

JAERI-M

4914

拡張された線型理論による原子力発電所の
負荷追従制御系の開発

1972年8月

佐藤 一男

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

拡張された線型理論による原子力発電所の負荷追従制御系の開発

日本原子力研究所東海研究所動力試験炉部

佐藤 一男

(1972年7月14日受理)

原子力発電所の負荷追従制御系は、その応答が速くかつ安定で、しかもその制御変域が非常に広いことが要請されている。本報告では、従来の線型制御理論を拡張し、ドリフト項と呼ばれる仮想的状態変数を導入することにより、制御対象プロセスの見かけの特性変化に対する感度を低くした制御系について述べる。この制御系は、標準的なBWRプラントについてシミュレーションを行った結果、現実のプラントに適用するのに極めて有望なものであることが判った。

なお、本研究は、筆者がOECD Halden Reactor Projectに滞在中、同Projectの研究計画の一環として行なわれたものである。

A Load Follow Control System for a Nuclear Power Plant
Through the Extended Linearization Technique

Kazuo SATO

Div. of JPDR, Tokai, JAERI

(Received July 14, 1972)

A load follow control system for a nuclear power plant based on a new concept is proposed. The proposed control system is a linear control system with some artificial state variables named "drift terms". With these drift terms, the control system is less sensitive to the apparent changes in the plant characteristics, and therefore is able to cover a wider range of the plant operation condition. The control system was tested with a BWR plant in a simulation study, showing that it would be very promising for the proposed system to be applied to a real power plant. The work described in the report was carried out at the OECD Halden Reactor Project in her 1970--72 Programme.

目 次

1. 緒 言	1
2. 非線型プロセスの拡張された線型表現	3
2.1 部分的線型性	3
2.2 見かけの線型表現	4
2.3 仮想的な外乱の推定と制御系の構成	5
3. 負荷追従制御の問題	9
3.1 負荷変動の性質	9
3.2 拡張された線型理論の適用可能性	9
4. シミュレーションの方法	12
4.1 シミュレーション・スキーム	12
4.2 簡略化されたBWRモデル	12
4.3 試験された制御系	15
5. 推定系の設計	16
5.1 Kalman filter	16
5.2 ドリフト項のある場合のKalman filter	17
6. 最適制御則の設計	19
6.1 評価関数	19
6.2 動的計画法による制御則の決定	20
7. シミュレーションの結果	21
7.1 線型モデルに対する制御系の動作	21
7.2 非線型モデルに対する制御系の動作	21
7.3 モデルの不正確の影響	24
7.4 推定系の設計パラメータの影響	28
7.5 測定不能な状態変数の影響	30
8. 結 論	34
謝 辞	34
参考文献	35
附録 簡略化されたBWRプラントモデル	36

1. 緒 言

最近多数の原子力発電所が稼動中、あるいは建設中である。電力系統全体から見れば、原子力発電所の分担する負荷の割合は、まだそれほど大きくはないが、この負荷分担の割合は今後共急速に増大して行き、近い将来、火力、水力と並んで系統で大きな比重を占めるようになることは明らかである。それに伴い、現在主として基底負荷モードで運転されている原子力発電所に対して、負荷追従運転の要求が生ずるのは恐らく必然的であろう。

一方、プロセス計算機は、今や原子力発電所の標準的な機器の一つになりつつある。プロセス計算機の利用は現在の所主として性能計算、プラント監視などの、いわゆる *passive function* がほとんどであるが、発電所の運転に対する要求が高度になるにつれて、在来の手法による比較的単純な制御系に代つて、プロセス計算機によるプラントの制御、いわゆる *active function* が実行される様になつて来るであろう。

本報告で述べる制御系は、上の2つの傾向を踏まえて、より能率的で、かつよりコンパクトなものを目標として開発されたものである。ここで、負荷追従制御系に限らず、原子力発電所の計算機制御系に課せられるであろう条件について若干考察して見よう。まず第1に、個々の制御プログラムは、妥当な性能、容量を持つプロセス計算機によつて実行可能なものでなければならない。このことは、単にそのプログラム自身が実行できるということばかりではなく、計算機がなさなければならない他の重要な仕事、たとえばプラントデータの取り込み、プラント監視等々と共存しなければならないことを意味する。次に、個々のプログラムの内容は、プラントにおける担当者にとつて理解、把握が可能であり、また少なくとも部分的には修正可能なものでなければならない。これを要するに、制御系は、実行時間、必要記憶容量共に十分コンパクトであり、かつその内容が余りに複雑高度でなく、比較的容易に理解できる様なものでなければならない。

以上の条件を念頭において、負荷追従制御の特徴を考えて見よう。後にも少し詳しく述べる様に、負荷追従制御の場合にまず第一に考慮しなければならないのは、制御系の取扱い変域が広いということである。現実のプラント特性は、多かれ少なかれ非線型であるので、制御系としても、プラントを線型化した比較的単純な制御系（以下、線型制御系と呼ぼう）では、満足できない場合が生じ得る。非線型性の特に強いプラント、たとえばBWRプラントなどでは、後にシミュレーションの結果で示す様に、在来の線型の制御系では負荷追従は満足に行なえない可能性がある。しかるに、現在の所では、非線型制御系は、必ずしもすべての場合に適用可能な解が得られているとは言えないし、また解がある場合でも、その内容が複雑に過ぎて、前記した計算機制御系に課せられている条件を必ずしも満足しない。

そこで、非線型のプロセスを制御するのに、線型制御系を改良して使用することを考える。改良する点は、制御系のプロセス特性の変化に対する感度を下げることである。これによつて、もし改良された線型制御系が、実用上考えられる全変域にわたつてほぼ満足の動作を示すのであれば、複雑な非線型制御系の代りに、線型制御系を用いることができるわけである。

本報告で述べる制御系は、この改良された制御系の一つである。この制御系は、本質的には

プラントのある平衡状態で線型化されたモデルに基づく線型制御系である。この制御系の設計手順は良く知られた線型制御系の設計手順そのままであり、ほとんど機械的な作業で足りる。しかしながら、この制御系は、通常の制御系と異つて仮想的な状態変数を含んでおり、これが線型モデルと、実際の非線型プロセスとの差を補償し、結果として、見かけのプロセス特性の変化に対する制御系の感度を下げる働きをする。この、仮想的な状態変数を、ドリフト項 (drift term) と呼ぶことにする。

ドリフト項と言う名称は、Josefsson の命名によるものである¹⁾。彼は OECD Halden Reactor Project (以下HPと理称する)において、HBWRへの現代制御理論の応用を研究中、非常に遅い変化をする状態変数、たとえば熱交換器の特性変化などを、白色雑音の積分で近似しようとし、これをドリフト項と名づけたのである。その後、このドリフト項がかなり重要な働きをするらしいことが実験中に観察された²⁾。Sato は、Kalman filter の設計理論の研究中、超低周波成分が状態推定に系統的な誤差を生ずる可能性を発見し、またこの誤差が、白色雑音の積分である程度補償し得ることを見出して、その形式的な類似から、これも同じくドリフト項と名づけた³⁾。本報告で述べる制御系に含まれる仮想的な状態変数もまた、白色雑音の積分で表現されており、ドリフト項と名づけられているのも、全く形式上の類似性に由来している。

なお、本研究は、筆者が1969年4月より、1972年12月まで、ノルウェーのOECD Halden Reactor Project に職員として出張中になされたものであり、筆者の出張報告の一部をなすものである。

2. 非線型プロセスの拡張された線型表現

2.1 部分的線型性

我々が制御の対象とするプロセスは非線型でオートノマスであるとし、

$$\dot{Z} = f(Z, V) \quad (2.1.1)$$

$$(Z, V) \in \Omega_0 \quad (2.1.2)$$

と表現されるとしよう。ここで Z は状態ベクトル、 V は操作ベクトル、 Ω_0 はプロセスの変域全体である。プロセス (2.1.1) は、少なくとも N 個の平衡点

$$f(\bar{Z}^i, \bar{V}^i) = 0 \quad i = 1 \dots N \quad (2.1.3)$$

を持つと仮定する。一般に (\bar{Z}^i, \bar{V}^i) に含まれるすべての要素が独立ではあり得ない。 (\bar{Z}^i, \bar{V}^i) の要素から、適当なものを選び出してベクトル q を作ると、 (\bar{Z}^i, \bar{V}^i) は q によつて一義的に定めることができる。

各平衡点の近傍で、プロセス (2.1.1) は近似的に線型化されて、

$$\dot{X}^r = A^r x^r + D^r u^r \quad (2.1.4)$$

と書くことができる。ここで (x^r, u^r) は、 (\bar{Z}^r, \bar{V}^r) からの規格化された偏差で、次の様に定義される。

$$x^r \triangleq \zeta_r^{-1} (Z - \bar{Z}^r) \quad (2.1.5)$$

$$u^r \triangleq \psi_r^{-1} (V - \bar{V}^r) \quad (2.1.6)$$

$$\zeta_r \triangleq \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^r & 0 \\ 0 & \bar{Z}_n^r \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

$$\psi_r \triangleq \begin{bmatrix} \bar{V}_1^r & 0 \\ 0 & \bar{V}_m^r \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

$$(Z, V) \in \Omega_r \quad (2.1.9)$$

ただし、 n, m はそれぞれ Z と V の次元を表わし、 Ω_r は (\bar{Z}^r, \bar{V}^r) の近傍である。今後、 Ω_r を「 r -近傍」と呼ぶことにしよう。

ここで、全変域 Ω_0 は、 N 個の近傍で覆うことができると考える。すなわち

$$\bigcup_{r=1}^N \Omega_r \supset \Omega_0 \quad (2.1.10)$$

このことは、非線型プロセス(2.1.1)は、 N 個の線型方程式(2.1.4)で表現できることを意味する。

(2.1.10)の仮定の下に、非線型プロセスを、線型制御系で制御するための方法がいくつか考えられる。たとえば、1つの近傍に対して1つの線型制御系を設計する。もし、プロセスが r -近傍から動いて他の近傍に移る場合には、プロセスは最初 r -近傍に対応する制御系で制御され、これが次の近傍との境界に達すると、今度は次の近傍に対応する制御系が制御を引き継ぐ。この様にして次々に近傍を通過して行くことにより、プロセスは任意の目標に向つて任意の軌跡にそつて移動することができる。あるいは、こうして多数の制御系を設計すれば、制御系のパラメータが近傍によつて、言葉を変えるとベクトル q によつて、比較的簡単な関数形でフィットできるかも知れない。この様にすれば、線型制御系から、非線型制御系を合成することができる。これらの方法は、設計手順そのものは機械的であるが、 N が大きくなると作業量が龐大になる恐れがあり、さらに第1の方法では、計算機の容量の点で困難が生ずる恐れがある。

本報告で述べる制御系は、上に述べた様なものとは若干原理的に異なるものである。この制御系を導出するために、さらに次節に述べる様な考察を行う。

2.2 見かけの線型性

r -近傍において

$$\dot{X}^r = A^r x^r + D^r u^r \quad (Z, V) \in \Omega_r \quad (2.2.1)$$

また他の s -近傍においては、同様に

$$\dot{X}^s = A^s x^s + D^s u^s \quad (Z, V) \in \Omega_s \quad (2.2.2)$$

と書くことができる。 x^r, u^r と x^s, u^s の関係は、

$$x^r = \zeta_r^{-1} \zeta_s x^s + \zeta_r^{-1} (\bar{Z}^s - \bar{Z}^r) \quad (2.2.3)$$

$$u^r = \psi_r^{-1} \psi_s u^s + \psi_r^{-1} (\bar{V}^s - \bar{V}^r) \quad (2.2.4)$$

であることは、(2.1.5)、(2.1.6)の定義から容易に示すことができる。(2.2.3)、(2.2.4)を(2.2.1)に代入すると、 r -近傍のプロセスを x^s, u^s を表現することができる。すなわち

$$\dot{x}^s = A_s^r x^s + D_s^r u^s - A_s^r \bar{x}^{rs} - D_s^r \bar{u}^{rs} \quad (Z, V) \in \Omega_r \quad (2.2.5)$$

こゝに

$$\hat{A}_s^r \hat{=} \zeta_s^{-1} \zeta_r \hat{A}^r \zeta_r^{-1} \zeta_s \quad (2.2.6)$$

$$\hat{D}_s^r \hat{=} \zeta_s^{-1} \zeta_r \hat{D}^r \psi_r^{-1} \psi_s \quad (2.2.7)$$

$$\hat{\bar{x}}^{rs} \hat{=} \zeta_s^{-1} (\bar{Z}^r - \bar{Z}^s) \quad (2.2.8)$$

$$\hat{\bar{u}}^{rs} \hat{=} \psi_s^{-1} (\bar{V}^r - \bar{V}^s) \quad (2.2.9)$$

こゝで

$$\Delta \hat{A} \hat{=} (\hat{A}_s^r - \hat{A}^s) \quad (2.2.10)$$

$$\Delta \hat{D} \hat{=} (\hat{D}_s^r - \hat{D}^s) \quad (2.2.11)$$

$$\varepsilon \hat{=} \Delta \hat{A} \hat{x}^s + \Delta \hat{D} \hat{u}^s - \hat{A}_s^r \hat{\bar{x}}^{rs} - \hat{D}_s^r \hat{\bar{u}}^{rs} \quad (2.2.12)$$

を定義すると、

$$\hat{\dot{x}}^s = \hat{A}^s \hat{x}^s + \hat{D}^s \hat{u}^s + \varepsilon \quad (Z, V) \in \Omega_r \quad (2.2.13)$$

が得られる。r = s の場合には、明らかに $\varepsilon = 0$ であるから、(2.2.13)は r, s 両近傍で成立する。と言うことは、変域 Ω_0 で成立と言うことである。

こゝで、 ε は、線型なプロセス(2.2.2)に対する一種の外乱であると見なすことにしよう。この「外乱」は、(2.2.12)に定義されている様に、我々がプロセスの非線型な特性についての十分な知識があるならば、直ちに求めることができるのであるが、こゝでは、我々のプロセス特性に関する知識は \hat{A}^s, \hat{D}^s と言う2つの行列のみであるとし、糸の応答から、仮想的な外乱を推定することを考える。こうして推定された「外乱」をも考慮に入れて、操作量を決定する制御則が定められれば、この制御則はプロセスの非線型性に応じた制御を行うことができるであろう。一方、 ε を外乱と見なせば、(2.2.13)は、 \hat{x} に関して見かけ上線型になつている。そこで、この見かけの線型プロセス(2.2.13)と、真の線型プロセス(2.2.2)とに対応する制御系の差を次に考慮することにする。

2.3 仮想的な外乱の推定と制御系の構成

前節で定義した仮想的な外乱 ε の推定の問題を、制御系の構成と合せて考えて見よう。Fig 2.3.1 は、線型プロセスの制御系の構成である。プロセスは(2.2.2)式で表はされる。状態ベクトル \hat{x}^s のうち、そのすべては測定可能ではなく、測定系によつて測定ベクトル y が得られるとする。推定系は y から \hat{x}^s の推定 $\hat{\hat{x}}^s$ を求め、制御則は $\hat{\hat{x}}^s$ より操作量 \hat{u}^s を決定する。

Fig 2.3.2 は、非線型プロセスの制御系の一般的構成である。プロセスの非線型分は、図中 $\delta \hat{A}, \delta \hat{D}$ と表はされている。プロセスの非線型の度合によつては、 $\delta \hat{A}$ あるいは $\delta \hat{D}$ が卓越することもあり得るであろう。これに対する制御系の推定系、制御則は共に $\delta \hat{A}, \delta \hat{D}$ を包含した非線型推定系、非線型制御則である。

前節で、 ε を仮想的な外乱とみなすと言つたのに対応するのが、Fig 2.3.3 である。この場合、 ε は、 $\delta \hat{A}, \delta \hat{D}$ のパスを経たものでなく、ある未知の外部よりの入力、すなわち外

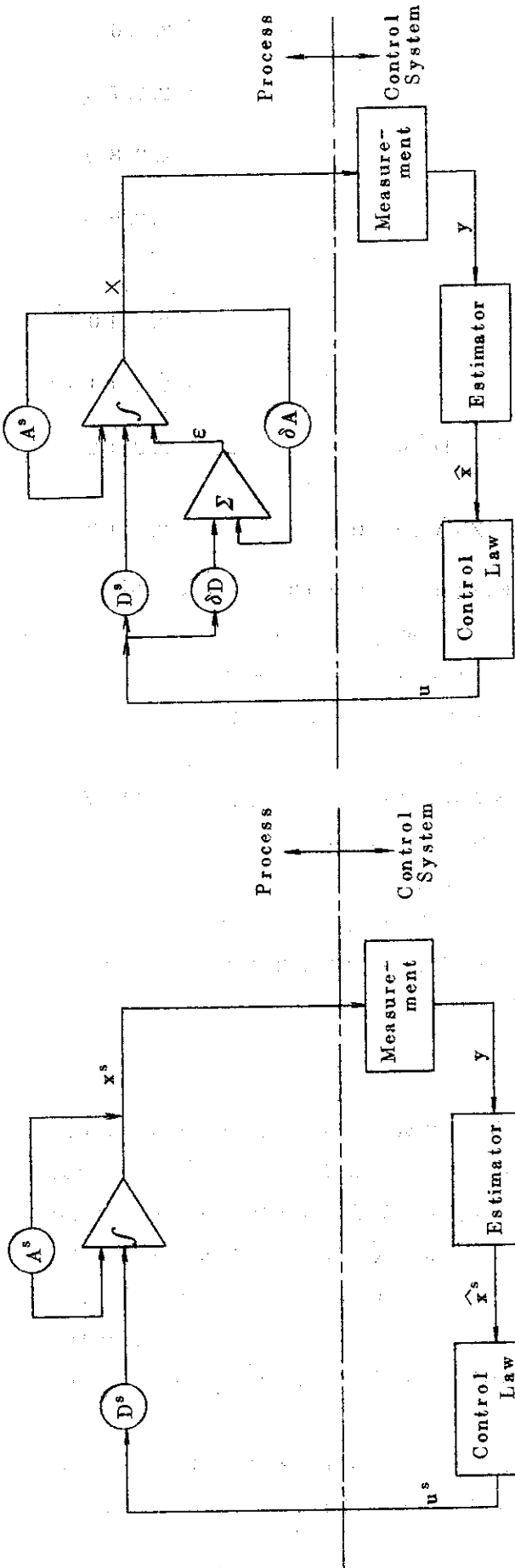


Fig. 2.3.1 Control Scheme for a Linear Process

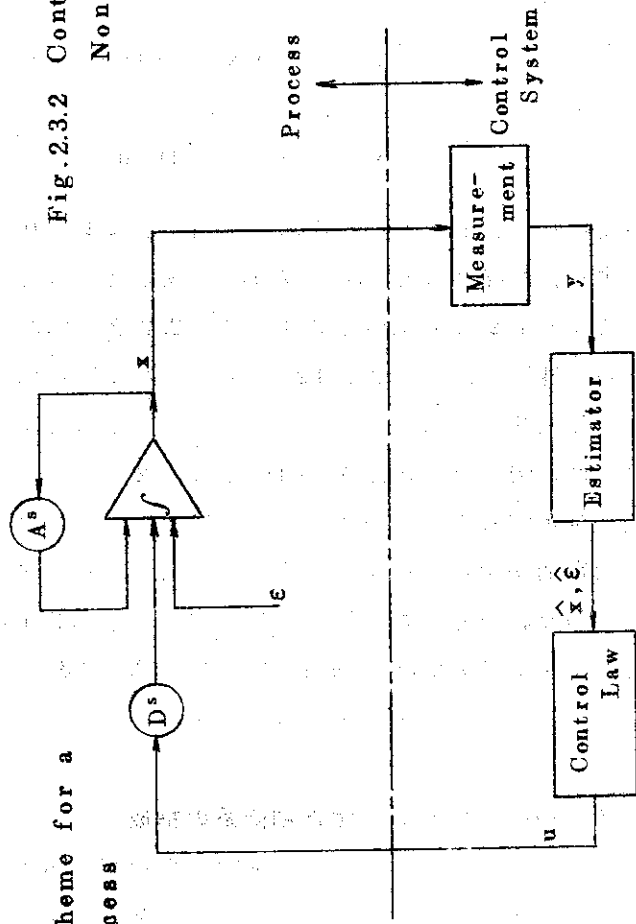


Fig. 2.3.2 Control Scheme for a Non-Linear Process

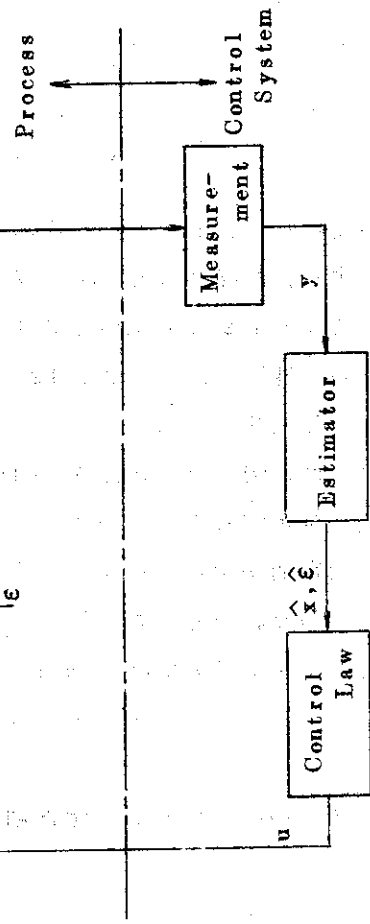


Fig. 2.3.3 Control Scheme for a Non-linear Process with the Extended Linearization Technique.

乱として取り扱われる。推定系は測定ベクトル y から、 \hat{x} と共に、 ϵ の推定 $\hat{\epsilon}$ を決定し、制御則は、 \hat{x} 、 $\hat{\epsilon}$ より u を決定する。この様な構成を考えた場合に推定系、制御則は、どの様なものであり得るか、本節で考察する問題である。

まず第1に Fig 2.3.3 では、 δA 、 δD のパスを無視しているので、 x あるいはその測定 y から、直接 ϵ を予測する手段がない。この意味で、 ϵ は、プロセス雑音 n と類似している。そこで、このプロセスに起り得る ϵ の全体は、1つの確率過程のアンサンブルを形成すると考えることにしよう。この確率過程の統計的性質をどの様に定めれば良いかは、プロセスの性質と、 x^s の振舞いに依存するが、ここではまずこの確率過程を定常な部分と非定常な部分に分離し、前者を定常白色雑音で、後者を(狭義の) Brown motion 過程で代表させ得るとする。一般に白色雑音の時間に対する積分は Brownian であることを示すことができるので、形式的に*

$$\epsilon = \xi + \eta \quad (2.3.1)$$

$$\dot{\xi} = \nu \quad (2.3.2)$$

と書くことにしよう。ここに ξ は ϵ のうちの非定常部分、 ν 、 η は定常白色雑音である。従つて、Fig 2.3.3 のプロセスは、プロセス雑音がない時には、

$$\dot{x}^s = A^s x^s + D^s u^s + \xi + \eta \quad (2.3.3)$$

$$\dot{\xi} = \nu$$

あるいは上の2式を一括して

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^s \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^s & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^s \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D^s \\ 0 \end{bmatrix} u^s + \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

と書くことができる。ここに、 I は恒等行列である。上式で、 ξ は一種の測定不能な状態変数と見なすことができるので、線型プロセス(2.3.5)に対する線型の推定系たとえば Kalman Filter⁴⁾で推定することができ、また制御則も、同じプロセスに対する線型制御則が使用できることになる。以下この ξ を「ドリフト項」と呼ぶことにする。

ここで、もう一度 Fig 2.3.3 を見直して見ると、元来 ϵ は、非線型プロセスを線型表現した時の誤差を表わしていたのであるが、この図から出発する限り、 ϵ は非線型性に由来するものと限る必要はないのであつて、制御系を設計する際に用いられるモデルと、実際のプロセスの差が、下記の条件を満たす限りすべて同様に取扱い得る良い場合もある。この点は、後にシミュレーションの結果でも考察することにしてしよう。さて、現実のプロセスを(2.3.5)で表現して制御系を設計する場合、この制御系の動作が満足できるものであるためには、次の条件が必要である。

* (脚註) Brown motion 過程は、時間に対して微分不能である。従つて(2.3.2)は厳密には正しくない。

ここでは、白色雑音の時間積分の逆表現と解されたい。

(1) 実際のプロセスと、モデルとの差が、Brown motion 過程と白色雑音過程の合成で近似的に表現できること。

(2) (2.3.5)式から判る様に、推定系によつて推定され、制御則を通して操作量の決定に直接寄与するのは、非定常部分 ϵ だけである。すなわち、 ϵ は部分的にしか評価されていない。従つて、(2.3.5)に基いて設計された制御系の機能が満足すべきものであるか否かは、要求されている制御の質とプロセスの特性に依存する。

これを要するに、(2.3.5)式は、非線型プロセスの完全な表現ではないから、これに基づく制御系もまた完全な非線型制御系ではない。しかしながら、非線型性の一部を取り入れることによつて、線型制御系の適用可能な範囲をある程度広げることが可能であろう。言葉を代えれば、制御系のプロセス特性に対する感度を下げることが可能となるであろう。もし、この様に広げられた適用可能範囲が、要求されている変域を覆うことができるならば、制御系設計の目的は達成されたことになるのである。

3. 負荷追従制御の問題

3.1 負荷変動の性質

前章に述べた拡張された線型理論を，原子力発電所の負荷追従制御系に適用することを考えよう。こゝでは，まず一般に発電所に対して，系統から要求される負荷の変動はどのような性質を持つかを考える。系統から要求される負荷変動は，大きく分けて2通りに分類し得ると思われる。すなわち

- (1) 負荷の日変化，週変化あるいは季節的变化など，一般に変化巾が大きいが変化率は比較的遅く，かつある程度予測可能であるもの。
- (2) 他の発電所や大きな負荷のトリップ等に伴うもので，変化巾はあまり大きくないが極めて速く，かつ予測不能であるもの。

(1)の負荷変動に対して，原子力発電所が持つ特殊な問題はXeの蓄積である。ゆるやかで，かつ大巾な出力の変動は，時として大きなXeの変動を生じ，場合によつては発電所が運転不能になる事態も生じ得る。一方，(2)の負荷変動に対しては，発電所の出力を十分に速く変化させることができる制御系が必要である。もちろん，この際に，制御系は種々なプラントの変数のオーバーシュートや振動を最小に抑えるものでなければならない。

このような要請に答える制御系の構造の一つとして，次の様なものが考えられる。すなわち，第一に，負荷追従時に考えられるプラントの状態の全変域にわたつて，発電所出力を任意の軌跡に沿つて変化させることができる(狭義の)制御系が設計される。次に，ある負荷変動が予測される場合に，Xeの過渡変動を最小に抑える様な最適軌跡を求める系が加えられる。

この，2番目の系の設計は，固定終点，固定終結時を持つた，制約のある最適軌跡問題と見なすこともできよう。この問題もまた極めて興味のある問題であるが，この報告では直接は取り扱かはないことにする。この報告では，専ら第一の，速くかつ安全な(狭義の)制御系の設計を，前章に述べた拡張された線型理論によつて組み立てることを考えることにする。

3.2 拡張された線型理論の適用可能性

第2章に述べた拡張された線型理論を，原子力発電所の負荷変動に適用するに先立つて，この理論を適用することが果して妥当であるか否かを若干考察しよう。適用が妥当と考えられるための条件は，2.3節の末尾に示しておいた。そこでまず第一の条件について調べる。

前節で，負荷変動のうち，(1)についてはある程度予測可能であると述べた。しかし，かなり規則的な変動であつても，将来の負荷を厳密に予測することは元来できないことであつて，精々「かくかくの負荷が起る確率が最も高い」としか言えない。この意味で，どのような負荷変動も，厳密には予測できない，確率過程であると見なすことができるであろう。起り得る負荷変動の全体を $\{P(t)\}$ と書くことにして，今， $t=0$ で，負荷が P_0 であつたとしよう。負荷変動は上下いずれの方向にも起り得ると考えて，

$$E\{P(t)\} = P(0) = P_0 \quad t \geq 0 \quad (3.2.1)$$

として良いであろう。こゝに E は期待値の演算子である。 $t=0$ から，無限小の時間だけ経過

した時には、 $P(t)$ はほとんど確実に P_0 であるだろう。しかし、時間がたつにつれて、 $P(t)$ が P_0 に留まつている確からしきは減つて来る。すなわち、 $P(t)$ の分散 (variance) は時間と共に増大して来ると考えられる。第1近似として、 $P(t)$ の分散は t に比例すると考えよう。さらにもし、 $\{P(t)\}$ の分布が、正規分布で与え得るとするならば、 $\{P(t)\}$ は Brown motion 過程と考えることができる。

今、発電所は、負荷変動 $P(t)$ にほとんど忠実に追従しているとする。この時には、2.1節で述べたベクトル q も、ほとんど $P(t)$ と同じ挙動をしていると考えて良いであろう。従つて

$$E\{q(t)\} = q_0 \quad (3.2.2)$$

$$C_{ov}\{q_0(t), q_0(t)\} \triangleq C_q(t, t) = C_{q_0} \cdot t \quad (3.2.3)$$

$$\varphi_q(\nu) = \exp\left\{j\nu^T q_0 - \frac{1}{2}\nu^T C_q(t, t)\nu\right\} \quad (3.2.4)$$

$$t \geq 0$$

こゝに、 φ_q は q の確率特性関数である。こゝで、(2.2.12)式の ε のうち、

$$\varepsilon = \xi + \eta \quad (3.2.5)$$

$$\xi = -\Lambda_r^T \bar{x}^{rs} - D_r^T \bar{u}^{rs} \quad (3.2.6)$$

$$\eta = \Delta \Lambda x^s + \Delta D u^s \quad (3.2.7)$$

とすることにする。この様に定義すると、 ξ は q によつて一義的に定めることができる。ただし、 ξ は q の非線型な変換であるから、一般には正規分布でも、あるいはBrownian であるとも限らない。 ξ は一般に

$$\xi = a + \beta q + \gamma(q)q$$

と書くことができる。こゝで、 a, β は一定のベクトルまたは行列であり、 $\gamma(q)$ は $q \rightarrow \xi$ 変換の非線型部分であるとする。第1近似として

$$\xi \simeq a + \beta q \quad (3.2.9)$$

と書くことができたとし、 q を

$$E\{\xi(t)\} = \xi(0) = 0 \quad (3.2.10)$$

になる様に選んだとすれば、 ξ もまた近似的にBrownian であるとみなすことができる。

次に

$$\dot{x}^s = \Lambda^s x^s + D^s u^s + \eta \quad (3.2.11)$$

と言うプロセスを考えてみよう。 η の定義からこれは

$$\dot{x}^s = \Lambda_r^s x^s + D_r^s u^s = \Lambda(q)x^s + D(q)u^s \quad (3.2.12)$$

である。この2つの式を比較すると、(3.2.11)は、(3.2.12)のLangevin型の表現になつてゐることが判る。プロセスをLangevin方程式で記述した時に、第1近似としてしばしばなされる様に、等価雑音源 η を、独立な白色雑音過程と考えることもできよう。

以上の議論は、もちろん厳密なものではない。しかし、負荷追従中の発電所に対して、第2章に述べた理論を適用し得る万能性が、ある程度はあることを示していると言つても良いであろう。そこで、負荷追従制御の問題は、2.3節末尾の(1)の条件をある程度満していると考えて、(2)について、シミュレーションによつて調べることにする。

4. シミュレーションの方法

4.1 シミュレーション・スキーム

第2章の理論の適用性を調べるシミュレーションに当つて、こゝでは対象とするプラントとしてBWRプラントを選んだ。BWRを選んだ理由としては、まずこの炉型がPWRと並んでこゝ当分原子力発電所の主流をなすであろうこと、またBWRはその特性に著しい非線型性があり、第2章の理論を試験するのに恰好なものと思はれることなどである。

Fig 4.1.1に、シミュレーションのスキームを示す。まず、代表的と思はれるBWRプラントから、簡略化された非線型モデルを作り、さらにプラントのある平衡状態でこれを線型化して、簡略化された線型モデルを作る。このモデルに基づいて制御系を設計し、その機能をまず簡略化された非線型モデルについて調べる。もし制御系の機能が満足すべきものであれば、次に大規模なプラントモデルについて、その機能を確かめる。シミュレーション・スキームがこの様な形を取る理由は次の通りである。すなわち、第1章で述べた様に、オンライン制御系は、その容量、時間共にできるだけコンパクトであることが望ましい。制御系のサイズは、何よりもそれが基いているモデルのサイズに依存する。一方、第2章の理論によれば、この理論はプロセスの非線型のみならず、プロセスとモデルに差異がある時にもある程度有効であることが期待できる。そこで、極めて簡略化されたモデルによつてコンパクトな制御系を作り、これを大規模なモデルに対して適用してどこまで機能を発揮し得るかを調べよと言ひものである。

このシミュレーションは、未だ完結するに至っていない。この報告では、簡略化された非線型モデルに対するシミュレーションの結果に重点を置いて述べることにする。大規模なモデルに対するシミュレーションは、1972年4月現在、HPにおいてなされており、良好な結果を収めつゝある。簡略化された非線型モデルについての調査結果は、第2章の理論が極めて有望であることを示し、かつドリフト項と、測定不能な他の状態変数との関係などに興味深い知見をもたらしている。この意味で、これまでの結果は、第2章の理論の原理的な妥当性は十分に示し得ると考えられる。

4.2 簡略化されたBWRモデル

モデルの詳細な導出は付録で示すことにして、こゝでは、簡略化されたモデルの基本的な特徴だけを述べておこう。なお、付録では、 X_0 をモデルに取り入れているが、制御系のシミュレーションではこれを除外した。モデルの主要な特徴は

- (1) 原子炉熱出力は1点近似、遅発中性子1群。
- (2) 反応度はボイドと燃料温度のフィードバックのみを考える。
- (3) プラントは再循環流量と、タービンへの蒸気流量で制御される。制御棒はもつばら出力分布制御に用いられるとする。
- (4) ボイドは圧力依存の質量とエネルギーの保存の方程式を、適当な仮定の下に空間積分として1点で表示する。
- (5) 給水の流量は常に蒸気流量に等しいとし、かつそのエンタルピは一定とする。また、給

水入口から炉心入口までの伝送遅れは無視する。

この様な近似で得られた非線型モデルを線型化して得られる線型モデルを Fig. 4.2.1 に示す。各状態変数に、1個ずつドリフト項を割当ててあるが、遅発中性子については、プラントの状態によつて変化が生ずることはないので、これを省略する。線型モデルは次の様なものである。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{n} \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{x} = [\delta N \quad \delta C \quad \delta \theta_f \quad \delta f \quad \delta P \quad \xi_N \quad \xi_\theta \quad \xi_f \quad \xi_P]^T \quad (4.2.2)$$

$$\mathbf{u} = [\delta W_{in} \quad \delta R]^T \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{n} = [\eta \quad \nu]^T \quad (4.2.4)$$

こゝに δN ... はいずれも平衡状態からの規格化された偏差であつて

- δN : 原子炉熱出力
- δC : 遅発中性子先行核濃度
- $\delta \theta_f$: 燃料平均温度
- δf : 炉心内平均ボイド体積率
- δP : 原子炉圧力
- ξ : それそれぞれに対応するドリフト項
- δW_{in} : 再循環流量
- δR : 主蒸気配管および弁の等価抵抗
- η, ν : 白色雑音過程

である。また、(4.3.1)式の行列 \mathbf{A} 、 \mathbf{D} はそれぞれ (2.3.5) 式に現われた行列と同じ構成になつている。状態方程式 (4.3.1) を次の状態遷移方程式に書き直す。

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (4.2.5)$$

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T} \quad (4.2.6)$$

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{D} dt \quad (4.2.7)$$

$$\mathbf{v} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{n}(t) dt \quad (4.2.8)$$

こゝに k はサンプリング番号、 T はサンプリング間隔、また \mathbf{u} はサンプリング間隔中は不変とする。

付録を参照すれば明らかであるが、このモデルの平衡状態は、3つの状態変数または操作量によつて一義的に定まる。こゝでは、熱出力 N 、炉圧力 P 、および再循環流量 W_{in} で平衡状態を記述することにする。このうち、 P は通常の BWR の運転状態ではプラント出力によつてその基準値が大きく変化することはないので、平衡状態を記述する時はこれを除外しても良いであらう。そこで

$$\mathbf{q} = [N \quad W_{in}]^T \quad (4.2.9)$$

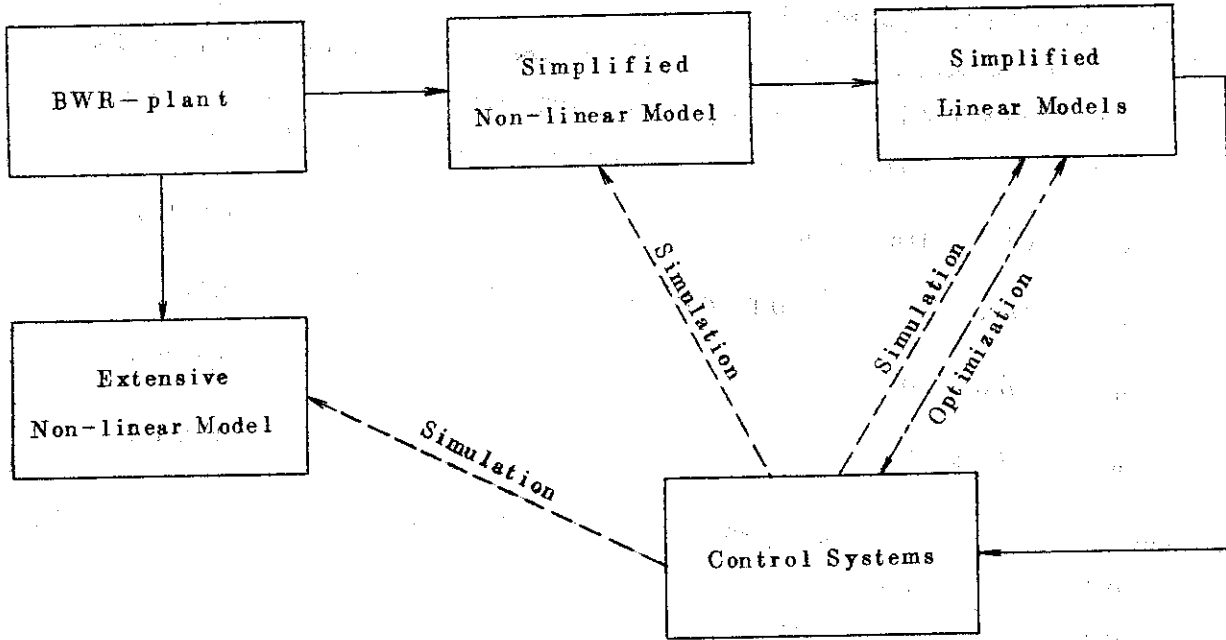


Fig.4.1.1 Simulation Scheme.

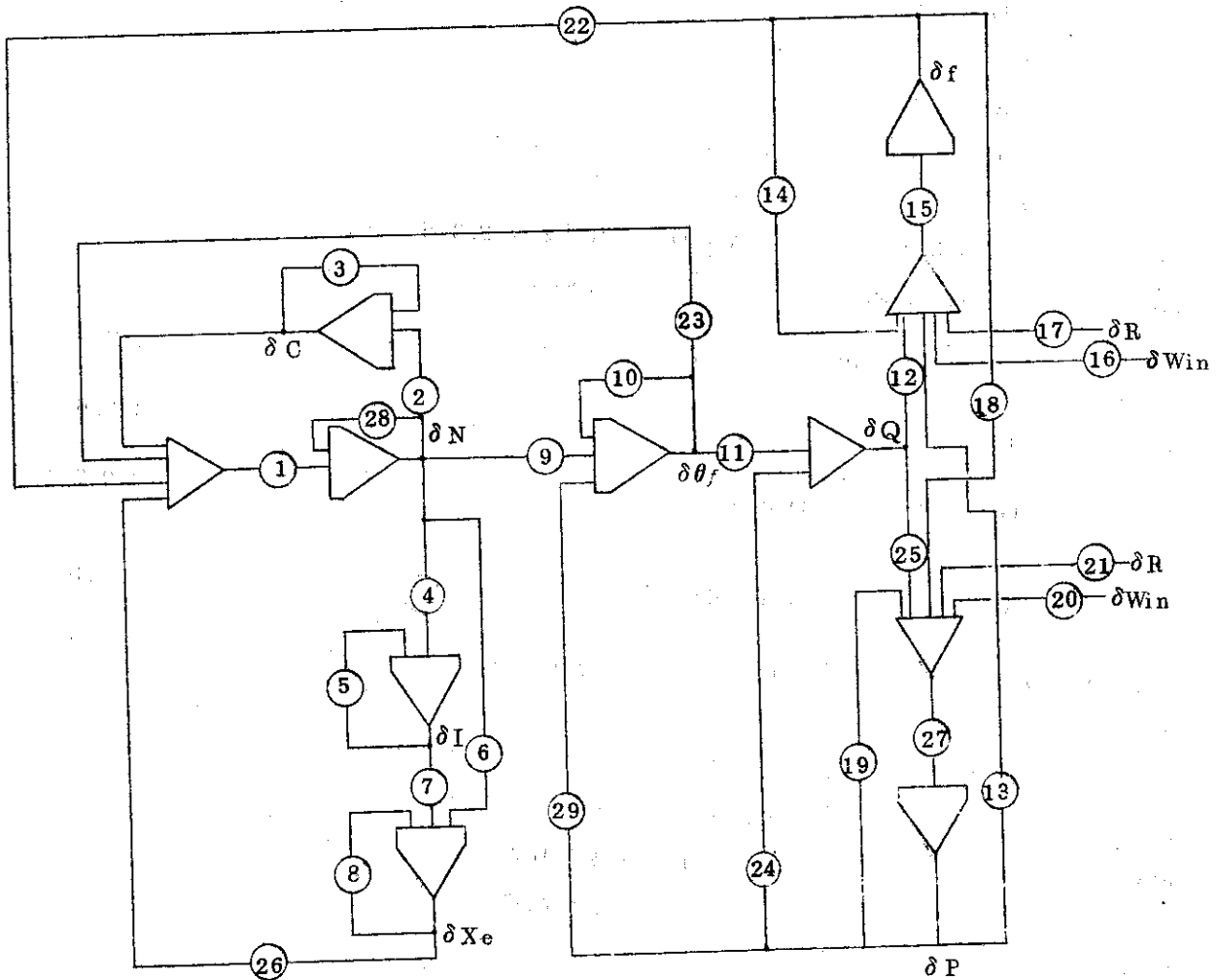


Fig.4.1.2 Simplified Linear Model of a BWR Plant.

として、これで平衡状態が一義的に与えられるものとする。

4.3 試験された制御系

制御系を設計するものに先立つて、制御対象たる BWRプラントに対する負荷の要求は、定格出力の 50~100% の範囲であると仮定した。この範囲について、大別して 2 通りの制御系が設計された。一つは、ドリフト項を含むもので、(4.2.1)~(4.2.4)式に基くものである。他の一つは、ドリフト項を含まない、いわば通常の線型制御系である。ただし、通常の線型制御系で、50~100% 出力範囲をカバーすることは困難であろうことを予想して、この範囲で何点かの平衡点について、それぞれ制御系を設計した。設計された制御系を Table 4.3.1 に示す。このいずれの制御系も、同じ評価関数によつて最適化されている。後にも述べる様に、操作量の 1 つとして、再循環流量そのものを取つているが、評価関数の中に再循環流量の変化率を取り入れることによつて、現実的でない程速い流量変化が起らない様にしてている。

Table 4.3.1 Control Systems Tested in the Simulation

Version	With or without Drift Terms	Optimized at (% power, % rec. flow)
A	with	(75, 75)
B-1	without	(100, 100)
B-2		(75, 75)
B-3		(50, 50)

測定可能な状態変数としては、最初はドリフト項を除く 5 個が測定可能であると仮定し、次に熱出力と原子炉圧力のみが測定可能であるとした。

5. 推定系の設計

5.1 KALMAN filter

シミュレーションのための制御系のうち、推定系としては Kalman filter⁴⁾ を採用した。Kalman filter による推定系では、プロセス

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k) + \mathbf{v}(k) \quad (5.1.1)$$

およびその測定

$$y(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k+1) + w(k) \quad (5.1.2)$$

に対して、最適推定 $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ を

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{M}) [\Phi \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}u(k)] + \mathbf{K}_k y(k) \quad (5.1.3)$$

で与えるものである。ここで、 \mathbf{M} は測定行列、 w は測定雑音である。 \mathbf{K}_k は、 $\|\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)\|^2$ を最小にする様に定められた行列で、こゝでは Kalman の行列と呼ぶことにする。

(5.1.3) より明らかな様に、Kalman filter の設計は、結局 Kalman の行列 \mathbf{K}_k の決定に他ならない。 \mathbf{K}_k は次の式で与えられる。

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{M}^T [\mathbf{M} \mathbf{C}_k \mathbf{M}^T + \mathbf{W}_k]^{-1} \quad (5.1.4)$$

$$\mathbf{C}_{k+1} = \Phi [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{M}] \mathbf{C}_k \Phi^T + \mathbf{R}_k \quad (5.1.5)$$

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{E} \{ w(k) w^T(k) \} \quad (5.1.6)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{E} \{ v(k) v^T(k) \} \quad (5.1.7)$$

上の式で、 $k=1$ (これが最初の測定である) から順次に \mathbf{K}_k を求めて行くのであるが、その際に2つの困難がある。けず第1に、上の計算を実行するためには \mathbf{C}_1 を与えてやる必要がある。元来 \mathbf{C}_k は、推定誤差の相関行列であるが、 \mathbf{C}_1 を定める適当な方法がないと言うことである。次に、 \mathbf{W}_k 、 \mathbf{R}_k を決定するのが必ずしも容易ではないと言うことである。

プロセス雑音と測定雑音が定常、すなわち \mathbf{W}_k 、 \mathbf{R}_k が k によらない場合には、 k を増大すると共に \mathbf{K}_k 、 \mathbf{C}_k は次第に一定な行列に収束することが知られている。もし、我々が初期状態についての十分な知識を持つて制御系の起動をすることができるとすれば、時間と共に変化する \mathbf{K}_k の代りに、収束した行列 \mathbf{K} を推定に使うことができる。この時には、 \mathbf{K} は

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} \mathbf{M}^T [\mathbf{M} \mathbf{C} \mathbf{M}^T + \mathbf{W}]^{-1} \quad (5.1.8)$$

$$\mathbf{C} = \Phi [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{M}] \mathbf{C} \Phi^T + \mathbf{R} \quad (5.1.9)$$

の解であり、 \mathbf{C}_1 によらないので、第1の困難は回避することができる。シミュレーションでは、後に示す様に、測定雑音を無視したので、 $\mathbf{W}=0$ である。こゝでは、

$$\dot{x} = Ax + Du + n \quad (5.1.10)$$

で、 n が独立な白色雑音である場合に R がどのような形になるかを考えよう。定義より

$$\begin{aligned} R = E\{v(k), v^T(k)\} &= E \int_{k-1T}^k \int^T [\Phi(\tau)n(\tau)][\Phi(\tau')n(\tau')]^T d\tau d\tau' \\ &= \int_0^T \int^T \Phi(\tau) E[n(\tau)n^T(\tau')] \Phi^T(\tau') d\tau d\tau' \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

n は独立な白色雑音であるとする、

$$E[n(\tau)n^T(\tau')] = S\delta(\tau-\tau') \quad (5.1.12)$$

と書くことができる。 S はスペクトル密度行列で、 n の要素が独立であれば対角行列になる。 $\delta(\tau-\tau')$ はディラックのデルタである。(5.1.12)を(5.1.11)に代入すれば、

$$R = \int_0^T \Phi(\tau) S \Phi^T(\tau) d\tau \quad (5.1.13)$$

が得られる。すなわち、 R は、 S が決定すれば決定することができる。ドリフト項がある場合の等価的な S については、次の節で考える。

5.2 ドリフト項のある場合の KALMAN filter

この節では、Kalman filter を設計するための基本的なデータであるスペクトル密度行列 S について考慮する。(5.1.10)式で

$$n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

ここで、右辺第1項はプロセス雑音であつて、 n_2 は、Satoによつて導入された低周波補償成分である³⁾。 η, ν はそれぞれ n_1, n_2 とは相関がないと考えて良いであろうから

$$E\{n(t), n^T(t')\} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \delta(t-t') + \begin{bmatrix} S_{\eta\eta} & S_{\eta\nu} \\ S_{\nu\eta} & S_{\nu\nu} \end{bmatrix} \delta(t-t') \quad (5.2.2)$$

として良い。ここで、右辺第1項の S_1, S_2 はそれぞれ対角行列である。第2項の行列は、 η, ν の定義から、一般には対角行列にはならない。ただし、 $S_{\nu\eta} = S_{\eta\nu} = 0$ とするのは、無理のない近似であろう。仮に q の予期し得る最大変化、 ξ の最大変化率が判つていれば、 $S_{\eta\eta}, S_{\nu\nu}$ はある程度推定することができる。ただし、単に非線型性によるモデルとプロセスの偏差ばかりでなく、より一般に、モデルの不正確さをもドリフト項で取り扱う場合には、 $S_{\eta\eta}, S_{\nu\nu}$ 直ちに決定することはできない。筆者の経験によれば、シミュレーションで定めてやるのが、最も簡単で確実である。なお、 S_1, S_2 の決定方法は、Satoが既に与えている³⁾。

ここで報告するシミュレーションでは、まず $S_1 = S_2 = 0$ すなわちプロセス雑音はないとし、

さらに、第1段階の試みとして、 $S_{\eta\eta}$ 、 $S_{\nu\nu}$ は共に対角行列であるとした。もし、これで得られた推定系の機能が満足できるものであれば、設計手順はかなり簡略化される。そこで、(5.2.2)式第2項の行列の対角成分を $(10^{N_1}, 10^{N_2}, 10^{N_2}, 10^{N_2}, 10^{N_2}, 10^{N_3}, 10^{N_4}, 10^{N_4}, 10^{N_4})$ という形で与え、これを (N_1, N_2, N_3, N_4) という形で表示することにする。

6. 最適制御則の設計

6.1 評価関数

最適制御則を設計するためには、まず評価関数を与える必要がある。今回のシミュレーションでは、計算の便利さと言う点から、2次形式の評価関数を採用した。2次形式の評価関数は一般に

$$J_N = \sum_{k=1}^N [x^T(k) Q x(k) + u^T(k-1) H u(k-1)] \quad (6.1.1)$$

と示すことができる。ここに Q 、 H はそれぞれ対称な準正値行列とする。 Q 、 H は、制御の目的によつて定められる。我々の場合、この目的は次の様なものである。

- (1) 原子炉熱出力は、目標値にできるだけ近く追従すること。
- (2) 原子炉圧力の変化はできるだけ小さくすること。
- (3) 操作量、およびその変化率は現実的に妥当な範囲に収まること。

目標をこの様に設定した理由について、若干補足説明すると、まず、負荷追従制御系では、発電機出力あるいはタービン出力、少くともタービンへの蒸気流量が系統からの要求に応じて変化されるべきである。しかしながら、この場合には、負荷変化が速い場合には熱出力に大きなオーバーシュートを生ずる恐れもある。安全性の観点からすれば、この様なオーバーシュートは当然許容し難い所で、熱出力は常にある安全な範囲内に収まっていなければならない。そこで、熱出力を目標値に追従させることにし、この目標値は、負荷変動の、ある関数として与えることにした。また、(4.2.3)に示す様に、操作量として、再循環流量と、蒸気調整弁開度(等価的に流路抵抗変化として与えている)が取られているが、現実には、これら自身が操作量となる訳ではない。現実には、たとえば再循環ポンプの速度調整器とか、弁のポジションへの信号が操作量となる。再循環流量の場合を考えると、ポンプや冷却材の慣性によつて、現実の操作量と再循環流量との間には、かなりの遅れがあると見なければならぬ。そこで、操作量を(4.2.3)の様に取つた場合には、この絶対値ばかりでなく、変化率も妥当な範囲に入つていなければならない。

以上の考察から、制御則の設計に当つては、(6.1.1)を若干修正した2次形式の評価関数

$$\begin{aligned} J_N = & \sum_{k=1}^N \{ [\delta N(k) - \delta N_{set}(k)]^2 + C_1 \delta P^2(k) \\ & + C_2 [\delta W_{in}(k-1) - \delta W_{in}(k-2)]^2 \\ & + C_3 [\delta R(k-1) - \delta R(k-2)]^2 \} \quad (6.1.2) \end{aligned}$$

が採用された。

6.2 動的計画法による制御則の決定

制御則の最適化には、ここでは動的計画法を採用した。一般にプロセスが線型であり、評価関数が2次形式である場合には、最適操作量は状態ベクトルの線型変換として与えられる。すなわち

$$u(k) = B_{N-k} x(k) \quad k=0 \dots N \quad (6.2.1)$$

また、 B_{N-k} は、 $k=1 \dots N$ について、

$$-(H+G^T S_{N-k} G) B_{N-k} = G^T S_{N-k} \Phi \quad (6.2.2)$$

$$S_{N-(k+1)} = Q + \Phi^T S_{N-k} (\Phi + G B_{N-k}) \quad (6.2.3)$$

$$S_N = Q \quad (6.2.4)$$

で与えられる。明らかに、 B_{N-k} は k に依存、すなわち時々刻々変化する行列であるが、 $N \gg k$ かつ $N \rightarrow \infty$ の時には、 B_{N-k} はほとんど k によらず一定な行列になる。これは、いわゆる定値制御の場合に相当する。負荷追従の場合は、目標値は時々刻々変化するもので、当然定値制御ではないのであるが、もし、目標値の変化に対して制御系が十分速くプロセスを制御できるならば、時間依存の制御則の代わりに定値制御則を使うこともできる。これによつて、制御系は大巾に簡略化されることになる。この場合には制御則 B は

$$\left. \begin{aligned} -(H+G^T S G) B &= G^T S \Phi \\ S &= Q + \Phi^T S (\Phi + G B) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.5)$$

の解となる。今回のシミュレーションでは、まず定値制御則から出発することにした。なお、サンプリング間隔としては、今回のシミュレーションでは、1秒とした。

7. シミュレーションの結果

7.1 線型モデルに対する制御系の動作

制御則は、線型されたモデルについて最適化される。Table 4.3.1 に示した様に、合計4組の制御系が設計されているが、評価関数はどの制御則に関しても共通である。ドリフト項を除く5個の状態変数がすべて測定可能であるとした場合、Version A と、B-2 で、75% 出力、75% 流量（これを以下状態(75, 75)の様に表わすことにする）から、100% 出力まで60秒間でランプ状に目標値を変化させた場合をFig 7.1.1 に示す。制御対象（以下これをプロセスと呼ぶ）が線型であるから、ドリフト項は常にゼロ（プロセス雑音、測定雑音がゼロであるから）であつて、2つの制御系による応答は全く一致する。また、図より見られる様に、制御系のパフォーマンスは、十分満足すべきものである。

7.2 非線型モデルに対する制御系の動作

制御対象として、簡略化された非線型モデルを取つた場合には、ドリフト項は当然ゼロではない。従つて、この場合、Version A に対しては、推定系が大きな役割を果たすことになる。ドリフト項を含まない制御系では、5個の状態変数が全部測定可能としているので、推定系は不要である。Fig 7.2.2 に、(75, 75)の状態から50秒間に、100% および50% 出力までランプ状に目標値を変化させた場合を示す。Version A は、Fig 7.1.1 に示した動作とほとんど変わりがなく、極めて満足すべき制御パフォーマンスを示しているのに反し、Version B-2 は、線型モデルに対する動作と全く異なり、100% まで目標値が変化した場合に目標値に到達できず、50% まで変化させた時はたゞちに発散してしまつている。Fig. 7.1.1 との相違は、制御対象たるプロセスが、非線型であると言うことだけである。すなわち、線型制御系B-2ではカバーし切れない程度の非線型プロセスに対して、Version A は十分な適応能力を有していることが示唆されている。

この点を良く見るために、Fig. 7.2.2 および7.2.3 に示された結果を調べることにする。この図は、状態(100, 100)、(75, 75)、(50, 50)から、目標値を10% ステップ状に変化させた時の応答である。ドリフト項のない制御系は、それぞれの場合の初期条件に対して最適化されたものである。図より明らかな様に、Version A は、他の制御系に比べてむしろ良好な応答を示しており、出力は速やかに目標値に到達しているのに対して、他の制御系はいずれも出力と目標値との間に無視できない偏差が生じており、かつこの偏差は合理的と思はれる時間内には補償されていない。

制御系の動作をさらに良く把握するために、(制御系にとって)予期せざる外乱に対する影響を調べて見よう。Fig. 7.2.3 は、5セントのステップ状の外乱反応度が加えられた場合の応答である。第4.2節および付録に示す様に、簡略化された非線型モデルでは、反応度としてはフィードバック反応度のみを考え、制御棒の動きその他の外部からの反応度は考慮していない。このため、ドリフト項のない制御系では、外乱反応度が加えられたことを認識することができず、出力は目標値から離れたまゝであるのに対し、Version A は、たゞちにこれを認識

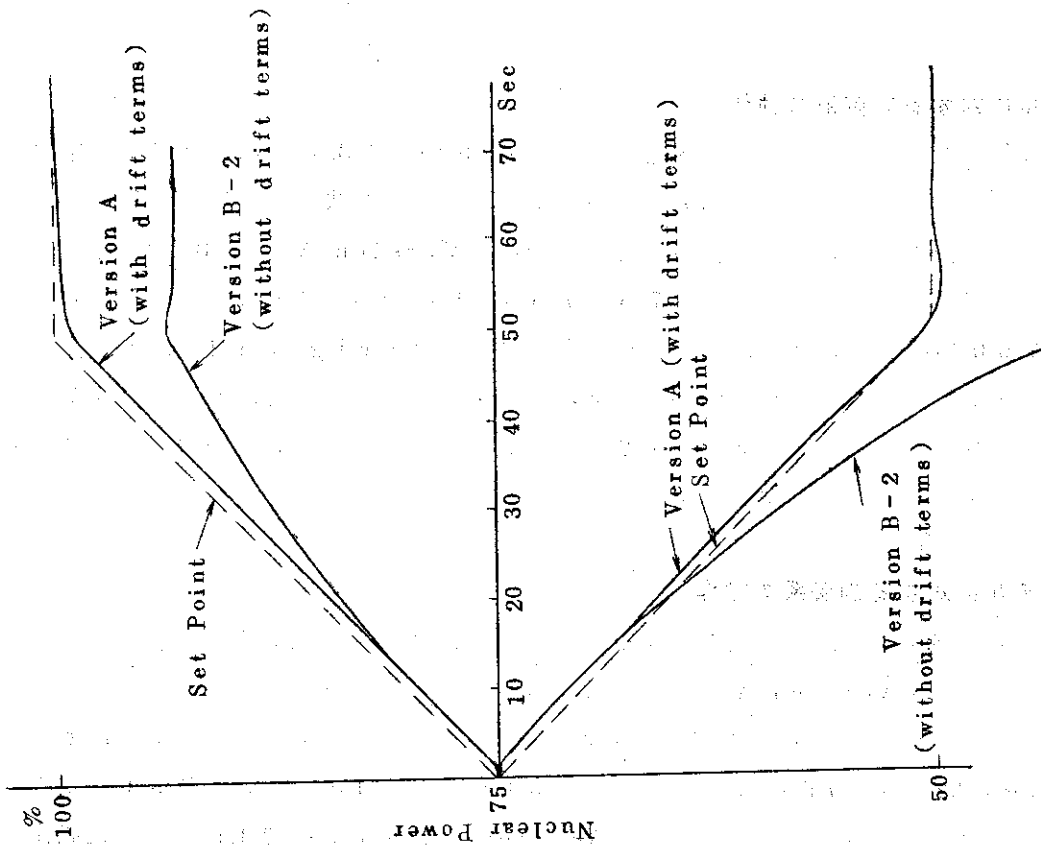


Fig. 7.2.1 Comparison of control systems with and without drift terms when applied to the non-linear model. Ramp changes in power set point.

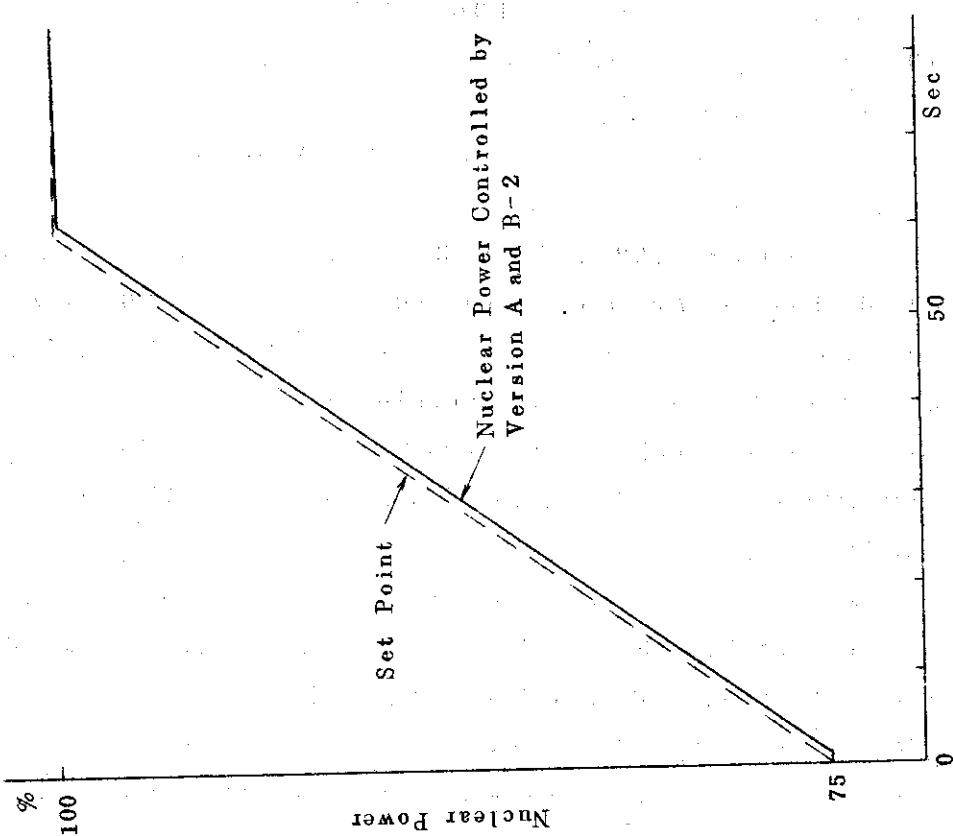


Fig. 7.1.1 Control performance when applied to the linear model. Ramp change in power set point.

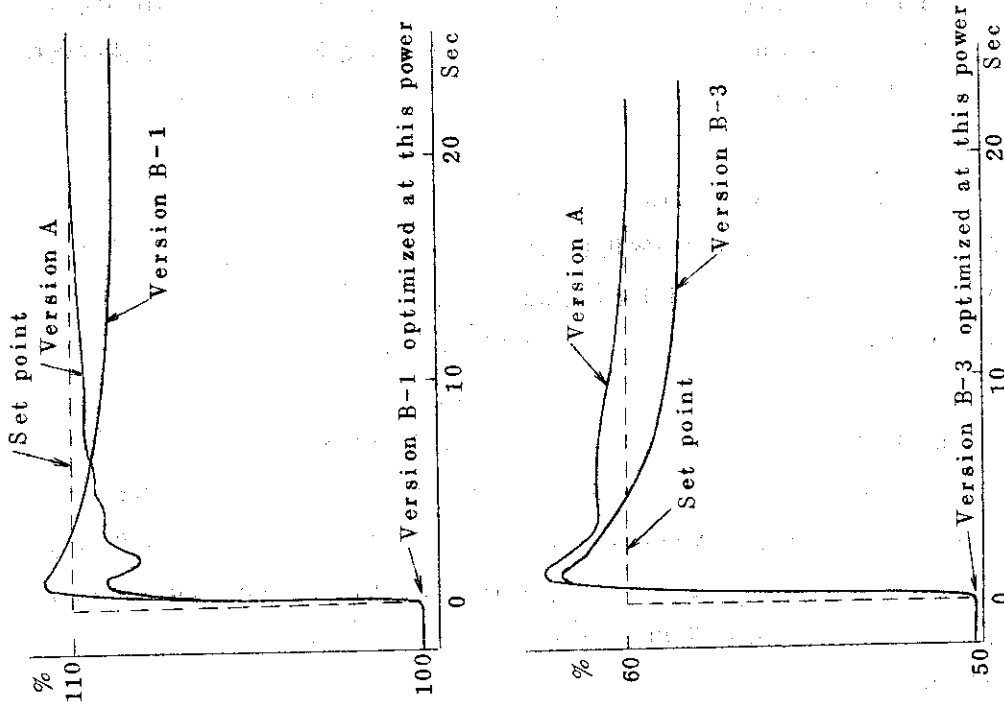


Fig.7.2.3 Comparison of control systems with and without drift terms when applied to the non-linear model. Step changes set point. (2)

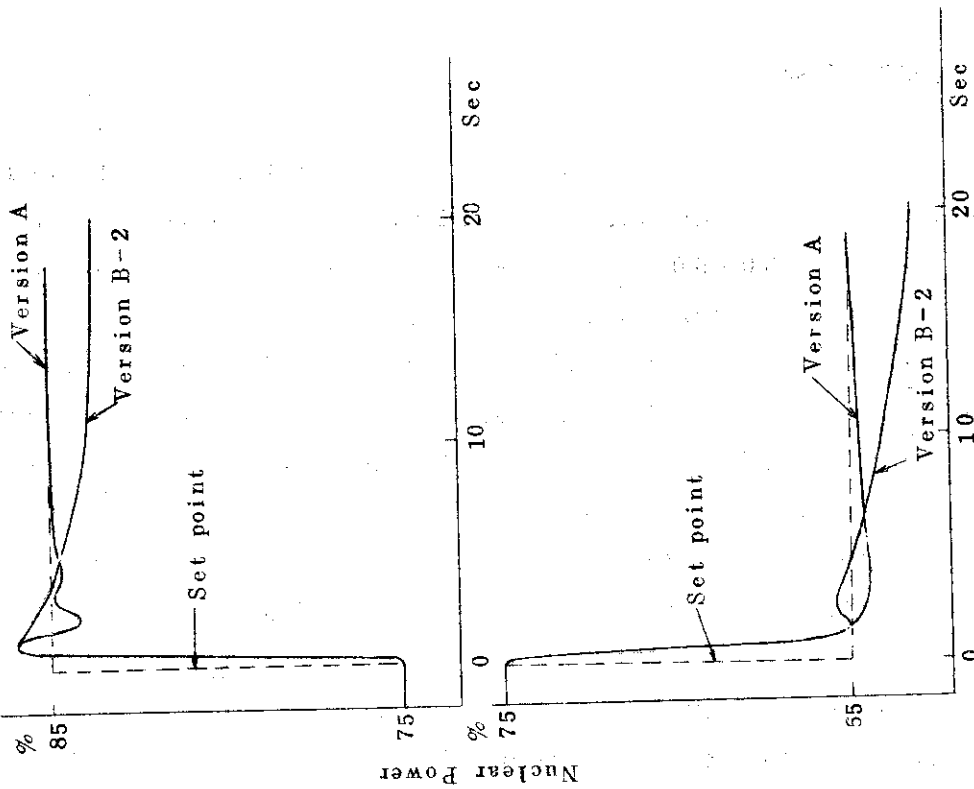


Fig.7.2.2 Comparison of control systems with and without drift terms when applied to the non-linear model. Step changes in power set point (1)

して、正しい制御操作を行い、出力を速やかに目標値に復帰させている。もつとも、後に Fig. 7.4.1 でより詳しく述べるように、ドリフト項のうち、 ξ_N は外乱反応度そのままに対応しているとも考えられるので、この結果はある意味で当然であるかも知れない。しかし、Fig. 7.2.5 の場合には、外乱反応度の場合の様に、直接外乱に対応するドリフト項がない。この場合は、給水エンタルピが、10% ステップ状に減少した場合であつて、前にも述べた様に、給水エンタルピは一定と言ひ仮定のもとに簡略化されたモデルは組み立てられているのである。この場合も、ドリフト項がない制御系は、外乱を正しく認識できず、出力を目標値に復帰させることができないのに対し、Version A は満足すべき動作を示している。Fig. 7.2.6 および Fig. 7.2.7 は、タービン蒸気流量が変化した場合である。この場合にも、ドリフト項を含む Version A の優位は明瞭である。Fig. 7.2.2 から 7.2.7 までの結果に共通して言えることは、Version A は、それがもともと最適化されている (75, 75) の状態からかなり大巾に異なる (100, 100) あるいは (50, 50) の状態においても、これらの状態で最適化されたはずの Version B-1, あるいは B-3 よりも良好な特性を示していることである。しかも、Fig. 7.2.7 の場合を除いては、3つの異なる初期状態での応答にほとんど本質的な差がない。このことは、ドリフト項を含む Version A が、プロセスの見かけの特性変化に対し、極めて低い感度を有していることを示している。一方、Fig. 7.2.7 の (50, 50) の場合は、ドリフト項を含む制御系でもかなりの過渡状態があり、あるいはこの辺が、ドリフト項の限界を示すのかとも考えられる。

なお、以上の図では、熱出力の応答のみを示したが、原子炉圧力その他の状態量の過渡変動は、いずれの場合も Version A が他の制御系に比べて少なかつた。

7.3 モデルの不正確の影響

前にも述べた様に、Version A は、簡略化された非線型モデルを、(75, 75) の状態で線型化したモデルに基いている。この様にして得られた線型モデルは、当然 (100, 100) あるいは (50, 50) の状態を完全に代表することはできない。従つて、Version A を、(100, 100) あるいは (50, 50) の状態に適用するのは、見方を変えらると、制御系を設計するためのモデルが不正確であつたと考えることもできる。

現実に制御系を設計する立場に立つと、設計のためのモデルがどの程度まで正確でなければならぬかは、極めて難しい問題である。前にも述べた様に、制御系設計のためのモデルは極めてコンパクトであることが要求される一方、モデルの正確さは、極めて一般的に言えば状態変数の数を減らして行くにつれて失なはれて行く。モデルが、どの程度までの正確さを有していなければならないかを一般的に論ずることは困難であるが、ドリフト項を導入することによつて、モデルの正確さに対する要求が緩和されることは確かである。本節では、この点について若干考察する。

BWRの動特性で、実験的な測定が困難で、かつ極めて重要なパラメータの一つに、反応度のボイド係数がある。そこで、ボイド係数の推定にかなりの誤りがあつた場合に、Version A の応答がどの様に変化するかを調べて見よう。Fig. 7.3.1 は、ボイド係数が $\pm 25\%$ の誤差があるとした場合の、熱出力の目標値のステップ変動に対する応答である。図より明らかな様

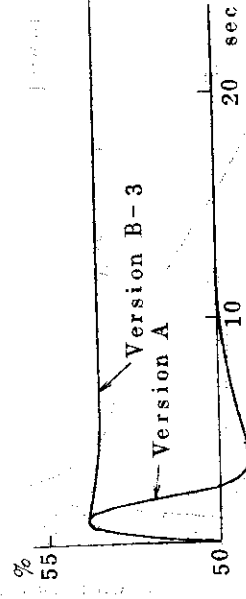
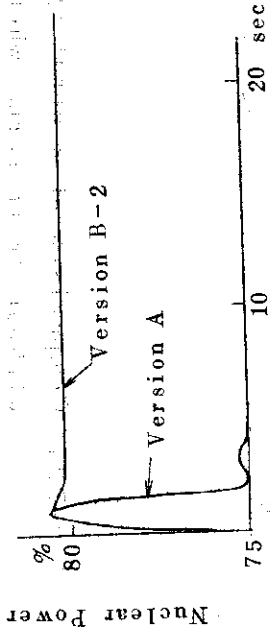
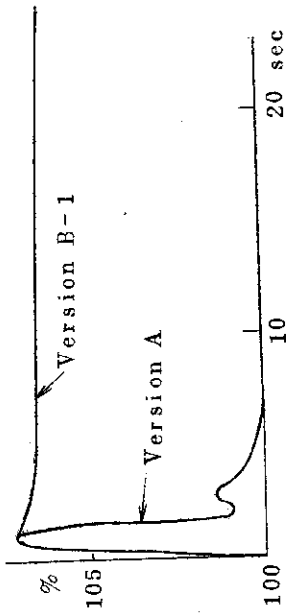


Fig.7.2.5 Comparison of control systems with and without drift terms when applied to the non-linear model. Step change in feed water enthalpy by 10%.

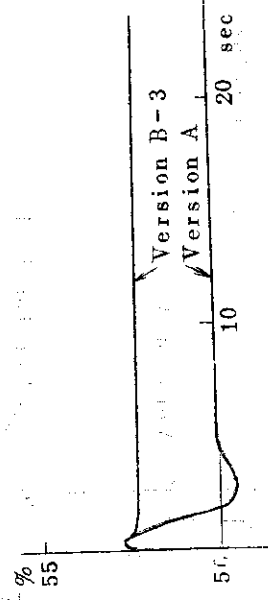
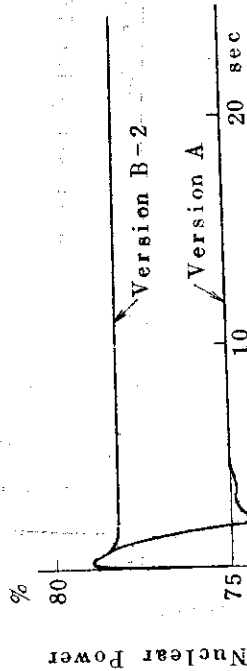
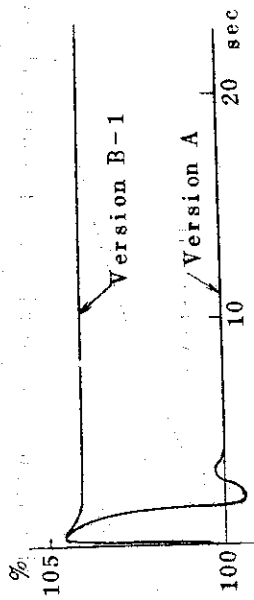


Fig.7.2.4 Comparison of control system with and without drift terms when applied to the non-linear model. Step reactivity 5¢.

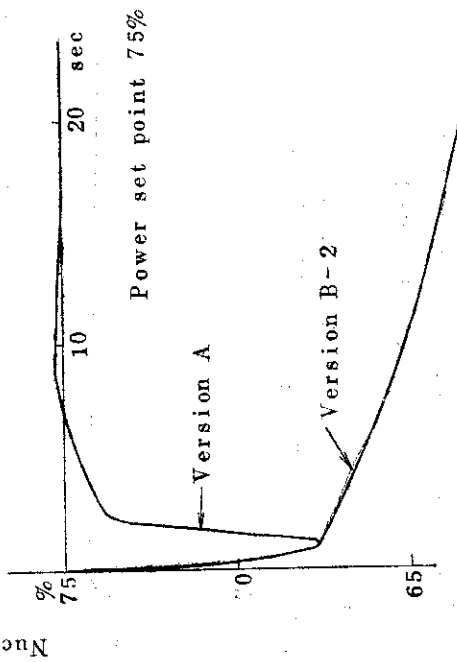
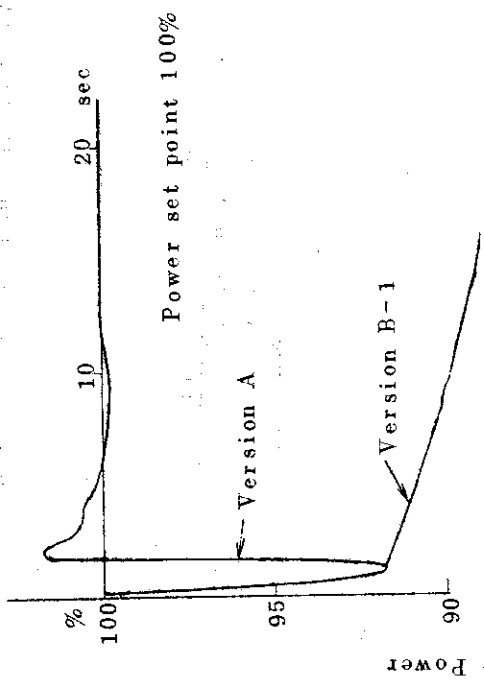


Fig.7.2.6 Comparison of control systems with and without drift terms when applied to the non-linear model. Step change in turbine steam flow by 10% of rating. (1)

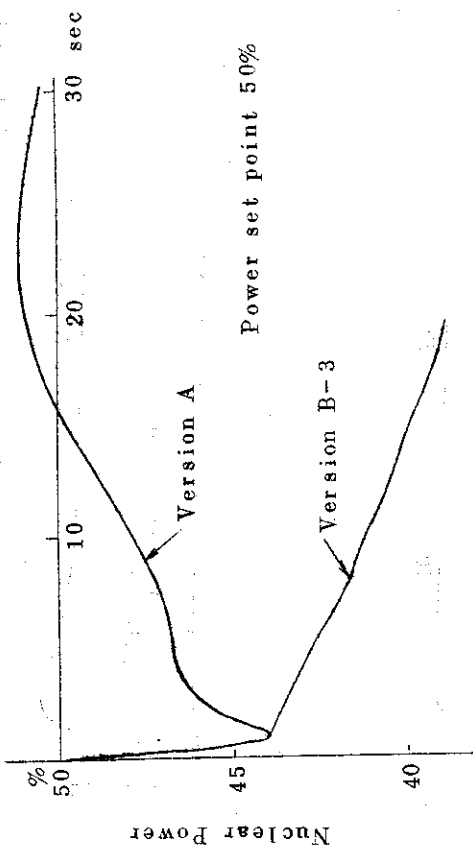


Fig.7.2.7 Comparison of control systems with and without drift terms when applied to the non-linear model. Step change in turbine steam flow by 10% of rating.

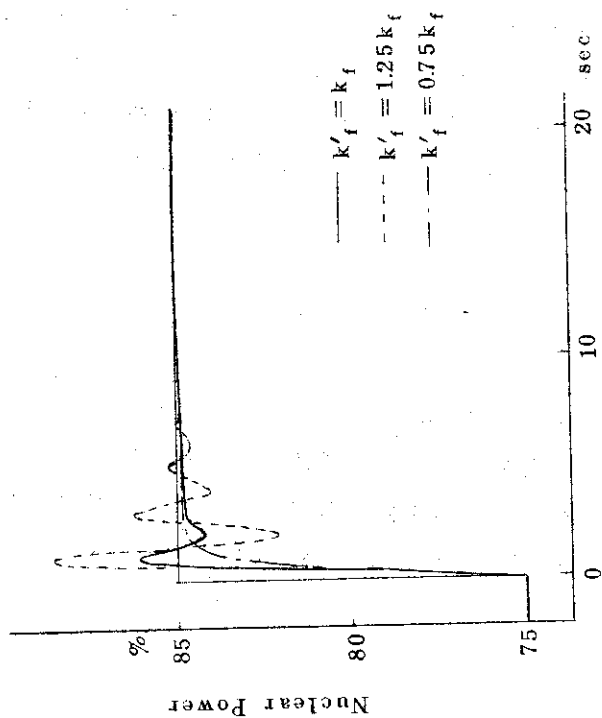


Fig. 7.3.1 Effect of inaccuracy in the model for control system design.

k_f : Void coef. used for control system design.

k_f' : Void coef. in the process under control.

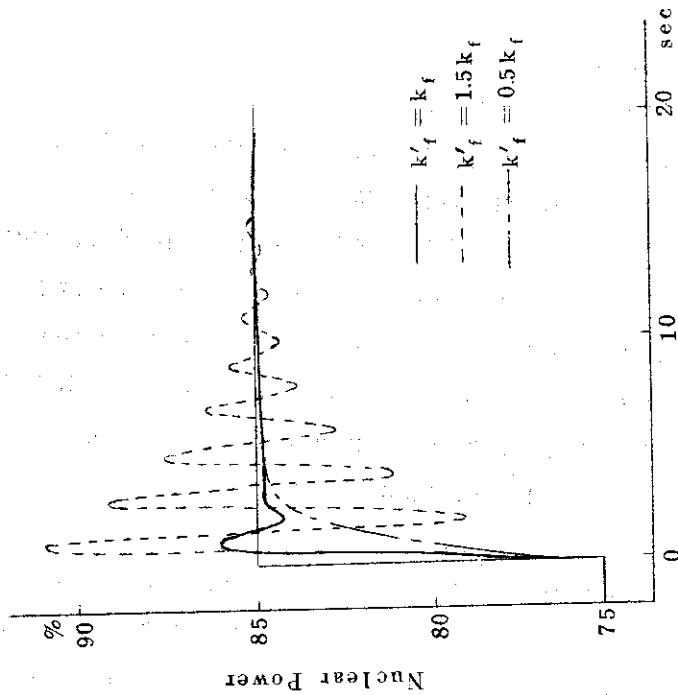


Fig. 7.3.2 Effect of inaccuracy in the model for control system design.

k_f : Void coef. used for control system design.

k_f' : Void coef. in the process under control

に、プロセスの真のポイド係数の絶対値が大きい場合には、一般により大きなオーバーシュートを生ずる傾向があるが、過渡状態は比較的速やかに収束し、また、初期状態の変化によつても本質的な変化は生じていない。付言すると、ドリフト項を含まない制御系は、このポイド係数の誤差には全く追従できない。なお、誤差が $\pm 50\%$ の場合を、参考としてFig. 7.3.2に示す。この場合のオーバーシュートは、現実には到底許容できるものではないが、それでも比較的短時間で過渡状態が終ることは注目して良いであろう。

次の例は、プロセスに存在する遅れを、モデルが無視した場合である。この様な無視によつて、結果的にはモデルの状態変数の数が減少し、コンパクトな制御系が得られることになる。簡略化された非線型モデルで、この様に明らかに無視された遅れの重要なものゝ一つは、炉心入口エンタルピの変化に伴うものである。再循環流量が変化すると、給水と飽和水との混合比が変わり、このため入口エンタルピが変化するのであるが、この入口エンタルピは、給水スパージャーから炉心入口までの移動による遅れを伴う。この様な事情を考へて、制御系からの δW_{in} と、プロセスの再循環流量の間に一次遅れがある場合を考へて見た*。さらに、 δR と、蒸気流量との間にも一次遅れを導入した。この結果、制御系は、2個の状態変数を省略した(不正確な)モデルに基いて設計されたことになる。Fig. 7.3.3にその例を示す。この様な遅れが入ることにより、当然プロセスの応答は遅くなるのであるが、この遅れを無視したことによつて、不安定になつたり、大きな過渡変動をしたりとすることはなかつた。もちろん、これらの遅れを取り入れたモデルによつて制御系を設計していれば、図に示した応答よりも良い応答が得られるであろう。しかし、要求された制御の質によつては、プロセスに本来存在する状態変数のいくつかを省略しても良いことを、この結果は示していると言えよう。

いずれにしても、ドリフト項を含む制御系は、それが基いているモデルがある程度不正確であつても、かなりこれを補償する能力があることが結論されよう。従つて、制御系は相当簡略化されたモデルによつて設計することができ、結果としてコンパクトになる可能性がある。原子力発電所の負荷追従制御と言う特定の問題において、どの程度までの簡略化が実際に可能かについては、まだ検討を要するが、第4.1節に述べた様に、こゝで得られた制御系を、もつと大規模なプロセス(モデル)に適用することにより、回答の一端が得られるであろう。

7.4 推定系の設計パラメータの影響

以上述べたVersion A満足すべき動作は、もちろんドリフト項の推定が妥当である場合である。ドリフト項が妥当に推定されるためには、推定系の設計がまた妥当でなければならないことは当然である。第5.2節に述べた様に、推定系を決定するパラメータは、スペクトル密度行列であつて、厳密にはドリフト項を含めた状態変数の数の自乗個の要素(今回のシミュレーションでは81個)を適当に定めてやる必要がある。第5.2節では、スペクトル密度行列が対角行列であるとし、さらにそれを簡略化して4個のパラメータ(N_1, N_2, N_3, N_4)で与えたことを述べた。こゝでは、制御特性が、この4個のパラメータでどの様に変るかを調べる。

* (脚註) δW_{in} を直接操作量とすることが問題であることは既に述べたが、この点は評価関数を適当に定めることにより、その変化率が妥当な範囲に入る様になつている。

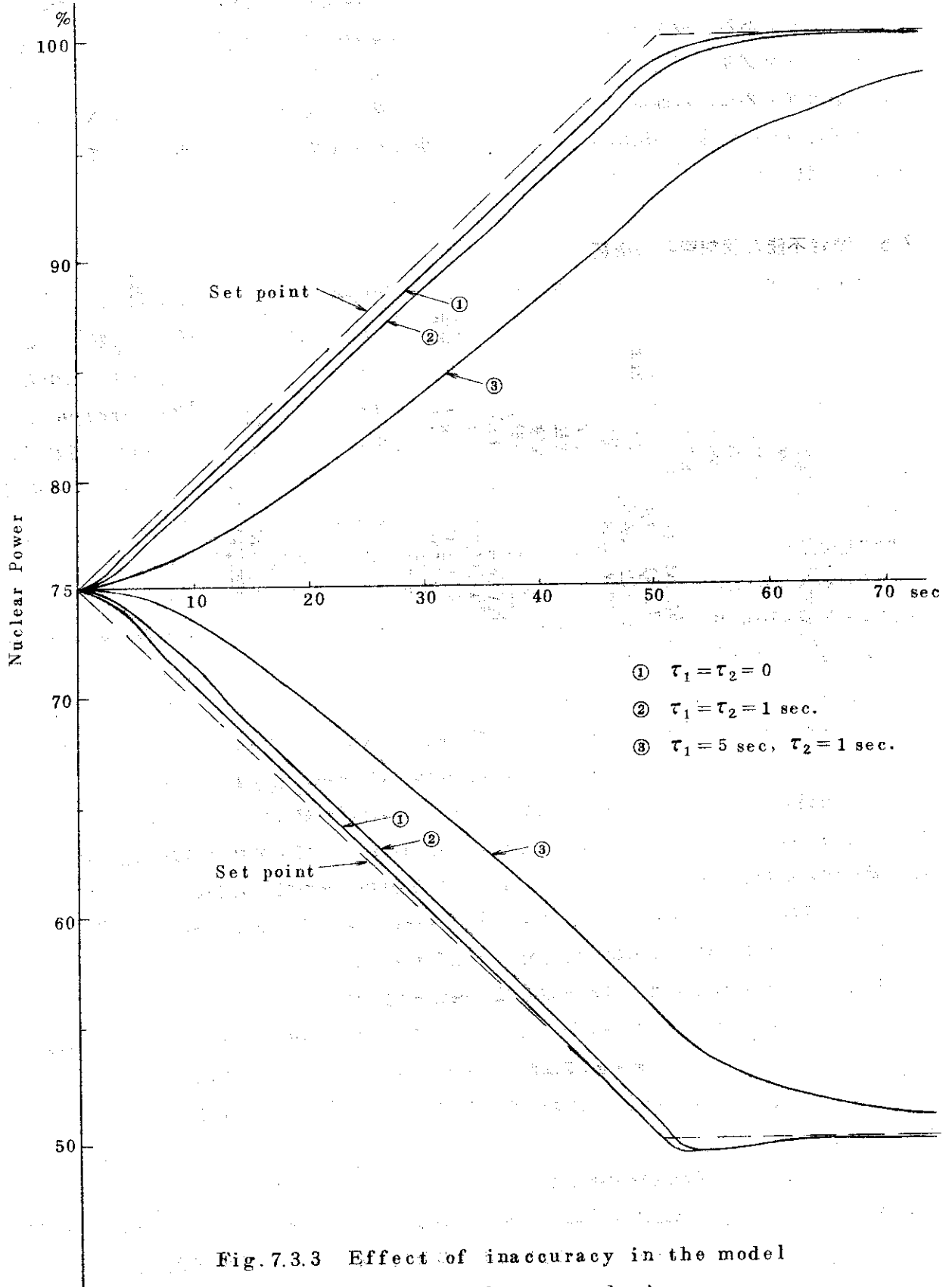


Fig. 7.3.3 Effect of inaccuracy in the model for control system design. Neglected delays τ_1 in win and τ_2 in R loops.

Fig. 7.4.1 は、上記の4個のパラメータをいろいろに変えた場合、反応度外乱に対する応答を見たものである。最も良い応答を示しているのは②の場合で、外乱反応度と代表すべき ξ_N は、1回のサンプリングでほとんど正しい値に到達している*。これまで示したシミュレーションの結果は、②による推定系を含む制御系のものである。図示された結果から、 $N_1 \sim N_4$ と、系の応答との間に何等かの法則性を見出すことは少々困難であるが、この点についてはまだ詳細には追究していない。

7.5 測定不能な状態変数の影響

これまでの結果は、すべてドリフト項を除く5個の状態変数が測定可能であると仮定したものであつた。もちろん、これは現実的な仮定ではなく、たとえば遅発中性子の先行核密度を直接測定するのは全く困難である。そこで、前節までのシミュレーションに引き続き、熱出力と原子炉圧力が測定可能と言う場合を調べて見た。その結果、ドリフト項のある Version A は測定可能な変数を減らしてもあまり特性に大きな変化は見られず、さらに、当初予想されていたことだが、測定不能な変数に対応するスペクトル密度をある程度大きくしてやると、その特性は、5個の変数が測定可能である場合とほとんど一致することが判明した。

Karlsson⁵⁾ は、上の結果に続いて、Version B-2 について、同じく熱出力と炉圧力のみが測定可能な場合について調べ、興味のある事実を発見した。すなわち、Fig. 7.5.1 に示す様に、Version B-2 の場合には、測定可能変数の数を減らした方が、その制御特性が著しく改善されると言うことである。この理由について、彼は次の様に考えている。ドリフト項がない場合には、測定不能な変数は、測定値とモデルとから推定される訳であるが、この推定は、モデルとプロセスが一致する場合に限って実際の変数の値と合致する。もし、モデルとプロセスが一致しない場合には、その誤差は測定不能変数の推定に「しわ寄せ」されることになり、その結果、測定不能な変数は、あたかもドリフト項と同じ様に振舞うので、すべてが測定可能な場合の様に全変数が測定値に固定されている場合に比べて、プロセスの特性変化により良く適応する場合があります。このことは、ドリフト項が含まれている場合にも同様であつて、測定不能な変数がある場合、モデルとプロセスの不一致は、ドリフト項と測定不能変数とに、(それらのスペクトル密度に依存して) 分ち与えられることになる。従つて、この場合にも、測定不能変数の推定値は、真の値と合致しない場合も生じ得る。一方、ドリフト項があれば、推定の過程でより大きな自由度があることになるので、プロセスの特性変化に対する適応は一層容易になる。このことは、Fig. 7.5.1 に見る様に、熱出力の挙動は Version A と B-1 はほとんど一致しながらも、圧力の制御の点では依然として Version A が優れていることから推察できるであろう。

この様な結果から、次の点が推測できる。すなわち、これまで述べて来た制御系では、モデルに含まれる状態変数の数とほぼ同数のドリフト項が必要であると言うことを暗黙のうちに前提していたが、プロセスの性質と、測定可能変数の分布の状況、さらに要求されている制御の

* (脚註) この様にその挙動を調べることから、プロセス特性の変化や外乱の有無を逆に推定してやる事ができる。すなわち、原子炉異常診断が可能である。

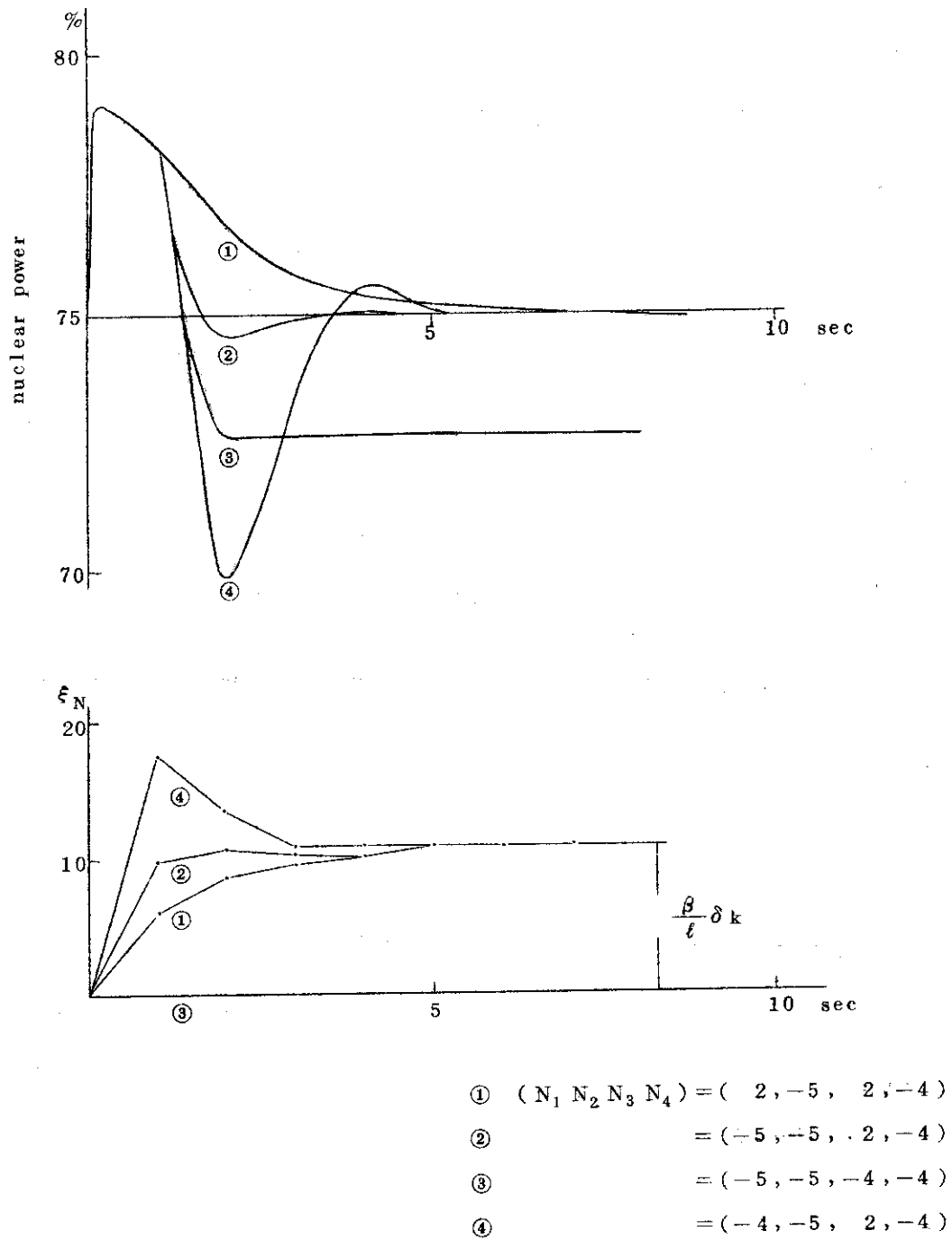


Fig.7.4.1 Effect of the spectral density for Kalman filter design.

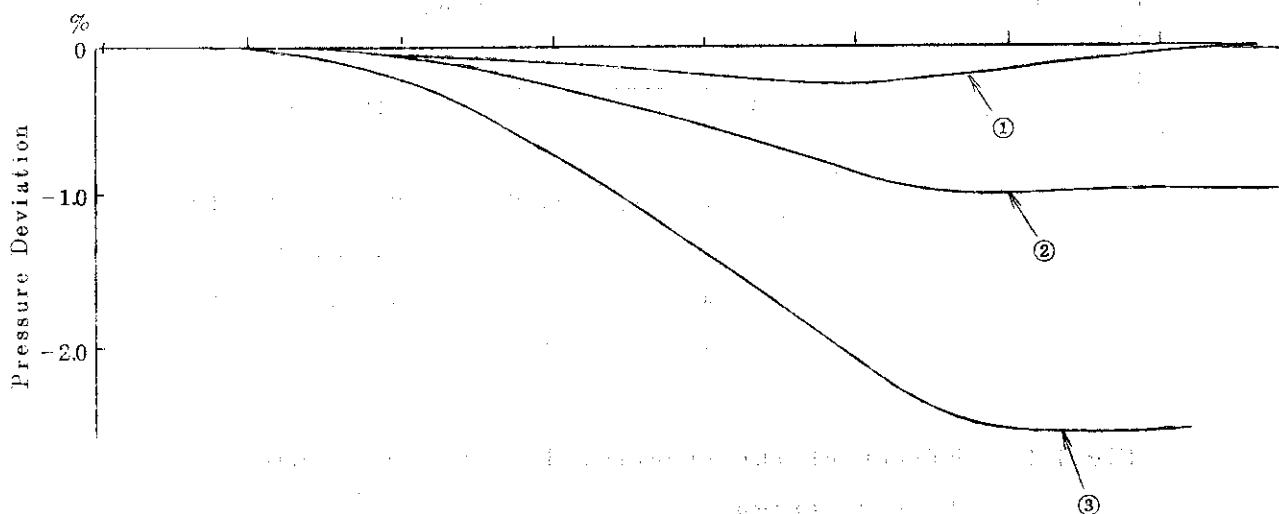
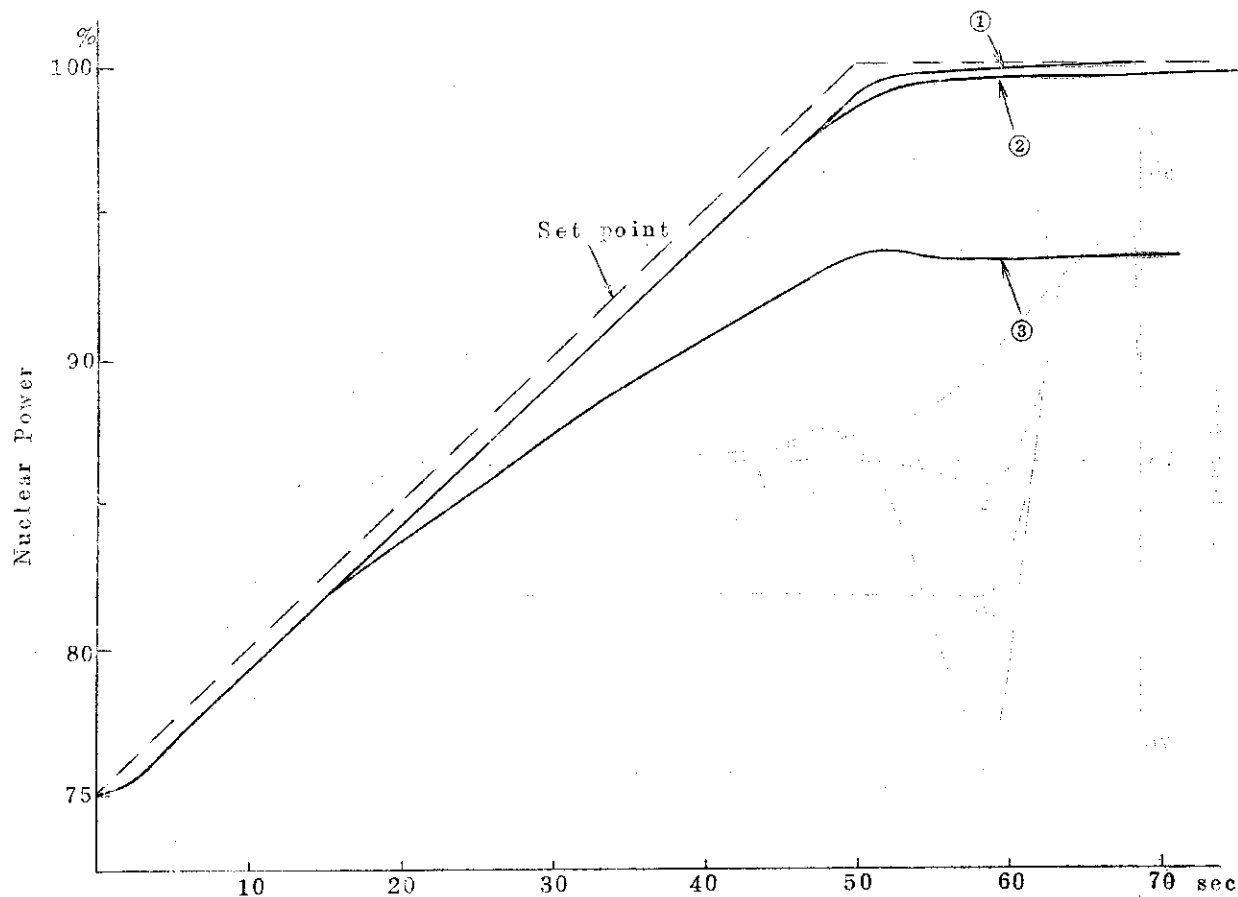


Fig.7.5.1 Effect of unmeasurable variables.

- ① with drift terms, power and pressure measurable
- ② without drift terms, power and pressure measurable
- ③ without drift terms, all variables measurable

質によつては、ドリフト項の数を減らすことができるであろうと云うことである。このことはまた、制御系を実際にプラントに適用する立場から見れば、望ましいことである。

8. 結 論

以上の結果より、次の結論が導かれよう。第1に、線型制御系は、ドリフト項と呼んで来た仮想的状態変数を導入することによつて、非線型プロセスに適用された場合に、その制御可能な領域をかなり広げることができる。このことは、ドリフト項によつて、線型制御系のプロセス特性の見かけの変化に対する感度を低下せしめ得ることを意味している。このことはまた、制御系設計の基本となるモデルの正確さに対する要求が軽減され得ることも意味している。このような長は、非線型プロセスに対する制御の問題を、いちどしく容易にするものである。

さらに、推定系を適当に設計することにより、ドリフト項の動向を監視することにより、プラントの特性変化を検出することができ、いわゆるプラントの異常診断に応用することも可能であろう。この点は、第7.4節の脚註に指摘しておいた。

この制御系の一つの欠点は、ドリフト項を導入することによつて状態変数の数が増加し、結果として制御系のサイズが大きくなることであろう。しかし、Sato³⁾によれば、プロセスが線型であり、またモデルがある周波数範囲で正確であつても、測定不能変数の推定のためには、ある仮想的状態変数を導入することが望ましいことであり、かつこの場合の仮想的状態変数も、本報のドリフト項と数学的表現に於ては全く同じ形である。従つて、仮想的状態変数が、通常の線型制御系にも導入されるとするならば、それによつて状態変数の数が増加するのは、この報告で述べた制御系の特有の欠点とは言えない。さらに、第7.5節で述べた様に、ドリフト項の数は、場合によつては減らすこともできるし、また、設計の基礎となるモデルに対する正確さの要求が緩和されているので、モデルそのものをコンパクトにまとめることも可能である。

ドリフト項を導入することによつて、実際のプラントの制御系のためのモデルを、どこまで簡略化できるかは、より大規模なシミュレーションによつて確かめられなければならない。この仕事は、1972年現在、HPで続行中であるが、これまでの結果は、ドリフト項を含む制御系が、現実のプラントに適用する上で、極めて有望なものであることを示している。

謝 辞

本研究は、筆者がOECD Halden Reactor Project に滞在中に同Projectの研究計画の一環としてなされたものである。同ProjectのJ. E. Lunde部長には、絶えず有益な助言と、激励をいただいた。また、R. Karlsson氏には、制御系の具体的な設計とシミュレーション、および結果の検討に、E. Schwieger氏にはモデルの検討と、シミュレーションに、それぞれ御援助をいただいた。こゝにこれらの諸氏に深く謝意を表す。

8. 結 論

以上の結果より、次の結論が導かれよう。第1に、線型制御則は、ドリフト項と呼んで来た仮想的状態変数を導入することによつて、非線型プロセスに適用された場合に、その制御可能な領域をかなり広げることができる。このことは、ドリフト項によつて、線型制御系のプロセス特性の見かけの変化に対する感度を低下せしめ得ることを意味している。このことはまた、制御系設計の基本となるモデルの正確さに対する要求が軽減され得ることも意味している。この様な特長は、非線型プロセスに対する制御の問題を、いちどしく容易にするものである。

さらに、推定系を適当に設計することにより、ドリフト項の動向を監視することにより、プラントの特性変化を検出することができ、いわゆるプラントの異常診断に応用することも可能であろう。この点は、第7.4節の脚註に指摘しておいた。

この制御系の一つの欠点は、ドリフト項を導入することによつて状態変数の数が増加し、結果として制御系のサイズが大きくなることであろう。しかし、Sato³⁾によれば、プロセスが線型であり、またモデルがある周波数範囲で正確であつても、測定不能変数の推定のためには、ある仮想的状態変数を導入することが望ましいことであり、かつこの場合の仮想的状態変数も、本報のドリフト項と数学的表現に於ては全く同じ形である。従つて、仮想的状態変数が、通常の線型制御系にも導入されるとするならば、それによつて状態変数の数が増加するのは、この報告で述べた制御系の特有の欠点とは言えない。さらに、第7.5節で述べた様に、ドリフト項の数は、場合によつては減らすこともできるし、また、設計の基礎となるモデルに対する正確さの要求が緩和されているので、モデルそのものをコンパクトにまとめることも可能である。

ドリフト項を導入することによつて、実際のプラントの制御系のためのモデルを、どこまで簡略化できるかは、より大規模なシミュレーションによつて確かめられなければならない。この仕事は、1972年現在、HPで続行中であるが、これまでの結果は、ドリフト項を含む制御系が、現実のプラントに適用する上で、極めて有望なものであることを示している。

謝 辞

本研究は、筆者がOECD Halden Reactor Project に滞在中に同Projectの研究計画の一環としてなされたものである。同ProjectのJ. E. Lunde部長には、絶えず有益な助言と、激励をいただいた。また、R. Karlsson氏には、制御系の具体的な設計とシミュレーション、および結果の検討に、E. Schwiager氏にはモデルの検討と、シミュレーションに、それぞれ御援助をいただいた。こゝにこれらの諸氏に深く謝意を表す。

参考文献

- (1) R. Josefsson ; 私信 (Model to be Used for Calculation of Estimation Matrices and Optimal Control Law , PC-Note 423, 1968)
- (2) T. J. Bjorle, B. Blomsnes, R. Grumbach, J. E. Lunde, R. Josefsson , K. Sato ; Application of Modern Control Theory for Regulation of the Nuclear Power and the Reactor Vessel Pressure of HBWR, HPR-131 (1971)
- (3) K. Sato ; On the Design of an Estimator Based Kalman's Filter Theory for a Digital Control System , HIR-57 (1971)
- (4) R. E. Kalman ; New Methods in Wiener Filtering Theory ; Proc. 1st Symp. on Engineering Application of Random Function Theory and Probability, Wiley & Sons , 1963
- (5) R. Karlsson ; 私信 (Load Follow Control. Behaviour of Drift Terms and Estimates for Non-measurable State Variables , PC-Note 1154 , 1972)

付 録

簡略化されたBWRプラントモデル

本報告中で述べた制御系の設計と、シミュレーションに用いられたBWRプラントモデルについて述べる。プラントは、再循環流量と、タービン蒸気流量を調整することによつて制御されるものとし、制御棒は、出力分布制御と、再循環流量を許し得る範囲に保持するためのみ使用されるとする。

原子炉出力は、遅発中性子1群で近似され、

$$\dot{N} = \frac{\beta(\delta k - 1)}{\ell} N + \lambda C \quad (\Lambda - 1)$$

と書かれる。こゝに

- N : 原子炉出力
- C : 遅発中性子先行核濃度
- δk : 反応度
- ℓ : 即発中性子平均寿命
- B : 遅発中性子の生成率
- λ : 遅発中性子先行核の崩壊定数

である。反応度は、

$$\delta k = k_f(f - f_0) + k_\theta(\theta_f - \theta_{f_0}) + k_x(x - x_0) \quad (\Lambda - 2)$$

とする。こゝに

- f : 炉心平均ボイド体積率
- θ_f : 平均燃料温度
- x : 平均 $X_{e^{135}}$ 濃度
- k_f, k_x, k_θ : それぞれの反応度係数

添字0は、平衡状態を示す。 $X_{e^{135}}$ については、シミュレーションが短時間の挙動に限られているので、以後説明を省略する。

燃料から冷却材への単位時間当りの熱伝達Qは、次の式で近似する。

$$Q = H_f(\theta_f - \theta_{sat}) \quad (\Lambda - 3)$$

$$\dot{\theta}_f = \frac{N - Q}{C_f} \quad (\Lambda - 4)$$

ただし

- H_f : 等価熱伝達率
- θ_{sat} : 冷却材飽和温度
- C_f : 燃料の熱容量

である。

原子炉圧力は、圧力容器でいたる所等しいとし、次の式でその変化を近似する。

$$\dot{P} = \frac{P}{V_d \rho_s} (W_s - W_{out}) \quad (\text{A-5})$$

W_s : 冷却チャンネル出口蒸気流量

W_{out} : タービン蒸気流量

V_d : 圧力容器内の自由体積

ρ_s : 蒸気密度

かつ W_{out} は、

$$W_{out} = \frac{P}{\alpha + R} \quad (\text{A-6})$$

ここに、 R は蒸気流量調整弁の開閉に関する量であり、 α はタービンの特性に依存する定数である。

冷却材の諸特性は、次に示す様に、圧力の変動があまり大きくない範囲で線型近似が可能であるとする。

$$\frac{d h_w}{d P} = \beta_w \quad (\text{A-7})$$

$$\frac{d \theta_{sat}}{d P} = \beta_w \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{d h_s}{d P} = \beta_s \quad (\text{A-9})$$

$$\frac{d \rho_s}{d P} = \alpha_s \quad (\text{A-10})$$

$$\frac{d \rho_w}{d P} = 0 \quad (\text{A-11})$$

ここに

w, s : 液相, 気相を示す添字

h : (飽和) エンタルピー

ρ : 密度

平均ボイド体積率は、次のバランス方程式から近似される。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_w (1-f) + \rho_s f] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_w v_w (1-f) + \rho_s v_s f] = 0 \quad (\text{A-12})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_w e_w (1-f) + \rho_s e_s f] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_w v_w h_w (1-f) + \rho_s v_s h_s f] = \varphi \quad (\text{A-13})$$

ただし、 e : 内部エネルギー

ϕ : チャンネルの単位長さ，単位時間当りの熱伝達

v : 流速

ここで，次の近似を導入する。

(1) 圧力は z に無関係とする。

$$(2) \frac{v_s}{v_w} = \frac{1-f}{K-f} \quad K: \text{定数}$$

$$(3) \frac{\text{チャンネル出口のボイド体積率}}{\text{チャンネル平均のボイド体積率}} \triangleq \gamma = \text{一定}$$

(4) 給水エンタルピ h_F は一定，給水流量は W_{out} に等しい。

(5) 給水の圧力容器入口から，炉心入口までに時間遅れはない。

この様な近似のもとで，バランス方程式を z について積分し，平均ボイド体積率（同じく f 書くことにする）を求めると，

$$\begin{aligned} & V \rho_s \rho_w h_{ws} K f \\ &= -V \{ [\rho_w(1-f)\beta_w + \rho_s \beta_s f] [\rho_w(K-\gamma f) + \rho_s \gamma f] \\ & \quad + a_s \rho_w h_{ws} f (K-\gamma f) \} \dot{P} \\ & \quad + [\rho_w(K-\gamma f) + \rho_s \gamma f] Q y - W_{in} \rho_s h_{ws} \gamma f \\ & y \triangleq 1 - \frac{W_{out}}{Q} (h_w - h_F) \end{aligned}$$

ただし， V は炉心内冷却材体積， W_{in} は再循環流量である。これより

$$W_s = \frac{\rho_s \gamma f}{\rho_w(K-\gamma f) + \rho_s \gamma f} [W_{in} + V(\rho_w - \rho_s) f - V f a_s \dot{P}]$$

が得られる。

平衡状態は次の様に表現できる。

$$C_o = \frac{\beta}{\lambda e} N_o$$

$$Q_o = N_o$$

$$\theta_{fo} = \frac{N_o}{H_f} + \theta_{sat o}$$

$$f_o = \frac{1}{\gamma} \frac{N_o \rho_w K}{\rho_{so}(h_{so} - h_F) W_{ino} + (\rho_w - \rho_{so}) N_o}$$

$$W_{s_0} = W_{out_0} = \frac{N_0}{h_{s_0} - h_F}$$

$$R_0 = \frac{(h_{s_0} - h_F)P_0}{N_0} - \alpha$$

すなわち，平衡状態は， N_0 ， W_{in_0} ， P_0 が定めれば一義的に定まる。このうち， P_0 は通常のBWRの運転では，出力レベルなどが変わっても大きく変化することはない，プラントによつて定まる定数と見なすこともできる。したがつて，第2.1節にのべたベクトル q は， N_0 と W_{in_0} よりなると考えることができる。

以上は，簡略化されたBWRプラントの非線型モデルである。シミュレーションにおいては，この非線型モデルを制御対象たるプロセスと見なし，また第7.3節で述べた「不正確なモデル」については，非線型モデルを修正して模擬している。

この非線型モデルを，ある平衡状態の近傍で線型化すると，次の線型モデルが得られる。

$$\delta \dot{N} = \frac{\beta}{\ell} (\delta k - \delta N + \delta C)$$

$$\delta k = k_\theta \theta_{f_0} \delta \theta_f + k_f f_0 \delta f$$

$$\delta \dot{\theta}_f = \frac{N_0}{C_f \theta_{f_0}} \delta N - \frac{1}{\tau_f} \delta \theta_f + \frac{\beta_w P_0}{\tau_f \theta_{f_0}} \delta P$$

$$\delta \dot{Q} = \frac{H_f \theta_{f_0}}{N_0} \delta \theta_f - \frac{H_f \beta_w P_0}{N_0} \delta P$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 B_2 - \Lambda_2 B_1) \delta \dot{f} &= (C_1 \Lambda_2 + C_2 \Lambda_1) \delta f + (D_1 \Lambda_2 + D_2 \Lambda_1) \delta P \\ &+ (E_1 \Lambda_2 + E_2 \Lambda_1) \delta W_{in} + (G_1 \Lambda_2 + G_2 \Lambda_1) \delta R \\ &+ F_2 \Lambda_1 \delta Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 B_2 - \Lambda_2 B_1) \delta \dot{P} &= (C_1 B_2 + C_2 B_1) \delta f + (D_1 B_2 + D_2 B_1) \delta P \\ &+ (E_1 B_2 + E_2 B_1) \delta W_{in} + (G_1 B_2 + G_2 B_1) \delta R \\ &+ F_2 B_1 \delta Q \end{aligned}$$

ただし

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{V f_0 a_s P_0 x_0}{V_d \rho_{s_0}}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= -VP_0 \{ [\rho_w (y - f_0) + \rho_{s_0} \beta_s f_0] [\rho_w (K - \gamma f) + \rho_{s_0} \gamma f_0] \\ &+ a_s \rho_w h_{ws_0} f_0 (K - \gamma f_0) \} \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{V(\rho_w - \rho_{s0})f_0 x_0}{V_d \rho_{s0}}$$

$$B_2 = V \rho_{s0} \rho_w h_{ws0} K f_0$$

$$C_1 = \frac{W_{s0}}{V_d \rho_{s0}} \left(1 + \frac{\rho_w - \rho_{s0}}{\rho_s} x_0 \right)$$

$$C_2 = -h_{ws0} [\rho_{s0} W_{ino} + (\rho_w - \rho_{s0}) W_{s0}] \gamma f_0$$

$$D_1 = \frac{W_{s0}}{V_d \rho_{s0}} \left[\frac{a_s}{\rho_{s0}} (1 - x_0) P_0 - 1 \right]$$

$$D_2 = \gamma f_0 P_0 \left[a_s h_{ws0} W_{s0} - W_{ino} \left(\frac{h_{w0} - h_F}{P_0} \rho_{s0} + a_s h_{ws0} + \rho_{s0} \beta_s \right) \right]$$

$$E_1 = \frac{W_{s0}}{V_d \rho_{s0}}$$

$$E_2 = -\rho_{s0} h_{ws0} \gamma f_0 W_{ino}$$

$$F_2 = M_0 Q_0$$

$$G_1 = \frac{W_{s0} R_0}{V_d \rho_{s0} (a + R_0)}$$

$$G_2 = \frac{R_0}{a + R_0} W_{s0} (h_{w0} - h_F) M_0$$

$$M_0 = \rho_w (K - \gamma f_0) + \rho_{s0} \gamma f_0$$

$$x_0 = \frac{\rho_{s0} \gamma f_0}{\rho_w (K - \gamma f_0) + \rho_{s0} \gamma f_0}$$