

JAERI-M
4483

トカマクにおける捕捉粒子不安定と拡散

1971年6月

菅原 享*

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

目次なし

1. はじめに

プラズマ中の粒子は、その運動の特徴から質的に区分される二種類の粒子、すなわち、磁気面上の弱い磁場領域に閉じ込められた捕捉粒子と、磁気面上を周回する捕捉されない粒子とからなる。それぞれの粒子は、従って、ポテンシャル波動に対して異なった“経験”をし、とりわけ、波動周波数が捕捉粒子のバウンス周波数よりも小さい場合に、それが顕著となる。さらに、粒子間の衝突は、磁力線に沿う速度の相異に基づく実効的衝突周波数の違いとして現われる。

回転変換の比較的小さなトカマク型磁場配位では、トロイダル磁場の不均一に基づく捕捉粒子が現われる。衝突に依る、この捕捉粒子の散乱が導くドリフト波の不安定は、Kadomtsev と Pogutse^{1,2)} に依って初めて指摘され、このモードに基づく粒子拡散係数は、新古典理論の与える値³⁾を上回ることが結論された。しかし、[1][2]では、衝突周波数の小さな領域において、乱れの局在する幅を大きめに評価している。そこで、ここでは、捕捉粒子のバナナ軌道幅を考慮に入れた非局在線型解析を行なってこのサイズをあたり、拡散係数を評価しなおす。

問題を簡単化するために、次の仮定をおく。

- (1) アスペクト比は $\epsilon^{-1} = R_0 / r$ は 1 に比べて大きく、磁気面断面は同心円をなす。
- (2) 捕捉されない粒子に対しては、磁場の不均一を無視し、磁力線に沿って等速運動をなすものとする。捕捉粒子に対しては、次のモデル磁場の形式で不均一性を考慮する。

$$\vec{B} = B_0 \{ 1 - \epsilon \operatorname{sign}(\cos \phi) \} \vec{i}_\theta + \frac{\epsilon}{q} B_0 \vec{i}_\phi \tag{1}$$

すなわち、一つの磁気面の上で、トロイダル磁場の強さが階段状に変化する。

- (3) 粒子間衝突に関しては、捕捉電子とイオンの衝突だけを考慮し、それを

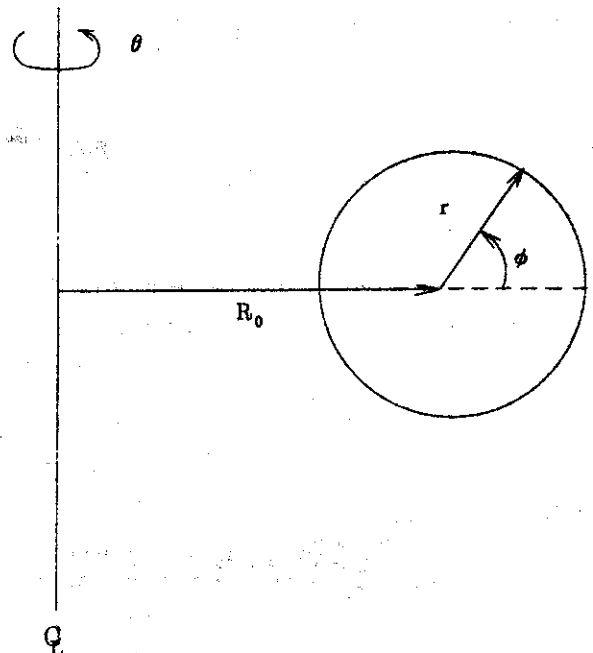
$$\nu_{eff} = \frac{\nu_{ei}}{\epsilon} \cdot \frac{v_{Te}^3}{v^3} \tag{2}$$

とする。これは、電子-イオン衝突に関する Landau オペレータ

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{v^3 \vec{I} - \vec{v} \vec{v}}{v^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$$

から、磁力線に沿う方向の成分

$$\frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial \phi} (1 - \phi^2) \frac{\partial}{\partial \phi} ; \phi = v_{||} / v$$



第1図 座標系

を取出し、これを $(\epsilon v^3)^{-1}$ と近似したものである。なお v_{Te} は電子の熱速度である。

- (4) 波を静電波と近似し、その周波数は捕捉粒子のバウンス周波数に比べ小さいとする。

(5) 平衡状態の速度分布は、局所Maxwell分布をなす。

$$F = n(r) f_M$$

$$f_M = \left[\frac{m}{2\pi T(r)} \right]^{3/2} e^{-W/T(r)}$$

2. 案内中心の軌道

(1)式で与えられるトロイダル磁場において、粒子が捕捉される条件を求めよう。磁気面からのずれを無視すれば、磁気面上での磁場の最大値は $B_0(1+\epsilon)$ であるから、捕捉条件は

$$W < \mu B_0 (1+\epsilon)$$

となる。ここで、 W , μ はそれぞれ粒子のエネルギー、磁気モメントである。従って、トーラスの外側に位置する粒子のうち

$$|v_{\parallel}| < \sqrt{2\epsilon} v_{\perp} \quad (3)$$

を満たすものが捕捉される。

磁気面からの捕捉粒子のずれは、トロイダル方向の正準運動量の保存則を用いて、

$$r = \langle r \rangle + \delta r$$

$$\delta r = \frac{q}{\epsilon \Omega} v_{\parallel} \quad (4)$$

と与えられる。 Ω は磁場 B_0 でのサイクロトロン周波数、 $\langle \rangle$ はバウンス周期での時間平均を示す。(1)式で与えられる磁場では、ミラー点の間で磁場は不変であるから、 v_{\parallel} の大きさは変わらないことを注意しよう。

トロイダル磁場の曲率に伴う磁気面での粒子のドリフトは、縦運動量の断熱不変性を用いて

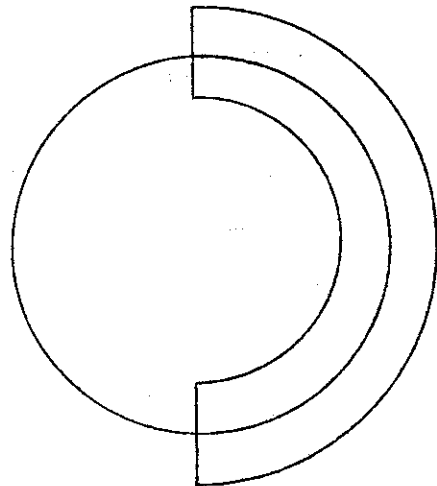
$$\langle \dot{\xi} \rangle = -\frac{q}{r} \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega R_0} \left\{ 1 + 2\delta_q \frac{v_{\parallel}^2}{\epsilon v_{\perp}^2} \right\} \quad (5)$$

となる。ただし

$$\xi = \theta - q\phi, \quad \delta_q = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}$$

である。

以上から、捕捉粒子は、ミラー点で完全反射される往復運動に、(4)(5)式で表わされるずれ運動を加味された軌道をとる。特に、 θ 面への射影軌道は、第2図のように、矩形端をもったバナナとなる。



第2図 捕捉粒子の軌道

3. 分散方程式

サイクロトロン周波数に比べ低周波であり，Larmor 半径に比べ長い波長の波動を対象とするから，基礎方程式として，衝突項を含む線型化されたドリフト近似運動方程式を用いる。それは，案内中心軌道に沿った時間積分を用いると

$$\tilde{f} = e\tilde{\varphi} \frac{\partial F}{\partial W} - \int_{-\infty}^t dt' e^{\nu_{\text{eff}}(t'-t)} \left\{ e \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t'} \frac{\partial F}{\partial W} + \frac{c}{B_0^2} (\vec{B} \times \nabla \tilde{\varphi}) \cdot \nabla F \right\}$$

で与えられる。 \sim は摂動量を示す。

摂動量に関し

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \hat{f} e^{i(\ell\theta - \omega t)} \\ &= \sum_p \hat{f}_p(r) e^{i(p\phi + \ell\theta - \omega t)} \end{aligned}$$

の形式を仮定しよう。 $\tilde{\varphi}$ についても同様とする。捕捉粒子に関する時間積分に対して，縦運動の周期性， $\hat{\varphi}_p(r)$ のバナナ中心のまわりの Taylor 展開式， $\omega \ll \omega_b$ (バウンス周波数) を用いる。すると，

$$\begin{aligned} \hat{f} &= -\frac{e\hat{\varphi}}{T} F + \left[\frac{eF}{T} \sum_p \frac{\omega - \Omega_*^{(p)}}{\omega - k_{\parallel}^{(p)} v_{\parallel}} e^{ip\phi} \hat{\varphi}_p \right]_{\text{transit}} \\ &\quad + \left[\frac{eF}{T} \sum_p \frac{\omega - \Omega_*^{(p)}}{\omega + i\nu_{\text{eff}} - \ell \langle \xi \rangle} e^{ip\phi} \left\{ \hat{\varphi}_p + \frac{(\partial r)^2}{2} \hat{\varphi}_p'' \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\sin(p + \ell q)\pi/2}{(p + \ell q)\pi/2} \right]_{\text{trap}} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，プライムは r での微分を示し

$$\begin{aligned} k_{\parallel}^{(p)} &= \frac{p + \ell q}{R_0 q}, \quad \eta = \frac{d \ln T}{d \ln n} \\ \Omega_*^{(p)} &= \omega_*^{(p)} \left\{ 1 + \eta \left(\frac{v^2}{v_T^2} - \frac{3}{2} \right) \right\} \\ \omega_*^{(p)} &= -\frac{p}{r} \frac{cT}{eB_0} \frac{n'}{n} \end{aligned}$$

(6)式から，捕捉粒子の寄与は， k_{\parallel} に強く依存することがわかる。ところで，捕捉粒子モードに関心があるから，捕捉粒子が重要な役割を演ずる長波長成分を考慮する。すなわち， $|s + \ell q| \ll 1$ なる整数 s を定めるとき

$$\frac{\sin(p + \ell q)\pi/2}{(p + \ell q)\pi/2} \approx \begin{cases} 0 & p \neq s \\ 1 & p = s \end{cases}$$

として，摂動の s 成分だけを考慮することにしよう。こうして，準中性条件をおくと，次の分散方程式が得られる。

$$\hat{\varphi}_s'' + Q \hat{\varphi}_s = 0$$

$$Q = \frac{-(1+\alpha) + \sum_j \alpha_j \int_{|v_{\parallel}| > \sqrt{2\epsilon} v_{\perp}} d^3\vec{v} f_{Mj} \frac{\omega - \Omega_{*j}^{(s)}}{\omega - k_{\parallel}^{(s)} v_{\parallel}} + \sum_j \alpha_j \int_{|v_{\parallel}| < \sqrt{2\epsilon} v_{\perp}} d^3\vec{v} f_{Mj} \frac{\omega - \Omega_{*j}^{(s)}}{\omega + i\nu_{eff} - \ell \langle \xi \rangle_j}}{\int_{|v_{\parallel}| < \sqrt{2\epsilon} v_{\perp}} d^3\vec{v} f_{Mi} \frac{(\delta r)_i^2}{2} \frac{\omega - \Omega_{*i}^{(s)}}{\omega - \ell \langle \xi \rangle_i}} \quad (7)$$

ここで、電子のパナナ幅は無視した。また

$$\alpha_j = T_{ion} / T_j, \quad \alpha = \alpha_e$$

Qの分母は、積分を実行すると

$$\frac{\Lambda_i^2 \sqrt{2\epsilon}}{8} \left[1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} (1 + \eta_i) + \frac{5}{3} \frac{\omega_m}{\omega} \left\{ 1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} (1 + 2\eta_i) \right\} \right]$$

となる。ここで Λ , ω_m は夫々パナナ幅、磁場ドリフトであり、

$$\Lambda = \frac{q v_T}{\sqrt{\epsilon} \Omega}$$

$$\omega_m = -\frac{3}{2} \frac{\ell q}{r} \frac{c T_i}{e B_0 R_0} \left(1 + \frac{4}{3} \delta_q \right)$$

Qの分子に現われる捕捉されない粒子に関する積分項は、プラズマ分散函数を用いると

$$\left\{ 1 - \frac{\omega^*}{\omega} \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \right\} y \left\{ Y_0(y) - Y_0(y/\sqrt{2\epsilon}) \right\} - \frac{\omega^*}{\omega} \eta y \left\{ Y_2(y) - Y_2(y/\sqrt{2\epsilon}) \right\}$$

となる。ここで

$$y = \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_T}$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{t^n e^{-t^2}}{x-t} dt$$

捕捉粒子に関する積分は、イオンについては

$$\sqrt{2\epsilon} \left[1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \frac{\omega_m}{\omega} - \frac{\omega_m \omega_{*i}}{\omega^2} (1 + \eta_i) \right]$$

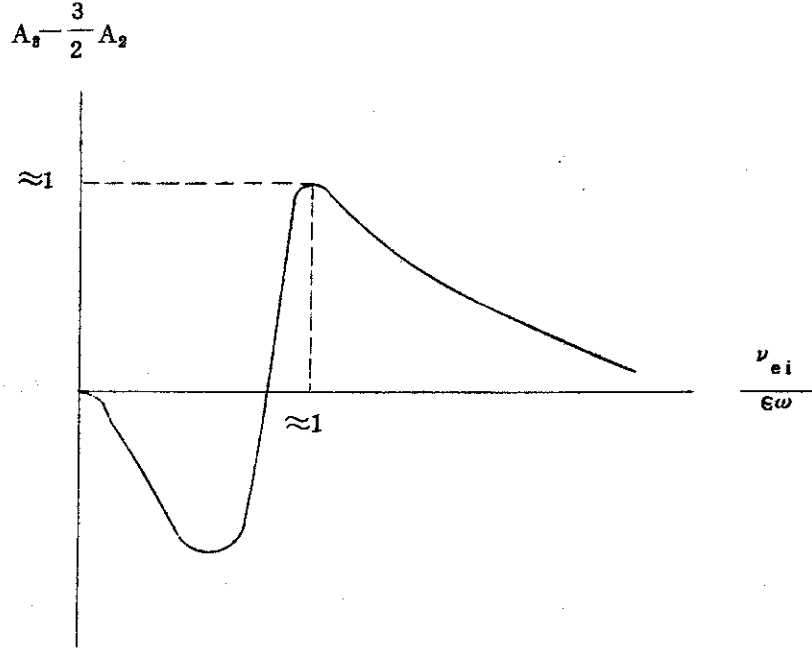
電子については、その虚部だけを記せば

$$i \left(\frac{\omega_{*e}}{\omega} - 1 \right) A_2 + i \frac{\omega_{*e}}{\omega} \eta_e \left(A_3 - \frac{3}{2} A_2 \right)$$

となる。ここで

$$A_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\nu_{ei}}{\epsilon\omega} \int_0^\infty \frac{t^n e^{-t}}{t^2 + (\nu_{ei}/\epsilon\omega)^2} dt$$

であり、 $A_3 - \frac{3}{2} A_2$ は第3図のように函数となる。



第3図 Qの虚数部

4. 捕捉電子モード

分散方程式(7)を近似的に解くために、条件

$$\sqrt{2\epsilon} v_{Te}, \quad v_{Ti} < \frac{\omega}{k_{||}} \ll v_{Te}$$

を満たす場合を先づ検討する。この場合、捕捉されない電子は、Boltzmann 分布をなし、また、後で見るとように $\omega \approx \omega_*$ であるから、捕捉粒子項の実部は無視できる。従って $|\eta_e| > 6$ 程度の温度勾配があるとき

$$Q = \frac{\frac{8}{A_i^2 \sqrt{2\epsilon}} \left[\left\{ \frac{\omega_*}{\omega} - 1 + i\sqrt{2\epsilon} \frac{\omega_*}{\omega} \eta_e \left(A_3 - \frac{3}{2} A_2 \right) - i\sqrt{\pi} \left(1 + \alpha \frac{\omega_*}{\omega} \right) y_i^{-2} - i\sqrt{\pi} \alpha \frac{\omega_*}{\omega} \eta_i y_i \left(y_i^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-y_i^2} \right\} \right]}{\left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{\omega_*}{\omega} (1 + \eta_i) \right\} + \frac{1}{2\alpha y_i^2}} \quad (8)$$

となる。ここで $\omega_* = \omega_{*e}$ である。

$k_{||}$ は、シヤのために半径方向に変化するが、始めに $y_i \gg 1$ の成立つ領域を考える。このとき、局所理論を適用し、 $Q \approx 0$ とおけば

$$\begin{aligned} R_e \omega &\approx \omega_* \\ r &\approx \sqrt{2\epsilon} \eta_e \omega_* \left(A_3 - \frac{3}{2} A_2 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。 r は ν_{ei} に対し、Fig.3 の関係をもつから

$$\nu_{ei} \approx \epsilon \omega_* \quad (10)$$

で最大成長率をとる。また、空間的には、

$$\frac{r}{dr} \operatorname{Re} Q \approx 0$$

で r は最大となるから、(8)式より

$$\frac{r T_e'}{T_e} + \frac{r n''}{n'} - \frac{r n'}{n} \approx 1$$

が満たされる位置に不安定中心がある。この位置 r_0 が存在すると仮定しよう。 r_0 より離れると、

$$k_{\parallel} \approx (r - r_0) \left(\frac{\ell}{r} \frac{\delta_q}{R_0} \right)_{r=r_0} \quad (11)$$

に従って $|k_{\parallel}|$ は増大し、 $y_i \sim 1$ 程度になると、(8)式の虚部は、イオン・ランダウ減衰項が効くようになり、結局、(7)式は、空間的に減衰するアイコナル解を与える。即ち、 $y_1 > 1$ の領域

$$|x| = |r - r_0| < \frac{A_i}{\alpha \sqrt{\epsilon}} \left| \frac{\delta_n}{\delta_q} \right|$$

にこのモードは局在する。この領域で

$$\hat{\varphi}_s'' + \left\{ Q \Big|_{r=r_0} + \frac{x^2}{2} Q'' \Big|_{r=r_0} \right\} \hat{\varphi}_s = 0$$

なるWeber方程式を解くと

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_s &= e^{-\frac{i}{2}\sigma x^2} H_n \left((i\sigma)^{1/2} x \right) \\ \sigma &= \frac{\epsilon^{1/4}}{A_i^2} \left| \frac{\delta_q}{\delta_n} \right| \end{aligned}$$

を得る。従って、特徴的な半径方向の波数は

$$k_r \approx \sigma x \approx \frac{1}{\alpha \epsilon^{1/4} A_i} \quad (12)$$

で与えられる。

このモードに対する粒子拡散係数を

$$D_{\perp} \approx \frac{\gamma}{k_{\perp}^2}$$

で評価しよう。(9)(10)(12)式を用いると、これは、

$$D_{\perp} \approx \frac{\nu_{ei}}{1 + (\sigma_{ei}/\nu_1)^2} \eta_e \alpha^2 A_1^2$$

(13)

$$\nu_1 = \frac{\omega_{bi}}{\epsilon^{1/4} \alpha^2}$$

となる。 ω_b はバウンス周波数で

$$\omega_b = \sqrt{\epsilon} v_T / R_0 q$$

(13)は、 ν_{ei} の小さな領域で [2] の値よりも $\epsilon \alpha^2 \delta_q^2$ だけ小さい。

5. 捕捉イオン・モード

次に、 $\omega/k_{\parallel} \ll \sqrt{\epsilon} v_{Ti}$ を満たす場合を検討しよう。この場合、捕捉されない粒子は Boltzmann 分布をなし、ポテンシャル波との間に何らの位相差ももたない。

$\nu_{ei} > \epsilon \omega$ の場合、捕捉電子項の実部は無視できて、 Q は

$$Q = \frac{8}{A_i^2 \sqrt{2\epsilon}} (1 + \eta_i) \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{\omega}{\omega_*} \left\{ \frac{\omega_0}{\omega} - 1 + i \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\epsilon \omega_0}{\nu} \left(1 + \frac{3}{2} \eta_e \right) \right\}$$

$$\omega_0 \equiv \frac{\alpha}{1 + \alpha} \sqrt{2\epsilon} \omega_*$$

となる。局所理論を適用すれば

$$\text{Re } \omega \approx \omega_0$$

$$\gamma \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\epsilon \omega_0^2}{\nu} \left(1 + \frac{3}{2} \eta_e \right)$$

(14)

を得る。捕捉されない粒子は、拡散に寄与しないから、

$$D_{\perp} \approx \sqrt{\epsilon} \frac{\gamma}{k_{\perp}^2}$$

で見積ることができる。ここで $\sqrt{\epsilon}$ は捕捉粒子の割合である。従って(14)式から

$$D_{\perp} \approx \left(\frac{A_e \omega_{be}}{1 + \frac{1}{\alpha}} \right)^2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{\nu_{ei}}$$

(15)

と評価される。これは [1] と同じである。

逆に、無衝突の極限では、捕捉電子項が効いて

$$Q = - \frac{8}{A_i^3 \sqrt{2\epsilon}} \frac{1+\alpha}{1+\eta_i} \left\{ \frac{\omega}{\omega_*} - \sqrt{2\epsilon} \frac{\omega_m}{\omega} \left(1 + \frac{\eta_e + \alpha \eta_i}{1+\alpha} \right) \right\}$$

となり、局所理論は、

$$\omega^2 = \sqrt{2\epsilon} \omega_* \omega_m \left\{ 1 + \frac{\eta_e + \alpha \eta_i}{1+\alpha} \right\} \quad (16)$$

を与える。 ω_m の符号はシヤの大きさに依存し、 $\delta_q < -\frac{3}{4}$ であるなら、(16)は安定解である。しかし、プラズマ柱の外側に向って電流密度が減少する通常の場合、 $\delta_q > 0$ であるから、この不安定は避けられない。このモードの局在する幅は、前節と同様に、 $Q=0$ となる位置を中心とする Weber 方程式を解くことにより

$$x^2 = \frac{A_i r}{\epsilon^{1/8} \alpha^{1/4} (1+\alpha)^{1/2}} \quad (17)$$

(16)(17)式を用いて、拡散係数は

$$D_{\perp} \approx \sqrt{\epsilon} r x^2 \approx \epsilon^{15/8} \alpha^{3/4} D_B \quad (18)$$

と評価できる。ここで k_{ϕ} は、 $y_i \lesssim \sqrt{2\epsilon} v_{Ti}$ を用いて

$$k_{\phi} A_i \lesssim \alpha^{1/2} \epsilon^{1/4}$$

とした。 D_B は Bohm の拡散係数である。

(18)(19)式から、 ν_{ei} に関し滑らかにつなげると

$$D_{\perp} = \frac{\epsilon^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2} \frac{A_e^2 \omega_{be}^2}{\nu + \nu_2} \quad (19)$$

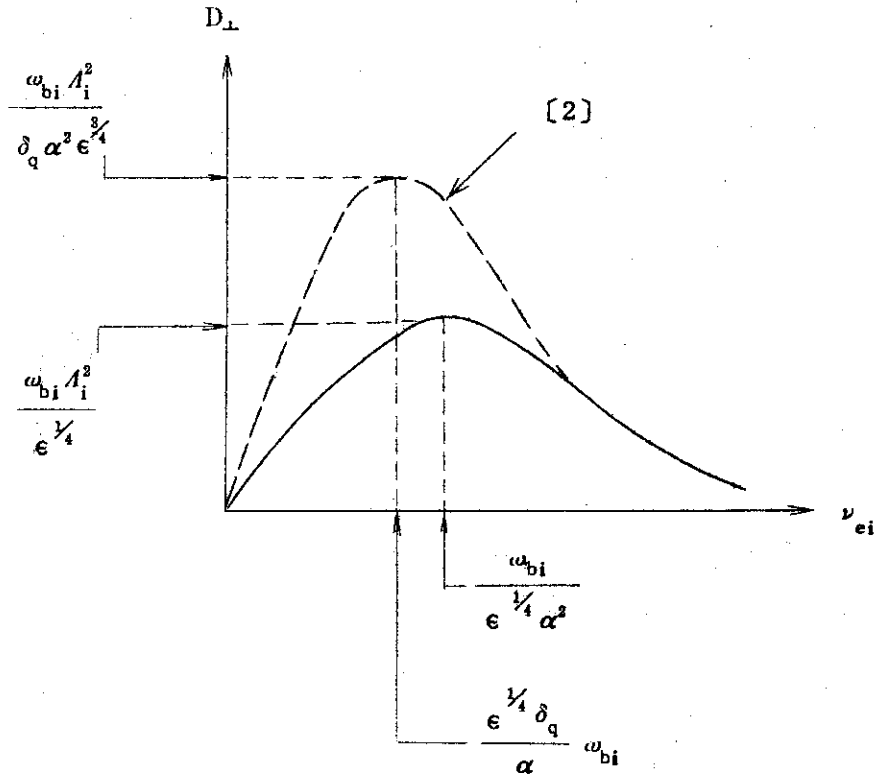
$$\nu_2 = \frac{1}{\epsilon^{11/8}} \cdot \frac{A_e \omega_{be}}{R_0} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \alpha^{1/8}}$$

を得る。(19)は、 ν_{ei} の小さな領域で、[1]の値よりも $\epsilon^{3/8} \alpha^{3/4}$ だけ小さい。

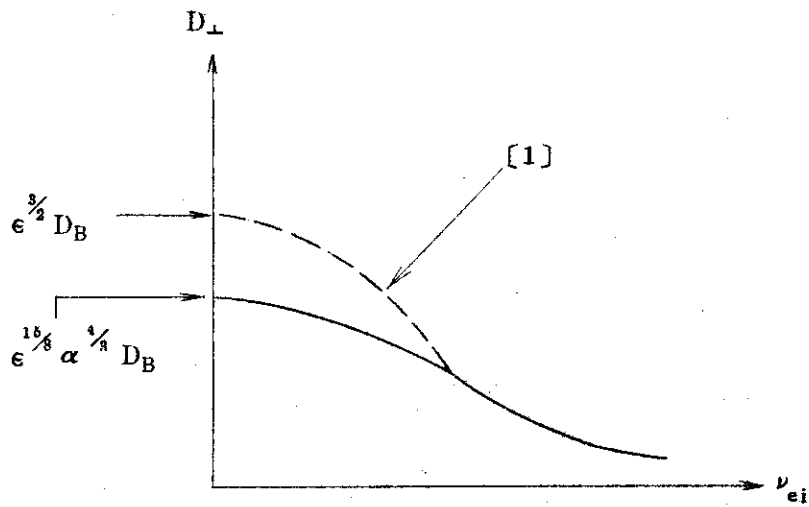
6. まとめ

衝突過程の誘起する捕捉粒子不安定に基づく粒子拡散係数を、不安定モードの局在性を考慮して近似的に評価し(18)(19)を得た。[1][2]の結果とは、衝突周波数のより小さな領域で異なり、第4図、第5図のようにまとめられる。

本研究は、JFT-1の実験に外来研究員として参加していた期間に行われた。核融合研究室長森茂氏、本研究のきっかけを与えて下さった田中正俊、田村早苗、大和春海の諸氏に厚く感謝する。



第4図 捕捉電子モードによる拡散係数



第5図 捕捉イオン・モードによる拡散係数

参考文献

- 1) B.B.Kadomtsev and O.P.Pogutse; Zh. Eksp. Teor. Fiz. 51(1966)1734.
B.B.Kadomtsev and O.P.Pogutse; "Turbulence in Toroidal Systems" in
Reviews of Plasma Physics (Consultant Bureau, New York, 1970) Vol. V.
- 2) B.B.Kadomtsev and O.P.Pogutse; Doklady Akademii Nauk SSSR 186(1969)553.
- 3) A.A.Galeev and R.Z.Sagdeev; Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53(1967)348.