

JAERI—M

4 7 5 7

最適推定理論にもとづく反応度推定の
新しい方法

1972年3月

篠原 慶邦 ・ 尾熊 律雄

日 本 原 子 力 研 究 所
Japan Atomic Energy Research Institute

最適推定理論にもとづく反応度推定の新しい方法

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

篠原 慶邦 ・ 尾熊 律雄

(1972年2月10日受理)

最適推定理論に主としてもとづいた新しい動的反応度の推定法を開発した。最適推定過程の過渡特性をハイブリッド計算機を使つたシミュレーションスタディによつて研究し、さらにSHE(半均質臨界集合体)における実験によつて、このシミュレーションの結果が正しいことを確認した。又、本方法にもとづく反応度推定器をアナログ計算機で模擬設計した。この方式による反応度推定器は良好な対雑音安定性を持つており、反応度のオンライン監視装置としてあるいは最適制御への応用等に実用できる。

A New Method of Reactivity Estimation based
on the Optimal Estimation Theory

Yoshikuni SHINOHARA, Ritsuo OGUMA

Div. of Reactor Engineering, Tokai, JAERI

(Received 10 February 1972)

A new method of dynamic reactivity estimation principally based on the modern optimal estimation theory was developed. Transient characteristics of the estimation process were investigated by simulation on a hybrid computer and the results were confirmed by the experiment on the semi-homogeneous critical assembly (SHE). An optimal estimator was designed and simulated on an analog computer. The reactivity estimator based on the modern theory was found to have good noise-stability and will be useful for reactivity monitoring, optimal reactor control, etc.

目 次

1. 序 論	1
2. 最適推定理論について	4
3. 原子炉モデル	12
4. シミュレーションスタディによる検討	15
4.1 シミュレーションの方法	15
4.2 シミュレーション実験及び検討	18
I ゲイン調節項 S の影響	18
II 初期値の設定	20
III 雑音特性による影響	21
IV 反応度外乱の種々な形による影響	22
V 原子炉モデルと実際のシステムとの差異による推定過程への影響	23
VI 原子炉システムの非線型特性に対する推定方程式の補償	24
5. SHE (半均質臨界集合体) による反応度推定実験	26
5.1 実験の概要	26
5.2 実験データの解析	28
5.3 実験結果の検討	32
5.4 実験のまとめ	33
6. 反応度推定器の設計	34
6.1 反応度推定器の構成	34
6.2 シミュレーション実験	35
6.3 まとめ	35
7. 結 論	62
8. 謝 辞	62
9. 参考文献	62
10. 付 録	64

1. 序 論

運転中の原子炉の種々のパラメーターを正しく把握することは、原子炉を安全かつ経済的に運転する上で極めて重要な問題であり様々な観点からその必要性が高まっている。

(i) たとえば炉内の各部の温度が許された範囲内にあるかどうかを小数の検出器からの信号にもとづいて知るためには適当な内挿や外挿によつて、直接に測定していない部分の温度も知ることが必要である。また最適な燃料の燃やし方を考えるためには、まず現実の中性子束分布がどのようになつているかをできるだけ正確に推定できなければならない。このように種々の量の炉内での分布を推定することは原子炉の安全かつ効率のよい運転のために重要である。

(ii) 原子炉に異常事態が生じた場合、それを早期に検出し、事故にまで発展するのを未然にふせぎ、原子炉の安全運転を確保する上から原子炉診断の技術について研究が進められている。この診断の技術に原子炉のパラメーター推定は必要不可欠な問題である。

(iii) 近年プラントのDDC(Direct Digital Control)が試みられる様になつてきており、原子炉プラントのオンライン計算機による最適制御も実験的に行なわれる様になつてきている。最適制御方策を決定する上で直接測定できない量も含めて原子炉の状態変数を精度よく推定することが必要である。

この様な原子炉等の動的システムの内部状態を把握する方法の一つに、制御理論の分野で近年広く研究されている最適推定理論あるいはシステムアイデンティフィケーションと云ふ方法がある。この種の新しい手法は化学プロセス等にも使われる様になつて来ている。特に宇宙開発の分野においてもこれらの方法が有効に使われてきた。

ここで云う最適推定理論とは、システムを支配する動特性を既知とした時システムの状態変数の1つ、あるいはいくつかの測定値をもとに、動特性によつて規定される内部状態をある評価関数の下で最適推定することである。

又、システムアイデンティフィケーションとはシステムの状態変数の測定値をもとにシステムの構造的特性(動特性)をある評価関数の下で最適推定することである。

この様なシステムの内部状態あるいは動特性を把握する方法についての理論はシステムが線型系である場合についてはR. E. KalmanやR. S. Bucy^{(2), (3)}らの研究によつてすでに体系化されており、非線型系についてもいくつかの近似的解法が提案されている。これらについての詳しい議論は§2にゆずる。

原子炉の内部状態あるいは動特性の推定等について、今述べた様な新しい推定理論の方法を取入れた研究も近年ようやく行なわれはじめた。^{(10)~(17)}

例えばJ. C. Venerus et. al.⁽¹³⁾は一点炉近似モデルによる原子炉の動特性方程式を線型化し、線型系の最適推定理論(一般にKalman Filterと呼ばれている。)を直接応用して、反応度推定のアルゴリズムを求めシミュレーションスタディを行なつている。又、非線型推定理論の応用としては、動特性方程式の反応度を含むパラメータ $(\beta-\rho)/\ell$ を最適推定しTTR-1で未臨界度を測定したSuda and Shiraiの研究⁽¹⁷⁾がある。その他中性子

(14) 束空間分布の推定，最適制御の為に状態変数の推定等についてシミュレーションあるいは
(12) 原子炉実験の報告がなされている。又，筆者らもこの様な方法で原子炉定常状態での中性
(10) 子束分布推定の問題を扱つて来た。

これらの研究において共通していることはシステムの構造的特性（動特性）を既知として，状態変数（中性子密度，先行核濃度，減速材や燃料棒中の温度等）を最適推定するか，あるいは反応度等システムに含まれる係数を未知パラメータとして状態変数にくみ込んで合わせて推定しているのが一般的である。

しかし，原子炉について考えてみると原子炉のゼロ出力時には反応度のフィードバック効果はほとんどないが，高出力時には温度，ボイド等の反応度フィードバック効果を考慮しなければならない。この様にシステムの動作条件に応じて多かれ少なかれシステムの構造的特性も変わると考えるのが一般的である。又，我々が一般に制御しようとする対象は動特性が完全に既知，あるいは全く未知というものは少なく，大部分はシステムの構造の一部が未知である様な，さらには質的に異なつた状況で運転を行なう事によつてシステムの構造的特性が変化する様なシステムを対象としている事が多い。

この様な観点から見ると従来行なわれて来た推定論の原子炉への応用はシステムの構造的特性が完全に既知であるとして，定式化していた点で多くの制約を持つている。例えば，反応度推定について見ると，反応度の項を定数又は計画的にランプ状，2次曲線状に入れているのが普通である。こういった問題設定は，非常に限られた一部の目的を除いては用を満たさなくなつて来る。しかし，この問題を反応度の変化は任意であり，その変化のしかたは未知であるとして反応度推定の問題を設定すると問題がより一般的になり，原子炉の状態を常時監視する上からも好ましいものになる。すなわち反応度推定の問題は「原子炉の動特性は既知であるがその中に含まれている反応度変化の仕方は未知である。」といった，システムの構造的特性の一部が未知である問題に帰着する。

筆者等は以上述べた様な観点に立つて，原子炉内部状態の推定の問題の1つとして反応度推定を取りあげ，反応度推定方程式を導出し，シミュレーションスタディ及びSHE（半均質臨界集合体）を使つて反応度推定実験を行なつた。すなわち，反応度 ρ に対して従来 $\rho(t)=0$ ，あるいは $\rho(t)=f(t)$ （ $f(t)$ は既知）として反応度推定を行なつていたのに対し $\rho(t)=u(t)$ として推定方程式を導出した。ここで $u(t)$ は系の不確定要素として導入されたものでこれについての解釈は，§3及びシミュレーションスタディの結果の項で詳しく述べる。結果としては $u(t)$ を導入した事により任意に変化する動的反応度を推定する事が可能になり，原子炉実験においてもこの事が確かめられた。

次に従来の推定論に於いては，推定誤差の2乗平均値を最小にする意味で推定の良さを評価してきたが，その結果は一般的には推定精度は良いが即応性は必ずしも良くない事が指摘できる。これは従来の推定法に於ける2乗誤差規範の評価関数は大きな推定誤差は重要視するが小さな誤差に対してはむしろ鈍感になる傾向を持つている事に起因している。しかし推定の良さについては，推定の精度と即応性との両面から評価する必要がある，応用する上での実際的な要求とてらし合わせてその妥協点が定められるべきだと考えられる。

筆者等は従来使われてきた評価関数をこの様な点から見なおし Least Square Estimation に於ける 2 次形式評価関数の重みが推定の即応性と強い相関を持つている事に着目し、重み調整によつて推定に於ける即応性を大幅に改善させることに成功した。

最適推定法を原子炉に実用する上ではさらに原子炉動特性が実際には非線型特性を持っている点を考慮しなければならない。前述した様に不確定要素 $u(t)$ 及びゲイン調節項の導入によつて、反応度推定の即応性が著しく改善される点に着目し、本報告ではシステムを線型化した際に無視した非線型項を線型最適推定方程式に付加することによつて非線型特性を補償できることを確かめた。

最後に本方法による反応度推定器をハイブリッド計算機で模擬し、(i) 反応度推定器は従来の原子炉動特性シミュレータに簡単なフィードバック回路を付加するだけで設計できる。(ii) 推定ゲインの調節はポテンシオメータで容易に調節可能である。ことなどを確認した。

今日迄に開発されてきた反応度測定技術についてみると、ベリウド法、逆動特性法など種々の方法があげられるが、これらの方法では一般に原子炉モデルを確定論的に扱っており、観測された中性子束信号も一旦帯域通過フィルターを通して、高周波雑音を除去した後に反応度を測定している。しかし、実際には原子炉の出力自体が統計的性質を持っており、高出力時には機械的、流体力学的振動、熱的なゆらぎなどが生じ、これらが出力に影響を及ぼす。従つて希望の信号とこれらの雑音のスペクトルが分離していれば余り問題はないが、そうでない場合はフィルターが十分な機能を果たし得ずに反応度の測定が必ずしもうまく行なえない場合が生ずる。これらの在来の方法に比してここで述べる最適推定法による反応度推定は対象としている原子炉の動特性を統計的なものとして扱っている点で本質的に異なっている。シミュレーションスタディ及び原子炉実験の結果から、この方法による反応度推定は在来の方法に比して、次の様な特徴がある事がわかつた。すなわち、(1) 雑音に対して極めて安定である。(2) 反応度だけでなく中性子密度、先行核濃度等他の状態も同時に推定できる。(3) 雑音と信号の分離がよりよく行える、等である。

本報告にまとめた反応度推定法は、最適制御への応用、反応度のオンライン監視装置、炉物理実験、原子炉の特性試験など、多くの問題に直接利用する事が可能である。又、その為のオンライン計算用プログラミングであるいは単独の反応度計の設計も簡単で容易に実現可能である。

最適推定理論、システム、アイデンティフィケーションの方法は、さらに(1) 反応度フィードバック機構の推定、(2) 適応制御等オンライン計算機制御への応用、(3) 原子炉の異常診断などへの応用、(4) 原子炉中性子束分布の推定などに対して、有効な方法であると考えられる。

2. 最適推定理論について

1) 推定という概念は混在した信号の中から必要な信号を抽出する濾波という概念をより一般化したもので、その理論は制御理論及び通信、情報理論の進歩の中で発展して来た。その為、例えば従来のRCフィルター、ウィーナーフィルター等と比較されることが多い。まず、古典的なフィルター（濾波）の理論についてみると、対象とするシステムをブラックボックス的に扱っているのが特徴であり、出力の周波数特性に着目し、必要な信号の周波数帯域を通過させ、雑音の持つ周波数帯域を減衰させて、信号と雑音を分離する様な帯域通過特性を持つ様に設計されているのが普通である。この様な帯域通過フィルターは設計が簡単であり現在も電気、制御、通信等多くの分野で使われているが、次の様な種々の欠点を持つ。

- 。 フィルターの良さを評価する一般性のある定量的基準がなく試行錯誤的に設計する。
- 。 必要とする信号と雑音の帯域幅が重なっている時は信号のみを取り出す事は難しくなる。
- 。 通過帯域外の情報をすべてすててしまう。
- 。 フィルターの出力は観測量の現在値だけである。
- 。 対象の内部構造を無視してしまう。

これに対しN. Wiener⁽¹⁾は従来の経験的手法による帯域通過フィルターとは異なつて不規則過程の統計的性質に着目し新しい観点からフィルター理論を開拓した。ウィーナー・フィルターは信号と雑音のスペクトルが重畳している様な場合にもある評価基準にもとづいて最適濾波が行なえる様設計されたもので、この理論はストカステックな対象を扱うようになつて来た近年の制御あるいは通信工学の発展に大きく寄与した。又、第2次大戦後ミサイルの誘導技術の発展の中で信号の現在値をもとに未来値を予測する技術として使われる等、予測技術に大きく寄与して来た。すなわちウィーナーフィルターの出力は真の信号と信号の推定値との2乗誤差平均値が最小になる様に設計されており、最適濾波を保障する十分条件は下記のWiener-Hoffの積分方程式で記述される。

$$\phi_{xy}(t) = \int_0^{\infty} \phi_{xx}(t-\tau)\omega(\tau)d\tau \quad t \geq 0 \quad (2-1)$$

ここで $\phi_{xy}(t)$ はフィルターの目標値と入力との相互相関関数、 $\phi_{xx}(t)$ は入力の自己相関関数である。 $\phi_{xx}(t)$ 、 $\phi_{xy}(t)$ が既知の時、上式に従つてフィルターのインパルス応答関数 $\omega(t)$ を決定することができる。この様にウィーナーフィルターは原理的には定係数線型系定常不規則過程にしか適用できないことを仮定しているにもかかわらずフィルターの最適設計が保障され、インパルス応答関数にもとづいて信号の未来値を予測できるなど従来の帯域通過フィルターと比べて多くのすぐれた点が挙げられる。

現代の最適推定理論は以上述べたような古典的なフィルターの理論をさらに発展させたものであるが、一方古典的な方法と本質的に異なつた面も持つている。すなわち、最適推定理論では対象とするシステムの内部構造に主眼点を置いてゐる事、システムが本質的にストカステックなものとして扱われている事等に大きな特徴がある。又、最適推定過程を決定する場合の対象としているシステムの記述は状態変数で表わされた微分方程式の組によつ

て表現され特性の解析も時間領域で行なわれる。この様なシステムに対し最適推定過程は状態変数の1つ、あるいはいくつかの観測情報をもとに状態変数の推定誤差についての汎関数が最小となる様に決定される。この様な方法にもとずいて線型系に対する最適推定過程を最初に求めたのはR. E. Kalman⁽²⁾である。Kalmanは線型系の状態変数の推定に対して、システム及び観測系に加わる雑音が白色ガウス雑音である事を仮定し、2乗誤差評価規範を最小にする意味での最適な推定解を与える推定方程式を導いた。この方程式はKalmanの名にちなんでKalman Filterと呼ばれている。その後多くの研究者によつて線型系を対象としてベイズ流の考え方(Bayes Approach)最適推定法(Maximum Likelihood Estimation)、最小2乗推定法(Least mean Square Estimate)等統計的決定理論、推定理論をベースに種々の考え方にもとずいて最適推定過程が研究されてきたが、これらの解はカルマンフィルターと同一の推定方程式に帰着している。

この様にして得たカルマンフィルターでは、ウィナーフィルターにおいて仮定していたシステム及び雑音の定常性がとり除かれ、フィルターがより一般的な形に拡張された。さらに従来のフィルターと違つて観測情報をもとに、システムを構成している内部状態をすべて推定することが可能である。又、最適推定過程を記述する推定方程式は、微分方程式形で表現されているため、特に近年の大型デジタル計算機でくり返し演算によつて処理しやすい形になっている。

最適推定理論をさらに拡張し非線型系に対する推定法の研究も様々な立場から行なわれている。しかし、現在の段階ではこれらの多くは線型推定理論の延長としての近似的解法の域を出ていない。

以上述べてきた推定論の発展過程をシステムの状態把握といつた点から見ると、古典フィルターではシステムを構成する状態変数について直接観測可能なものについてだけしか推定できないが、最適推定論では直接観測できない状態も含めてシステムの内部状態をすべて推定することが可能である。ここではシステムの構造的特性(動特性)は既知とされているが、近年推定の理念をさらに拡張してシステムの動特性を推定する種々の方法が研究されておりこの種の問題をシステムアイデンティフィケーションといっている。

制御理論の分野では、システムの構造についての情報が極めて不足している様な対象、時間と共にシステムの構造も変つていくような対象等に対し、得られた観測情報からシステムの構造を推定しながら制御方策を決定していく適応制御あるいは学習制御が新しい研究の対象となつているが、この様な理論の発展と共に推定についての概念、方法もさらに発展することが考えられる。

- ii) 最適推定の理論では大部分は対象とするシステムの構造的特性についての知識と系の動作を乱す雑音の統計的な情報が既知である事を前提として展開されている。その目的はシステムあるいは観測系に混在する雑音の影響をある評価基準に従つて最適に汨波し、システムの内部状態を最適推定することにある。以下本報告でも使用する線型系の最適推定理論について述べ最後に、繰返し推定方程式を導出する。

○ システム方程式

対象とするシステムは次の形で与えられる。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{W}(t) \quad (2-2)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

$\mathbf{X}(t)$; n 次元ベクトル, (状態変数)

$\mathbf{A}(t)$; $(n \times n)$ マトリックス

$\mathbf{G}(t)$; $(n \times m)$ マトリックス

$\mathbf{W}(t)$; m 次元ベクトル, (不規則過程)

。 観測系

観測系は次式で表現される。

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (2-3)$$

$\mathbf{Z}(t)$; ℓ 次元ベクトル, (観測実現値)

$\mathbf{H}(t)$; $(\ell \times n)$ マトリックス, (観測マトリックス)

$\mathbf{V}(t)$; ℓ 次元ベクトル (観測雑音)

。 システム及び観測系に加わる雑音

雑音 $\mathbf{W}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ はいずれも系に対して付加的に入る事が仮定されている。雑音の統計的性質は一般に白色ガウス雑音でそのモーメントは

$$\begin{cases} E(\mathbf{W}(t)) = 0 \\ \text{Cov}(\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{W}(\tau)) = \mathbf{Q}(t) \cdot \delta(t - \tau) \end{cases} \quad (2-4)$$

$\mathbf{Q}(t)$; $(n \times n)$ 正定値分散マトリックス

$$\begin{cases} E(\mathbf{V}(t)) = 0 \\ \text{Cov}(\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(\tau)) = \mathbf{R}(t) \cdot \delta(t - \tau) \end{cases} \quad (2-5)$$

$\mathbf{R}(t)$; $(\ell \times \ell)$ 正定値分散マトリックス

又, $\mathbf{W}(t)$ と $\mathbf{V}(t)$ は無相関, すなわち

$$\text{Cov}(\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{V}(t)) = 0 \quad (2-6)$$

である。

この様に不規則過程を白色ガウス雑音と仮定するのは, 一般に不規則過程をとり扱う時, 統計的性質として2次モーメントまでの量に着目する事が多く, 白色ガウス雑音はこれによつて統計的性質が完全に記述できるからである。又, 現実の物理的過程に於いてもとり扱う雑音は近似的に白色ガウス雑音としてさしつかえない場合が多い。

。 評価関数

評価関数は最適推定を行なう場合の最適にしたい目的の内容を数学的に表現したもので, これによつて推定の良さが定量的に評価される。一般には目的をより正確にかつ完全に達成しようとする最適推定解はより複雑になり, その様な系を技術的に実現する事は困難になる。そこで, 実際には両者のかねあいから評価関数が定められるのであるが, できるだけ数学的に簡単な形で, かつ目的を正確に達成できる様な評価関数を選ぶ事が好ましい。最適推定理論において一般に使われている評価関数は1つは,

$$J = E\{L(\tilde{\mathbf{X}}|\mathbf{Z})|\mathbf{Z}\} = \int_{-\infty}^{\infty} L(\tilde{\mathbf{X}}|\mathbf{Z}) p(\mathbf{X}|\mathbf{Z}) d\mathbf{X} \quad (2-7)$$

の形で表現される。ここで $L(\tilde{\mathbf{X}}|\mathbf{Z})$ は推定誤差 $\tilde{\mathbf{X}}$ についての Cost function と言われ,

観測値 $\mathbf{Z}$ が実現値として得られた後の状態変数 $\mathbf{X}$ の条件付確率密度関数が既知の時、 $L(\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{Z})$ の条件付期待値を最小にする様な $\hat{\mathbf{X}}$ を求める極値操作によつて最適推定解が求められる。この種の評価関数として最も多く使われているのは

$$J = E \{ (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) \} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) p(\mathbf{X}|\mathbf{Z}) d\mathbf{X} \quad (2-7)'$$

である。これはシステムの状態とその推定値との誤差の 2 乗平均値が最小になる様な推定解 $\hat{\mathbf{X}}$ を求める事を意味している。

又、評価関数のもう 1 つは

$$J = \varphi[\hat{\mathbf{X}}(t_0)] + \int_{t_0}^t L(\hat{\mathbf{X}}(\tau), \tau) d\tau \quad (2-8)$$

という形で表現される。この種の評価関数で最も多く使われているのは

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}(t_0)\|_{S_1^{-1}(t_0)}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \{ \|\mathbf{Z}(\tau) - \mathbf{H}(\tau)\hat{\mathbf{X}}(\tau)\|_{S_2^{-1}(\tau)}^2 + \|\dot{\hat{\mathbf{X}}}(\tau) - \mathbf{A}(\tau)\hat{\mathbf{X}}(\tau)\|_{S_3^{-1}(\tau)}^2 \} d\tau \quad (2-8)'$$

である。ここで S_1, S_2, S_3 は評価基準につけられた重み、 $\|\cdot\|^2$ は 2 次形式を表わしている。この基準は不規則過程 $\mathbf{W}(t), \mathbf{V}(t)$ 、及び初期状態の誤差によつて起される推定誤差を $t_0 \leq \tau \leq t$ の間の Cost function の積分値によつて評価する事を表わしており、通常使われている最小 2 乗フィッティングと同じ考えに立つたものである。

ここで (2-7) と (2-8) あるいは (2-7)' と (2-8)' の違いは前者が状態変数 $\mathbf{X}$ についての集合的な統計的性質に着目しているのに対し、後者は不規則過程の中から 1 つの代表関数を取り出し、その時間的な変化に着目している事にある。従つて前者については状態変数 $\mathbf{X}$ についての確率密度関数が直接あるいは間接的に得られることを仮定しているのに対し、後者については不規則過程の統計的性質についての仮定は何も置かれていない。(2-4)、(2-5) でシステム及び観測系に加わる雑音を白色ガウス雑音とし、そのモーメントを既知としたのはこの様に評価関数 (2-7) に於いて確率密度関数が含まれているからである。

ここで、不規則過程 $\mathbf{W}(t), \mathbf{V}(t)$ が白色ガウス雑音でかつエルゴード性の仮定の下では、(2-7)、(2-8) は全く等価である事を容易に示すことができる。

。最適解を求める解析的手法

最適解を求める解析的手法は評価関数が (2-7)、又は (2-8) のいずれがあるかによつて異なる。

(2-7) では、確率密度関数を $p(\mathbf{X}|\mathbf{Z})$ とした時の Cost function についての条件は期待値あるいは最尤値を最大にする $\hat{\mathbf{X}}$ をもつて最適推定値とする方法で前者を Bayes Approach、後者を Maximum Likelihood Estimation と言い、古くから数理統計学において推定に使われて来た手法である。

(2-8) では、最適解の必要条件を与える最大値原理 (M. P.) あるいはダイナミックプログラミング (D. P.) 等の手法がある。しかし、最適解の必要条件を満たす式は一般に 2

点境界値問題になり，特殊な問題を除いて解析解は求まらない。2点境界値問題の解法には Gradient 法，Stochastic Approximation あるいは Invariant Imbedding 等の手法がある。

。 線型系における最適推定方程式の導出

前述した様に評価関数の違いによつて推定解を求める解析的手法も異なつて来るが，ここでは評価関数として (2-8)' を使い，最大値原理 (M. P.) によつて 2 点境界値問題を導き，これを Invariant Imbedding (付録 II 参照) によつて解き最適推定方程式を求める。又導出された推定方程式の持つている意味を明確にするため，評価関数 (2-7)' を使い Bayes Approach によつて最適推定方程式を求め (付録 III 参照) 2 つの解を比較する。今状態変数の最適推定値を $\hat{\mathbf{X}}(t)$ ，推定誤差を $\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)$ とすると

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{W}}(t) \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \hat{\mathbf{V}}(t) \end{cases} \quad (2-9)$$

但し， $\hat{\mathbf{W}}(t)$ ， $\hat{\mathbf{V}}(t)$ は最適推定方程式での等価的雑音である。評価関数を (2-8)' の形に従つて次の様に定義する。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{X}}(t_0)\|_{\mathbf{P}^{-1}(t_0)}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \{ \|\hat{\mathbf{V}}(t)\|_{\mathbf{M}^{-1}(t)}^2 + \|\hat{\mathbf{W}}(t)\|_{\mathbf{S}^{-1}(t)}^2 \} dt \\ &= \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{X}}(t_0)\|_{\mathbf{P}^{-1}(t_0)}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \{ \|\mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)\|_{\mathbf{M}^{-1}(t)}^2 + \|\hat{\mathbf{W}}(t)\|_{\mathbf{S}^{-1}(t)}^2 \} dt \end{aligned} \quad (2-10)$$

この時 H 関数は

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \|\mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)\|_{\mathbf{M}^{-1}(t)}^2 + \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{W}}(t)\|_{\mathbf{S}^{-1}(t)}^2 \\ &\quad + \lambda^T(t) [\mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{W}}(t)] \end{aligned} \quad (2-11)$$

最大値原理 (M. P.) によると，J を最小ならしめる最適条件は次のハミルトンの微分方程式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = -\dot{\lambda}(t) \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) \\ \frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{W}}} = 0 \end{cases} \quad (2-12)$$

$$\lambda(t_0) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{X}}} \left(\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{X}}(t)\|_{\mathbf{P}^{-1}(t)}^2 \right) \Big|_{t=t_0}$$

$$\lambda(t) = 0 \quad (2-13)$$

但し $\lambda(t)$ は随伴関数である。(2-11), (2-12) を使って,

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}(t) = -\mathbf{H}^T(t)\mathbf{M}(t)^{-1} [\mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)] + \mathbf{A}(t)^T \lambda(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{W}}(t) \\ \mathbf{S}^{-1}(t)\hat{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{G}^T(t)\lambda(t) = 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

$$\begin{cases} \lambda(t_0) = -\mathbf{P}^{-1}(t_0) \tilde{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{P}^{-1}(t_0) (\hat{\mathbf{X}}(t_0) - \mathbf{X}(t_0)) \\ \lambda(t) = 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

ここで (2-14) は (2-15) を境界条件とする $\hat{\mathbf{X}}(t)$, $\lambda(t)$ についての 2 点境界値問題になっている。Invariant Imbedding method (付録 III 参照) を使ってこの 2 点境界値問題を解く。

$$\left. \begin{aligned} \lambda(t) &= \mathbf{C} \\ \hat{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{r}(\mathbf{C}, t) \end{aligned} \right\} \text{を仮定すると Invariant eq. は}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{C}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{C}, t) \quad (2-16)$$

但し,

$$\begin{cases} \mathbf{g} = -\mathbf{A}(t)\lambda(t) + \mathbf{H}^T(t)\mathbf{M}(t)^{-1} [\mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)] \\ \mathbf{f} = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{G}^T(t)\lambda(t) \end{cases} \quad (2-17)$$

これを (2-16) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{C}} \{ -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{C} + \mathbf{H}^T(t)\mathbf{M}^{-1}(t) [\mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t)\mathbf{r}] \} \\ = \mathbf{A}(t)\mathbf{r} - \mathbf{G}(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{G}^T(t)\mathbf{C} \end{aligned} \quad (2-18)$$

今, この偏微分方程式の解を

$$r(C, t) = -P(t)C + \hat{X}(t)$$

と仮定し代入すると

$$-\dot{P}(t)C + \dot{\hat{X}}(t) - P(t)\{-A^T(t)C + H^T(t)M(t)^{-1}[Z(t) + H(t)P(t)C$$

$$-H(t)\hat{X}(t)]\} = -A(t)P(t)C + A(t)\hat{X}(t) - G(t)S(t)G(t)^T C$$

$$\therefore \{-\dot{P}(t) + P(t)A^T(t) + A(t)P(t) - P(t)H^T(t)M(t)^{-1}H(t)P(t) - G(t)S(t)G(t)^T\} C$$

$$= -\dot{\hat{X}}(t) + P(t)H^T(t)M^{-1}(t)[Z(t) - H(t)\hat{X}(t)] + A(t)\hat{X}(t) \quad (2-19)$$

ここで

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)H^T(t)M^{-1}(t)H(t)P(t) + G(t)S(t)G^T(t) \quad (2-20-a)$$

$$\dot{\hat{X}}(t) = A(t)\hat{X}(t) + K(t)[Z(t) - H(t)\hat{X}(t)] \quad (2-20-b)$$

$$K(t) = P(t)H^T(t)M^{-1}(t) \quad (2-20-c)$$

が成立するとすれば(2-19)はCの値いかんにかかわらず成立し、(2-20)が2点境界値問題を満たした解であることがわかる。この $\hat{X}$ についての微分方程式を最適推定方程式といい、K(t)は観測値Z(t)の実現値をもとにして推定解を修正する最適ゲインと呼ばれている。この最適ゲインはP(t)に関するリカッチ型のマトリックス微分方程式を解いて決定される。但し、初期状態P(t₀), $\hat{X}(t_0)$ は与えられているものとする。この推定過程に対してシステムが安定な系で完全可観測な場合、次の事が示されている。

。 $t \rightarrow \infty$ でP(t)は平衡状態に収束する。

。 推定過程は一様に漸近安定である。

これと、さらに Bayes Approach によつて得られた推定過程(付録III参照)との比較から次のような性質を指摘することができる。

。 任意の初期状態から出発して、 $t \rightarrow \infty$ で真の値に収束する。

。 推定方程式は unbiased estimator である。

。 リカッチ方程式は、 $M(t) \rightarrow R(t)$, $S(t) \rightarrow Q(t)$ の対応付けを行なうと Bayes Approach によつて得られた共分散方程式と全く同じものになる。従つてP(t)は各時刻での共分散に対応していることがわかる。

。 よつて、マトリックスP(t)は非負定かつ対称マトリックスである。

。 リカッチ方程式の解は $t \rightarrow \infty$ で平衡状態に収束し、これはMとSの関数になつておりSに対しては単調増加関数である。

。 推定方程式はシステム方程式(2-2)を内包している。

以上の様に最適推定論に於いては、推定過程に対する諸特性が明確に把握できる特徴を持つている。

。 線型系に対する最適推定過程の考察

得られた推定方程式(2-20)に対し実際の立場から推定過程の良さについての評価を検討しておく事が必要である。前述した様に最適推定過程は、任意の初期条件から出発して、

安定に真の値に収束する事が保障されている。しかし2次形式の評価基準では推定過程の即応性については、直接的な形では評価されていない。制御問題に於いても一般に2次形式評価基準は大きな誤差に対しては敏感であるが小さな誤差に対してはむしろ鈍感になる傾向がある。最適推定法を実用化する上では、この様な推定過程の即応性と推定の精度といった相矛盾する立場から推定の良さを評価する必要がある。ここで、推定過程を支配する最適ゲイン $K(t)$ 、従つてリカッチ型微分方程式の解 $P(t)$ について見ると、この式に含まれる $M(t)$ は観測系雑音を実測する事によつてその統計量から値を定める事ができるが、 $S(t)$ については直接測定できない為、理論的な結果から得るか何らかの方法によつて値を定める必要がある。

この $S(t)$ の持つ意味をフィードバック制御問題と対比させながら別の立場から定性的に考える。

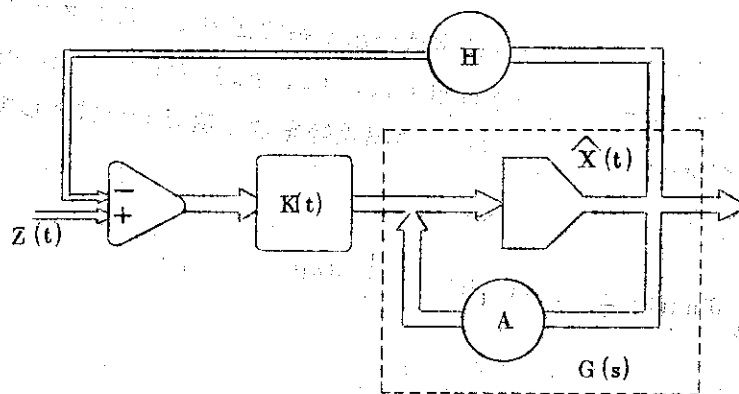


Fig. 1 Structure of Optimal Estimator

Fig. 1は最適推定方程式(2-20)の構造をブロック図で示したものである。このシステムの構造は、 $K(t)$ を最適ゲインを与えるコントローラーと見なすとシステム $G(s)$ に対する2次評価規範を持つたフィードバック制御と相対の問題である事がわかる。制御に於ける応答の即応性は最適ゲイン $K(t)$ とシステムの特性によつて決まる。すなわち最適推定に於いても推定過程の即応性は、この2つのファクターによつて制約される事になる。ここでゲイン $K(t)$ が大きいと即応性は良くなるが、システムが統計的性質を持つているため推定過程が統計的なゆらぎに敏感に応答して推定精度は悪くなる。今、ゲイン $K(t)$ と $S(t)$ の関係についてみると、前述したリカッチ方程式の性質から $K_i (i=1, \dots, n)$ は $S_i (i=1, \dots, n)$ の単調増加関数になつている。従つて、 S はゲインの大きさを規定する項として働いていることがわかる。

以上の様な点に着目して本報告では、 S をシステムノイズの分散と考えるよりむしろ、最適ゲインを人為的に調節する項として残しておき、推定過程の精度と即応性のかねあいから値を定めるものとした。

§4ではこの様な観点からシミュレーションスタディによつて推定の即応性と S の関係を検討した。

3. 原子炉モデル

原子炉の動特性を記述するシステム方程式は次の様に一点炉近似モデルで表わされるものとする。

$$\dot{n} = \frac{\rho - \beta}{\ell} n + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i \quad (3-1)$$

$$\dot{C}_i = \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i C_i \quad (3-2)$$

$$\dot{\rho} = f(t) \quad (3-3)$$

ここで応用する最適推定法は § 2 で述べた様に常微分線型系で記述できるシステムについて定式化しているので (3-1) ~ (3-3) 式を平衡点 (n_0 , C_0 , ρ_0) の近傍で線型化し, 核分裂の統計的な性質, 近似的表現による動特性方程式の誤差等を含む項 $W(t)$ を付加して次の様に表わす。

$$\delta \dot{n}(t) = -\frac{\beta}{\ell} \delta n(t) + \sum_i \lambda_i \delta C_i(t) + \frac{1}{\ell} \delta \rho(t) + w_1(t) \quad (3-4)$$

$$\delta \dot{C}_i(t) = \frac{\beta_i}{\ell} \delta n(t) - \lambda_i \delta C_i(t) + w_{2i}(t) \quad (3-5)$$

$$\delta \dot{\rho}(t) = u(t) \quad (3-6)$$

$$E\{C_{i0}\} = E\left\{\frac{\beta_i n_0}{\lambda_i \ell}\right\} \quad (3-7)$$

ここで (3-6) 式の右辺に $u(t)$ なる項を導入したが, これは次の様な意味を持っている。すなわち, (3-3) の右辺 $f(t)$ は種々なる原因によつて起る反応度変化をもたらす項として導入されたものであるが $f(t)$ は一般には未知である。それでこれを確率過程 $u(t)$ に置き換え, $u(t)$ の統計的性質に依存して反応度変化がもたらされるものと見なすのである。§ 2 で述べた様に最適推定器は unbiased estimator であるので, 反応度推定は $\rho(t)$ の期待値を推定する事になる。§ 4.1 で反応度推定の推定方程式を導出しているが, ここで $u(t)$ を導入することは推定ゲイン S_3 を付加する事と等価な意味を持つており, $u(t)$ は結果的には推定過程の感度を高める働きをしている事になる。

又, 観測系は中性子束信号に付加雑音が加わつた形で測定されるものとすれば, 次のように表わされる。

$$Z(t) = h \delta n(t) + v(t) \quad (3-8)$$

但し, ここでは $V(t)$ は白色ガウス雑音に従うものとしてそのモーメントは

$$L(v) = N(0, R) \quad (3-9)$$

とする。又 h は観測効率を表わすものとする。

(3-4)~(3-7) をマトリックス表示すると

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta C_1 \\ \vdots \\ \delta C_I \\ \delta \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\ell} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_I & \frac{1}{\ell} \\ \frac{\beta_1}{\ell} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_I}{\ell} & 0 & \cdots & -\lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta C_1 \\ \vdots \\ \delta C_I \\ \delta \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_{12} \\ \vdots \\ \omega_{I2} \\ u \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

ここで

$$\mathbf{X}^T(t) = (\delta n(t), \delta C_1(t), \cdots, \delta C_I(t), \delta \rho(t)) \quad (3-11)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\ell} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_I & \frac{1}{\ell} \\ \frac{\beta_1}{\ell} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\ell} & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_I}{\ell} & 0 & \cdots & -\lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (I+2) \times (I+1) \text{マトリックス} \quad (3-13)$$

$$\mathbf{W}^T(t) = (\omega_1(t), \omega_{12}(t), \cdots, \omega_{I2}(t), u(t)) \quad (3-14)$$

とするとシステム方程式は(2-2)式で定係数の式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}\mathbf{W}(t) \quad (3-15)$$

になる。

本報告で使用する先行核濃度の組は $I=1\sim 3$ 組とし、各炉定数は次の値を使う。

$$\ell = 9.5 \times 10^{-4} \text{ sec} \quad \beta = 0.0064$$

。 先行核濃度 1 組の場合

$$\lambda = 0.08 / \text{sec}$$

この時マトリックス A は

$$A = \begin{pmatrix} -6.74 & 8.0 & 0.0674 \\ 0.0674 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

。 先行核濃度 2 組の場合 ⁽¹⁹⁾

$$\frac{\beta_1}{\beta} = 0.703 \quad \frac{\beta_2}{\beta} = 0.297$$

$$\lambda_1 = 0.566 / \text{sec} \quad \lambda_2 = 0.02523 / \text{sec}$$

この時マトリックス A は

$$A = \begin{pmatrix} -6.74 & 0.566 & 0.02523 & 0.0674 \\ 4.736 & -0.566 & 0 & 0 \\ 2.0 & 0 & -0.02523 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

。 先行核濃度 3 組の場合 ⁽¹⁹⁾

$$\frac{\beta_1}{\beta} = 0.23 \quad \frac{\beta_2}{\beta} = 0.57 \quad \frac{\beta_3}{\beta} = 0.20$$

$$\lambda_1 = 1.2 / \text{sec} \quad \lambda_2 = 0.165 / \text{sec} \quad \lambda_3 = 0.021 / \text{sec}$$

この時マトリックス A は

$$A = \begin{pmatrix} -6.74 & 1.2 & 0.165 & 0.021 & 0.0674 \\ 1.55 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 3.842 & 0 & -0.165 & 0 & 0 \\ 1.348 & 0 & 0 & -0.021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

4. シミュレーションスタディによる検討

原子炉動的反応度の推定を行なう最適推定器を設計するに当つて、最適推定過程の諸特性を把握するためにシミュレーションスタディを行ない最適推定を行なう上で事前に把握しておかねばならない次の様な諸点について検討した。ここでは(V)を除いては問題の性質をそこなわない限り不必要な計算の繁雑さを避ける為に原子炉モデルは先行核濃度を1組としている。

(i) ゲイン調節項 S の影響

推定過程の収束性に対して重要な影響を持つているゲイン調節項 S の値と収束時間の関係を調べ最適なゲインを定める。

(ii) 初期値の設定

(2-20)式の初期値 $\hat{X}_0, P_0$ は与えられているものとされているが状態変数の実測値の他は不確定である。従つて初期状態は常識を越えない範囲で定めてやる必要がある。

初期状態の種々な値に対する推定過程の収束性を調べる。

(iii) 雑音特性による影響

システム及び観測系に加わる雑音について次の様な場合の収束性に対する影響を調べる。

- 。 雑音レベルの大きさによる影響
- 。 雑音が相関を持つ場合の影響

(iv) 反応度外乱の種々な形による影響

§ 3 で導入された $u(t)$ の効果を確かめるため種々の形の反応度を加え、推定過程の特徴を調べる。

(v) 原子炉モデルと実際のシステムとの差違による推定過程への影響

§ 2 で示した様に最適推定方程式にはシステム方程式が内包されている。従つて、システムモデルが実際のシステムを正しく反映していない場合、推定過程に及ぼす影響を調べておく事が必要になる。

4.1 シミュレーションの方法

先行核濃度 1 組の原子炉モデルに対する最適推定方程式を各要素ごとと書くと、(3-16)を(2-20)に代入して

リカッチ方程式は

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{P}_{11} = -1.348 P_{11} + 1.60 P_{12} + 0.1348 P_{13} - P_{11}^2/R + S_1 \\ \dot{P}_{12} = 0.0674 P_{11} - 6.82 P_{12} + 8.0 P_{22} + 0.0674 P_{23} - P_{11} P_{12}/R \\ \dot{P}_{13} = -6.74 P_{13} + 8.0 P_{23} + 0.0674 P_{33} - P_{11} P_{13}/R \\ \dot{P}_{22} = 0.1348 P_{12} - 0.16 P_{22} - P_{12}^2/R + S_2 \\ \dot{P}_{23} = 0.0674 P_{13} - 0.08 P_{23} - P_{12} P_{13}/R \\ \dot{P}_{33} = -2.0 P_{33} - P_{13}^2/R + S_3 \end{array} \right. \quad (4-1)$$

但し, $P_{11}(0) \sim P_{33}(0)$ は与えられているものとする。

最適推定方程式は

$$\begin{cases} \hat{\delta}_n = -6.74 \hat{\delta}_n + 8.0 \hat{\delta}_C + 0.0674 \hat{\delta}_\rho + \frac{P_{11}}{R} (Z - \hat{\delta}_n) \\ \hat{\delta}_C = 0.0674 \hat{\delta}_n - 0.08 \hat{\delta}_C + \frac{P_{12}}{R} (Z - \hat{\delta}_n) \\ \hat{\delta}_\rho = \frac{P_{13}}{R} (Z - \hat{\delta}_n) \end{cases} \quad (4-2)$$

但し, $(\hat{\delta}_{n_0}, \hat{\delta}_{C_0}, \hat{\delta}_{\rho_0})$ は与えられているものとする。又, 観測効率 h は 1 とする。

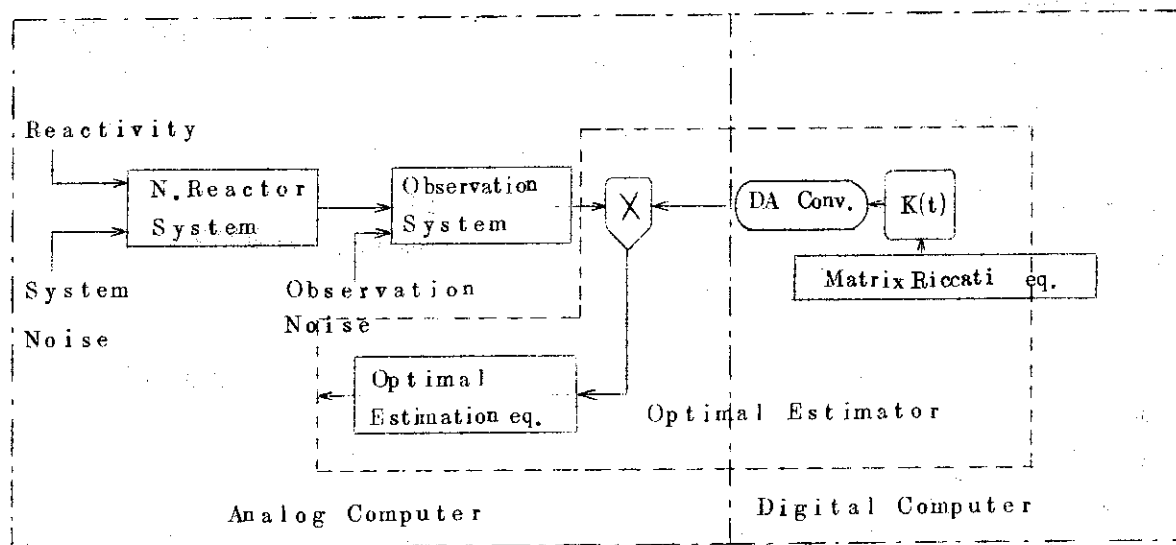


Fig. 2 Hybrid Simulation for Dynamic Reactivity Estimation

最適推定のシミュレーションは Fig. 2 に示す様にハイブリッド計算機を使つて行なつた。

原子炉システム及び観測系はアナログ計算機に組み, 最適推定器は (4-1) をデジタル計算機に (4-2) をアナログ計算機に組んでハイブリッド方式で計算を行なつている。この計算のフローチャートを Fig. 3 に示す。計算手順はまず, 与えられた初期値 $P_{11}(0) \sim P_{33}(0)$ をもとに (4-1) をデジタル計算機であらかじめオフラインで計算し, P_{11}, P_{12}, P_{13} をメモリにたくわえておく。リカッチ方程式の計算はルンゲクッタ法で行ない計算の際のタイムメツシュは 0.05 sec とした。次に推定開始と同時に P_{11}, P_{12}, P_{13} を D/A 変換し, 最適推定方程式 (4-2) を与えられた初期値, $\hat{\delta}_{n(0)}, \hat{\delta}_{C(0)}, \hat{\delta}_{\rho(0)}$ 及び観測値 $Z(t)$ をもとにアナログ計算機で解く。システム及び観測系に加わる雑音は PACE-アナログ計算機の雑音発生器からとつたもので, これはガスサイクロンから発生する雑音電圧からとつたものである。雑音は 0~35 Hz にわたつて一様なスペクトル密度をもつた定常ガウス雑音である。

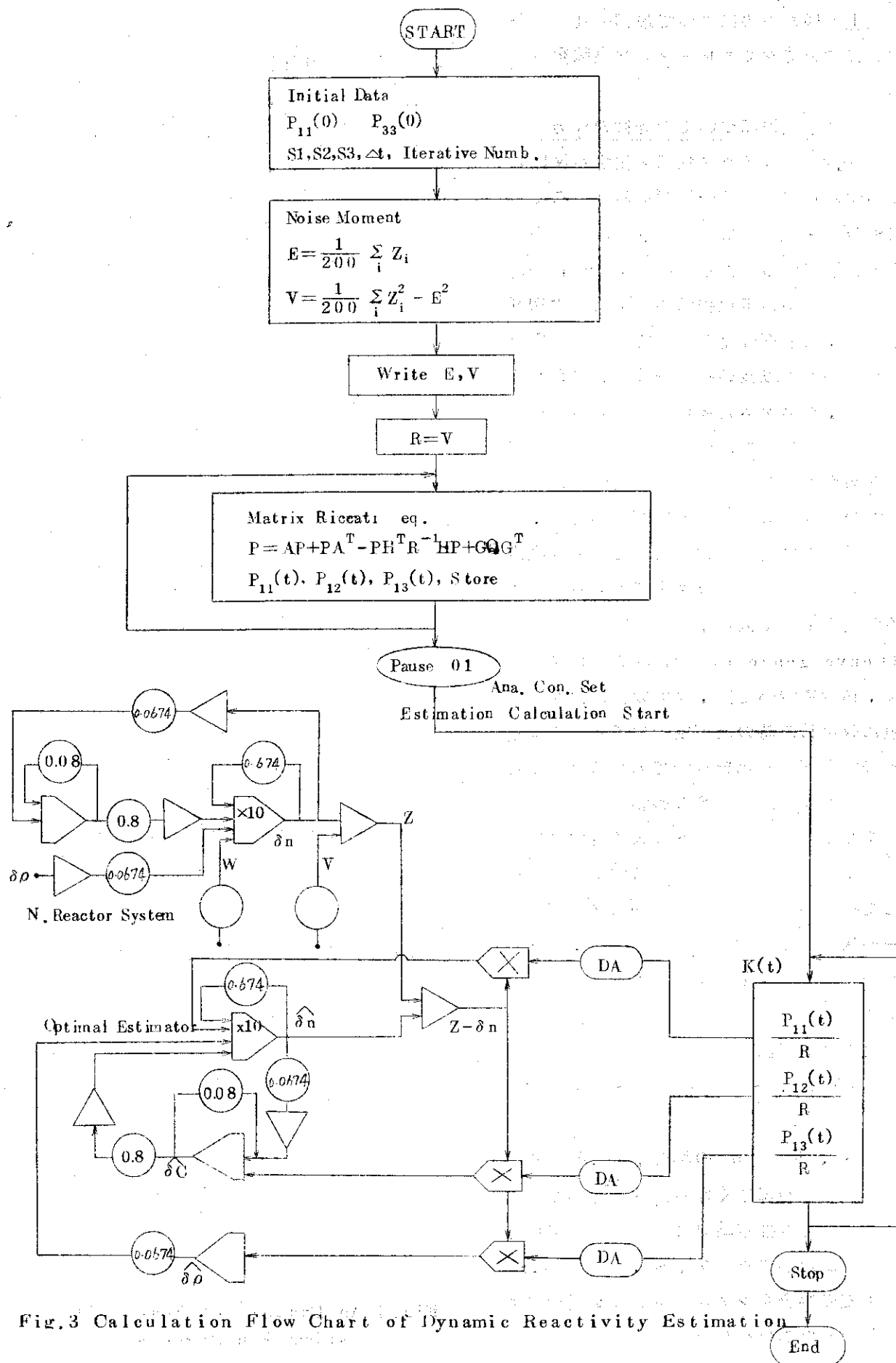


Fig.3 Calculation Flow Chart of Dynamic Reactivity Estimation

4.2 シミュレーション実験及び検討

以上の様な方法によつて最初に述べた各項目についてシミュレーション実験を行なつた。

。 推定過程についての評価の仕方

Fig. 4 はステップ状に変化する反応度に対する推定過程の一例である。ここで $EST \delta \rho - \delta \rho$ は反応度に対する推定誤差を表わしている。推定過程は、 $\hat{\delta n}_0$, $\hat{\delta C}_0$, $\hat{\delta \rho}_0$ の誤差が推定過程に影響を及ぼす初期過程と、反応度変化に応じて最適推定を行なう初期過程以後の推定過程にわけられる。さらに、システム自体が統計的性質を持つているので最適推定過程はゆらぎを持つてゐる事がわかる。そのため反応度推定についての良さの評価は即応性については、ステップ状の反応度変化に対して反応度推定誤差の平均値がほぼゼロまで落ちるに要する時間をもつて云い、これを収束時間 (Convergence time) と呼ぶ事にする。又、精度については、反応度推定値が真の値に収束した時の反応度の値に対する推定値のゆらぎ幅の比をもつて云うことにする。

1) ゲイン調整項 S の影響

§ 2 で説明した様に S の大きさは推定過程の即応性と密接な関係を持つてゐる。ここでは応答を把握しやすい様にノイズフリーの状態にして検討する。さらに、時間が充分たつた後 $P(t)$ がコンスタント・マトリックスに落ち着いた時の値を使つて推定過程の収束性を評価した。

a) $S_2, S_3 = 0$ とし S_1 を変化させた時

$S_2, S_3 = 0$ の場合、 $\hat{\delta C}, \hat{\delta \rho}$ の応答性が極端に悪くなる為 S_1 をいくら大きくしても推定結果は真の値に収束しない事がわかつた。又、 $S_1, S_3 = 0, S_2$ 可変の場合もシミュレーション実験により同様な結果を得た。

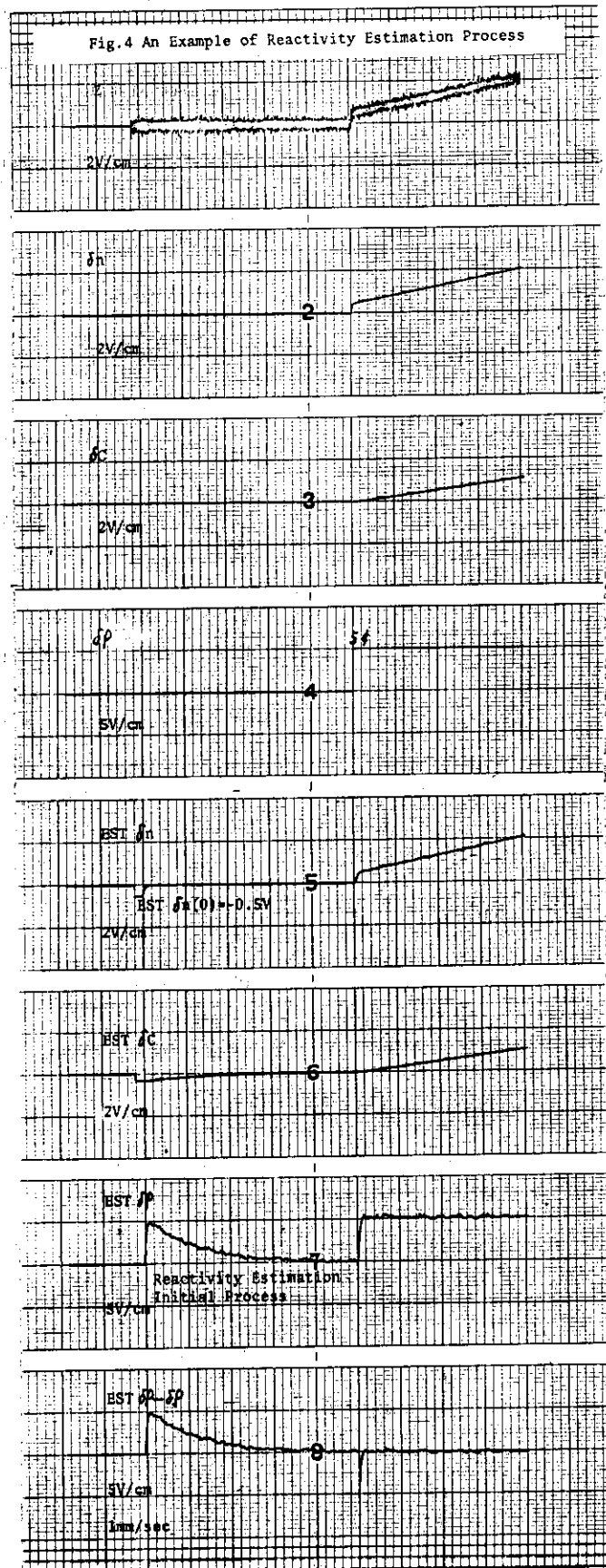
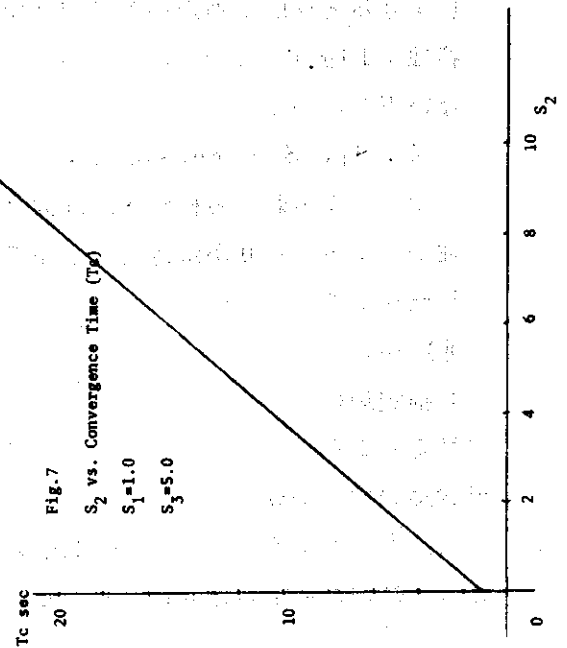
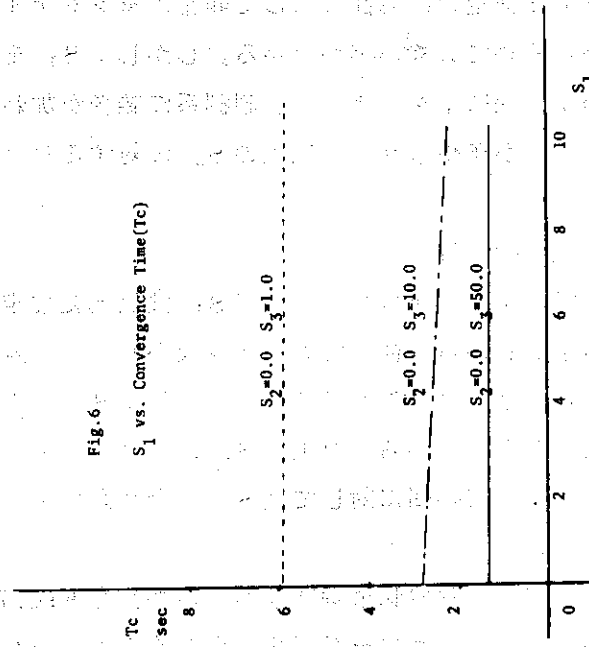
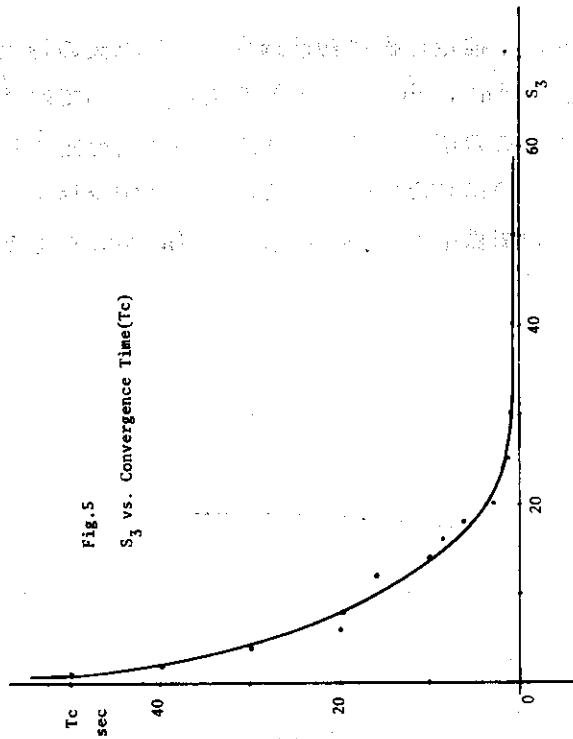


Fig. 4 An Example of Reactivity Estimation Process



b) $S_1, S_2 = 0$ S_3 を変化させた場合

Fig.18~Fig.22は S_3 を変化させた時の実験結果を示している。 S_3 が小さい所では一次遅れの形で応答し、 S_3 が大きくなるにつれて反応度推定の即応性が良くなることがわかる。さらに、 S_3 を大きくすると、ステップ状の反応度変化に対してオーバーシュートを起こす様になる事がわかる。この様に S_3 は反応度推定の即応性に対して非常にセンシティブであり § 2 に述べた様に $u(t)$ を導入した効果が極めて大きい事がわかる。しかし、 S_3 を大きくするとオーバーシュートが起る事からわかる様に、システム及び観測系に雑音を加わった場合には、反応度推定結果にゆらぎを伴う事が予想される。以上の S_3 に対する収束時間の特性を Fig.5 に示す。

c) $S_3 = \text{Const.}$ $S_2 = 0$ S_1 を変化させた時

この時の実験結果を Fig.23~Fig.25 に示す。図からわかる様に S_1 は反応度推定のオーバーシュートを抑える働きをもっている事がわかる。従つてシステム及び観測系に雑音を加わった場合反応度推定項のゆらぎを抑える働きをすることになる。しかし、 S_1 を大きくしすぎると反応度推定の項に定常偏差を持つことがわかる。以上の S_1 に対する収束時間の特性を Fig.6 に示す。この結果から見ると、収束時間に対しては S_1 は余り影響を及ぼさない事がわかる。

又、 $S_1, S_3 = \text{const.}$ で、 S_2 を変化させた場合の収束時間に対する特性を Fig.7 に示す。図からわかる様に S_2 は大きくなるに従つてリニアに収束性が悪くなる事がわかる。従つて、 $S_2 = 0$ が最適という事になる。(S_1, S_2, S_3 はシステムノイズの分散に対応した項であるから非負)

ii) 初期値の設定

「推定過程の評価の仕方」の項で述べた様に、推定過程は初期過程とそれ以後の過程に分けて考える事ができる。推定方程式の初期状態 ($\hat{\delta n}_0, \hat{\delta C}_0, \hat{\delta \rho}_0$) の決定については $\hat{\delta n}_0$ は臨界状態の中性子束信号の期待値を持つて定め、この値と (3-7) 式から $\hat{\delta C}_0$ を定める。又、 $\hat{\delta \rho}_0$ はゼロとする。Fig.26~Fig.31では $\hat{\delta n}_0$ の適当な値に対する反応度推定過程を調べた。この時の初期推定誤差 $\hat{\delta n}_0$ に対する収束時間の関係を Fig.8 に示す。 $\hat{\delta n}_0$ が大きくなるに従

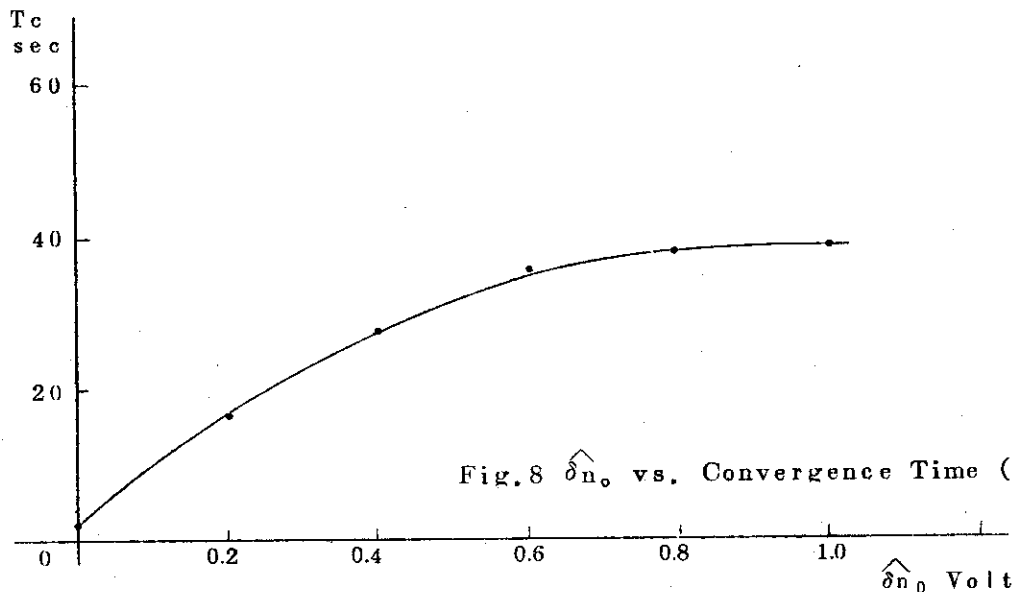


Fig.8 $\hat{\delta n}_0$ vs. Convergence Time (T_c)

つて収束時間が大きくなるが、その割合は次第に小さくなる。実験結果によると任意の初期状態から出発して30 sec 以上経つとほぼ真の値に収束している事がわかる。反応度推定はこの様に初期過程が終了してからスタートすれば良い事がわかる。その一例を Fig.9 に示す。ここで初期過程が漸近的に収束するのは次の様な理由によるものと考えられる。すなわち、初期の推定誤差に対して $\delta n(t)$ は観測される状態変数でしかもシステムの時定数も小さいので短い時間で真の値に収束するが、 $\delta C(t)$ については時定数が極めて大きいので、推定値が真の値に収束するまでにかかなりの時間を要する。1) で検討した様に $\delta \hat{\rho}(t)$ は $\delta n(t) - \delta \hat{n}(t)$ に対して極めて敏感であり $\delta \hat{C}(t)$ の誤差分を $\delta \hat{\rho}(t)$ でうめあわせる事になる。その為 $\delta \hat{C}(t)$ が真の値に漸近的に収束するに従つて $\delta \hat{\rho}(t)$ も同じ早さで収束する事になる。故に、 $\delta \hat{\rho}(t)$ の初期過程は漸近的に真の値に収束する。

iii) 雑音特性による影響

。 雑音レベルの大きさによる影響

Fig. 32~Fig. 36では観測系の雑音レベル R を変えた時の推定結果を示している。実験結果から雑音レベルが高くなると推定の即応性には余り影響は生じないが、反応度推定過程にゆらぎが生じ推定精度が落ちる事がわかる。Fig. 10では雑音レベルを変えた場合になおかつステップ状反応度入力に対する推定誤差が $\pm 1.0\%$ 以内におさまる様にゲイン S_3 を調節した時の雑音レベルと収束時間の関係を示している。図から明らかな様に雑音レベルがある値の所までは収束時間は比較的良いがある値を越えると推定精度を良い値に確保しようとすると収束時間が急速に長くなる事がわかる。この事

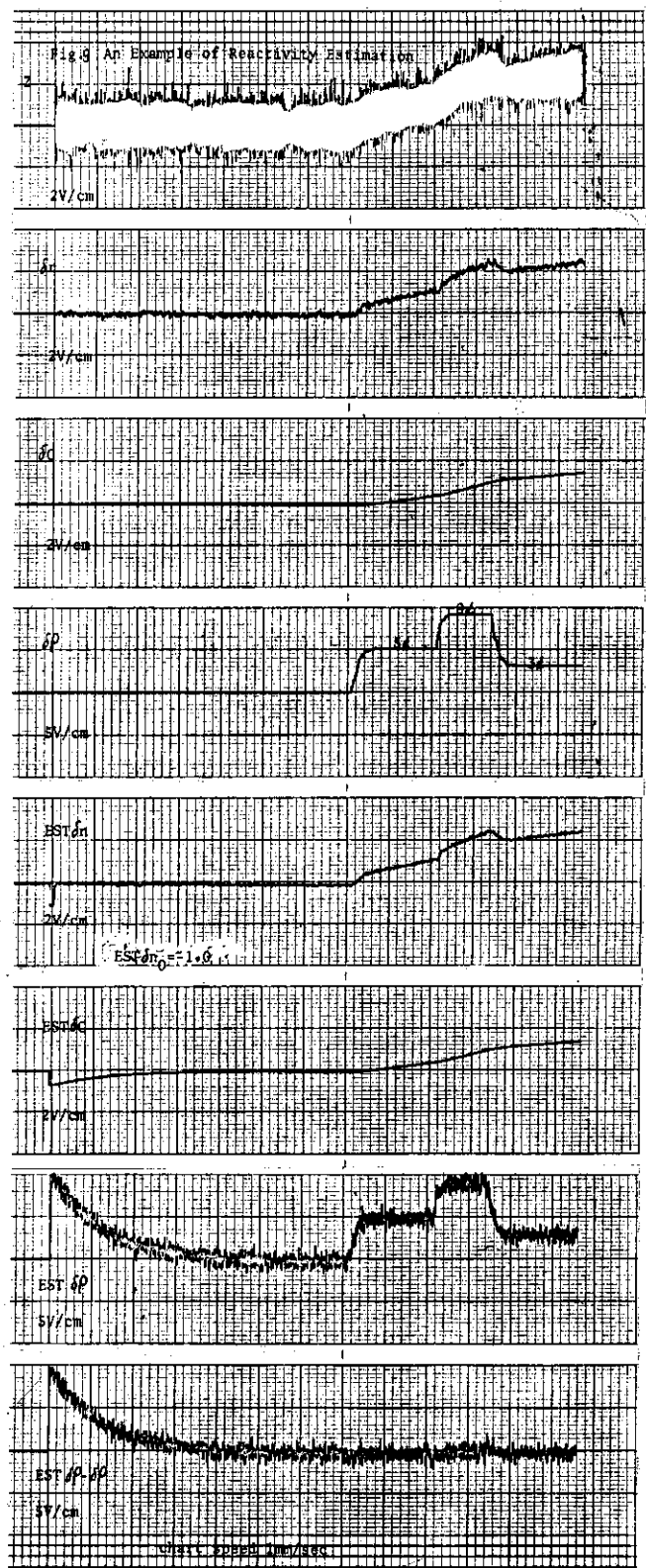


Fig.9 An Example of Reactivity Estimation

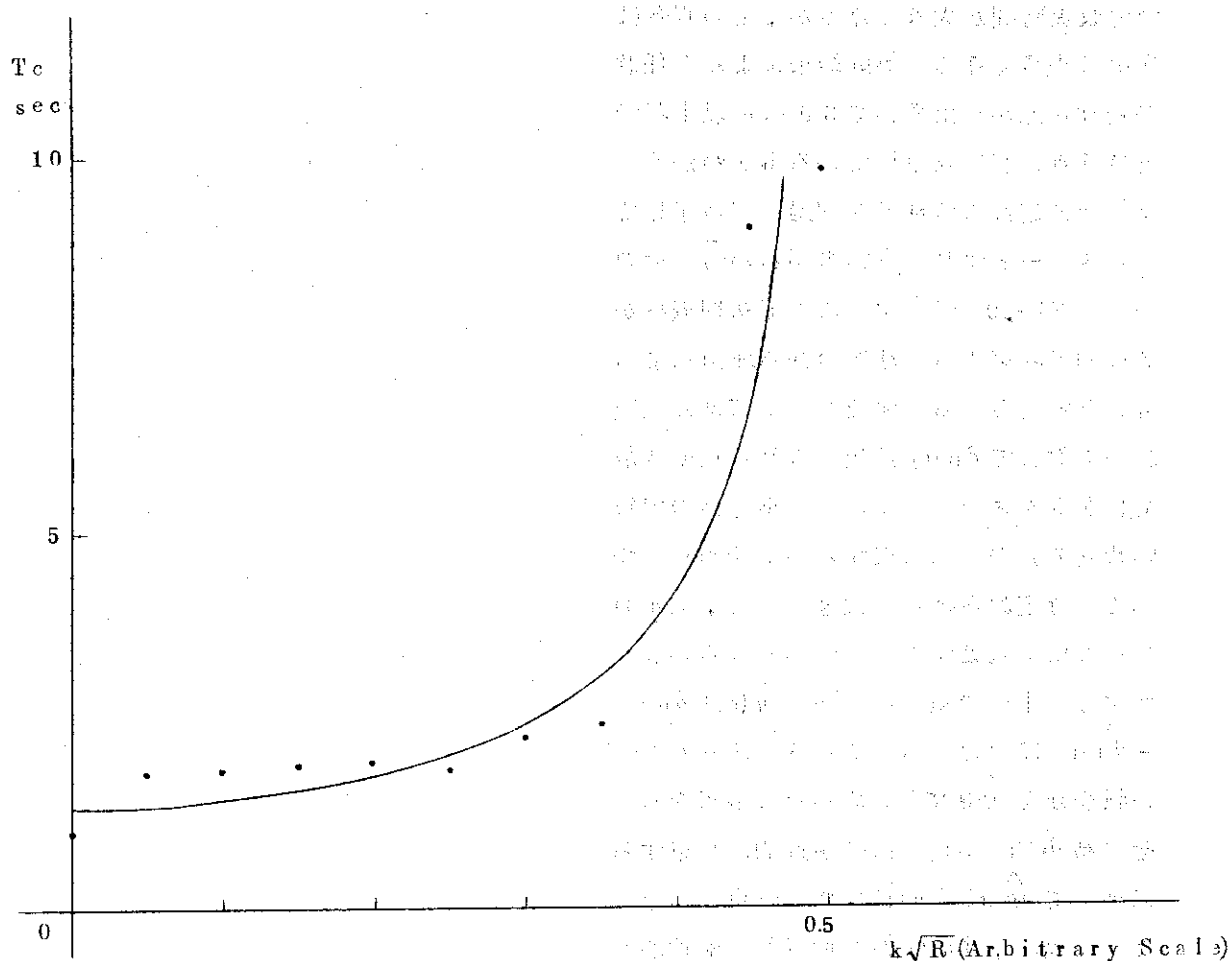


Fig. 10 Variance of Observation Noise R vs.

Convergence Time (T_c)

Convergence Time (T_c)

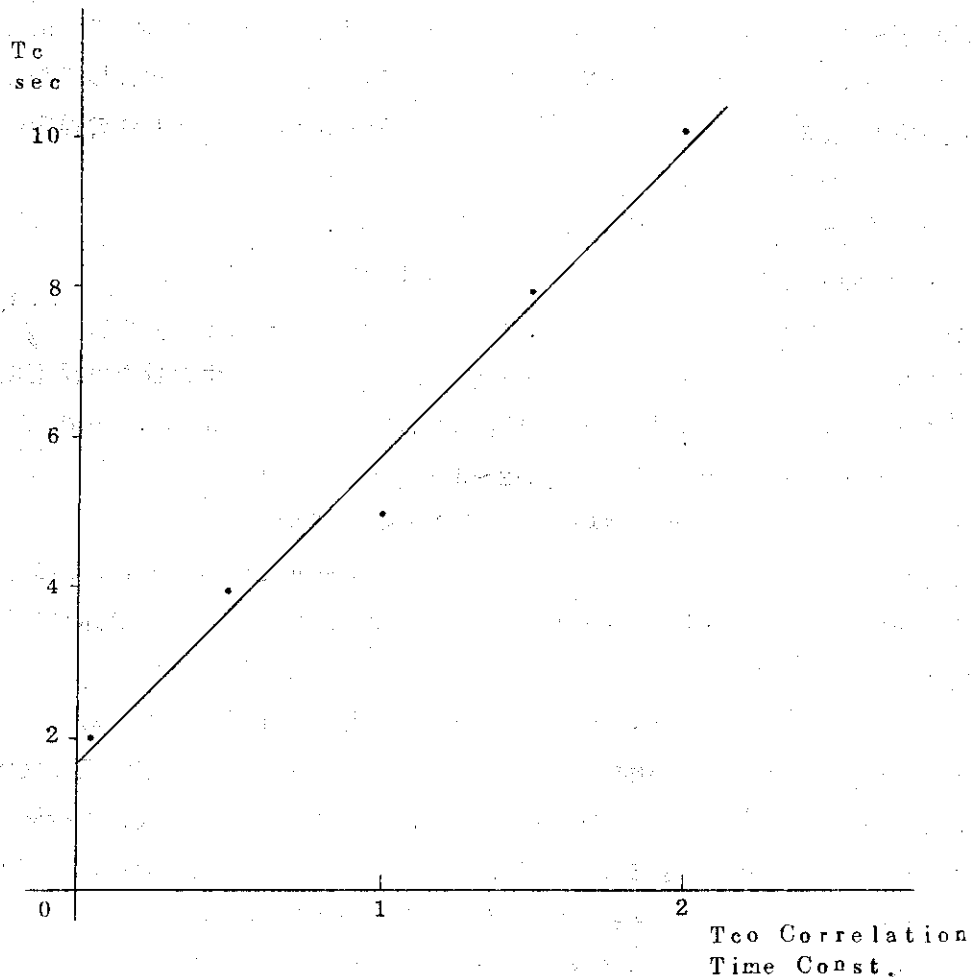
は逆にいうと雑音レベルがある値より高くなると即応性と精度とは急激に矛盾する様になる事を示している。

。 雑音が相関を持つ場合の影響

雑音に相関があると推定過程にゆらぎを生ずる事が予想される。ここでは白色ガウス雑音を一旦一次遅れ回路を通して雑音の高周波成分を除去した後に観測系に加え、一次遅れ回路の時定数をかえてこれを雑音の相関の目安とし反応度推定過程への影響を調べた。この時の結果を Fig. 37~Fig. 40 に示す。又、Fig. 11 では雑音の相関に対する反応度推定過程の収束時間の特性が示されている。これらの結果から即応性は雑音の相関の度合に比例して悪くなること又、相関が大きくなるにつれて推定過程のゆらぎが大きくなることがわかる。

IV) 反応度外乱の種々な形による影響

Fig. 41~Fig. 46 では反応度外乱がステップ状、三角波形状、三角関数状に変化した時の反応度推定結果を示している。いずれもよい応答性が得られているが、周波数が高くなると推定過程に遅れが生ずるため、推定精度が落ちることがわかる。この様にして $u(t)$ を導入したこ

Fig.11 Correlation Time (T_{co})

vs.

Convergence Time (T_c)

とにより任意に変化する反応度を精度よく推定できる事が確かめられるが反応度変化の周波数が高くなるにつれて遅れを伴うことは $u(t)$ の持つ限界でもある。すなわち、Fig.45 に示す様な三角関数波形に対して本来反応度変化の特性は2階の微分方程式で記述されるべきものを $u(t)$ で置きかえたため周波数が高くなると反応度変化に追従しきれなくなり遅れを生ずることがわかる。

V) 原子炉モデルと実際のシステムとの差異による推定過程への影響

推定方程式に含まれているシステム方程式と、実際のモデルとの誤差として次の様な点を挙げ推定過程への影響を検討した。

a) パラメータ $\frac{\beta}{\ell}$, λ の誤差

Fig.47~Fig.52では $\frac{\beta}{\ell}$ 及び λ が10~30%誤差を持つ場合の推定結果を示しているが推定過程について次の様な事が特徴的に表われている。

- 。直接観測可能な状態変数 δn の推定精度は極めてよい。
- 。その影響が $\hat{\delta C}$, $\hat{\delta \rho}$ に現われ、時間と共に $\hat{\delta C}$ は誤差が蓄積し $\hat{\delta \rho}$ には定常偏差が

残る。

- 。 $\hat{\delta\rho}$ の誤差はパラメータ誤差の割合と同じになる。

b) 推定方程式の線型化近似による推定誤差

§ 3, § 4 で述べた様に推定方程式は線型化された原子炉動特性方程式に対して導出されている。そこでシステムの非線型項が推定過程にどのように影響しているか検討しておく必要がある。Fig. 53~Fig. 57では反応度がステップ状に $10\phi \sim 50\phi$ 入った場合の推定結果であるが次の様な特徴が顕著である。

- 。 $\hat{\delta n}$ は推定精度が極めて良い。
- 。 $\hat{\delta\rho}$ は時間と共に推定誤差が線型的に蓄積される。

この様に反応度推定誤差が蓄積されるのは、システム方程式の線型化の過程で $\frac{\delta n \cdot \delta\rho}{\ell}$ を無視した事によるもので、本来 δn の推定誤差として表われて来るはずの量だけ反応度推定項にしわよせされている為である。反応度推定結果は 150 sec 後で $50\phi, 30\phi, 20\phi$, 入力に対してそれぞれ 50%, 20%, 10%, 2~3% 大きくなる事がわかる。従つて、 10ϕ 前後迄の反応度に対しては線型推定方程式で充分良い精度で推定が可能である。しかし、 20ϕ 以上の反応度入力に対しては線型方程式では反応度推定精度について信頼性が乏しくなつて来る。この様な大きな反応度入力に対する推定法の改善については (IV) で述べる。

c) 先行核濃度の組を 1 組とした事による推定過程への影響

Fig. 2 に示した原子炉システムの先行核濃度を 6 組とし、1 組モデルに対して導かれた推定方程式を使つて反応度推定実験を行なつた。実験結果から反応度推定過程は反応度が大き目に出てくる事がわかつた。尚、シミュレーション実験では推定方程式の先行核濃度を 3 組まで変えて検討したが推定精度については、原子炉制御のための反応度推定には 1 組でも充分であるが精度をあげる為には 3 組まであげることが好ましい。

VI) 原子炉システムの非線型特性に対する推定方程式の補償

V-c) で検討した様に 20ϕ 程度以上の反応度入力に対しては反応度推定誤差が時間と共に顕著になつてくる。この様な線型化近似による推定誤差を抑える為には非線型推定器を設計することが必要になるが一般に非線型最適推定方程式を導出することは困難である。

ここでは、シミュレーションで検討した様に $\hat{\delta n}$ の精度及び $\hat{\delta\rho}$ の応答の即応性が良い点に着目してシステムの線型化近似の過程で無視した $\delta n \cdot \delta\rho / \ell$ を最適推定方程式 (4-2) に補償して推定を行なつた。その結果を Fig. 58~Fig. 62 に示す。実験結果から 20ϕ 以上の任意の反応度に対しても良い精度で推定結果が得られる事がわかる。

以上の計算機によるシミュレーション実験結果をまとめると

1) ゲイン調整項 S の影響

- 。 S_3 は反応度推定の即応性に対して支配的な影響をもっている。
- 。 S_1 は反応度推定項のゆらぎを抑える働きを持つているが、 S_1 が大きすぎると反応度推定項に定常偏差が残る。
- 。 S_2 は $S_2 = 0$ にしておくのが最良である。

2) 任意の初期状態から出発して推定過程は真の値に収束する。

3) システム及び観測系の雑音特性は雑音レベルが非常に大きくなると推定精度が落ちるが

比較的インセンシティブである。

4) 任意の反応度変化に対して周波数が余り高くない限り良い推定結果が得られる。

5) (1), (3)は $u(t)$ を導入しゲイン調節を行なったことの効果が大きかつた事を裏付けている。⁽¹¹⁾

等の点を指摘することができる。さらに JAERI-memo 4335では最適推定による反応度推定結果と逆動特性法による反応度推定結果を比較しているが最適推定法が雑音に対して極めて強い事が示されている。

5. SHE (半均質臨界集合体) による反応度推定実験

5.1 実験の概要

§ 4 で検討した最適推定法のシミュレーションスタディの結果をもとにして反応度推定について SHE で実験を行なった。実験に際しては特に次の点に主眼を置いて検討した。

i) 雑音特性の影響

シミュレーションスタディの結果、最適推定理論にもとづく反応度推定法は雑音に対する戸波特性が極めて良い事が明らかになった。実験に際しては推定過程の対雑音特性を調べるため、中性子束信号検出端から推定器の間の約 10m のケーブルを雑音対策のほどとしてないものを使い、雑音戸波効果を調べた。

ii) 原子炉モデルについての検討

§ 2～§ 4 で述べた様に最適推定法の特徴は、事前の情報として最適推定方程式にシステム方程式が内包されていることである。従つてこれを実際の原子炉に応用するに当つては、原子炉モデルの精度が反応度推定に影響する。又、シミュレーションスタディでもこの事が確かめられた。ここでは先行核濃度の組数を 1～3 組とし実験解析を行なった。

Fig. 12 では実験条件を略図で示している。

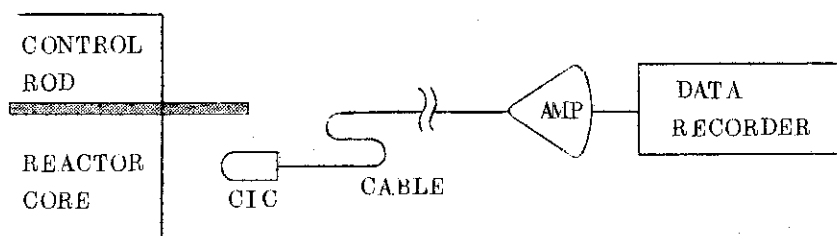


Fig. 12 Block Diagram of Reactivity Estimation Experiment.

炉心から約 50 cm 離して検出器 (CIC) を置き中性子束信号を測定する。得られた信号は約 10m のケーブルを経て電流増幅器で増幅し、レコーダに記録する。この時使用したケーブルは雑音対策のほどとしてないものであり、Amp. の入力信号には原子炉雑音、検出器雑音、ケーブルの誘導雑音、等が含まれる。原子炉の出力は 0.0 2W、及び 0.2W で一旦臨界に保つておき、中央部の制御棒手動操作によつて反応度をかえ、出力の変化を測定する。この時の制御棒操作のパターンを次に示す。

制御棒操作のパターン

手動制御棒 (M. ROD) は挿入位置 600 cm の所で臨界が維持され、そこから最大速度 3cm/sec で引抜きあるいは挿入を行なう。各パターン of 制御棒操作についての反応度変化を較正曲線から計算したものを Fig. 13 に示す。

炉定数

実験に使つた炉定数は § 3 で示した (3-16)～(3-18) の値である。炉定数の精度は β/ℓ * についてはパルス中性子法によつて得たもので誤差は 2～3% である。

* [注] 金子義彦氏による。

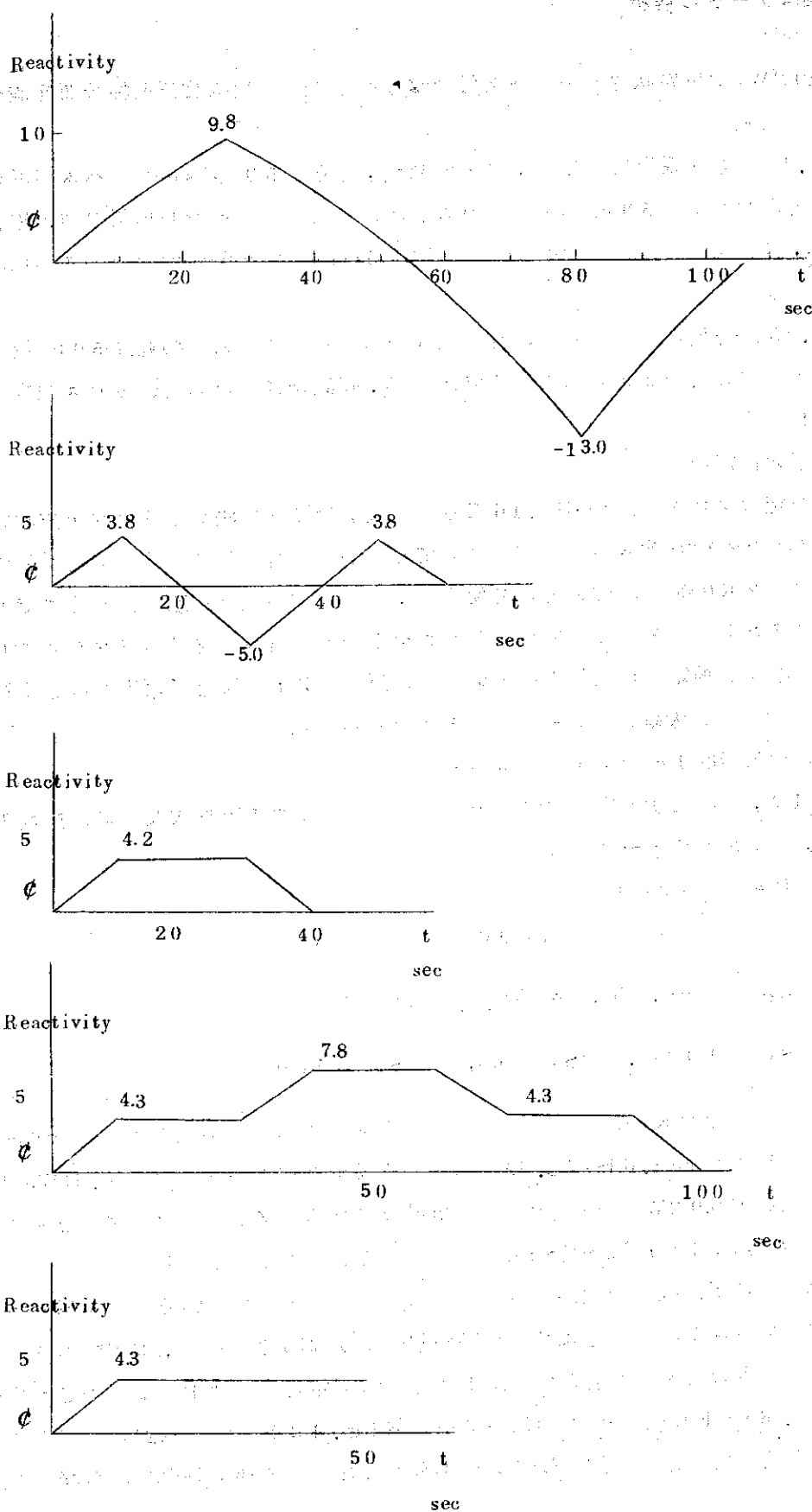


Fig.13 Input Reactivity Calculated from Calibration Curve

5.2 実験データの解析

i) 雑音特性

出力 0.02W で臨界状態の中性子束信号から雑音の自己相関及び振幅分布を調べた。

a) 自己相関

Fig. 14 は観測系出力の雑音，原子炉雑音，さらに 50 c/sec のハムが混在したものであることがわかる。50 c/sec のハムがかなり強いので比較的相関の強い雑音になっている。尚，自己相関の計算はサンプリング間隔 5 msec で 200 個のデータから計算した。

b) 振幅分布

Fig. 15 は a) と同じ条件の下での雑音の振幅分布を示している。振幅は 500 個のデータから観測実現値の頻度分布を調べたものであるが，観測雑音はだいたいガウス雑音に従っていることがわかる。

ii) 反応度推定結果

反応度推定のブロック図を Fig. 16 に示す。最適ゲインを決めるリカッチ方程式はデジタル計算機でルンゲ・クッタ法を使つてオフラインであらかじめ計算しておく。推定過程ではストアされた最適ゲイン $K(t)$ を階段関数として使うか，又は $K(t)$ が定常状態に落ち着くまで計算して定常項をコンスタントゲインとして使う。リカッチ方程式の計算のタイムメツシユは 0.05 sec である。アナログ計算機の推定方程式は中性子束信号の観測値 $Z(t)$ をもとに反応度推定を行なう。ここでアナログ計算機の太線のフローはベクトルフローを示す。

a) 先行核濃度 1 組モデルの推定結果

(4-1)，(4-2) 式を使つて推定を行なう。リカッチ方程式及び最適推定方程式の初期値，又，ゲインパラメータの値は

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}(0) = (\hat{\delta}_n, \hat{\delta}_C, \hat{\delta}_\rho) \Big|_{t=0} = 0$$

$$S_1 = 1000, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 500$$

とした。最適ゲイン $K(t)$ の値は平衡状態の値を使っている。各制御棒挿入パターンに対する反応度推定結果を Fig. 63~Fig. 69 に示す。(反応度挿入パターン Fig. 13)，Fig. 63~Fig. 67 は出力 0.02W の時のデータ解析結果である。 $Z(t)$ がレコーダに記録された中性子束信号の観測値， $EST \delta_n \sim EST \delta_C$ は各状態変数の推定値である。

反応度推定結果は校正曲線から得られた値に近い値を示している。推定過程のゆらぎは観測系の雑音レベルが高い事と雑音の相関が強い事が原因であるが，本実験の様に雑音レベルが極めて高い場合でも反応度変化の第 1 次近似の推定としては 1 組モデルで十分可能である。又，Fig. 68~Fig. 69 (挿入パターン Fig. 13) は出力 0.2W の時の推定結果である。出力が高くなると相対的に雑音レベルが低くなるので推定過程のゆらぎはそれだけ少なくなる。

b) 先行核濃度 3 組モデルの推定結果

(3-18) の値を (2-20) 式に代入し，先行核濃度 3 組モデルの場合の推定方程式を求

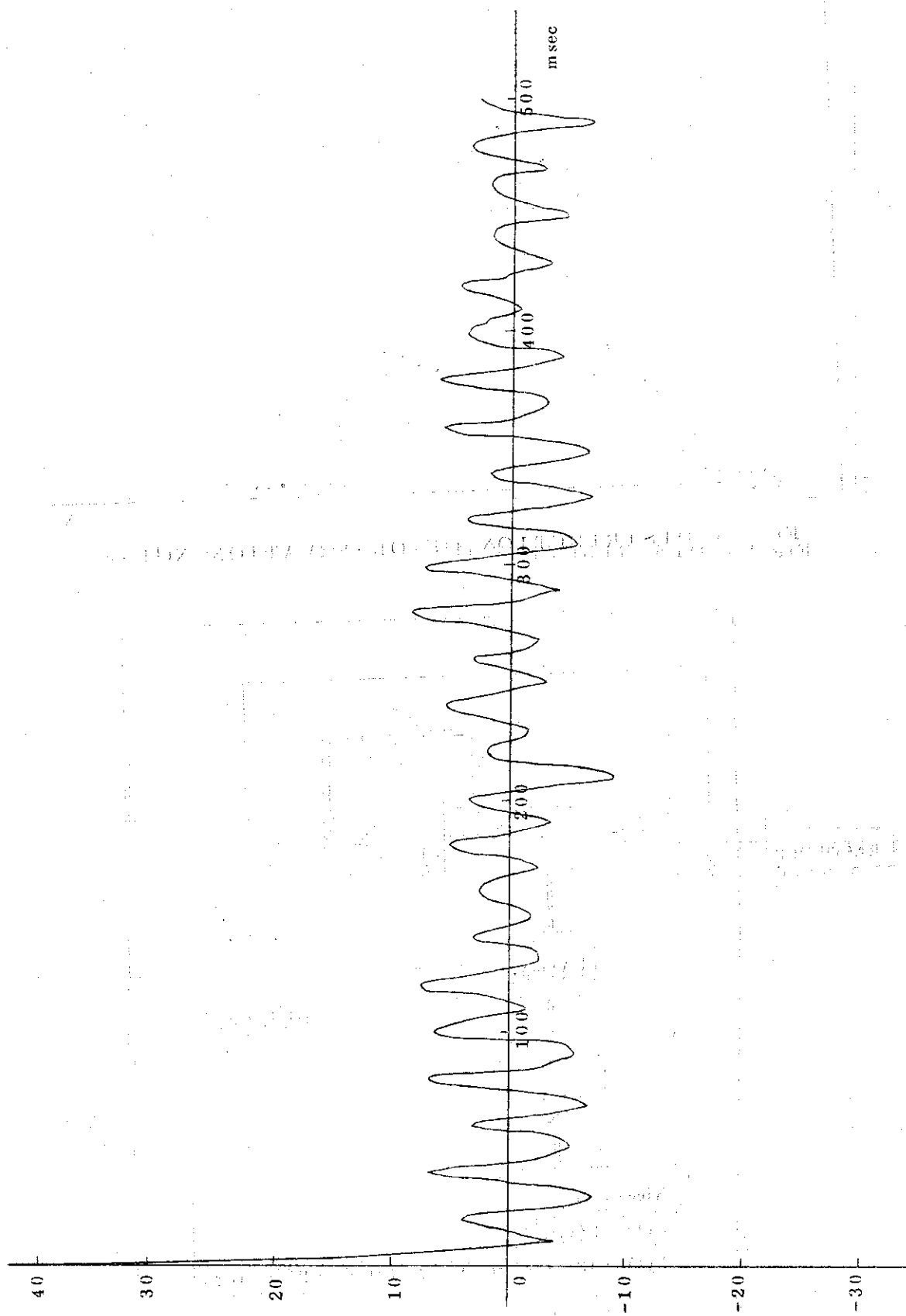


Fig.14 Auto correlation of observation system output (SHE experiment)

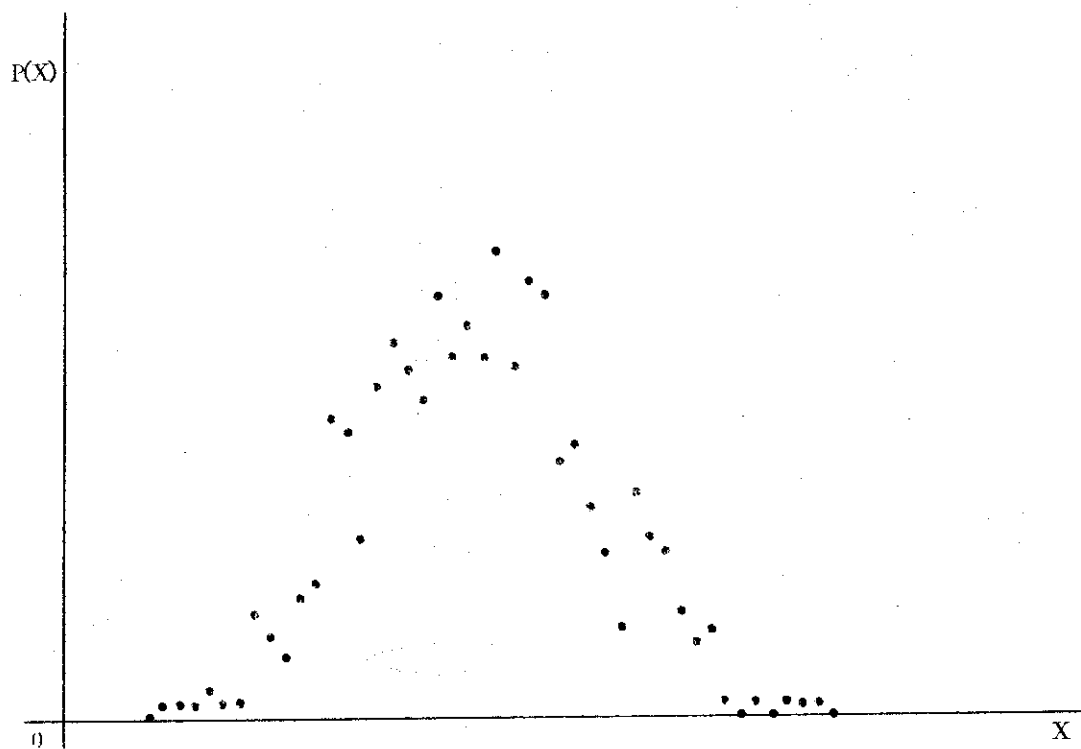


Fig.15 DISTRIBUTION OF OBSERVATION NOISE

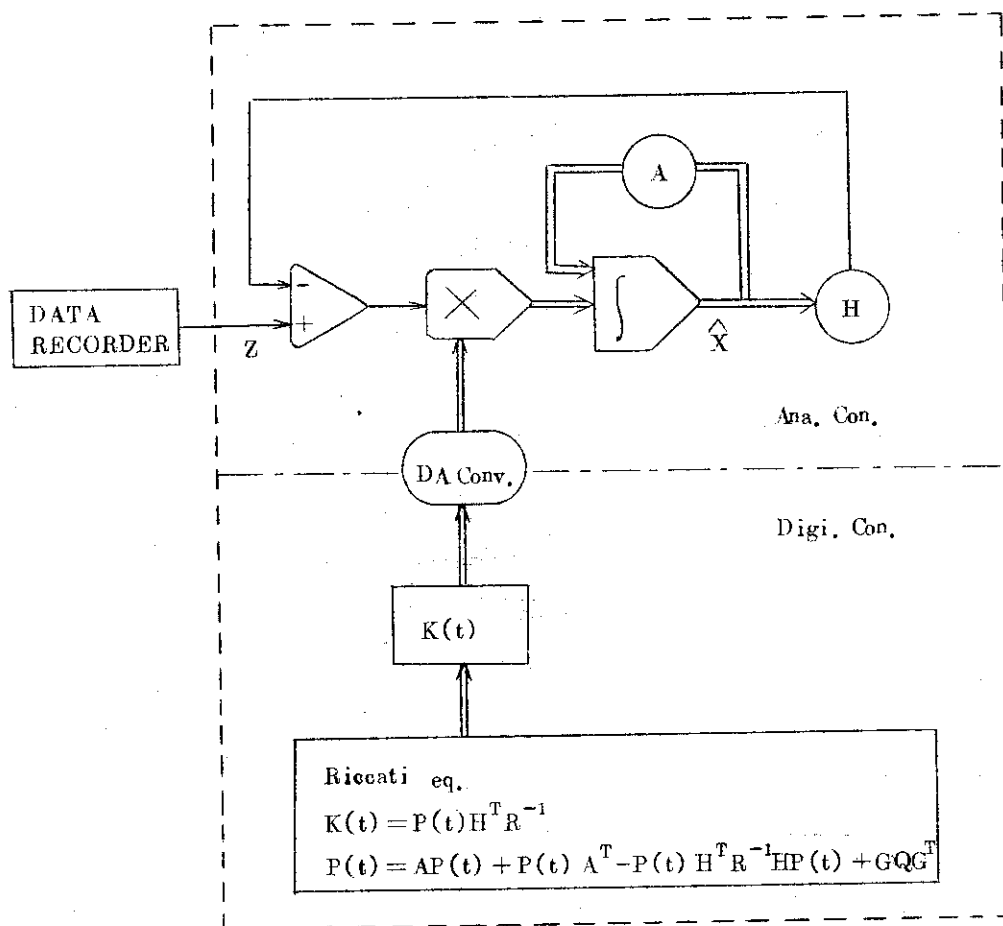


Fig. 16 Block Diagram of Reactivity Estimation Experiment

め各変数毎に記述すると，

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\delta}_n &= -6.74\hat{\delta}_n + 1.2\hat{\delta}_{C_1} + 0.165\hat{\delta}_{C_2} + 0.021\hat{\delta}_{C_3} + 0.0674\hat{\delta}_\rho + \frac{p(1.1)}{R}(Z - \hat{\delta}_n) \\ \hat{\delta}_{C_1} &= 1.5502\hat{\delta}_n - 1.2\hat{\delta}_{C_1} + \frac{p(1.2)}{R}(Z - \hat{\delta}_n) \\ \hat{\delta}_{C_2} &= 3.8418\hat{\delta}_n - 0.165\hat{\delta}_{C_2} + \frac{p(1.3)}{R}(Z - \hat{\delta}_n) \quad (5-1) \\ \hat{\delta}_{C_3} &= 1.348\hat{\delta}_n - 0.021\hat{\delta}_{C_3} + \frac{p(1.4)}{R}(Z - \hat{\delta}_n) \\ \hat{\delta}_\rho &= \frac{p(1.5)}{R}(Z - \hat{\delta}_n) \end{aligned} \right.$$

又，リカッチ方程式は

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{P}_{11} &= -13.48P_{11} + 2.4P_{12} + 0.33P_{13} + 0.042P_{14} + 0.1348P_{15} - \frac{P_{11}^2}{R} + S_1 \\ \dot{P}_{12} &= 1.5502P_{11} - 7.94P_{12} + 1.2P_{22} + 0.165P_{23} + 0.021P_{24} + 0.0674P_{25} - \frac{P_{11}P_{12}}{R} \\ \dot{P}_{13} &= 3.8418P_{11} - 6.905P_{13} + 1.2P_{23} + 0.165P_{33} + 0.021P_{34} + 0.0674P_{25} - \frac{P_{11}P_{13}}{R} \\ \dot{P}_{14} &= 1.348P_{11} - 6.761P_{14} + 1.2P_{24} + 0.165P_{34} + 0.021P_{44} + 0.0674P_{45} - \frac{P_{11}P_{14}}{R} \\ \dot{P}_{15} &= -6.74P_{15} + 1.2P_{25} + 0.165P_{35} + 0.021P_{45} + 0.0674P_{55} - \frac{P_{11}P_{15}}{R} \\ \dot{P}_{22} &= 3.1004P_{12} - 2.4P_{22} - \frac{P_{12}^2}{R} \\ \dot{P}_{23} &= 3.8418P_{12} + 1.5502P_{13} - 1.365P_{23} - \frac{P_{12}P_{13}}{R} \\ \dot{P}_{24} &= 1.348P_{12} + 1.5502P_{14} - 1.221P_{24} - \frac{P_{12}P_{14}}{R} \quad (5-2) \\ \dot{P}_{25} &= 1.5502P_{15} - 1.2P_{25} - \frac{P_{12}P_{15}}{R} \\ \dot{P}_{33} &= 7.6836P_{13} - 0.33P_{33} - \frac{P_{13}^2}{R} \end{aligned} \right.$$

$$\dot{P}_{34} = 1.348P_{13} + 3.8418P_{14} - 0.186P_{34} - \frac{P_{13}P_{14}}{R}$$

$$\dot{P}_{35} = 3.8418P_{15} - 0.165P_{35} - \frac{P_{13}P_{15}}{R}$$

$$\dot{P}_{44} = 2.696P_{14} - 0.042P_{44} - \frac{P_{14}^2}{R}$$

$$\dot{P}_{45} = 1.348P_{15} - 0.021P_{45} - \frac{P_{14}P_{15}}{R}$$

$$\dot{P}_{55} = -\frac{P_{15}^2}{R} + S_2$$

$$\text{但し, } (\hat{\delta}_n, \hat{\delta}_{C_1}, \hat{\delta}_{C_2}, \hat{\delta}_{C_3}, \hat{\delta}_\rho) |_{t=0} = 0$$

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = 1000, \quad S_2 = 500$$

とした。

この時、1組モデルと同様な方法で推定を行なった場合の結果を Fig. 7.0 ~ Fig. 7.6 に示す。1組モデルの結果と比べてより良い精度で推定解が求まっている。

5.3 実験結果の検討

観測系の雑音のレベルが高く相関も強い条件下で推定を行なったが、低出力 0.02W 時でも十分に良い戸波特性が得られている。出力レベルが高くなると相対的な雑音レベルは低くなり推定精度が上がる。

各実験結果データの頭にあるステップ状に変化している図は反応度変化の切りかえ点を示している。推定結果には、2~4 sec の切りかえ点に於ける遅れがあることがわかる。推定ゲインを大きくすると遅れは少なくなるが反応度推定過程のゆらぎはさらに大きくなる。

さらに切りかえ点に於いて推定過程がなまっているがこれは雑音に相関が強い為である。

投入反応度のパターンに対し Fig. 6.6, Fig. 7.3 の推定結果は実際に投入された反応度の結果とかなりずれているが、先行核濃度 1 組、3 組の推定結果に差がほとんどない事から原子炉システムの非線型特性が原因しているものと思われる。

先行核濃度 1 組の場合の推定結果は反応度ランプ状に変化している時わん曲しているが、3 組の場合の結果からわかるように先行核濃度の組数を増やすことにより、推定精度を上げることができる。

中性子束の推定解は出力レベルの差、及び先行核濃度の組数の差によらず同程度の解が得られている。従つて観測信号にフィルターをかける為に使う場合は先行核濃度 1 組で十分である。

尚、ここではパラメータ β/ℓ 、及び λ の持つ誤差について言及しなかつたが、これはパラメータ誤差が 2~3% 程度であるので、シミュレーション結果にもとづき本実験で行なった反応度推定に於いて及ぼす影響は小さいものとして無視した。さらに、本実験で先行核濃度 2 組モ

デルによる推定実験も行なつたが、結果の報告については割愛する。

5.4 実験のまとめ

以上の実験及び検討結果から観測信号のフィルターとして、あるいは原子炉制御のための反応度推定としては先行核濃度 1 組で十分であり、反応度推定精度を上げるには先行核濃度を 3 組にする必要がある事が結論づけられる。

次に観測値 $Z(t)$ にはケーブルの誘導雑音と思われるパルス状の雑音が見られるが反応度推定結果にもこれが直接現われており、雑音と同期してパルス状のゆらぎが生じている。これは本方法が $E[(X - \hat{X})^T (X - \hat{X})]$ を最小にする、すなわち信号に乗っている雑音の振幅を、事前に得られた情報をもとにできるだけ小さくするという操作をほどこしている事に起因するもので、これを取除く事は困難であるが次の 2 つの点を考慮しておく必要がある。

- 。 通常の RC フィルターではカットオフされてしまう様な帯域の信号で原子炉の運転あるいは安全上重要な影響を及ぼす様な外乱があつたとしても最適推定法による場合、検出できる可能性がある。
- 。 この様な信号が本実験の場合の様に観測系など全く外的なものであつても推定過程に混在して推定精度を下げる。

しかし観測系ノイズに対してはたとえばコインシデンス法などにより処理できるから、本方法は安全監視装置の 1 部として使うのにも適している。

さらに本方法はシミュレーションスタディで述べたシステムの実線型特性の補償をしておけば、原子炉の起動時から出力時までの幅広い範囲にわたつて使用可能であり、雑音レベルが大幅に変わつた時にも簡単にゲイン調整が可能である。

6. 反 応 度 計 の 設 計

§4, §5 で検討してきた様に最適推定理論にもとづく反応度推定法には雑音に対する戸波特性がすぐれていることをはじめとして種々の利点がある。しかし、推定解を求める数値計算では、リカッチ型のマトリックス微分方程式を解くなどかなり複雑な計算を行なうことが必要になる。特にオンライン計算機を用いて実時間で推定解を求めようとするこの事は大きな障害となる。

本章では、§4 で述べた

- (1) 最適推定方程式には対象とするシステムの動特性方程式が含まれている。
- (2) 最適ゲイン $K(t)$ はリカッチ方程式 (4-1) の平衡状態の値を用いてコンスタントゲインとして使用できる。

の2点に着目し、手動による操作でゲインを調節する様にした、簡便な反応度推定器をアナログ回路で容易に設計できることを提案し、ハイブリッド計算機で模擬設計し、シミュレーションスタディを行なった。

6.1 反応度推定器の構成

先行核濃度1組モデルに対する最適推定方程式を各要素毎に書くと

$$\begin{cases} \dot{\hat{\delta}_n(t)} = -\frac{\beta}{\ell} \hat{\delta}_n(t) + \lambda \hat{\delta}_C(t) + \frac{1}{\ell} \hat{\delta}_\rho(t) + \frac{1}{\ell} \hat{\delta}_\rho(t) \hat{\delta}_n(t) + K_1(t) [Z(t) - \hat{\delta}_n(t)] & (6-1) \\ \dot{\hat{\delta}_C(t)} = \frac{\beta}{\ell} \hat{\delta}_n(t) - \lambda \hat{\delta}_C(t) + K_2(t) [Z(t) - \hat{\delta}_n(t)] & (6-2) \\ \dot{\hat{\delta}_\rho(t)} = K_3(t) [Z(t) - \hat{\delta}_n(t)] & (6-3) \end{cases}$$

これらの式の右辺最後の項 $K_i(t) [Z(t) - \hat{\delta}_n(t)]$ を除くとこれは、原子炉動特性方程式を表わしており従来の原子炉シミュレータと同様な方法で設計できる。

次に、 $K_i(t) [Z(t) - \hat{\delta}_n(t)]$ ($i=1\sim3$) の項についてみると、中性子束信号の観測値と推定値の差に最適ゲイン $K_i(t)$ をかけて各状態変数にフィードバックされている。すなわち、前述した原子炉シミュレータの各状態変数に $Z(t) - \hat{\delta}_n(t)$ を適当な増幅を行なつてフィードバックをかけておけば観測値 $Z(t)$ にもとずいた $\hat{\delta}_n(t)$ $\hat{\delta}_C(t)$ $\hat{\delta}_\rho(t)$ を推定することが可能となる。

最適ゲイン $K_i(t)$ はリカッチ型のマトリックス微分方程式を解いて求められるが、ここでは $K_i(t)$ の値としてあらかじめオフラインでデジタル計算機を用いてリカッチ方程式を計算し、充分時間が経つた後 $K_i(t)$ が平衡状態に落ち着いた時の値 $K_i(\infty)$ をもつてコンスタントゲインとして使い、推定解の状況に応じて、この時の K_i を手動操作で変更できるようにした。

さらに、原子炉は起動時から出力時まで $10^6 \sim 10^{10}$ 倍も出力が変化し、又、動特性は非線型特性を持つているので反応度推定器を実用するに当つてはこれらの点に考慮がはらわれないなければならない。

ここでは、大幅な出力変化に対しては、ハイブリッド計算機により自動レンジ切換えを行な

っており、非線型特性に対しては § 4.2 (V) で検討した非線型項をフィードバックする事によって補償している。

以上述べた方法にもとずいた反応度推定器をアナログ計算機で設計した場合のブロック図を Fig. 17-1 又、ハイブリッド計算によるこの回路のレンジ自動切換えプログラムのフローチャートを Fig. 17-2 に示す。ここで K_1, K_3 は反応度推定の精度及び即応性のかねあいで希望の値に手で調節できるようにしてある。 K_1, K_3 に対する反応度推定過程の特性は § 4.2-1 で述べたように K_3 は即応性に対して敏感であり、 K_1 は推定過程のゆらぎを抑える働きをすることができる。

。 自動レンジ切換えの方法

自動レンジ切換えは Fig. 17-1 で点線で結んだ部分（リレー（RL）積分器の初期値変更）を同時に切換えて行なう。推定された各状態変数、 $\hat{\delta}_n(t), \hat{\delta}_C(t), \hat{\delta}_\rho(t)$ を 0.5 sec 毎に A/D 変換し、 $\hat{\delta}_n(t)$ の値を使つて、上昇下降及びレンジ切換点への到達の有無を判断する。推定値 $\hat{\delta}_n(t)$ が上限のレンジ切換点（UPLIMIT）に達すると、Fig. 17-1 で示した $\hat{\delta}_n, \hat{\delta}_C, \hat{\delta}_\rho$ の積分器の初期値が $1/a$ に変更され、同時にリレーが働き入力 $Z(t)$ は $1/a$ に、出力反応度推定値は a 倍に切換えられる。同様に推定値 $\hat{\delta}_n(t)$ が下限のレンジ切換点（LOLIMIT）に達するとこれと全く逆の操作を行なう。

6.2 シミュレーション実験

種々の反応度外乱に対し Fig. 17 で示した反応度推定器を使つて推定した結果を Fig. 77 ~ Fig. 79 に示す。推定結果はいずれも § 4 で得られた結論にマッチしたものであつた。又、本推定器を使つて SHE 実験データを解析した結果を Fig. 80 ~ Fig. 85 に示す。推定結果は § 5 の 1 組モデルによる結果 Fig. 63 ~ Fig. 69 とほぼ同程度のものが得られている。その他、§ 4 で検討した諸点について同様に反応度推定器を使つて検討したが得られた結果はシミュレーションスタディで得た結論と全く同じであつた。

最後に出力レベルを大幅に変化させた時の推定結果を Fig. 86, Fig. 87 に示す。ここではレンジ切換えは出力が 1V に達した時、出力を $1/2$ (Fig. 17-2, $a=2.0$) に変更する様に設定した。実験結果から、レンジ切換え操作がうまく働いていることがわかる。

6.3 ま と め

以上述べた様に § 4 で検討した諸点の特性を満した反応度推定器が極めて容易に実現できることがわかつた。反応度推定をオンライン計算機を用いて行なう場合には、レンジ切換えなしで (6-1) ~ (6-3) 式を使つて容易に計算できる。又、アナログ回路で単体として反応度推定器を設計する場合には、§ 6.1 で示した自動レンジ切換えをロジック回路等を用いて設計する必要があるがこれは簡単に実現できるものと思われる。

尚、シミュレーション実験では、先行核濃度 1 組で計算したがこれは 2 ~ 6 組まで適当に増やすことができる。

Fig.17-2 Flow Chart of Automatic Range Switching Program.

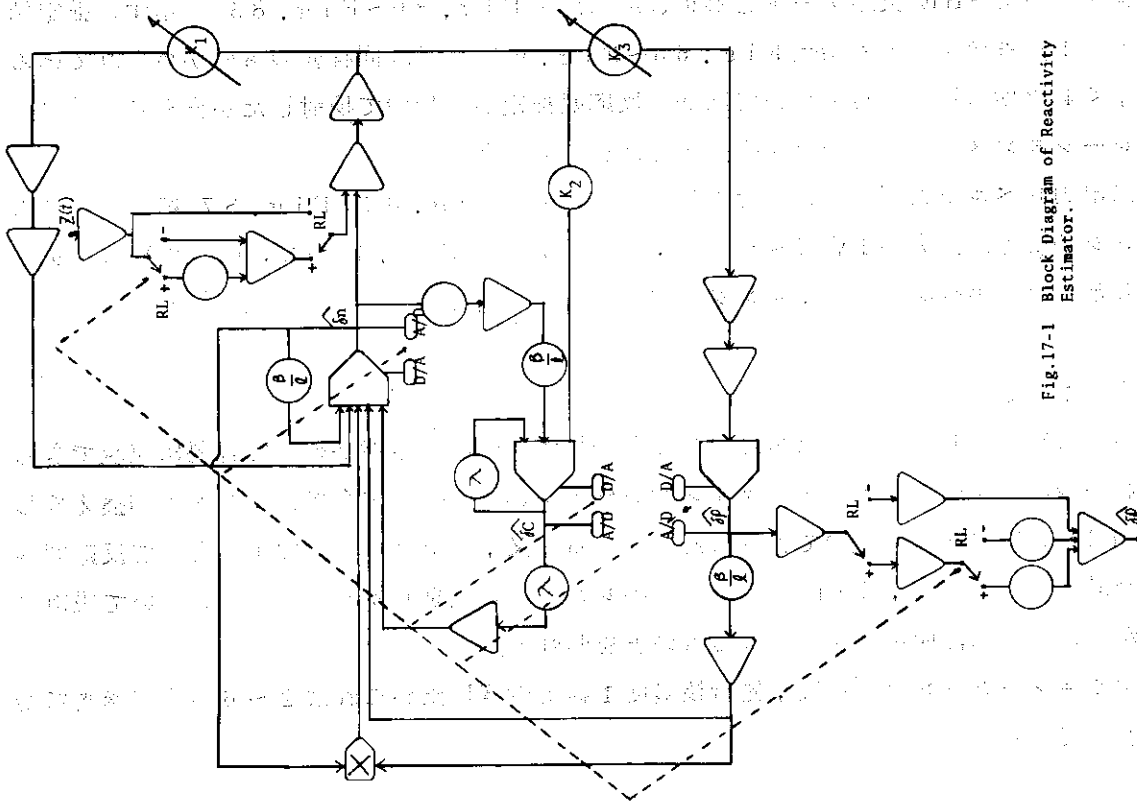
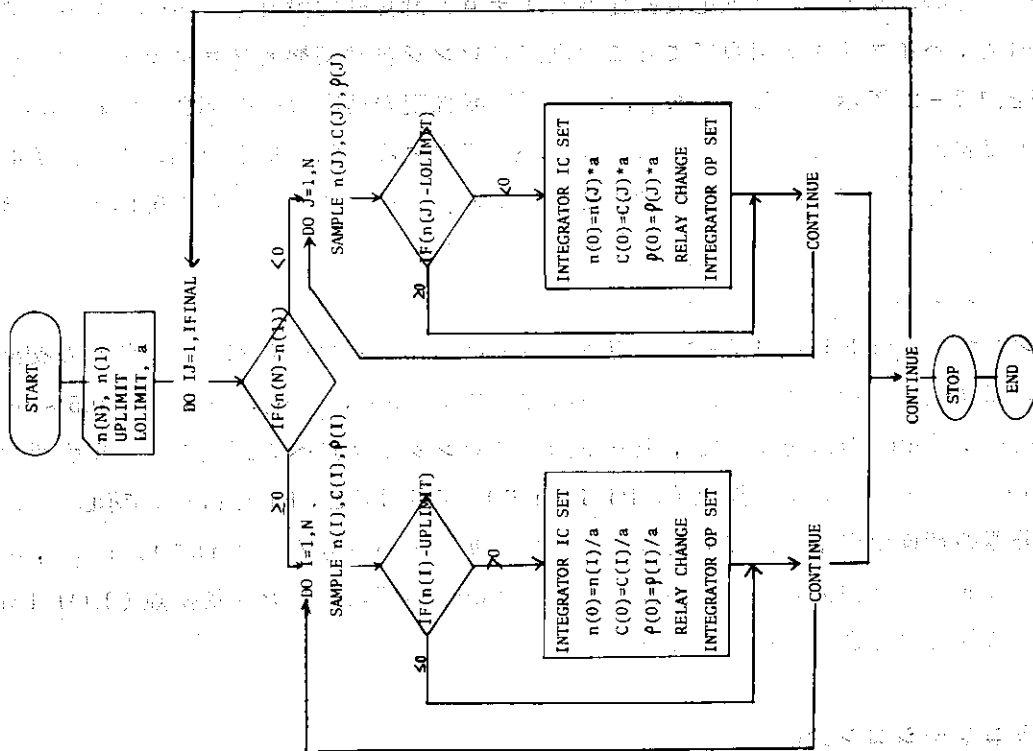
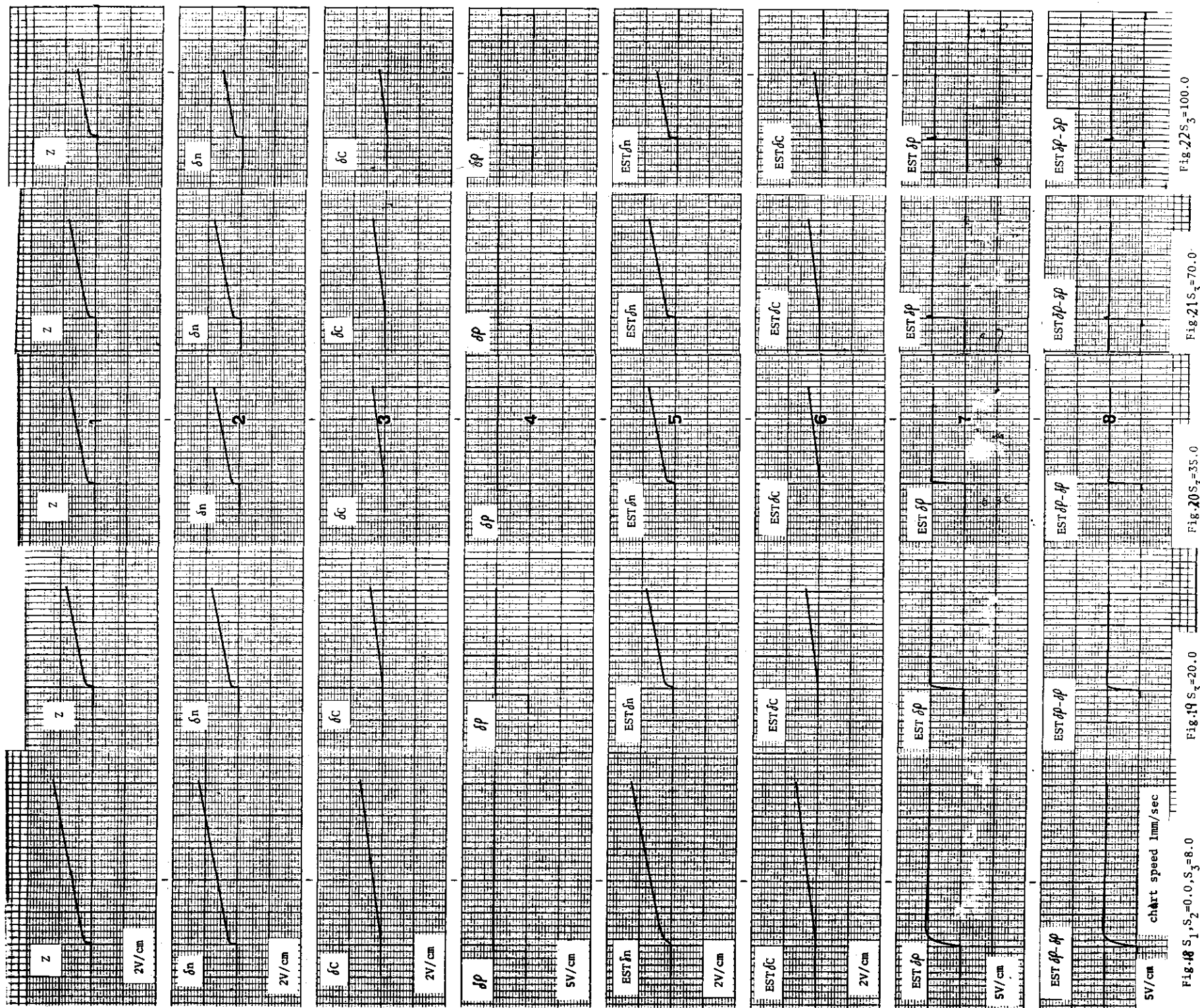
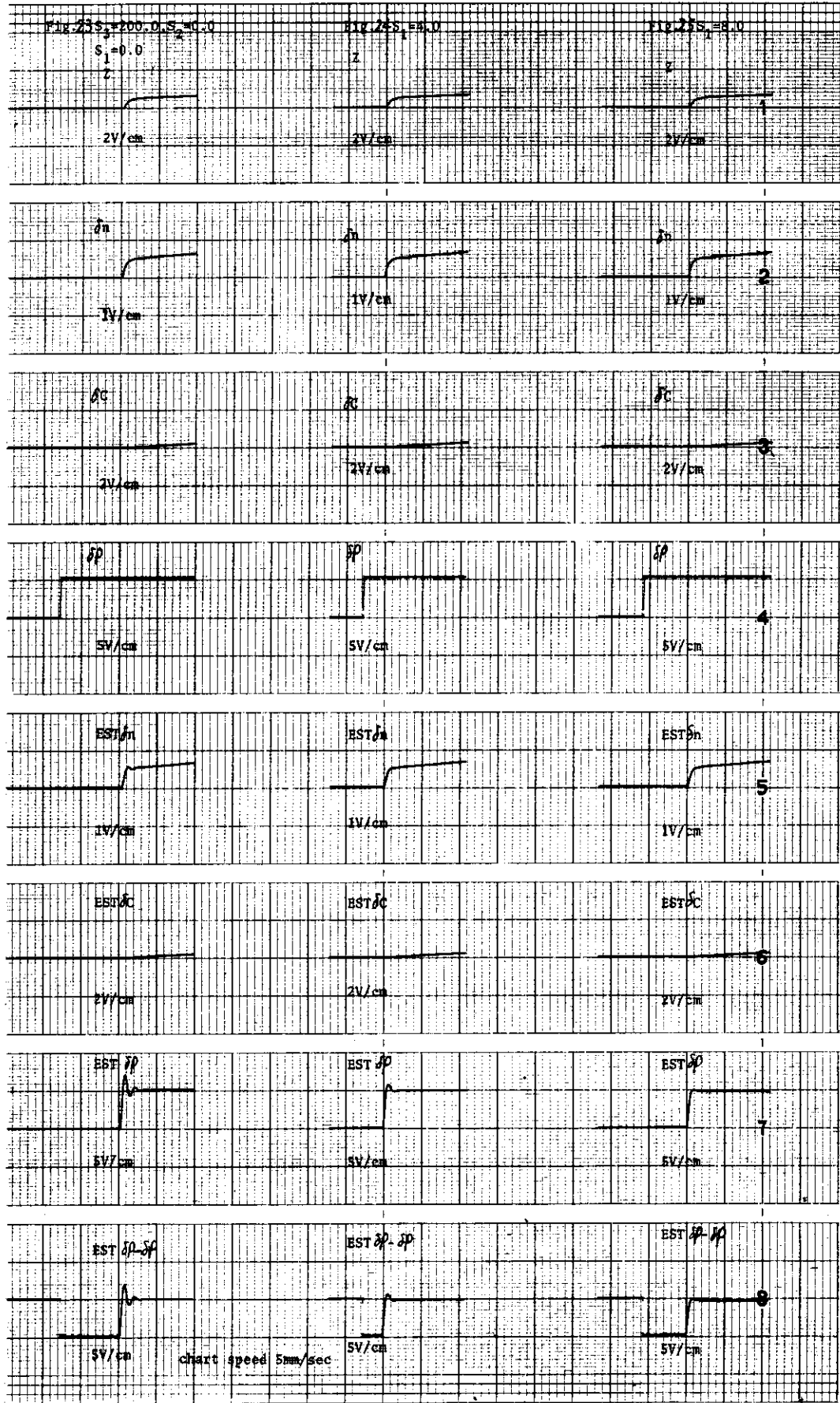
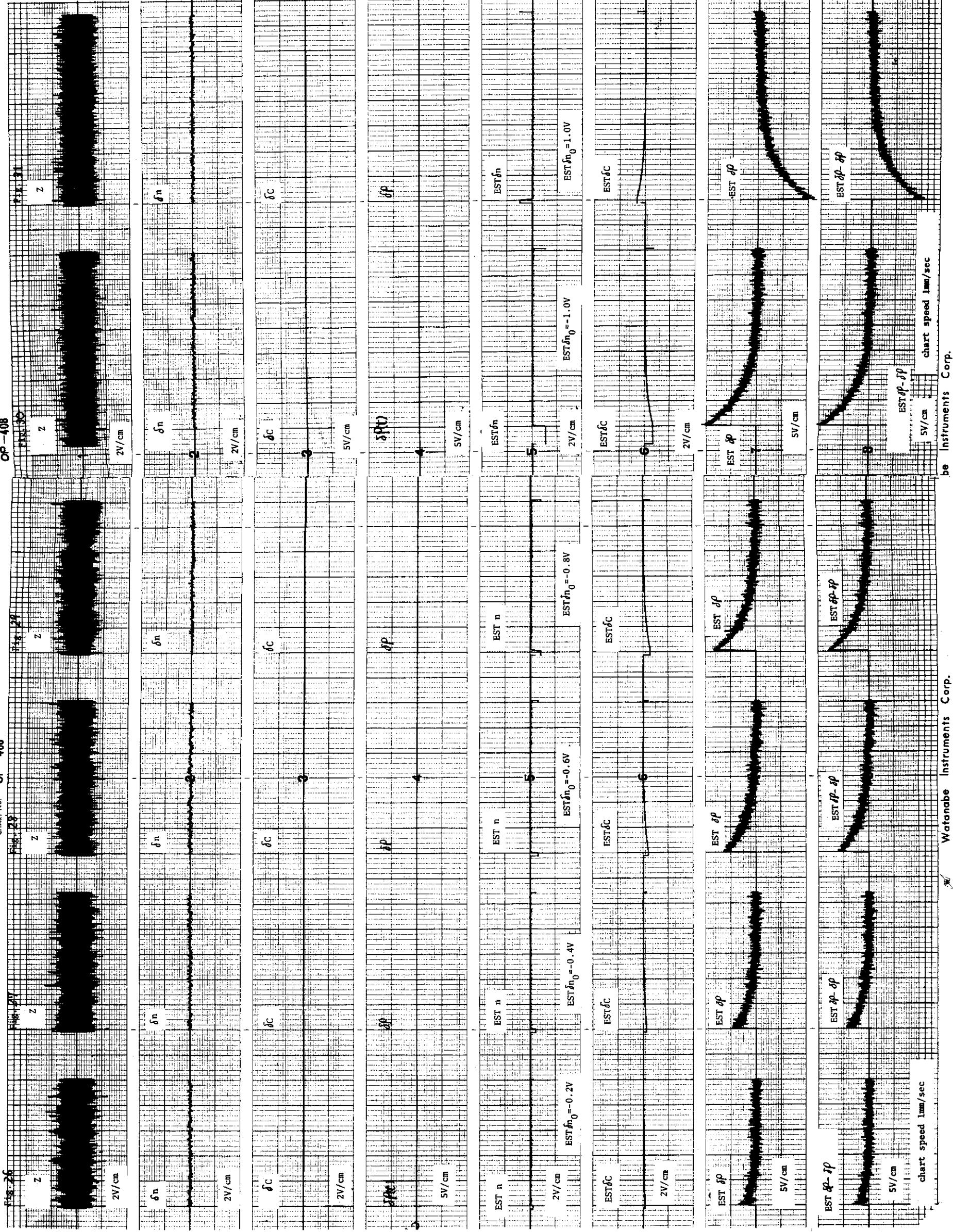


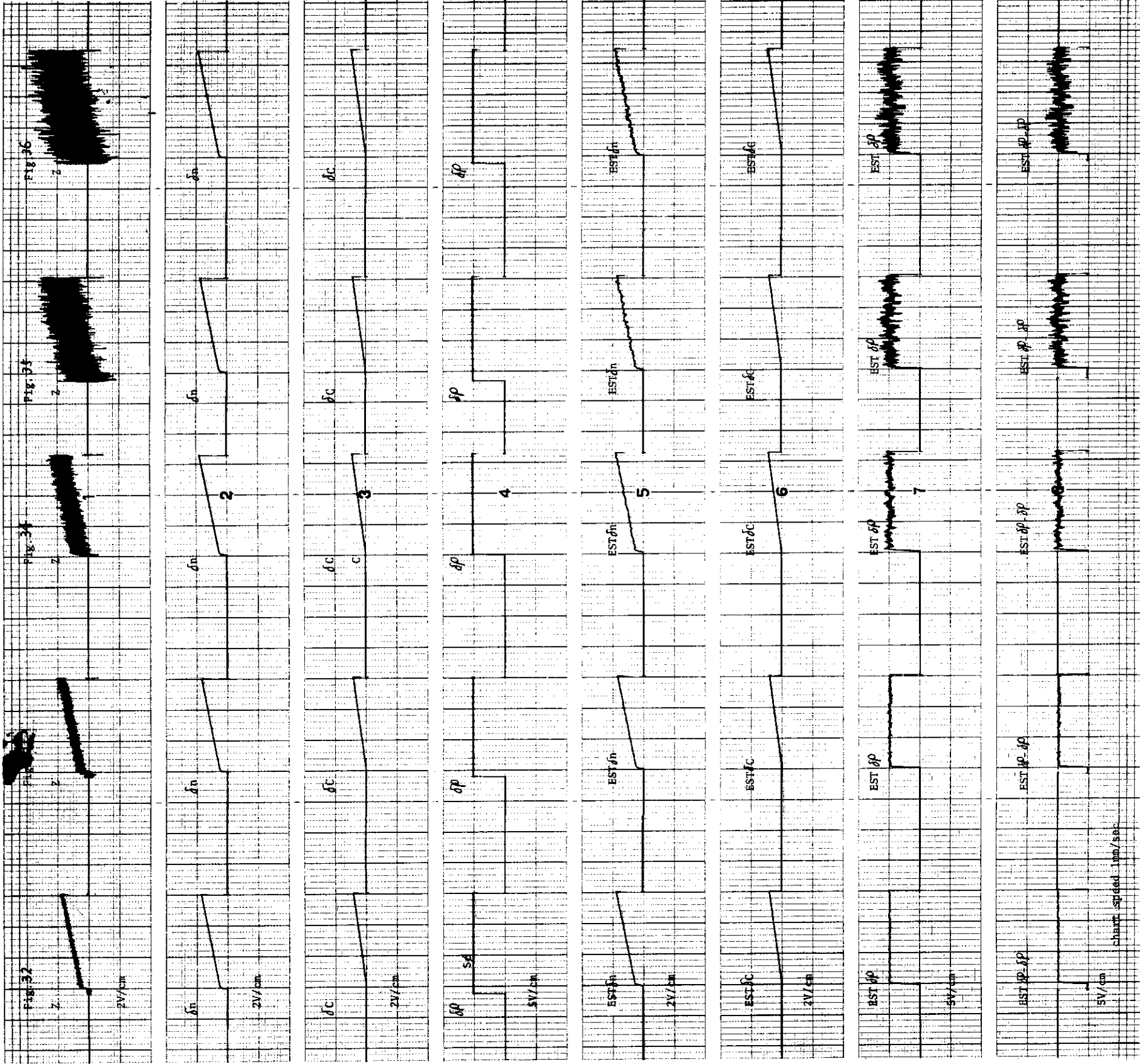
Fig.17-1 Block Diagram of Reactivity Estimator

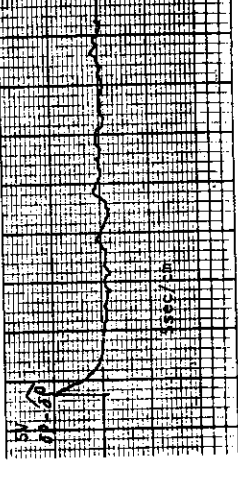
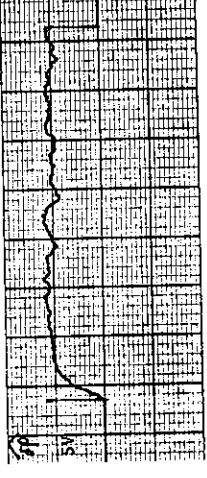
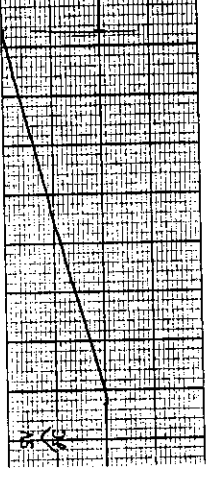
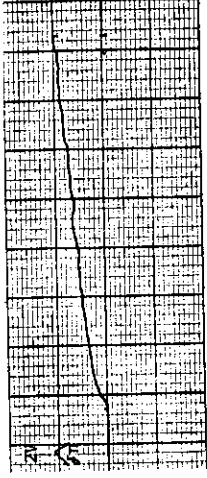
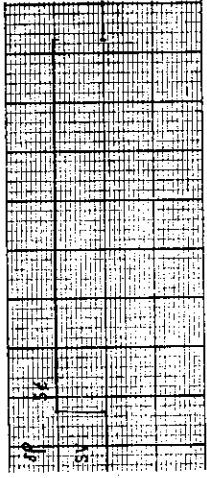
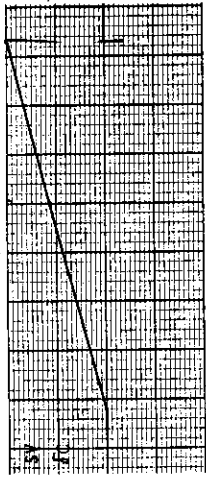
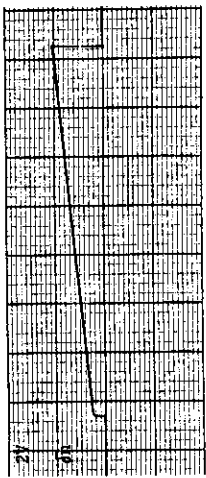
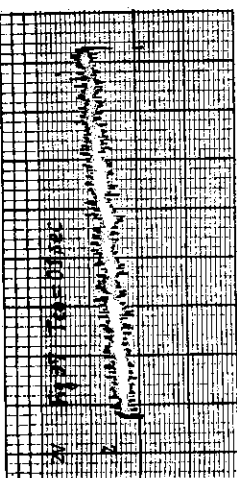
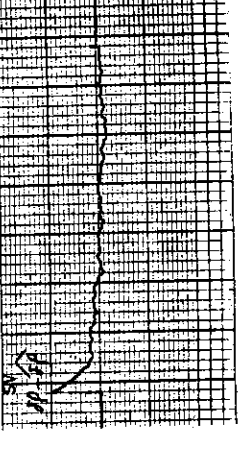
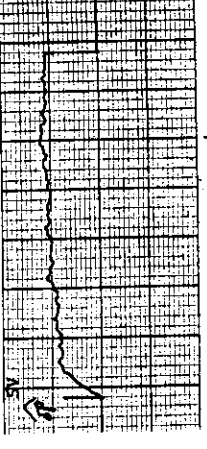
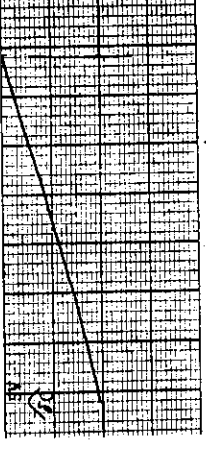
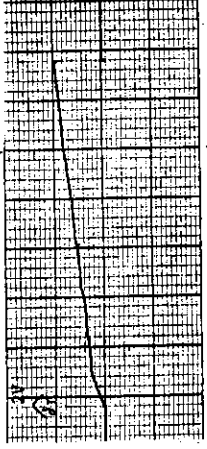
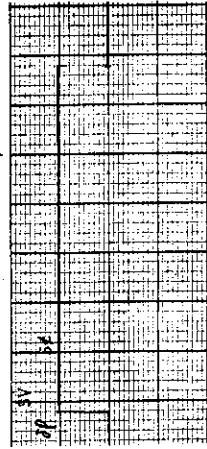
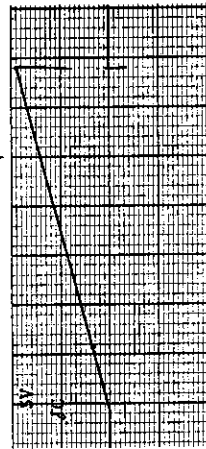
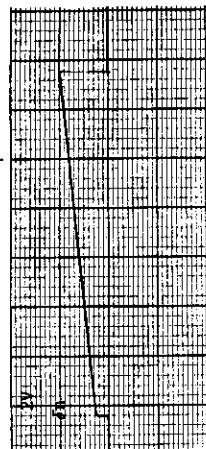
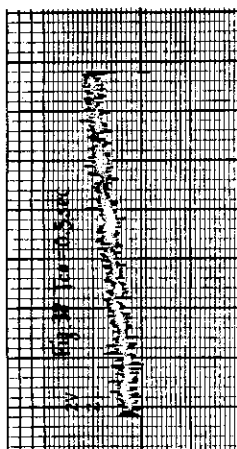
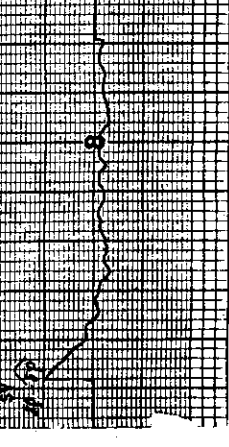
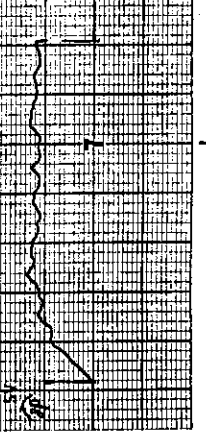
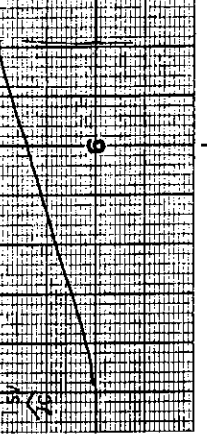
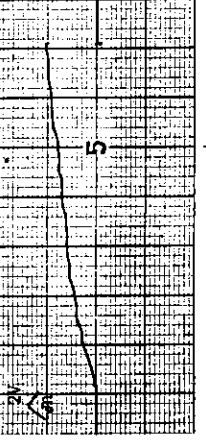
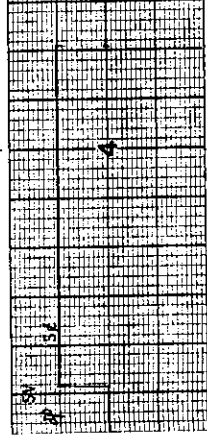
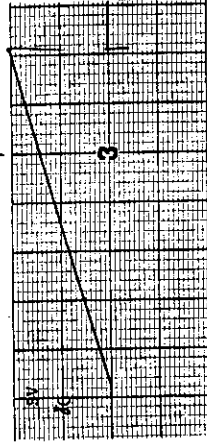
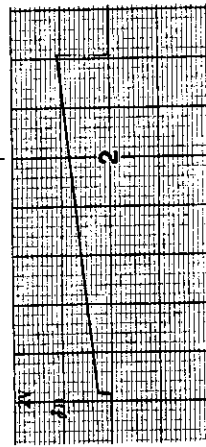
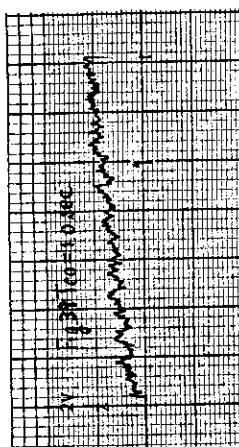
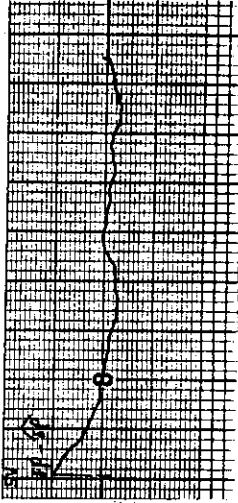
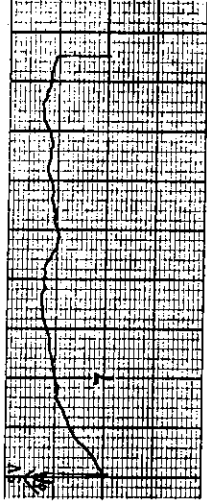
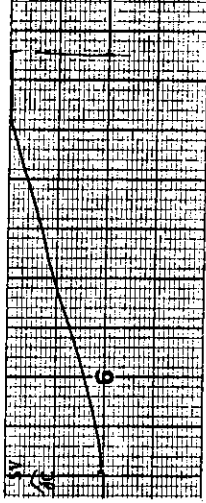
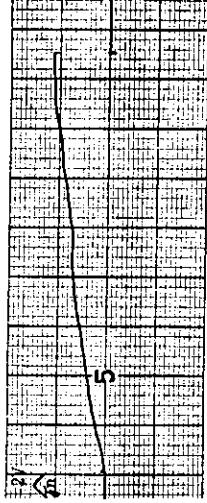
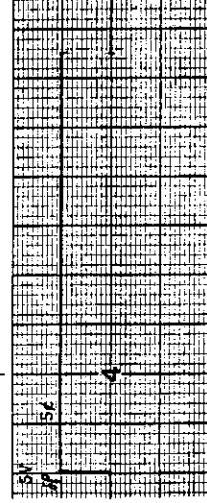
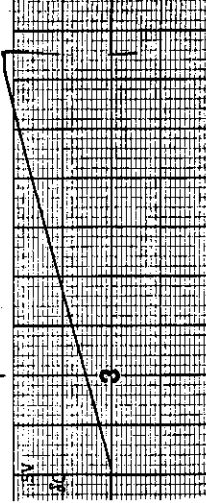
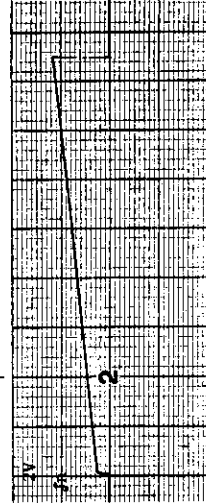
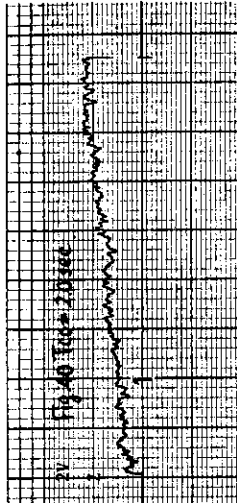




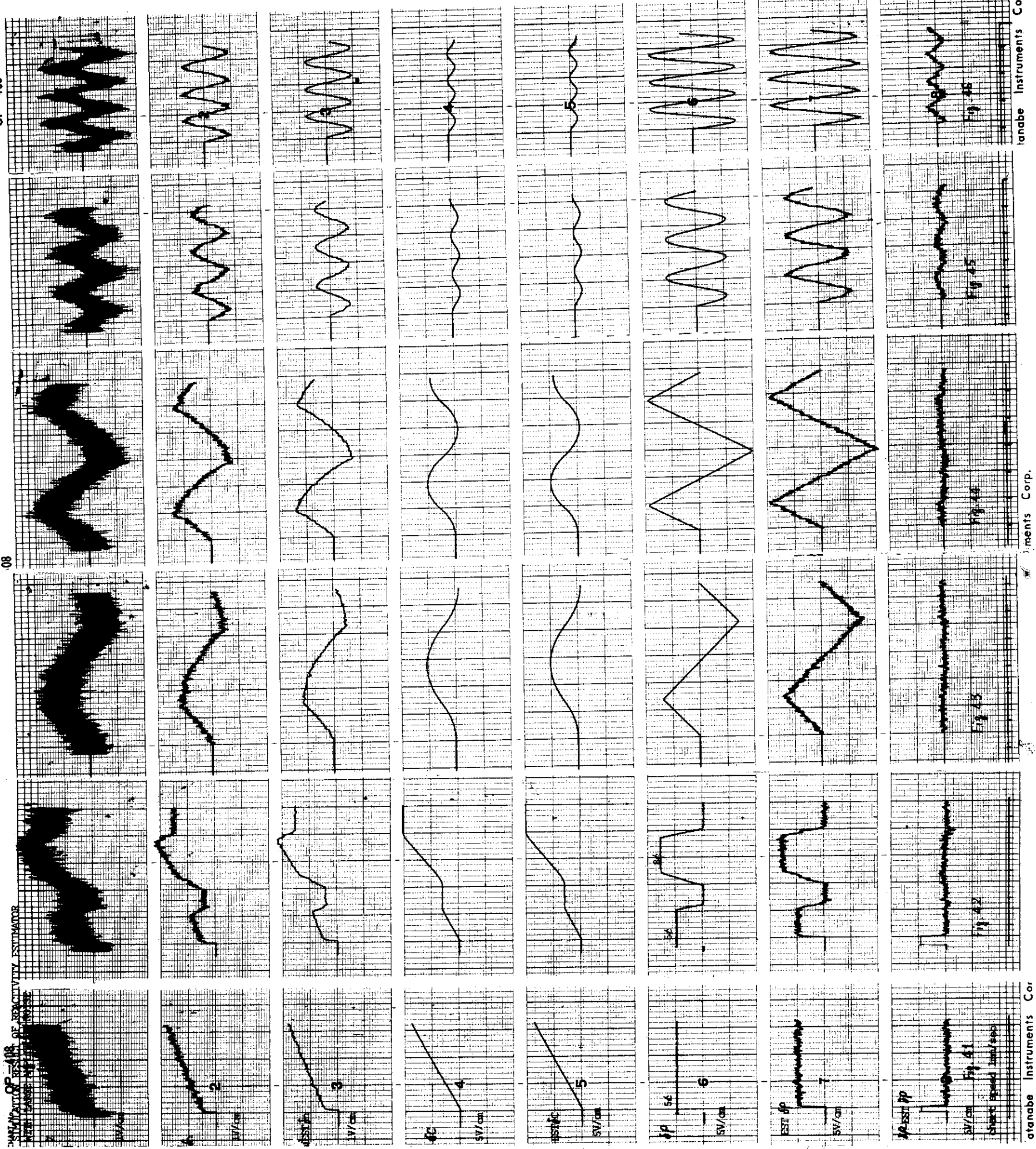
Watanabe Instrumen







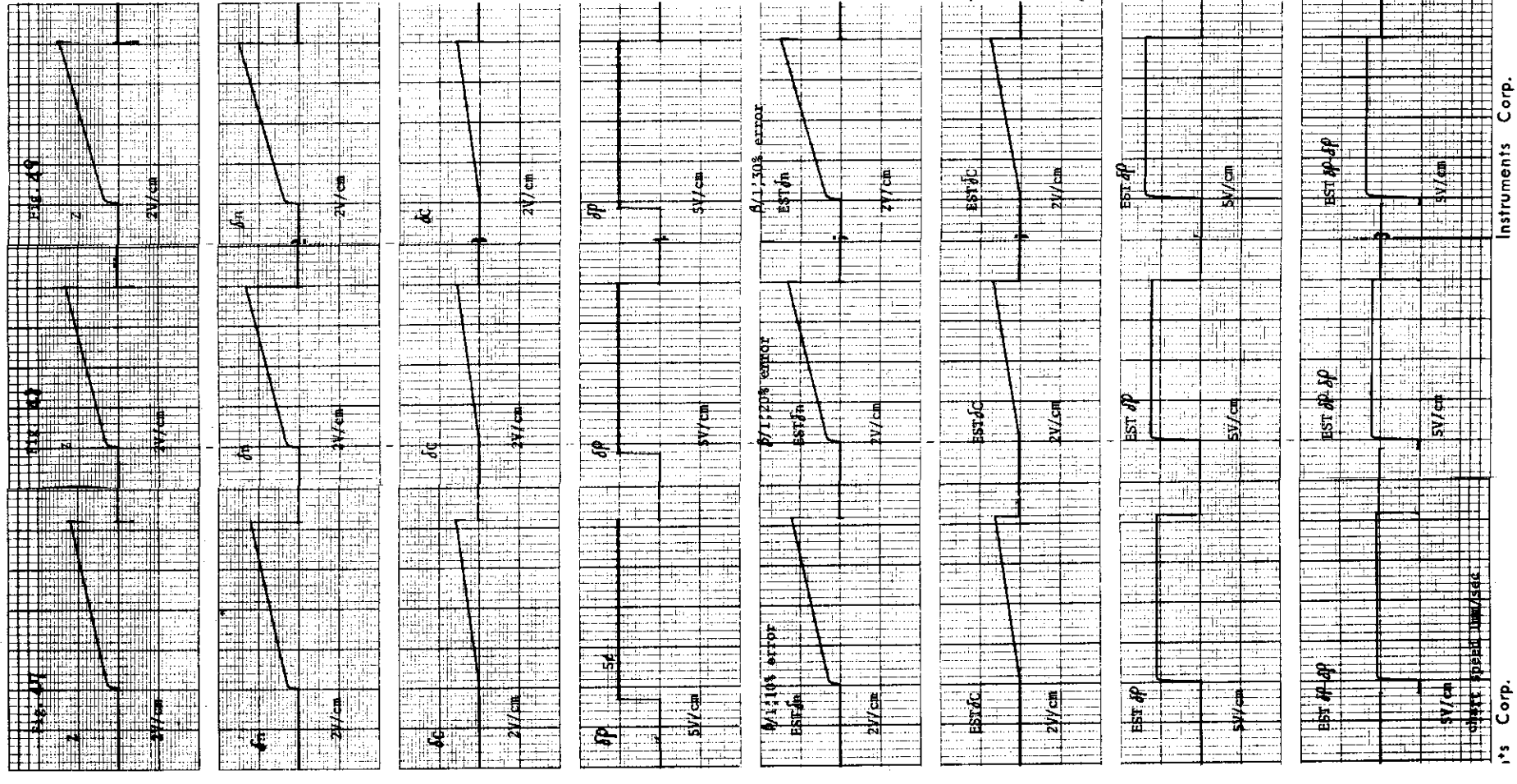
ANALOG RESPONSE OF NOISE ACTIVITY ESTIMATOR
WITH VARIOUS INPUT SIGNALS



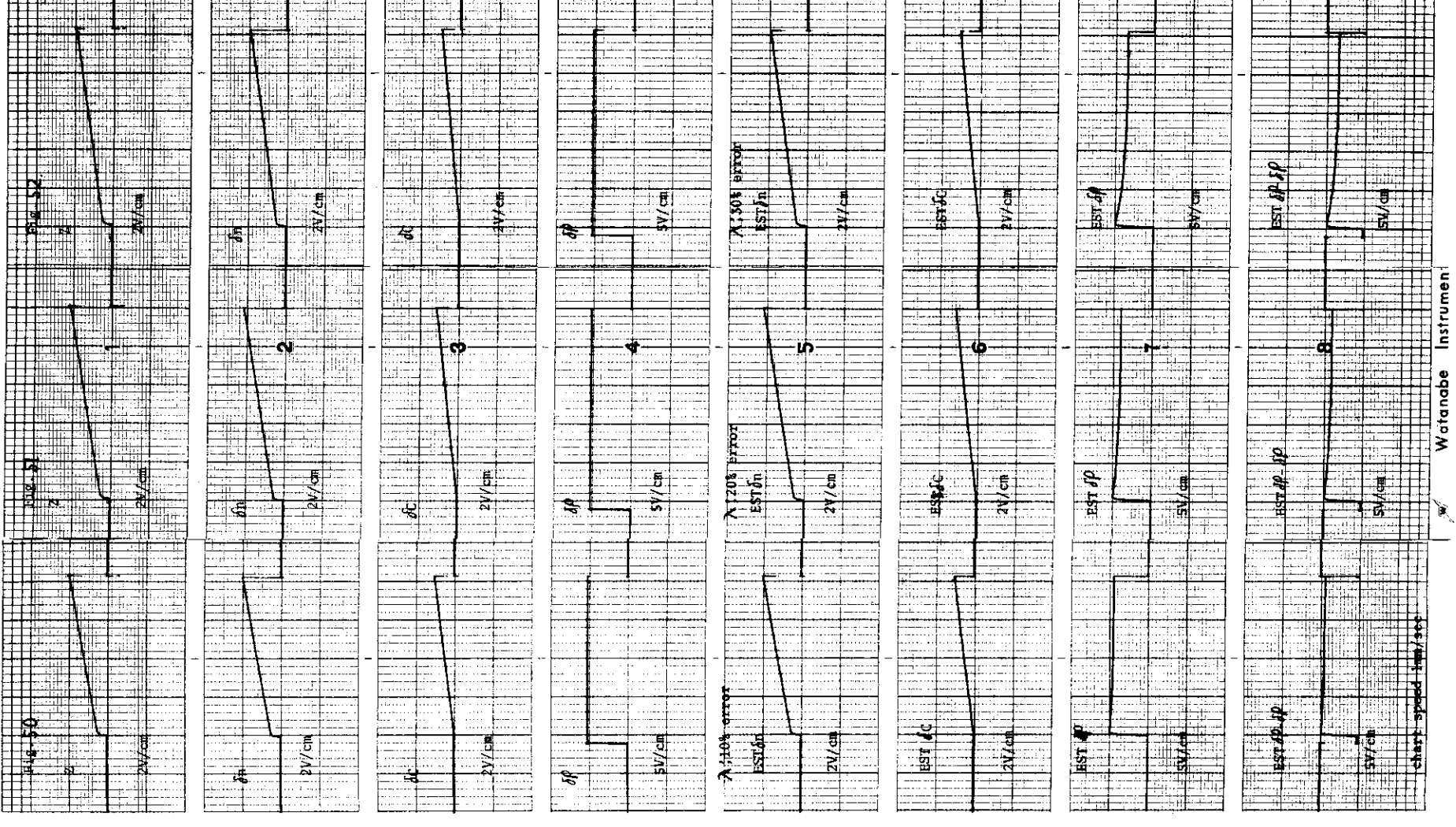
Stanabe Instruments Corp.

Stanabe Instruments Corp.

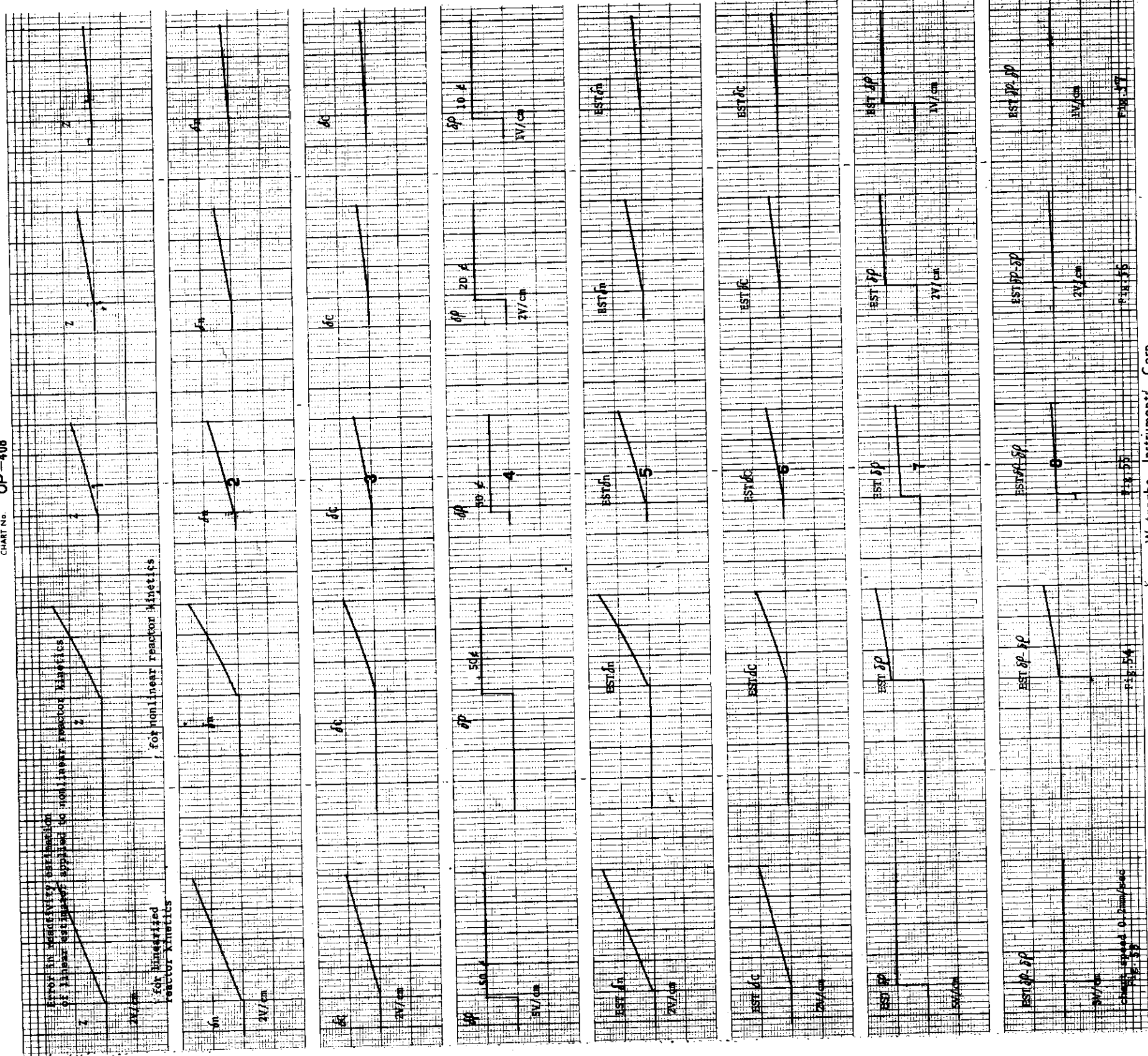
Stanabe Instruments Corp.

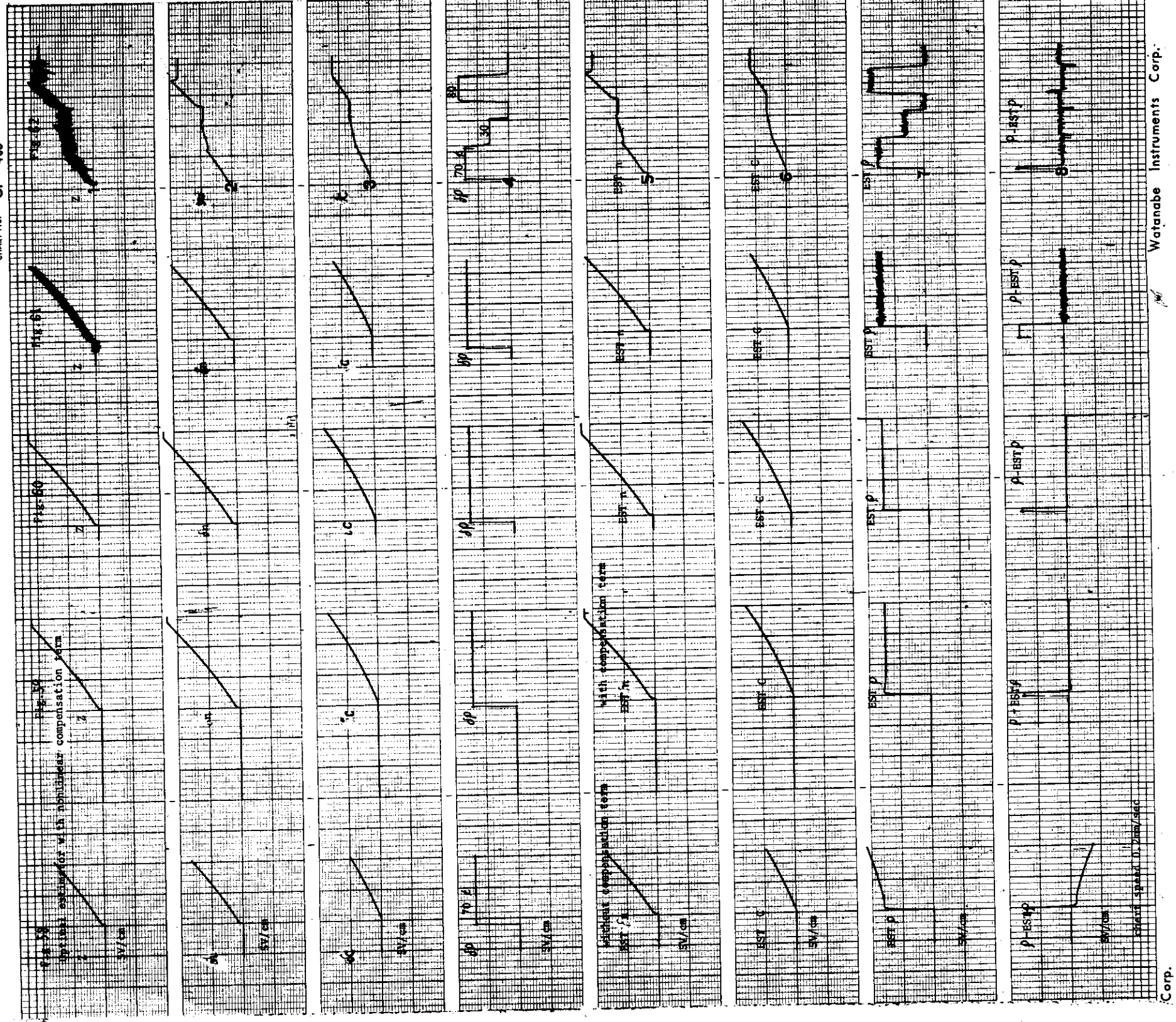


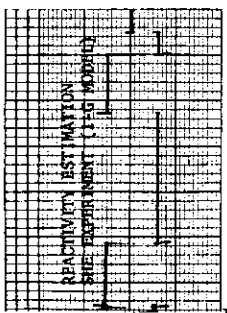
Instruments Corp.



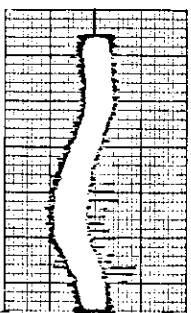
Watanabe Instruments



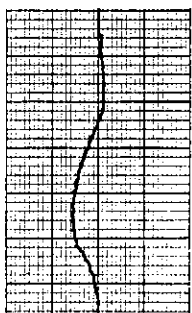




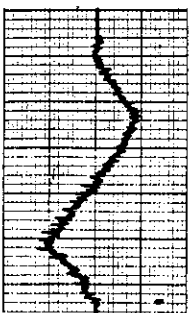
Z
2V/cm



EST δn
2V/cm



EST δp
5V/cm



EST δc
5V/cm

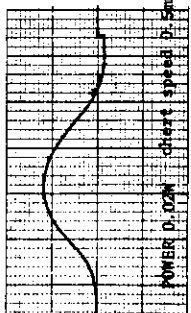
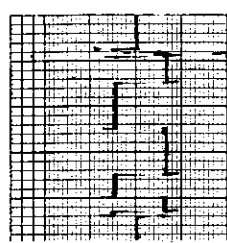


Fig. 63

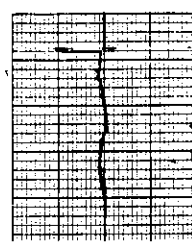
POWER 0.02W - Orbit speed 0.5cm/sec



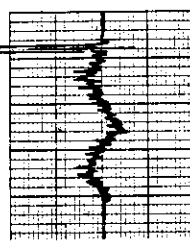
Z
2V/cm



EST δn
2V/cm



EST δp
5V/cm



EST δc
5V/cm

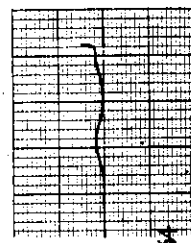
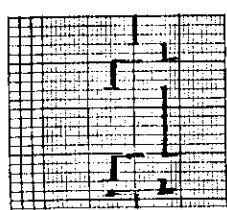
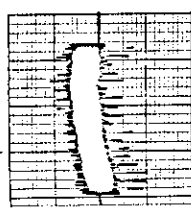


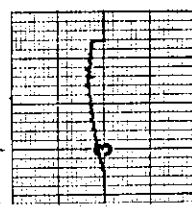
Fig. 64



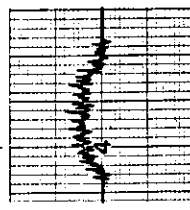
Z
2V/cm



EST δn
2V/cm



EST δp
5V/cm



EST δc
5V/cm

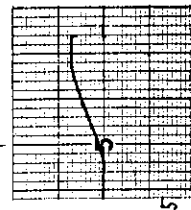
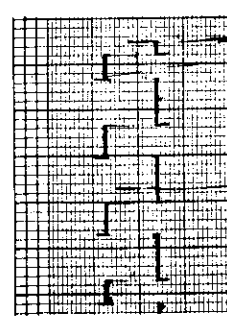
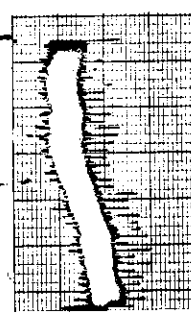


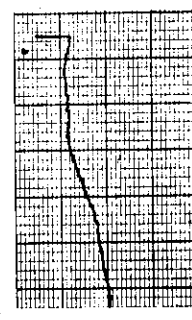
Fig. 65



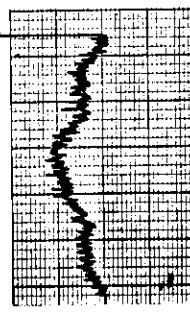
Z
2V/cm



EST δn
2V/cm



EST δp
5V/cm



EST δc
5V/cm

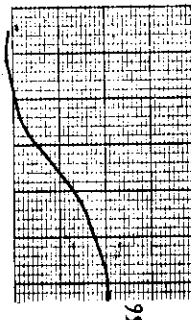
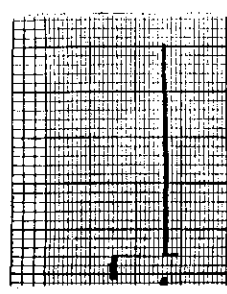


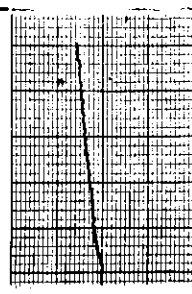
Fig. 66



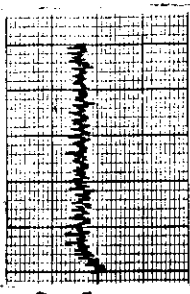
Z
2V/cm



EST δn
2V/cm



EST δp
5V/cm



EST δc
5V/cm

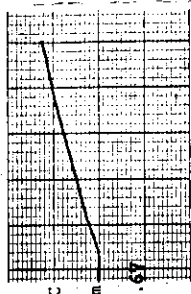
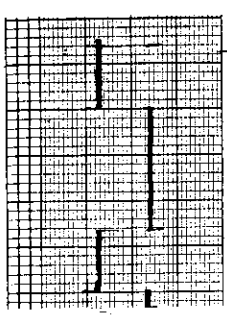
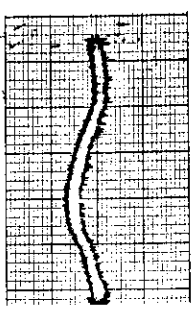


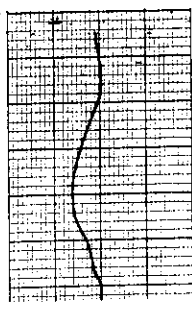
Fig. 67



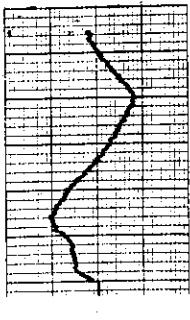
Z
2V/cm



EST δn
2V/cm



EST δp
5V/cm



EST δc
5V/cm

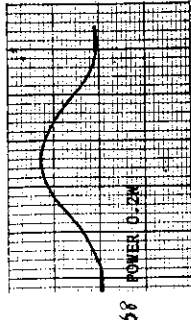
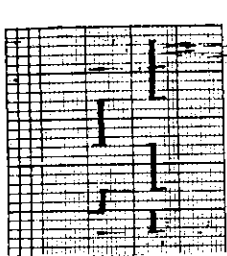
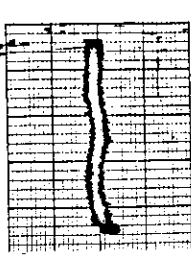


Fig. 68

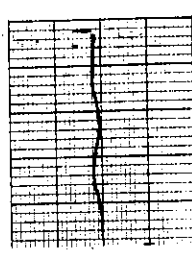
POWER 0.2W



Z
2V/cm



EST δn
2V/cm



EST δp
5V/cm



EST δc
5V/cm

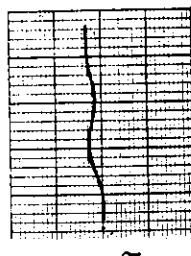
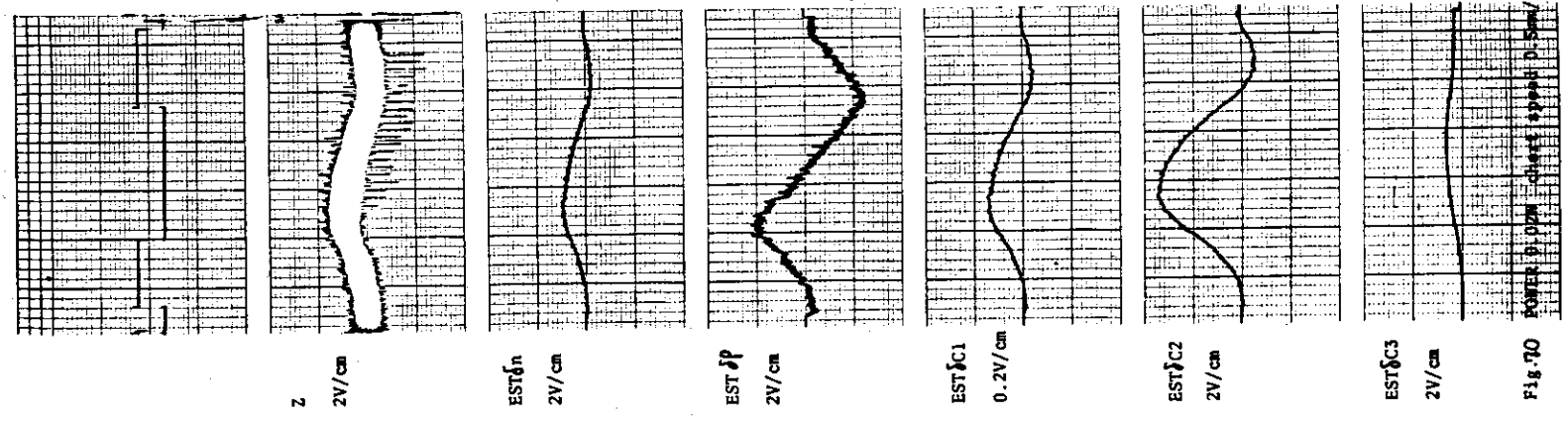
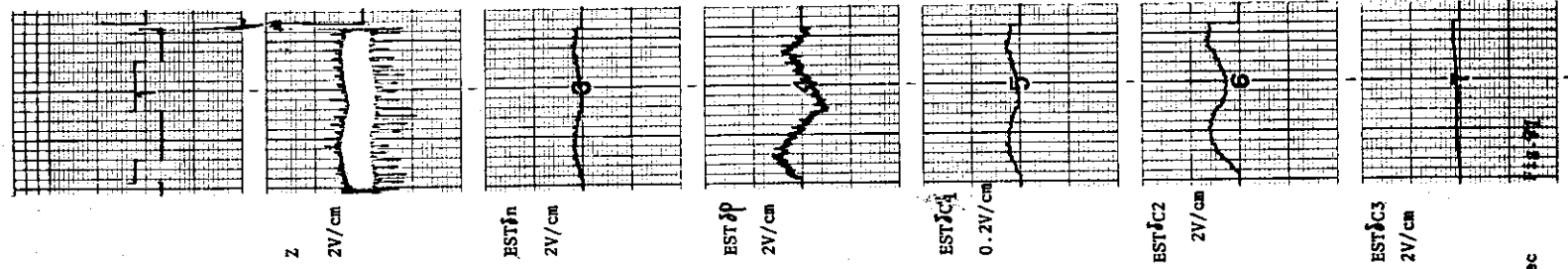
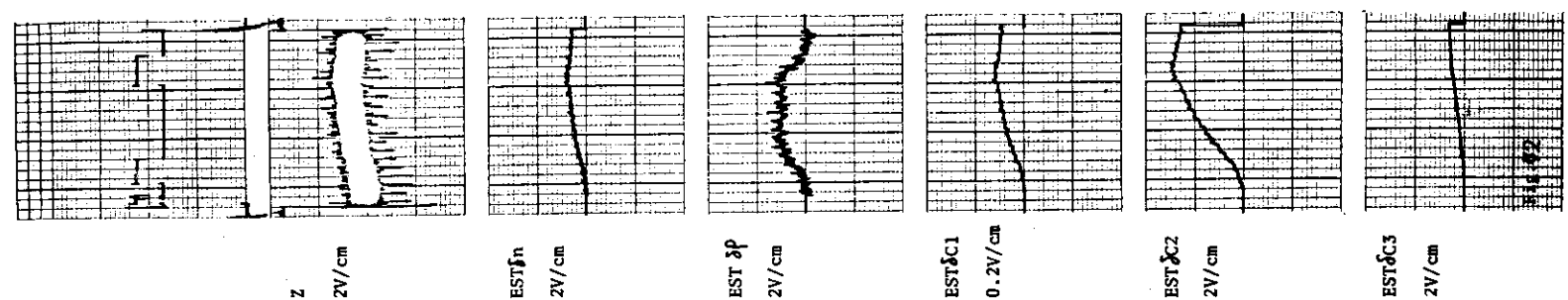
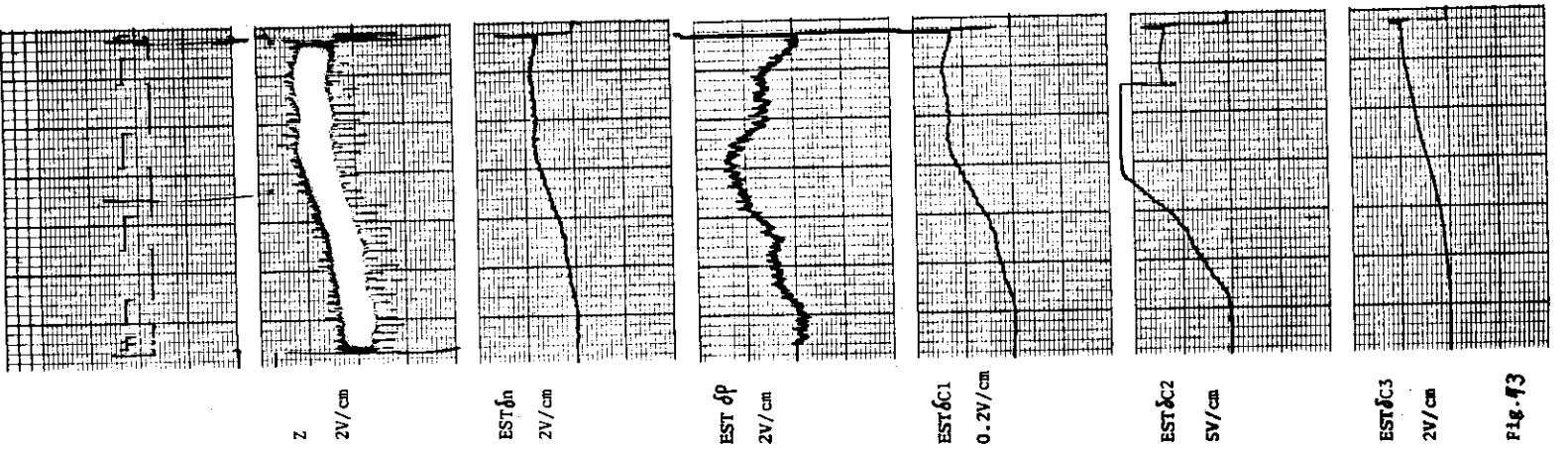
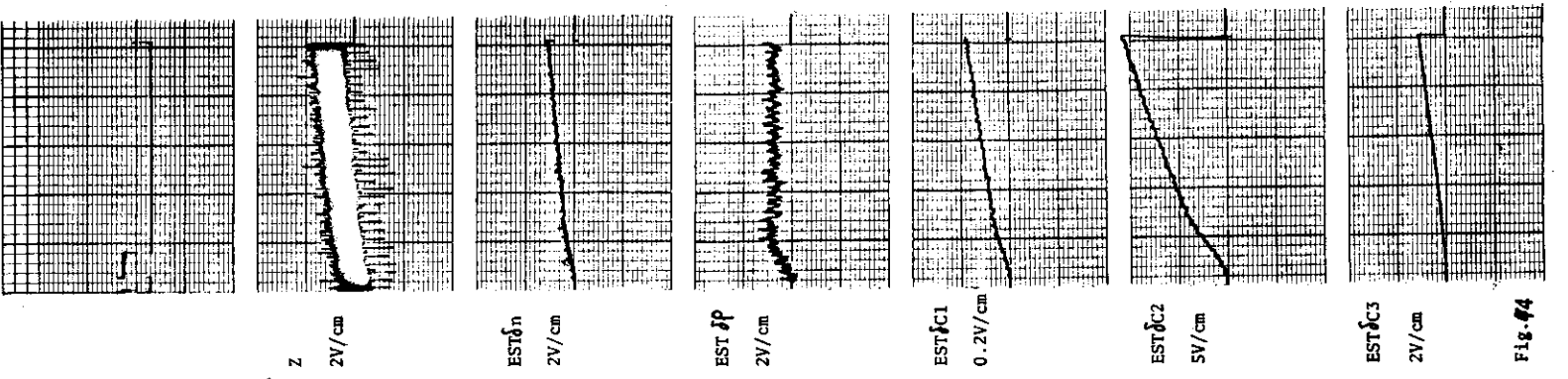
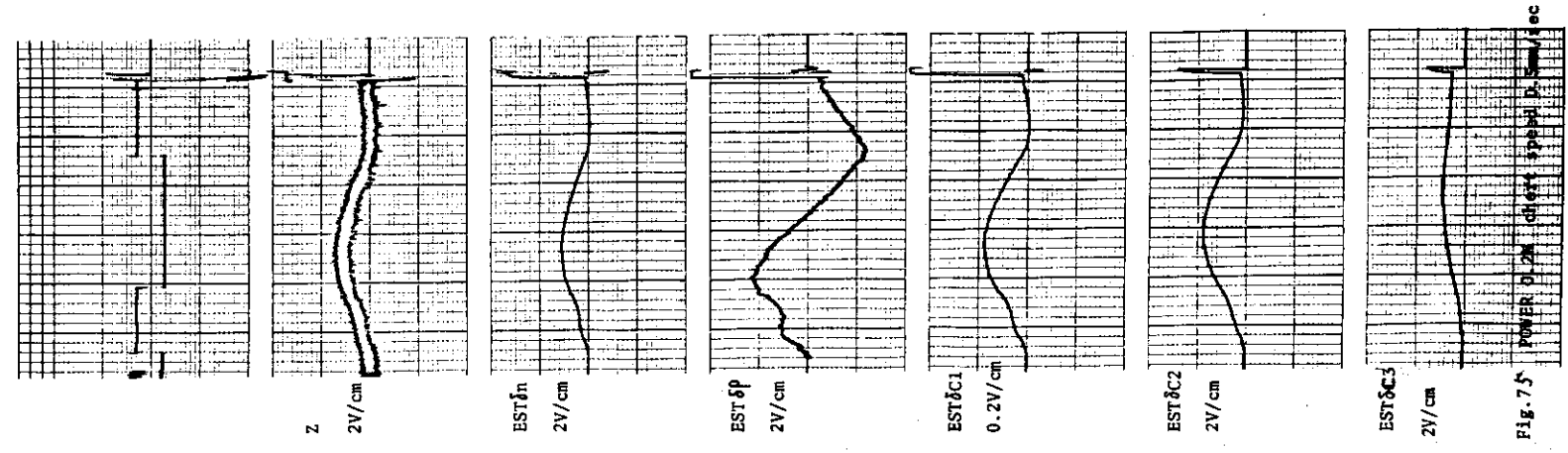
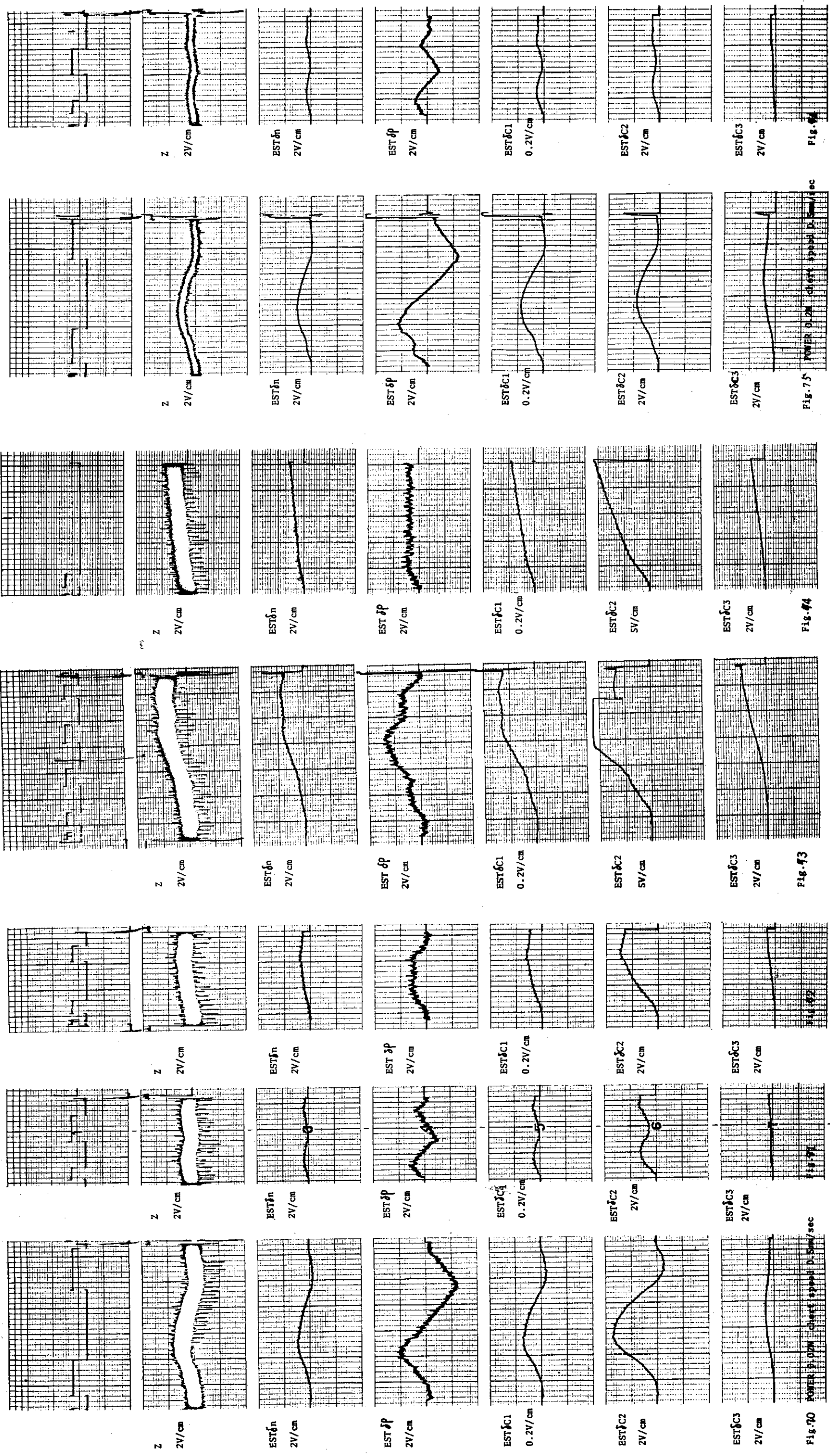


Fig. 69



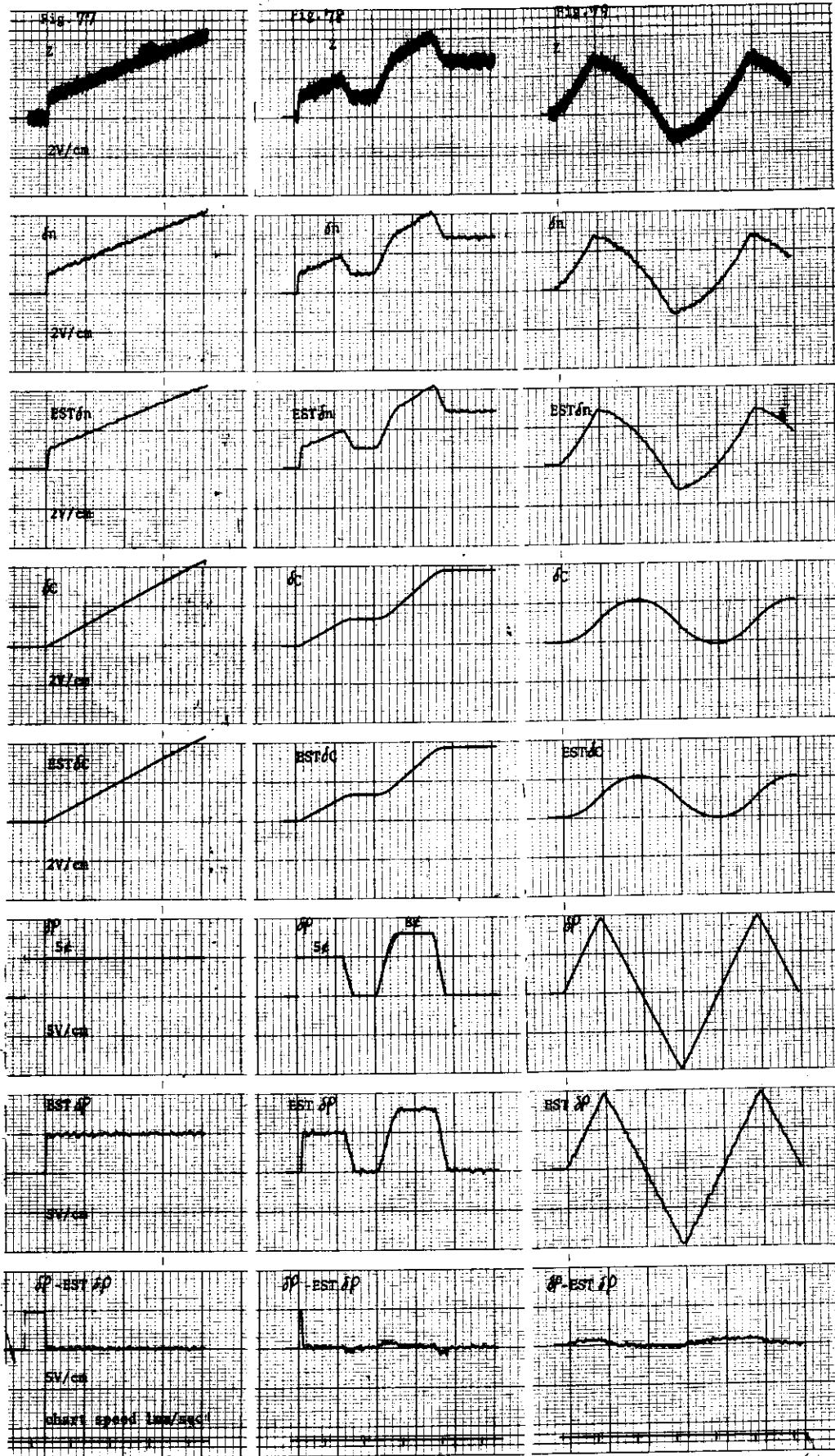
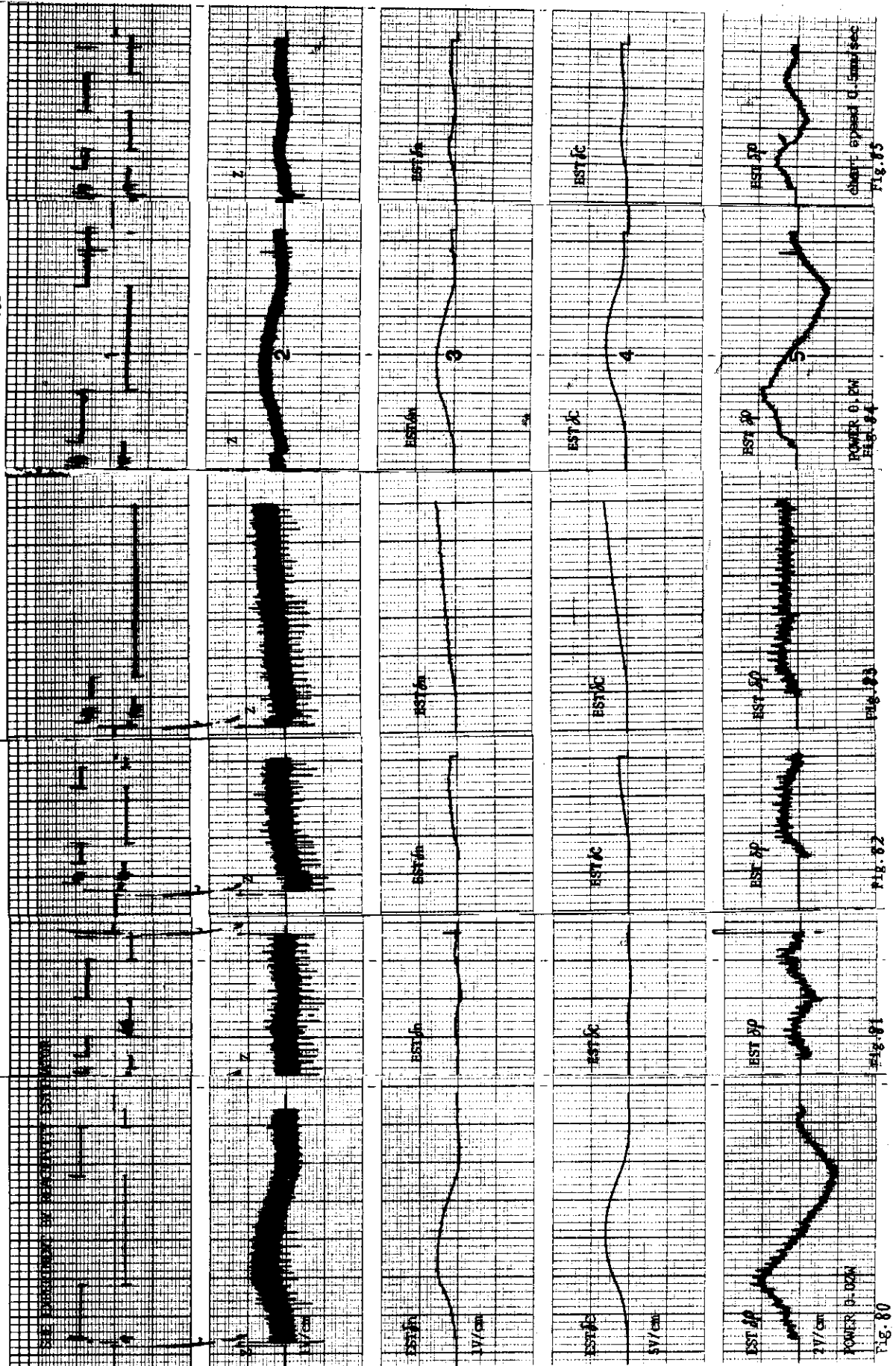
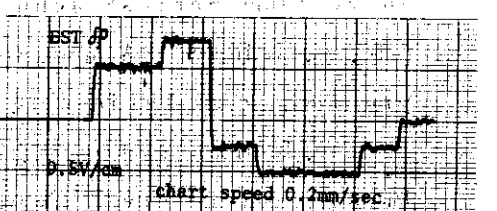
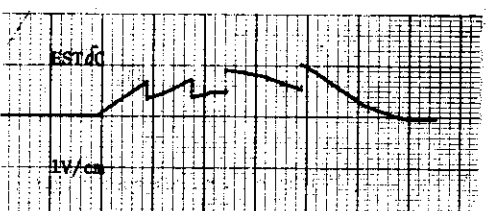
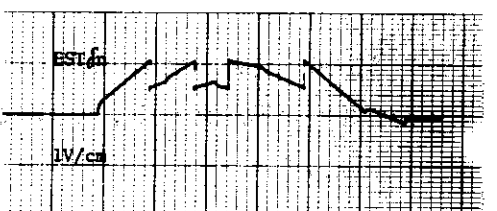
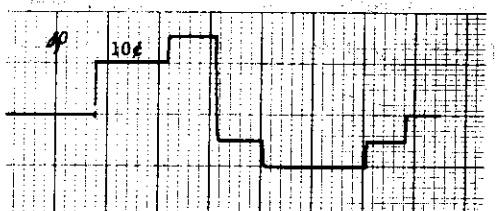
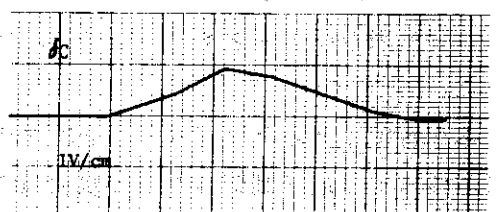
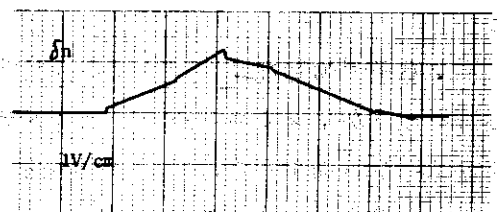
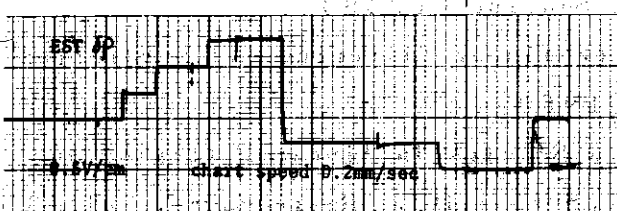
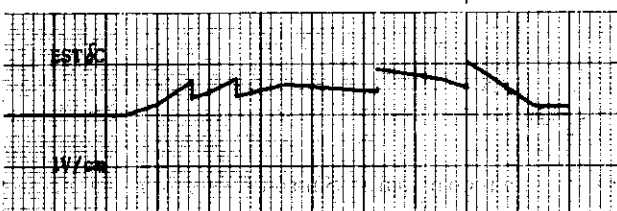
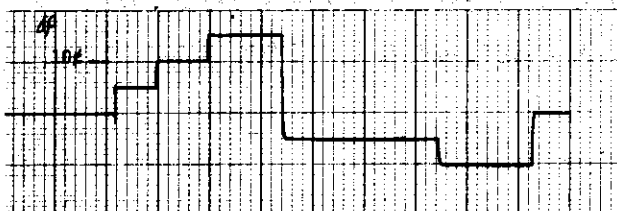
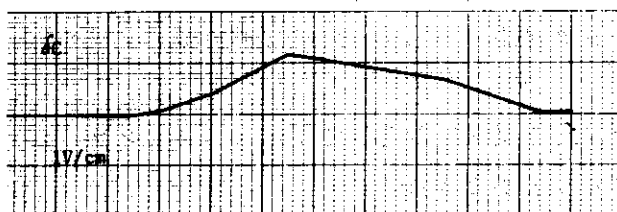
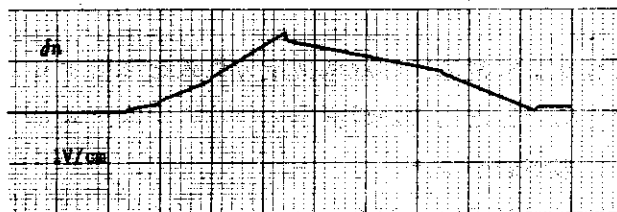
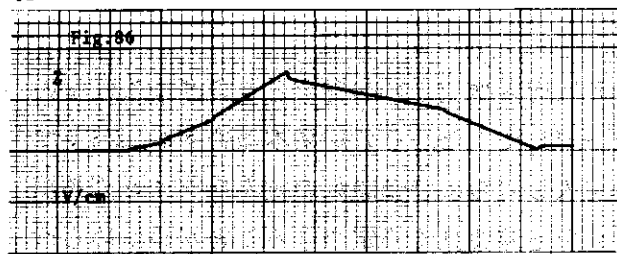


CHART No. OP-408

CHART



08



7. 結 論

筆者らは最適推定理論の原子炉への応用として「反応度推定」の問題をとりあげ、これを実用化するという観点から最適推定過程の諸特性を研究してきた。その結果本報告 § 4, § 5, で検討した様に、反応度推定項に不確定要素 $u(t)$ を導入しさらに評価関数の重みをゲイン調整項として調節することにより、任意に変化する反応度を応答性良く推定できることが確かめられた。

又、原子炉動特性は実際には非線型特性をしており、厳密には非線型推定方程式を導出する必要があるが、シミュレーションスタディによつて検討した様に線型推定方程式にシステムの非線型項を付加するだけで非線型特性が補償できる事がわかった。

これらの点をふまえて § 6 では在来方式と同程度に容易に実現できる反応度推定器を設計しこれが従来の原子炉シミュレーターにフィードバック回路を付加するだけで実現できる事を示した。

本報告にまとめた反応度推定器はアナログ回路による反応度計として、あるいはオンライン計算機による最適制御のための状態推定に実用することができる。

ここで述べた推定の考え方は、原子炉動特性方程式に含まれるパラメータの推定、反応度フィードバック係数の推定等をはじめ他の問題にも幅広く応用可能なものである。

8. 謝 辞

本報告 § 5 にまとめた反応度推定の原子炉実験に際しては炉物理実験研究室の金子義彦氏をはじめ同研究室の黒川良右氏、原子炉制御研究室の臼井甫積氏の御協力を得た。ここに深く感謝の意を表します。

9. 参 考 文 献

- (1) N. Wiener, "Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series" John Wiley & Sons Inc (1949)
- (2) R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problem," J. Basic Eng. 82D (1960)
- (3) R. E. Kalman and R. S. Bucy "New Results in linear Filtering and Prediction Theory" Trans. ASME, Series D, J. Basic Engr., Vol 83 pp. 95~108, (1961)
- (4) D. M. Detchmندی and R. Sridhar "Sequential Estimation of States and Parameters in Noisy Nonlinear Dynamical Systems" Trans. ASME,

7. 結 論

筆者らは最適推定理論の原子炉への応用として「反応度推定」の問題をとりあげ、これを実用化するという観点から最適推定過程の諸特性を研究してきた。その結果本報告 §4, §5, で検討した様に、反応度推定項に不確定要素 $u(t)$ を導入しさらに評価関数の重みをゲイン調整項として調節することにより、任意に変化する反応度を応答性良く推定できることが確かめられた。

又、原子炉動特性は実際には非線型特性をしており、厳密には非線型推定方程式を導出する必要があるが、シミュレーションスタディによつて検討した様に線型推定方程式にシステムの非線型項を付加するだけで非線型特性が補償できる事がわかつた。

これらの点をふまえて §6 では在来方式と同程度に容易に実現できる反応度推定器を設計し、これが従来の原子炉シミュレーターにフィードバック回路を付加するだけで実現できる事を示した。

本報告にまとめた反応度推定器はアナログ回路による反応度計として、あるいはオンライン計算機による最適制御のための状態推定に実用することができる。

ここで述べた推定の考え方は、原子炉動特性方程式に含まれるパラメータの推定、反応度フィードバック係数の推定等をはじめ他の問題にも幅広く応用可能なものである。

8. 謝 辞

本報告 §5 にまとめた反応度推定の原子炉実験に際しては炉物理実験研究室の金子義彦氏をはじめ同研究室の黒川良右氏、原子炉制御研究室の臼井甫積氏の御協力を得た。ここに深く感謝の意を表します。

9. 参 考 文 献

- (1) N. Wiener, "Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series" John Wiley & Sons Inc (1949)
- (2) R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problem." J. Basic Eng. 82D (1960)
- (3) R. E. Kalman and R. S. Bucy "New Results in linear Filtering and Prediction Theory" Trans. ASME, Series D, J. Basic Engr., Vol 83 pp. 95~108, (1961)
- (4) D. M. Detchmندی and R. Sridhar "Sequential Estimation of States and Parameters in Noisy Nonlinear Dynamical Systems" Trans. ASME,

7. 結 論

筆者らは最適推定理論の原子炉への応用として「反応度推定」の問題をとりあげ、これを実用化するという観点から最適推定過程の諸特性を研究してきた。その結果本報告 §4, §5, で検討した様に、反応度推定項に不確定要素 $u(t)$ を導入しさらに評価関数の重みをゲイン調整項として調節することにより、任意に変化する反応度を応答性良く推定できることが確かめられた。

又、原子炉動特性は実際には非線型特性をしており、厳密には非線型推定方程式を導出する必要があるが、シミュレーションスタディによつて検討した様に線型推定方程式にシステムの非線型項を付加するだけで非線型特性が補償できる事がわかつた。

これらの点をふまえて §6 では在来方式と同程度に容易に実現できる反応度推定器を設計し、これが従来の原子炉シミュレーターにフィードバック回路を付加するだけで実現できる事を示した。

本報告にまとめた反応度推定器はアナログ回路による反応度計として、あるいはオンライン計算機による最適制御のための状態推定に実用することができる。

ここで述べた推定の考え方は、原子炉動特性方程式に含まれるパラメータの推定、反応度フィードバック係数の推定等をはじめ他の問題にも幅広く応用可能なものである。

8. 謝 辞

本報告 §5 にまとめた反応度推定の原子炉実験に際しては炉物理実験研究室の金子義彦氏をはじめ同研究室の黒川良右氏、原子炉制御研究室の臼井甫積氏の御協力を得た。ここに深く感謝の意を表します。

9. 参 考 文 献

- (1) N. Wiener, "Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series" John Wiley & Sons Inc (1949)
- (2) R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problem." J. Basic Eng. 82D (1960)
- (3) R. E. Kalman and R. S. Bucy "New Results in linear Filtering and Prediction Theory" Trans. ASME, Series D, J. Basic Engr., Vol 83 pp. 95~108, (1961)
- (4) D. M. Detchmندی and R. Sridhar "Sequential Estimation of States and Parameters in Noisy Nonlinear Dynamical Systems" Trans. ASME,

- Journ. of Basic Engi., Vol. 88D, pp. 362~368 April, (1966)
- (5) H. E. Rauch, F. Tung and C. T. Striebel "Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems" AIAA Jour., Vol. 3, No. 8, pp. 1445~1450. Aug. (1965)
 - (6) H. W. Sorenson, "Kalman Filtering Technique" Adv. in Control Systems Vol. 3, pp. 219~292, (1966)
 - (7) R. C. K. Lee "Optimal control, estimation and identification" Research Monograph. N. 28 The M. I. T. Press. (1964)
 - (8) A. P. Sage "Optimum Systems Control" Prentice-Hall Inc. (1968)
 - (9) A. E. Bryson and Y. C. Ho, "Applied Optimal Control" Blaisdell Publishing Comp. (1969)
 - (10) 篠原, 尾熊, "状態変数の概念を使った原子炉内部状態の最適推定法" JAERI-memo 4146 (1970.10)
 - (11) 篠原, 尾熊, "原子炉動的反応度の最適推定" JAERI-memo 4335 (1971.2)
 - (12) B. H. Swanick and D. Graupe "Analysis of on-line identification and control of nuclear reactor." J. of the British Nuclear Energy Society. Vol. 7, No. 1 (1968)
 - (13) J. C. Venerus and T. E. Block "Estimation of the Dynamic Reactivity Using Digital Kalman Filter" N. S. E. 40, 199~205 (1970.)
 - (14) S. H. Kyong, "Optimal Estimation of Spatial Power Profile from Detector Readings." Trans. of A. N. S vol 11 pp 230~232. (1968)
 - (15) M. A. Hassan and M. S. Azer, "On-line Estimation of Reactor States and Parameters from Noisy Measurement." IFAC symposium on the Control of Distributed parameter Systems. (1971.6)
 - (16) A. P. Sage and G. W. Masters "Identification and Modeling of Nuclear Reactors" IEEE Trans. on Nuclear Science. pp 279~285. (1967.2)
 - (17) N. Suda and S. Sirai "Estimation of Reactor Parameters by Optimal Filtering Method" Jour. of N. S. T. (1971.8)
 - (18) R. S. Bucy and K. D. Senne, "Digital Synthesis of Nonlinear Filters" Automatica Vol. 7, pp 287~298, (1971)
 - (19) A. Kirchenmayer, "Delayed-Neutron-Groups Number Reduction". N. S. E. , 8, (1960)

付 録 (I)

Invariant imbedding

Invariant imbedding は二点境界値問題の解法に有効な方法としてしばしば使われるテクニックである。Invariant imbedding の由来は最初の2点境界値問題をもつと一般的なクラスの1点境界値問題に imbedding することから来ており、初期条件（あるいは終端条件）が以下に導出する偏微分方程式 (Invariant imbedding equation) を解くことによつて完全に表現される。従つて2点境界値問題を初期値問題に変換して解くことが可能となる。

今、次の様な2点境界値問題を考える。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \lambda(t), t) \quad (1)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(t), \lambda(t), t) \quad (2)$$

但し、 $\mathbf{X}(t)$, $\lambda(t)$ は n 次元ベクトルである。

ここで境界条件は次の様に置かれているとする。

$$\lambda(t_0) = \mathbf{a}, \quad \lambda(t_f) = \mathbf{b} \quad (3)$$

この2点境界値問題に対し、Invariant imbedding equation を導出する。

今、 λ の終端条件をもつと一般的なクラスの終端条件に imbedding する。すなわち、

$$\lambda(t_f) = \mathbf{b} \rightarrow \lambda(t_f) = \mathbf{C} \quad (4)$$

とし、さらに $\mathbf{X}(t_f)$ と $\mathbf{C}$ は次の関係式で結ばれているものとする。

$$\mathbf{X}(t_f) = \mathbf{r}(\mathbf{C}, t_f) \quad (5)$$

(5)式に於いて、 $t_f \rightarrow t_f + \Delta t_f$, $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}$ とすると、

$$\mathbf{X}(t_f + \Delta t_f) = \mathbf{X}(t_f) + \dot{\mathbf{X}}(t_f) \Delta t_f + O(\Delta^2)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}, t_f + \Delta t_f) = \mathbf{r}(\mathbf{C}, t_f) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{C}} \Delta \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_f} \Delta t_f + O(\Delta^2)$$

(5)より

$$\mathbf{X}(t_f) + \dot{\mathbf{X}}(t_f) \Delta t_f \approx \mathbf{r}(\mathbf{C}, t_f) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{C}} \Delta \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_f} \Delta t_f$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{C}, t_f)}{\partial \mathbf{C}} \Delta \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{C}, t_f)}{\partial t_f} \Delta t_f = \dot{\mathbf{X}}(t_f) \Delta t_f \quad (6)$$

(4)式に於いて

$$\lambda(t_f + \Delta t_f) = \lambda(t_f) + \dot{\lambda}(t_f) \Delta t_f + O(\Delta^2) = \mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}$$

$$\dot{\lambda}(t_f) \Delta t_f \approx \Delta \mathbf{C} \quad (7)$$

(7)を(6)に代入して

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{C}, t_f)}{\partial \mathbf{C}} \dot{\lambda}(t_f) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{C}, t_f)}{\partial t_f} = \mathbf{X}(t_f)$$

これに(1), (2)式を代入して

$$\frac{\partial r(C, t_f)}{\partial t_f} + \frac{\partial r(C, t_f)}{\partial C} g(r, C, t_f) = f(r, C, t_f) \quad (8)$$

この微分方程式を解く事によつて境界条件を決定することができる。(8)式を **Invariant imbedding equation** と云う。

付 録 (II)

Bayesian Approach による線型システムに対する最適推定方程式の導出
線型システム及び観測系を次の様に離散値系で定義する。

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{T}_k \mathbf{W}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{X}_{k+1} + \mathbf{V}_{k+1} \quad (2)$$

ここで $\mathbf{A}_k$ はシステムの遷移マトリックスを表わし, $\mathbf{W}_k, \mathbf{V}_k$ はシステム及び観測系に加わる雑音で次の様なモーメントを持つた白色ガウス雑音とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\mathbf{W}_k) = E(\mathbf{V}_k) = \mathbf{O} \\ \text{Cov}(\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_j) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}(\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_j) = \mathbf{R}_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}(\mathbf{W}_k, \mathbf{V}_j) = \mathbf{O} \end{array} \right. \quad \text{但し, } \delta_{kj} = \begin{cases} = 1 & k=j \\ = 0 & k \neq j \end{cases} \quad (3)$$

システムの状態変数 $\mathbf{X}_k$ に対する最適推定値を $\hat{\mathbf{X}}_k$ とし, 評価関数を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} J &= E[(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k)^T (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k)^T (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k) P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k \end{aligned} \quad (4)$$

但し, $\mathbf{Z}^k = \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_{k-1} \cdot \mathbf{Z}_{k-2} \cdots$ なる観測系列である。

この時評価関数は

$$\begin{aligned} J &= \hat{\mathbf{X}}_k^T \hat{\mathbf{X}}_k - 2 \hat{\mathbf{X}}_k^T \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k \\ &= (\hat{\mathbf{X}}_k - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k)^T (\hat{\mathbf{X}}_k - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k - (\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k)^T (\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k) \\ &= (\hat{\mathbf{X}}_k - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k)^T (\hat{\mathbf{X}}_k - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k) + \text{Variance} \end{aligned}$$

よつて J を最小ならしめる $\hat{\mathbf{X}}_k$ は

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) d\mathbf{X}_k \quad (6)$$

すなわち Bayes Approach による $\mathbf{X}_k$ の最適推定値 $\hat{\mathbf{X}}_k$ は $\mathbf{X}_k$ の観測値 $\mathbf{Z}^k$ が得られた下での条件付期待値を求める操作によつて決定される。

ここで

$$\hat{\mathbf{X}}_k = E(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k) \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} \triangleq \text{Cov}(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}^k)$$

として(1)~(3)をもとに $P(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}^{k+1})$ が求まれば次のステップ ($k+1$) での最適推定値 $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ を決定することができる。ベイズ・ルールを使つて

$$P(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}^{k+1}) = \frac{P(\mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{Z}^k)}{P(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{Z}^k)} = \frac{P(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}^k) P(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}^k)}{P(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{Z}^k)} \quad (8)$$

各密度関数は不規則過程がガウス雑音であるから、期待値と分散によつて完全に表現される。

(1), (3)より $P(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}^k)$ のモーメントは

$$\begin{cases} E(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}^k) = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_k \\ \text{Cov}(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}^k) = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{T}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{T}_k^T \triangleq \mathbf{P}_{k+1|k} \end{cases} \quad (9)$$

(2), (3)より $P(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}^k)$ のモーメントは

$$P(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}^k) = P(\mathbf{V}_{k+1} | \mathbf{J}) = P_v(\mathbf{Z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{X}_{k+1}) \quad (10)$$

$$\text{但し, } |\mathbf{J}| = \left| \frac{d\mathbf{Z}_{k+1}}{d\mathbf{V}_{k+1}} \right| = 1 \quad (11)$$

$$\therefore \begin{cases} E(\mathbf{Z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{X}_{k+1}) = \mathbf{0} \\ \text{Cov}(\mathbf{Z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{X}_{k+1}) = \mathbf{R}_k \end{cases} \quad (12)$$

(1), (2), (3)より $P(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{Z}^k)$ のモーメントは

$$\begin{cases} E(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{Z}^k) = \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_k \\ \text{Cov}(\mathbf{Z}_{k+1} | \mathbf{Z}^k) = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \end{cases} \quad (13)$$

(9), (12), (13)を(8)に代入して

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}^{k+1}) &= \text{Const} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \{ (\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_k)^T \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_k) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{Z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{X}_{k+1})^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{Z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{X}_{k+1}) \right] \end{aligned}$$

$$- (Z_{k+1} - H_k A_k \hat{X}_k)^T (H_k P_{k+1|k} H_k^T + R_k)^{-1} (Z_{k+1} - H_k A_k \hat{X}_k) \} \quad (14)$$

又, (7) 式より

$$P(X_{k+1}|Z^{k+1}) = \text{Const} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \{ (X_{k+1} - \hat{X}_{k+1})^T P_{k+1|k+1}^{-1} (X_{k+1} - \hat{X}_{k+1}) \} \right] \quad (15)$$

(14), (15) を比較して

$$\begin{cases} \hat{X}_{k+1} = A_k \hat{X}_k + P_{k+1|k} H_k^T (H_k P_{k+1|k} H_k^T + R_k)^{-1} (Z_{k+1} - H_k A_k \hat{X}_k) \\ P_{k+1|k+1}^{-1} = P_{k+1|k}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \\ P_{k+1|k} = A_k P_k A_k^T + T_k Q_k T_k^T \end{cases} \quad (16)$$

但し, $\hat{X}_0, P_0|_0$ は与えられているものとする。

(16) 式を変形して

$$\hat{X}_{k+1} = A_k \hat{X}_k + P_{k+1|k+1} H_k^T R_k^{-1} (Z_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_{k+1}) \quad (17-1)$$

$$P_{k+1|k+1}^{-1} = P_{k+1|k}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (17-2)$$

$$P_{k+1|k} = A_k P_k A_k^T + T_k Q_k T_k^T \quad (17-3)$$

連続系への変換

(1), (2) 式を連続系へ変換する。今, $k = t_k, \Delta = t_{k+1} - t_k$ とすると(1)式は

$$\frac{X_{k+1} - X_k}{\Delta} = \frac{A_k - I}{\Delta} X_k + \frac{T_k}{\Delta} W_k$$

ここで $\Delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{X_{k+1} - X_k}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{X(t_{k+1}) - X(t_k)}{\Delta} = \dot{X}(t)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{A_k - I}{\Delta} = A(t) \quad (18)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{T_k}{\Delta} = G(t) \quad (19)$$

とすると

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + G(t)W(t) \quad (20)$$

又, (2) 式は

$$Z(t) = H(t)X(t) + V(t) \quad (21)$$

次に (17-1) 式を変形して

$$\frac{\hat{\mathbf{X}}_{k+1} - \hat{\mathbf{X}}_k}{\Delta} = \frac{\mathbf{A}_k - \mathbf{I}}{\Delta} \hat{\mathbf{X}}_k + \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k \Delta)^{-1} (\mathbf{Z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{X}}_{k+1})$$

ここで $\Delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{P}(t) \quad (22)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \mathbf{R}_k = \mathbf{R}(t) \quad (23)$$

とすると

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}^{-1}(t) [\mathbf{Z}(t) - \mathbf{H}(t) \hat{\mathbf{X}}(t)] \quad (24)$$

又, (17-3), (18) より

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = (\mathbf{A}(t_k) \Delta + \mathbf{I}) \mathbf{P}_{k|k} (\mathbf{A}(t_k) \Delta + \mathbf{I})^T + \frac{\mathbf{T}_k}{\Delta} \Delta \mathbf{Q}_k \frac{\mathbf{T}_k}{\Delta} \Delta \quad (25)$$

ここで

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}_k}{\Delta} = \mathbf{G}(t) \quad (26)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}(t) \quad (27)$$

とすると (25) 式は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A}(t_k) \Delta \mathbf{P}_{k|k} + \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T(t_k) \Delta + \mathbf{P}_{k|k} + \mathbf{A}(t_k) \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T(t_k) \Delta^2 \\ &\quad + \mathbf{G}(t_k) \mathbf{Q}(t_k) \mathbf{G}^T(t_k) \Delta \end{aligned} \quad (28)$$

又, (17-3) より

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k+1|k}$$

これに (28) を代入して

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}_{k+1|k+1} - \mathbf{P}_{k|k}}{\Delta} &= \mathbf{A}(t_k) \mathbf{P}_{k|k} + \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T(t_k) + \mathbf{A}(t_k) \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T(t_k) \Delta \\ &\quad + \mathbf{G}(t_k) \mathbf{Q}(t_k) \mathbf{G}^T(t_k) - \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_k^T (\Delta \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \Delta)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \end{aligned}$$

$\Delta \rightarrow 0$ とすると

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) \quad (29)$$

故に連続系(20), (21)に対する最適推定方程式は

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = A(t)\hat{X}(t) + P(t)H^T(t)R^{-1}(t)[Z(t) - H(t)\hat{X}(t)] & (30-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) + G(t)Q(t)G^T(t) & (30-2) \end{cases}$$

但し, $\hat{X}(t_0), P(t_0)$ は与えられているものとする。

(30-1)式はシステム方程式の解を第1次近似とし, これに観測実現値 $Z(t)$ と推定解の差に最適な重みを掛けた値で修正を加えて各時刻の最適推定解を求める形になっている。(30-2)式はこの時の最適な重みを決定するリカッチ型のマトリックス微分方程式であり, (7)式から明らかな様に $P(t)$ は各時刻の状態変数の推定誤差についての分散を表わしている。