

JAERI-M
4814

有限円柱発熱体の熱変形
～ J. Veederによる方法のプログラミングに
ついて～

1972年5月

原山 泰雄・泉 文男・藤田 操

有限円柱発熱体の熱変形

日本原子力研究所東海研究所燃料工学部

原山 泰雄・泉 文男・藤田 操

(1972年4月17日受理)

燃料ペレットはその直径に比較して高さが小さいため熱変形において端面の効果が表れ、燃料棒の被覆管に Ridging と呼ばれる現象をおこす。

端面の効果を評価するため、J.Veederの方法による(AECL-2660)有限円柱発熱体の熱変形を求めるプログラムを作成した。

主な計算上の仮定は、次の如きものである。

- a) 有限円柱の全体について弾性体の法則が成立するものとする。
- b) 有限円柱の外表面に、外力は作用しないものとする。

この報告は、上記の方法によるプログラミングについてまとめたものである。

Thermo-elastic Expansion of Finite Cylinders

Yasuo HARAYAMA, Fumio IZUMI and Misao FUJITA

Div. of Nuclear Fuel Research, Tokai, JAERI

(Received 17 April 1972)

In fuel pellet, the height is small, compared with the diameter, so that the end effects are quite appreciable.

These effects contribute significantly to the kind of cladding deformation known as circumferential ridging.

In order to evaluate the end effects, a program was prepared to obtain the thermal expansion of finite cylinders (fuel pellets), based on J. Veeder's procedure (AECL-2660).

The assumptions made in programming are as follows:

- a) thermo-elastic equations are applicable throughout the volume of cylinder, and
- b) no external forces are operative at the cylinder surfaces.

The coding method, inputting and outputting for the program (called the DEFORM) are described.

目 次

記 号	1
はじめに	2
1. J. Veeder による方法の概要	3
1.1 まえおき	3
1.2 計算上の仮定	3
1.3 計算方法	3
2. プログラミングの方法	5
2.1 係数間の関係式	5
2.2 ひずみエネルギーを求める方法	8
2.3 最小ひずみエネルギーを求める方法	9
2.4 計算順序	9
3. 計算例, その他	11
3.1 Input, 内蔵の数値, その他	11
3.2 Output について	12
3.3 計 算 例	14
謝 辞	18
References	18
Appendix :	
A 熱応力の一般関係式	19
B ひずみエネルギー	21
C 二重積分の近似法	23
D 最小ひずみエネルギーを求める方法の補足	28

Notation

$D_0 =$ 有限円柱の直径 ($=2R_0$)

$E =$ Young's Modulus

$$E' = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$G =$ Modulus of Rigidity, ($=\frac{E}{2(1+\nu)}$)

$g = R_0/H_0$

$2H_0 =$ Cylinder length.

$k = \nu/(1-\nu)$ ($=\nu'$)

$$m = \frac{2\nu}{1-2\nu}$$

$p = (1+\nu)/(1-\nu)$

$R = \rho^2 - 1$

$R_0 =$ 有限円柱の半径

$r, z =$ Cylindrical coordinates

T } Temperature,
 T_0 } $T - T_s = T_0(1 - \rho^2)$
 T_s }

$Z = \xi^2 - 1$

$u, w =$ displacement of any point in r, z directions.

$V_0 =$ total strain energy

$\alpha =$ linear coefficient of thermal expansion.

$\epsilon =$ strain

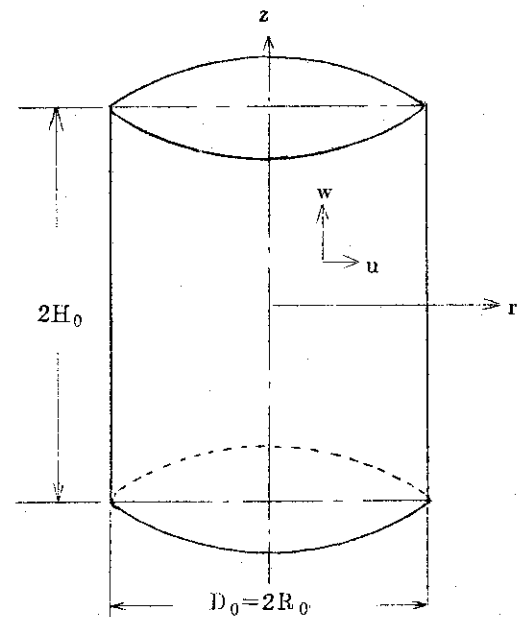
$\sigma =$ stress

$\rho, \xi =$ dimensionless coordinates, r/R_0 and z/H_0

$\gamma =$ shear strain

$\tau =$ shear stress

$\nu =$ Poisson's ratio



はじめに

この報告は、J.Veederによる有限円柱の熱変形の近似解法に関し計算機用プログラムの作成をまとめたものである。J.VeederのReport, AECL-2660には、プログラムの大筋について記述されているが、プログラムの詳細については一切ふれられていない。また計算例も少く（ペレット高さ/ペレット直径の比0.5, 1.0, 1.5, 2.0）使用上不便なためプログラムを作成した。

AECL-2660(Thermo - Elastic Expansion of Finite Cylinders by J.Veeder, January 1967)は燃料棒のRidging現象を説明するため、燃料ペレットの熱変形を解析したものである。¹⁾

このようなペレットの熱変形の解析は、最近、相次いで報告されている。^{4), 5)}

AECL-2660ではFlat End PelletとHollow Cylinder Pelletの両方について解析を行つているが、この報告ではFlat End Pelletの熱変形のみを取りあげた。

1 J. Veederによる方法の概要

1.1 まえおき

半径方向に温度分布を持つ円柱の応力、歪の問題において、通常のテキストは、ほとんどどうすいディスク（平面応力）に関するものと非常に長い円柱の端面から離れた横断面（平面歪）に関する解を記載している。

円柱の長さがその直径に比較しうるようになったとき端面の効果は無視しえなくなり、上記の解は正しくない。そのような場合、元来平面であつた面はひずみ、曲面となる。（対称面は除く）

この報告は、 $T_r(\rho) = T_0(1-\rho^2) + T_s$ の形の半径方向に放物形の温度分布を持つ、ちがつた直径と高さの比の有限円柱の自由熱膨脹を考察する。この問題を考える理由は、発熱体である UO_2 ペレット（有限円柱）の熱変形が円周上の Ridging として知られる被覆管変形をおこす原因の一つと考えられるからである。

1.2 計算上の仮定

2-1) 有限円柱の熱変形を求める計算において次の仮定を設ける。

- a) 有限円柱の全体にわたつて弾性体の式が適用できるものとする。
- b) 物性値は異方性を持たずかつ温度によつて変化しないものとする。

2-2) 温度分布

発熱体燃料 Pellet 内の温度分布は、次式の如き放物線形で与えられるものとする。

$$T_r(\rho) = T_s + T_0(1-\rho^2)$$

ここで、 T_s は Pellet 表面温度、 T_0 は Pellet 表面と中心との温度差であり、 $\rho = r/R_0$ である。

熱膨脹は、二つの項の和として表わされるが、第1の項による膨脹は等温膨脹で、応力を生ずるものではない。第2項によつて燃料 Pellet に不均一な温度分布にもとづく熱変形と内部応力が発生する。

1.3 計算方法

3-1) 有限円柱を考える。その半径を R_0 、高さを $2H_0$ とし、坐標の原点を中心にする。その結果、軸方向には対称となり、有限円柱の各点、表面における変位は、この坐標において巾級数により、全く一般的に表すことができる。

$$u = R_0 \rho [a_{00} + a_{01} R + a_{10} Z + a_{02} R^2 + a_{11} RZ + a_{20} Z^2 + \dots] \quad (11)$$

$$w = R_0 \xi [b_{00} + b_{01} R + b_{10} Z + b_{02} R^2 + b_{11} RZ + b_{20} Z^2 + \dots] \quad (12)$$

ここで、 $R = \rho^2 - 1$ 、 $Z = \xi^2 - 1$ 、 $\rho = r/R_0$ 、 $\xi = h/H_0$ である。

この式は、変位函数が次の必要な対称性を自動的に満足するように選ばれた。

$$u = \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 0$$

$$w = \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 0$$

実際上は、上記(11)と(12)式のある項から先は切す。この解においては、上記(11)、(12)式の最初の6項、のみを採用した。

こうして採用された合計12個の係数は、1)境界条件と2)最小ひずみエネルギー法の二つによつて求められる。

3-2) 境界条件

円柱の端面と円柱の表面における境界条件を次の通りとする。

端面における境界条件：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 \quad \text{より,} \\ g \frac{\partial w}{\partial \xi} + k \left(\frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) &= p R_0 \alpha T_0 (1 - \rho^2) \\ \tau_{rz} &= 0 \quad \text{より,} \\ g \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{at } \xi = 1 \quad \text{(円柱の端面)} \quad (13)$$

円柱の表面における境界条件：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0 \quad \text{より,} \\ kg \frac{\partial w}{\partial \xi} + k \frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} &= 0 \\ \tau_{zr} &= 0 \quad \text{より,} \\ g \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{at } \rho = 1 \quad \text{(円柱の表面)} \quad (14)$$

ここで、 $g = R_0 / H_0$ 、 $p = (1 + \nu) / (1 - \nu)$ 、 $k = \nu / (1 - \nu)$ とする。

3-3) 上記の(13)、(14)式に変位函数 u 、 w の式の初めの6項のみを採用して代入すると、12個の係数の間に10個の線形方程式をうるが、そのうちの1つは独立ではない。

その結果9個の独立な方程式が定まる。残りの3個の係数は未定となる。未定の3個の係数は、それらの係数に関する円柱の Total Strain Energy が最小になるように定められる。

すなわち、

$$\delta \left(\frac{V_0}{\pi R_0^2 H_0 G} \right) = \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[m e^2 + 2 (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \gamma_{rz}^2 - 2(3m+2)e\alpha T + 3(3m+2)\alpha^2 T^2 \right] \rho d\rho d\xi \quad (15)$$

ここで、 $m = \frac{2\nu}{1-\nu}$ 、 $e = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z$ である。

2 プログラミングの方法

2.1 係数間の関係式

変位について、

$$u = R_0 \rho [a_{00} + a_{01} R + a_{10} Z + a_{02} R^2 + a_{11} R Z + a_{20} Z^2] \quad (21)$$

$$w = R_0 \xi [b_{00} + b_{01} R + b_{10} Z + b_{02} R^2 + b_{11} R Z + b_{20} Z^2] \quad (22)$$

と仮定したのであるから（ただし、 $\rho = r/R_0$ 、 $\xi = z/H_0$ 、 $R = \rho^2 - 1$ 、 $Z = \xi^2 - 1$ ）、これよりまず歪を求める（Appendix - A参照）。

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad (23)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{u}{\rho} \quad (24)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (25)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (26)$$

である。これを熱応力の一般関係式に代入し、 σ_r 、 σ_z 、 τ_{rz} を求めると、

$$\begin{aligned} \sigma_r &= E' (\epsilon_r + \nu' \epsilon_\theta + \nu' \epsilon_z) - \frac{E \cdot \alpha T}{1 - 2\nu} \\ &= E' \left(\frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \nu' \cdot \frac{1}{R_0} \cdot \frac{u}{\rho} + \nu' \cdot \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \frac{E \cdot \alpha T}{1 - 2\nu} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E' (\epsilon_z + \nu' \epsilon_r + \nu' \epsilon_\theta) - \frac{E \cdot \alpha T}{1 - 2\nu} \\ &= E' \left(\frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \nu' \cdot \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \nu' \cdot \frac{1}{R_0} \cdot \frac{u}{\rho} \right) - \frac{E \cdot \alpha T}{1 - 2\nu} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= G \gamma_{rz} \\ &= G \left(\frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

$$\text{ただし、} E' = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

である。次にこの応力の式を使つて境界条件を表すと、次の通りになる。

1) 端面における境界条件：

$$\sigma_z = 0 \quad \text{より、}$$

$$\sigma_z = E' \left(\frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \nu' \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \nu' \frac{1}{R_0} \cdot \frac{u}{\rho} \right) - \frac{E \cdot \alpha T}{1-2\nu} = 0$$

$g = R_0 / H_0$, $\nu' = k$, $p = (1+\nu)/(1-\nu)$, $T = T_0 (1-\rho^2)$ において,

$$g \frac{\partial w}{\partial \xi} + k \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} \right) = p R_0 \alpha T_0 (1-\rho^2) \quad (210)$$

が求まる。次に $\tau_{rz} = 0$ より,

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$$

$$g \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad (211)$$

が求まる。

2) 円柱表面における境界条件:

$$\sigma_r = 0 \text{ より,}$$

$$\sigma_r = E' \left(\frac{1}{R_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \nu' \frac{1}{R_0} \cdot \frac{u}{\rho} + \nu' \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \frac{E \cdot \alpha T}{1-2\nu} = 0$$

ここで, $T = T_0 (1-\rho^2)$ であり, 表面では $\rho = 1$ であるから $T = 0$ となる。再び 1) と同様に $g = R_0 / H_0$, $\nu' = k$ において,

$$k g \frac{\partial w}{\partial \xi} + k \frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 \quad (212)$$

となる。

$\tau_{zr} = 0$ については 1) と等しく,

$$g \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad (213)$$

が求まる。

係数間の関係式を求めるため, まず (21), (22) 式を微分し, $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial w}{\partial \xi}$, $\frac{\partial w}{\partial \rho}$ を求め

る。

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = R_0 [a_{00} + a_{01} (3\rho^2 - 1) + a_{10} Z + a_{02} (5\rho^2 - 1) R + a_{11} Z (3\rho^2 - 1) + a_{20} Z^2] \quad (214)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = R_0 \rho [a_{10} \cdot 2\xi + a_{11} 2\xi \cdot R + 4 a_{20} \xi Z] \quad (215)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = R_0 [b_{00} + b_{01} R + b_{10} (3\xi^2 - 1) + b_{02} R^2 + b_{11} R (3\xi^2 - 1) + b_{20} (5\xi^2 - 1) Z] \quad (216)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = R_0 \xi [b_{01} \cdot 2\rho + b_{02} \cdot 4\rho R + b_{11} \cdot 2\rho \cdot Z] \quad (217)$$

(216), (214), (21) 式を (210) 式に代入し, $\xi = 1$, $Z = 0$ (端面) として整理すると,

$$g(b_{00} + 2b_{10}) + k(2a_{00} + 2a_{02}) \\ + R\{g(b_{01} + 2b_{11}) + k(a_{01} + 3a_{01} + 4a_{02})\} \\ + R^2\{gb_{02} + k(a_{02} + 5a_{02})\} = -p\alpha T_0 R$$

となる。この式が ρ , R のいかんにかかわらず成立するためには、未定係数法より、

$$g(b_{00} + 2b_{10}) + k(2a_{00} + 2a_{01}) = 0 \quad (218)$$

$$g(b_{01} + 2b_{11}) + 4k(a_{01} + a_{02}) = -p\alpha T_0 \quad (219)$$

$$gb_{02} + 6ka_{02} = 0 \quad (220)$$

でなければならない。同様にして(211)式より、

$$\rho\{2ga_{10} - 2a_{11}g + 2b_{01} - 4b_{02}\} \\ + \rho^3\{2ga_{11} + 4b_{02}\} = 0$$

が求まり、係数の間の関係として

$$g(a_{10} - a_{11}) + (b_{01} - 2b_{02}) = 0 \quad (221)$$

$$ga_{11} + 2b_{02} = 0 \quad (222)$$

が求まる。

また、(212)式に(216)(214)(21)式を代入し、 $\rho = 1, R = 0$ (円柱表面)として整理すると、

$$kg\{b_{00} + b_{10}(3Z + 2) + b_{20}(5Z^2 + 4Z)\} + k(a_{00} + a_{10}Z + a_{20}Z^2) \\ + (a_{00} + 2a_{01} + a_{10}Z + a_{11} \cdot 2Z + a_{20}Z^2) = 0$$

となる。この式が Z のいかんにかかわらず成立するためには、未定係数法により

$$k\{g(b_{00} + 2b_{10}) + a_{00}\} + (a_{00} + 2a_{01}) = 0 \quad (223)$$

$$k\{g(3b_{10} + 4b_{20}) + a_{10}\} + 2a_{11} + a_{10} = 0 \quad (224)$$

$$k(g \cdot 5b_{20} + a_{20}) + a_{20} = 0 \quad (225)$$

でなければならない。同様にして(213)式より

$$g(2a_{10} + 4a_{20}Z) + 2b_{01} + 2b_{11} \cdot Z = 0$$

が求まり、係数の間の関係式は

$$g(a_{10} - 2a_{20}) + (b_{01} - 2b_{11}) = 0 \quad (226)$$

$$2ga_{20} + b_{11} = 0 \quad (227)$$

である。

(218) から(227)式のうち(221)と(226)式を加えたものは、

$$(ga_{11} + 2b_{02}) - (2ga_{20} + 2b_{11}) = 0$$

となり、これは(222), (227)式と同じである。すなわち、12個の係数につき境界条件より10個の式がえられたが1つの式は独立ではなく、9個の式しかえられない。従つて12の係数に対し9個の式しかないので残りの3係数は未定となる。

いま、未知の係数を a_{10}, a_{02}, a_{20} として他の係数をこれら a_{10}, a_{02}, a_{20} でもつて表すと、各係数間の関係式は Table 1 の通りである。

Table 1 Correlation among the 12 coefficients.

a_{00}	$-\frac{2(k+1)}{(2k+1)} a_{01}$ <p>or</p> $=\frac{2(k+1)}{2k+1} a_{02} - \frac{g^2(k+1)}{2k(2k+1)} a_{10}$ $-\frac{2g^2(k+1)}{k(2k+1)} a_{20} + \frac{p(k+1)}{2k(2k+1)} \alpha T_0$	b_{00}	$\left\{ \frac{2g}{2k+1} - \frac{8}{15} \cdot \frac{k+1}{kg} \right\} a_{20} + \left\{ \frac{2}{3} \frac{k+1}{kg} \right.$ $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{(2k+1)} \left. \right\} a_{10}$ $+ \left\{ \frac{16}{g^3} - \frac{2k}{g(2k+1)} \right\} a_{02}$ $- \frac{p}{2g(2k+1)} \alpha T_0$
a_{01}	$-a_{02} + \frac{g^2}{4k} a_{10} + \frac{g^2}{k} a_{20}$ $-\frac{p}{4k} \alpha T_0$	b_{01}	$-g a_{10}$
a_{10}	a_{10}	b_{10}	$\frac{4}{15} \cdot \frac{k+1}{kg} a_{20} - \frac{1}{3} \cdot \frac{k+1}{kg} a_{10}$ $-\frac{8}{g^3} a_{02}$
a_{02}	a_{02}	b_{02}	$-\frac{6k}{g} a_{02}$
a_{11}	$\frac{12k}{g^2} a_{02}$	b_{11}	$-2g a_{20}$
a_{20}	a_{20}	b_{20}	$-\frac{k+1}{5kg} a_{20}$
<p>注 1) a_{10}, a_{02}, a_{20} を独立な係数とする。</p> <p>2) $g=R_0/H_0$</p> <p>3) $k=\nu/(1-\nu), p=(1+\nu)/(1-\nu)$</p>			

2.2 ひずみエネルギーを求める方法

Total Strain Energy の最小値を求める方法は、次節で述べるとして、Total Strain Energy を求めるための数値解析の方法について説明する。

Total Strain Energy (V_0) は、

$$\frac{V_0}{\pi R_0^2 H_0 G} = \int_0^1 \int_0^1 \left[m e^2 + 2(\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \gamma_{rz}^2 \right. \\ \left. - 2(3m+2)e\alpha T + 3(3m+2)a^2 T^2 \right] \rho d\rho d\xi \quad (228)$$

である。ここで、 $e=\epsilon_r+\epsilon_\theta+\epsilon_z$, $G=E/2(1+\nu)$, $m=2\nu/(1-\nu)$, $T=T_0(1-\rho^2)$ である。

上記(228)式の Total Strain Energy の導出については Appendix-B を参照されたい。

上記(228)式は、2重積分である。 V_0 の値を計算機によつて求めるためには、何らかの数値解析法を用い2重積分を行わなければならない。次元の積分法については通常の数値解析のテキストに説明されているが、2重積分の方法についてはあまり見掛けない。そこで、 ρ 、 ξ に関する二次曲面で近似する方法を採つた。詳細については Appendix-C を参照されたい。実際の計算プログラムにおいては、定数となる(228)式〔 〕内の最後の項は削除する。

2.3 最小ひずみエネルギーを求める方法

Total Strain Energy が最小となる3個の係数の値を求める方法は次の通りである。

2.2節で説明した様に仮定した変位の式における12個の係数のうち9個は境界条件より求められるが、残りの3個の係数は未定となつている。

(23)~(26) および (214)~(217) 式でわかる通り $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{rz}$ は a_{00}, \dots, b_{20} の係数に関して線形結合である。そして、(228)式の ϵ_r 等最大の指数は2で、 $\epsilon_r^2, \epsilon_\theta^2, \epsilon_z^2, \epsilon_{rz}^2$ になつている。

これより、いまだれか3個の係数を変数と考え、他の9個の係数は3個の係数をもとに2.1で求めた関係式を用い、その値を定め、Total Strain Energy の式(228)に代入したとすれば、Total Strain Energy は3個の係数を変数とした三元の二次式として表現される。

いま、3個の係数を X, Y, Z とすると Total Strain Energy は、次のように表わしうる。

$$V_0(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DXY + EXZ + FYZ \\ + GX + HY + IZ + J \quad (229)$$

ここで $A \sim J$ は定数である。

この V_0 を最小にする X, Y, Z は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial X} &= 2AX + DY + EZ + G = 0 \\ \frac{\partial V_0}{\partial Y} &= 2BY + DX + FZ + H = 0 \\ \frac{\partial V_0}{\partial Z} &= 2CZ + EX + FY + I = 0 \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

を満足しなければならない。(229)式の係数 $A \sim J$ は、 X, Y, Z に既知の数値を入れ、これに対応する Total Strain Energy $V_0(X, Y, Z)$ が2.2の方法で与えられるので、 $V_0(X, Y, Z)$ の値を使つて求めることができる (Appendix-D 参照)。

こうして求めた $A \sim J$ の値を使つて(230)式を満足する X, Y, Z すなわち未定の3個の係数を求めることができる。

2.4 計算の順序

計算の順序は次の通りである。

1) 2.3にもとづき3個の係数((21), (22)式の係数, $a_{00} \sim a_{20}, b_{00} \sim b_{20}$ のうちの3係数)に任意の値を設定する。

- 2) 2.1, Table 1 によつて他の 9 個の係数の値を定める。
- 3) 12 個の係数をもとに 2.2 の方法によつてひずみエネルギーを求める。
- 4) 3 個の係数の値を変更して 1)~3) をくりかえす。この作業を 10 回行い, (2.29) 式の係数 A~J を求める (Appendix-D 参照)。
- 5) (2.30) 式によつて最小ひずみエネルギーを与える 3 係数の値を決定し, 他の 9 係数についても最終的な値を算出する。
- 6) (21), (22) 式によつて変位, (23)~(26) 式によつて歪, さらに (27)~(29) によつて応力を計算する。

3 計算例その他

3.1 Input, 内蔵の数値, その他

第1章, 第2章までに述べた方法にもとずき, プログラムが作成された。そのプログラムを以下DEFORMと呼ぶことにする。

1) Input

DEFORM-Code において, 本質的に与えるべき Input は, ただ2個の値にすぎない。すなわち, 有限円柱の直径と高さの比およびポアソン比である。

ただし, Code 自体においては, 各ケースのタイトルになるタイトルカード3枚を用意している。Input Card Format を Table 2 に示す。

Table 2 Input Format

Card 1. ~ 3.

Symbol format

col. 1 ~ 80 4A20

Card 4.

col. 1 ~ 6	(F6.0)	有限円柱の直径 (D_0)
col. 7 ~ 12	(F6.0)	有限円柱の高さ ($2H_0$)
col. 13 ~ 18	(F6.0)	ポアソン比 (ν)
col. 19 ~ 24	(F6.0)	P 1
col. 25 ~ 30	(F6.0)	P 2
col. 31 ~ 36	(I6)	KEY……本文参照

Card 5.

col. 1 ~ 4 AAAA Stop card

数ケースの Input card の最後に入れる。

Table中, P 1, P 2 は, ポアソン比 ν を $\nu = P1/P2$ の形でも Input できるようにしたものである。このとき col. 13~18の ν は $P1/P2$ のポアソン比におきかわる。

また, KEYは0あるいは1で, 0ならば2.2の(228)式の積分をAppendix-Cの方法による収斂計算を行うものであり, 1ならば, 別に用意したSubroutine((228)式の積分を直接求める)で計算する。

2) 内蔵の数値

3個の未定な係数を求めるに際し, (2.29)式の係数A~Jを定めるための, (X, Y, Z)の数値の組は, 次の10組とした。

(0, 0, 0)	($\Delta x, \Delta y, 0$)
($\Delta x, 0, 0$)	(0, $\Delta y, \Delta z$)
(0, $\Delta y, 0$)	($\Delta x, 0, \Delta z$)

(0, 0, Δz)
 (2Δx, 0, 0)
 (0, 2Δy, 0)
 (0, 0, 2Δz)

ただし、 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.5$ とした。

Strain Energyを求める(2.28)式の2重積分の最大くりかえし回数(N), および収束判定条件(EPS)は、 $N=8, EPS=10^{-5}$ である。これは、テストランの結果より決定した。

3個の未知な係数を最終的に求めるために(2.30)式を解く方法には Sweep out 法⁶⁾を採用した。

3) Subroutine および計算順序

DEFORM内の Subroutine name と計算の流れを Fig.1 に示す。

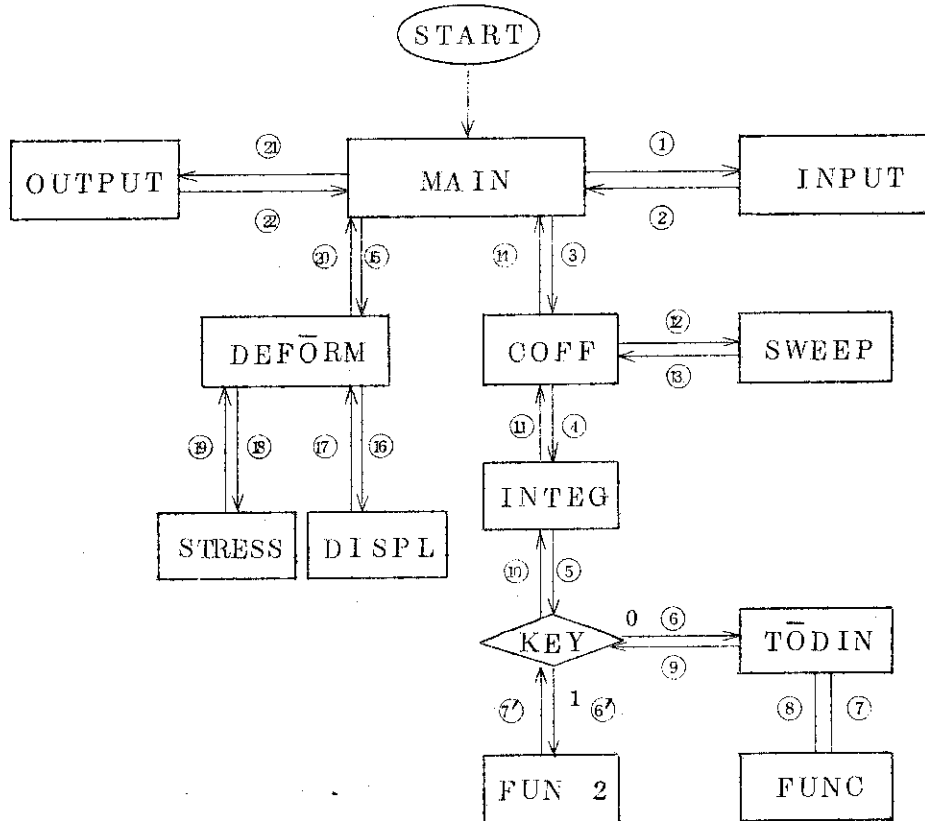


Fig.1 Flow Chart of DEFÖRM

note. ○内の数は計算順序を示す。

3.2 Outputについて

DEFÖRMのOutputは、

- (1) (21), (22) 式の12個の係数。
- (2) Fig.2 に示す有限円柱四半分のメッシュ11×11点における半径方向および軸方向の変位。

(3) メッシュ 11×11 点における応力 (半径, 円周, 軸方向) および歪 (半径, 円周, 軸方向)。

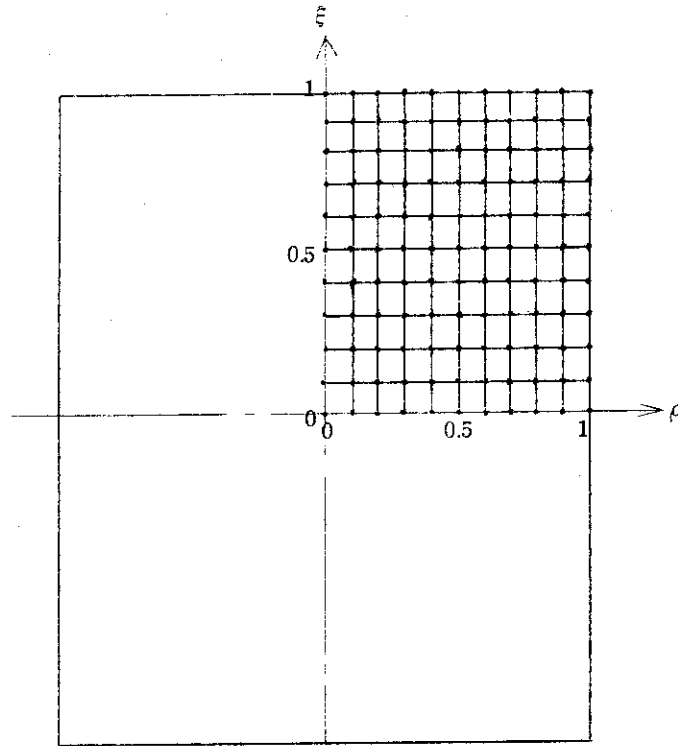


Fig. 2

の3種である。

1) 計算において(21), (22)式の係数はすべて αT_0 との比, すなわち, $a_{00}/\alpha T_0, a_{01}/\alpha T_0, a_{02}/\alpha T_0, \dots, b_{00}/\alpha T_0, b_{01}/\alpha T_0, \dots$ の形で計算される。Outputの係数の値も同様に αT_0 で除した値である。

2) 変位の式(21)は, 係数が αT_0 との比で計算されるので,

$$\begin{aligned} u &= R_0 \rho \{ a_{00} + a_{01} R + a_{10} Z + a_{02} R^2 + a_{11} RZ + a_{20} Z^2 \} \\ &= \alpha T R_0 \rho \{ a'_{00} + a'_{01} R + a'_{10} Z + a'_{02} R^2 + a'_{11} RZ + a'_{20} Z^2 \} \\ &(\because a'_{00} = a_{00}/\alpha T_0, \dots) \end{aligned}$$

となる。したがってCode内では u を $\alpha T_0 R_0$ で割って無次元化した数値 $u' = u / (\alpha T_0 R_0)$ で計算される。

軸方向変位(22)式についても同様でCode内では $w' = w / (\alpha T_0 R_0)$ の形で計算される。しかしながら, 変位のOutputは, 次の形で表示される。

$$\text{半径方向変位: } u'' = \frac{U}{\alpha T_0 D_0}$$

($D_0 = 2 R_0$, D_0 は円柱の直径)

軸方向変位： $w' = \frac{w}{\alpha T_0 (2H_0)}$

したがって、実際の変位を計算する場合には、 $\alpha T_0 D_0$ (半径方向)あるいは $\alpha T_0 (2H_0)$ (軸方向)の値を乗ずることが必要である。

3) 歪については、

$$\epsilon'_r = \frac{\epsilon_r}{\alpha T_0}, \quad \epsilon'_\theta = \frac{\epsilon_\theta}{\alpha T_0}, \quad \epsilon'_z = \frac{\epsilon_z}{\alpha T_0}$$

の形でOutputされている。

同様に応力については、 $\sigma'_r = \sigma_r / (\alpha T_0 E)$, $\sigma'_\theta = \sigma_\theta / (\alpha T_0 E)$, $\sigma'_z = \sigma_z / (\alpha T_0 E)$ の形である。

したがって、実際の歪、応力の計算にさいしては、 αT_0 (歪), $\alpha T_0 E$ (応力)を乗ずる必要がある。

3.2 計算例

ポアソン比 $\nu=1/3$ で、円柱の高さと直径の比($2H_0/D_0$)を0.5, 1.0, 1.5, 2.0としたときの変位のDEFORMによる計算結果をFig. 3, 4, 5, 6に示す。

図は有限円柱の四半分を半径方向、軸方向につき10等分した点における変位を表す。細線で表す直角に交っているものは元々の形状である。太線で示すものが変位で、熱変形の形状を表している。単位は、Outputの数値と等しく半径方向 $u' = \frac{u}{\alpha T_0 D_0}$, 軸方向 $w' = \frac{w}{\alpha T_0 (2H_0)}$

である。

displacement = $\alpha \cdot \Delta T \cdot (D_0 \text{ or } H_0) \cdot (\text{values shown in figure})$

where, α : linear coefficient of thermal exp.

ΔT : temperature difference between the centre and surface.

D_0 : pellet diameter.

H_0 : pellet height.

notes : ———, pellet shape before thermal deformation.

—————, pellet shape after thermal deformation.

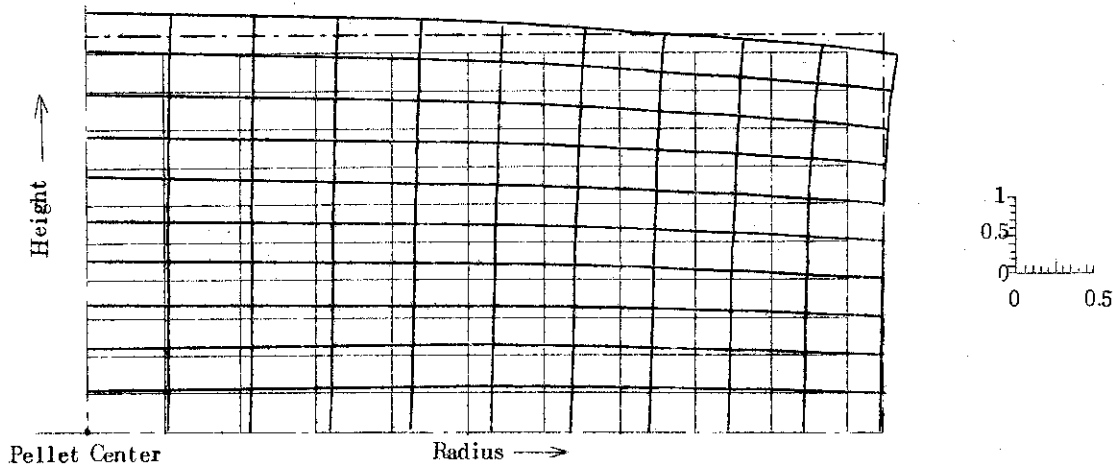


Fig. 3 Pellet Thermal Deformation. ($H/R=0.5$) Poisson Ratio= $1/3$

displacement = $\alpha \cdot \Delta T \cdot (D_0 \text{ or } H_0) \cdot (\text{values shown in figure})$

where, α : linear coefficient of thermal exp.

ΔT : temperature difference between the centre and surface.

D_0 : pellet diameter.

H_0 : pellet height.

notes : ———, pellet shape before thermal deformation.

————, pellet shape after thermal deformation.

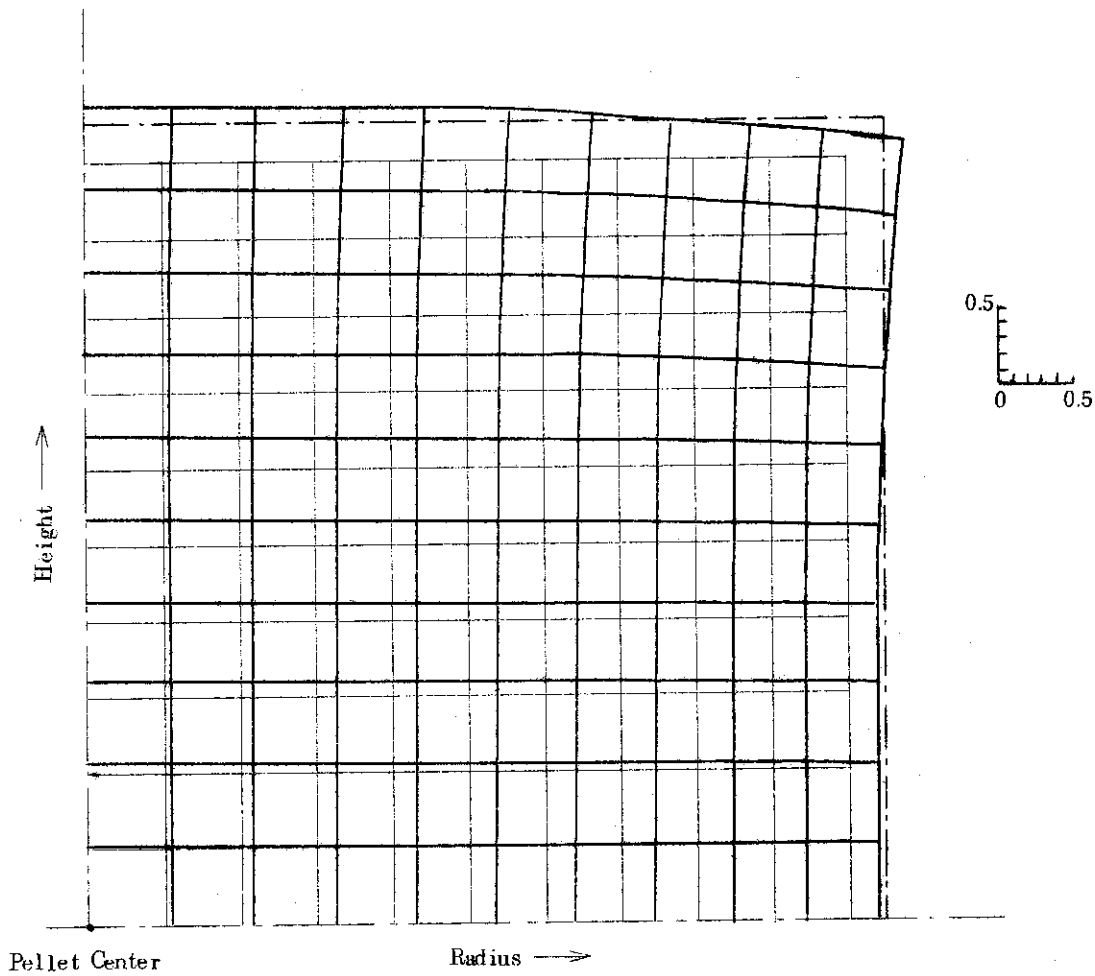


Fig.4 Pellet Thermal Deformation ($H/R=1$)

Poisson Ratio = $1/3$

displacement = $\alpha \cdot \Delta T \cdot (D_0 \text{ or } H_0) \cdot (\text{values shown in figure})$

where, α : linear coefficient of thermal exp.

ΔT : temperature difference between centre and surface.

D_0 : pellet diameter.

H_0 : pellet height.

notes : ———, pellet shape before thermal deformation.

————, pellet shape after thermal deformation.

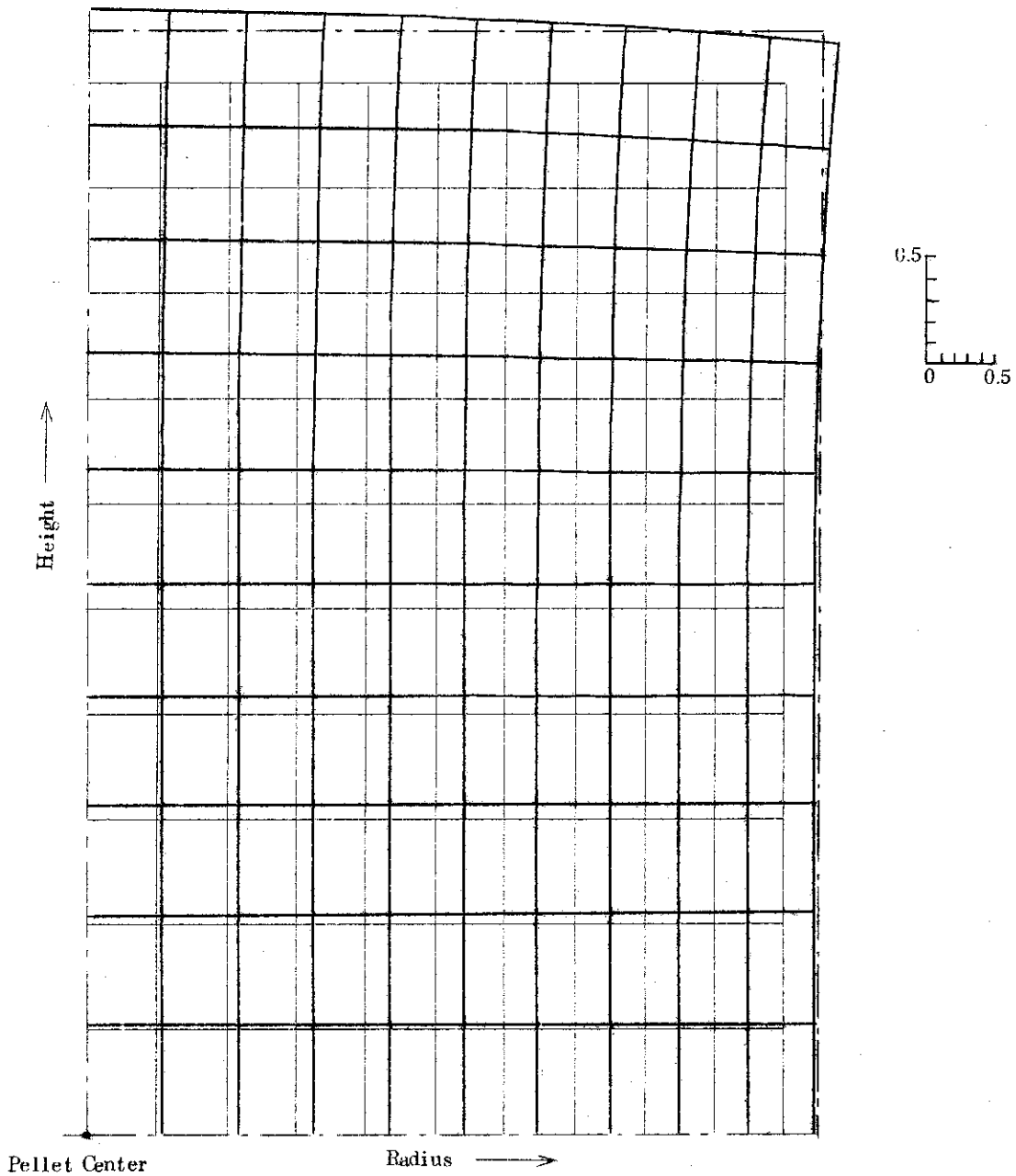


Fig. 5 Pellet Thermal Deformation ($H/R=1.5$)

Poisson Ratio = $1/3$

notes : ———, pellet shape before thermal deformation.
————, pellet shape after thermal deformation.

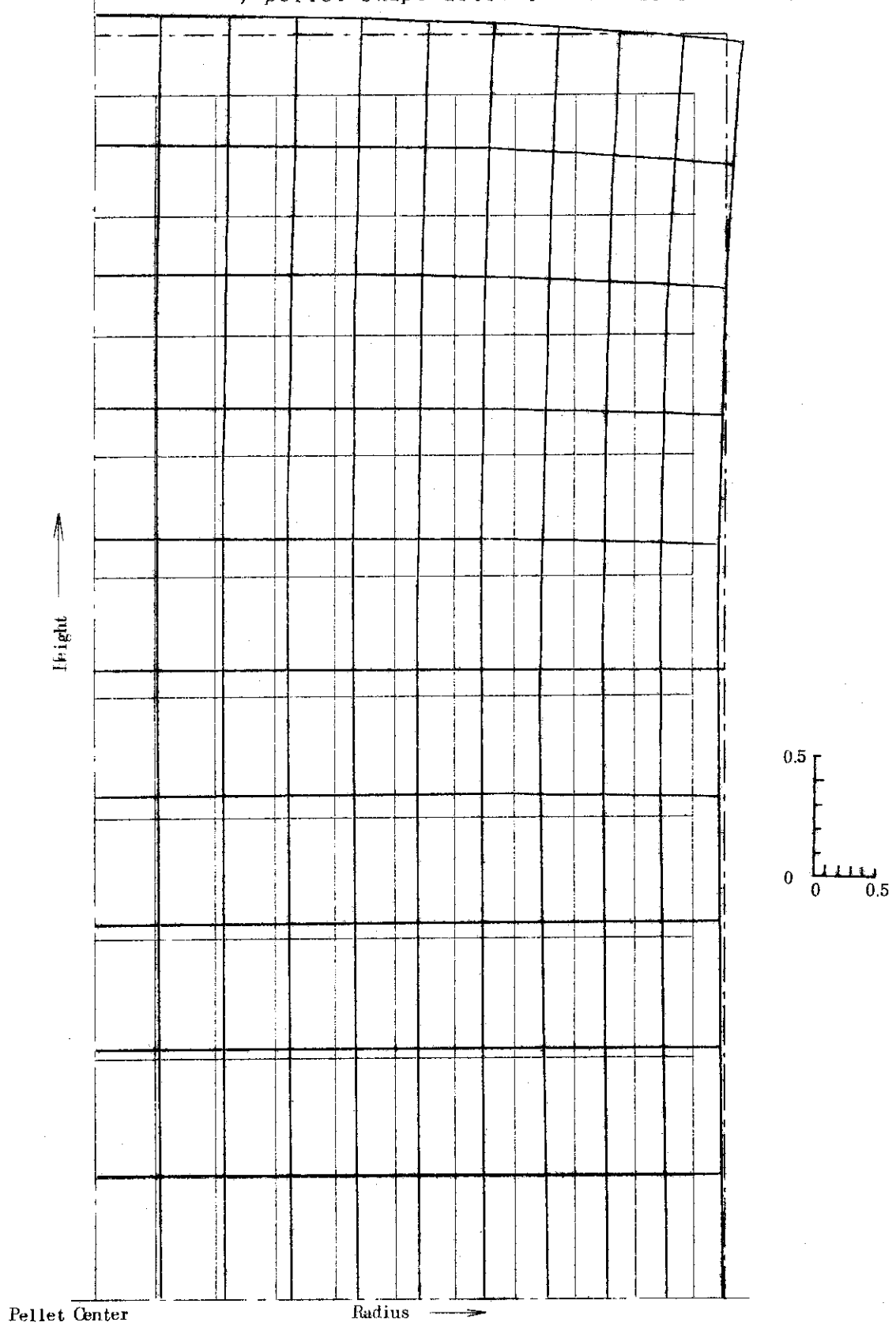


Fig.6 Pellet Thermal Deformation ($H/R=2$)

Poisson Ratio = $1/3$

謝 辞

燃料ペレットのRidging現象については市川達生氏に、プログラム作成については松原邦彦氏（動力試験炉部，開発室）に有益な助言を受けたことを感謝します。

Fig. 3, 4, 5, 6 は森島淳好氏（燃料設計研究室室長）によつてかかれたものである。記して感謝の意を表します。

References

- 1) J. Veeder, "Thermo-Elastic Expansion of Finite Cylinders", AECL-2660, (January 1967)
- 2) A. Ridal & A. S. Bain, "Irradiation of UO_2 Fuel Elements to Study Circumferential Ridging of the Sheath", AECL-1463.
- 3) S. Timoshenko & J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company
- 4) Richard A. Valentin and John J. Garey, "Thermal Stress and Displacements in finite heat-generating Circular Cylinders", Nucl. Eng. & Design 12(1970) 277-290
- 5) J. R. Matthews, "Thermal Stress in a finite heat generating cylinders", Nucl. Eng. & Design 12(1970) 291-296
- 6) 山内，森口，一松，"電子計算機のための数値計算法I"，培風館（1970）

謝 辞

燃料ペレットのRidging現象については市川達生氏に、プログラム作成については松原邦彦氏(動力試験炉部, 開発室)に有益な助言を受けたことを感謝します。

Fig. 3, 4, 5, 6 は森島淳好氏(燃料設計研究室室長)によつてかかれたものである。記して感謝の意を表します。

References

- 1) J. Veeder, "Thermo-Elastic Expansion of Finite Cylinders", AECL-2660, (January 1967)
- 2) A. Ridal & A. S. Bain, "Irradiation of UO_2 Fuel Elements to Study Circumferential Ridging of the Sheath", AECL-1463.
- 3) S. Timoshenko & J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company
- 4) Richard A. Valentin and John J. Garey, "Thermal Stress and Displacements in finite heat-generating Circular Cylinders", Nucl. Eng. & Design 12(1970) 277-290
- 5) J. R. Matthews, "Thermal Stress in a finite heat generating cylinders", Nucl. Eng. & Design 12(1970) 291-296
- 6) 山内, 森口, 一松, "電子計算機のための数値計算法 I", 培風館(1970)

Appendix-A 熱応力の一般関係式

有限円柱に関する熱応力，熱歪の関係式をまとめると次の通りである。³⁾

熱歪 :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_z) + \alpha T \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_z - \nu\sigma_r) + \alpha T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha T \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{r\theta}, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G}\tau_{\theta z}, \gamma_{zr} = \frac{1}{G}\tau_{zr} \end{aligned} \right\} \text{(A-1)}$$

ただし， $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ である。

熱応力 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= E'(\varepsilon_r + \nu'\varepsilon_\theta + \nu'\varepsilon_z) - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_\theta &= E'(\varepsilon_\theta + \nu'\varepsilon_z + \nu'\varepsilon_r) - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_z &= E'(\varepsilon_z + \nu'\varepsilon_r + \nu'\varepsilon_\theta) - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}, \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}, \tau_{zr} = G\gamma_{zr} \end{aligned} \right\} \text{(A-2)}$$

ただし， $E' = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E$ ， $\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$ である。

円柱坐標に関する変位，歪の関係式は半径方向変位を u_r ，円周方向変位を u_θ ，軸方向変位を u_z としたとき，次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r} &= -\frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \end{aligned} \right\} \text{(A-3)}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \\ \gamma_{zr} = \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

特に、変形が軸対称ならば、 u_{θ} は θ に関係ないので、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(A-4)}$$

Appendix-B ひずみエネルギー(Strain Energy)

有限円柱全体に貯えられたひずみエネルギー V_0 は単位体積当りのひずみエネルギーを V とすると、

$$dV_0 = V r dr d\theta dz \dots\dots\dots (B-1)$$

である。ここで V は、

$$V = \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta \sigma_z + \sigma_z \sigma_r) + \frac{1}{2G} (\tau_{rz}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{\theta r}^2) \dots\dots\dots (B-2)$$

と表わされる。しかし軸対称なので $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0$ である。したがって V は

$$V = \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta \sigma_z + \sigma_z \sigma_r) + \frac{1}{2G} \tau_{rz}^2 \dots\dots\dots (B-3)$$

である。いま、

$$(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta \sigma_z + \sigma_z \sigma_r)$$

を使つて V を変形すると

$$V = -\frac{\nu}{2E} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)^2 + \frac{(1+\nu)}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2) + \frac{1}{2G} \tau_{rz}^2 \dots\dots\dots (B-4)$$

となる。

熱応力の応力-歪の関係式 (Appendix - A 参照) より、 $e = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z$ として、 $\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$ 、 $\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2$ を変形すると、

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z &= E' (1+2\nu') e - 3 \frac{E \alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 &= (E')^2 \{ (1-\nu')^2 (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \nu' (2+\nu') e^2 \} \\ &\quad - 2E' \frac{E \alpha T}{1-2\nu} \cdot (1+2\nu') e + 3 \left(\frac{E \alpha T}{1-2\nu} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。これを B-3 式に代入し整理する。

$$\begin{aligned} V &= G \frac{\nu}{(1-2\nu)} \cdot e^2 + G (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \frac{G}{2} \tau_{rz}^2 \\ &\quad - G \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \cdot \alpha T \cdot e + 3G \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha^2 T^2 \dots\dots\dots (B-5) \end{aligned}$$

さらに $m = \frac{2\nu}{1-2\nu}$ として変形すると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{G}{2} m e^2 + G (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \frac{G}{2} \tau_{rz}^2 \\ &\quad - G (3m+2) \alpha T \cdot e + \frac{3}{2} G (3m+2) \alpha^2 T^2 \dots\dots\dots (B-6) \end{aligned}$$

となる。

このVより、 V_0 を求めると、

$$V_0 = G \int_0^{H_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \left\{ \frac{m}{2} e^2 + (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \frac{G}{2} \gamma_{rz}^2 \right. \\ \left. - (3m+2) e \alpha T + \frac{3}{2} (3m+2) \alpha^2 T^2 \right\} r dr \cdot d\theta \cdot dz \quad \text{--- (B-7)}$$

である。B-7の式を θ について積分を実行すると、

$$V_0 = \pi G \int_0^{H_0} \int_0^{R_0} \left\{ m e^2 + 2 (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \gamma_{rz}^2 \right. \\ \left. - 2 (3m+2) e \alpha T + 3 (3m+2) \alpha^2 T^2 \right\} r dr \cdot dz \quad \text{--- (B-8)}$$

となる。 $\rho = \frac{r}{R_0} \cdot \xi = \frac{z}{H_0}$ として、

$$\frac{V_0}{\pi R_0^2 H_0 G} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ m e^2 + 2 (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \gamma_{rz}^2 \right. \\ \left. - 2 (3m+2) e \alpha T + 3 (3m+2) \alpha^2 T^2 \right\} \rho d\rho \cdot d\xi \quad \text{--- (B-9)}$$

これが軸対称な場合の有限円柱に関する Total Strain Energy である。

Appendix-C 二重積分の近似法

問題は2.2の(2.28)式を求めることである。ひずみエネルギーはFig.C-1に示す $\rho\xi$ 面の各点に存在する。

このひずみエネルギーは、例えばFig.C-1の $\rho\xi$ 面の上方に示すような値をとるであろう。

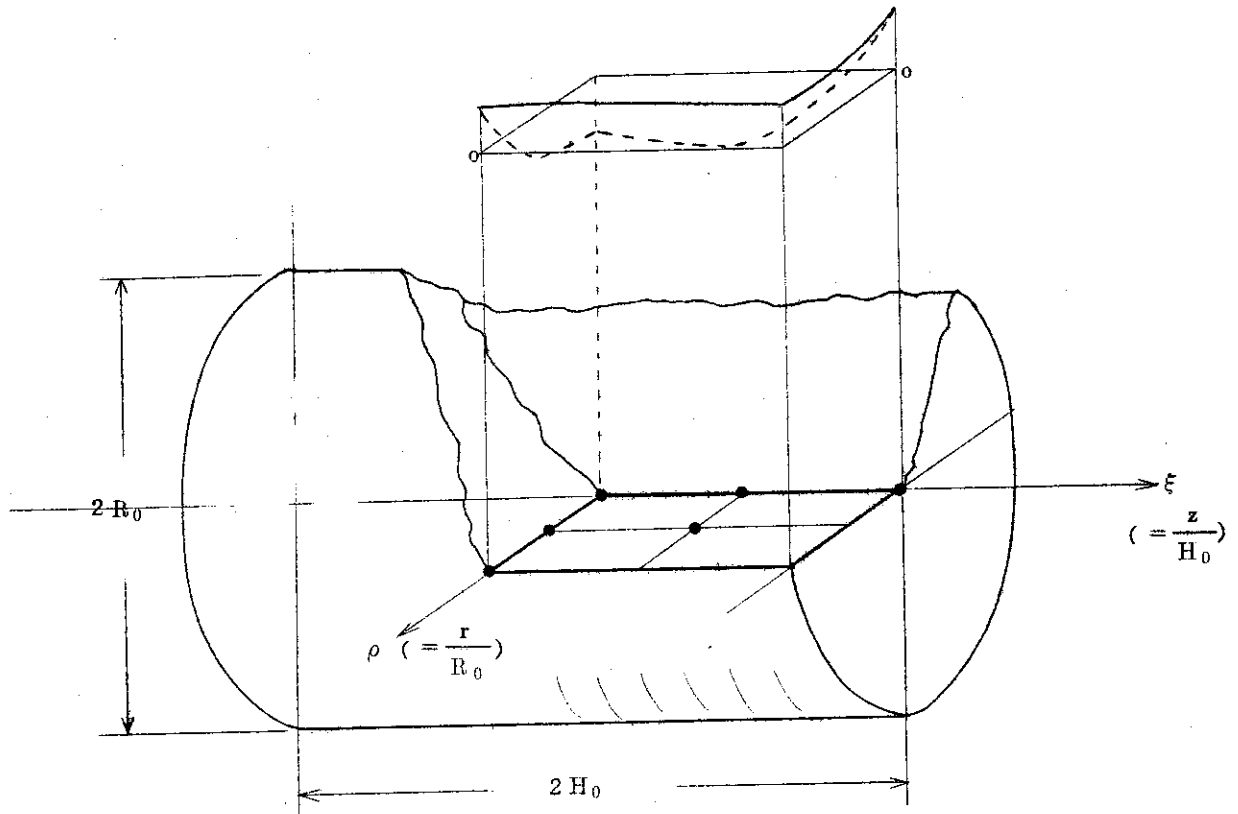


Fig. C-1

すなわち、 $\rho\xi$ 面に垂直な軸を立て、 $\rho\xi$ 面の各点におけるひずみエネルギーをプロットすれば、これは $\rho\xi$ 面上に曲面を構成する。

しかし、(2.28)式は体積積分なのでひずみエネルギーに ρ をかけて積分しなければならない。いま、(2.28)式右辺の〔 〕内の式に ρ をかけた函数値

$$V(\rho, \xi) = \rho \left[m e^2 + 2(\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \gamma_{rz}^2 - 2(3m+2)e\alpha T + 3(3m+2)\alpha^2 T^2 \right] \quad (C-1)$$

とFig.C-1の $\rho\xi$ 面の黒点6点において完全に一致する函数($\rho\xi$ に関する二次曲面)を次のように仮定する。

$$f(\rho, \xi) = a\rho^2 + b\xi^2 + c\rho\xi + d\rho + e\xi + f \quad (C-2)$$

これより、6点における函数値とC-2式の係数の間には次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} V(\rho_1, \xi_1) &= a\rho_1^2 + d\xi_1^2 + c\rho_1\xi_1 + d\rho_1 + e\xi_1 + f \\ V(\rho_2, \xi_1) &= a\rho_2^2 + b\xi_1^2 + c\rho_2\xi_1 + d\rho_2 + e\xi_1 + f \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} V(\rho_3, \xi_1) &= a\rho_3^2 + b\xi_1^2 + c\rho_3\xi_1 + d\rho_3 + e\xi_1 + f \\ V(\rho_1, \xi_2) &= a\rho_1^2 + b\xi_2^2 + c\rho_1\xi_2 + d\rho_1 + e\xi_2 + f \\ V(\rho_2, \xi_2) &= a\rho_2^2 + b\xi_2^2 + c\rho_2\xi_2 + d\rho_2 + e\xi_2 + f \\ V(\rho_1, \xi_3) &= a\rho_1^2 + b\xi_3^2 + c\rho_1\xi_3 + d\rho_1 + e\xi_3 + f \end{aligned} \right\} \text{(C-3)}$$

これらの式を逆に解いて係数 a ~ f を V で表すと、

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2\Delta\rho^2} [V(\rho_3, \xi_1) - 2V(\rho_2, \xi_1) + V(\rho_1, \xi_1)] \\ b &= \frac{1}{2\Delta\xi^2} [V(\rho_1, \xi_3) - 2V(\rho_1, \xi_2) + V(\rho_1, \xi_1)] \\ c &= \frac{1}{\Delta\rho \cdot \Delta\xi} [\{V(\rho_2, \xi_2) - V(\rho_2, \xi_1)\} - \{V(\rho_1, \xi_2) - V(\rho_1, \xi_1)\}] \\ d &= \frac{1}{2\Delta\rho} [4\{V(\rho_2, \xi_1) - V(\rho_1, \xi_1)\} - \{V(\rho_3, \xi_1) - V(\rho_1, \xi_1)\}] \\ e &= \frac{1}{2\Delta\xi} [4\{V(\rho_1, \xi_2) - V(\rho_1, \xi_1)\} - \{V(\rho_1, \xi_3) - V(\rho_1, \xi_1)\}] \end{aligned} \right\} \text{(C-4)}$$

である。

f(ρ, ξ) を Fig. C-2 に示す黒点 6 点を含む三角形の領域で積分すると、(Fig. C-2 は Fig. C-1 の ρ ξ 面をとり出してかいたもの)

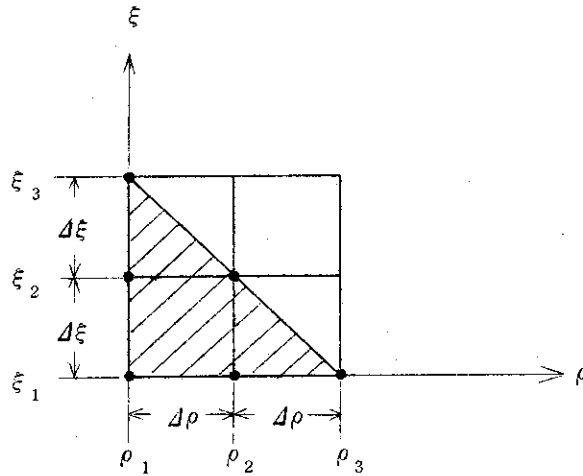


Fig. C-2

$$\begin{aligned} F &= \int_S f(\rho, \xi) ds \\ &= \int_0^{\Delta\xi} \int_0^{\Delta\rho} (a\rho^2 + b\xi^2 + c\rho\xi + d\rho + e\xi + f) d\rho \cdot d\xi \\ &= \frac{2}{3} [2\Delta\rho^3 \cdot \Delta\xi \cdot a + 2\Delta\rho \cdot \Delta\xi^3 \cdot b + \Delta\rho^2 \cdot \Delta\xi^2 \cdot c \\ &\quad + 2\Delta\rho^2 \cdot \Delta\xi \cdot d + 2\Delta\rho \cdot \Delta\xi^2 \cdot e + 3\Delta\rho \cdot \Delta\xi \cdot f] \end{aligned} \text{(C-5)}$$

となる。

この C-5 式に先に求めた係数 a ~ f を代入し、函数値で表すと、

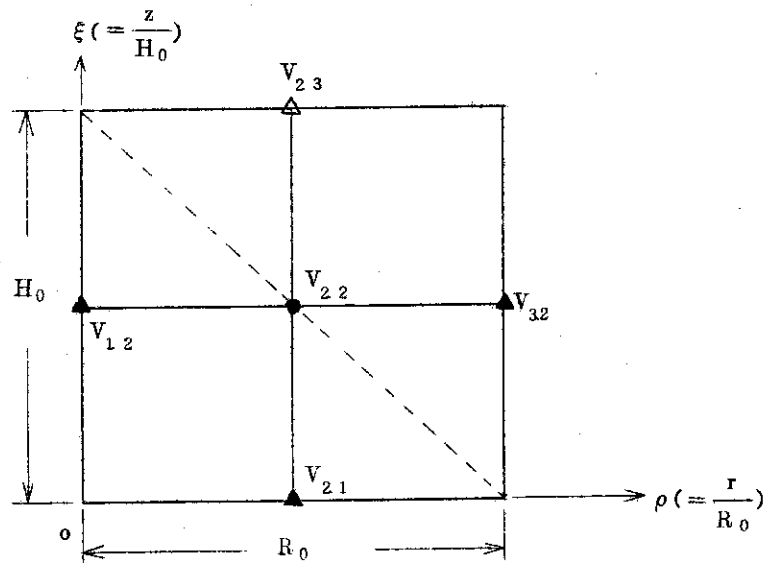
$$F = \frac{2}{3} \Delta\rho, \Delta\xi [V(\rho_2, \xi_1) + V(\rho_1, \xi_2) + V(\rho_2, \xi_2)] \quad (C-6)$$

が求まる。

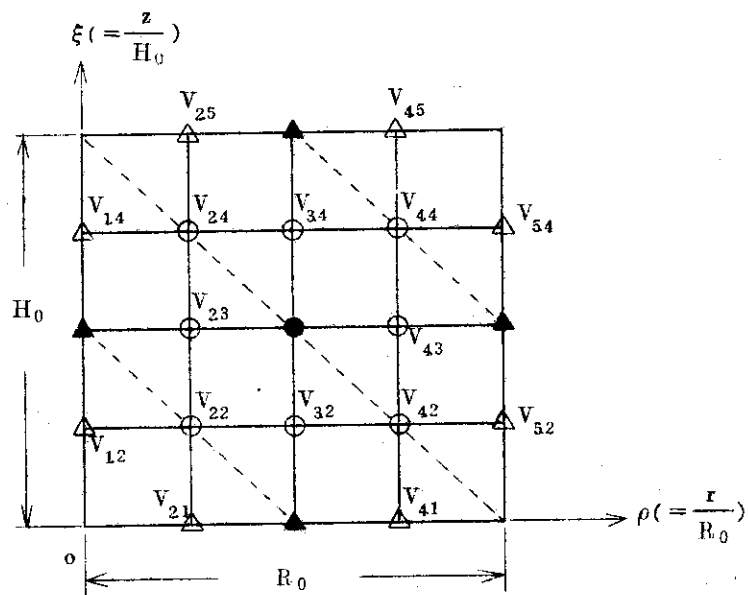
この結果は、かなり興味のあることである。すなわち積分値は、6点の函数値のうちの半分の3点の函数値のみによつて表示されている。

Fig. C-3 に示す四角形を領域とする函数 $V(\rho, \xi)$ を二次曲面で近似して、積分値を求めることを考える。

1) 領域を ρ, ξ 方向それぞれ 2 等分し Fig. C-3 (a) に示される点線で区切られた三角形につき (C-6) 式を適用する。



(a)



(b)

Fig. C-3

$$F_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{R_0}{2}\right) \left(\frac{H_0}{2}\right) \{(V_{12} + V_{21} + V_{22}) + (V_{22} + V_{23} + V_{32})\}$$

$$= \frac{1}{6} R_0 H_0 \{V_{12} + V_{21} + 2 \cdot V_{22} + V_{23} + V_{32}\}$$

2) 2等分されている領域をさらに等分に分割し、それぞれの三角領域に (C-6) 式を適用する。

$$F_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{R_0}{4}\right) \left(\frac{H_0}{4}\right) \{(V_{12} + V_{21} + V_{22}) + (V_{22} + V_{32} + V_{23})$$

$$+ (V_{14} + V_{23} + V_{24}) + (V_{24} + V_{25} + V_{34})$$

$$+ (V_{41} + V_{32} + V_{42}) + (V_{42} + V_{43} + V_{52})$$

$$+ (V_{34} + V_{43} + V_{44}) + (V_{44} + V_{45} + V_{54})\}$$

$$= \frac{1}{6 \times 4} R_0 H_0 \{(V_{12} + V_{14} + V_{21} + V_{25} + V_{41} + V_{45} + V_{52} + V_{54})$$

$$+ 2(V_{22} + V_{23} + V_{24} + V_{32} + V_{34} + V_{42} + V_{43} + V_{44})\}$$

(注、この式の $V_{n,m}$ は先の 1) における $V_{n,m}$ とは関係ない)

以上の 1) および 2) よりこの近似法の特長は次の通りである。

(1) ρ, ξ 方向に 2^n 等分されていたものをさらに 2 等分し 2^{n+1} 等分したときの近似値 F_{n+1} には前の近似値 F_n に使用した点の函数値は関係しない。(Fig.C-3 (a) において黒点●, ▲の位置の函数値のみによつて F_1 が決まつたが, F_2 においてはこれらの値は全く関係しない。)

F_{n+1} の値は、分割を進めたために新たに生じた格子点における函数値によつて決定される。(F_2 の値は Fig.C-3 (b) の白抜ききの○, △の位置の函数値のみによつて決定される。)

(2) 積分の境界上の函数値は 1 倍で加算されるが、領域内の函数値は 2 倍になる。

(Fig.C-3 (a) で▲の位置の函数値は F_1 では係数 1, ●は 2, Fig.C-3 (b) で△の位置の函数値は F_2 では係数 1, ○の位置の函数値の係数は 2 である。)

以上の結果に基づき、プログラムを次のように作成した。

いま、 ρ, ξ 方向それぞれ 2^n 等分されているとする。 ρ 方向の格子点番号を N ($1 \leq N \leq 2^n + 1$) とし、 ξ 方向の格子点番号を M ($1 \leq M \leq 2^n + 1$) とする。

$N =$ 奇数のとき :

$\left\{ \begin{array}{l} M = \text{奇数ならば、函数値の計算は行わない。} \\ M = \text{偶数ならば、mesh 点} \left((N-1) \times \frac{R_0}{2^n}, (M-1) \times \frac{H_0}{2^n} \right) \text{ における函数値の計算を行う。そして、} N = 1 \text{ or } 2^n + 1 \text{ ならば、函数値そのまま、それ以外ならば函数値を 2 倍して函数値の和} (S_n) \text{ に加える。} \end{array} \right.$

$N =$ 偶数のとき :

格子点番号 (N, M) に相当する mesh 点の函数値を計算する。そして、 $M = 1$ or $2^n + 1$ ならば、函数値そのまま、それ以外ならば函数値を 2 倍して函数値の和 (S_n) に加算する。

$(2^n+1) \times (2^n+1)$ の全格子点につき上記の方法で、函数値の和 S_n を作る。この S_n を用い、 F_n を

$$F_n = \frac{R_0 \cdot H_0}{6 \times 4^{(n-1)}} \times S_n \quad (C-6)$$

とすると、この F_n は領域 $0 \leq \rho \leq R_0, 0 \leq \xi \leq H_0$ における二重積分 $I = \int_0^{R_0} \int_0^{H_0} V(\rho, \xi) d\rho d\xi$ の近似値を与える。

収束は $\left| (F_{n+1} - F_n) / F_n \right| < EPS$ で判定する。

Appendix-D 最小ひずみエネルギーを求める方法の補足

Total Strain Energy は次の様に表わしうる。

$$V_0(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DXY + EXZ + FYZ + GX + HY + IZ + J \quad (D-1)$$

(D-1)の係数A~JはX, Y, Zに既知の数値を入れることにより, V_0 の値を使つて表現できる。例えば

$$\left. \begin{aligned} V_0(0, 0, 0) &= J \\ V_0(1, 0, 0) &= A + G + J \\ V_0(0, 1, 0) &= B + H + J \\ V_0(0, 0, 1) &= C + I + J \\ V_0(2, 0, 0) &= 4A + 2G + J \\ V_0(0, 2, 0) &= 4B + 2H + J \\ V_0(0, 0, 2) &= 4C + 2I + J \\ V_0(1, 1, 0) &= A + B + D + G + H + J \\ V_0(0, 1, 1) &= B + C + F + H + I + J \\ V_0(1, 0, 1) &= A + C + G + E + I + J \end{aligned} \right\} \quad (D-2)$$

とし、これら連立方程式をA~Jについて解いて

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{V_0(2, 0, 0) - 2V_0(1, 0, 0) + V_0(0, 0, 0)}{2} \\ B &= \frac{V_0(0, 2, 0) - 2V_0(0, 1, 0) + V_0(0, 0, 0)}{2} \\ C &= \frac{V_0(0, 0, 2) - 2V_0(0, 0, 1) + V_0(0, 0, 0)}{2} \\ D &= V_0(1, 1, 0) + V_0(0, 0, 0) - V_0(1, 0, 0) - V_0(0, 1, 0) \\ E &= V_0(1, 0, 1) + V_0(0, 0, 0) - V_0(1, 0, 0) - V_0(0, 0, 1) \\ F &= V_0(0, 1, 1) + V_0(0, 0, 0) - V_0(0, 1, 0) - V_0(0, 0, 1) \\ G &= \frac{4V_0(1, 0, 0) - V_0(2, 0, 0) - 3V_0(0, 0, 0)}{2} \\ H &= \frac{4V_0(0, 1, 0) - V_0(0, 2, 0) - 3V_0(0, 0, 0)}{2} \\ I &= \frac{4V_0(0, 0, 1) - V_0(0, 0, 2) - 3V_0(0, 0, 0)}{2} \\ J &= V_0(0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (D-3)$$

が求まる。