{mn}$  の大きさをどれくらいに取ればよいのか、評価することもできる。

ところで、摂動モードが複数のときに、お互いの共鳴がオーバーラップすると、大域的なカオスが生じ始める。このオーバーラップ条件は、式 (3.43) を用いて、隣接するセパトリクス軌道が接する条件として与えられる。このように、つながった磁気島をクラスターとみなしたパーコレーション転移によって、乱雑磁場中の大域的カオスの出現を定性的に記述できるものと期待できる [13, 14]。

## 4 相対論的電子軌道

### 4.1 案内中心近似

ここでは、案内中心近似の相対論的電子軌道を考える [15]。はじめに、ベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 、スカラー・ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x}, t)$  で与えられる電磁場中の電子の相対論的な運動を記述する 1 形式は

$$\gamma = \gamma_\mu dz^\mu = \left\{ mu_i + \frac{e}{c} A_i(\mathbf{x}, t) \right\} dx_i - hdt \quad (4.1)$$

$$h = \sqrt{m^2 c^4 + m^2 c^2 u^2} + e\phi(\mathbf{x}, t) \quad (4.2)$$

となる。ここで、 $\mu$  の和は  $0, \dots, 3$  について、 $i$  の和は  $1, 2, 3$  についてとる。また、 $u_i$  は電子の世界速度、 $e$  は電子の電荷、 $c$  は光速である。つぎに、電子の位置座標  $\mathbf{x}$  で表された式 (4.1)、(4.2) に対し、案内中心座標  $\mathbf{R}$  への変換を行う。すると、非相対論の場合 [16] と同様に、1 形式

$$\gamma = \left( \frac{e}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) + \rho_{\parallel} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{R} - hdt \quad (4.3)$$



$$h = c^2 \sqrt{1 + \frac{\rho_{\parallel}^2 B^2}{c^2} + \frac{2\mu B}{c^2}} + \frac{e}{m} \phi(\mathbf{R}, t) \quad (4.4)$$

が得られる。ただし、 $\gamma, h$  は電子質量  $m$  で除した。

式(4.3)、(4.4)中の案内中心変数は以下のように定義される。まず、 $\mathbf{b}$  は、磁場  $\mathbf{B}$  に平行な単位ベクトルで、

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} \quad (4.5)$$

である。ここで、 $\mathbf{u}$  を  $\mathbf{b}$  に平行な成分と垂直な成分に分割し、

$$\mathbf{u} = u_{\perp} \mathbf{c} + u_{\parallel} \mathbf{b} \quad (4.6)$$

と表す。いま、 $\mathbf{b}$  に垂直な平面内における任意の直交単位ベクトルを  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  とすると、図3のように、

$$\tan \vartheta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2} \quad (4.7)$$

で定義されるジャイロ角  $\vartheta$  を用いて、ベクトル  $\mathbf{c}$  は

$$\mathbf{c} = -\mathbf{e}_1 \sin \vartheta - \mathbf{e}_2 \cos \vartheta \quad (4.8)$$

と表せる。また、電子の位置から、案内中心の方向へ向かう単位ベクトル  $\mathbf{a}$  は、

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{e}_1 \cos \vartheta - \mathbf{e}_2 \sin \vartheta \quad (4.9)$$

で与えられる。このとき、 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  も  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$  も、おのおの、互いに直交する右手系をなしている。また  $\Omega$  は Larmor 周波数

$$\Omega = \frac{eB}{mc} \quad (4.10)$$

である。一方、 $\mu$  は磁気モーメント

$$\mu = \frac{u_{\perp}^2}{2B} \quad (4.11)$$

である。このとき、Larmor 半径は、 $u_{\perp}/\Omega$  であるから、図3の  $\vec{\rho}$  は

$$\vec{\rho} = \frac{u_{\perp}}{\Omega} \mathbf{a} \quad (4.12)$$

と表すことができ、案内中心座標  $\mathbf{R}$  は、電子の位置座標  $\mathbf{x}$  と

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} + \vec{\rho} \quad (4.13)$$

の関係にある。最後に  $\rho_{\parallel}$  は

$$\rho_{\parallel} = \frac{u_{\parallel}}{B} \quad (4.14)$$

と定義した。

## 4.2 物理量の規格化と正準ハミルトン形式

ここで、これまでに定義した物理量を規格化する。まず、長さエネルギーは、それぞれ、主軸から磁気軸までの距離  $R_0$ 、および、電子の静止エネルギー  $mc^2$  で規格化する。また、時間は、主軸上を光速粒子が1周する時間の  $1/2\pi$ 、つまり、

$$\omega_t^{-1} = \left( \frac{c}{R_0} \right)^{-1}. \quad (4.15)$$

で規格化する。最後に、磁場は磁気軸上の磁場の強さ  $B_0$  で規格化する。

ここで、磁気軸における Larmor 周波数

$$\omega_c = \frac{|e|B_0}{mc} \quad (4.16)$$

を導入すると、式(4.15)より、

$$\epsilon = \frac{\omega_t}{\omega_c} = \frac{c}{\omega_c R_0} \quad (4.17)$$

となる。 $\epsilon$ は、光速の電子の Larmor 半径とデバイスの主半径の比であると同時に、Larmor 回転に要する時間とトロイダル方向に1周するのに要する時間の比でもある。この  $\epsilon$ は、JT-60U においては、 $\epsilon \approx 10^{-4}$  の微小量である。

これらの諸量を用いて、1形式(4.3)を規格化したものは、

$$\gamma = \text{sgn}(e)\mathbf{A} + \epsilon\rho_{\parallel}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} - \epsilon h dt \quad (4.18)$$

$$h = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 B^2 + 2\mu B} \quad (4.19)$$

で与えられる。ただし、ここでは、スカラー・ポテンシャル  $\phi = 0$  とした。

1形式(4.18)および、ハミルトニアン(4.19)に、摂動を加えたベクトル・ポテンシャル(3.14)を代入して、

$$\rho_c = \rho_{\parallel} + \text{sgn}(e)\alpha \quad (4.20)$$

と、変数変換すると、

$$\gamma = \{\text{sgn}(e)\mathbf{A}_{eq} + \epsilon\rho_c\mathbf{B}_{eq}\} \cdot d\mathbf{R} - \epsilon h dt \quad (4.21)$$

$$h = \sqrt{1 + \{\rho_c - \text{sgn}(e)\alpha\}^2 B_{eq}^2 + 2\mu B_{eq}} \quad (4.22)$$

となる。ただし、 $\epsilon$ の高次の項は省略した。ところで、式(2.7)、(3.8)より、

$$\mathbf{B}_{eq} \cdot d\mathbf{R} = \beta_* d\psi_p + J_t d\theta + J_p d\zeta \quad (4.23)$$

$$\mathbf{A}_{eq} \cdot d\mathbf{R} = \psi d\theta - \psi_p d\zeta \quad (4.24)$$

である。以下で、正準形式の理論を用いて議論するために、式(4.23)の第1項を省略する。このとき、これら2式を、1形式(4.21)に代入すると、

$$\omega = p_{\theta} d\theta + p_{\zeta} d\zeta - \epsilon h dt \quad (4.25)$$

がえられる。ただし、ここで

$$p_\theta = \text{sgn}(e)\psi + \epsilon\rho_c J_t \quad (4.26)$$

$$p_\zeta = -\text{sgn}(e)\psi_p + \epsilon\rho_c J_p \quad (4.27)$$

で与えられる座標変換をほどこした。

### 4.3 相対論的電子の運動方程式

ここで、前節で求めた1形式(4.25)から、非補足電子の運動方程式を求める。以下では、とくに、電子の場合を考慮して、 $\text{sgn}(e) = -1$ とする。1形式(4.25)において、 $\theta$ を時間にとると、形式的に

$$\gamma = p_\zeta d\zeta + p_t dt - K d\theta \quad (4.28)$$

と書き直すことができる。ここで、もとの時間  $t$  にたいする正準運動量を

$$p_t = -\epsilon h = -\epsilon \sqrt{1 + (\rho_c + \alpha)^2 B^2 + 2\mu B} \quad (4.29)$$

とし、新しいハミルトニアンを

$$K(\zeta, p_\zeta, p_t, \theta) = -p_\theta = \psi - \epsilon\rho_c J_t \quad (4.30)$$

とした。また、 $B_{eq}$ の添字  $eq$  を省略した。

まず、式(4.26)、(4.27)より、

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial K} = \frac{J_p}{\mathcal{D}} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial p_\zeta} = \frac{J_t}{\mathcal{D}} \quad (4.32)$$

$$\epsilon \frac{\partial \rho_c}{\partial K} = -\frac{1 + \epsilon\rho_c J'_p}{\mathcal{D}} \quad (4.33)$$

$$\epsilon \frac{\partial \rho_c}{\partial p_\zeta} = \frac{q - \epsilon\rho_c J'_t}{\mathcal{D}} \quad (4.34)$$

となる。ここで

$$\mathcal{D} = (J_t + qJ_p) + \epsilon\rho_c (J_t J'_p - J_p J'_t) \quad (4.35)$$

である。

いま、1形式(4.28)は、正準形式であるから、正準方程式

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{\partial K}{\partial p_\zeta} \quad (4.36)$$

$$\frac{dp_\zeta}{d\theta} = -\frac{\partial K}{\partial \zeta} \quad (4.37)$$

が成り立つ。一方、もとの時間  $t$  について、

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\partial K}{\partial p_t} \quad (4.38)$$

となる。

式 (4.36)、(4.37)、(4.38) の右辺は、

$$\frac{\partial K}{\partial p_t} = -\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial h}{\partial K} \right)^{-1} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = -\frac{\partial h / \partial \theta}{\partial h / \partial K} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \zeta} = -\frac{\partial h / \partial \zeta}{\partial h / \partial K} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_\zeta} = -\frac{\partial h / \partial p_\zeta}{\partial h / \partial K} \quad (4.42)$$

および、

$$h \frac{\partial h}{\partial \theta} = (\rho_c + \alpha) B^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + [(\rho_c + \alpha)^2 B + \mu] \frac{\partial B}{\partial \theta} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} h \frac{\partial h}{\partial K} &= (\rho_c + \alpha) B^2 \left( \frac{\partial \rho_c}{\partial K} + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial K} \right) \\ &+ [(\rho_c + \alpha)^2 B + \mu] \frac{\partial B}{\partial \psi_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial K} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$h \frac{\partial h}{\partial \zeta} = (\rho_c + \alpha) B^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} h \frac{\partial h}{\partial p_\zeta} &= (\rho_c + \alpha) B^2 \left( \frac{\partial \rho_c}{\partial p_\zeta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial p_\zeta} \right) \\ &+ [(\rho_c + \alpha)^2 B + \mu] \frac{\partial B}{\partial \psi_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial p_\zeta}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

を用いて、評価できる。ただし、

$$B = B(\psi_p, \theta) = B(\psi_p(p_\zeta, K), \theta) \quad (4.47)$$

$$\alpha = \alpha(\psi_p, \theta, \zeta) = \alpha(\psi_p(p_\zeta, K), \theta, \zeta) \quad (4.48)$$

を用いた。

一方、 $\psi_p, \rho_c$  の時間発展は

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_p}{d\theta} &= \{\psi_p, K\} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \theta} \\ &= -\frac{\partial \psi_p}{\partial p_\zeta} \frac{\partial K}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi_p}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_c}{d\theta} &= \{\rho_c, K\} + \frac{\partial \rho_c}{\partial \theta} \\ &= -\frac{\partial \rho_c}{\partial p_\zeta} \frac{\partial K}{\partial \zeta} + \frac{\partial \rho_c}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (4.50)$$

から、求められる。ここで  $\{, \}$  は、Poisson 括弧である。

本コードでは、電子軌道を追跡するために、4 次の Runge-Kutta 法を用いて、式 (4.36)、(4.37)、(4.38)、および、式 (4.49)、(4.50) を数値積分する。

#### 4.4 摂動論による解析解

ここでは、電子の動径方向の軌跡を、微小量  $\epsilon$  に関する 1 次摂動で求める。はじめに、電子の初期位置  $\psi_{p0}$  からのずれを

$$\psi_p - \psi_{p0} = \epsilon x \quad (4.51)$$

と表す。すると、 $\epsilon$  の 1 次で

$$\psi = \psi(\psi_{p0}) + \epsilon q(\psi_{p0})x \quad (4.52)$$

$$p_\theta = -\psi(\psi_{p0}) + \epsilon P_\theta \quad (4.53)$$

$$p_\zeta = \psi_{p0} + \epsilon P_\zeta \quad (4.54)$$

と展開できる。ここで、

$$P_\theta = -qx + J_t \rho_c \quad (4.55)$$

$$P_\zeta = x + J_p \rho_c \quad (4.56)$$

と定義した。また、 $\psi, q, J_t, J_p$  は  $\psi_{p0}$  で評価される定数である。したがって、 $x, \rho_c$  は、

$$x = \frac{1}{c_J} (-J_p P_\theta + J_t P_\zeta) \quad (4.57)$$

$$\rho_c = \frac{1}{c_J} (P_\theta + q P_\zeta) \quad (4.58)$$

と表せる。ここで、定数  $c_J$  は、

$$c_J = J_t + q J_p \quad (4.59)$$

である。すると、基本 1 形式 (4.25) は、

$$\Gamma = P_\theta d\theta + P_\zeta d\zeta - h dt \quad (4.60)$$

とかける。また、上式のハミルトニアン  $h$  は式 (4.22) と同じ形

$$h = \sqrt{1 + \{\rho_c + \alpha\}^2 B^2 + 2\mu B} \quad (4.61)$$

で与えられるが、 $\alpha, B$  は、それぞれ  $\psi_{p0}$  における値であることに注意する。ここで、 $B_{eq}$  の添字  $eq$  を省略した。

前節と同様に  $\theta$  を時間にとり

$$\Gamma = p_t dt + P_\zeta d\zeta - K d\theta \quad (4.62)$$

と表すと、ハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} K(\zeta, P_\zeta, \theta; \psi_{p0}) &= -P_\theta \\ &= qP_\zeta + c_J \alpha(\theta, \zeta; \psi_{p0}) \pm \frac{c_J}{B} \sqrt{p_t^2 - (1 + 2\mu B)} \end{aligned} \quad (4.63)$$

と表すことができる。ただし、式(4.57)、(4.58)、および、関係式

$$\rho_c + \alpha = \pm \frac{1}{B} \sqrt{p_t^2 - (1 + 2\mu B)} \quad (4.64)$$

を利用した。すると、ハミルトニアンは以下のように、分離できることが分る。

$$K = K_\zeta + K_t \quad (4.65)$$

ここで、

$$K_\zeta = qP_\zeta + c_J \alpha(\theta, \zeta; \psi_{p0}) \quad (4.66)$$

$$K_t = \mp \frac{c_J}{B} \sqrt{p_t^2 - (1 + 2\mu B)} \quad (4.67)$$

である。すると、正準運動方程式は、

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{\partial K_\zeta}{\partial P_\zeta} = q \quad (4.68)$$

$$\frac{dP_\zeta}{d\theta} = -\frac{\partial K_\zeta}{\partial \zeta} = -c_J \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \quad (4.69)$$

となり、一方、 $t$  の運動方程式は

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\partial K_t}{\partial p_t} \quad (4.70)$$

となる。

式(4.65)、(4.66)を、式(4.57)へ代入すると、電子の動径方向の運動は、

$$x(\theta) = P_\zeta(\theta) + J_p \alpha(\theta, \zeta(\theta)) + \frac{J_p}{c_J} K_t(\theta) \quad (4.71)$$

と表せることが分る。次節では、この式を用いて、電子の損失機構を考察する。

## 4.5 電子の損失機構

ここで、乱雑磁場による相対論的電子の損失機構を考える。

まず、はじめに、摂動がない場合を考える。このとき、式(4.69)より、式(4.71)の第1項  $P_\zeta$  は保存し、第2項は0となる。また、第3項は、ポロイダル角の周期関数であるから、電子はポロイダル方向に1周すると、動径方向について、もとの

位置に戻ってくる。いま、相対論的因子が  $\gamma \gg 1$  であるような、超相対論的電子を考えると、式(4.67)において、

$$\sqrt{p_t^2 - (1 + 2\mu B)} \approx \sqrt{\gamma^2 - 1} \approx \gamma \quad (4.72)$$

が成り立つ。したがって、平衡磁場中の相対論的電子の遍移運動の幅  $\delta x$  は、式(4.71)より、

$$\delta x \sim \gamma J_p \delta \left( \frac{1}{B} \right), \quad (4.73)$$

で与えられる。つまり、 $\gamma = 1$  の非相対論的な電子に比べると、超相対論的な電子の遍移の幅は、 $\gamma$  倍だけ増幅される。

一方、摂動磁場が加わった場合の損失過程は、電子のエネルギーに応じて、以下に述べるような2つの異なる過程が考えられる。

まず、低エネルギーの電子の場合を考える。このときは、磁気島の幅  $\Delta\psi_p$  と電子の遍移の大きさ  $\delta x$  の間で、 $\Delta\psi_p \gg \delta x$  が満足される場合が考えられる。すると、動径方向の遍移運動は、式(4.71)で記述できる。いま、式(4.71)の第2項は、摂動の大きさ  $\alpha$  で頭打ちになっているので、遍移への寄与は小さいと考えられる。ところで、式(4.68)、(4.69)を摂動モード  $(m, n)$  の共鳴点近傍で解くと、 $P_\zeta$  は、時間' $\theta$ ' に比例して増大する項、

$$P_\zeta(\theta) = -(nc_J \alpha_{mn} \sin \phi_0) \cdot (\theta - \theta_0) + P_{\zeta 0} \quad (4.74)$$

を含むことが分る。つまり、電子は特定の磁気島  $(m, n)$  の中を、動径方向について、無衝突に巡りわたることになる。したがって、もし隣接する磁気島が重なり合っていると、電子は、次々と磁気島を巡り渡って、デバイス壁まで達し、損失する可能性がある。

一方、 $\gamma \gg 1$  であるような高エネルギーの電子では、 $\delta x \gg \Delta\psi_p$  となり、式(4.71)を導いた際の仮定が成り立たない。このような、高エネルギー電子では、特定の磁気島近傍に滞在する時間が極端に短いため、低エネルギー電子のように、磁気島の中を巡り渡る運動を起こさない。なぜなら、磁気島から離れると、トロイダル運動量  $p_\zeta$  が、ほぼ保存されるからである。ただし、磁気島を横切るときに、わずかに、 $p_\zeta$  の保存が破れるため、ポロイダル方向に1周したときに、動径方向について同じ位置には戻らないことに注意する。これは、磁気島による散乱と見なせる。

このように、電子のエネルギーに応じて、2つの損失過程が考えられる。1つは、低エネルギー電子の磁気島内を巡る運動、もう1つは、高エネルギー電子が、磁気島に散乱されながら、磁気島間を巡る運動である。

## Part II

# 計算結果

## 5 磁場配位

### 5.1 MHD 平衡配位

図4に MHD 平衡から作られた Boozer 座標  $(\psi_p, \theta, \zeta)$  の  $\zeta = \text{const.}$  における断面図を示す。同心円状の曲線が  $\psi_p = \text{const.}$  曲線を表し、放射状の曲線が  $\theta = \text{const.}$  曲線を表している。ここで、MHD 平衡磁場は、 $Z = 0$  の  $R$  軸について、上下対称とし、主軸の位置は  $R_0 = 3.4m$ 、プラズマ半径は  $a_p = 1.0m$ 、磁気軸上の磁場強度は  $B_0 = 4.0T$  とした。また、長さは  $R_0$  で規格化した。

一方、式(3.7)で定義される、MHD 平衡の安全係数  $q(s)$  の分布を図5に示す。ここで、 $q(s)$  のパラメータ  $s$  は、式(3.41)で定義される。図5より、安全係数  $q$  は  $s$ 、したがって  $\psi_p$  の単調増加関数であることが分る。ところで、式(3.12)より、安全係数の逆数  $1/q$  は、磁力線がトロイダル方向に1周するときの、ポロイダル方向への回転数である。つまり、外側の磁気面上の磁力線ほど、ポロイダル方向への回転数が少ないことが分る。また、この図から、式(3.25)の共鳴条件を満足する磁気面にたいする  $s$  の値を知ることができる。

ちなみに、以下の図4と図5は、GNU PLOT を用いて描画し、tgif 上で編集した後、eps 形式に変換した。

MHD 平衡配位の磁気面の3次元表示を図6に示す。平衡磁気面はトーラスの入れ子構造をしている様子が分る。図6中の一番外側の面は、最外殻の磁気面であり、デバイスの大きさを示している。

図6以降の図は AVS を用いて作成し、ImageMagic を用いて eps 形式に変換した。

MHD 平衡配位の磁力線の3次元表示を図7に示す。式(3.12)より、安全係数  $q$  が有理数の場合、磁力線は閉曲線になる。一方、 $q$  が無理数の場合は、磁力線はトーラス面上をエルゴード的に埋めつくす。いずれの場合も、磁力線の軌跡の包絡曲面が、図6に示されている磁気面に他ならない。

### 5.2 乱雑磁場配位

乱雑磁場配位の磁力線の3次元表示を図8に示す。ここでは、摂動磁場として、式(3.16)の  $m = 2, n = 1$  のモードのみをとり、式(3.42)で与えられる磁気島の幅は  $\Delta\psi_p = 0.1$  とした。このとき、共鳴条件(3.25)は  $q(s) = 2$  となり、図5から、これを満足する磁気面は  $s \approx 0.7$  であることが分る。図8に示した Poincaré 断面上に現れた2つの三日月状の磁気島は、この共鳴によって生じたものである。

同様に、 $(m, n) = (2, 1)$  の摂動磁場を印加したときの磁力線の Poincaré プロットを、図9に示す。ただし、ここでは、磁気島の幅を  $\Delta\psi_p = 0.02$  とした。3.3節で述べたように、共鳴点近傍の磁力線の振るまいは、ハミルトニアン(3.35)で記述される単振子と同じである。したがって、図2と同様な Poincaré プロットが得られた



のである。ただし、ここでは、横軸が $\theta$ であるから、楕円型の安定固定点の周期は、式(3.37)からも分るように、 $\pi$ で与えられる。

## 6 磁場揺動による電子の無衝突損失

### 6.1 電子軌道

MHD 平衡配位における相対論的電子軌道の3次元表示を図10に示す。電子のエネルギーは相対論因子で $\gamma = 20$ とした。また、以下では、非補足電子を考えるため、電子の磁気モーメントは、すべて $\mu = 0$ とした。図の外側のトーラス面は最外殻の磁気面を表し、ほぼデバイスの大きさを表している。電子の軌道はピンク色の曲線で表示した。また、 $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面を電子が横切る位置を黄色の点によって、表している。この Poincaré プロットを拡大して示したものが、図11である。図10、11より、電子は平衡磁気面に閉じ込められ、規則的に運動している様子が分る。

一方、乱雑磁場配位における相対論的電子軌道の Poincaré プロットを図12に示す。電子のエネルギーは $\gamma = 40$ にとった。ここでは摂動磁場のモードは、 $(m, n) = (2, 1)$ のみであり、磁気島の幅は $\Delta\psi_p = 0.02$ とし、図9と同じ条件を用いた。矢印の位置は、それぞれの電子がポロイダル方向に1周するときの始点と終点の位置である。

さらに、摂動磁場のモードを複数とった場合に、電子が損失する様子を図13に示した。ここで、さきほどと同様に、電子のエネルギーは $\gamma = 20$ にとった。また、摂動磁場のモードを、以下の20個、

$$\begin{aligned} (m, n) = & (2, 1), (19, 9), (11, 5), (9, 4), (25, 11), \\ & (7, 3), (19, 8), (12, 5), (22, 9), (5, 2), \\ & (13, 5), (8, 3), (11, 4), (20, 7), (3, 1), \\ & (25, 8), (10, 3), (7, 2), (15, 4), (4, 1). \end{aligned} \quad (6.1)$$

とり、共鳴する磁気面の領域を $2 \leq q \leq 4$ とした。また、それぞれの磁気島の幅は、

$$\Delta\psi_p = \begin{cases} 0.02 \times \text{factor} & (m, n) = (2, 1), (19, 9) \text{ のモード} \\ 0.01 \times \text{factor} & \text{それ以外のモード} \end{cases} \quad (6.2)$$

とした。ここで、 $\text{factor}$  は、磁場の乱雑度を制御するために導入したパラメータである。ここでは、 $\text{factor} = 1$ としている。図13中にピンクの曲線で描いたものが、電子の軌道である。また、黄色のドットは $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面上と電子軌道が交差する場所を示している。さらに、図13の Poincaré プロットを拡大したものが、図14である。この図中の外側の閉曲線は、デバイスの大きさを明示するために出力した、最外殻の磁気面の断面図である。この図から、電子は動径方向に関して、カオス的な振るまいを示し、デバイスの壁の近くまで到達し、損失して行く様子がうかがえる。

## 6.2 損失率

ここでは、乱雑磁場の影響によって、単位時間あたりに損失する電子の数を求めた結果を示す。ここでは、デバイスの壁に到達した電子は、損失するものと見なす。

はじめに、損失率のエネルギー依存性を図15に示す。ここで、摂動磁場のモードと大きさは、式(6.1)、(6.2)の通りである。ただし、 $factor = 1$ とし、 $(m, n) = (2, 1)$ モードの磁気島の幅は、図15中の○に対し、 $\Delta\psi_p = 0.02$ 、●に対して、 $\Delta\psi_p = 0.03$ とした。図より、ここで考えているモデルにたいして、低エネルギー電子も高エネルギー電子もいずれも損失することが分る。また、 $\gamma > 40$ の超相対論的な電子の損失率が飽和していることが分る。これは、電子の遍移運動のスケールが大きいために、電子に対する実効的な磁気島の影響は、位相変数について平均化された微弱なものであるためと考えられる [5]。

一方、図16には、電子の損失率 $\nu$ の磁気島の幅に対する依存性を示した。ここでは、 $(m, n) = (2, 1)$ の磁気島の幅を変えた。図中の○は、 $\gamma = 1.6$ の低エネルギー電子、■は、 $\gamma = 20$ の超相対論的な電子に相当する。図より、磁気島の幅とともに、損失率が增大することが分る。磁気島の重なりが小さい $\Delta\psi_p = 0.018$ では、低エネルギーの電子では、損失が起こっていないが、超相対論的な電子については、 $\nu = 2 \times 10^3 \text{ sec}^{-1}$ の損失が見られる。このとき、低エネルギーの電子は、磁気島内を巡ることができても、磁気島をまたがる運動はできないために、損失が起きていないと考えられる。一方、高エネルギーの電子は、磁気島によって、散乱を受けながら、遍移運動によって、磁気島間を巡り渡ることができるので、損失していると思われる。

## 7 まとめと議論

本報告では、トカマクにおける相対論的電子の軌道を追跡するコード ETC-Rel の概要と、計算結果の可視化について述べた。ETC-Rel コードでは相対論的電子の案内中心運動を正準ハミルトン形式で解く。この定式化では、磁束座標系の一種である Boozer 座標系を用いる。本報告では可視化で必要となる、Boozer 座標系からデカルト座標系への変換手順を示した。また、ETC-Rel コードで用いる摂動磁場モデルについて磁力線の3次元表示例も示した。

現行のコードは非捕捉電子を対象としており、乱雑磁場での非捕捉電子の軌道解析と損失率の計算を行った。計算では、ディスラプション時に想定される磁場揺動として、それぞれの幅が数 cm である、多数の磁気島からなる「巨視的」な磁場揺動を与えた。計算結果は、ディスラプション時の逃走電子発生を回避・抑制する上で十分に高い損失率で相対論的電子が損失することを示している。巨視的な磁場揺動のもとでは、電子のトロイダル運動量保存の破れによる閉じ込め喪失が起こる。この閉じ込め喪失効果が相対論的電子に働く閉じ込め改善効果（位相平均効果）を上回って、相対論的電子の大きい損失がおこると考えられる。この結果は JT-60U の実験結果に対して理論的裏付けを与える。

## 謝辞

本研究の遂行にあたり、有益な助言をいただきました芳野隆治炉心プラズマ第2実験室長に感謝します。また、終始激励していただきました船橋昭晶、安積正史両部長および岸本泰明プラズマ理論研究室室長に感謝します。

## 参考文献

- [1] R. Yoshino, T. Kondoh, Y. Neyatani, K. Itami, Y. Kawano, and N. Isei, *Plasma Phys. Control. Fusion* **39** (1997) 313.
- [2] Y. Kawano, et al., *Fusion Energy 1996 (Proc. 16th Int. Conf. Montreal, 1996)*, Vol.2, IAEA, Vienna (1997) 345.
- [3] Y. Kawano, et al., *24th EPS Conf. on Control. Fusion and Plasma Phys., K-Berchtesgaden, Vol.21A, Part II* (1997) 501.
- [4] R. Yoshino, S. Tokuda, and Y. Kawano, *Generation and Termination of Runaway Electrons at Major Disruptions in JT-60*, submitted to *Nucl. Fusion* (1998).
- [5] H. E. Mynick and J. D. Strachan, *Phys. Fluids* **24** (1981) 695.
- [6] M. N. Rosenbluth and S. V. Putvinski, *Nucl. Fusion* **37** (1997) 1355.
- [7] 徳田 伸二、「計算機シミュレーションによるトカマク・プラズマの安定性の研究」、JAERI-M 84-040 (1984).
- [8] A. H. Boozer, *Phys. Fluids* **24** (1981) 1999.
- [9] J. R. Cary and R. G. Littlejohn, *Annals of Physics*, **151** (1983) 1.
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 2nd ed. (Pergamon, 1969).
- [11] A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [12] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52** (1979) 263.
- [13] M. B. Isichenko, *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992) 961.
- [14] 小田垣 孝、「パーコレーションの科学」、(裳華房、1993).
- [15] S. Tokuda and R. Yoshino, *Simulation Study on Collisionless Loss of Runaway Electrons by Magnetic Perturbations in a Tokamak*, submitted to *Nucl. Fusion* (1998).
- [16] R. G. Littlejohn, *J. Plasma Phys.*, **29** (1983) 111.

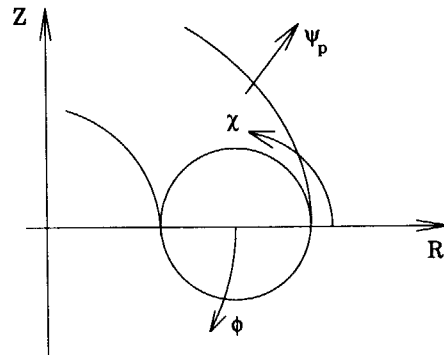


図 1: 磁束座標  $(\psi_p, \chi, \phi)$  の定義。  $\psi_p$  はポロイダル・フラックス、  $\chi$  はポロイダル角、  $\phi$  はトロイダル角を表す。一方、  $R$  は主半径、  $Z$  は主軸を表す。

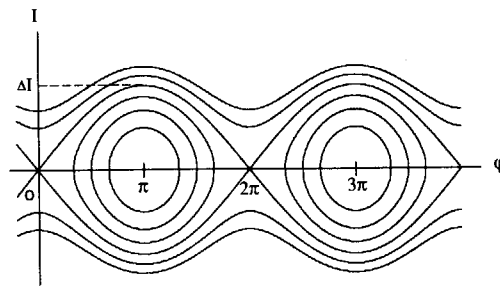


図 2: ユニバーサルハミルトニアン  $h_{res}$  の位相図。  $F > 0, G < 0$  の場合を示す。

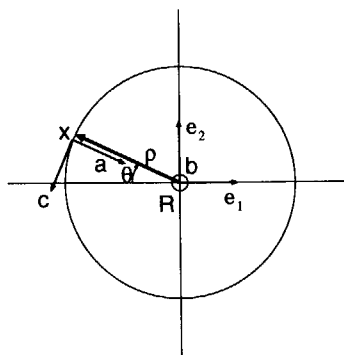


図 3: 電子 ( $e < 0$ ) に対する案内中心変数の定義。  $\mathbf{x}$  は電子の位置ベクトル、  $\mathbf{R}$  は案内中心の位置座標、  $\vartheta$  はジャイロ角を表す。

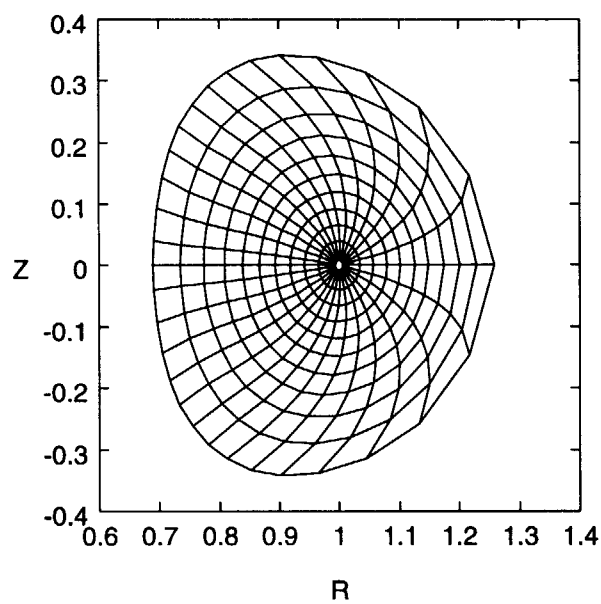


図 4: MHD 平衡磁場から構成した Boozer 座標  $(\psi_p, \theta, \zeta)$  の  $\zeta = \text{const.}$  断面図。

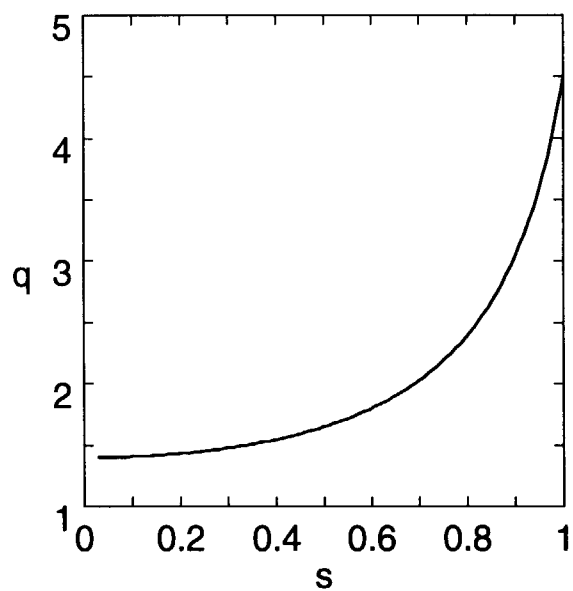


図 5: MHD 平衡磁場の安全係数  $q(s)$  の分布。

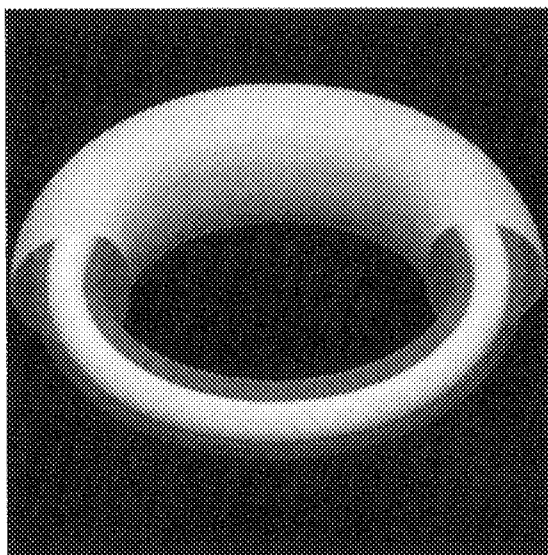


図 6: MHD 平衡配位の磁気面の 3 次元表示。

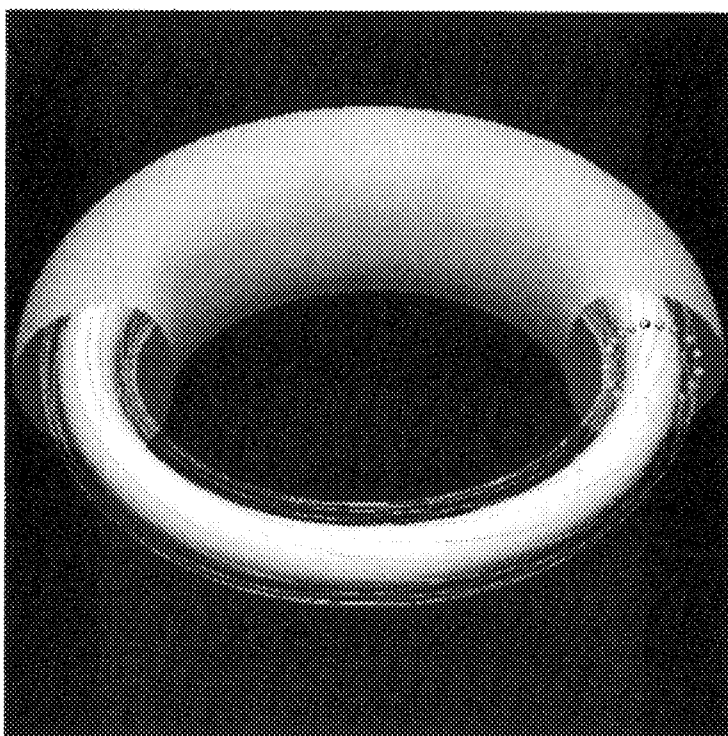


図 7: MHD 平衡配位の磁力線の 3 次元表示。黄色のドットは  $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面上の磁力線。

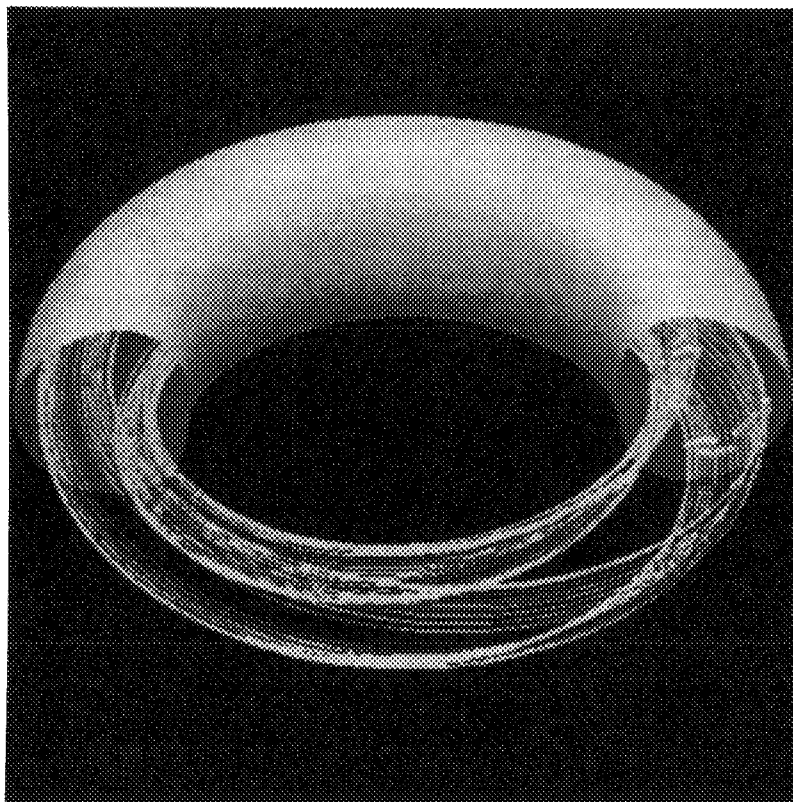


図 8: 摂動磁場を加えた場合の磁力線の 3 次元表示。摂動モードは  $(m, n) = (2, 1)$  のみとし、磁気島の幅は  $\Delta\psi_p = 0.1$  とした。磁力線は青の曲線で描いた。黄色のドットは  $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面と磁力線の交わる位置を示す。

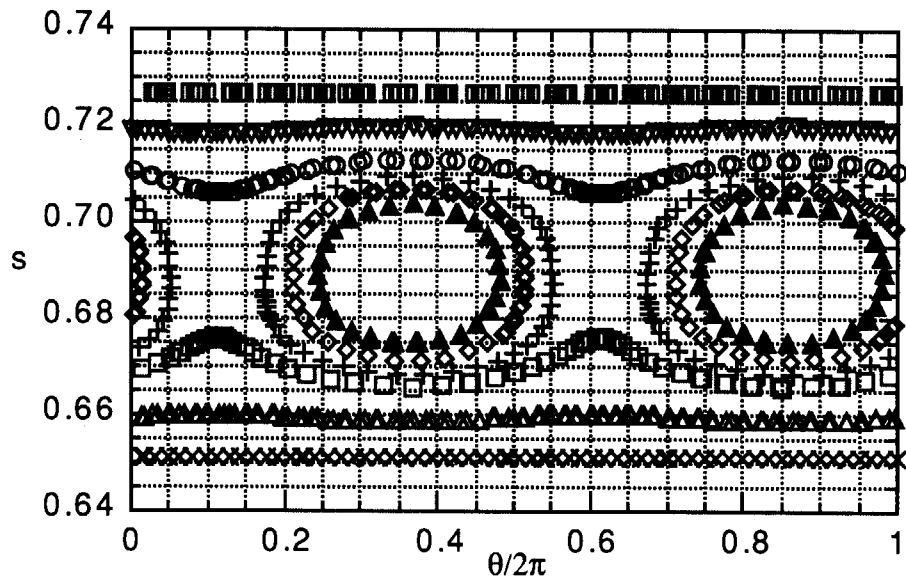


図 9: 摂動磁場を加えた場合の共鳴点近傍の磁力線を  $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面上で示す。摂動モードは  $(m, n) = (2, 1)$  とし、磁気島の幅は  $\Delta\psi_p = 0.02$  とした。



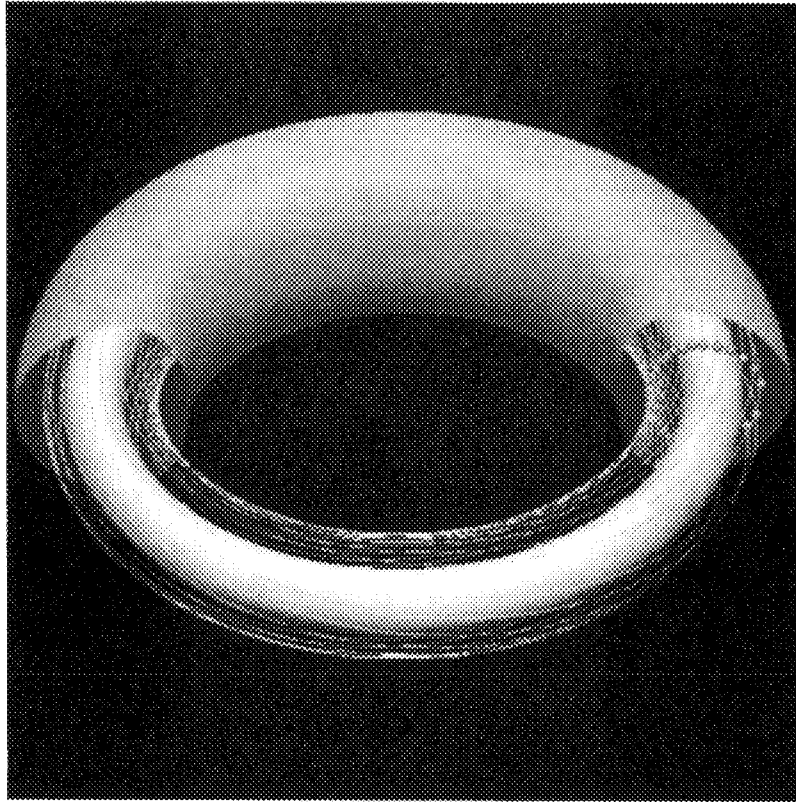


図 10: MHD 平衡配位における、相対論的な非補足電子の軌道。軌道はピンクの曲線で示した。また、電子のエネルギーは、 $\gamma = 20$  とした。黄色のドットは  $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面と電子軌道の交点を表す。

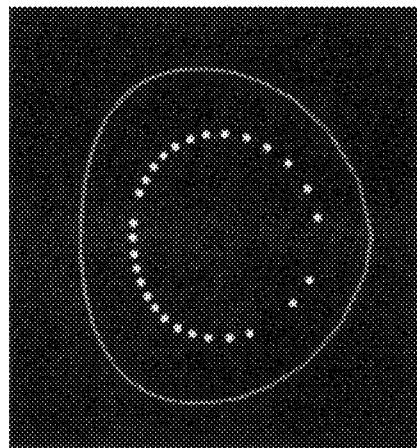


図 11: 図 10 の Poincaré プロットを拡大した図。

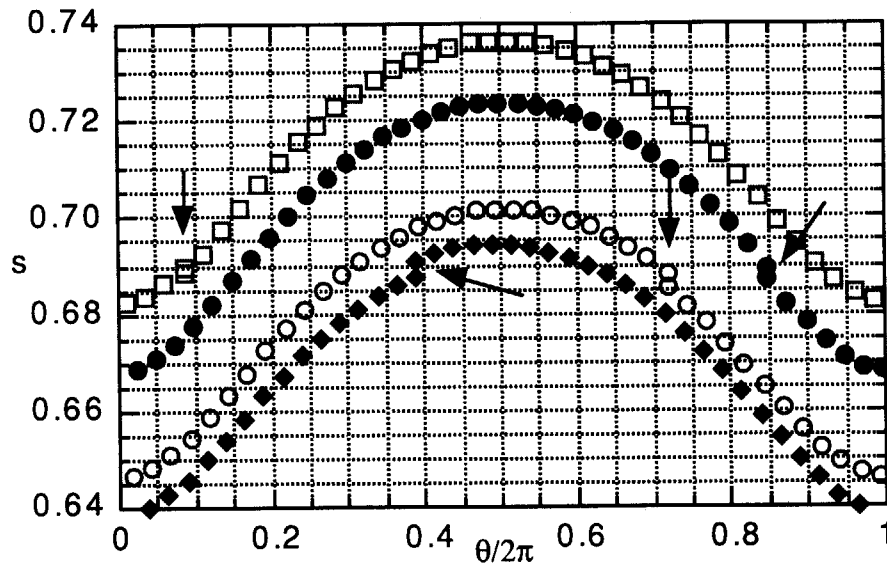


図 12: 乱雑磁場配位の相対論的電子軌道を  $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面上で表示した。電子は、 $\mu = 0$  の非補足電子とし、エネルギーは  $\gamma = 40$  とした。また、摂動モードは  $(m, n) = (2, 1)$  のみとし、磁気島の幅は  $\Delta\psi_p = 0.02$  とし、図 9 と同じ条件にした。矢印は、ポロイダル方向に 1 周する際の始点と終点の位置を表す。

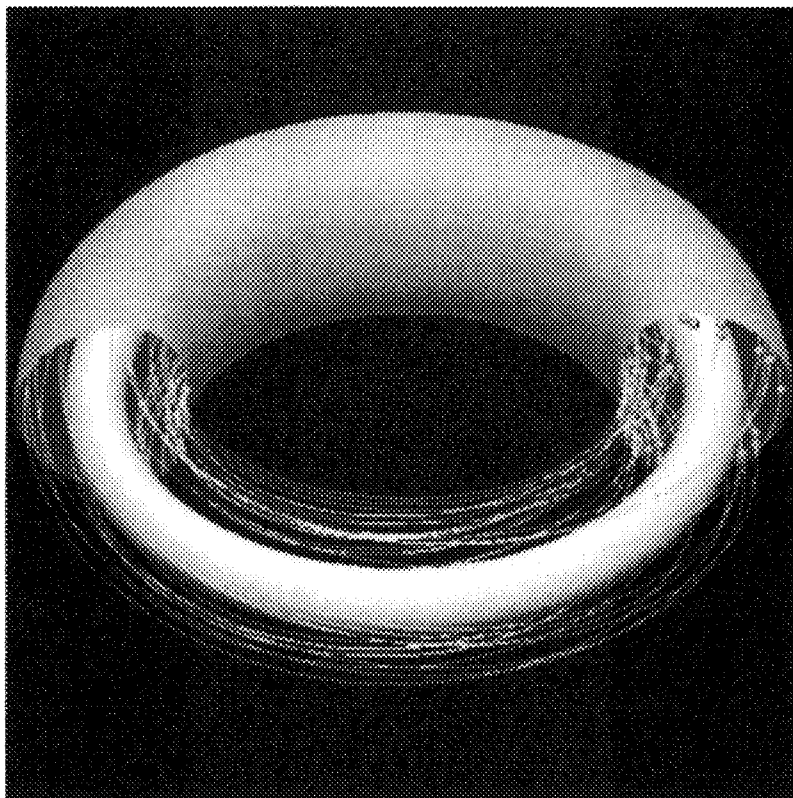


図 13: 乱雑磁場配位の相対論的電子軌道の 3 次元表示。電子のエネルギーは、 $\gamma = 20$  とし、摂動磁場のモードは、本文に示すように、20 個とった。黄色のドットは  $\zeta = \text{const.}$  の Poincaré 断面上の電子軌道。

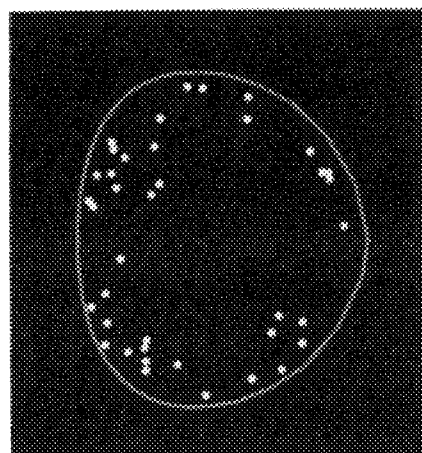


図 14: 図 13 の Poincaré プロットを拡大した図。外側の閉曲線は最外殻の磁気面の断面図で、デバイスの大きさを示している。

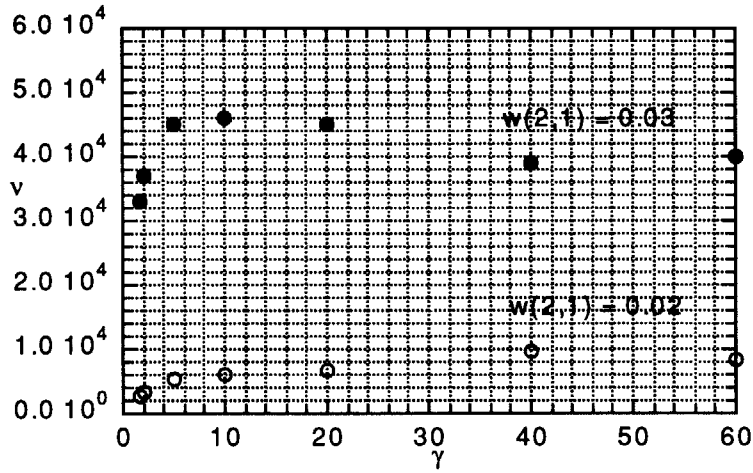


図 15: 電子の損失率  $\nu$  のエネルギー依存性。ここで、 $(m, n) = (2, 1)$  の磁気島の幅  $\Delta\psi_p$  が 0.02 の場合 (○)、および、0.03 の場合 (●) を示す。

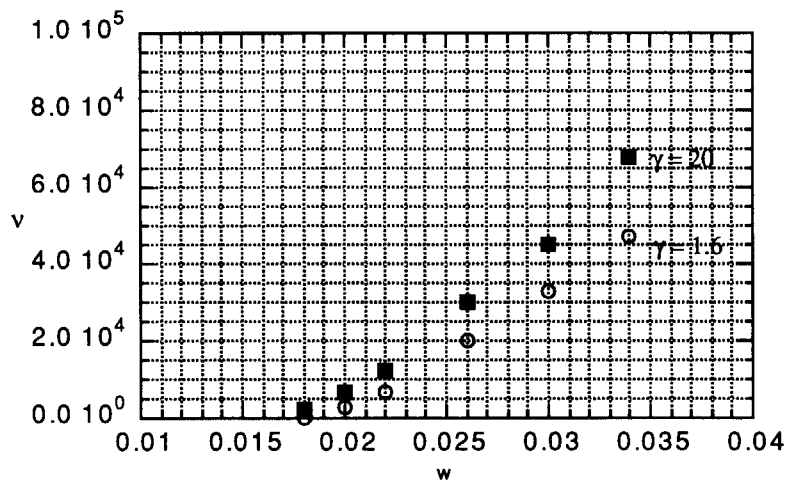


図 16: 電子の損失率  $\nu$  の磁気島の幅に対する依存性。ここで、幅を変えたのは、 $(m, n) = (2, 1)$  の磁気島である。また、図中の○は、 $\gamma = 1.6$  の低エネルギー電子、■は、 $\gamma = 20$  の超相対論的な電子に対する結果を示す。

## 付録A コモン・ブロック

プログラムの可視化のためのコモン・ファイル名とそこに含まれるコモン・ラベルおよび内容を表2に示す。

表 2: コモン・ラベル一覧

コモン・ファイル名	コモン・ラベル	内容
zzzboozerc	boozerc	Boozerc 座標の作業配列
zzzcalcon	calcon	計算条件を表す定数
zzzcalvar	calvar	計算を制御する変数
zzzpoint	pointer	整合配列のポインタ
zzzunicon	unicon	普遍定数

また表3から表7にそれぞれのコモン・ラベルに含まれるコモン変数名と内容、データ型を示す。ただし、表中のデータ型の欄のRは倍精度実数型、Iは整数型を表す。

表 3: boozerc のコモン変数一覧

変数名	内容	データ型
<i>gs(ntetp)</i>	座標変換の関数 $G$ の等高線上のデータ	R
<i>gbspl(ntetp)</i>	関数 $G$ のスプライン補間用作業配列	R

表 4: calcon のコモン変数一覧

変数名	内容	データ型
<i>nphi</i>	トロイダル角 $\phi$ のグリッド数	I
<i>nzeta</i>	磁力線の $\zeta$ 方向のグリッド数	I
<i>nmfl</i>	磁力線の本数 ( $\leq 100$ )	I
<i>nzturn</i>	磁力線の $\zeta$ 方向の周回数 ( $\leq 1000$ )	I
<i>nprtrb</i>	磁力線にたいする摂動磁場のモード数 ( $\leq 100$ )	I
<i>ntheta</i>	電子軌道の $\theta$ 方向のグリッド数	I
<i>nele</i>	電子の数	I
<i>ntturn</i>	電子の $\theta$ 方向の周回数	I

表 5: **calvar** のコモン変数一覧

変数名	内容	データ型
<i>nearele(10)</i>	出力される電子軌道に近接する磁気面の番号	I
<i>nearmfl(10)</i>	出力される磁力線に近接する磁気面の番号	I

表 6: **pointer** のコモン変数一覧

変数名	内容	データ型
<i>ir(100)</i>	実数型整合配列のポインタ	I

表 7: **unicorn** のコモン変数一覧

変数名	内容	データ型
<i>pi</i>	円周率 $\pi$	R

## 付録B 整合配列

入力パラメータに応じて、次元が変わり得る配列は、プログラム中で整合配列として定義するのが便利である。ここでは実数型の整合配列  $rd(nrd)$  をプログラムの先頭で

```

program main
  :
  parameter( nrd = 1000000 )
  real*8    rd(nrd)
  :
end

```

のように定義する。各配列には、この  $rd$  を分割した領域が割り当てられる。各々の配列を参照するときには、この  $rd$  を分割したときの先頭番地をポインターで指示すればよい。このような方法でプログラムを作るメリットとして、

- ルーチンを呼び出すときの仮引数は  $rd$  だけでよいので、配列データのポインタビリティが高い。
- したがって、プログラムのモジュール化が容易である。
- メモリあふれがプログラム実行直後に検出できる。

ことなどが挙げられる。プログラムの先頭で各配列を個別に定義したり、配列をローカルなルーチン内で定義したりすると、これらのメリットは失われることになる。

以下の表 8 に、実数型整合配列のポインタ番号 [表 6 の  $ir(100)$ ]、配列を参照する際の変数名 (サイズ)、その内容を示す。

表 8: 整合配列一覧

ポインタ番号	変数名 (サイズ)	内容
1	<i>rfc</i> (npsi+1,nchi)	磁力線を直線に見る座標で表した $R(s, \chi)$
2	<i>zfc</i> (npsi+1,nchi)	磁力線を直線に見る座標で表した $Z(s, \chi)$
3	<i>rbc</i> (npsi+1,nchi)	Boozer 座標で表した $R(s, \theta)$
4	<i>zbc</i> (npsi+1,nchi)	Boozer 座標で表した $Z(s, \theta)$
5	<i>zetamfl</i> (nzeta)	磁力線の Boozer 座標 $\zeta$
6	<i>smfl</i> (nzeta,nmfl,nzturn)	磁力線の座標 $s$
7	<i>tmfl</i> (nzeta,nmfl,nzturn)	磁力線の Boozer 座標 $\theta$
8	<i>rmfl</i> (nzeta,nmfl,nzturn)	磁力線の円柱座標 $R$
9	<i>zmfl</i> (nzeta,nmfl,nzturn)	磁力線の円柱座標 $Z$
10	<i>qmfl</i> (nzeta,nmfl,nzturn)	磁力線上の安全係数 $q$
11	<i>cspl</i> (npsi+1)	1次元スプライン補間の作業配列
12	<i>xtspl</i> (npsi+1)	1次元スプライン補間の作業配列
13	<i>vwspl</i> (5*(npsi+1)+2)	1次元スプライン補間の作業配列
14	<i>gchi0</i> (npsi+1,nchi)	座標変換時の関数 $G(s, \theta)$ $0 \leq \theta \leq \pi$
15	<i>gchi</i> (npsi+1,2*nchi+3)	定義域を拡張した関数 $G(s, \theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$
16	<i>gmfl</i> (nzeta,nmfl,nzturn)	磁力線上の関数 $G$
17	<i>thele</i> (nthetag,nele)	電子の Boozer 座標 $\theta$
18	<i>zetaele</i> (nthetag,nele,ntturn)	電子の Boozer 座標 $\zeta$
19	<i>sele</i> (nthetag,nele,ntturn)	電子の座標 $s$
20	<i>rele</i> (nthetag,nele,ntturn)	電子の円柱座標 $R$
21	<i>zele</i> (nthetag,nele,ntturn)	電子の円柱座標 $Z$
22	<i>gele</i> (nthetag,nele,ntturn)	電子軌道上の安全係数 $q$
23	<i>gele</i> (nthetag,nele,ntturn)	電子軌道上の関数 $G$



## 付録C ルーチン機能

以下の表 9、10 に追加したルーチンの名称、その機能概略、呼出側のルーチン名の一覧を示す。なお、補間の際には **SSLII** のスプライン補間を利用した。また出力ファイル番号を [#番号] に示した。

表 9: ルーチン機能一覧 (1)

ルーチン名	機能	呼出側ルーチン名
<i>zzzcalcnst</i>	計算条件のコモン変数にデフォルト値を設定	<i>preset</i>
<i>zzzele</i>	整合配列へ電子の座標 $(s, \theta, \zeta)$ を格納	<i>xelplt</i>
<i>zzzelegi</i>	電子の座標 $(s_0, \theta_0)$ での関数 $G(s, \theta)$ の補間値	<i>xelplt</i>
<i>zzzelepsos</i>	電子軌道の Poincaré 断面 ( $\zeta = \text{const.}$ ) 出力 [#74]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzeleg</i>	電子の座標 $s_0$ での安全係数 $q(s)$ の補間値	<i>xelplt</i>
<i>zzzelerz</i>	電子の座標 $(s_0, \theta_0)$ での $R(s, \theta)$ 、 $Z(s, \theta)$ の補間値	<i>xelplt</i>
<i>zzzflxcrd</i>	整合配列へ磁束座標を格納	<i>stepon</i>
<i>zzzinput</i>	namelist 入力	<i>main000</i>
<i>zzzmfl</i>	整合配列へ磁力線の座標 $(s, \theta, \zeta)$ を格納	<i>xmgorbt</i>
<i>zzzmflg</i>	整合配列へ座標変換の関数 $G(s, \theta)$ を格納	<i>chicln</i>
<i>zzzmflgext</i>	関数 $G(s, \theta)$ の定義域を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ へ拡張	<i>xmgplt</i>
<i>zzzmflgi</i>	磁力線の座標 $(s_0, \theta_0)$ での関数 $G(s, \theta)$ の補間値	<i>xmgplt</i>
<i>zzzmflq</i>	磁力線の座標 $s_0$ での安全係数 $q(s)$ の補間値	<i>xmgplt</i>
<i>zzzmflrz</i>	磁力線の座標 $(s_0, \theta_0)$ での $R(s, \theta)$ 、 $Z(s, \theta)$ の補間値	<i>xmgplt</i>
<i>zzznearms</i>	出力される磁力線および電子軌道の際近接磁気面の番号	<i>xmgplt</i> <i>xelplt</i>

表 10: ルーチン機能一覧 (2)

ルーチン名	機能	呼出側ルーチン名
<i>zzzoutavs</i>	AVS 出力 [#60: 磁気面 (半分)、#61: 磁気面 (全体)、 #62: 磁力線、#63: Poincaré 断面内の磁力線、 #64: 電子軌道、#65: Poincaré 断面内の電子軌道]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzoutele</i>	電子軌道の 3 次元出力 [#73]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzoutflc</i>	磁束座標の $RZ$ 面内の 2 次元出力 [#89: 磁力線を直線にみる座標、#90: Boozer 座標]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzoutmfl</i>	磁力線の 3 次元出力 [#83]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzoutmfl0</i>	磁力線の座標 $(s, \theta, \zeta)$ を出力 [#82]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzoutms</i>	磁気面の 3 次元出力 [#91-93]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzoutput</i>	GNU PLOT および AVS 出力コントロール	<i>main000</i>
<i>zzzoutpsos</i>	磁力線の Poincaré 断面 ( $\zeta = \text{const.}$ ) 出力 [#79: $(x, y, z)$ 、#80: $(\theta/2\pi, s)$ 、#81: $(R, Z)$ ]	<i>zzzoutput</i>
<i>zzzoutq</i>	安全係数 $q(s)$ を出力 [#88]	<i>xmgplt</i>
<i>zzzpointr</i>	整合配列のポインタを設定	<i>main000</i>
<i>zzzunicnst</i>	普遍定数の値を設定	<i>preset</i>

# 国際単位系 (SI) と換算表

表1 SI基本単位および補助単位

量	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質質量	モル	mol
光度	カンデラ	cd
平面角	ラジアン	rad
立体角	ステラジアン	sr

表3 固有の名称をもつSI組立単位

量	名称	記号	他のSI単位による表現
周波数	ヘルツ	Hz	s <sup>-1</sup>
力	ニュートン	N	m·kg/s <sup>2</sup>
圧力, 応力	パスカル	Pa	N/m <sup>2</sup>
エネルギー, 仕事, 熱量	ジュール	J	N·m
工率, 放射束	ワット	W	J/s
電気量, 電荷	クーロン	C	A·s
電位, 電圧, 起電力	ボルト	V	W/A
静電容量	ファラド	F	C/V
電気抵抗	オーム	Ω	V/A
コンダクタンス	ジーメンス	S	A/V
磁束	ウェーバ	Wb	V·s
磁束密度	テスラ	T	Wb/m <sup>2</sup>
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A
セルシウス温度	セルシウス度	°C	
光度	ルーメン	lm	cd·sr
照射度	ルクス	lx	lm/m <sup>2</sup>
放射能	ベクレル	Bq	s <sup>-1</sup>
吸収線量	グレイ	Gy	J/kg
線量当量	シーベルト	Sv	J/kg

表2 SIと併用される単位

名称	記号
分, 時, 日	min, h, d
度, 分, 秒	°, ', "
リットル	l, L
トン	t
電子ボルト	eV
原子質量単位	u

1 eV = 1.60218 × 10<sup>-19</sup> J

1 u = 1.66054 × 10<sup>-27</sup> kg

表4 SIと共に暫定的に維持される単位

名称	記号
オングストローム	Å
バ	b
バル	bar
ガリ	Gal
キュリー	Ci
レントゲン	R
ラド	rad
レム	rem

1 Å = 0.1 nm = 10<sup>-10</sup> m

1 b = 100 fm<sup>2</sup> = 10<sup>-28</sup> m<sup>2</sup>

1 bar = 0.1 MPa = 10<sup>5</sup> Pa

1 Gal = 1 cm/s<sup>2</sup> = 10<sup>-2</sup> m/s<sup>2</sup>

1 Ci = 3.7 × 10<sup>10</sup> Bq

1 R = 2.58 × 10<sup>-4</sup> C/kg

1 rad = 1 cGy = 10<sup>-2</sup> Gy

1 rem = 1 cSv = 10<sup>-2</sup> Sv

表5 SI接頭語

倍数	接頭語	記号
10 <sup>18</sup>	エクサ	E
10 <sup>15</sup>	ペタ	P
10 <sup>12</sup>	テラ	T
10 <sup>9</sup>	ギガ	G
10 <sup>6</sup>	メガ	M
10 <sup>3</sup>	キロ	k
10 <sup>2</sup>	ヘクト	h
10 <sup>1</sup>	デカ	da
10 <sup>-1</sup>	デシ	d
10 <sup>-2</sup>	センチ	c
10 <sup>-3</sup>	ミリ	m
10 <sup>-6</sup>	マイクロ	μ
10 <sup>-9</sup>	ナノ	n
10 <sup>-12</sup>	ピコ	p
10 <sup>-15</sup>	フェムト	f
10 <sup>-18</sup>	アト	a

(注)

- 表1-5は「国際単位系」第5版, 国際度量衡局 1985年刊行による。ただし, 1 eV および 1 uの値は CODATA の1986年推奨値によった。
- 表4には海里, ノット, アール, ヘクタールも含まれているが日常の単位なのでここでは省略した。
- bar は, JISでは流体の圧力を表わす場合に限り表2のカテゴリーに分類されている。
- EC 閣僚理事会指令では bar, barn および「血圧の単位」mmHg を表2のカテゴリーに入れている。

## 換 算 表

力	N (=10 <sup>5</sup> dyn)	kgf	lbf
	1	0.101972	0.224809
	9.80665	1	2.20462
	4.44822	0.453592	1

粘 度 1 Pa·s (= N·s/m<sup>2</sup>) = 10 P (ポアズ) (g/(cm·s))

動粘度 1 m<sup>2</sup>/s = 10<sup>4</sup> St (ストークス) (cm<sup>2</sup>/s)

圧	MPa (=10 bar)	kgf/cm <sup>2</sup>	atm	mmHg (Torr)	lbf/in <sup>2</sup> (psi)
	1	10.1972	9.86923	7.50062 × 10 <sup>3</sup>	145.038
力	0.0980665	1	0.967841	735.559	14.2233
	0.101325	1.03323	1	760	14.6959
	1.33322 × 10 <sup>-4</sup>	1.35951 × 10 <sup>-3</sup>	1.31579 × 10 <sup>-3</sup>	1	1.93368 × 10 <sup>-2</sup>
	6.89476 × 10 <sup>-3</sup>	7.03070 × 10 <sup>-2</sup>	6.80460 × 10 <sup>-2</sup>	51.7149	1

エネルギー・仕事・熱量	J (=10 <sup>7</sup> erg)	kgf·m	kW·h	cal (計量法)	Btu	ft·lbf	eV
	1	0.101972	2.77778 × 10 <sup>-7</sup>	0.238889	9.47813 × 10 <sup>-4</sup>	0.737562	6.24150 × 10 <sup>18</sup>
	9.80665	1	2.72407 × 10 <sup>-6</sup>	2.34270	9.29487 × 10 <sup>-3</sup>	7.23301	6.12082 × 10 <sup>19</sup>
	3.6 × 10 <sup>6</sup>	3.67098 × 10 <sup>5</sup>	1	8.59999 × 10 <sup>5</sup>	3412.13	2.65522 × 10 <sup>6</sup>	2.24694 × 10 <sup>25</sup>
	4.18605	0.426858	1.16279 × 10 <sup>-6</sup>	1	3.96759 × 10 <sup>-3</sup>	3.08747	2.61272 × 10 <sup>19</sup>
	1055.06	107.586	2.93072 × 10 <sup>-4</sup>	252.042	1	778.172	6.58515 × 10 <sup>21</sup>
	1.35582	0.138255	3.76616 × 10 <sup>-7</sup>	0.323890	1.28506 × 10 <sup>-3</sup>	1	8.46233 × 10 <sup>18</sup>
	1.60218 × 10 <sup>-19</sup>	1.63377 × 10 <sup>-20</sup>	4.45050 × 10 <sup>-26</sup>	3.82743 × 10 <sup>-20</sup>	1.51857 × 10 <sup>-22</sup>	1.18171 × 10 <sup>-19</sup>	1

- 1 cal = 4.18605 J (計量法)  
 = 4.184 J (熱化学)  
 = 4.1855 J (15 °C)  
 = 4.1868 J (国際蒸気表)
- 仕事率 1 PS (仏馬力)  
 = 75 kgf·m/s  
 = 735.499 W

放射能	Bq	Ci
	1	2.70270 × 10 <sup>-11</sup>
	3.7 × 10 <sup>10</sup>	1

吸収線量	Gy	rad
	1	100
	0.01	1

照射線量	C/kg	R
	1	3876
	2.58 × 10 <sup>-4</sup>	1

線量当量	Sv	rem
	1	100
	0.01	1

E-T-C-R-e-e コード：トカマクにおける相対論的電子の軌道解析