

JAERI-M

4870

OECD Halden Reactor Project
で開発された中性子束分布制御系の理論

1972年7月

佐藤 一 男

日 本 原 子 力 研 究 所
Japan Atomic Energy Research Institute

OECD Halden Reactor Project で
開発された中性子束分布制御系の理論

日本原子力研究所東海研究所動力試験炉部

佐藤 一 男

(1972年6月16日受理)

本報告は、OECD Halden Reactor Project において開発された炉内中性子束分布制御系の理論的な面を述べたものである。この制御系は、炉心を線型化して得られる炉心特性行列によって系を記述することにより、何ら先験的な炉心モデルを必要とせず、制御系のパラメータは実験的に決定され、かつ炉心の特性変化に応じて自動的に修正される。本報告では、この制御系の理論的基礎、最適制御則の導出、制約の取り扱い、 X_e などの遅いプロセスの分離、不安定炉心の問題などが述べられている。

なお、本報告中で使われているやゝ特殊な行列演算の手法については、付録「制御理論に関連する行列代数と行列解析」として末尾にまとめておいた。

JAERI-M4870

Theory of the Neutron Flux Distribution
Control System Developed at the OECD
Halden Reactor Project

Kazuo Sato

Division of JPDR, Tokai, JAERI

(Received June 16, 1972)

In this report the theoretical aspects of the neutron flux distribution control system, developed at the OECD Halden Reactor Project, are described. In this control system, the core characteristics are represented with the core operator matrix which is the basis of the parameters in the control system and is determined and adapted to the changes in the core characteristics without any a priori knowledge on the detailed core characteristics. In the report, the theoretical basis of the control system, the derivation of the optimal control law, constraint handling, separation of the slow process such as Xe-feedback, the problems relating to an unstable core etc. are treated.

Some special techniques in the matrix operation used in the report are reviewed in the Appendix.

目 次

1. はじめに	1
2. 系の記述と問題の提示	3
2.1 系の記述	3
2.2 運動方程式	3
2.3 問題の提示	5
3. 安定炉心の問題	6
3.1 漸近的に安定な炉心の平衡状態	6
3.2 炉心特性行列の決定	7
3.3 一定出力の問題	8
3.4 最適制御則の決定	9
3.5 安定炉心の平衡制御系の性質	11
4. 制約のある場合の制御	12
4.1 考えられる制約	12
4.2 制約を考慮した制御則 — 安定炉心の平衡制御の場合 —	14
4.2.1 Linear Downscale 法	14
4.2.2 Variable Penalty 法	15
4.2.3 Variable Weighting 法	16
5. 時定数の長いフィードバック — 安定炉心の準平衡制御 —	19
5.1 時定数の長いフィードバック	19
5.2 遅いモードの分離	19
6. 零出力炉心	23
6.1 零出力炉心の問題点	23
6.2 零出力炉心の摂動論的取扱い	23
6.3 零出力炉心特性行列の決定	26
7. 不安定炉心の制御系	28
7.1 不安定炉心	28
7.2 不安定炉心の安定化	28
8. 極めて大きい炉心の制御系	30
9. HBWR での実験結果	32
9.1 特性行列の挙動	32
9.2 制御系の制御能力	32
10. 結 論	33
謝 辞	33
参考文献	34

附録	制御理論に関連する行列代数と行列解析	38
A-1	緒論	38
A-2	行列の表示	39
A-3	行列のクロネッカー積(直積)	41
3.1	定義と基本公式	41
3.2	固有値に関する問題	42
A-4	行列の行展開と列展開	46
4.1	定義と基本公式	46
A-5	応用例 — その1 —	49
5.1	スペクトル方程式の一般解	49
5.2	制御パラメータの修正	49
A-6	一般化された逆行列	52
6.1	連立一次方程式の一般解	52
6.2	一般化された逆行列の導出	55
A-7	行列の微分法	58
7.1	問題の提起	58
7.2	行列の行列に関する微係数	58
7.3	行列の積の微係数	61
7.4	行列の陰関数としての行列の微係数	62
A-8	応用例 — その2 —	65
8.1	2次形式の微係数	65
8.2	一次方程式の最小自乗解	66
A-9	行列の微分と積分	67
9.1	行列の微分	67
9.2	行列の積分	68
A-10	Taylor 展開とその応用	69
10.1	ベクトルの展開	69
10.2	行列の展開	69
10.3	応用例 — その3 —	69

1. はじめに

最近の動力炉の炉心は次第に大型化し、それに伴って炉心の中性子束分布も、制御棒の配置などにより、かなり自由に変化させることができるようになって来た。この様な事情の下では、炉心の中性子束分布をどの様な形にしておくかと云うことが、非常に重要な問題になって来る。まず第一に、不適当な制御棒の配置によっては、炉心内の一部に著しく高い中性子束を生ずることがあり、これによって燃料の寿命の短縮、ひいては破損と云う結果を招くことになる。更に最近報告されている所では、燃焼のある程度進んだ燃料では、熱負荷を下げてやらないと破損を生ずる確率が高くなると云われており、¹⁾炉心各部の燃焼度に応じたきめの細い中性子束分布の制御が望まれている。適正な中性子束分布は、原子炉出力を安全裡に増大させ、燃料交換の頻度を減小させることを可能にするばかりでなく、国家の燃料政策に照して最適の燃料サイクルを実現する上でも極めて重要である。

この重要な問題を解決するためには、二つの前提が必要である。第一に、如何なる中性子束分布が「最適」であるかと云うことが明確になっていることである。この点について、例えば「中性子束分布を炉心内いたる所でできるだけ一律にするのが最適であると云うのは自明のことではないか。」と云う主張があるが、これは必ずしも正しくない。先にも触れた様に、燃焼の進んだ燃料の熱負荷を下げてやるのが望ましいと云う主張が仮に正しいとすると、中性子束分布を常にできるだけ一律に保つ方法が、プラント全体のパーフォーマンスを上げることにはならない可能性がある。これは「最適」な中性子束分布と云うものが、決して自明であり、あるいは容易に決定し得るものではないことを示す一例である。いずれにしても、「最適」中性子束分布が、ある原子炉のある状態では如何なるものかと、具体的に与えられる必要がある。

次に、与えられた最適中性子束分布を実現させるための手段が必要である。この「手段」は2つの意味を持つ。まず第一に、要求されている最適分布と、その原子炉の特性とに見合った制御器が備えられていること、すなわちハードウェアが完備されていることである。例えば、1本の制御棒が原子炉を制御する唯一の制御器である場合には、原子炉熱出力が決れば制御棒の位置も決ってしまい、「分布」の制御は不可能である。次に、これらの制御器を駆使して、最適分布を実現させるソフトウェアが必要である。

ソフトウェアは、更に2つの部分からなる。まず、最適分布を実現するには、現在の分布がどうなっているかを正しく知ることが必要である。炉心内には、多数の中性子束の検出器が置かれていることが多いであろうが、これら検出器からの直接の情報も、要求されている制御の質と比較して、十分でない場合も生じ得る。この様な場合には、検出器からの信号に基づいて、中性子束分布を要求されている制御の質に見合った精度で推定してやる必要がある。いずれにしても、炉心から十分な情報を引き出す(広い意味での)「推定系」が必要になる。次に、こうして得られた炉心の情報と、与えられた最適分布とから、制御器の動きを決定し、実行する「制御系」が当然ながら必要である。この最後の「制御系」が、本報告の取り扱っている部分である。

対象とする系が複雑であり、またソフトウェアのロジックも高度のものとなるであろうから、

ソフトウェアの実行には、プロセス計算機を必要とする。プロセス計算機の存在を前提とした上で、ソフトウェア・システムにはどのような要求が課せられているであろうか。

第1に、ソフトウェアは、通常妥当と考えられる程度のプロセス計算機で実行可能でなければならない。この実行可能と云う意味は、単にこのソフトウェアが、プロセス計算機のメモリに収まり、妥当なマシンタイムの範囲で計算が終了すると云うことだけではない。プロセス計算機は、単能の計算機として使用されているのではなく、様々の制御プログラムをも実行しなければならない。中性子束分布制御のためのプログラムは、他の重要なプログラム群と協調して、全体として調和のとれたプラントの制御がなされなければならないのである。

第2に、ソフトウェアの内容は、計算機制御系に一応の心得のある程度の現場技術者にとって、これを把握し、部分的に修正、変更することができる程度のものでなければならない。余りにも複雑、高度なロジックは、学術的な興味はともかく、現場では厄介物になってしまうことがある。

著者は、昭和44年4月より、昭和46年末まで、ノルウェーのOECD Halden Reactor Project に職員として滞在し、上記の要求に応える制御系の開発にも参加した。本報告は、この開発された制御系の、主として理論的基礎の部分であり、その一部は、Halden Project²⁾よりも刊行される予定になっている。

なお、本報中に、やゝ特殊な行列演算の手法が用いられているが、これについては、附録として巻末に解説してあるので、行列演算に不慣れな読者はそれを参照されたい。

本報告は、筆者のHalden Projectにおける業務に関する報告書の一部をなすものであることを付記する。

2. 系の記述と問題の提示

2.1 系の記述

炉内の中性は，一般に場所，時間およびエネルギーの関数として， $\phi(r, E, t)$ と表現することができる。 ϕ は (r, E, t) 空間で連続であると思なして良いが， (r, E) 空間をノード分割し，各ノードの中性子束 $\phi_i(t)$ $i=1 \dots N$ によって， $\phi(r, E, t)$ の挙動が要求されている精度の範囲内で近似的に表現できるとする。ここで， $\phi_i(t)$ を要素とするベクトル

$$\phi(t) \triangleq [\phi_1(t) \phi_2(t) \dots \phi_N(t)]^T \quad (2.1.1)$$

を定義し，これをもって炉内の中性子束を表現することにする。

この中性子束ベクトル $\phi(t)$ を制御する制御器を一括して，ベクトル

$$u \triangleq [u_1 \dots u_r]^T \quad (2.1.2)$$

を定義する。さらに，この他にも $\phi(t)$ に影響を及ぼすフィードバック量を一括して，ベクトル ξ で表わすことにし， ϕ と合せて，状態ベクトル

$$\psi \triangleq [\phi^T \xi^T]^T \quad (2.1.3)$$

を定義する。この場合，次のことが要請される。

- (1) $\phi(t)$ は，要求されている精度の範囲で，近似的に $\phi(r, E, t)$ の挙動を表現できること。これは，ノード分割の方法についての要請である。
- (2) $\phi(t)$ の各要素は，直接測定可能であるが，あるいは測定値に基づいて推定可能であること。これは，第1章で述べた「推定系」に対する要求である。
- (3) 制御器の数は2ヶ以上で，かつそれぞれが独立して駆動できること。第1章ではたった1本の制御棒の例をあげたが，たとえ制御棒が2本であっても，これがいつも同時に同方向にしか動かないと云う様なものでは，中性子束分布の制御はできない。これは，ハードウェアに対する要求である。

以下に述べる理論では，制御器として「制御棒」を考えていることがしばしばある。これは，中性子束分布の制御が，制御棒によって行なわれることが多いことを考えてのことであるが，理論的には，ベクトル u の要素は何であっても良いのであって，たとえば冷却材の流量でも，温度でも一向に構わないのである。

2.2 運動方程式

前節で定義した ψ ， u によって，炉心は

$$\dot{\psi} \triangleq \frac{d\psi}{dt} = F(\psi, u, t) \quad (2.2.1)$$

と書くことができる。これが我々の問題に対する基本的な運動方程式である。通常，炉心の挙動は autonomous であると考えて良いであろうから，その場合には，同様に基礎的な運動方

程式を

$$\dot{\psi} = F(\psi, u) \quad (2.2.2)$$

と書くことができる。

(2.2.1)あるいは(2.2.2)式のFは、一般には極めて複雑な、非線型の関数である。これをこのままの形で制御系を設計することは、不可能ではないとしてもかなり難かしく、かつ第1章に述べた要請に応えることも極めて難かしいと云わねばならない。この様な困難を回避するために、次の様な工夫をする。(2.2.2)式で表わされる炉心に、平衡状態

$$F(\psi_0, u_0) = 0 \quad (2.2.3)$$

が複数個存在するとする。ある平衡点 (ψ_0^i, u_0^i) の近傍で(2.2.2)式を展開すると*

$$F(\psi_0^i + \Delta\psi, u_0^i + \Delta u) = F(\psi_0^i, u_0^i) + \frac{\partial F}{\partial \psi^T} \bigg|_{(\psi_0^i, u_0^i)} \Delta\psi + \frac{\partial F}{\partial u^T} \bigg|_{(\psi_0^i, u_0^i)} \Delta u + R$$

よって

$$(\psi_0^i + \Delta\psi) = \Delta\dot{\psi} = \frac{\partial F}{\partial \psi^T} \bigg|_{(\psi_0^i, u_0^i)} \Delta\psi + \frac{\partial F}{\partial u^T} \bigg|_{(\psi_0^i, u_0^i)} \Delta u + R \quad (2.2.4)$$

そこで、 (ψ_0^i, u_0^i) を含むある領域 Ω_0^i で、

$$(\psi_0 + \Delta\psi, u_0 + \Delta u) \in \Omega_0^i \quad (2.2.5)$$

であれば、Rが前2項に比して無視できるならば、(2.2.2)式は近似的に

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\psi} &= A\Delta\psi + B\Delta u \\ (\Delta\psi, \Delta u) &\in \Omega_\Delta \\ \Omega_\Delta &\triangleq \{(\Delta\psi, \Delta u) \mid (\psi_0^i + \Delta\psi, u_0^i + \Delta u) \in \Omega_0^i\} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

と書くことができる。ここで、以下に述べる理論のための基本的な仮定をしておく。

仮定 (Piecewise linearity)

kケの平衡点 (ψ_0^i, u_0^i) $i=1, \dots, k$ を適当に選ぶと、

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^k \Omega_0^i \quad (2.2.7)$$

とすることができる。ここに、 Ω は制御系が対象としている炉心の変域全体である。

上記の仮定によれば、炉心の全変域は、kケの線型方程式(2.2.6)で、近似的に表現されることになる。

* ベクトルによる関数の展開は、附録A-7~A10を参照されたい。

2.3 問題の提示

今、炉心が、 (ψ, u) なる状態にあったとする。この状態から、希望する中性子束分布 ϕ_d を含む ψ_d に、できるだけ近い状態* (ψ', u') を実現すると云うのが、中性子束分布制御系に与えられた問題である。問題の取り扱いは、 (ψ, u) 、 ϕ_d あるいは (ψ', u') の性質によって次の様に異って来る。

- (1) (ψ, u) は平衡状態であり、 ϕ_d は時間に関して一定、目標とする (ψ', u') もまた平衡状態である場合。
- (2) ϕ_d は一定であるが、 (ψ, u) および (ψ', u') は、完全には平衡状態ではない場合。
- (3) (ψ, u) は平衡ではなく、 ϕ_d および (ψ', u') は一般に時間の関数である場合。

以後の記述に便利な様に、(1)~(3)をそれぞれ平衡制御、準平衡制御、過渡状態制御と呼ぶことにしよう。この報告の中では、まず平衡制御について述べ、次に準平衡制御の一部について触れる。過渡状態制御は将来の課題として残されている。

* 「できるだけ近い」とは何を意味するかは、後に説明する。

3. 安定炉心の問題

3.1 漸近的に安定な炉心の平衡状態

線型プロセス

$$\dot{\Delta\psi} = A\Delta\psi + B\Delta u \quad (3.1.1)$$

$$(\Delta\psi, \Delta u) \in \Omega_{\Delta}$$

を考える。まず $\Delta u = 0$ の場合、プロセス (3.1.1) の原点 $\Delta\psi = 0$ が漸近的に安定である場合を取り上げる。このためには、 A のすべての固有値の実数部分が負でなければならない。^{*}そこで、(3.1.1) を分解して

$$\begin{pmatrix} \dot{\Delta\phi} \\ \dot{\Delta\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\phi\phi} & A_{\phi\xi} \\ A_{\xi\phi} & A_{\xi\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{\phi u} \\ B_{\xi u} \end{pmatrix} \Delta u \quad (3.1.2)$$

と書く。こうすると

$$\dot{\Delta\xi} = A_{\xi\phi} \Delta\phi + A_{\xi\xi} \Delta\xi + B_{\xi u} \Delta u \quad (3.1.3)$$

平衡状態では

$$\overline{\Delta\xi} = -A_{\xi\xi}^{-1} (A_{\xi\phi} \overline{\Delta\phi} + B_{\xi u} \overline{\Delta u}) \quad (3.1.4)$$

となる。 $A_{\xi\xi}^{-1}$ の存在は次の様にして確かめられる。 A のすべての固有値の実数部分が負であることから、 A は特異行列 (singular matrix) ではない。このとき、

$$A\Delta\psi = 0$$

は、 $\Delta\psi = 0$ 以外の解を持たない。すなわち、 $\overline{\Delta u} = 0, \overline{\Delta\phi} = 0$ に対応する $\overline{\Delta\xi}$ は、 $\overline{\Delta\xi} = 0$ のみである。もし $A_{\xi\xi}^{-1}$ が存在しなければ、(3.1.4) に $\dot{\Delta\xi} = 0, \Delta\phi = 0, \Delta u = 0$ を代入した

$$A_{\xi\xi} \overline{\Delta\xi} = 0$$

は、 $\overline{\Delta\xi} = 0$ 以外の解を持つ。これは矛盾であるから、 $A_{\xi\xi}^{-1}$ は確かに存在することになる。

(3.1.2) 式より同様にして

$$\dot{\Delta\phi} = A_{\phi\phi} \Delta\phi + A_{\phi\xi} \Delta\xi + B_{\phi u} \Delta u$$

* (3.1.1) が非線型系を近似的に線型化した場合には、この記述は余り厳密とは云えない。より詳細には、第7章を参照されたい。

平衡状態では

$$\overline{\Delta\phi} = (A_{\phi\phi} - A_{\phi\xi} A_{\xi\xi}^{-1} A_{\xi\phi})^{-1} (A_{\phi\xi} A_{\xi\xi}^{-1} B_{\xi u} - B_{\phi u}) \overline{\Delta u} = C \overline{\Delta u} \quad (3.1.5)$$

$$C \equiv (A_{\phi\phi} - A_{\phi\xi} A_{\xi\xi}^{-1} A_{\xi\phi})^{-1} (A_{\phi\xi} A_{\xi\xi}^{-1} B_{\xi u} - B_{\phi u}) \quad (3.1.6)$$

が得られる。上式での逆行列の存在も、 $\Delta\xi$ の場合と同様に示すことができる。こゝで(3.1.6)で定義した行列Cを、炉心特性行列、あるいは単に特性行列と呼ぶことにする。

3.2 炉心特性行列の決定

炉心特性行列Cは、後に見る様に中性子束分布制御系の設計の基本となる行列であるので、これを如何に決定するかと重要である。Cは、(3.1.6)式で定義されているわけであるから、 $A_{\phi\phi}$, $A_{\phi\xi}$ ……の行列がすべて得られれば、直ちに定めることができる。然し、これらの行列を解析的に、あるいは数値的に定めるためには、炉心の精密なモデルと、老大な計算を必要とし、Cをオンラインで、プロセス計算機によって決定するなどは、全く非現実なものになってしまう。そこで、こゝでは、Cを実験的に定める方法を考える。

今、炉心が (ϕ_0, u_0) なる状態で平衡状態にあるとし、こゝに $\overline{\Delta u}_1, \overline{\Delta u}_2, \dots, \overline{\Delta u}_k$ なる線型独立な操作を加え、これに対応する $\overline{\Delta\phi}_1, \dots, \overline{\Delta\phi}_k$ を観測したとする。ここで

$$\bigvee_{i=1}^k (\overline{\Delta\phi}_i, \overline{\Delta u}_i) \in \mathcal{D}_\Delta \quad (3.2.1)$$

は満足されているとする。こうすると

$$\overline{\Delta\phi}_i = C \overline{\Delta u}_i \quad i=1, \dots, k \quad (3.2.2)$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\equiv [\overline{\Delta\phi}_1 \quad \dots \quad \overline{\Delta\phi}_k] \\ U &\equiv [\overline{\Delta u}_1 \quad \dots \quad \overline{\Delta u}_k] \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

と定義すると

$$\Phi = C U \quad (3.2.4)$$

そこで、 $k > r$ と取ると*

$$C = \Phi U^T (U U^T)^{-1} \quad (3.2.5)$$

* $k \geq r$ としない理由は、次節を参照されたい。

と C を定めることができる。 Δu_i は、前に述べた様に線型独立であるから、(3.2.5) 式中の逆行列は確かに存在する。

次に、後に述べる様に、 $\Delta \bar{u}_1 \dots \Delta \bar{u}_k$ を加えている間に炉心特性が僅かに変化したり、あるいは (ϕ_0, u_0) が移動したりして、 $\Delta u_1 \dots, \Delta \bar{\phi}_1 \dots$ が完全に同等でない場合には、各ベクトルの「新らしさ」に応じて重みをつけることができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \phi' &= \phi W \\ U' &= U W \\ W &= \begin{bmatrix} W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

$$C = \phi' U'^T (U' U'^T)^{-1} = \phi W^2 U^T)^{-1} \quad (3.2.7)$$

は、近似的に、最も新しい炉心の特性を表現していると考えることができる。 $W_i (i=1 \dots k)$ は正の数で、当然「新しい」情報に対応するものが相対的に大きな値を取る。

3.3 一定出力の問題

前節で述べたようにして、 C が決定できると云うのは、次の様な事情に基づくのである。すなわち、安定炉心では、(3.2.1) の条件が満たされていれば、任意の $\Delta \bar{u}$ に対して、安定な平衡状態 $\Delta \bar{\phi}$ が必ず1つ定まると云うことである。従って、 $\Delta \bar{u}$ は全く(上記の条件が満たされる限り)任意に取れるので、線型独立な $\Delta \bar{u}_i$ を k 個選び出すことができるのである。ところが、 $\Delta \bar{\phi}$ あるいは $\Delta \bar{u}$ に、ある条件を附すと、事情が変わって来る。現実の問題として、しばしば現われるのは、この節に述べる出力一定条件と、後に述べる零出力の問題である。

中性子束分布の制御を行なう時、原子炉全体の出力を一定に保つと云う要請が、しばしばなされるであろう。この出力一定と云う条件は、 (r, E) 空間のノードの定め方によってきまるあるベクトル p によって

$$p^T \Delta \bar{\phi} = 0 \quad (3.3.1)$$

と表現することができる。こうすると

$$p^T \Delta \bar{\phi} = p^T C \Delta \bar{u} = 0 \quad (3.3.2)$$

であるから、 Δu は $p^T C$ と必ず直交することになり、 Δu は最大 $r-1$ 個の自由度しか持たない。すなわち、

$$\text{rank } U \leq r-1 \quad (3.3.3)$$

となって、(3.2.5)あるいは(3.2.6)式でCを定めることはできないことになる。しかし、この議論は必ずしも正しくはない。

元来、行列Cは、(2.2.4)式のRを無視して得られたものである。従って厳密には、

$$\Delta \bar{\phi} = C \Delta \bar{u} + \epsilon (\Delta \bar{\phi}, \Delta \bar{u})$$

と表現すべきであろう。いずれにしても、 $\Delta \bar{\phi}$ は $\Delta \bar{u}$ の関数であるから、一般に

$$\Delta \bar{\phi} = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi}{(\partial u^T)^n} \bigg|_{(\phi_0, u_0)} \Delta \bar{u} \quad (3.3.3)$$

と書くことができる。^{*} $\Delta \bar{u}$ は微少な変化であるから $p^T \Delta \bar{\phi} = 0$ と云う条件は

$$p^T \frac{\partial \phi}{\partial u^T} \bigg|_{(\phi_0, u_0)} \Delta \bar{u} = - \frac{p^T}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^T \partial u} \bigg|_{(\phi_0, u_0)} \right) \Delta \bar{u} \quad (3.3.4)$$

が、出力一定の時に Δu に課せられる条件になる。上の条件は、決して Δu が線型独立であることを常にさまたげるものではない。HBWR で行なわれた実験では、Cを(3.2.5)あるいは(3.2.6)式で定め得ることが確かめられている。

注意すべきことは、(3.2.2)式は近似式であると云うことであって、厳密には

$$\Delta \bar{\phi}_i = C \Delta \bar{u}_i + O(\Delta \bar{u}_i^2)$$

なのであるから、(3.2.5)あるいは(3.2.6)式で、 $k=r$ として

$$C = \Phi U^{-1}$$

とするのは、必ずしも十分に炉心特性を盛り込んだCを与えないと云うことである。 $k > r$ と云うのは、非線型の影響を最小限にするための手続きであって、単に、例えば測定誤差の影響を免れると云った意味以上の必要性がある。HBWRにおける実験では、 $k=2r$ 程度にするのが、良い結果を与えていた。

3.4 最適制御則の決定

ある平衡状態 (ϕ_0, u_0) から出発して、希望する分布 ϕ_d に近づく問題を考えよう。こゝで

$$\Delta \phi_d \triangleq \phi_d - \phi_0 \quad (3.4.1)$$

* 附録A-1U参照

を定義しておく。こうすると、問題は $\Delta\phi = \Delta u = 0$ から、 Δu を操作して、 $\Delta\phi_d$ に最も近い $\Delta\phi$ を実現することにある。ここで、「最も近い」と云う意味を

$$J_0 = (\Delta\phi_d - \Delta\bar{\phi}_e)^T Q (\Delta\phi_d - \Delta\bar{\phi}_e) \quad (3.4.2)$$

を最小にする $\Delta\bar{\phi}_e$ のことであるとする。問題は従って、

$$\Delta\bar{\phi}_e = C\Delta\bar{u}_e \quad (3.4.3)$$

である様な $\Delta\bar{u}_e$ を求めることに帰着する。評価関数 J_0 に含まれる Q は、ある与えられた重みの行列で、正値、対称であるとする。(通常は対角行列である。)

(3.3.2)式に(3.3.3)式を代入すると

$$J_0 = \Delta\phi_d^T Q \Delta\phi_d - \Delta\phi_d^T Q C \Delta\bar{u}_e - \Delta\bar{u}_e^T C^T Q \Delta\phi_d \\ + \Delta\bar{u}_e^T C^T Q C \Delta\bar{u}_e$$

$$\frac{dJ_0}{d\Delta\bar{u}_e} = -2C^T Q \Delta\phi_d + 2C^T Q C \Delta\bar{u}_e = 0^*$$

$$C^T Q \Delta\phi_d = C^T Q C \Delta\bar{u}_e \quad (3.4.4)$$

(3.3.4)の $\Delta\bar{u}_e$ に対する解は、 C と性質によって、次の場合がある。

(1) $\text{rank } C^T Q C = r$

これは、 $N \geq r$ で、かつ $\text{rank } C = r$ の場合である。この場合には

$$\Delta\bar{u}_e = (C^T Q C)^{-1} C^T Q \Delta\phi_d \quad (3.4.5)$$

(2) $\text{rank } C^T Q C < r$

これは、 $N < r$ 、あるいは $N \geq r$ であっても、 $\text{rank } C < r$ の場合である。この場合は、制御棒の本数を減らして、(1)の場合に帰着させることができる。また、それが望ましくない場合には

$$\Delta\bar{u}_e = (C^T Q C)^+ C^T Q \Delta\phi_d \quad (3.4.6)$$

を解とするのが合理的と思われる。ここに $(\cdot)^+$ は、擬逆行列である。^{*}この解によれば、

* (3.3.2)は正値2次形式であるから、これが J_0 の最小値を与える。

* 附録A-6参照

J_0 のみならず、 $\Delta u_0^T \Delta u_0$ も最小、すなわち、最小の制御操作で制御の目的を達することができる。

3.5 安定炉心の平衡制御系の性質

前節まで述べて来たのは、2, 3節の分類に従えば、安定炉心の平衡制御の問題である。この問題は、さらに次章でも考察されるが、ここで、この問題の重要な性質を指摘しておくことにしよう。それは、安定炉心の平衡制御の場合には、制御は単段制御 (single stage control process) であるということである。このことは、次章で述べる制約の取り扱いなどに、非常に大きな意味を持つ事実である。次章、あるいは安定炉心の準平衡制御で述べる様に、 $\Delta \phi_d$ に接近するのに、何回かの制御操作を反覆する場合もあるが、これらの場合も、多段制御 (multi-stage control process) ではなく、一連の単段制御の繰り返しである。この点は、不安定炉心の場合と著しく異なる点である。

さらに指摘すれば、安定炉心の平衡制御の場合は、結局原点の移動に他ならないと云うことである。従って、(3.1.1) 後半の条件が満される限り、 A の性質、すなわち漸近安定性は影響を受けない。最初の出発点、 $(\Delta \phi, \Delta u) = (0, 0)$ が漸近安定であれば、単段制御の結果の $(\Delta \bar{\phi}_0, \Delta \bar{u}_0)$ もまた漸近安定である。

4. 制約のある場合の制御

4.1 考えられる制約

3.3節で求めた $\Delta\bar{u}_e$ は、何らの制約も考慮されていないものである。もちろん、現実には、さまざまな制約が Δu , $\Delta\phi$ に課せられている。たとえば、制御棒の引抜可能な距離は当然定まっていて、それ以上の移動は実現不可能である。そこで、ここでは、まずこの様な制約が一般に存在するかを考えて見よう。中性子束分布制御と云う特定の問題には、次の様な制約が一般に考えられるであろう。

(1)' 線型性の制約

前節で求めた $\Delta\bar{u}_e$ は、元来、炉心の線型近似(3.1.1)式に基いている。従って

$$(\Delta\psi(t), \Delta\bar{u}_e) \in \Omega_{\Delta} \quad \text{for all } t > 0 \quad (4.1.1)$$

が必要な条件である。但し、単段制御の場合には、 $\Delta\psi(t)$ は Δu_e によって一義的に定まるので、上記の条件は、結局

$$\Delta\bar{u}_e \in \Omega_{\Delta u}^1 \quad (4.1.2)$$

と書くことができる。これに対応して、

$$\Delta\bar{\phi}_e \in \Omega_{\Delta\phi}^1 \quad (4.1.3)$$

と云う条件を設定しても良いであろう。

(2)' 機械的制約

当然のことながら、制御棒はある決った範囲しか動かさない。さらにその範囲内であっても、制御棒の効果が著しく異なる様な範囲は不適當である。いずれにしても、制御棒の位置にはある制約があり、これを

$$u_0 + \Delta\bar{u}_e \in \Omega^m \quad (4.1.4)$$

と書くことにしよう。これと等価な制約を

$$\left. \begin{aligned} \Delta\bar{u}_e &\in \Omega_{\Delta u}^m \\ \Omega_{\Delta u}^m &= \{ \Delta u \mid u_0 + \Delta u \in \Omega_u^m \} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

と書くことにする。これと対応して

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{\phi}_e &\in \Omega_{\Delta \phi}^m \\ \Omega_{\Delta \phi}^m &= \{ \Delta \bar{\phi} \mid \Delta \bar{\phi} = C \Delta \bar{u}, \Delta \bar{u} \in \Omega_{\Delta u}^m \} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

とすることもできる。

(3)' 安全性の制約

各点の中性子束は、あるあらかじめ定められた値を越えてはならないと云う制約が、安全上の理由から要請されることが多い。許し得る範囲を Ω_{ϕ}^s としよう。まず

$$\phi_d \in \Omega_{\phi}^s \quad (4.1.7)$$

は当然満たされていなければならない。上の条件が満たされた上で

$$\phi_e(t) \triangleq \phi_0 + \Delta \phi(t) \in \Omega_{\phi}^s \quad \text{for all } t \quad (4.1.8)$$

が満たされねばならない。単段制御の場合には、 $\Delta \bar{u}_e$ が与えられれば、 $\Delta \phi(t)$ 、 $\Delta \bar{\phi}_e$ はたゞ一つ定まるので、上の条件は

$$\phi_e \triangleq \phi_0 + \Delta \bar{\phi}_e \in \Omega_{\phi}^{s'} \quad (4.1.9)$$

あるいは、実際には多くの場合

$$\psi_e \in \Omega_{\phi}^s \quad (4.1.10)$$

と書くことができよう。これより

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{\phi}_e &\in \Omega_{\Delta \phi}^s \\ \Omega_{\Delta \phi}^s &= \{ \Delta \bar{\phi} \mid \phi_0 + \Delta \bar{\phi} \in \Omega_{\phi}^s \} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.11)$$

が満足さるべき制約と考えることができる。これと対応して

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{u}_e &\in \Omega_{\Delta u}^s \\ \Omega_{\Delta u}^s &= \{ \Delta u \mid \Delta \bar{\phi} = C \Delta u, \Delta \bar{\phi} \in \Omega_{\Delta \phi}^s \} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.12)$$

と書くこともできる。

以上が、現実に考えられる制約の例であるが、さらにこれを一般化すれば、(1)' ~ (3)' は次の様に整理することができる。

- (1) Δu , あるいは $\Delta \phi$ に対する制約 ($\Omega_{\Delta u}^e$ あるいは $\Omega_{\Delta \phi}^e$)
- (2) u_0 に対する制約 (Ω_u^m あるいは $\Omega_{\Delta u}^m$)
- (3) ϕ_0 に対する制約 (Ω_{ϕ}^s あるいは $\Omega_{\Delta \phi}^s$)

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{u}_0 &\in \Omega_{\Delta u}^e \cap \Omega_{\Delta u}^m \cap \Omega_{\Delta u}^s \equiv \Omega_{\Delta u} \\ \text{あるいは} \\ \Delta \bar{\phi}_0 &\in \Omega_{\Delta \phi}^e \cap \Omega_{\Delta \phi}^m \cap \Omega_{\Delta \phi}^s \equiv \Omega_{\Delta \phi} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.13)$$

が、考慮すべき制約の一般的な形である。このような制約の下で、 J_0 を最小にすると云うのは、一般にはあまり簡単ではない。しかし、単投制御の場合には、次節で述べるように、比較的簡単に解決することができる。

4.2 制約を考慮した制御則 — 安定炉心の平衡制御の場合 —

4.2.1 Linear Downscale 法

前に述べた様に、安定炉心の平衡制御の場合には、希望する中性子束に最も近い分布を実現するのは、単投制御で良い。この場合には、操作量、あるいは中性子束分布に課せられている制約の取扱いは、比較的簡単である。その一つの取り扱いが、ここに述べる Linear Downscale 法である。この方法は、特に $\Omega_{\Delta \phi}^1$ または $\Omega_{\Delta u}^1$ に、 $\Delta \bar{\phi}_0$ 、あるいは $\Delta \bar{u}_0$ が入らない時に有効である。Fig. 4.2.1 に示すように、制約を考慮しない場合の $\Delta \bar{\phi}_0$ 、 $\Delta \bar{u}_0$ が

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{\phi}_0 &\notin \Omega_{\Delta \phi} \\ \Delta \bar{u}_0 &\notin \Omega_{\Delta u} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

であるとしよう。ここで、 $0 < \alpha < 1$ である様なスカラー量 α によって

$$\text{従って} \quad \left. \begin{aligned} \alpha \Delta \bar{u}_0 &\in \Omega_{\Delta u} \\ \alpha \Delta \bar{\phi}_0 &\in \Omega_{\Delta \phi} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

とすることができたとする。この様な α のうち、最大のものを取れば、 $\alpha \Delta \bar{\phi}_0$ は $\Omega_{\Delta \phi}$ の境界上にあると考えられる。そこで、まず $\alpha \Delta \bar{u}_0$ を実行して、とり合えず $\alpha \Delta \bar{\phi}_0$ まで進んでおく。ここで、原点を、 $(\phi_0 + \alpha \Delta \bar{\phi}_0, u_0 + \alpha \Delta \bar{u}_0)$ に移動させる。この原点の近傍でプロセスを線型化するが、その際、 $\alpha \Delta \bar{u}_0$ を実行した時に得られた情報を取り入れて (3.2.6) 式によって特性行列 \mathbf{Q} を修正する。この新しい原点から、再び希望する分布 ϕ_d を目指すので

ある。仮に制約のうち、 $\Omega_{\Delta\phi}^1$ 、あるいは $\Omega_{\Delta u}^1$ のみが満たされないとすると、領域は元来原点を中心とする近傍であるから、上の手続きにより、 $\Omega_{\Delta\phi}^1$ あるいは $\Omega_{\Delta u}^1$ を移動させることが可能となる。

以上の手順を反覆することにより、現在の分布 ϕ_0 と、 ϕ_d がかなり遠く離れている場合でも、有限回^{*}の単投制御の反覆によって、 ϕ_d に最も近い分布が実現されることになる。この方法が成功するためには、原点の移動に伴って、特性行列 C の修正が満足に行なわれることが必要である。概して云えば、 $\Omega_{\Delta\phi}^1$ あるいは $\Omega_{\Delta u}^1$ を、小さめに定めておいた方が、単投制御の反覆回数が増加し、結果としてより多くの情報によって C の修正がなされるので、 C の修正と云う観点のみからすれば望ましいことである。一方、反覆回数の増加は、それだけ制御に手間がかかることにもなるので、当然合理的な妥協がなされねばならない。たゞ重要なことは、このLinear Downscale法を採用する場合には、考慮すべき $\Omega_{\Delta\phi}^1$ あるいは $\Omega_{\Delta u}^1$ は、(4.1.1)から直接決められる領域よりも、小さくしておいた方が好結果を与えるだろうと云うことである。

4.2.2 Variable penalty法

Linear Downscale法は、極めて簡便な方法ではあるが、これは満足されない制約が $\Omega_{\Delta\phi}^1$ の様に、原点と共に移動する場合でないと、有効でなくなる場合が生ずる。機械的制約、安全性の制約などは、 (ϕ, u) 空間に固定された領域であるので、Fig. 4.2.2に示す様な場合には、一旦領域境界近くに到達すると、そこから先には進めなくなってしまう場合が起り得る。こゝでは、図に示す様に、機械的制約が満たされなかった場合に有効な方法を考えよう。一般に、操作量に機械的な制約が課せられた場合に、これを処理する簡便な方法は、評価関数として(3.3.2)式の代りに

$$J_1 = J_0 + \Delta \bar{u}^T H_1 \Delta \bar{u} \quad (4.2.3)$$

を取ることである。こゝで、 H_1 は対称な準正値行列とする。この評価関数に対する最適制御則は

$$\Delta u_1 = (C^T Q C + H_1)^{-1} C^T Q \Delta \phi_d \quad (4.2.4)$$

と与えることができる。^{**}この様な取り扱いで最も困難な点は、 H_1 をどの様に定めるかと云うことである。制御系の本来の目的は J_0 を最小にすることであるので、(4.2.3)式の右辺第2項の寄与が相対的に大き過ぎると、制約は満足されても、 J_0 の最小性は保証されなくなってしまう。第2項の寄与を必要最小限にするために、次の操作を行う。今、制約のない状態で計算された $\Delta \bar{u}_0$ の中で j 番目の要素が制約を満たさないとする。この時は、 H_1 として j 番目の対角要素(h_{1j} とする)のみが正の値で、他の要素はすべて0にする。 h_{1j} は

* 繰り返し有限回であるためには、(2.2.7)式の仮定が必要である。

** 逆行列が存在しない時は、擬逆行列を使えば良い。

$$h_{1j} = \alpha |u_{0j} + \Delta \bar{u}_{ej} - M|^\beta \quad (4.2.4)$$

とする。ここで、 u_{0j} 、 $\Delta \bar{u}_{ej}$ はそれぞれ u_0 、 $\Delta \bar{u}_e$ の j 番目の要素を示し、 M は、この操作量が動き得る範囲の中点である。 α 、 β は適当に定める定数である。こうして H_1 を定め、それによって制約を考慮した操作量 $\Delta \bar{u}_1$ を (4.2.4) 式によって求める。 $\Delta \bar{u}_1$ が依然として制約を満たさなければ、

$$h_{1j} = h_{1j} + \alpha |u_0 + \Delta \bar{u}_1 - M|^\beta \quad (4.2.5)$$

として H_2 を定め、以下この手順を反覆する。この様にすれば、(4.2.3) 式右辺第 2 項の寄与は僅かずつ増加して行き、同時に Δu_i は次第に制約領域の中に入って来ることになる。

4.2.3 Variable Weighting 法

4.2.2 では、機械的制約、すなわち u_e に対する制約を考慮した。ここでは、安全性の制約、すなわち ϕ_e に対する制約を考える。先にも述べた様に

$$\Delta \phi_d \in \Omega_{\Delta \phi}^S \quad (4.2.6)$$

は当然満たされていると考える。制約を考慮しない時の $\Delta \phi_e$ のいくつかの要素が制約を満たさないとすると、これらの要素に対する重みを増してやることによって、すべての要素が制約を満たすようにすることができるであろう。

そこで、まず

$$C^T Q C \Delta \bar{u}_e = C^T Q \Delta \phi_d \quad (4.2.7)$$

と云う関係で、 Q に僅かな変化 δQ が生じた時に、 $\Delta \bar{u}_e$ に生ずべき変化 δu を考える。2 次以上の項を無視すると

$$C^T \delta Q \delta \phi_d = -C^T Q C \delta u \quad (4.2.8)$$

$$\delta \phi_d \cong C \Delta u_e - \Delta \phi_d = \Delta \bar{\phi}_e - \Delta \phi_d \quad (4.2.9)$$

が得られる。(4.2.8) 式を行展開*して δu について解くと

$$\delta u^T = r s \{ \delta Q \} [C \times \delta \phi_d] [C^T Q C]^{-1} \quad (4.2.10)$$

* 附録 A-3 および 4. 参照

次に、 $\Delta\phi_e$ のある要素が制約を満していないとする。そこで、微小な変化 $\delta\phi$ を考えて

$$\Delta\bar{\phi}_e + \delta\phi \in \Omega_{\Delta\phi}^S \quad (4.2.11)$$

とできると考える。この $\delta\phi$ に対応する δu

$$\delta\phi = C\delta u \quad (4.2.12)$$

を δQ によって作り出せば良い。(4.2.10) の右側から C^T を乗ずると

$$\begin{aligned} \delta\phi^T &= r_B\{\delta Q\} [C \times \delta\phi_d] [C^T Q C]^{-1} C^T \\ &= r_B\{\delta Q\} B A \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

こゝに

$$B \triangleq C \times \delta\phi_d \quad (4.2.14)$$

$$A \triangleq [C^T Q C]^{-1} C^T$$

(4.2.13) は、このままの形でも取り扱うことができるが、こゝでは現実には起り易い場合として Q , δQ がそれぞれ対角行列である場合を考えて見よう。この場合には、 $r_B\{\delta Q\}$ の 1, $N+1, 2N+2, \dots, N^2$ 番目の要素のみが 0 でなく、従って対応する B の列のみが意味を持つ。意味を持つ列だけをとり出して、これを B_0 とすると

$$B_0 = \begin{bmatrix} C_{11}\delta\phi_{d1} & C_{12}\delta\phi_{d1} & \dots & C_{1r}\delta\phi_1 \\ \vdots & & & \\ C_{1N}\delta\phi_{dN} & \dots & & C_{Nr}\delta\phi_N \end{bmatrix} = \delta\phi C \quad (4.2.15)$$

こゝに、 $\delta\phi$ は、 $\delta\phi_d$ を対角要素とする対角行列である。さらに δQ の対角要素よりなるベクトルを δq と書くと、(4.2.13) より

$$\begin{aligned} \delta\phi &= C [C^T Q C]^{-1} C^T \delta\phi \delta q \\ &= G \delta q \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

$$G \triangleq C [C^T Q C]^{-1} C^T \delta\phi \quad (4.2.17)$$

が得られる。通常は $r \leq N$ であろうし、また

$$\text{rank } G \leq r$$

であるから、 G の逆行列は存在しないが、擬逆行列 G^+ を取れば

$$\delta q = G^+ \delta \rho \tag{4.218}$$

かつ、この時 $\|\delta q\|$ は最小である。すなわち、 Q に対する最小の修正によって、制約を満すことができる。

5. 時定数の長いフィードバック —安定炉心の準平衡制御—

5.1 時定数の長いフィードバック

前章までで、安定炉心の平衡制御系の骨格が述べられた。しかし、これから、現実の炉心に適用できる制御系を設計するためには、まだいくつかの問題を解決しておかねばならない。その1つは、状態変数の中には、極めて長い時定数を持つものがあると云うことである。原子炉では、燃焼、 X_e 効果などがこれに当る。特に X_e 効果は、多くの場合重要であるので、これからは、長い時定数を持つ状態変数の影響を、 X_e 効果で代表して考察することにしよう。

「 X_e 効果」は、大きく分けて2つの困難をもたらす。その第1は、特性行列 C の決定、あるいは修正に関するものである。3.2節で述べた様に、特性行列は、ある操作量 Δu を与えた時に生ずる中性子束変化の平衡値 $\Delta \bar{\phi}$ で定められる。 X_e 効果が無視できない場合、 $\Delta \bar{\phi}$ が実現されるまでには極めて長い時間、たとえば十数時間を要するので、(3.2.5)あるいは(3.2.6)式で C を決定、あるいは修正するのは、極めて非現実的である。さらに第2の困難として、よしんば C が決定されたとしても、これに基づいて作られた制御則は、極めて不満足な結果しか与えないと考えられる。この事情は、Fig. 5.1.1に示される。 X_e 効果に代表される極めて遅い状態変数以外のフィードバック、たとえば中性子の拡散、燃料あるいは減速材の温度、ボイド等々は、比較的短い時定数を持つので(高々10秒のオーダーと考えて良いであろう)、単投の操作量 Δu_0 を加えると、中性子束分布は ϕ_0 から比較的短時間で ϕ'_0 に到達し、次に極めてゆっくりと ϕ_0 に向って動き出すことになる。この ϕ'_0 が、希望する ϕ_d に最も近い分布であるが、このことはとりも直さず、制御を行ってから相当長い時間、中性子束分布は希望する分布からかなり距った所に留っていると云うことになるのである。この様な制御系は、現実には受け入れ難いものである。この章では、この困難を克服することを考える。

5.2 遅いモードの分離

前節で指摘した様に、通常の炉心では、 X_e 効果に代表される遅いフィードバックと、その他のフィードバックとの間には、時定数に著しい差があると考えて良い。このことから、プロセス

$$\dot{\Delta \psi} = A \Delta \psi + B \Delta u \quad (5.2.1)$$

を、速いモードと遅いモードに分離して記述することができる。まず、 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ ($\Delta \psi$ の次数を M とする)が離散的であると仮定する。 λ の実数部分は、すべて負であるから、(すなわち 0 でないから)、

$$A = V \Lambda V^{-1} \quad (5.2.2)$$

$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_M \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

と書くことができる。ここに V は、 λ_i に対応する固有ベクトルより成る行列である。 $t=0$ に、単投操作量 $\Delta \bar{u}$ を与えた時の (5.2.1) の解は

$$\Delta \psi(t) = G(t) \Delta \psi(0) + H(t) \Delta \bar{u} \quad (5.2.4)$$

$$G(t) \triangleq V F V^{-1} \quad (5.2.5)$$

$$F \triangleq \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_M t} \end{bmatrix}$$

$$H(t) \triangleq \int_0^t G(\tau) B d\tau = V \Lambda^{-1} (F(t) - E) V^{-1} B \quad (5.2.6)$$

ここに E は恒等行列である。プロセスは漸近安定であるから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0 \quad (5.2.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = -V \Lambda^{-1} V^{-1} B \quad (5.2.8)$$

平衡状態は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \psi(t) = \Delta \bar{\psi} = -V \Lambda^{-1} V^{-1} B \Delta \bar{u} \quad (5.2.9)$$

上式から明らかな様に、プロセスの時定数は λ_i であり、また炉心特性行列は $-V \Lambda^{-1} V^{-1} B$ の部分行列になっている。そこで、 λ_i の実数部分を比較して、これを

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & \Lambda_s \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} F_f & 0 \\ \Lambda & F_s \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.10)$$

と並べかえる。添字の f, s は、それぞれ時定数の短い(すなわち応答の速い)モードと、長い(遅い)モードを表わす。これに対応して V も並べかえておいたとし、かつ V^{-1} を W と書き、適当に部分行列に分けると、

$$G = V \begin{bmatrix} F_f & 0 \\ 0 & F_s \end{bmatrix} W$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_f & 0 \\ 0 & F_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} V_{11} F_f W_{11} & V_{11} F_f W_{12} \\ V_{21} F_f W_{11} & V_{21} F_f W_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{12} F_S W_{21} & V_{12} F_S W_{22} \\ V_{22} F_S W_{21} & V_{22} F_S W_{22} \end{bmatrix} \\
 &\cong G_f + G_S \tag{5.2.11}
 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{bmatrix} V_{11} \wedge_f^{-1} (F_f - E) W_{11} & V_{11} \wedge_f^{-1} (F_f - E) W_{12} \\ V_{21} \wedge_f^{-1} (F_f - E) W_{11} & V_{21} \wedge_f^{-1} (F_f - E) W_{12} \end{bmatrix}^B \\
 &+ \begin{bmatrix} V_{12} \wedge_S^{-1} (F_S - E) W_{21} & V_{12} \wedge_S^{-1} (F_S - E) W_{22} \\ V_{22} \wedge_S^{-1} (F_S - E) W_{21} & V_{22} \wedge_S^{-1} (F_S - E) W_{22} \end{bmatrix}^B \\
 &\cong H_f + H_S \tag{5.2.12}
 \end{aligned}$$

これより (5.2.4) 式は

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi(t) &= G_f \Delta\psi(0) + H_f \Delta\bar{u} \\
 &+ G_S \Delta\psi(0) + H_S \Delta\bar{u} \tag{5.2.13}
 \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで ρ_f を \wedge_f の要素の実数部分の絶対値の最小値, ρ_S を \wedge_S のそれの最大値として,

$$\frac{1}{\rho_f} \ll t \ll \frac{1}{\rho_S} \tag{5.2.14}$$

である様な時間 t が存在するとしよう。この様な t の全体の集合を $\{T\}$ とすると, $t \in \{T\}$ については,

$$\left. \begin{aligned} F_f &\cong 0 \\ F_S &\cong E \end{aligned} \right\} \tag{5.2.15}$$

と近似することができる。この場合には

$$\begin{aligned}
 G_f &\cong 0 \\
 G_s &\cong \begin{pmatrix} V_{12} & W_{21} & V_{12} & W_{22} \\ V_{22} & W_{21} & V_{22} & W_{22} \end{pmatrix} \cong \bar{G}_s \\
 H_f &\cong \begin{pmatrix} V_{11} \wedge_f^{-1} W_{11} & V_{11} \wedge_f^{-1} W_{12} \\ V_{21} \wedge_f^{-1} W_{11} & V_{21} \wedge_f^{-1} W_{12} \end{pmatrix} \cong \bar{H}_f \\
 H_s &\cong 0
 \end{aligned}
 \tag{5.2.16}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi(\tau) &\cong \bar{G}_s \Delta\psi(0) + \bar{H}_f \Delta\bar{u} \\
 \tau &\in \{T\}
 \end{aligned}
 \tag{5.2.17}$$

そこで、 $\tau=0$ で $\Delta\psi(0)=0$ になる様に原点を定めたとすると*

$$\Delta\psi(\tau) \cong \widetilde{\Delta\psi} = \bar{H}_f \Delta\bar{u} \quad \tau \in \{T\}
 \tag{5.2.18}$$

上式の右辺は時間に対して一定であるので、 $\Delta\psi(\tau)$ はほぼ一定、すなわち、 $\tau \in \{T\}$ の範囲では $\Delta\psi(\tau)$ はほぼ平衡状態と見なすことができる。この状態を、準平衡状態と呼ぶことにしよう。準平衡状態に対する(拡張された)炉心特性行列は、明らかに \bar{H}_f の部分行列になっている。 \bar{H}_f は、遅いモードを含んでいないので、炉心特性行列も、速いモードだけで決定することができ、(3.2.5)あるいは(3.2.6)式は、現実的な時間で実行することができる。また、この様にして定められた炉心特性行列に基づく $\Delta\bar{u}$ は、比較的短時間で中性子束分布を $\Delta\phi_d$ に近い点に移動させることができる。

しかしながら、この様にして得られた $\Delta\bar{u}$ は、中性子束分布をいつまでも $\widetilde{\Delta\psi}$ に保つことはできない。時間が経過して $\tau \in \{T\}$ になると、中性子束分布は次第に ϕ_d から遠ざかって行くことになる。このことは、(5.2.18)式がもはや成立しなくなったこと、従って速いモードだけで定めた炉心特性行列が次第に変化していることと見なすことができる。そこで、中性子束分布が ϕ_d から無視できない程度に遠ざかった時点で、速いモードに対応する特性行列を修正して、再び ϕ_d を目指す制御操作を反覆する必要が生ずる。 τ が十分大きくなれば、遅いモードも ϕ_d の近傍で平衡に到達するはずであるから、この反覆は有限の回数で良いであろう。これを要するにXθ効果に代表される遅いモードがある場合には、速いモードに対応する制御操作を有限回反覆することによって、所期の目的を達することができることになる。

* この場合、原点は平衡状態であるとは限らない。

6. 零出力炉心

6.1 零出力炉心の問題点

本章で云う「零出力」とは、フィードバックのない状態を意味する。通常の動力炉の場合、何らかのフィードバックは必ず存在するので、中性子分布制御系が、大型動力炉の炉心を念頭におく限り、零出力炉心を考察することは余り意味がない様に見える。それにもかゝらず、こゝであえて零出力炉心の問題を取り上げるのは、次の理由による。

第1に、零出力炉心の持つ、炉物理的な意味が上げられる。零出力炉心は、複雑なフィードバックを取り除いた、いわば理想化された体系であるから、これを考えることによって、前章までに提示された諸関係の物理的な意味がより明確にできることが期待される。

第2の理由は、零出力炉心が、原理的に漸近安定ではないと云う、やゝ特殊な性質に由来する。零出力炉心では、中性子束の相対的な分布は定まっても、その絶対値は定まらないし、またこれに単段操作量 Δu を加えた場合、 Δu によって生ずる反応度変化が0でない限り発散してしまうと云う特殊な性質を持っている。この様な体系では、炉心特性行列が定義され得るか、またされ得るとしても、(3.2.5)あるいは(3.2.6)式の方法で、決定し得るか、と云うのは、興味のある問題である。この問題は、Versluis⁴⁾によって取り扱われた。次章以下は彼によって得られた解に基づいている。

6.2 零出力炉心の摂動論的取扱

時間依存の拡散方程式

$$\left(\frac{d}{dt} - B^0\right)\phi^0 = 0 \quad (6.2.1)$$

を考えよう。こゝで B^0 は

$$B^0 = -D\nabla^2 + \Sigma - F \quad (6.2.2)$$

D : 拡散係数行列

∇^2 : 有限階差化されたラプラシアン

Σ : 除去断面積行列

F : 核分裂行列

である。エネルギーが多群の場合には、 B^0 は対称ではないが、その固有値が実数であることが知られている。フィードバックがなく、かつ B^0 が時間に対して一定であるとする、(6.2.1)式は次の形に解ける。

$$\phi^0 = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i^0 e^{\lambda_i^0 t} \quad (6.2.3)$$

すなわち、恒等行列を E と表わして、

$$(\lambda_i^0 E - B^0) \phi_i^0 = 0 \quad (6.2.4)$$

炉が臨界である場合には、

$$0 = \lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_2^0 \cdots > \lambda_{N-1}^0 \quad (6.2.5)$$

となり、基本モード ϕ_0^0 のみが定常的に存在する。

炉を臨界に保ちながら、制御棒の配置を少し変化させ、その結果

$$\left. \begin{aligned} B &= B^0 + \Delta B \\ \phi_i &= \phi_i^0 + \Delta \phi_i \\ \lambda_i &= \lambda_i^0 + \Delta \lambda_i \end{aligned} \right\} \quad (6.2.6)$$

$$(\lambda_i E - B) \phi_i = 0 \quad (6.2.7)$$

である。炉は依然として臨界であるから

$$\lambda_0 = 0 \quad \Delta \lambda_0 = 0$$

で、高次モードは時間と共に減衰する。我々にとって興味があるのは $\Delta \phi_0$ であって、

$$(B^0 + \Delta B) \Delta \phi_0 = -\Delta B \phi_0^0 \quad (6.2.8)$$

は上式より直ちに導かれる。上式の $\Delta \phi_0$ に関する解は、一義的ではない。このことは次の様に示すことができる。今、 $\Delta \phi_0^P$ を、(6.2.8) の一つの特解としよう。a を任意のスカラとして

$$\begin{aligned} (B^0 + \Delta B) (\Delta \phi_0^P + a \phi_0^0) &= (B^0 + \Delta B) \Delta \phi_0^P + a B \phi_0^0 \\ &= (B^0 + \Delta B) \Delta \phi_0^P \\ &= -\Delta B \phi_0^0 \end{aligned}$$

すなわち、 $\Delta \phi_0^P + a \phi_0^0$ もまた解である。さらに、(6.2.8) 式の解は、 ΔB がある条件を満たさない限り存在しない。このことはある意味で当然であって、制御棒を動かしても臨界を保つためには、全く勝手に制御棒を動かすことはできないのである。 ΔB に課せらるべき条件は、 ϕ_0^0 の随伴中性子束 $\bar{\phi}_0^T$ を (6.2.8) の左側から乗ずることによって

$$\bar{\phi}_0^T \Delta B \phi_0^0 = \bar{\phi}_0^T (B^0 + \Delta B) \Delta \phi_0 = 0 \quad (6.2.9)$$

と示すことができる。この条件が成立する場合に限り、

$$\Delta \phi_0 = \Delta \phi_0^P + a \phi_0 \quad (6.2.10)$$

が1つの解となる。ここで、固有ベクトルとその随伴ベクトルが規格化されているとしよう。すなわち、

$$\bar{\phi}_i^0 T \phi_j^0 = \bar{\phi}_i^T \phi_j = \delta_{ij} \quad (6.2.11)$$

そこで、(6.2.10)の左から $\bar{\phi}_0^{T^*}$ を乗ずると

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_0^T \Delta \phi_0 &= \bar{\phi}_0^T \Delta \phi_0^P + a \bar{\phi}_0^T \phi_0 \\ &= \bar{\phi}_0^T \Delta \phi_0^P + a \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

これより

$$a = \bar{\phi}_0^T \Delta \phi_0 \quad (6.2.13)$$

と選ぶと、

$$\bar{\phi}_0^T \Delta \phi_0^P = 0 \quad (6.2.14)$$

すなわち $\Delta \phi_0^P$ と $\bar{\phi}_0^T$ は直交する。このことは、 $\Delta \phi_0^P$ は、 ϕ_i ($i=1, \dots, N-1$)で展開できることを意味する。よって

$$\Delta \phi_0^P = \sum_{n=1}^{N-1} C_n \phi_n \quad (6.2.15)$$

これを(6.2.8)式に代入し、左から $\bar{\phi}_m^T$ を乗ずると

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_m^T (B^0 + \Delta B) \sum_{n=1}^{N-1} C_n \phi_n &= \lambda_m \bar{\phi}_m^T \sum_{n=1}^{N-1} C_n \phi_n \\ &= \lambda_m C_m = \bar{\phi}_m^T \Delta B \phi_0^0 \end{aligned}$$

よって

$$C_m = \frac{1}{\lambda_m} \bar{\phi}_m^T \Delta B \phi_0^0 \quad (6.2.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi_o^P &= \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n^o \frac{1}{\lambda_n} \bar{\phi}_n^T \Delta B \phi_o^o \\ \Delta \phi_o &= a \phi_o^o + \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n^o \frac{1}{\lambda_n} \bar{\phi}_n^T \Delta B \phi_o^o \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

(6.2.11), (6.2.13) 両式より

$$a = \frac{1}{2} \Delta \bar{\phi}_o^T \Delta \phi_o \quad (6.2.18)$$

ΔB が微小であり，従って $\Delta \phi_o$ も微小で，2次以降の項を無視すると

$$\begin{aligned} \Delta \phi_o &\cong \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n^o \frac{1}{\lambda_n} \bar{\phi}_n^T \Delta B \phi_o^o \\ &= \left[\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n^o \frac{1}{\lambda_n} \bar{\phi}_n^T \right] (\phi_o^o \times \frac{E}{N}) \Delta \sigma \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

こゝに $\Delta \sigma$ は ΔB の列展開で作られるベクトルである。炉心のフィードバックはないから， ΔB 従って $\Delta \sigma$ は制御棒の動によるのみ定まる。制御棒の動き Δu が微小であれば

$$\Delta \sigma = M \Delta \bar{u} \quad (6.2.20)$$

と書くことができる。従って

$$\Delta \phi_o = C \Delta \bar{u} \quad (6.2.21)$$

$$C \cong \left[\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n^o \frac{1}{\lambda_n} \bar{\phi}_n^T \right] (\phi_o^o \times \frac{E}{N}) M \quad (6.2.22)$$

これが零出力炉心の炉心特性行列である。

6.3 零出力炉心特性行列の決定

(6.2.22) 式で定義された零出力炉心特性行列は，(3.2.5)あるいは(3.2.6)式によって，実験的に決定できるであろうか。この問題は，原子炉が終始臨界である，すなわち， $\Delta \bar{u}$ によって与えられる反応度変化が0であると云う条件の下で， r ヶ以上の線型独立な Δu が存在するかと云う問題と等価である。

臨界条件は，(6.2.9)式で与えられる。(6.2.9)式左辺を列展開し，(6.2.20)式と組み合わせると，臨界条件は，

$$\bar{\phi}_o^o \times (\phi_o^o \times \frac{E}{N}) M \Delta \bar{u} + \Delta \bar{\phi}_o^T (\phi_o^o \times \frac{E}{N}) M \Delta \bar{u} = 0 \quad (6.3.1)$$

右辺第2項の $\Delta \bar{\phi}_0^T$ は $\Delta \bar{u}$ の関数であるから、この項は $\Delta \bar{u}$ の2次以上の項を含む非線型項である。仮にこの項が0であるとする、第1項は、 $\Delta \bar{u}$ と、炉心の初期状態で定まるベクトルとが直交することを示す。この時、 $\Delta \bar{u}$ の持つ自由度は高々 $r-1$ であり、(3.2.5)式の位数もまた高々 $r-1$ であるから、 C は決定できないことになる。しかし、第2項が入った(6.3.1)の条件の下では、 $\Delta \bar{u}$ は常に線型従属であるとは限らないので、3.3で述べた様に、 r ヶ以上の線型独立な $\Delta \bar{u}$ を選ぶことができる可能性がある。しかし、この条件の下で、 r ヶ以上の独立な $\Delta \bar{u}$ が存在し得ると云う厳密な証明は、まだ得られていない。

7. 不安定炉心の制御系

7.1 不安定炉心

これまで、主として原点が漸近安定であるプロセスについての、平衡あるいは準平衡制御について議論して来た。現実存在する炉心は、そのほとんどがこの性質を持っているので、前章までの理論は、ほとんどすべての現存する炉心について適用することができるはずである。しかし、 X_0 の空間振動、あるいは Pu などの正の温度係数などによって、漸近安定でない炉心も存在し得る。前章の零出力炉心もまた、漸近安定でない系の一例である。そこで本章では、これらについて一括して考察することにしてしよう。

炉心の安定性は、基本運動方程式 (2.2.6) の行列 A の固有値によって論ずることができる。すなわち、

- (1) すべての固有値の実数部分が負である場合。
- (2) ある固有値の実数部分が正である場合。
- (3) ある固有値が純虚数である場合。
- (4) ある固有値が 0 である場合。

(1) は、既に議論した漸近安定な場合である。(2) は完全に不安定、(3) は一般には振動的であって、共に単段操作量で平衡状態を維持することができない。(4) の場合には、その原因が 2 通りあると考えられる。一つは、 $\Delta\psi$ の中に、重複した情報が含まれる場合である。この場合には、 $\Delta\psi$ の次数を減らして、0 固有値を除去することができる。他の一つは、ゼロ固有値がプロセスの物理的な性質に由来していて、除去不能な場合で、零出力炉心はその例である。通常の炉心では、何らかのフィードバックが有意の程度で存在すれば、固有値が 0 の場合は、除去可能であると考えて良いであろう。従って、第 6 章で取り上げた零出力炉心を除けば、現実の炉心は、(1)~(3) のいずれかに帰着すると考えられる。本章では、(2) および (3) の場合について考察する。

7.2 不安定炉心の安定化

簡単のために、前節の (2)、(3) の場合を、一括して「不安定炉心」と呼ぶことにしよう。不安定炉心の場合といえども、これが運転され得るためには、何等かの方法で安定化してやらねばならない。単段操作量では、プロセスの安定化は不可能であるから、安定化のためには、多段もしくは連続操作量で炉心を制御しなければならない。そこで、まず操作量が連続の場合について考えよう。運動方程式は

$$\Delta\dot{\psi} = A\Delta\psi + B\Delta u \quad (7.2.1)$$

ただし、 A はこの場合不安定であり、 Δu は時間と共に連続的に変化するとする。まず、(7.2.1) のプロセスを、 $\Delta\psi_a$ 近傍に維持することを考える。評価関数として、

$$J_T = \int_0^T [(\Delta\psi - \Delta\psi_d)^T Q (\Delta\psi - \Delta\psi_d) + \Delta u^T H \Delta u] dt \quad (7.2.2)$$

を取ることにする。これは、線型のプロセスに対して、二次形式の評価関数を最小にする問題であるから、操作量は $\Delta\psi - \Delta\psi_d$ の線型変換として、

$$\Delta u_e = F_T (\Delta\psi - \Delta\psi_d) \quad (7.2.3)$$

の形で与えられる。よって、

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\psi} &= A\Delta\psi + BF_T (\Delta\psi - \Delta\psi_d) \\ &= (A + BF_T) \Delta\psi - BF_T \Delta\psi_d \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

この炉心が実際に運転可能であるための必要条件は、 $A + BF_T$ が原点に対して漸近安定であることである。^{*} またこの条件が満たされた場合には、右辺第2項は、 $\Delta\psi_d$ が一定である場合には、これに対応する単段操作量になっている。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\psi} &= A' \Delta\psi - B \Delta\bar{u} \\ \Delta\bar{u} &= F_T \Delta\psi_d \\ A' &\triangleq A + BF_T \end{aligned} \right\} \quad (7.2.5)$$

と書くならば、制御の問題は、結局前に述べた安定炉心の場合と形式的に一致する。しかもこの場合、制御則 F_T は既に与えられているわけである。従って、もし不安定炉心がある最適線型制御則で安定化されるならば、その制御則がとりも直さず、最適中性子束分布系を与えることになる。

ただし、この場合には、操作量は連続（あるいは多段）であるから、制約の取り扱いは、単段制御の場合の様に単純化することはできない。制約は、(7.2.2)式のHと云う行列で取り扱われることになるが、この行列を解析的に定めることは、かなり困難である。

* X_e が不安定性の主たる要因である場合には、 $A + BF_T$ を漸近安定にすることが原理的に可能である。(5)

8. 極めて大きい炉心の制御系

前章までに述べて来た制御系を、現存する動力炉の炉心に適用しようとする場合に予想される困難の一つは、炉心が極めて大きく、また要求される制御の質が高度になると、各行列の次数が大きくなり過ぎて、通常考えられるプロセス計算機では扱いかねることが起り得ることである。この様な場合の制御系の構成をどうするかは、未だ将来の課題に止まっているが、こゝでは一つの着想を紹介して置くことにしよう。もちろん、これは未だ着想の段階で、他にも種々考えられるであろう方法との比較はもちろん、この着想自体まだ完結したものでないことをお断りしておく。

まず制御系を2重の構造にし、最初に炉心全体を「粗調整」し、次に局所的な「微調整」を行なうことにする。言葉を代えれば、2レベル制御系にする訳である。まず炉心をLヶの領域に分け、各領域内で中性子ベクトル、操作ベクトルを定義する。これを $\Delta\phi^i, \Delta u^i$ ($i=1, \dots, L$) としよう。領域の分け方と、ノードの取り方とで決る適当な重みのベクトル e_i, f_i によって

$$\Delta\phi_i \cong e_i^T \Delta\phi^i \quad (8.1)$$

$$\Delta V_i \cong f_i^T \Delta u^i \quad (8.2)$$

を定義し、これでその領域の中性子束と操作量を代表させる。これから

$$\Delta\phi \cong [\Delta\phi_1, \dots, \Delta\phi_L]^T \quad (8.3)$$

$$\Delta V \cong [\Delta V_1, \dots, \Delta V_L]^T$$

を定義し、炉心全体の特性行列をSとして

$$\Delta\phi = S\Delta V \quad (8.4)$$

と書けたとする。これよりある与えられた希望分布 $\Delta\phi_d$ に接近する方法は、既に述べて来た通りである。次に、i番目の領域に着目して、こゝでの中性子束分布を

$$\Delta\phi^i = C^i \Delta u^i + R^i \Delta\phi \quad (8.5)$$

として、これに基づいて領域内の分布を制御する。この場合、各領域内での制御操作が、他の領域に影響を及ぼすことを最小限にする必要がある。従って各領域内での制御系の制約として、

$$f_i^T \Delta u^i = \Delta V_i \quad (8.2)$$

あるいは

$$e_i^T \Delta \phi^i = \Delta \phi_i$$

としておく。

2つの拘束条件の差について若干触れると、(8.2)が厳密に守られると、領域内特性行列の決定、修正ができなくなる恐れがある。そこで、(8.3)の条件を取り上げる方が良いのではないかと考えられる。

制御の実行手順としては、まず $\Delta \phi$ について制御を行い、これが完了した時点で、新たに得られた分布を原点として、各領域の制御を行なう。こうすると、 $\Delta \phi = 0$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi^i &= C^i \Delta u^i \\ e_i^T \Delta \phi^i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

となり、結局3.3に述べた一定出力条件下の制御に一致する。

さて、この様に2レベル構成にした場合の効果について若干調べてみよう。まず、この効果は一般には炉心を L 等分した時に最も現われて、制御系全体の必要な容量はほぼ $1/L$ になり、またコアに同時に記憶しなければならないデータ数はほぼ $1/L^2$ になることが期待できる。従って、補助記憶装置(ディスク、ドラム、テープ等々)を有効に使用することを考えれば、非常に大きな炉心についても、この制御系の適用は可能となると思われる。

9. HBWR での実験結果

最後に、今迄述べて来た理論を実証するために、ハルデンのHBWRで行なわれた実験結果を紹介しておこう。実験はまず一定出力レベルでの制御を1970年9月に、また分布と同時に出力レベルをも変更する実験を1971年12月に行なった。実験は、7本の制御棒で、炉心内18点の中性子束を制御するものである。実験結果の中から、これ迄述べて来た理論にとって重要な部分について以下に述べる。

9.1 特性行列の挙動

本報告で述べている理論にとって重要な前提となるのは、炉心特性行列が実験的に決定され、かつ炉心の状態の変化に応じて修正されて行く点である。本実験に先だつ予備実験で、特性行列が実験的に定め得ること、またHBWRでは $k \geq 2r$ 程度で十分であることが確かめられていた。本実験では、炉心の状態の変化によって、特性行列の修正がうまく行くかどうか調べられた。Fig. 9.1.1に実験結果の一例を示そう。この例では、Run1とRun2の間で、手で制御棒の配置をかなり大きく変えた。従ってRun2は、正しくない特性行列をもって開始された。制御操作を実行すると、直ちに制御系は特性行列が正しくないことを検出してこれを修正し、以後は特性行列はほぼ一定になっている。Run2以降も、特性行列は僅かに変化しているが、これは各Runでの制御棒操作による僅かな炉心特性の変化に対応していると解せられる。この様に、特性行列の修正は極めて満足に行なわれることが実証された。なお、図では簡単のために、特性行列の2つの要素の挙動のみを示した。

9.2 制御系の制御能力

これまで述べて来た制御系は、それでは全体としてどの程度の制御能力を有するのであろうか。制御能力は、(3.3.2)式の J_0 の減少の様子で調べることができるであろう。ただし、 J_0 の減少は、様々な要因によって影響を受ける。たとえば、与えられた $\Delta\phi_d$ が物理的に全く実現不可能な場合には、 J_0 の減少はあまり期待できない。そこで、実現可能であることが確実にわかっている分布を $\Delta\phi_d$ として与えた場合の J_0 の減少例を、Fig. 9.2.1に示す。この例では、Run9では、ほとんど J_0 の減少がなくなったが、これは、制御棒が連続的でなくステップ状に動かされる機構になっているので、Run9で制御系から要求された微小な制御棒の駆動を、DDCルーチンが実現できなかったためである。また、 J_0 が十分減少するまで3~4回のRunを反覆しているが、これは線型性の制約として、制御棒の動きを最大10cmとしたためである。いずれにしても、 J_0 は顕著な減少を示し、この制御系が十分な制御能力を有していることが示されている。

10. 結 論

- 以上述べて来た制御系の特徴は、次の様に要約することができるであろう。すなわち、
- (1) 制御系のパラメータ（炉心特性行列，制御則等々）には，何らの先験的な物理的モデルを必要とせず，全く実験的に決定できること。
 - (2) 制御パラメータは，炉心特性の変化に応じて，自動的に修正されること。
 - (3) $X \neq$ その他の，遅いフィードバックのある炉心に対しても，速やかに中性子束分布を変更し，かつこれを維持できること。
 - (4) 不安定炉心と安定炉心との制御系の差が明確になったこと。

などがあげられる。さらに，この制御系の能力が，小規模ながら，現実の炉心に対して実証されていると云う点が，大きな強味であると云えるであろう。

一方，今後の課題としては，極めて大きい炉心に対する制御系の設計と，過渡状態制御の問題がある。前者については，マルチレベル制御理論の概念を応用した着想例を示したが，この様な発展の見通しが比較的たてやすいと云うのも，この理論の一つの特長と云って良いであろう。後者については，1973年以降，ハルデン計画で取り上げることになっており，成果が期待される。

謝 辞

本研究は，筆者が1969年より71年まで，OECD Halden Reactor Project に滞在している間になされたものである。同ProjectのControl Research Div. のJ. E. Lunde 部長には，絶えず激励と，有益なコメントをいただいた。また，炉心特性行列による炉心の記述は，R. Grumbach 氏によって，直観的に着想され，以後この研究は，同氏のリーダーシップの下で行なわれたものである。R. Versluis 氏は，筆者と共に，この制御系の理論の体系化に当られ，特に零出力炉心の研究は，同氏に負う所が大きい。実験に当っては，F. Haferl, F. Griess, B. Blomsnes, M. Nevalainen, T. Björlo 諸氏の協力を得た。これらの諸氏に，こゝで深く感謝の意を表す。

10. 結 論

以上述べて来た制御系の特徴は、次の様に要約することができるであろう。すなわち、

- (1) 制御系のパラメータ（炉心特性行列，制御則等々）には，何らの先験的な物理的モデルを必要とせず，全く実験的に決定できること。
- (2) 制御パラメータは，炉心特性の変化に応じて，自動的に修正されること。
- (3) X_0 その他の，遅いフィードバックのある炉心に対しても，速やかに中性子束分布を変更し，かつこれを維持できること。
- (4) 不安定炉心と安定炉心との制御系の差が明確になったこと。

などがあげられる。さらに，この制御系の能力が，小規模ながら，現実の炉心に対して実証されていると云う点が，大きな強味であると云えるであろう。

一方，今後の課題としては，極めて大きい炉心に対する制御系の設計と，過渡状態制御の問題がある。前者については，マルチレベル制御理論の概念を応用した着想例を示したが，この様な発展の見通しが比較的たてやすいと云うのも，この理論の一つの特長と云って良いであろう。後者については，1973年以降，ハルデン計画で取り上げることになっており，成果が期待される。

謝 辞

本研究は，筆者が1969年より71年まで，OECD Halden Reactor Project に滞在している間になされたものである。同ProjectのControl Research Div. のJ. E. Lunde 部長には，絶えず激励と，有益なコメントをいただいた。また，炉心特性行列による炉心の記述は，R. Grumbach 氏によって，直観的に着想され，以後この研究は，同氏のリーダーシップの下で行なわれたものである。R. Versluis 氏は，筆者と共に，この制御系の理論の体系化に当られ，特に零出力炉心の研究は，同氏に負う所が大きい。実験に当っては，F. Haferl, F. Griess, B. Blomsnes, M. Nevalainen, T. Björlo 諸氏の協力を得た。これらの諸氏に，こゝで深く感謝の意を表す。

参 考 文 献

- (1) H. Mogard et al ; P/315 4-th Geneva Conf (1971)
- (2) R. Grunbach, K. Sato ; R. Varsluis ; Theoretical Aspects of an Adaptive System for Neutron Flux Distribution Control , HPR-149 (1972)
- (3) R. Grunbach ; Entwicklung und Erprobung eines Verfahrens zur Rechner-Regelung der Neutronenflussverteilung in einem Leistungs-Reaktor, Doctoral thesis to Der Technischen Universität München (1972)
- (4) R. Varsluis ; 私信 (1971)
- (5) K. Sato ; Conditions for the Applicability of the HBWR Core Control Concept to Other Nuclear Reactors , HIR-58 (1971)

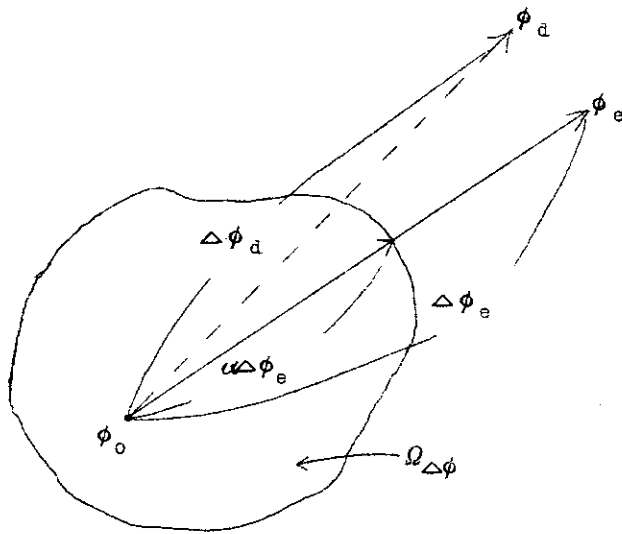


Fig. 4.2.1 Linear Downscale Method

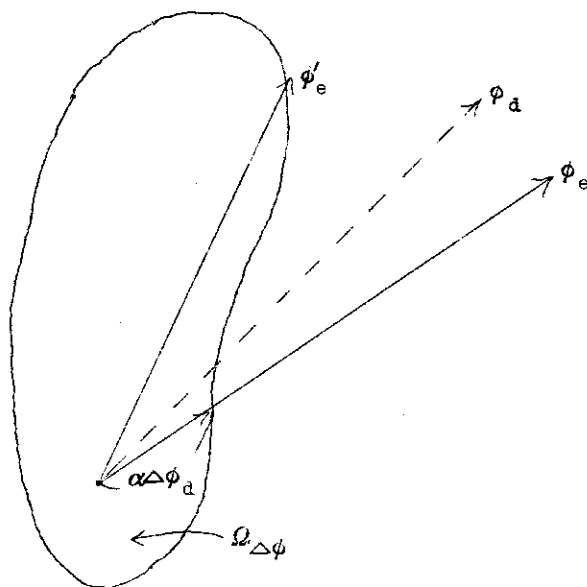


Fig. 4.2.2 Variable Penalty Method

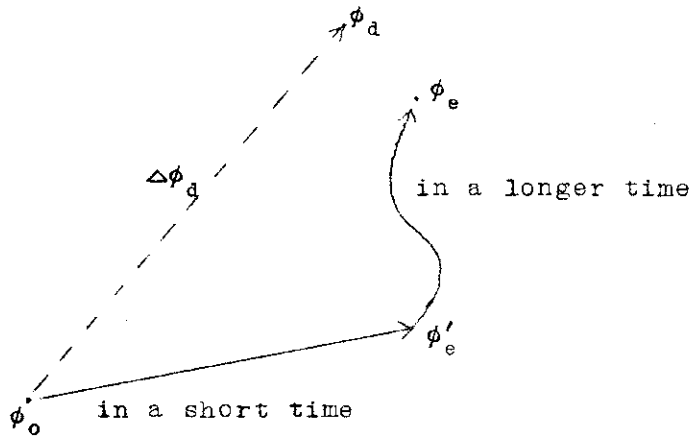


Fig. 5.1.1 Flux behaviour with very slow feedbacks

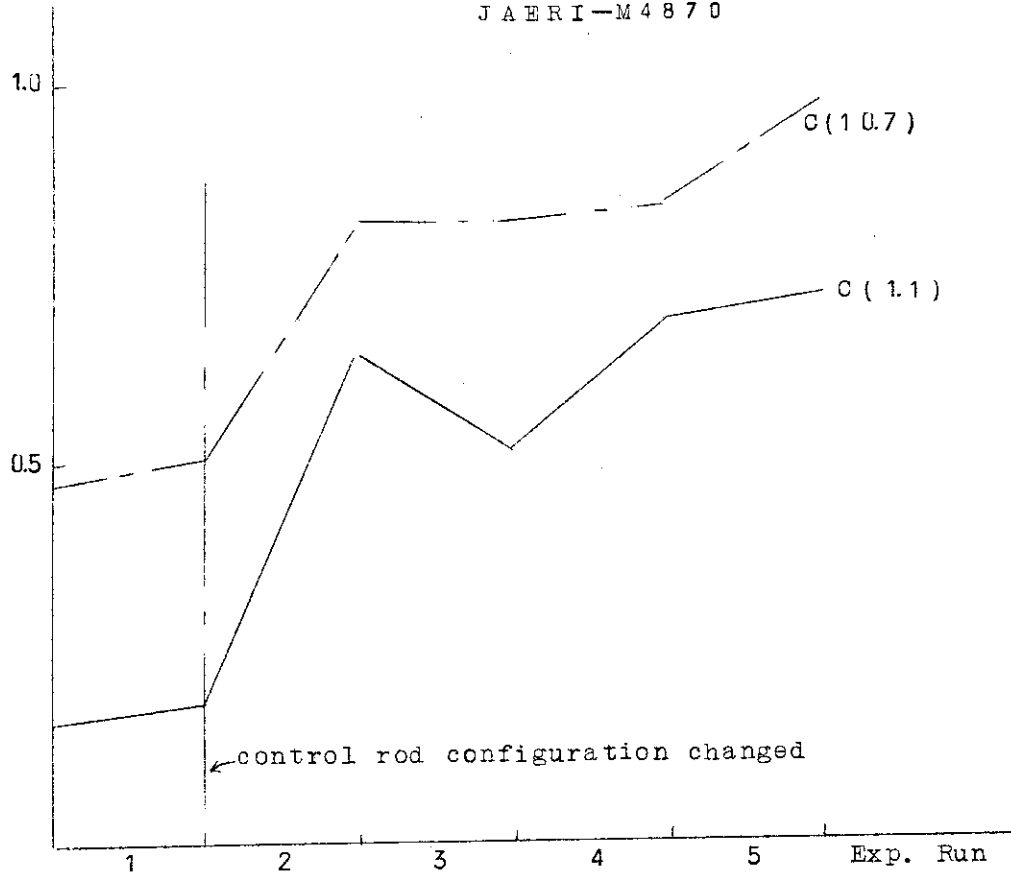


Fig. 9.1.1 Adaptability of Matrix C

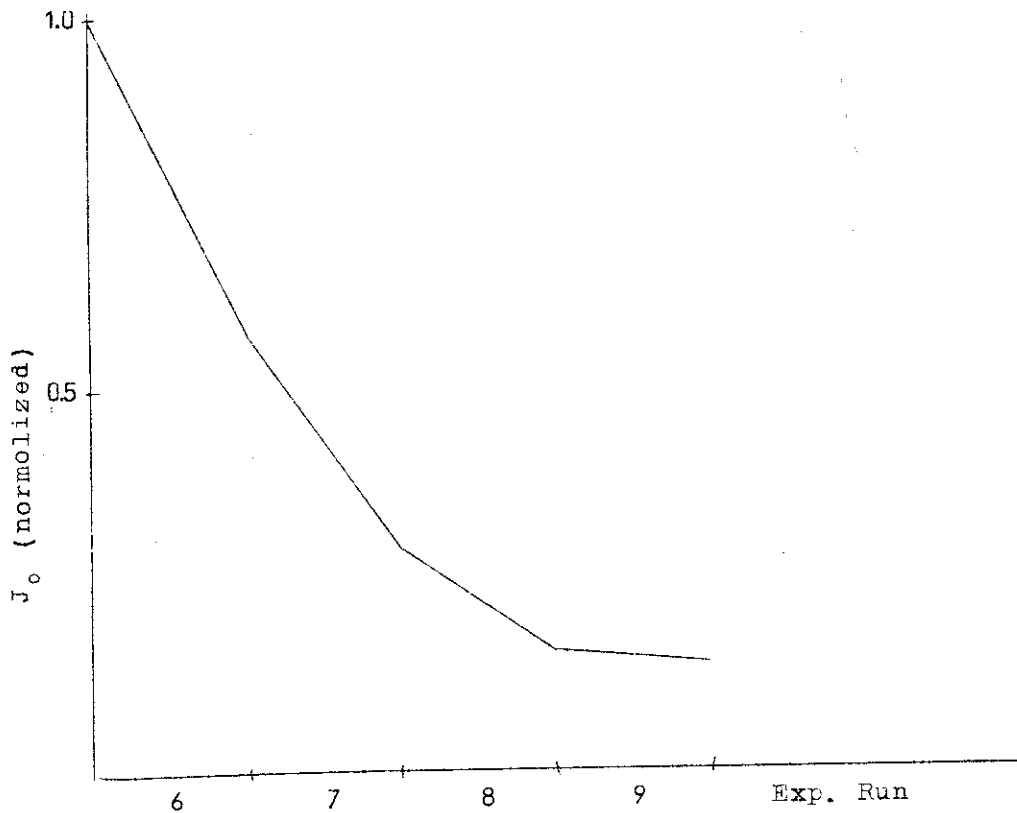


Fig. 9.2.1 Decrement of J_0

附録 制御理論に関連する行列代数と行列解析

A-1 緒 論

本報告中には、若干のやゝ特殊な行列演算の手法が用いられている。これらの手法は、一部の行列に関する標準的な教科書に記載されているものから、未だ一研究者の提唱に止まっているもの、さらには、僅かではあるが筆者の知見にまでわたっているが、本報告のためばかりでなく、多変数制御系の開発に従事している研究者にとって、広く有益であらんことを念じて、ある程度体系的に記述し、かつ応用例も附することにした。

付録としてまとめるに当って引用した文献等は、主として下記の通りである。文中に一々紹介する繁を避けて、こゝに一括して記しておくことにする。

- [1] M. C. PEASE III ; Method of Matrix Algebra, Academy Press (1965)
- [2] R. E. MORTENSEN ; A Note on Polar Decomposition and the Generalized Inverse of an Arbitrary Matrix , Notes on System Theory Vol VI , Elec. Res. Lab. Univ. Calif. (April 1964)
- [3] W. J. VETTER ; Some Extensions of Matrix Methods , Lecture Note at OECD Halden Reactor Project , (Apr 15-16 , 1970)

上記〔3〕の内容は、部分的に多数の論文となって出版または出版を予定されており、その主要なものとして、

- (3-1) W. J. VETTER ; Derivative Operations on Matrices , Trans. Automatic Control , IEEE (1970)
- (3-2) W. J. VETTER ; Matrix Calculus Operations and Taylor Expansions, to be published
- (3-3) W. J. VETTER ; On Reduction of Trajectory Dispersion through Parameter Influence Penalties , Preprint JFCC 1969 pp843-852
- (3-4) W. J. VETTER ; Transformation on a Scaler-Valued Matrix Product, letter , Proc. IEEE , Vol[#]12 , Dec. 1969.
- (3-5) H. V. SAKASRABUDDKE et al ; Sensitivity Models for Computer-Aided Design , IEEE 12th Midwest Symp. on Circuit Theory , Apr. 1969

等々をあげることができる。

さらに、一部の基本公式、応用例等で、下記の文献を参照した。

- [4] 須田信英 ; 私信 (1972)
- [5] K. SATO ; On-line Modification of a Digital Adaptive Control System ; HIR-57 (1970)

A-2 行列の表示

p行q列の行列Aの, i行j列番目の要素を a_{ij} としよう。この時, 行列Aを次のように表示することにする。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &\equiv \mathbf{A} \equiv \{ a_{ij} \}_{\substack{p \times q \\ p \times q}} \equiv \{ a_{ij} \}_{\substack{i \downarrow = 1, p \\ j \rightarrow = 1, q}} \\
 &\equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & \cdots & & a_{pq} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{1(j)} \\ a_{2(j)} \\ \vdots \\ a_{p(j)} \end{bmatrix} \equiv \{ a_{i(j)} \}_{\substack{i \downarrow = 1, p \\ (j \rightarrow = 1, q)}} \\
 &\equiv [a_{(i)1} \quad a_{(i)2} \quad \cdots \quad a_{(i)q}] \equiv \{ a_{(i)j} \}_{\substack{i \downarrow = 1, p \\ j \rightarrow = 1, q}} \tag{A 2.1}
 \end{aligned}$$

ここで, $a_{i(j)}$ は行ベクトル, $a_{(i)j}$ は列ベクトルである。上記の表示は, 行列Aが現われる場合に応じて, 適宜使い分けることにする。

行列Aの, i行j列番目の要素を, 上記にかゝわず $(A)_{ij}$ のように記すこともある。例えば, 行列Cの要素を c_{ij} とした時に,

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \iff c_{ij} = (\mathbf{AB})_{ij} \tag{A 2.2}$$

のごとくである。

行列Aが, p行q列の実行列あるいは複素行列であることを示すために

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \tag{A 2.3}$$

あるいは

$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \tag{A 2.4}$$

と書くことがある。

ベクトルは行列の一種とみなし, 上に述べた行列の表示をそのままあてはめることにする。

すなわち,

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \tag{A 2.5}$$

等々である。また \mathbf{X} がベクトルであることが明らかな場合には

$$\mathbf{X} \equiv \underset{n}{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A2.6})$$

などのように表示することもある。なお、ベクトルは原則として列ベクトルであると約束しよう。行ベクトルは \mathbf{X}^T と書くか、あるいは $\underset{1 \times n}{\mathbf{X}}$ などと書くことにする。(A2.1)に現われた $a_{i(j)}$ は例外である。

i 番目の要素のみが1で、他の要素はすべて0であるベクトルを「単位ベクトル」と呼び、 \mathbf{e}^i と記すことにする。すなわち

$$\mathbf{e}^i \triangleq \{ \delta_{ij} \}_{j \downarrow=1, n} \quad (\text{A2.7})$$

ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。また、 i 行 j 列の要素のみが1で他の要素はすべて0である行列を「単位行列」と呼び、 \mathbf{U}^{ij} と書くことにしよう。すなわち、

$$\underset{p \times q}{\mathbf{U}^{ij}} \triangleq \{ \delta_{ik} \delta_{jl} \}_{\substack{k \downarrow=1, p \\ l \rightarrow=1, q}} \quad (\text{A2.8})$$

最後に、恒等行列を次のように定義し、 \mathbf{E} と記すことにする。

$$\underset{n \times n}{\mathbf{E}} \equiv \underset{n}{\mathbf{E}} \triangleq \{ \delta_{ij} \}_{\substack{i \downarrow=1, n \\ j \rightarrow=1, n}} \quad (\text{A2.9})$$

A-3 行列のクロネッカー積 (直積)*

3.1 定義と基本公式

任意の2つの行列 A と B のクロネッカー積あるいは直積を次のように定義する。

$$\begin{matrix} A & B \\ p \times q & s \times t \end{matrix} \cong \begin{matrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & & & \\ \vdots & & & \\ a_{p1}B & \dots & \dots & a_{pq}B \end{matrix} \quad (A3.1)$$

$p s \times p t$

クロネッカー積に関して、次の基本公式が成立する。

(1) 分配則

$$(A+B) \times C = (A \times C) + (B \times C) \quad (A3.2)$$

$$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C) \quad (A3.3)$$

(2) 結合則

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \quad (A3.4)$$

(3) 転置

$$(A \times B)^T = A^T \times B^T \quad (A3.5)$$

(4) 混合積

$$AB \times CD = (A \times C) (B \times D) \quad (A3.6)$$

ただし、 AB, CD なる演算は実行可能とする。

(5) 逆行列

$$(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1} \quad (A3.7)$$

ただし、 A^{-1}, B^{-1} は存在するものとする。

これらの諸公式のうち、(1)~(3)は一見して明らかであるので、証明は省略し、(4)と(5)のみにて、
ついて証明を示そう。まず、

$$\begin{aligned} (A \times C) (B \times D) &= \{ a_{ij} C \} \{ b_{ln} D \} \\ &= \left\{ \sum_k a_{ik} b_{kj} CD \right\} = \{ (AB)_{ij} CD \} \\ &= AB \times CD \end{aligned}$$

(4)を利用すれば、

$$\begin{aligned} (A \times B) (A^{-1} \times B^{-1}) &= (AA^{-1} \times BB^{-1}) \\ &= (E_n \times E_m) = E_{nm} \end{aligned}$$

* この章は主として文献[1]に依っている。

よって

$$(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$$

上の証明は、右逆行列についてであるが、左逆行列についても同様に証明できることは明らかであろう。(5)は、2つの行列のクロネッカー積が逆行列を持つ十分条件は、2の行列の逆行列が存在することであることを示している。次節から明らかになるように、これは同時に必要条件にもなっていることを付け加えておく。

クロネッカー積を拡張して、クロネッカー乗積をこゝで定義しておこう。

$$\underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_k \equiv A^{\times k} \quad (A3.8)$$

$$A^{\times 0} \equiv 1 \quad (\text{スカラー}) \quad (A3.9)$$

$$A^{\times 1} \equiv A \quad (A3.10)$$

3.2 固有値に関する問題

2つの正方行列 A , B の固有値と固有ベクトルがそれぞれ判っていたとする。この時、 $A \times B$ の固有値と固有ベクトルはどの様に表現されるだろうか。この問題は、後に例示するように重要な意味を持つ。そこで、次の定理を証明する。

定理 3.1

A , B がそれぞれ任意の正方行列で、

$$Ax = \lambda x \quad (A3.11)$$

$$By = \mu y \quad (A3.12)$$

であれば

$$(A \times B)(x \times y) = \lambda \mu (x \times y) \quad (A3.13)$$

(証明)

$$A_{N \times N} = \{a_{ij}\} = \{a_{i(j)}\}$$

$$B_{M \times M} = \{b_{ij}\} = \{b_{i(j)}\}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$$

とする。

$$Ax = \lambda x$$

より

$$a_{1(j)}x = \lambda x_1$$

同様に

$$b_{m(j)}y = \mu y_m$$

これより

$$\lambda \mu x_1 y_m = (a_{1(j)}x) (b_{m(j)}y)$$

$$= \sum_k^N \sum_n^N a_{1k} b_{mn} x_k y_n$$

$$= a_{11} b_{m1} x_1 y_1 + a_{11} b_{m2} x_1 y_2 + \dots + a_{11} b_{mM} x_1 y_M$$

$$+ a_{12} b_{m1} x_2 y_1 + \dots$$

$$+ a_{1N} b_{m1} x_N y_1 + \dots \quad a_{1N} b_{mM} x_N y_M$$

$$= a_{11} (b_{m1} \ b_{m2} \ \dots) \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ \vdots \\ x_1 y_M \end{bmatrix} + a_{12} (b_{m1} \ b_{m2} \ \dots) \begin{bmatrix} x_2 y_1 \\ \vdots \\ x_2 y_M \end{bmatrix} \dots$$

$$= (a_{1(j)} \times b_{m(j)}) (x \times y)$$

$x_1 y_m$ は $x \times y$ の $(1-1)N+m$ 番目の要素であり, $(a_{1(j)} \times b_{m(j)})$ は $A \times B$ の $(1-1)N+m$ 番目の行である。よって

$$(A \times B) (x \times y) = \lambda \mu (x \times y)$$

(証明終)

定理 3.1 より次のことが明らかである。すなわち, $A \times B$ が逆行列を持つ必要十分条件は, A と B の固有値がどれも 0 でない, つまり A も B も逆行列を持つことである。また, A と B の位数については

$$\text{rank}\{A \times B\} = \text{rank}A \cdot \text{rank}B \quad (\text{A3.14})$$

が成立することになる。

後に例として示すように, いわゆるクロネッカーの和

$$C = \begin{pmatrix} A & \times & E \\ N \times N & N & N \times N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & \times & B \\ N & N \times N & \end{pmatrix}$$

の固有値が問題になることが多い。そこで、次の定理を証明しておく。

定理 3.2

任意の2つの同次の正方行列 $\overset{A}{\underset{N \times N}{\times}}$, $\overset{B}{\underset{N \times N}{\times}}$ について

$$Ax = \lambda x \tag{A3.15}$$

$$By = \mu y \tag{A3.16}$$

である時には

$$\left(\overset{A}{\underset{N \times N}{\times}} \overset{E}{\underset{N}{\times}} + \overset{E}{\underset{N}{\times}} \overset{B}{\underset{N \times N}{\times}} \right) (\overset{x}{\underset{N}{\times}} \overset{y}{\underset{N}{\times}}) = (\lambda + \mu) (\overset{x}{\underset{N}{\times}} \overset{y}{\underset{N}{\times}}) \tag{A3.17}$$

(証明)

まず

$$A \times E = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ \hline & & & \\ \hline a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ \hline & & & \end{array} \right]$$

であるから、これの $p = (1-1)N + m$ 番目の行を考えると

$$(A \times E)_{p(j)} = \left[\overset{\leftarrow m \rightarrow}{0 \dots 0} \ a_{11} \ 0 \dots 0 \ \middle| \ 0 \dots 0 \ a_{12} \ 0 \dots 0 \ \middle| \ \dots \right]$$

これに右から $(\overset{x}{\underset{N}{\times}} \overset{y}{\underset{N}{\times}})$ を乗ずると

$$\begin{aligned} (A \times E)_{p(j)} (\overset{x}{\underset{N}{\times}} \overset{y}{\underset{N}{\times}}) &= y_m \sum_i a_{1i} x_i \\ &= \lambda y_m x_1 \end{aligned}$$

同様に

$$(E \times B)_{p(j)} = \left[\overset{\leftarrow 1-1 \rightarrow}{0 \dots 0} \ \middle| \ 0 \dots 0 \ \middle| \ \dots \ \middle| \ b_{m1} \ \dots \ b_{mN} \ \middle| \ 0 \dots \right]$$

であるから

$$(E \times B)_{p(j)} (\overset{x}{\underset{N}{\times}} \overset{y}{\underset{N}{\times}}) = x_1 \sum_j b_{mj} y_j = \mu x_1 y_m$$

これより

$$(A \times E + E \times B) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\lambda + \mu) (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$$

(証明終)

A-4 行列の行展開と列展開*

4.1 定義と基本公式

前章に述べたクロネッカー積は、この章に述べる行展開 (row string) と列展開 (column string) と組み合わせることによって、行列代数と行列解析の分野に、極めて有益なものとなる。

行展開とは、ある行列の各行を順次横に並べて作る行ベクトルであり、列展開は各列を縦に並べて作る列ベクトルである。すなわち、任意の行列 A について

行展開

$$rsA \triangleq [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1q} \ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{pq}] \quad (A.4.1)$$

列展開

$$csA \triangleq [a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{p1} \ a_{12} \ a_{22} \ \dots \ a_{pq}]^T \quad (A.4.2)$$

行および列展開に関して、次の基本公式が成立する。

(1) 転置

$$rsA^T = (csA)^T \quad (A.4.3)$$

$$csA^T = (rsA)^T \quad (A.4.4)$$

(2) 積の展開

任意の2つの行列 A , B について

$$\begin{aligned} rs(AB) &= (rsA) \underset{P}{(E \times B)} \\ &= (rsB) \underset{t}{(A^T \times E)} \end{aligned} \quad (A.4.5)$$

$$\begin{aligned} cs(AB) &= \underset{t}{(E \times A)} (csB) \\ &= \underset{P}{(B^T \times E)} (csA) \end{aligned} \quad (A.4.6)$$

(1)は一見して明らかであろうから、(2)について証明しよう。(3.5)の前半まず考える。

* この章は、主として文献[3]によっている。

$$A = \begin{pmatrix} a_{1(j)} \\ \vdots \\ a_{P(j)} \end{pmatrix}$$

と書くと

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1(j)}B \\ \vdots \\ a_{P(j)}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} rs(AB) &= [a_{1(j)}B \quad a_{2(j)}B \quad \dots] \\ &= [a_{1(j)} \quad \dots \quad a_{P(j)}] \begin{pmatrix} B & & 0 \\ & B & \\ 0 & & B \end{pmatrix} \\ &= (rsA) (\underset{P}{E} \times B) \end{aligned}$$

次に後半は、

$$\begin{aligned} rs(AB) &= rs \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + \dots \\ a_{21}b_{11} + \dots & \dots \end{pmatrix} \\ &= [b_{11} \quad b_{12} \quad \dots] \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} \\ &= (rsB) (A^T \times \underset{t}{E}) \end{aligned}$$

また(3.6)は次のように証明される。まず

$$B = \begin{pmatrix} b_{(i)1} \\ \vdots \\ b_{(i)t} \end{pmatrix}$$

として

$$\begin{aligned} cs(AB) &= cs [Ab_{(i)1} \quad Ab_{(i)2} \quad \dots] \\ &= \begin{pmatrix} Ab_{(i)1} \\ Ab_{(i)2} \\ \vdots \\ Ab_{(i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & A & \\ 0 & & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{(i)1} \\ \vdots \\ b_{(i)t} \end{pmatrix} \\ &= (\underset{t}{E} \times A) (csB) \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}
 cs(AB) &= cs \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} + a_{12} & b_{21} & \dots & a_{11} & b_{12} + a_{12} & b_{22} & \dots \\ a_{21} & b_{11} + a_{22} & b_{21} & \dots & & & & \dots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{21} & 0 & & & & \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{21} & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & a_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{bmatrix} \\
 &= (B^T \times \underset{P}{E}) (csA)
 \end{aligned}$$

さらに(2)を一般化して⁴⁾

$$rs(CAB) = rsA (C^T \times B) \tag{A 4.7}$$

$$cs(CAB) = (B^T \times C) csA \tag{A 4.8}$$

これは、次の様に証明できる。(A 4.7)を例にとると、

$$rs(CAB) = [C_{1(j)} AB \dots C_{p(j)} AB]$$

しかるに

$$\begin{aligned}
 C_{i(j)} AB &= C_{i(j)} \begin{bmatrix} a_{i(j)} B \\ \vdots \\ a_{p(j)} B \end{bmatrix} = [a_{1(j)} \dots a_{p(j)}] \begin{bmatrix} C_{i1} B \\ \vdots \\ C_{ip} B \end{bmatrix} \\
 &= rsA (C_{i(j)}^T \times B)
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 rs(CAB) &= rsA [C_{1(j)}^T \times B \dots C_{p(j)}^T \times B] \\
 &= rsA (C^T \times B)
 \end{aligned}$$

列展開の場合も同様にして証明できる。

A-5 応用例 — その1 —

前章まで、クロネッカー積と、行および列展開について述べて来た。ここで、これまで述べた手法の応用例を2, 3上げておくことにする。

5.1 スペクトル方程式の一般解

リアプーノフの安定性の問題などで、いわゆるスペクトル方程式

$$AX+XB=C \tag{A5.1}$$

を解く必要が生ずることがある。ここで、 A, B, C, X は、いずれも $n \times n$ の行列であるとする。通常行列代数をもってしては、この方程式の見通しの良い解は得られないのであるが、前章までの手法を応用すれば極めて簡明な形で解くことができる。たとえば、上の方程式を列展開すると

$$\begin{aligned} (E_n - A) (csX) + (B^T - E) (csX) &= csC \\ csX &= (E_n - A + B^T - E)^{-1} (csC) \end{aligned} \tag{A5.2}$$

(4.2) に現われる逆行列が存在するための条件は、定理3.2に示されている。

5.2 制御パラメータの修正⁵⁾

次の式で表現されるプロセスを考える。

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + G \mathbf{u}(k) \tag{A5.3}$$

$n \times n$ $n \times r$ r

ここで \mathbf{x} は状態ベクトル、 \mathbf{u} は操作ベクトル、 k はサンプリング番号、 Φ と G はプロセスの特性によって定まる行列である。 \mathbf{u} を適当に変化させることにより、

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k-1) H \mathbf{u}(k-1)] \tag{A5.4}$$

を最小ならしめることを考える。ただし、 Q, H は対称な正値行列とする。この様な \mathbf{u} は \mathbf{x} の線型変換

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= B \mathbf{x}(k) \\ B &= -(H + G^T S G)^{-1} G^T S \Phi \\ S &= Q + \Phi^T S (\Phi + G B) \end{aligned} \right\} \tag{A5.5}$$

であることを示すことができる。行列Bは、通常繰返し計算で求められる。

ここで問題とするのは、制御の対象たるプロセスの特性 ϕ 、Gに僅かな変化が生じた場合、Bをどのように修正すれば(A 5.4)式のJを最小にすることができるかと云うことである。もちろん、新しいプロセス特性を、(A 5.5)式にそのまま代入して、繰返し計算を行なえば良いのであるが、この方法は、Bの修正をオンラインで行おうとする場合には、非現実的である。そこで微小変化 $\Delta\phi$ 、 ΔG に対応する ΔB を、繰返し計算を行なうことなく求める方法を考えようと云うものである。ここで、式の取り扱いを簡便にするために、次の置換をしておく。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &\rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix} \\ \phi &\rightarrow \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & E_r \end{bmatrix} \\ G &\rightarrow \begin{bmatrix} G \\ E_r \end{bmatrix} \\ Q &\rightarrow \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このようにすると、Bは次の方程式の解である。

$$\left. \begin{aligned} -G^T S G B &= G^T S \phi \\ S &= Q + \phi^T S (\phi + G B) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

ϕ 、Gに $\Delta\phi$ 、 ΔG なる変動が生じ、その結果Bに ΔB なる変化を生じたとして、変動分の2次以上の項を無視すると、

$$-G^T S G \Delta B = G^T \Delta S (\phi + G B) + \eta$$

$$\Delta S = \phi^T \Delta S (\phi + G B) + \phi^T S G \Delta B + \xi$$

$$\eta = \Delta G^T S (\phi + G B) + G^T S (\Delta\phi + \Delta G B)$$

$$\xi = \Delta\phi^T S (\phi + G B) + \phi^T S (\Delta\phi + \Delta G B)$$

が得られる。これを行展開(列展開しても全く等価な結果が得られる)すると

$$\begin{aligned}
 rs\Delta S &= (rs\Delta S) [\phi \times (\phi + GB)] \\
 &+ (rs\Delta B) (G^T S^T \phi \times \underset{n}{E}) + rs\xi \\
 &- (rs\Delta B) (G^T S^T G \times \underset{n}{E}) \\
 &= (rs\Delta S) [G \times (\phi + GB)] + rs\eta
 \end{aligned}$$

これらより ΔS を消去すれば

$$-rs\Delta B = (rs\xi)R + (rs\eta)T \tag{A5.7}$$

$$\left. \begin{aligned}
 R &= [E - \phi \times (\phi + GB)]^{-1} [G \times (\phi + GB)] T \\
 T &= \{ G^T S^T G \times \underset{n}{E} + P [G \times (\phi + GB)] \}^{-1} \\
 P &= [G^T S^T \phi \times \underset{n}{E}] [E - \phi \times (\phi + GB)]^{-1}
 \end{aligned} \right\} \tag{A5.8}$$

が得られる。指摘しておくべきことは、上で定義される R 、 T 、 P は、 $\Delta\phi$ 、 ΔG を含んでいない、すなわち、プロセスに特性変化の起る以前の量だけで定まると云うことである。従ってこれらはあらかじめオフラインで計算しておくことが可能であって、オンラインの計算量を大巾に減少させることが可能である。

A-6 一般化された逆行列*

6.1 連立一次方程式の一般解

2つのベクトル \mathbf{y} , \mathbf{x} の間に

$$\mathbf{y} = \underset{m \times n}{\mathbf{A}} \mathbf{x} \quad (\text{A 6.1})$$

なる関係があるとしよう。与えられた \mathbf{y} に対して、上式を成立させる \mathbf{x} を求める問題、すなわち連立一次方程式を解く問題を考える。周知の様に、上式の \mathbf{x} についての解は

$$m=n=\text{rank } \mathbf{A} \quad (\text{A 6.2})$$

の場合に限って一義的に存在し、

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{A 6.3})$$

で与えられる。

実際には、(A 6.2) の条件が満たされない場合でも、何らかの「解」を要求される場合がしばしばある。制御工学の分野で最も多く経験されるのは、

$$m > n = \text{rank } \mathbf{A} \quad (\text{A 6.4})$$

の場合であろう。この場合には、(A 6.1) の厳密な解は一般には存在しない。このような場合には、適当な条件を与えて得られる近似解をもって「解」と見なすことがある。その代表的なものは、最小自乗解、すなわち、与えられた \mathbf{y} に対して

$$\epsilon^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \geq 0 \quad (\text{A 6.5})$$

を最小にする $\hat{\mathbf{x}}$ をもって「解」とするものである。条件 (A 6.4) が満たされていれば、この様な $\hat{\mathbf{x}}$ はたゞ一つ存在して、

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (\text{A 6.6})$$

で与えられる。厳密解 (5.3) は、 $\epsilon^2 = 0$ を与えるので、これも一種の「最小自乗解」と見なすこともできよう。

条件 (A 6.2), (A 6.4) のいずれもが満足されない場合にも、広義の最小自乗解が存在

* この章は、主として文献 [2] による。

するが、この場合は一義的ではない。この中から、一つの解を「解」として選定するためには、
 少なくとももう一つの条件が必要になる。制御工学の分野では、

$$\eta^2 = \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{A 6.7})$$

をも最小にすると云う条件を付して得られる「解」が、現実の問題に適合する場合がしばしば
 ある。最小自乗解が一義的に定まる場合には、(A 6.7)の条件は自動的に満足されていると
 考えることができる。そこで、与えられた \mathbf{y} に対して、 e^2 を最小にし、かつ η^2 をも最小に
 する様な \mathbf{x} を、「連立一次方程式の一般解」と呼ぶことにする。この様な \mathbf{x} が

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y} \quad (\text{A 6.8})$$

と表現されたとして、 \mathbf{A}^+ を「一般化された逆行列」と呼ぶことにしよう*。

任意の複素行列

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \\ \text{rank } \mathbf{A} = r \leq \text{Min}(m, n) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A 6.9})$$

を考える。 \mathbf{A} の複素共役転置行列を \mathbf{A}^* とすると、 $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ は実数対称行列で、 r 個の正の固有
 値と、 $n - r$ 個のゼロ固有値を持つ。また、各固有値に対応する固有ベクトルは直交し、 \mathbb{C}^n
 の基底 (basis) を作る。 $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ の、規格化された固有ベクトルを \mathbf{g}_i ($i=1 \dots n$) としよう。
 次の関係は明らかである。

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{g}_i = \rho_i \mathbf{g}_i \quad (\text{A 6.10})$$

$$\mathbf{g}_i^* \mathbf{g}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A 6.11})$$

$$\rho_i \begin{cases} > 0 & i=1 \dots r \\ = 0 & i=r+1 \dots n \end{cases} \quad (\text{A 6.12})$$

同様に $\mathbf{A} \mathbf{A}^*$ の規格化された固有ベクトルを \mathbf{f}_i ($i=1 \dots m$) としよう。 $\mathbf{A} \mathbf{A}^*$ もまた
 実数対称行列であるから、 \mathbf{f}_i は \mathbb{C}^m の完全規格直交系である。 \mathbf{f}_i と \mathbf{g}_i の間には、次のよ
 うな関係がある。すなわち、(A 6.10) の左から \mathbf{A} を乗ざると

$$(\mathbf{A} \mathbf{A}^*) \mathbf{A} \mathbf{g}_i = \rho_i \mathbf{A} \mathbf{g}_i$$

* 特に (A 6.2), (A 6.4) のいずれも満足されない場合に、 \mathbf{A}^+ を「擬逆行列」と呼ぶことがある。

よって Ag_i は AA^* の一つの固有ベクトルであり、その固有値は ρ_i である。そこで β_i をある定数とし、 $\bar{\beta}_i$ をその共役複素数として

$$Ag_i = \beta_i f_i$$

とすれば

$$g_j^* A^* Ag_i = \rho_i g_j^* g_i = \bar{\beta}_j \beta_i f_j^* f_i$$

よって

$$Ag_i = \rho_i^{1/2} f_i \quad i=1 \dots r \quad (A6.13)$$

$$Ag_j = 0 \quad j=r+1 \dots n \quad (A6.14)$$

また $A^* f_j \in C^n$ であるから、これは g_i で展開できて

$$A^* f_j = \sum_1^n \alpha_i g_i$$

$$(A^* f_j)^* (A^* f_j) = f_j^* A A^* f_j = \rho_j f_j^* f_j$$

$$= \sum_1^n \alpha_i^2 = 0 \quad j=r+1 \dots m$$

よって

$$A^* f_j = 0 \quad j=r+1 \dots m \quad (A6.15)$$

以上の準備をして、与えられた $y \in C^m$ について、

$$y = Ax \quad x \in C^n$$

の一般解を求めることを考えよう。 y を展開して

$$y = \sum_{i=1}^m r_i f_i = \sum_{i=1}^r r_i f_i + \sum_{j=r+1}^m r_j f_j \triangleq u + v \quad (A6.16)$$

とする。そこで

$$\hat{x} \triangleq \sum_{i=1}^r r_i \rho_i^{-1/2} g_i + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j g_j \quad (A6.17)$$

な \hat{x} を定義する。

$$A\hat{x} = \sum_{i=1}^r r_i \rho_i^{-\frac{1}{2}} A g_i = \sum_{i=1}^r r_i f_i = u$$

であるから、任意の $x \in C^n$ に対して

$$\|A\hat{x} - y\|^2 \leq \|Ax - y\|^2 \quad (A.6.18)$$

となり、 \hat{x} は最小自乗解になっている。(A.6.17)式では、 α_j は任意に定められるので、 \hat{x} は一義的には定まらない。ところで、

$$\|\hat{x}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^r \rho_i^{-\frac{1}{2}} g_i \right\|^2 + \left\| \sum_{j=r+1}^n \alpha_j g_j \right\|^2 \geq \sum_{i=1}^r r_i^2 \rho_i \quad (A.6.19)$$

であるから

$$\alpha_j = 0 \quad j = r+1, \dots, n \quad (A.6.20)$$

であれば x のノルムは最小になり、一義的に定まることになる。すなわち、これが方程式 (A.6.1) の一般解である。ところで、

$$A^+ \triangleq \sum_{i=1}^r \rho_i^{-\frac{1}{2}} g_i f_i^* \quad (A.6.21)$$

と云う行列を考えると、

$$\begin{aligned} A^+ y &= \sum_{i=1}^r \rho_i^{-\frac{1}{2}} g_i f_i^* \sum_{j=1}^m r_j f_j \\ &= \sum_{i=1}^r \rho_i^{-\frac{1}{2}} r_i g_i = \hat{x} \end{aligned} \quad (A.6.22)$$

であるから、これが (A.6.8) 式で導入された一般化された逆行列になっていることが判る。

6.2 一般化された逆行列の導出

前節で求められた A^+ の性質を少し調べておこう。まず (A.6.21) 式で定められた A^+ に対して、もとの行列 A はどのような関係を有するかを考える。 C^n に属する任意のベクトル x を展開して

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \\ \alpha_i &= g_i^* x \end{aligned} \right\} \quad (A.6.23)$$

と表わす。こうすると

$$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ag_i = \sum_{i=1}^r \rho_i^{\frac{1}{2}} f_i \alpha_i = \left(\sum_{i=1}^r \rho_i^{\frac{1}{2}} f_i g_i^* \right) x$$

と書くことができる。xは全く任意であるから

$$A = \sum_{i=1}^r \rho_i^{\frac{1}{2}} f_i g_i^* \tag{A 6.24}$$

と書いて良い。これは、(A 6.21)式と対をなすものである。(A 6.21), (A 6.24)を、もう少し見易い形に直してみよう。すなわち

$$\left. \begin{aligned} G &\triangleq [g_1 \dots g_n] \\ &_{n \times n} \\ F &\triangleq [f_1 \dots f_m] \\ &_{m \times m} \\ R &\triangleq \left[\begin{array}{cc|cc} \rho_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &_{m \times n} \\ R^+ &\triangleq \left[\begin{array}{cc|cc} \rho_1^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &_{n \times m} \end{aligned} \right\} \tag{A 6.25}$$

と云う行列を定義する。次の関係は明らかである。

$$FF^* = F^*F = E_m$$

$$GG^* = G^*G = E_n$$

これより

$$\left. \begin{aligned} A &= FRG^* \\ A^+ &= GR^+F^* \end{aligned} \right\} \tag{A 6.26}$$

この様にすると、次の性質は明らかである。

$$\left. \begin{aligned}
 AA^+A &= A \\
 A^+AA^+ &= A^+ \\
 (A^+)^* &= (A^*)^+ \\
 (A^+)^+ &= A
 \end{aligned} \right\} \quad (A.6.27)$$

条件 (A.6.2) が満たされている場合には,

$$R = \begin{bmatrix} \rho_1^{\frac{1}{2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$R^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & 0 \\ \rho_1 & & \\ 0 & & -\frac{1}{2} \\ & & & \rho_n \end{bmatrix} = R^{-1}$$

であるから

$$A^+A = AA^+ = E_n$$

$$A^+ = A^{-1}$$

は明らかである。同様にして、 A が実数行列で、かつ条件 (A.6.4) が満足されている場合に、 $(A^T A)^{-1} A^T$ が、 A^+ と一致することも容易に示すことができる。

なお、今の所また適当な応用例は見出せないが、興味深い関係を紹介しておく。(A.6.26) 式から直ちに、

$$F^*AG = R \quad (A.6.28)$$

が得られるが、 $m = n$ の場合には R は対角行列になるので、これで一般に正方行列は、拡張された直交変換によって必ず対角化されることが証明されたことになる。云うまでもないことだが、 A が対称であれば、 $F = G$ になるから、(A.6.28) は通常直交変換による対角化に帰着する。

A-7 行列の微分法*

7.1 問題の提起

ある行列 A の各要素 a_{ij} が、あるスカラー量 x の関数で、かつ x に関して微分可能であるとしよう。この時、行列 A の x に関する微係数** は

$$\frac{dA}{dx} \triangleq \left\{ \frac{da_{ij}}{dx} \right\} \quad (A7.1)$$

であると定義される。 dA/dx もまた一つの行列であるから、上の定義を繰り返して適用することにより、高次の微係数も疑問の余地なく定義することができる。

次に、あるスカラー量 y が、ベクトル x の各要素の関数であり、かつ各要素について微分可能であるとする。この時、 y の x に関する微係数は、「勾配」(gradient)と呼ばれるベクトルになる。すなわち、

$$\frac{dy}{dx} = \text{grad } y \quad (A7.2)$$

$\text{grad } y$ は、 $\frac{dy}{dx_i}$ を要素とするベクトルであるが、これが行ベクトルであるか、列ベクトルであるかは、文献によってまちまちである。さらに y の x に関する二次の微係数 d^2y/dx^2 を考えて見よう。これに当るものは、いわゆるヘスの行列・(Hessian Matrix) であって、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d^2y}{dx_i dx_j} \right\} \quad (A7.3)$$

である。 dy/dx はベクトルであるから、ベクトルの、ベクトルによる微係数は一般に行列であると考えて良い様に見える。それでは d^3y/dx^3 、すなわち、行列のベクトルに関する微係数は何になるのであろうか。さらに拡張して、行列の行列に関する微係数はどのように定義されるべきであらうか。

この様な疑問は、単に数学的な興味からだけ出てくるのではない。制御系の設計、解析などの過程で、しばしば遭遇する問題なのである。具体的な例については、この章以後に応用例その他として示すことにしよう。いずれにしても、上の様な疑問に、統一的な立場から答を与える理論は、今までなかったと云って良い。筆者の知る限り、VETTER の提唱する理論が、少くとも、この疑問に答える理論の端緒を開くものと云えよう。

7.2 行列の行列に関する微係数

前に示した通り、ある行列 A の、スカラー量 b_{x_1} に対する微係数は

$p \times q$

* 以後の部分は、主として文献[3]による。

** A は行列であるから、微係「数」と云うのも少々変であるが、ここでは慣用的にこの言葉を用いることにする。

$$\frac{d\bar{A}}{db_{k1}} \cong \left\{ \frac{da_{ij}}{db_{k1}} \right\}_{\substack{i \downarrow = 1, p \\ j \rightarrow = 1, q}} \quad (A7.4)$$

と定義される。今 b_{k1} はある行列 B の要素であり、 B の各要素について (A7.4) が存在する時に、 A の B に関する微係数を

$$\frac{d\bar{A}}{dB} \cong \left\{ \frac{d\bar{A}}{db_{k1}} \right\}_{\substack{k \downarrow = 1, s \\ 1 \rightarrow = 1, t}} \equiv \begin{bmatrix} \frac{d\bar{A}}{db_{11}} & \frac{d\bar{A}}{db_{12}} & \dots \\ \frac{d\bar{A}}{db_{21}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{d\bar{A}}{db_{st}} \end{bmatrix} \quad (A7.5)$$

と定義する。全く同じ様に $\partial A / \partial B$ も定義できる。

なお、注意しておきたいのは、(A7.5) の定義から、次の演算子行列

$$V_B = \left\{ \frac{d}{db_{k1}} \right\}$$

を定義して

$$\frac{d\bar{A}}{dB} \cong V_B \times A$$

と書ける訳であるが、追々明らかになる様に、これは必ずしも正しい結果を導かない。

$d\bar{A}/dB$ は一つの行列であるから、これから直ちに高次の微係数を定義することができる。

すなわち、

$$\frac{d^2 \bar{A}}{dB^2} = \frac{d}{dB} \left(\frac{d\bar{A}}{dB} \right) \quad (A7.6)$$

$$\frac{d^k \bar{A}}{dB^k} = \frac{d}{dB} \left(\frac{d^{k-1} \bar{A}}{dB^{k-1}} \right) \quad (A7.7)$$

等々である。

上の定義から、前節で示した疑問は直ちに明らかになる。すなわち、 y_m , x_n をそれぞれ列ベクトルとすれば

$$\frac{dy}{dx^T} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_1}{dx_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dy_m}{dx_1} & \dots & \frac{dy_m}{dx_n} \end{bmatrix} \quad (A7.8)$$

$$\frac{dy^T}{dx} = \left(\frac{dy}{dx^T} \right)^T \quad (A7.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = cs \left[\frac{dy}{dx^T} \right] \quad (A7.10)$$

$$\frac{dy^T}{dx^T} = rs \left(\frac{dy}{dx} \right) = rs \left[\left(\frac{dy}{dx^T} \right)^T \right] = \left[cs \left(\frac{dy}{dx^T} \right) \right]^T \quad (A7.11)$$

などは直ちに示すことができる。また、

$$\frac{dx}{dx^T} = \frac{dx^T}{dx} = E_n$$

$$\frac{dx}{dx} = cs E_n$$

$$\frac{dx^T}{dx^T} = rs E_n$$

(A7.12)

$$\frac{dA}{dA} = \left\{ U_{ij}^{ij} \right\}_{\substack{i \downarrow = 1, p \\ p \times q \quad j \rightarrow = 1, q}}$$

$$\frac{dA^T}{dA} = \left\{ U_{ij}^{ij} \right\}_{\substack{i \downarrow = 1, p \\ q \times p \quad j \rightarrow = 1, q}}$$

$$\frac{dA}{dA^T} = \left\{ U_{ij}^{ji} \right\}_{\substack{i \downarrow = 1, q \\ p \times q \quad j \rightarrow = 1, p}}$$

などは有用な関係である。また定義から直ちに

$$\left(\frac{dA}{dB} \right)^T = \frac{dA^T}{dB^T} \quad (A7.13)$$

が得られる。これらの性質は、 $\partial B / \partial A$ についても同様に示すことができる。

7.3 行列の積の微係数

ある行列 A が
 $p \times q$

$$A = C D \tag{A7.14}$$

$p \times q \quad p \times u \quad u \times q$

であり、かつ C, D がいずれも B に関して微分可能であるとする。この時、 dA/dB がどのような形になるか考える。まず、 A をスカラー量 b_{k1} で微分すると

$$\frac{dA}{db_{k1}} = \frac{d}{db_{k1}} (CD) = \frac{dC}{db_{k1}} D + C \frac{dD}{db_{k1}}$$

は明らかである。これから、

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dB} &= \left\{ \frac{dA}{db_{k1}} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dC}{db_{11}} D & \frac{dC}{db_{12}} D \dots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \frac{dD}{db_{11}} & C \frac{dD}{db_{12}} \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dC}{db_{11}} & \frac{dC}{db_{12}} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & & 0 \\ & D & \\ 0 & & D \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} C & & 0 \\ & C & \\ 0 & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dD}{db_{11}} & \frac{dD}{db_{12}} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ &= \frac{dC}{dB} (E \times D) + (E \times C) \frac{dD}{dB} \tag{A7.15} \end{aligned}$$

次に、 $A = C$ の B に関する微係数を考えよう。前と同じく

$$\frac{d}{db_{k1}} (A \times C) = \frac{dA}{db_{k1}} \times C + A \times \frac{dC}{db_{k1}}$$

であるから

$$\frac{d}{dB} (A \times C) = \frac{dA}{dB} \times C + \left\{ A \times \frac{dC}{db_{k1}} \right\}_{\substack{k \downarrow = 1, s \\ l \rightarrow = 1, t}} \quad (A7.16)$$

となる。右辺第2項が $A \times \frac{dC}{dB}$ とはならない点，注意を要する。

7.4 行列の陰関数としての行列の微係数

ある行列 \bar{A} が $p \times q$

$$\bar{A} = \bar{A}[C(B)] \quad (A7.17)$$

$p \times q \qquad u \times v \quad s \times t$

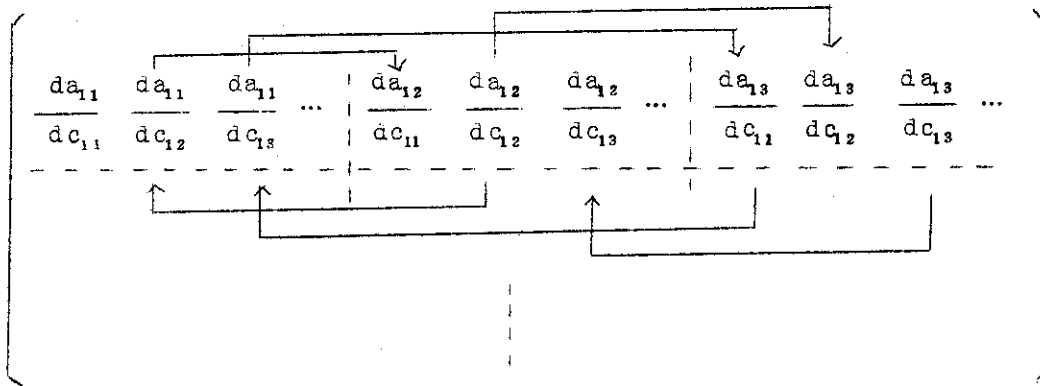
と表現される場合の $d\bar{A}/dB$ を考えよう。この場合には

$$\begin{aligned} \frac{da_{ij}}{db_{k1}} &= \sum_{m,n=1}^{u,v} \frac{da_{ij}}{dc_{mn}} \frac{dc_{mn}}{db_{k1}} \\ &= \left[\frac{da_{ij}}{dc_{11}} \quad \frac{da_{ij}}{dc_{12}} \quad \dots \quad \frac{da_{ij}}{dc_{uv}} \right] \begin{bmatrix} \frac{dc_{11}}{db_{k1}} \\ \vdots \\ \frac{dc_{uv}}{db_{k1}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{da_{ij}}{d(rsC)} \frac{d(rsC)^T}{db_{k1}} \end{aligned} \quad (A7.18)$$

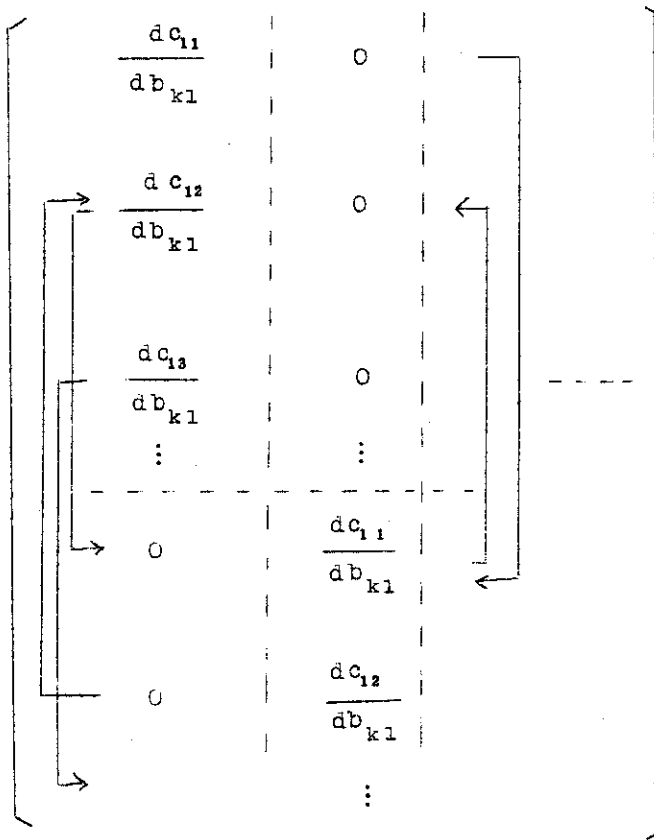
よって

$$\frac{d\bar{A}}{db_{k1}} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dc_{11}} & \frac{da_{11}}{dc_{12}} & \dots & \frac{da_{11}}{dc_{uv}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{da_{21}}{dc_{11}} & \dots & \frac{da_{21}}{dc_{uv}} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dc_{11}}{db_{k1}} \\ \frac{dc_{12}}{db_{k1}} \quad 0 \dots \\ \vdots \\ 0 \quad \frac{dc_{11}}{db_{k1}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (A7.19)$$

ここで，(7.19)式右辺の第1の行列の順序を，



のように順序を入れかえる。これに応じて第2の行列も



と入れかえてやれば、結果として両者の積は不変になる。この入れかえの結果

$$\frac{dA}{db_{k1}} = \begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} & \dots \\ dc_{11} & dc_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_{11} \\ db_{k1} \\ \vdots \\ dc_{uv} \\ db_{k1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{dA}{d(rsC)} \left(\frac{d(rsC)^T}{db_{k1}} \times \underset{q}{E} \right)$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dB} &= \left[\frac{dA}{d(rsC)} \left(\frac{d(rsC)^T}{db_{11}} \times \underset{q}{E} \right) \frac{dA}{d(rsC)} \left(\frac{d(rsC)^T}{db_{12}} \times \underset{q}{E} \right) \dots \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dA}{d(rsC)} & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{dA}{d(rsC)} & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d(rsC)^T}{db_{11}} \times \underset{q}{E} & \frac{d(rsC)^T}{db_{12}} \times \underset{q}{E} & \dots \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \\ &= \left(\underset{s}{E} \times \frac{dA}{d(rsC)} \right) \left(\frac{d(rsC)^T}{dB} \times \underset{q}{E} \right) \quad (A7.20) \end{aligned}$$

が得られる。同様にして

$$\frac{dA}{dB} = \left(\frac{d(csC)^T}{dB} \times \underset{p}{E} \right) \left(\underset{t}{E} \times \frac{dA}{d(csC)} \right) \quad (A7.21)$$

また、

$$A = A[C(B), B] \quad (A7.22)$$

である場合には、

$$\frac{dA}{dB} = \left(\underset{s}{E} \times \frac{dA}{d(rsC)} \right) \left(\frac{d(rsC)^T}{dB} \times \underset{q}{E} \right) + \frac{\partial A}{\partial B} \quad (A7.23)$$

$$= \left(\frac{d(csC)^T}{dB} \times \underset{p}{E} \right) \left(\underset{t}{E} \times \frac{dA}{d(csC)} \right) + \frac{\partial A}{\partial B} \quad (A7.24)$$

となる。

A - 8 応用例 — その 2 —

8.1 2次形式の微係数

制御理論,あるいは安定性の理論では,2次形式

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \underset{n \times n}{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \underset{1 \times n}{b} + \underset{1 \times n}{c}^T \mathbf{x} + e \tag{A8.1}$$

の微係数 $dV/d\mathbf{x}$ を求めることがしばしばある。前章の結果より,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\mathbf{x}} &= \frac{d\mathbf{x}^T}{d\mathbf{x}} (1 \times A \mathbf{x}) + (\underset{n}{E} \times \mathbf{x}^T) \left[\frac{dA}{d\mathbf{x}} (1 \times \mathbf{x}) + (\underset{n}{E} \times A) \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}} \right] \\ &+ \frac{d\mathbf{x}^T}{d\mathbf{x}} (1 \times b) + (\underset{n}{E} \times \mathbf{x}^T) \frac{db}{d\mathbf{x}} \\ &+ \frac{dc^T}{d\mathbf{x}} (1 \times \mathbf{x}) + (\underset{n}{E} \times c^T) \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}} + \frac{de}{d\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\frac{dA}{d\mathbf{x}} = 0, \quad \frac{db}{d\mathbf{x}} = 0, \quad \frac{dc^T}{d\mathbf{x}} = 0, \quad \frac{de}{d\mathbf{x}} = 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + (\underset{n}{E} \times \mathbf{x}^T) (\underset{n}{E} \times A) c s \underset{n}{E} \\ &+ b + (\underset{n}{E} \times c^T) c s \underset{n}{E} \end{aligned}$$

しかるに

$$\begin{aligned} (\underset{n}{E} \times \mathbf{x}^T) (\underset{n}{E} \times A) c s \underset{n}{E} &= (\underset{n}{E} \times \mathbf{x}^T A) c s \underset{n}{E} \\ &= c s (\mathbf{x}^T A \underset{n}{E}) = \bar{A}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$(\underset{n}{E} \times c^T) c s \underset{n}{E} = c s (c^T \underset{n}{E}) = c$$

よって

$$\frac{dV}{d\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \bar{A}^T \mathbf{x} + b + c \tag{A8.2}$$

ついでに $d^2V/d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$ を考えておく

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} &= \frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}{d\mathbf{x}^T} (\mathbf{E} \times \mathbf{x}) + [1 \times (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)] \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}^T} \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (\text{A8.3})$$

8.2 一次方程式の最小自乗解

一次方程式

$$\underset{m}{\mathbf{y}} = \underset{m \times n}{\mathbf{A}} \underset{n}{\mathbf{x}} \quad m > n = \text{rank } \mathbf{A} \quad (\text{A8.4})$$

の最小自乗解は

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (\text{A8.5})$$

で与えられることは A-6 で示した通りであるが、これは次の様に証明される。

$$V = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (\text{A8.6})$$

とすれば

$$V = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$$

(8.2) の結果より直ちに、

$$\frac{dV}{d\mathbf{x}} = 2(-\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (\text{A8.7})$$

V が最小である必要条件是

$$\frac{dV}{d\mathbf{x}} = 0 \quad (\text{A8.8})$$

すなわち

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (\text{A8.9})$$

ただし、この \mathbf{x} は単に V の極値または変曲点を与えているのみで、 V が最小になることはまだ証明されていない。もっとも V が (A8.6) 式の形をとる場合には、(A8.9) 式の \mathbf{x} が V の最小値であることは、直観的に明らかである。

A-9 行列の微分と積分

9.1 行列の微分

行列Aの微分を

$$dA \underset{p \times q}{\cong} \{ da_{ij} \}_{ \substack{ i \downarrow = 1, p \\ j \rightarrow = 1, q } } \quad (A9.1)$$

と定義する。ここで da_{ij} は、Aの要素 a_{ij} の微分を示す。次の基本的公式は明らかである。

$$\left. \begin{aligned} d(A+B) &= dA + dB \\ d(AB) &= (dA)B + A(dB) \\ d(aB) &= (da)B + a(dB) \\ d(A^{-1}) &= -A^{-1}(dA)A^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (A9.2)$$

念のため、最後の式についてのみ証明を示す。

$$d(A^{-1}A) = A^{-1}dA + (dA^{-1})A = d(E) = 0$$

$$\therefore dA^{-1} = -A^{-1}(dA)A^{-1}$$

次に、 A が、他の行列B の関数である場合について考える。まずAの要素 a_{ij} の微分は

$$\begin{aligned} da_{ij} &= \sum_{k,l=1}^{s,t} \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{kl}} db_{kl} \\ &= \frac{da_{ij}}{d(rsB)} d(rsB)^T = d(csB)^T \frac{da_{ij}}{d(csB)} \end{aligned} \quad (A9.3)$$

であるから

$$\begin{aligned} dA &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{da_{11}}{d(rsB)} d(rsB)^T & \frac{da_{22}}{d(rsB)} d(rsB)^T & \dots \\ \vdots & & \dots \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{da_{11}}{d(rsB)} & \frac{da_{12}}{d(rsB)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{da_{21}}{d(rsB)} & & \dots \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} d(rsB)^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d(rsB)^T \end{array} \right] \\ &= \frac{dA}{d(rsB)} [d(rsB)^T \times_q E] \end{aligned} \quad (A9.4)$$

同様にして

$$dA = \left[d(csB) \begin{matrix} \text{T} \\ \text{E} \\ \text{P} \end{matrix} \right] \frac{dA}{d(csB)} \quad (A9.5)$$

9.2 行列の積分

ある行列 A が B の関数であり、その B に関する微分を dA とする。この時、ある特定の「点」 B^1 、 B^2 に関する定積分を

$$\int_{B^1}^{B^2} dA \cong A(B) \Big|_{B^1}^{B^2} = A(B^2) - A(B^1) \quad (A9.6)$$

と定義する。(A9.4)あるいは(A9.5)式より

$$\begin{aligned} \int_{B^1}^{B^2} dA &= \int_{B^1}^{B^2} \frac{dA}{d(rsB)} \left(d(rsB) \begin{matrix} \text{T} \\ \text{E} \\ \text{q} \end{matrix} \right) \\ &= \int_{B^1}^{B^2} \left(d(csB) \begin{matrix} \text{T} \\ \text{E} \\ \text{P} \end{matrix} \right) \frac{dA}{d(csB)} \\ &= \left\{ \int_{B^1}^{B^2} \sum_{k,1} \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{kl}} db_{kl} \right\} \begin{matrix} i \downarrow = 1, p \\ j \rightarrow = 1, q \end{matrix} \end{aligned} \quad (A9.7)$$

さらにある行列 C が B の関数であれば

$$\int_L C(B) dB \cong \left(\int_L \sum_{j=1}^s c_{ij} db_{jk} \right) \begin{matrix} i \downarrow = 1, u \\ j \rightarrow = 1, t \end{matrix}$$

ここに L は積分路を表わす。

A-10 Taylor 展開とその応用

10.1 ベクトルの展開

あるベクトル \mathbf{y} が、他のベクトル \mathbf{x} の関数で、かつある $\bar{\mathbf{x}}$ の近傍で \mathbf{x} に関して連続微分可能であるとする。この時には \mathbf{y} は、スカラー関数の場合と類似の形で、Taylor 展開することができる。すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k \mathbf{y}}{(d\mathbf{x}^T)^k} \right) \bigg|_{\bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + R_{n+1} \\ &= \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})]^k \left[\frac{d^k \mathbf{y}}{d\mathbf{x}^k} \right] \bigg|_{\bar{\mathbf{x}}} + R_{n+1} \quad (A10.1) \end{aligned}$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_{\bar{\mathbf{x}}}^{\mathbf{x}^*} \frac{d^{n+1} \mathbf{y}(\xi)}{(d\xi^T)^{n+1}} [\mathbf{E}]^n (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) d\xi \quad (A10.2)$$

上式の証明は VETTER⁽³⁾ によって与えられている。数学的には、この証明は重要であり、かつ興味深いのであるが、上式を応用する立場からは、余りに繁雑に過ぎると思われるので、ここでは省略することにする。

10.2 行列の展開

(A10.1), (A10.2) 式を、ある行列 \mathbf{A} に拡張すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k \mathbf{A}}{(d\mathbf{x}^T)^k} \bigg|_{\bar{\mathbf{x}}} [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})]^k \left[\frac{d^k \mathbf{A}}{d\mathbf{x}^k} \right] \\ &+ R_{n+1}(\mathbf{x}^*) \quad (A10.3) \end{aligned}$$

$$R(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{n!} \int_{\bar{\mathbf{x}}}^{\mathbf{x}} \frac{d^{n+1} \mathbf{A}}{(d\xi^T)^{n+1}} [\{ (\mathbf{E}]^n (\mathbf{x} - \xi) \} \left[\frac{d^k \mathbf{A}}{d\mathbf{x}^k} \right] d\xi \quad (A10.4)$$

これについても、同じく証明は省略する。

10.3 応用例 その3

(1) スカラー関数の極大極小

8.2 で、一次方程式の最小自乗解を論じた際、(A8.9) 式は極値または変曲点を与えるが、最小値を与える証明はしていなかった。この問題についてここで考えよう。今、 \mathbf{x}_n の任意の関数 $V_{1 \times 1}(\mathbf{x})$ が与えられ、これが \mathbf{x} に関して連続微分可能であるとする。これを、ある $\bar{\mathbf{x}}$ のま

わりで展開すると、

$$V(\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}) = V(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k V}{(d\mathbf{x}^T)^k} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \Delta \mathbf{x} + H_{n+1} \quad (\text{A10.5})$$

$\Delta \mathbf{x}$ が微小である場合には

$$\begin{aligned} V(\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}) - V(\bar{\mathbf{x}}) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k V}{(d\mathbf{x}^T)^k} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \Delta \mathbf{x} + H_{n+1} \\ &= \left. \frac{dV}{d\mathbf{x}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 V}{(d\mathbf{x}^T)^2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} (\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x}) + O(\Delta \mathbf{x}^3) \end{aligned} \quad (\text{A10.6})$$

$\bar{\mathbf{x}}$ として $\left. \frac{dV}{d\mathbf{x}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} = 0$ であるような $\bar{\mathbf{x}}$ をとったとする。この時、任意の微小な $\Delta \bar{\mathbf{x}}$ について

$$\begin{aligned} V(\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}) - V(\bar{\mathbf{x}}) > 0 &\rightarrow V(\bar{\mathbf{x}}) \text{ は極小} \\ < 0 &\rightarrow V(\bar{\mathbf{x}}) \text{ は極大} \end{aligned}$$

である。 $\Delta \mathbf{x}$ が十分微小であれば、 $O(\Delta \mathbf{x}^3)$ は (A10.6) 右辺第2項に比べて無視できる。そこで

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{(d\mathbf{x}^T)^2} (\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x}) &= \sum_i \sum_j \frac{d^2 V}{dx_i dx_j} \Delta x_i \Delta x_j \\ &= \Delta \mathbf{x}^T \frac{d^2 V}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{A10.7})$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{dV}{d\mathbf{x}^T} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} &= 0 \text{ で} \\ \frac{d^2 V}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} &> 0 \rightarrow V(\bar{\mathbf{x}}) \text{ は極小} \\ &< 0 \rightarrow V(\bar{\mathbf{x}}) \text{ は極大} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A10.8})$$

と結論される。ここで上式の不等号は、 $d^2 V / d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$ が、それぞれ正値あるいは負値の行列であることを示す。前にもどって、(A8.6)式の場合

$$V = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\frac{d^2 V}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ は、(A8.4)の条件より正値行列であるから、(A8.9)の \mathbf{x} は、たしかに V を極小にするわけである。

(2) 線型化の問題

あるベクトル関数

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{A 1 0.9}$$

を

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \tag{A 1 0.10}$$

の近傍で線型化する問題を考える。(A 1 0.9) 式を Taylor 展開すると、

$$\mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{(d\mathbf{x}^T)^k} \Delta \mathbf{x} + R_{n+1}$$

であるから

$$\Delta \mathbf{y} = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}^T} \Delta \mathbf{x} + \frac{d^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{(d\mathbf{x}^T)^2} \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x} + R_3 \tag{A 1 0.11}$$

こゝで右辺第 2 項を考えると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{F}}{(d\mathbf{x}^T)^2} \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \frac{d^2 y_1}{dx_1 dx_1} & \frac{d^2 y_1}{dx_1 dx_2} & \dots & \frac{d^2 y_1}{dx_n dx_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{d^2 y_m}{dx_1 dx_1} & \dots & \dots & \frac{d^2 y_m}{dx_n dx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \Delta x_1 \\ \Delta x_1 \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \Delta x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^T \frac{d^2 y_1}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}^T \frac{d^2 y_m}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{R}_2 \right)_i \frac{d^2 y}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \tag{A 1 0.12} \end{aligned}$$

そこで、(A 1 0.9) が線型化されるためには

$$\left| \left(\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}^T} \Delta \mathbf{x} \right)_i \right| \gg \left| (R_2)_i \right| \quad i=1 \dots m$$

でなければならない。実際問題としては、

$$\left| \left(\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}^T} \Delta \mathbf{x} \right)_i \right| \gg \left| \left(\Delta \mathbf{x}^T \frac{d^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \right)_i \right| \quad i=1 \dots m$$

であれば良いであろう。