

JAERI-M

5 1 3 1

統計的探索法による原子炉システム最適化

1973年2月

北村正晴^{*}，篠原慶邦

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

統計的探索法による原子炉システム最適化

日本原子力研究所 原子炉工学部

北村 正晴*, 篠原慶邦

(1973年2月5日受理)

この報告書は、統計的探索法を用いた最適点探索アルゴリズムの開発を行ない、この方法を若干の原子炉システム最適化問題に適用した結果について述べたものである。

この方法の本質的な特色は、探索の方向決定がランダムになされ、それまでの探索の経過は、ある限定された形で考慮されるにすぎないということにある。それゆえ、この方法は確定論的な探索法（勾配法、線形計画法、パターン、サーチ、その他）に比して、より効率良く大域的な最適点を見出しうることが期待できる。

この探索法の有効性を調べるため、炉停止最適化問題ならびに出力最大化問題について最適解を求めてみた。

いずれの問題においても、中性子束を制御変数としてとり扱い、空間的あるいは時間的に階段状変化のみを許すこととした。これにより、原問題は、多次元ユークリッド空間における大域的最適点探索の問題に変換される。本方法により、得られた殆どすべての数値解は、原問題についてポントリヤーギンの最大原理から導かれた理論的最適解とよく一致しており、本探索法の有効性を明らかに示している。変換された問題についての最適解探索は、確定論的探索法を用いても行ない、得られた結果を統計的探索によるものと比較検討した。

なお、本方法の今後の改良に関して、計算上の労力を軽減させるためのいくつかの着想も付記した。

* 協力研究員 東北大学工学部原子核工学科

Optimization in Nuclear Reactor Systems
by a Statistical Search Method

Masaharu KITAMURA* and Yoshikuni SHINOHARA
Div. of Reactor Engineering, Tokai, JAERI

(Received February 5, 1973)

Optimum seeking algorithms have been developed based on a statistical search method, which are applied to a few problems in nuclear reactor systems. The essential of the method consists in determining the direction of search randomly and the results of preceding steps are considered only in a restricted manner. The method is thus expected to be more effective in finding a global optimum than the deterministic search methods (gradient, linear programming, pattern search, etc.).

Optimization is made of the shutdown control and the power distribution problems to verify the effectiveness of the statistical search method. In these problems, neutron flux is treated as the control variable and only its step -wise variation in space and time is allowed so that the problem is then reduced to that of finding a global optimum in the multi-dimensional Euclidian space. Numerical solutions by the present method agree mostly with those theoretical ones based on Pontryagin's maximum principle, thus indicating its effectiveness. Optimization of the reduced problems is made also by some deterministic search methods and the results are compared with those by the present method.

As improvements to the method, some ideas of reducing computational requirements are also given.

* Cooperative Research Staff; Department of Nuclear Engineering,
Tohoku University

目 次

1 概 要	1
2 統計的探索法	4
3 サマリウム毒作用の最適制御	22
4 その他の問題への応用例	39
5 手法に関する考察	47
6 結 論	52
謝 辞	52
参 考 文 献	52

1 機 説

原子炉システムの大型化に伴い、経済性の向上、安全性確保の要請が高まりつつある。これらの要請を満たすためには、設計、運転のいずれの面に関しても、種々の制約条件を満しつつ、多くの可変因子の値を適正に定めること、すなわち最適化をおこなうことが必要、不可欠と考えられる。原子炉システムに関しては、従来から種々の最適化問題がとりあげられ、有意義な成果も知られてはいるが、これらの解析の殆どは理想化、簡略化したモデルに対してなされたものであり、今後生じてくるであろう諸要求を満たすための解決策としては、その解析結果をただちに利用しにくく、より現実性あるモデルに対しての最適解が望まれている場合も多い。たとえば1点炉近似で解かれている問題の多くについて実際には、炉の空間的な拡がりも考えた最適解がより望ましいことはいうまでもない。また、燃料交換計画最適化などを考えたとき、予想外の炉停止が生じたり、あるパラメータ値の燃焼に伴う変化が予想と異なることが知られた場合には、前以て得られている最適燃料交換計画を適当な形に修正した方がよりよい結果を与えることもありうる。このように従来、開ループ的最適制御法のみが知られている問題においては、閉ループ的最適制御法がより現実性ある制御法として要求されよう。さらに、異常検知などに関連して、外乱存在下でのパターン認識問題等、より高度な最適化問題も生じてきている。これらの問題はいずれも、従来すでに解が知られているような諸問題に比して、はるかに大規模かつ複雑な数学的構造を有するため、これらに対しては多くの最適化手法（ボントリヤーギンの最大原理¹⁾、ベルマンの動的計画法²⁾、線形計画法等々）はその有効法を充分には発揮できない。すなわち、これらの手法は、Ⓐ 変数の量と、各変数のとりうる値のレベル数が増すと計算量が急増する：あるいは、Ⓑ 大域的最適解探索には向かない：あるいは、Ⓒ 問題の数学的記述、パラメータ値等に不確定さがあると解探索が極めて難しい：などの欠点をもつ。動的計画法ではⒷ、線形計画法ではⒶは、原理的には問題でないといわれるが、實際上はやはり障害となる。

その結果、問題自体の性質の複雑化に加えて、最適化手法のもつ欠点が、最適解探索を一層困難にするわけである。本報では、本質的にこのようを欠点のすくない最適化手法として、統計的探索法による最適化アルゴリズムを提案する。多くの最適化問題は一般にN次元パラメータ空間 E^N において、ある評価関数 $Q(X)$ を最小にする最適点 $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_N^*)$ を探索する問題として定式化される。最適化アルゴリズムは、何らかの方法で選ばれた初期点 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$ から出発して、移動法則、 $X^i = X^{i-1} + \Delta X^i$, $\Delta X^i = \Psi(W_{i-1}, X^1, X^2, \dots, X^{i-1})$ により点 X を移動させていく過程を考えることができる。

ただし、ここで i は探索（試行）の回数、 W_i は探索論理をあらわすパラメータで、先行するすべての探索の結果に依存する。従来用いられている最適化アルゴリズムでは $Q(X^{i-1})$ と $X^j (j < i)$ の値が定まれば、 ΔX^i （したがって X^i も）は一義的に決定されるゆえ確定論的なアルゴリズムであるといえる。これに対し、統計的探索アルゴリズムでは ΔX^i はある偶然性をもって定められることになる。 $Q(X)$ の形が、探索する側には未知であっても、確定的に定まっている場合に確定論的アルゴリズムを用いれば、 X^0 を指定することは直ちに X の最終的収斂値 X^i を指定していることになるが、探索論理に偶然性を含むアルゴリズムを用いた際には

同じ X^0 から探索をくり返しても別々の X^1 がえられることになる。この意味で、後者は非確定論的アルゴリズムとも呼ばれる。統計的探索法については、現段階では、ごく基礎的な考察がなされているにすぎない。Brooks³⁾, Растрягин⁴⁾らは、評価関数の形が二次形式の場合について理論的考察をおこない、変数の数が多くなるにつれて統計的探索法の方が勾配法に比して探索効率が良くなることを示した。また、Растрягин⁴⁾, Fu⁵⁾らは、同様二次形式評価関数に対して、初期点と最適点の距離が増大していくにつれ統計的探索法が勾配法より能率的であることを示し、いくつかの探索アルゴリズムを提案している。さらに、Растрягин, Рыла⁶⁾らは、統計的探索アルゴリズムは確率オートマトンとしてその特性を把握できることを示し、これによって、より有効なアルゴリズムが開発できることを示している。

統計的探索法の、原子炉システムに関する最適化問題への適用例としては Heusener⁷⁾による高速炉炉心パラメータ最適化の報告がある。この場合にも、初期点が最適点から遠い場合には統計的探索法が有利であることが確認されている。これらの考察や応用例から、統計的探索法は、前述のⒶ, Ⓑ, Ⓒのような障害が、確定論的手法ほど顕著にはあらわれてこないことが期待できる。これに加えて、統計的探索アルゴリズムは、確定論的最適化アルゴリズムに比べると、実際の計算プログラムの形が簡単で作成が容易であるという特色をもつ。このため問題が与えられてから、解を決定するまでに要する時間（計算時間ではなく、作業時間）が制限されている場合などにおいて有利になることも無視できない利点である。

しかしながら、先に述べたように、現実的な最適化問題に対しての統計的探索法の適用は、ほとんどなされていないのが現状である。統計的探索法では、必要な探索回数（すなわち計算量）が実用的な範囲をはるかに越えるであろうという漠然とした予想が一般にあること、確定論的手法がこれまで多くの問題に対して明快な結果を与えていたことに対する懐疑的態度などから、この種の手法が用いられなかつたものと考えられる。Brooks, Растрягинらの計算は、ごく簡単な評価関数についておこなつたものであるため、上のような疑惑や危惧に対する解答としては不十分である。統計的探索法に関して、これまでなされてきた考察では、個々の研究ごとに別々の種類の探索アルゴリズムが用いられており、それらの比較と評価が充分なされてはいないことも問題点の一つといえよう。このような現状にかんがみ、原子炉システムに関する現実的な最適化問題を対象として、統計的探索法を適用し、探索効率、精度などを検討することを通じて、その適用可能性についての明確な情報をうることを目的として本研究をおこなった。このため、手法としては单一のアルゴリズムを選定せず、これまでに提唱されている基本的なアルゴリズムから代表的なもの4種をとりあげて、これらに若干の改良を施した。

これらの改良されたアルゴリズムを例題に適用し、それぞれの特性を比較検討すると同時に確定論的手法により求めた最適解との比較も併せておこなった次第である。2章においては、基本的な統計的探索アルゴリズムの収斂性、信頼性についての考察と、これに基づいて改良もされた、具体的な探索アルゴリズムの構成について述べる。この探索アルゴリズムをサマリウム毒作用最適制御問題の解探索に用いた。ただし、この場合、制御変数は時間的にステップ状の変化のみを許すことにしておこなった。すなわち、制御操作についてのみ、時間的離散化近似をおこなったわけであり、これによって、統計的探索法の適用が容易な形に問題が定式化できる。こ

の解探索の結果を3章に示した。この結果から、統計的探索法の適用性について直ちに判断を下すことは無理であるため、クセノン毒作用の最適制御問題、炉内出力分布の最適化問題等の解探索もおこない、その結果は4章にまとめた。これらの問題は、それぞれ、時間依存・空間依存の微分方程式であらわされる系の最適制御問題の代表的な例であるが、同時に、前述したように、制御操作について時間的、あるいは空間的に離散化した扱いをすることによって、非線形、強干渉、多変数システムの多峰性評価関数に対する最適点探索問題の例とともになっている。先に述べたように、これらの問題についてはすべて、確定論的最適化手法（この場合、ポントリヤーギンの最大原理）により導かれた最適解との比較結果も併せて示した。さらに、確定論的手法においては、その精度、効率を調べるために解が既知であるところの標準的なテスト関数について解探索がなされることも多い。このテスト関数の代表的なものについても統計的探索法を適用した。4章ではその結果についても述べる。3章、4章で対象とした問題はいずれも、従来、統計的探索アルゴリズムの適用対象として選ばれた諸問題に比べて数学的に大規模、複雑なものであり、手法の適用性について、より一般性ある情報を与えるものと考える。

結果に関する検討と、手法の改良可能性についての考察を5章に記した。

原子炉システムに関する実際的な最適化問題を扱う際には、統計的探索法は、従来の確定論的諸手法に比べ、より有力な手法であり、今後の改良可能性も大であると考え、以下に報告するものである。

2 統計的探索法

2.1 統計的探索アルゴリズム

本研究において用いられた探索アルゴリズムは

- a) Fixed Step Random Punishment 法 (F. S. R. P. 法)
- b) Fixed Step Random Reward 法 (F. S. R. R. 法)
- c) Random Step Random Punishment 法 (R. S. R. P. 法)
- d) Random Step Random Reward 法 (R. S. R. R. 法)

と名づけた 4 種である。これらについて大略を示す。

最適化問題が以下のように定式化されているとする。

〔問題 2-1〕

ある評価目的量 Q が N 台のパラメータ x_1, \dots, x_N の値に依存して定まり、これの値を最小にすることが最適化の目的であるものとする。ただし各パラメータ値にはそれぞれ、変域があり、その変域内で最適なパラメータ値の組み合わせが見出されねばならない。各パラメータのうちあるものは連続的な値をとることが許されるが、あるものは離散的な値しかとることができない。さらに、 N 台のパラメータの内のいくつかにより定まる量 P_1, P_2, \dots, P_M があり、これらの値もそれぞれ、ある制約範囲の中に抑えられねばならない。

原子炉システムに関する多くの問題が、このような形に表現されうる。発電費を最小にするような、炉心パラメータの決定問題を例にとって、 Q は当然発電費の値である。 x_1, \dots, x_N は装荷燃料の濃縮度、燃料ピンの直径、アセンブリあたりの燃料ピンの数、炉心高さ、被覆材の厚さその他が考えられる。 P_1, \dots, P_M としては、燃料温度、被覆材温度、反応度温度係数、原子炉出入口温度差等々があげられよう。この問題 2-1 は、次の問題 2-2 の形で数学的に定式化することができる。

〔問題 2-2〕

$X = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ を、最適化されるべきパラメータのベクトル表示とする。このベクトルは N 次元ユークリッド空間 E^N において定義されている。

$Q = Q(X)$ を最小化されるべき評価目的量とする。

Q の最小値 Q^* を与える X の最適値を $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ で表わす。すなわち $Q^*(X^*) = \min Q(X)$ 。

さらに X の変域が $x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) で与えられ、この他に X に依存した制約条件として $g_j(X) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, M$) が満たされねばならない。

このとき、初期点 $X = X^0$ から出発して、 X^* を見出すことが課題となる。

制約条件 $g_j(X) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, M$) については、いわゆるペナルティ関数の形で、これを評価目的量の値に含めて処理するのが便利である。ペナルティ関数の形としては、いくつかのものが考えられているが、たとえば次のように Q を修正して新しい評価目的量 \tilde{Q} を作ればよい。

$$\tilde{Q}(X) = Q(X) \quad \text{if} \quad \sum_{m=1}^M (1 - \text{sgn } g_m) = 0$$

$$\tilde{Q}(X) = Q(X) + \sum_{m=1}^M B_m g_m (1 - \operatorname{sgn} g_m)$$

$$\text{if } \sum_{m=1}^M (1 - \operatorname{sgn} g_m) > 0$$

$$\text{ただし, } \operatorname{sgn} g_m = \begin{cases} 1 & \text{if } g_m \geq 0 \\ -1 & \text{if } g_m < 0 \end{cases}$$

であり, B_m は十分大きな正の値をもつ重み因子である。上の \tilde{Q} を Q の代りに用いることにより, 制約条件が一つでも侵された場合には, 評価目的量の値が大巾に増加し, 結果的に, このような不適当な点は, たとえ, ごく小さい Q の値を与えるものであっても, 除外されることになる。

この問題に対し, 統計的探索アルゴリズムは, 次のように記述できる。

$$X^i = X_{\text{opt}}^{i-1} + \Delta X^i \quad (1)$$

ここで X_{opt}^{i-1} は $i-1$ 回目の探索での最適点, ΔX^i は i 番目探索のための試行ステップ, X^i は i 番目の探索点である。

この ΔX^i の決定が, その前の試行の成功, 失敗に依存して, ある偶然性を含めてなされる。

(1) F. S. R. P 法においては

$$\begin{aligned} \Delta X^i &= \Delta X^{i-1} & \text{if } \Delta \tilde{Q}^{i-1} < 0 \\ \Delta X^i &= a \cdot \xi & \text{if } \Delta \tilde{Q}^{i-1} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ξ は $\xi = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)^T$ なる 2^N 個の方向ベクトルの中からランダムに抽出された 1 つの方向ベクトルを表わす。 $\Delta \tilde{Q}^{i-1} < 0$ は, 前回の試行において目的関数値が減少したこと, すなわち試行が成功したことに対応している。この時, X_{opt} としてこの新しい点が採られるのはもちろんである。このアルゴリズムにおいては成功した試行においてとられた方向は次回も保存され, 失敗した場合には決定の変更(すなわち前回の決定に対しての Punishment)がランダムになされることになる。

(2) F. S. R. R. 法では

$$\left. \begin{aligned} \Delta X^i &= -2 \Delta X^{i-1} & \text{if } \Delta \tilde{Q}^{i-1} \geq 0 \\ \Delta X^i &= a \cdot \xi & \text{if } \Delta \tilde{Q}^{i-1} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

のような決定がなされる。このアルゴリズムでは, 前回の試行が失敗した場合は, その試行と逆の方向が最も成功の可能性があるとして探索される。成功した場合は, 次の試行方向の決定(Reward)がランダムになされることになる。逆方向への試行も失敗した時には, 次にランダムな探索がなされるのは当然である。

なお, いずれのアルゴリズムにおいても X^i の値が, その上限, 下限をこえる場合には, その値の代りに上限値, 下限値を用いることにする。

これら 2 つのアルゴリズムでは, 進み幅 a は定数にとられる。したがって, 探索がなされる方向は限られており, たとえば 2 変数の場合には, 座標軸に平行もしくはそれと 45° の角をなす方向だけとなる。このため探索精度を上げるために a の値が十分小さいことが必要である

が、その際、初期点の位置が最適点から遠いと、必要計算量が増加する可能性に留意せねばならない。

この点を改良するために、各試行、各成分ごとの進み巾もランダムに変化させることを考えた。このアルゴリズムが R. S. R. P. 法および R. S. R. R. 法であり、探索方向の決定論理は本質的には F. S. R. P. 法、F. S. R. R. 法にそれぞれ対応している。進み巾 a は、定数ではなく変動する量 a^i となる。

ここで $a^i = \text{diag} [\delta x_1^i, \delta x_2^i, \dots, \delta x_N^i]$ であり、 δx_N^i は $\Delta \gamma_n = [(x_{n \max} - x_{n \min}) / (\alpha_n \cdot K)] (K = 1, 2, \dots, K_{\max})$ からのランダム抽出をあらわす。

K_{\max} は 10^2 程度の値がとられ、 α_n は 2 ~ 10 程度の値に適当に定められる。本報で後述する計算においては $K_{\max} = 100$ 、 $\alpha_n = 5$ あるいは 10 の値を用いた。この方法によれば、大域的最適値探索の可能性が、Fixed Step アルゴリズムより大になることが期待できる反面、評価目的量 Q の形によっては逆に探索効率が低くなることも考えられ、この意味からは、Fixed Step 法に比して risky な探索法であると予想できる。

これらの 4 種のアルゴリズムのブロック図を Fig. 1 ~ Fig. 4 に示した。

以下に述べる検討は、探索アルゴリズムが上記のようなものであることを前提としてなされたものである。

2. 2 最適性の判定

統計的探索アルゴリズムにおいても他のすべての最適化アルゴリズムにおけると同様、最適性を判定し探索を終了させる条件が適正に定められていることが必要である。たとえば勾配法などの確定論的最適化手法では、しばしば $\partial Q / \partial X \cong 0$ となることで最適点に到達したという判定がなされる。しかしながら統計的探索法においては最適性の基本的な考え方が確定論的手法におけるそれとは異なっており、最適解が見出されたか否かが、統計的に判定されるのである。この判定法も大別すると

- ① 過去におこなったすべての探索の結果を利用して判定する方法。
- ② 判定を試みる時点での最良の解（最適候補点）の近傍での探索結果のみから判定をおこなう方法

の 2 つが考えられる。

①の方法の方がより精度がよい判定をおこないうるであろうが、計算量ならびにデータ記憶容量の面からは②の方が有利であり、本研究ではこの立場をとることにして考察を進めた。

ある点 X_{opt}^I が見出されたあと I_R 回の探索がすべて失敗に終った場合を考える。この時に起っている事態としては、次の 2 つの場合を考えればよいであろう。

- A) X_{opt}^I は実際に最適点である。
- B) X_{opt}^I より良い点の集合はあるが、この集合に属する点が見出される確率 P_S が小さいため、 I_R 回の探索では探索されなかった。

実際に A), B) のいずれの事態が起こっているかを確定論的に決定することは不可能であるが、 I_R の数が多くなるにしたがい事態 B) が起こっている確率は小さくなる。より厳密にいふと、事態 B) が起こっているとすれば、その時 P_S の値は極めて小さいと考えられよう。

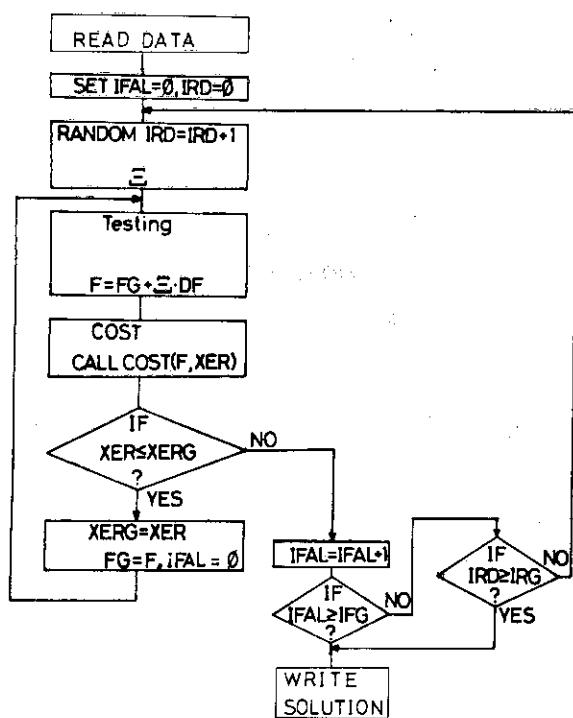


Fig. 1. Flow chart of F.S.R.P. method

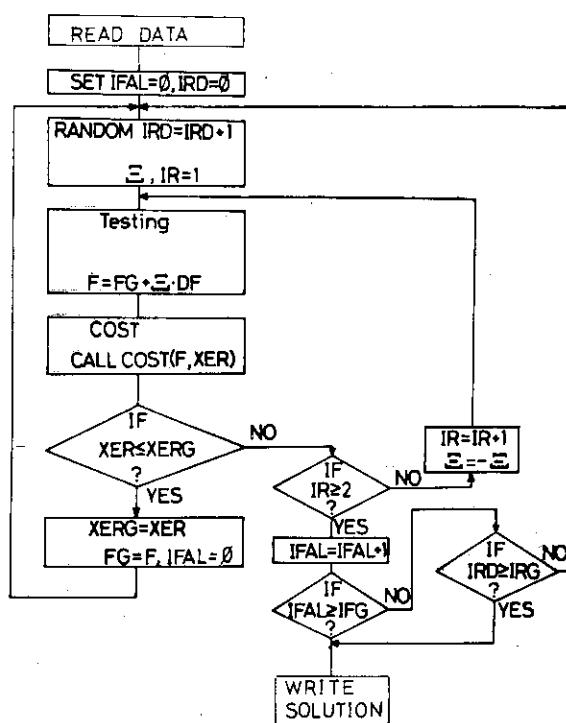


Fig. 2. Flow chart of F.S.R.P. method

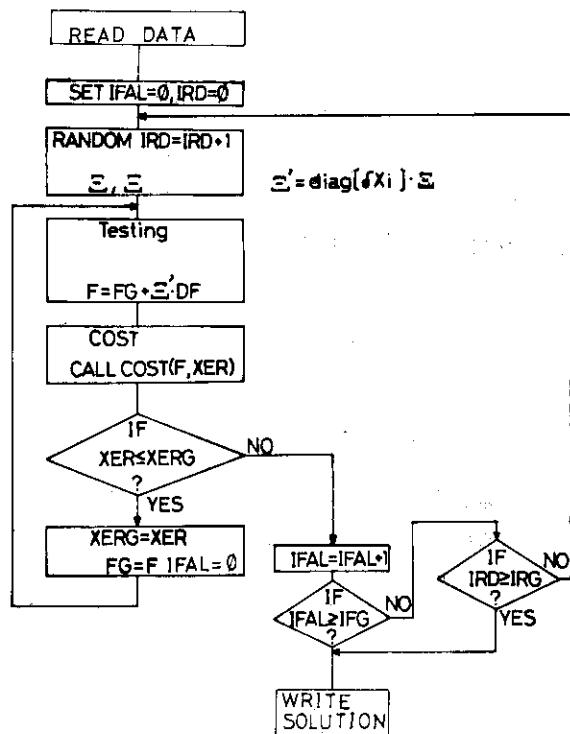


Fig. 3. Flow chart of R.S.R.P. method

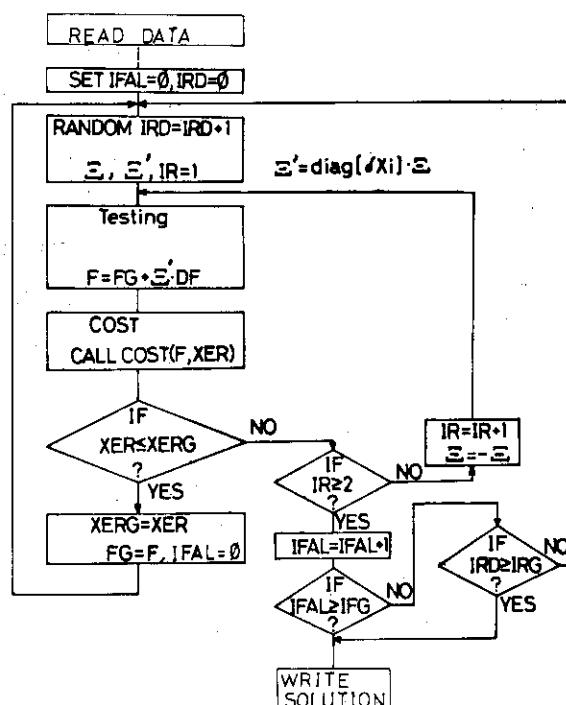


Fig. 4. Flow chart of R.S.R.R. method

この時 I_R と P_s の関係も、確定論的対応関係で定めることはできない。ただ、 I_R の値を決めるこことによって P_s の値が、ある範囲に入っているということを、ある信頼度で述べることができるのである。 P_s が、ごく小さい値に近い範囲にあることを十分な信頼度でいうためには、 I_R の値は当然大きなものとなるはずである。

このような形で最適性の判定をおこなうことは、あいまいで不確実に思われるかも知れない。しかし、一応論理的で厳密に見える確定論的収斂判定法 ($\partial \tilde{Q} / \partial X = 0$ など) が多峰性評価関数の大域的最適解探索にはむしろ不適当なものとなるなどの欠点をもつておらず、統計的探索法における非確定論的最適判定法はより一般性を有しており、むしろ、より高く評価されてしかるべきであろう。

I_R と P_s の統計的な関係について以下に検討していくが、この考察の前提として次の仮定をおく。

仮定(1) X_{opt}^I を基点とした I_R 回の探索は、成功確率 P_s のベルヌーイ試行と見なすことができる。

仮定(2) この I_R 回の試行において k_1 回から k_2 回 ($k_1 < k_2$) の間の成功試行が起こる確率の評価には、区間でのラプラスの定理が適用可能である。

仮定(1)は、F. S. R. P. 法、R. S. R. P. 法においては明らかに成立している（失敗試行が続ければ、連続してランダム探索がなされるのであるから）。

F. S. R. R. 法、R. S. R. R. 法においては、失敗試行に際しては逆方向探索がなされるが、その探索も失敗すれば次にはランダム試行がなされる。したがって、ランダム探索のなされた回数を I_R とすれば、やはり仮定(1)が近似的に満たされるとしてよい。但しこの場合、評価関数値の計算回数は $2I_R$ となることはもちろんである。

仮定(2)については、もし事態 A) が起っている場合には、その妥当性は失なわれることになる。しかしながら一般的な問題については、事態 A) が起りえないと考えるべきである。さらさらに、たとえ事態 A) が起っていたとしても、以下に述べるように本節の議論は “ I_R 回について成行試行がなかった” という場合について “ P_s が 0 である” ことを示そうとするではなく “ P_s がある値以下である” ということを示そうという立場に立つものであるゆえ、各アルゴリズムについて妥当な仮定とみなしうる。このことは以下の議論で明らかにしていく。

さてここで p_s としてはある値 p_s^i を仮定し、 n 回の試行において成功数 m があったとする（実際には I_R 回すべてが失敗であり $m=0$ 、 $n=I_R$ ）。また試行が成行すれば探索の基点である最適点 X_{opt}^I の位置が変るはずであるが、この考察では X_{opt}^I と基点にして、とにかく n 回の探索がなされたという状況を仮想的に考えるのである。この時、成功が起こる相対度数と確率 p_s^i との差の絶対値が、ある与えられた正数とをこえない確率を評価する。この確率を P ($| \frac{m}{n} - p_s^i | \leq \epsilon$) とあらわすと、不等式

$$| \frac{m}{n} - p_s^i | \leq \epsilon \quad (4)$$

は、不等式

$$-\epsilon \leq \frac{m - np_s^i}{n} \leq \epsilon \quad (5)$$

と同値である。この不等式の各辺に $\sqrt{\frac{n}{p_s^i q_s^i}}$ をかける。ただし $q_s^i = 1 - p_s^i$ である。すると

$$-\epsilon \sqrt{\frac{n}{p_s^i q_s^i}} \leq \frac{m - n p_s^i}{\sqrt{n p_s^i q_s^i}} \leq \epsilon \sqrt{\frac{n}{p_s^i q_s^i}} \quad (6)$$

この不等式が成立する確率は、成功試行の数が、ある値の範囲内にある確率と同じものであり、その確率評価には仮定から、区間でのラプラスの定理が適用できる。

すなわち

$$P \left(-\epsilon \sqrt{\frac{n}{p_s^i q_s^i}} \leq \frac{m - n p_s^i}{\sqrt{n p_s^i q_s^i}} \leq \epsilon \sqrt{\frac{n}{p_s^i q_s^i}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (7)$$

$$z_1 = -\epsilon \sqrt{\frac{n}{p_s^i q_s^i}}, \quad z_2 = \epsilon \sqrt{\frac{n}{p_s^i q_s^i}} \quad (7)'$$

この式から明らかに

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p_s^i \right| \leq \epsilon \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi(z_2) \quad (8)$$

(8)の右辺は確率積分と呼ばれ、この値は数表化されていて z_2 の値が定まれば $\Phi(z_2)$ は容易に求められる。

参考のために $\Phi(z_2)$ の様子を Fig. 5 に示した。

z_2 の値は p_s^i , ϵ , n の値が定まれば、対応して定まるが、見通しを良くするため逆に $P(|\frac{m}{n} - p_s^i| \leq \epsilon)$ の値を指定してみる。すなわち $|\frac{m}{n} - p_s^i|$ がある値 ϵ をこえない確率（もしくは信頼度）を指定する。これは $\Phi(z_2)$ の値を指定したことになり、数表あるいは図から逆に z_2 の値を決めることができます。そしてさらに p_s^i , ϵ の値を定め(7)'式を

$$n = \left(\frac{z_2}{\epsilon} \right)^2 p_s^i (1 - p_s^i) \quad (9)$$

として用いれば、 n の値が求められることになる。

例 1) $\Phi(z_2) = 0.80$ とすると、 $z_2 = 1.281$

$$p_s^i = 0.1, \epsilon = 0.03 \text{ とすると } n \approx 164$$

この結果は、生起確率 p_s^i が 0.1 の事象に対して n 回の試行をおこない、事象の生起の相対度 $\frac{m}{n}$ と p_s^i の差が 0.03 をこえない確率が 80 % であるためには、試行回数は 164 回必要であることを示している。これはまた 164 回の試行をおこなったとき先駆的な成功確率が 0.1 であるような事象については p_s^i と $\frac{m}{n}$ の差が 0.03 をこえないこと（すなわち成功数が 21 回から 11 回の間の値をとること）は 80 % の信頼度で予測できる、といいかえてもよい。このようにして、 n を定めれば (p_s^i, ϵ) の組合せに対して $\Phi(z)$ を計算でき、 $\Phi(z)$ を定めれば、やはり (p_s^i, ϵ) の組合せに対して必要な n の値を計算することが可能である。

式(9)にしたがって n の値を計算した結果を Table 1 に示す。

また以後の便宜のため、Fig. 6, Fig. 7 にこれらの結果を図示した。これらの計算では p_s^i の値が 5 %, 3 %, 1 % である場合を考えるものとした。なお、これらの値のもつ意味については次の節で考察する。以下、Table-1 を用いた最適性判定法とその応用について若干の例を示して説明する。

例 2) 探索の終了条件として、"連続して 350 回の失敗試行があった場合" を考えた。この終了条件が満された時、解の最適性について、どのような推論が可能か。

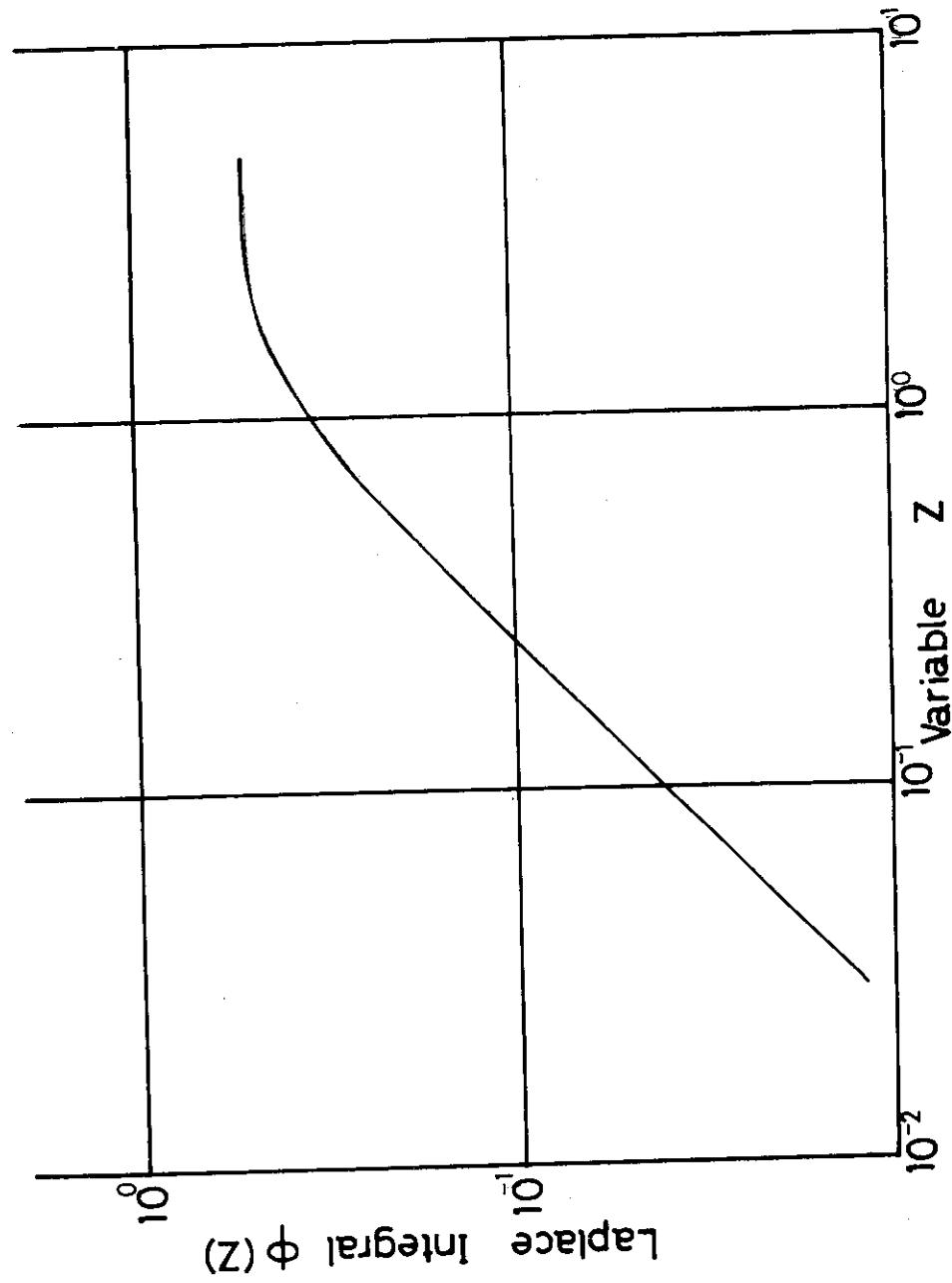


Fig. 5. Laplace integral with variable z

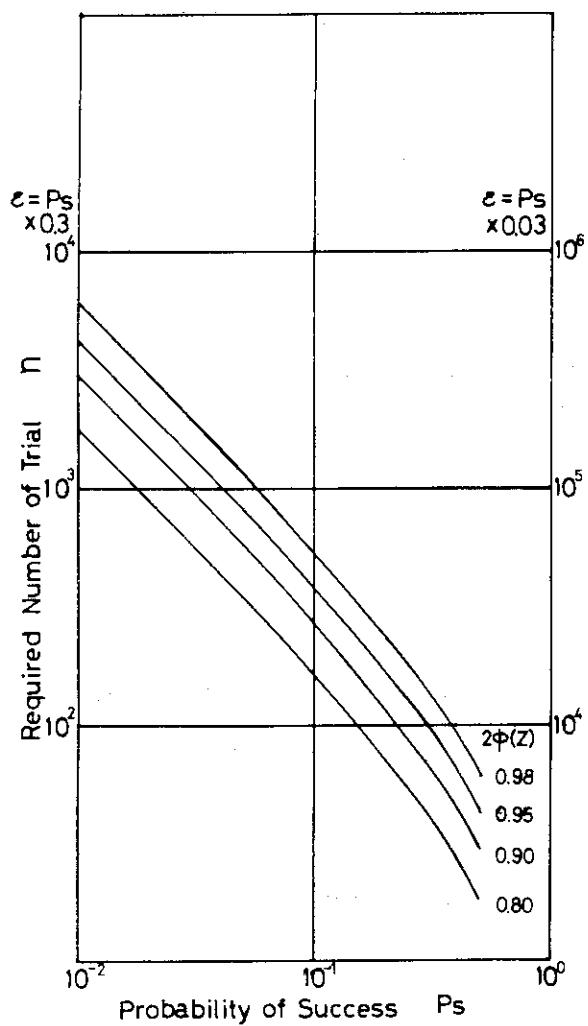


Fig. 6. Number of trials required for estimating the value of Ps under specified conditions ($\epsilon /Ps = 0.5, 0.05$)

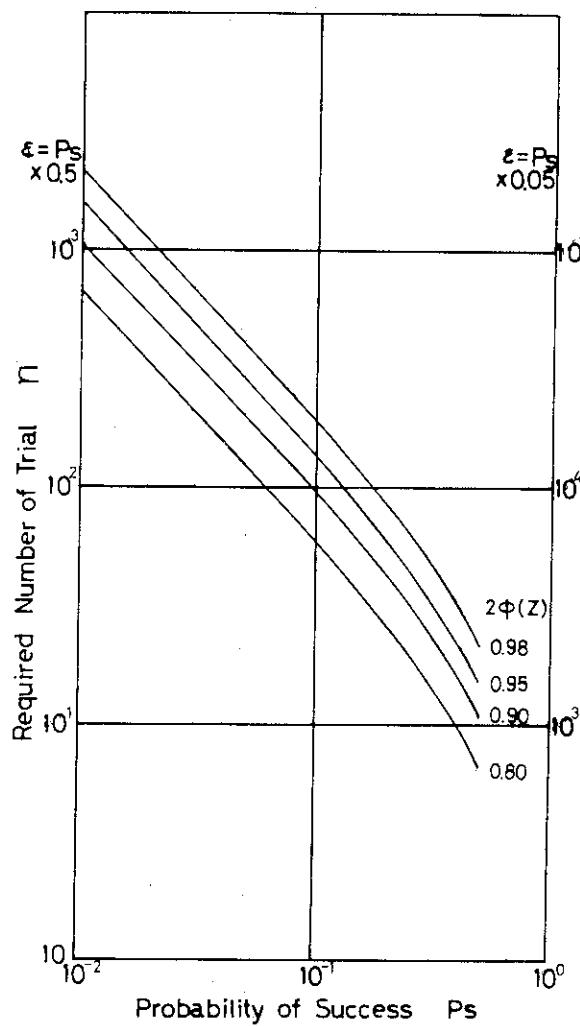


Fig. 7. Number of trials required for estimating the value of Ps under specified conditions ($\epsilon /Ps = 0.3, 0.03$)

Table 1 $P(|\frac{m}{n} - p_s| < \epsilon)$

p_s	ϵ	0.80	0.90	0.95	0.98
0.5	$0.3 \times p_s$	1.82×10	3.01×10	4.27×10	1.00×10
	0.1	1.64×10^2	2.71×10^2	3.84×10^2	5.40×10^2
	0.05	6.56×10^3	1.08×10^3	1.54×10^3	2.16×10^3
	0.03	1.82×10^3	3.01×10^3	4.27×10^3	6.00×10^3
	0.01	1.64×10^4	2.71×10^4	3.84×10^4	5.40×10^4
0.3	0.3	4.25×10	7.02×10	9.96×10	1.40×10^2
	0.1	3.83×10^2	6.31×10^2	8.96×10^2	1.26×10^3
	0.05	1.53×10^3	2.53×10^3	3.59×10^3	5.04×10^3
	0.03	4.25×10^3	7.02×10^3	9.96×10^3	1.40×10^4
	0.01	1.83×10^4	6.31×10^4	8.96×10^4	1.26×10^5
0.1	0.3	1.64×10^2	2.71×10^2	3.84×10^2	5.40×10^2
	0.1	1.448×10^3	2.44×10^3	3.46×10^3	4.86×10^3
	0.05	5.90×10^3	9.74×10^3	1.38×10^4	1.94×10^4
	0.03	1.64×10^5	2.71×10^4	3.84×10^4	5.40×10^4
	0.01	1.48×10^5	2.44×10^5	3.46×10^5	4.86×10^5
0.05	0.5	1.24×10^2	2.06×10^2	2.92×10^2	4.10×10^2
	0.3	3.46×10^2	5.71×10^2	8.11×10^2	1.14×10^3
	0.1	3.12×10^3	5.14×10^3	7.23×10^3	1.03×10^4
	0.05	1.24×10^4	2.06×10^4	2.92×10^4	4.10×10^4
	0.03	3.46×10^4	5.71×10^4	8.11×10^4	1.14×10^5
0.03	0.5	2.12×10^2	3.49×10^2	4.95×10^2	6.96×10^2
	0.3	5.88×10^2	9.69×10^2	1.38×10^3	1.93×10^3
	0.1	5.29×10^3	8.72×10^3	1.24×10^4	1.74×10^4
	0.05	2.12×10^4	3.49×10^4	4.95×10^4	6.96×10^4
	0.03	5.88×10^4	9.69×10^4	1.38×10^5	1.93×10^5
0.01	0.5	6.56×10^2	1.08×10^3	1.54×10^3	2.16×10^3
	0.3	1.82×10^3	3.01×10^3	4.27×10^3	6.00×10^3
	0.1	1.64×10^4	2.71×10^4	3.84×10^4	5.40×10^4
	0.05	6.56×10^4	1.08×10^5	1.54×10^5	2.16×10^5
	0.03	1.82×10^5	3.01×10^5	4.27×10^5	6.00×10^5

解) $n = 350$ の場合, $p_s^i = 0.05, 0.03$ の各場合についての推論ができるが, $p_s^i = 0.01$ の場合については, Table-1 の数値では推論をおこなうこととはできない。

① $p_s = 0.05, \epsilon = 0.5 \times p_s, 2\Phi(z) = 0.95$ の場合, $n = 2.92 \times 10^2 < 350$ となっている。したがって 350 回の試行に際しては $0.025n \leq m \leq 0.075n \quad \therefore 8.75 \leq m \leq 26.25$ となることは 95 % 以上の信頼度で確かである。m の値が 8 より小さくなること, あるいは 27 より大きくなることは 5 % より小さい確率でしか起こりえない。

実際には $m = 0$ となるわけだから, このとき成功確率が 5 % という仮説は 5 % 以下の危険率を以て棄却して良いことになる。いいかえると成功確率が 5 % より小さいと推論しても, 危険

率は 5 % より大きくならないはずである。

(2) 成功確率 5 % という仮説に対しても、80 % の信頼度で $\epsilon = 0.3 \times p_s$ の場合をとりあげることもできる。すなわち $0.035 n \leq m \leq 0.065 n$, $12.25 \leq m \leq 22.75$ となることは 80 % 確実なはずである。したがってこの場合に仮説を棄却しても危険率は 20 % である。しかし、 $p_s^i = 0.05$ という仮説を棄却するのは①の立場の方がより有意性が高いのはもちろんである。

(3) $p_s^i = 0.03$, $\epsilon = 0.5 \times p_s^i$ として計算すると、 $2\Phi(z) = 0.90$ としたとき $n = 3.49 \times 10^3$ 350 となっている。つまり $0.015 n \leq m \leq 0.045 n$, $5.25 \leq m \leq 15.75$ となる確実さは 90 % である。この事態が起こらなかったということで、この仮説を棄却した時の危険率は 10 % より小さいということになる。以上を要するに、この問題については③の推論が最も意味をもつとして良いであろう。

ここで示した方法においては、なるべく p_s の小さい場合についての仮説 (m の値域についての) を否定する形で成功確率が p_s より小さいことをいうのである。また必要な n の値に及ぼす ϵ の効果が極めて大なことが知られる。仮説を否定する形で最適性を推定するという手続きをとる以上、 ϵ が小さいことは余り意味をもたない。むしろ、定まった n について ϵ は大きく（ゆるく）とっておいて、推定の信頼度を高く（危険率を小さく）した方が有利である。 $2\Phi(z) = p(|\frac{m}{n} - p_s| < \epsilon)$ の値を大にしても必要な n の値の増大は ϵ を小にとったときの増大に比して小さいことは Table-1 で明らかである。

例 3) 収斂の判定として、成功確率 5 % 以下、1 % 以下を要求した場合、このために必要な試行数はどれ位か。

解) 前述のように、 ϵ は大きく、信頼性をなるべく高くとった仮説を考えるのが妥当である。

① 5 % 以下のとき : $\epsilon = 0.5 \times p_s$ として、

信頼度 80 %, 90 %, 95 %, 98 % に対し、各々試行数 124 回, 206 回, 292 回, 410 回が必要となる。

すなわち、これらの数の試行をおこなえば解の改良確率が 5 % 以下であることが、それぞれ 20 %, 10 %, 5 %, 2 % の危険率を以て期待できる。

② 1 % 以下を判定基準としたとき同様に、

信頼度 80 %, 90 %, 95 %, 98 % に対してそれぞれ 656 回, 1080 回, 1540 回, 2160 回の試行が必要である。

例 4) 探索過程の最後の 700 回で 3 回しか成功試行がなく、計算量が限られているため計算打切とした。得られた解はどのような意味で“最適”解であるか。

① 成功確率 1 % の仮説について考えると、80 % の信頼度で $0.005 \leq \frac{m}{700} \leq 0.015$, $3.5 \leq m \leq 10.5$ となるはずである。

② 成功確率 3 % の仮説については、98 % の確率で、 $0.015 \leq \frac{m}{700} \leq 0.045$, $10.5 \leq m \leq 31.5$ といえる。

$m = 3$ だったことから、この解は改良確率が

2 % の危険率で 3 % より小、あるいは 20 % の危険率で 1 % より小、という意味での“最適”解となっている。

これらの例から知られるように、この方法で収斂判定条件を望ましい値に定める指針がえられる。また、収斂以外の理由で探索を終了した場合についても、それ迄の探索でえられた最良の点が最適解としてどの程度有意であるかについての情報をうることができること。

解の最適性判定のための統計的手法としては本節の方法は未だ不十分なものであるが、収斂解の最適性と、探索アルゴリズムパラメータとを関連づける簡便な手続きとして利用しつつ、具体的問題への適用結果と考え方を次々、精度のよい判定法を開発していく考えである。

2.3 探索確率と次元数

前節で、収斂（最適性）判定をおこなうに際して、それ以後の試行で改良を得る確率 p_s の上限値を統計的におさえるという考え方を示した。この p_s の値としては種々のものを考えたが、これらの値のもつ具体的な意味に関しては特に言及しなかった。この点について以下に述べる。

簡単のため、評価目的量としては2次形式を想定する。

$$Q(X) = X^T \cdot X = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad X_{opt} = (0, 0, \dots, 0)^T \quad (10)$$

現時点での最良点 X^I から、 X_{opt} までの距離を r 、探索ステップの大きさを $|AX|$ とする。ただし、距離としては特にことわらない限り N 次元ユークリッド空間のベクトル X の長さをとることにする。

角度 θ で、最良方向 (X^I と X_{opt} を結ぶ方向) と、探索方向とがなす角度を表わすと、評価関数値に改良がみられるためには不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \theta_m \\ \theta_m &= \arccos \frac{|AX|}{2r} \end{aligned} \quad (11)$$

が満たされていなければならない (Fig. 8 参照)。

式(11)の関係は、次元数 N の値によらず定まるが、この関係を満す方向がランダム選択の結果探索される確率は、次元数 N により大きく影響されることとは直観的に予想される。 X^I からランダムに選ばれた方向ベクトルがある角度 θ と $\theta + d\theta$ の間にある確率は

$$p(\theta) d\theta \cong \frac{\sin^{N-2} \theta d\theta}{2 \int_0^{\pi/2} \sin^{N-2} \theta d\theta} = \frac{\Gamma(N-1) \sin^{N-2} \theta d\theta}{2^{N-2} [\Gamma(\frac{N-1}{2})]^2} \quad (12)$$

で与えられることが知られている。

式(11), (12)から、探索が成功する確率 P_s は

$$P_s = \int_0^{\theta_m} p(\theta) d\theta \cong \frac{\Gamma(N-1)}{2^{N-2} [\Gamma(\frac{N-1}{2})]^2} \int_0^{\theta_m} \sin^{N-2} \theta d\theta \quad (13)$$

として与えられることになる。これを積分項とそれ以外の項とに分けて次のようにまとめる。

$$P_s = K(N) \cdot I(N, \theta_m) \quad (14)$$

$K(N)$ はガンマ関数の表から逐次評価可能である。

N の値を変えた時の $K(N)$ の値を Fig. 9 に示す。 $I(N, \theta_m)$ については簡単のため N が奇数の場合のみを考え、公式

$$\int \sin^{2p+1} \theta d\theta = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p}} \sum_{r=0}^p (-1)^r \left(\frac{2p+1}{r}\right) \frac{\cos(2p-2r+1)}{2p-2r+1} \theta \quad (15)$$

を用いて計算した（ただし $N < 5$ の場合はすべて求めた）。

この結果を $\Delta X/r$ をパラメータとして Fig. 10 に示した。これより p_s と N の関係を、 $\Delta X/r$ の種々の値に対して求めることができる。この結果を Table-2 と Fig. 11 に示す。これらの計算は、離散的な N の値についておこなったが、図から、すべての N ($2 \leq N \leq 41$) について、概略の値を推定することが可能である。Fig. 11 を書きかえて、次元数を固定し、 $\Delta X/r$ を変量として扱った時の p_s の変化を Fig. 12 に示した。 $\Delta X/r$ の値の増大は、探索点の、最適点への近接をあらわし、この値が 1 より大きくなることは、探索点が最適点を中心とした半径 ΔX の球面 S_4 の内側に達したことを意味する。Fig. 11, Fig. 12 から、一般に探索点が最適点に近づくと、探索成功確率が減少すること、次元数が増すとこの傾向は特に顕著になることが知られる。たとえば S_4 上に到達した場合 ($\Delta X/r = 1.0$) 次元数が 2 であれば p_s は 1/2 であるのに、次元数が 23 となるとこの値は 10^{-2} 程度になってしまふことは注意に値しよう。また、 $p_s = 0.05$ の意味として、3 変数の場合を考えると、これは探索点と最適点の距離が約 $\Delta X/2$ になったこと、しかもなお、同じステップ幅で探索をおこなって、5 % の成功確率があることに対応している。これに対し 10 変数以上では ΔX と r がほぼ等しくなった程度で、同様な状態になてしまうことが知られる。このように、 p_s の値が同一であっても、探索点が最適解に近接している度合いは次元数により異なり、Fig. 11, 12 等を参照して始めて理解されることがある。

以上の議論を前節の結果と併せて考えることにより、収斂判定条件と最適性との関係をより明確に把握することができる。

例 5) 次元数 13 の問題で、 S_4 の内側迄到達した時を近似最適解とする。この判定のために必要な試行数を求める。但し、誤判定危険率は 5 % 以下に抑える。

解) Table-2 から、 $N = 23$, $\Delta X/r = 1.0$ の場合に対して $p_s = 0.01$ と知られる。
 $2\Phi(z) = 0.95$ とすると $\epsilon = p_s \times 0.5$ の場合について Table-1 から、 $n = 1540$ と必要試行数が求まることがある。

例 6) 次元数 13 の場合、同様に必要試行数を求める。

解) Table-2 から $p_s = 0.035$ ゆえ、これを 0.03 とする。 $2\Phi(z) = 0.95$, $\epsilon = p_s \times 0.5$ に対し Table-1 から $n = 495$

このように、次元数、最適性、収斂判定条件の関連を明らかに知ることができる。収斂判定条件を先に定めて、逆に最適性の意味を知ることももちろん可能である。

最適解近傍におけるこれらの傾向は、探索の途中では必ずしも同様ではない。Table-2 に明らかなように次元数の増大と解への近接はいずれも p_s の値を減少させる効果があるが、最適解から遠い段階ではこの効果はごく小さいものとなる。たとえば $\Delta X/r \leq 0.1$, すなわち探索点が最適点から $10 \Delta X$ 以上離れている場合には次元数がふえても p_s の値はほとんど変わらないとみをしてよいであろう。 p_s と、($\Delta X/r$, N) との間に、このような関係がある

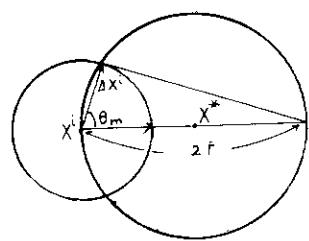


Fig. 8.

Effect of step size of search and distance from optimal on P_s

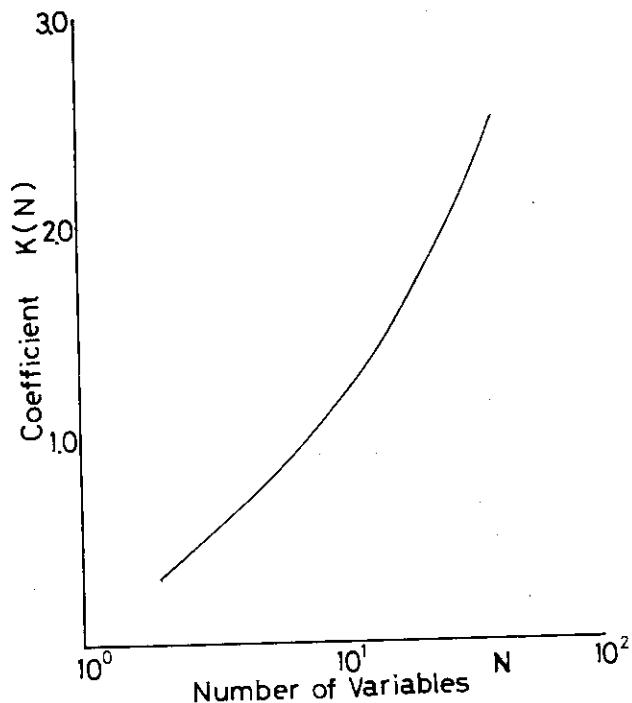


Fig. 9.

Coefficient $K(N)$ as the function of the number of variables N

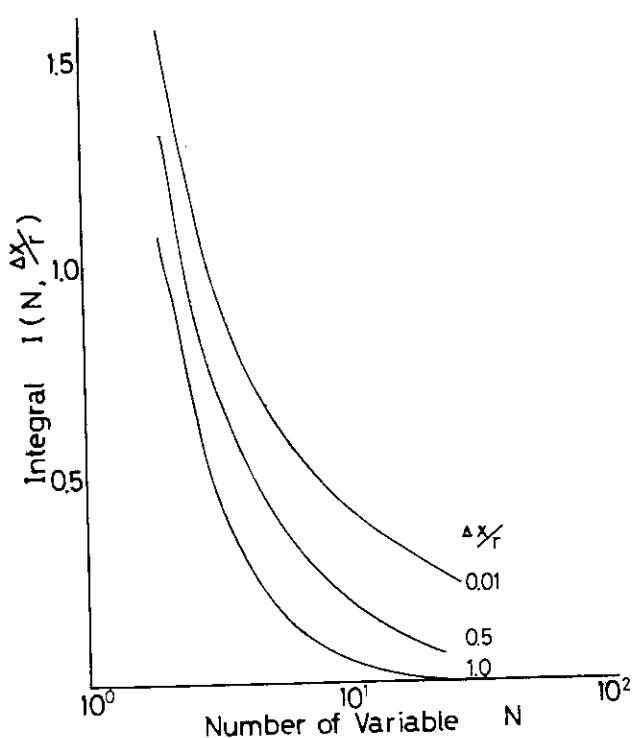


Fig. 10.

Integral $I(N, \Delta X_r/r)$

Table - 2 Effect of the number of variables on P_s for various values of the inverse relative distance ($\Delta X/r$)

$\Delta X/r$	0. 01	0. 05	0. 1	0. 2	0. 5	1. 0	1. 6	1. 8	1. 9
N	2	3	4	5	7	13	17	23	
0. 498	0. 491	0. 484	0. 467	0. 419	0. 333	0. 204	0. 143	0. 101	
0. 498	0. 487	0. 476	0. 450	0. 375	0. 250	0. 100	0. 050	0. 025	
0. 496	0. 484	0. 468	0. 436	0. 342	0. 196	0. 052	0. 018	0. 007	
0. 496	0. 482	0. 464	0. 425	0. 317	0. 157	0. 029	0. 008	0. 002	
0. 495	0. 477	0. 454	0. 406	0. 282	0. 104	0. 008	0. 001	0	
0. 493	0. 465	0. 433	0. 366	0. 195	0. 035	0	0	0	
0. 493	0. 461	0. 424	0. 347	0. 159	0. 018	0	0	0	
0. 483	0. 446	0. 405	0. 319	0. 120	0. 010				

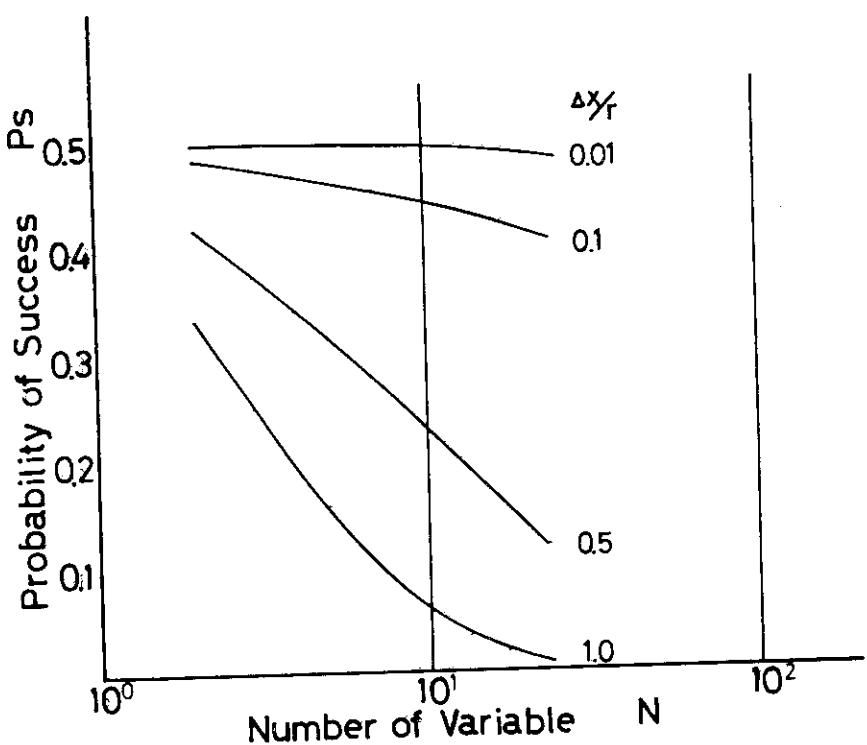


Fig. 11. Effect of N on P_s for various values of the inverse relative distance ($\Delta x/r$)

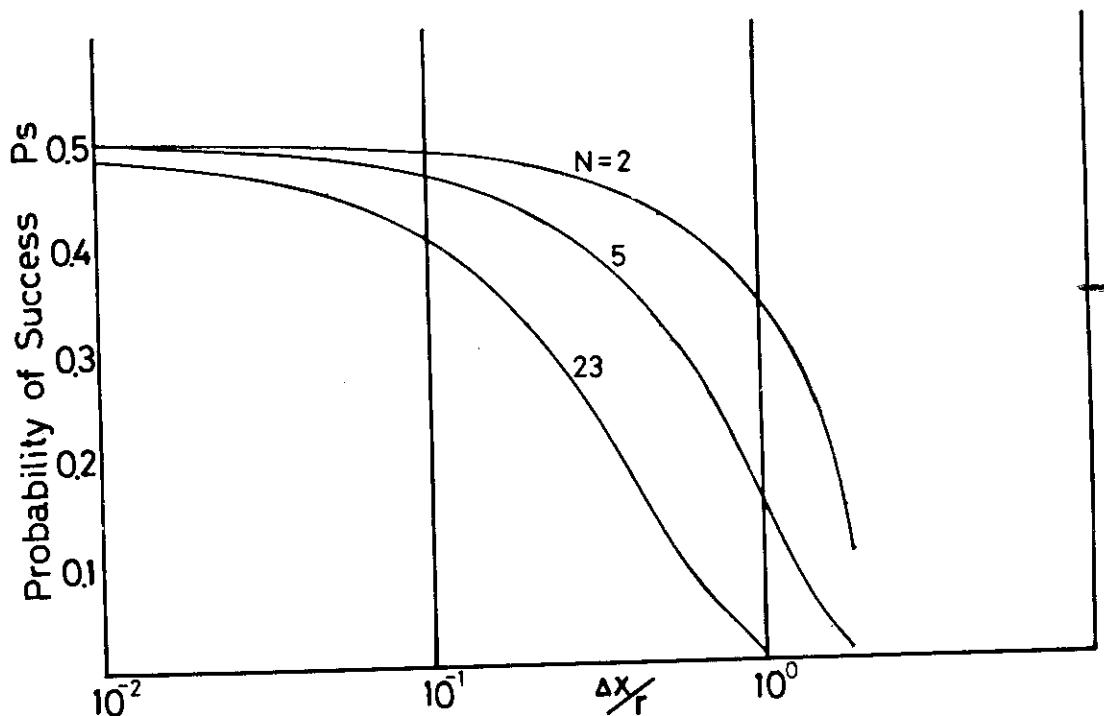


Fig. 12. Effect of the inverse relative distance on P_s

ことから、統計的探索アルゴリズムのステップ巾 ΔX を決める際には、次のような立場をとることが妥当かつ能率的であると考えられる。

- (1) 探索初期においてはステップ巾はある程度大きくとる。小さくとれば、試行2回につき1回程度成功を得ることができようが、これでは回数が多くかかりすぎよう。試行3~5回に1度の成功があるという程度に ΔX を定めるのが能率的だと思われる。
- (2) 探索末期においては、ステップ巾を減少させると成功確率は大巾に増大し、探索の精度を向上させることができる。特に次元数が多い場合 ($N > 10$) この措置は効果的である。

本節の定性的議論は、評価関数の形が式(10)のものより複雑な場合でも、最適解近傍では多くの評価関数が2次形式で比較的精度良く近似できるので、程度の差こそあれ本質的には成立するものと考えられる。

2. 4 探索精度の向上のためのHeuristic Approach

前節の考察により、探索精度の向上に関するステップ巾がもつ影響につき情報がえられたが、次元数が多い問題については更に別の角度からの配慮がなされねばならない。 N ヶの変数のうち一部はすでにその最適値に到達し、残った変数につき改良の余地が残されているという事態を考えてみる。この時全体の変数値についてランダム変動を与えれば、改良のなされる確率は極めて小さくなる場合も多い。前節の議論は、簡単な形の評価関数につき、制約条件のない場合を仮定してなされたものであったが、制約条件の数が多い問題では、上のような事態は特に生じやすくなる。この時、もしも改良を要する変数のみをまとめて、これらだけについて探索をおこなうことができれば最も能率的であろう。もちろん実際にはこのような措置をとることはできないが、これに代る手続きとして、次のような変数のブロック分けという Heuristic を処理法を考えてみた。

N ヶの変数を K 分割して (N/K) 変数ずつのブロック Y_1, Y_2, \dots, Y_K に分けることが可能であると仮定する。この時各変数が、自分の属するブロックの変数とのみ結合を有し、他のブロックに属する変数とは相互干渉のないことが望ましい。ブロック Y_1, \dots, Y_K のそれぞれに改良可能性が、確率 p_1, \dots, p_K をもって残されているとする。この時、ブロックの各自について、 I 回の試行をおこなうとする（他のブロックの値は固定しておく）。

試行が成功しても p_i の値は変わらないとするが、これは ΔX の値が小であれば近似的に正しいはずである。

この時、全試行数 KI 回に対しても $\sum_{i=1}^K p_i I$ 回の成功が期待でき、成功の確率は $\prod_{i=1}^K p_i / K$ となる。

これに対し、ブロック化をおこなわずに変数全体について KI 回の試行をおこなった場合を考える。最適点に近接した状態では、探索点は制約境界のごく近傍にあることが多い。このような場合、たとえ変数のうちの1つでも、改良方向（その探索確率は小）以外の方向に変動すると評価関数の値は大巾に悪化する。したがって、探索が成功するためには、すべての変数値が改良方向に動くか現在の値に止まることが必要である。このことは、 K ヶのブロックのすべてにおいて成功試行がなされることに対応するゆえ、その確率は明らかに $\prod_{i=1}^K p_i$ である。

$\sum_{i=1}^K p_i / K$ と $\prod_{i=1}^K p_i$ を比べれば、ブロック化の効果は明白であり、この手続きにより探索末期

における探索効率が改善可能と考えた。ただし、ブロック数が多くなり、单一ブロックに属する変数が少なくなると変数間相互作用の考慮が困難になるため、余り極端なブロック化は逆効果であろう。

以上の各節の考察に基づき、2.1に示した4種のアルゴリズムを改良して実際の最適解探索に用いた。改良されたF, S, R, P法のアルゴリズムをFig. 13に示す。

他のアルゴリズムにおいても改良点は全く同じであるためF, S, R, P法についてのみ図示した。

これらのアルゴリズムを原子炉におけるいくつかの最適化問題の求解に用いた。この結果について以下に述べていく。

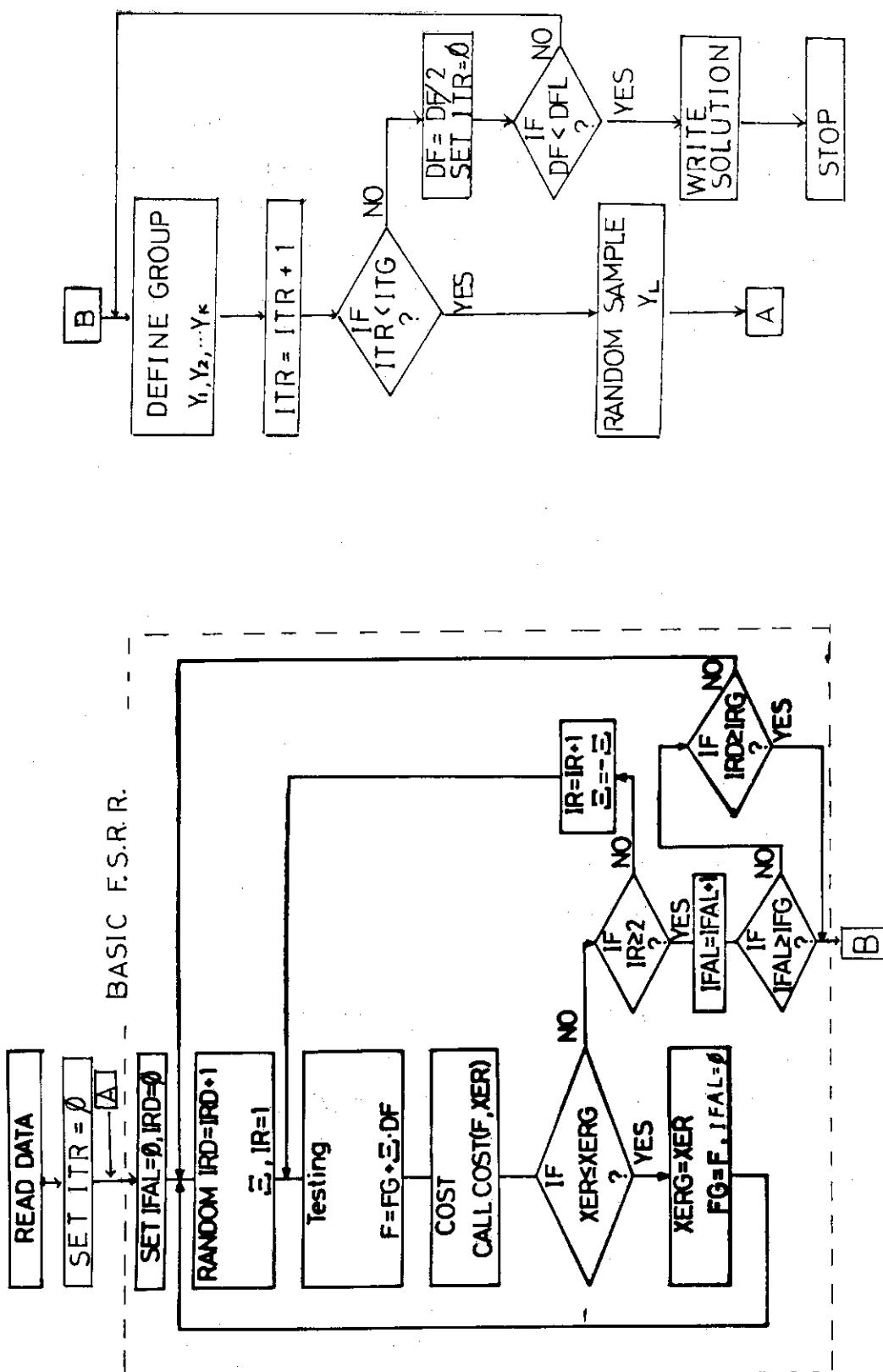


Fig. 13. Flow chart of modified F.S.R.R. method

3 サマリウム毒作用最適制御問題

3.1 定式化

3.1.1 サマリウムの動特性

熱中性子束炉における毒作用最適制御問題としては、ゼノン毒作用に関する研究が多くなされているが、中性子束レベルが高くなつた場合には、サマリウム¹⁴⁹の蓄積による毒作用が増大してくる。このサマリウム毒作用は、炉停止後の立ち上がりがゼノンに比して緩やかであるが、一度生成されてしまうと崩壊はせず、炉停止後は永久的に残るという特色をもつ。このため高中性子束熱中性子炉で炉停止時間が長くなるような場合には、この毒作用を低減させ、あるいは最小化するような炉停止法をとることが必要となる可能性がある。この毒作用の解析や最適制御法の決定は本来ゼノンの毒作用の効果を考慮に入れて行うべきであるが、ここでは統計的探索法の有効性を調べるために例題として扱うため、一応サマリウム単独の問題を考えた。本報では、最適解の探索効率と精度に関して重点をおいて考察し、解の物理的、工学的意味等について別に報告することにする。

サマリウム¹⁴⁹の動特性は、近似的に次のように表現される。

$$\frac{dP}{dt} = r_p \Sigma_f \phi - \lambda_p P \quad (16)$$

$$\frac{dS}{dt} = \lambda_p P - \sigma_s \phi S \quad (17)$$

ただし $P : {}^{149}\text{Pm}$ の濃度

$S : {}^{149}\text{Sm}$ の濃度

$r_p : {}^{149}\text{Pm}$ の生成割合

$\lambda_p : {}^{149}\text{Pm}$ の崩壊定数

$\sigma_s : {}^{149}\text{Sm}$ の中性子吸収断面積 である。

この(16), (17)の一般解は

$$P(t) = \exp(-\lambda_p t) \left\{ r_p \Sigma_f \int_0^t \phi(\tau) \exp(\lambda_p \tau) d\tau + P(0) \right\} \quad (18)$$

$$S(t) = \exp(-\sigma_s \int_0^t \phi(\tau) d\tau) \left\{ \lambda_p \int_0^t P(\tau) \exp(\int_0^t \sigma_s \phi(\tau') d\tau') d\tau + S(0) \right\} \quad (19)$$

中性子束 $\phi(t)$ が時間的に一定の値 ϕ_c をとる時は

$$P(t) = \exp(-\lambda_p t) \left\{ \frac{r_p \Sigma_f \phi_c}{\lambda_p} (\exp(\lambda_p t) - 1) + P(0) \right\} \quad (20)$$

$$S(t) = \frac{r_p \Sigma_f}{\sigma_s} (1 - \exp(-\sigma_s \phi_c t)) + \frac{\lambda_p P(0) - r_p \Sigma_f \phi_c}{\sigma_s \phi_c t} \{ \exp(-\lambda_p t) - \exp(-\sigma_s \phi_c t) \} \\ + S(0) \exp(-\sigma_s \phi_c t) \quad (21)$$

高中性子束 ϕ_c が長時間保たれると ${}^{149}\text{Sm}$ の濃度は平衡に達する。この平衡値 S_{eq} は式(21)

で $t \rightarrow \infty$ とすることより

$$S_{eq} = r_p \Sigma_f / \sigma_s \quad (22)$$

となり中性子束レベルによらず一定値をとる。

一方 $^{149}P_w$ の平衡値 P_m は、同様に

$$P_{eq} = r_p \Sigma_f \phi_c / \lambda_p \quad (23)$$

$\phi = \phi_c$ に対応する平衡状態から炉停止を行なうと ^{149}Sm の濃度は $t \rightarrow \infty$ で

$$S_f = r_p \Sigma_f / \sigma_s + r_p \Sigma_f \phi_c / \lambda_p \equiv S_{eq} + P_{eq} \quad (24)$$

に漸近する。また、この時の軌道は (P, S) 面で

$$S = -P + \text{const} \quad (25)$$

なる直線となる。これは式 (16), (17) で $\phi = 0$ とし dS/dP を求めると -1 となることから明らかである。

したがって、炉停止後の S の値は (P, S) 面で式 (25) の直線に沿って増大し、式 (24) の値に漸近する。

式 (24) から、 ϕ_c の値が大きいと、 S_{eq} に比し S_f の値が非常に大きくなることが知られる。この値を最小にするという目的で最適制御を行なうことが考えられる。

S 値が式 (24) の S_f と一致するのは、厳密には炉停止無限時間が経過した後である。問題を、より現実的に扱うには、停止後有限時間 t_f が経過した時の S の値 $S(t_f)$ を最小にすることの方が望ましい。この $S(t_f)$ は次式で与えられることは容易に知られる。

$$S(t_f) = r_p \Sigma_f / \sigma_s + [1 - \exp(-\lambda_p t_f)] r_p \Sigma_f \phi_c / \lambda_p \quad (24)'$$

t_f が大な時は式 (24) が式 (24)' のよい近似となっているのはもちろんである。

3.1.2 最適制御問題

実際上の要求として、 $S(t_f)$ の値をなるべく小さくすることが望まれる。この値が大になればなるほど、原子炉の再起動は困難になり、必要とされる交換燃料の量も増大することになる。また、炉停止を行っている時間（制御時間） t_c についても当然、制約が必要である。

さらに、炉停止運転を行なっている過程中においても ^{149}Sm の値は制限されねばならない。もし、この値がある限度をこせば、原子炉は停止することになる。

これらを考え合わせると、最適制御問題は次のように規定することが妥当と考えられる。

問題 3-1)

システム方程式 (16), (17) で表わされる系について、式 (24) あるいは (24)' で与えられる炉停止後の毒物反応度を最小化するような $\phi(t)$ ($0 \leq t \leq t_c$) を見出せ。

ただし、解は境界条件

$$\phi(0) = \phi_c = \phi_{max}, \quad \phi(t) = 0 \quad \text{for } t > t_c \quad (26)$$

$$S(0) = S_{eq} \quad P(0) = P_{eq} \quad (27)$$

制約条件

$$S(t) \leq S_L \equiv \text{const} \times S_{eq}, \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (28)$$

$$0 \leq \phi(t) \leq \phi_{max}, \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (29)$$

を満さねばならない。

上の問題は、 $S(t_f) = S_L$ と指定し、 t_c を最小化するという、いわゆる最短時間制御問題

として書きかえることも可能である。

問題 3-1)は、時間的に連続な $\phi(t)$ を求める問題であるが、これを時間的に離散化して

$$\phi(t) = \phi_i \quad \text{for} \quad (i-1) \cdot \Delta t \leq t \leq i \cdot \Delta t, \Delta t = t_c/N \quad (30)$$

とおき、系列 $\phi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ によって ϕ_i を近似することを考える。また、 ϕ_i のとりうる値についても離散化近似を行ない、

$$\phi_i = j \cdot \Delta \phi \quad j \in (1, 2, \dots, M) \quad \Delta \phi = \phi_{\max}/M \quad (31)$$

と制限する。これにより問題 3-1)は、次のように近似される。

問題 3-2)

システム方程式 (16), (17) で表わされる系について、式 (24) で与えられる炉停止後の毒物反応度を最小化するような $\phi(t)$ の系列 $\phi_i (i = 1 \dots N)$ を見出せ。ただし、条件 (26) ~ (31) が満たされねばならない。

問題 3-2)において、 $\phi_i (i = 1 \dots N)$ の各系列要素を N 次元ユークリッド空間 E^N の各座標軸に対応させて考えると、各々の ϕ_i のとる値を定めた時、すなわち $\phi(t)$ の様子を定めた時、 E^N の一点が定まることになる。

離散化近似の範囲で、最良の ϕ_i 系列、すなわち最適解 $\phi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ が少くとも 1 つは存在するわけであり、これに応じて当然 E^N の中の一点が最適点となる。

制約条件式 (29) は ϕ_i についての領域を E^N には指定することに対応し、式 (28) も陽には S についての表示であるが、陰には式 (29) と同様 ϕ_i についての制約を意味している。それゆえ問題 3-2) は問題 2-2) と全く同じ構造を有しており、2 章に述べた統計的探索法が直接適用できることになる。

この問題は、その記述には何ら不確定性は含まれず、外乱等の存在も考えてはいない。このため確定論的な最適化手法の適用も可能と思われるかもしれない。

実際、制約条件 (30), (31) の下で、システム方程式 (16), (17) の解は式 (20), (21) に対応した。ステップ毎の漸化式形で次のように表わすことができる。

$$P_i = \exp(-\lambda_p \Delta t) \left\{ \frac{r_p \Sigma_f \phi_i}{\lambda_p} (\exp(\lambda_p \Delta t) - 1) + P_{i-1} \right\} \quad (32)$$

$$S_i = \frac{r_p \Sigma_f}{\sigma_s} [1 - \exp(-\sigma_s \phi_i \Delta t)] + \frac{\lambda_p P_{i-1} - r_p \Sigma_f \phi_i}{\sigma_s \phi_i - \lambda_p} [\exp(-\lambda_p \Delta t) - \exp(-\sigma_s \phi_i \Delta t)] + S_{i-1} \exp(-\sigma_s \phi_i \Delta t) \quad (33)$$

この形は、通常の微分方程式の差分近似と異なり制約条件 (30), (31) の下でシステム方程式を直接解いていることになり、より連続系に近い扱いといえる。この表示から明らかのように $\phi_i (i = 1, \dots, N)$ を指定すれば、 P_i, S_i は逐次定まり、したがって評価関係 $S(t_f)$ の解析的表示も厳密に与えられ、制約条件が侵されたか否かも知ることが可能なはずである。しかしながら、現実に最適解を求める場合、精度を良くするため N の値を大にとれば、この最適解の決定は極めて困難となる。これは式 (32), (33) が与えられていても、この式のもつ情報を

十分に利用できるような探索アルゴリズムを構成することは難かしいためと考えられる。^{注1}

式(32), (33)は ϕ_i と $S(t_f)$ を関連づける black-box の中味を表わしているが、これを直接には利用できないと考えた方がむしろ現実に即しているといってよい。

このような場合には確定論的手法によりむしろ、非確定論的手法が適切であることは1章に述べた。

また一般に、連続系の最適化問題を離散化近似した時は、極値が唯一つ(unique)でなくなることが予想される。制御変数 ϕ_i の物理的意味を考えれば、各変数が相互に干渉効果をもち、これが無視しえないことも殆ど確実とみてよいであろう。これらの特性もまた、非確定論的手法の適用を妥当にするものではあることはいうまでもない。

以上から知られるように、問題(3.2)は、単に毒作用最適制御問題としてだけでなく、多変数、強干渉、非線形システムの多峰性評価関数の最適点探索問題とみなしてよい。それゆえ以下の議論は、原子炉システムに関する他の種々の最適化問題を対象にした場合でも本質的な変更なく成立つものと考えられる。

3.2 具体的解法

3.2.1 評価関数とペナルティ

探索アルゴリズムは2章に示したもの用いるが、それに際して評価関数Qならびにペナルティにより制御条件を包含した評価関数Qを計算するアルゴリズムを定めておく必要がある。Qの計算に際しては、入力(制御変数) ϕ_i ($i = 1, \dots, N$)に対して $S(t_f)$ を求めるのが良い。このため、式(32), (33)を直接コード化して用いた。制約条件(28)を考慮するため2章で述べたようにペナルティ関数を用いた。ペナルティ関数の形には2章で示したもの以外にもいくつか考えられる。

まず、制約条件が侵されると、その侵された程度によらないある大きな値をとるようなペナルティ(ヘビサイド型ペナルティ)と、制約が侵された度合に応じてQの値が増大するペナルティ(線形ペナルティ)と考えられる。また解が制約境界に近づくと、たとえ境界には達していないともQ値の増加が起こるようなペナルティがある。この典型的な例は、SUMT法(Sequential Unconstraint Minimization Technique)等で多く用いられるところの

$$r_K \sum_m g_m^L(x)$$

のようなペナルティである。ここでは $L = 1, 2$ の2つの場合を取りあげた。SUMTにおいては、このペナルティ関数は、 r_K の値を逐次減少させてはその都度最適解を求め、漸近的に真の最適解に接近していくという形で用いられる。この考え方方はQ, g がともに凸関数であることを前提として始めて有効なものとなるものであり、一般的適用性には問題があるが、参考のため、このペナルティも用いてみた。このペナルティは $L = 1, 2$ に対応して、inner type 1, 2と称する。

以上、4種のペナルティをまとめてTable-3に示した。

注1 式(32), (33)は、 $2(N-1)$ ヶの等式の組となっており、 P_i , S_i と ϕ_i とは非線形関係を有している。これに対し、たとえば勾配法では、各 ϕ_i と $S(t_f)$ との関係にのみ注意がはらわれ式(32), (33)の関係は陽には全然利用されない。L.P., Q.L.P等でも、式(32), (33)を直接に利用はできない。

Table-3 List of penalty functions examined

Heaviside type penalty	$Q = Q + \sum_{m=1}^M q_m (1 - \text{sgn } g_m)$
Linear penalty	$Q = Q + \sum_{m=1}^M q_m (1 - \text{sgn } g_m)$
Inner type penalty (1)	$Q = Q + r_K \sum_{m=1}^M g_m^{-1} (x)$
Inner type penalty (2)	$Q = Q + r_K \sum_{m=1}^M g_m^{-2} (x)$

3.2.2 探索パラメータ

最適解探索を実行するに際して、いくつかのアルゴリズムのパラメータの値を定めておく必要がある。このパラメータとしては

- ステップ巾, ΔX ($\Delta \phi$)
- 収斂判定条件すなわち失敗試行の連続生起数上限 I_f
- 試行打切条件すなわち全試行数の上限 I_R
- 単位ブロックに含まれる変数の数 (N/K)

などがある。統計的探索法においては、探索効率に及ぼすこれらのパラメータの影響は、確定論的手法の場合に比べて小さいと考えられるが、2章において示したように、ある程度の影響はある。得られた解の信頼性に関する情報をうるためにも、これらの値を適切に定めておくことが望ましい。

$\Delta \phi$ としては、 $\phi_{\max}/40$, $\phi_{\max}/50$, $\phi_{\max}/100$ 等を用い、解近傍においてはさらにこの値を $\frac{1}{2}$ にして、探索精度の向上を計った。これら以外の値による計算も若干試みた。

I_f の値としては 200 ~ 500 程度の値を用いた。

これらの数値のもつ意味は、2章の検討から容易に知られる。たとえば $I_f = 200$ は収斂した解からの成功確率が 5 %, 3 % 以下であることをそれぞれ危険率 10 %, 20 % 以下で意味している。さらに、この成功確率の値は、2次形式評価関数を仮定するなら、探索点が最適点に對し $\Delta X/r = 1.6$ (但し $N = 4$), $\Delta X/r = 1.0$ ($N = 13$) のところ迄近接した状態を示している。

I_f を 500 にとれば、これは成功確率 5 %, 3 % 以下を、それぞれ危険率 5 %, 2 % 以下で保障することになる。

I_R の値は直接には解の精度に影響しない。しかしながら、この値が小さすぎると解探索が収斂前に中断されてしまうことになり、その結果、解の精度が期待より劣化することも考えられる。それゆえ I_R の値はなるべく大きくとり、解の初期推定値とか、ステップ巾の不適当による探索量の無意味を増大のみを制限できるようにとることが得策である。本研究では I_f の 5 ~ 10 倍にとった。

ブロック化の方法としては、全変数を4つのブロックに分けた場合と、2変数ずつをまとめて扱った場合の2つを考えた。前者は、かなり粗なブロック化であり、後者はブロック単位をもっとも小にとったものである。

全試行は、ブロック化をして収斂するまでをRun-1とし、続いて、各ブロックごとに探索を進めていく。

4ブロック化の時はRun-12程度迄おこなわせている。

3.3 結 果

3.3.1 最適解

計算例に用いた諸定数を次に示す。

$$\begin{aligned}\sigma_s &= 5.0 \times 10^{-20} (\text{cm}^2), & \phi_{\max} &= 4 \times 10^{14} (\text{n/cm}^3 \cdot \text{sec}), \\ \lambda_p &= 3.56 \times 10^{-6} (\text{sec}^{-1}), & \phi_{\min} &= 4 \times 10^{12} (\text{n/cm}^3 \cdot \text{sec}), \\ r_p &= 1.1 (\%), & P_{eq} &= 7.68 \times 10^{17} (\text{atoms/cm}^3), \\ t_f &= 0.605 (\text{cm}^{-1}), & S_{eq} &= 1.36 \times 10^{17} (\text{atoms/cm}^3),\end{aligned}$$

Nとしては20, 40等を用いた。精度と計算時間とのつり合いを考えればこの程度の値が適当である。

解の初期推定 ϕ^0 としては、先駆的情報が全くないという立場から一定中性子束を仮定した。

探索アルゴリズムとしては前述のように、2章で示した4種のアルゴリズムの改良形を用いた。

最適解の代表的例として、F.S.R.R法により得られた解の(t, ϕ)面と(P, S)面による表示をFig. 14に示す。

ここでは $t_0 = 175 \text{ hr}$, $t_f = \infty$ にとられている。

(t, ϕ)面図から明らかなように最適な中性子束変化パターンは

- ① 完全炉停止 $\phi = 0$
- ② 中間出力部 1
- ③ 中間出力部 2
- ④ 最大出力部 $\phi = \phi_{\max}$

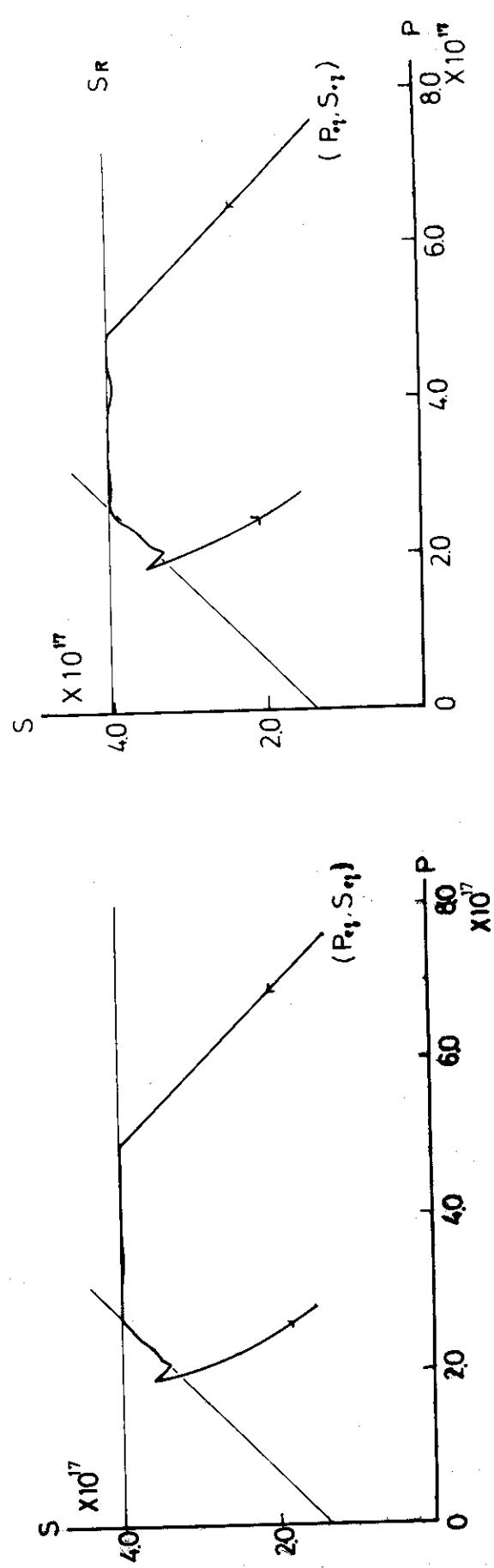
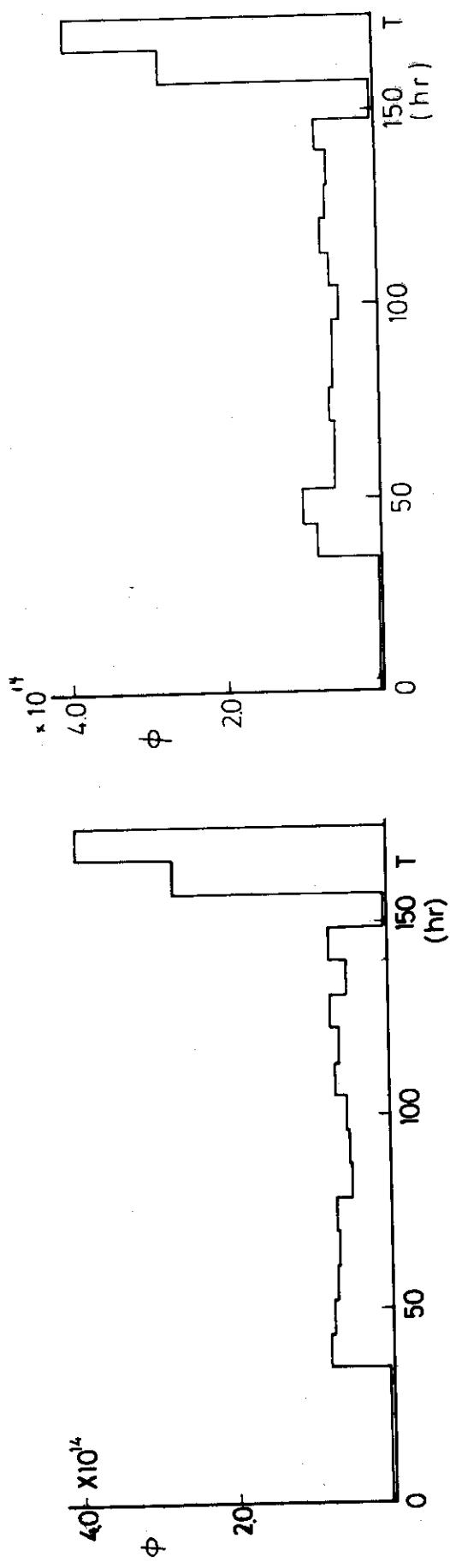
の4段階をとると考えられる。

この解の物理的意味は(P, S)面での解軌道を参照することでより明確になる。

①の完全停止部は、傾き-1の直線軌道となる。この軌道をとることによりSの値は最も速やかに増大することになる。②の中間出力部は $S = \text{const}$ の制約境界上を動く軌道に対応している。③の中間出力部は傾き1の直線に沿って、Sの値が低下していく軌道に、また④の最大出力部は、下に凸な軌道に対応している。

この軌道が終ったところから、Sの値は再度傾き-1の直線上をたどって増大していくことになる。

最適解がこのような構成になることはゼノン毒作用の最適制御問題についてすでに知られている知識等を考え合わせると妥当なものと考えられるが、この点については後に検討する。いずれにせよ、F.S.R.R法によれば最適解は上記のように与えられ、他のアルゴリズムによる



探索でも極めて類似した形の解が得られている。

同じ問題の解を F. S. R. P. 法によって求めた結果を Fig. 15 に示すが、($t - \phi$) 面での解の様子は多少異なっているものの (P, S) 面解軌道の形は殆ど変わらない。評価関数の値もまた有効数字 4 ケタまで全く一致している。これらを考えれば、実用上の最適解が得られたと判断しても良いであろう。

ステップをランダム化したアルゴリズムによれば、収斂の様子には差異が生じるもの、最終的な解の形はやはり同様になることが知られた。本研究では、探索が進んでブロック化をおこなった場合には、探索ステップのランダム化はおこなっていない。さらに、 I_R , I_f 等の値も十分に大きくとっているため、最終の解軌道においては、アルゴリズム間の差異があまり顕著に出てこなかつたと考えられる。

また、評価関数の値を比較してみると、解軌道の状態が多少異なっていても、この値はそれほど変わらないことが多い。これは、最適解近傍での ϕ 変化に対する S_f の感度は制約境界を侵すような変化の場合を除くと、あまり高くないことを意味している。このように、感度の小さい評価関数に対しても最適軌道が良く求まることからも、本探索法の有効性が確認できた。

3.3.2 探索の収斂性

探索の効率とそれに及ぼすアルゴリズムの影響を知るため、探索回数に伴う評価関数値の変化の様子を調べて Fig. 16 ~ Fig. 18 に示した。各アルゴリズムを用いての計算はすべて、 N , I_f , I_R 等のパラメータを変えて行なわれたが、得られた収斂特性は定性的には変らず、パラメータとしてステップ巾を変えた場合のみの結果を図示した。またステップ巾をランダム化した探索では R. R. 法と R. P. 法との間に有意の差は認められなかったため、R. R. 法による結果を図示した。

図から明らかに知られるように、各アルゴリズムの収斂性について次のような特色が認められた。

- ① 探索初期においてはランダムステップ法が一般に良い値に到達している。
- ② 探索初期においては R. P. 法の方が R. R. 法に比して良い結果を与える。
- ③ 探索末期に近づくと、固定ステップ法の方が良い結果を与える。
- ④ ステップ巾は、計算をおこなった範囲では大きくとった方が収斂は早いが、解の精度はステップ巾が小さい場合の方がよりすぐれている。
- ⑤ 多数回の試行を行なった場合、アルゴリズムの如何を問わず収斂解に対応する評価関数値は極めて近い値をとる。

Fig. 16 ~ Fig. 18 に示される結果はすべて 3.2.1 で述べた線型ペナルティを用いて計算したものであるが、ペナルティ関数の形が解ならびに収斂特性に及ぼす影響を知るために、F. S. R. R. 法においてペナルティだけを変えて計算をおこなった。この結果を Table-4 ならびに Fig. 19 に示す。

探索初期においてはペナルティの形による影響があるが、探索が進むとやはり同一の値に収斂している。

以上の様に、探索初期において有効なアルゴリズム、ステップ巾は探索末期においては逆に効率が良くないという傾向が知られた。許容される探索回数の大小に応じてこれらの選択が適

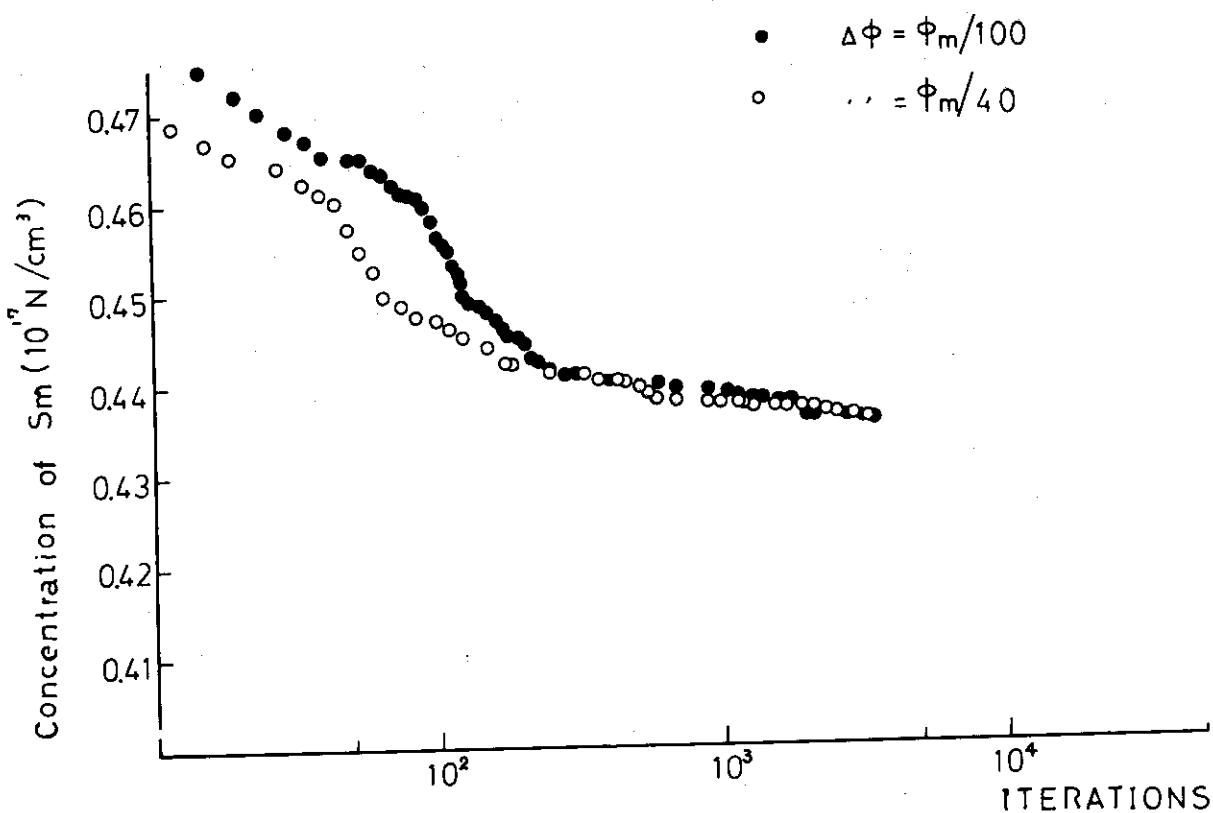


Fig. 16. Convergence property of F.S.R.P. method.

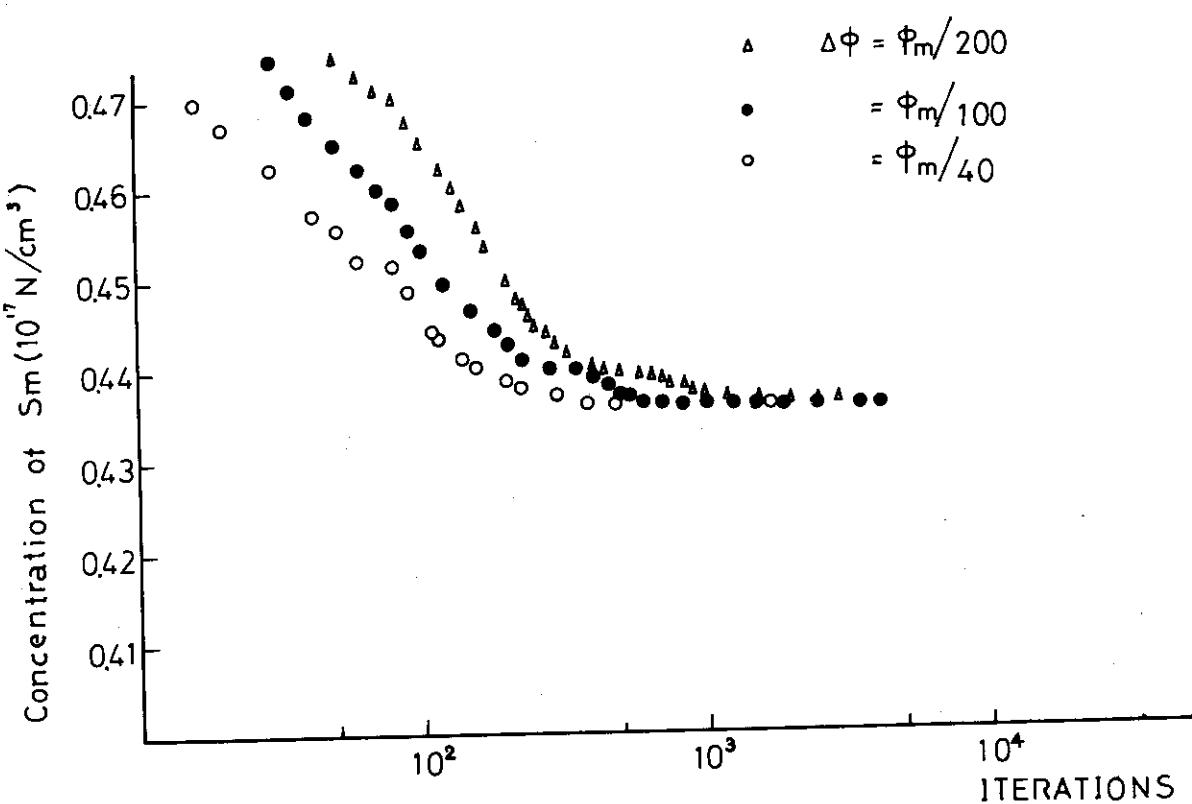


Fig. 17. Convergence property of F.S.R.R. method

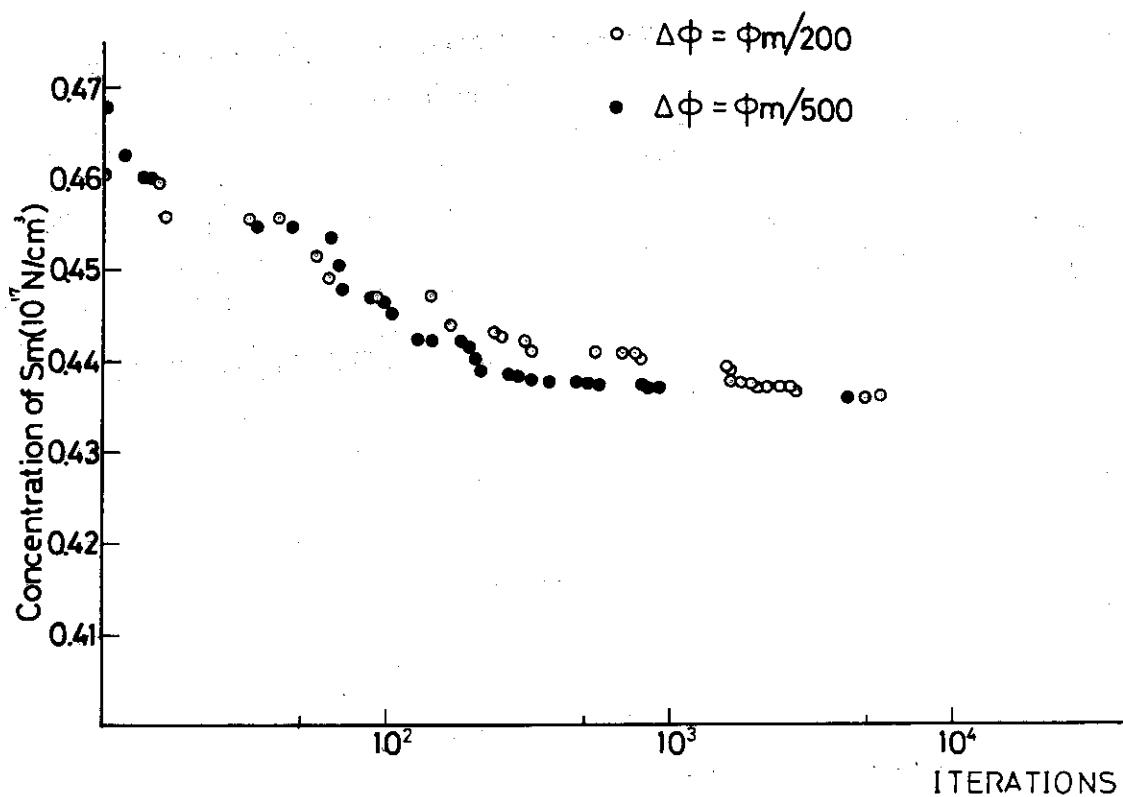
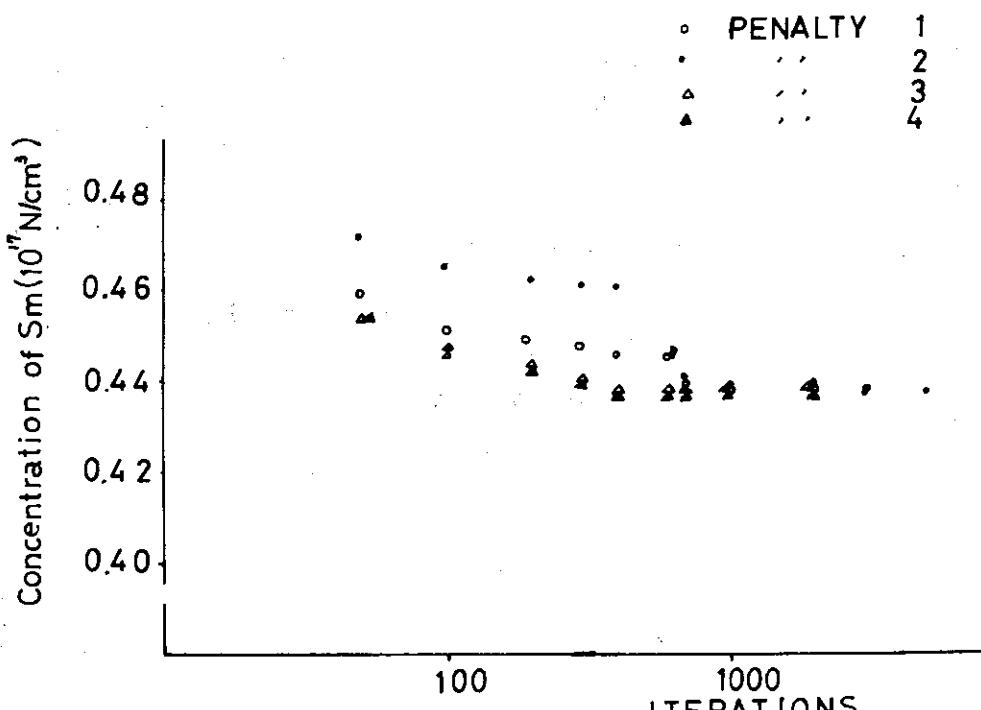


Fig. 18. Convergence property of R.S.R.R. method



Penalty 1 : Heaviside type Penalty 2 : Linear
 Penalty 3 : Inner type (1) Penalty 4 : Inner type (2)

Fig. 19. Effect of penalty function on the convergence property

正になされることは必要である。探索回数を多くとることが許されている場合はアルゴリズムやパラメータをどのようにとってもよいが、収斂特性がより滑らかなR.R.法を用いた方が局所的準最適値に探索点が束縛されてしまう可能性が小さいと考える。

Table-4 Effect of penalty function on convergence property

Penalty	Q_{10^3}	Q_1	Q_{final}
Heaviside	0.4373	0.4373	0.4357
Linear	0.4386	0.4369	0.4358
Inner - 1	0.4377	0.4376	0.4361
Inner - 2	0.4368	0.4368	0.4360

Q_{10^3} ; Value of cost function obtained by 10^3 cost evaluations

Q_1 ; Value of cost function obtained without blockwise search

Q_{final} ; Final value of cost function

R.P.法においては、改良が続く限り同一方向への探索がなされるため、探索初期（改良のなされる探索方向が多く残されている段階）においては最適解と離れる方向へ探索点が大巾に移ってしまいやすい。このため改良があっても一回毎にランダムベクトル選択をおこなうR.R.法に比して、評価関数値の低下は速やかであるが、最適解から離れた局所的極値点に到達してしまうと次の改良方向を見出すのが困難になりがちである。Fig. 16 と Fig. 17 の探索特性の滑らかさにおける違いはこの理由で生じている。それゆえ、探索回数が多く許されている際には先に述べたようにR.R.法を採用して、探索初期のステップ巾をある程度大にとることが得策と考えた。これらの結果は経験的にえられたものであり一般性をもつと断定はできないが、数多くの試行の結果から導かれたものであり、現段階では一応妥当と考えている。

3.3.3 ブロック化の効果

ブロック毎探索をおこなうに際しては、2章で述べたようにステップ巾の縮小も同時におこなっているため、この両方の効果が現われている。探索収斂特性を分析して、これらの操作が探索特性に及ぼす影響につき検討した。

この影響は、ブロック化をおこなわない場合の探索結果に端的に示される。F.S. R.R.法 R.S.R.R.法による結果をFig. 20, Fig. 21 に示した。いずれの場合も、評価関数の値は最適解にごく近い値になっているが、解の形は($t - \phi$)面, ($P - S$)面ともにFig. 14, Fig. 15 に示されたものに比べて誤差成分が多く残されている。この解を出発点として、ブロック化による探索をおこなってはじめてFig. 14, Fig. 15 に示すような最適解が得られるが、2変数ずつのブロック化をおこなった場合にはFig. 22 に示すように、最適解軌道のまわりに（特に中間部2に対応する部分において）規則的に変動するような解への収斂がしばしばみられる。全変数を4つの組に分けるブロック化ではこのような例はみられなかった。2変数だけを操作して目的関数値を低下させようとすれば、その選び方によっては無理が生じ、Fig. 22 のような結果を招きやすいはずであり、組分けの方法としては2章での予想通り、ある程度ブロックを大にした方が適当といえる。

解の形は別にして、目的関数値に及ぼすブロック化の効果をより定量的に把握するため、ブロック化前と後におけるこの値の変化、ならびにその段階で費やされた探索回数をTable-5にまとめて示した。これは t_f の値が異なる2つの場合についてそれぞれ t_c を6種類変えて計12回の探索についてまとめたものであり、本質的にはすべて異なる問題とみなして良い。ただ、初期推定解に対する評価関数値の、最適値（最終的収斂値）からの増大の程度 ($S(t_f; \phi^\circ)$) /

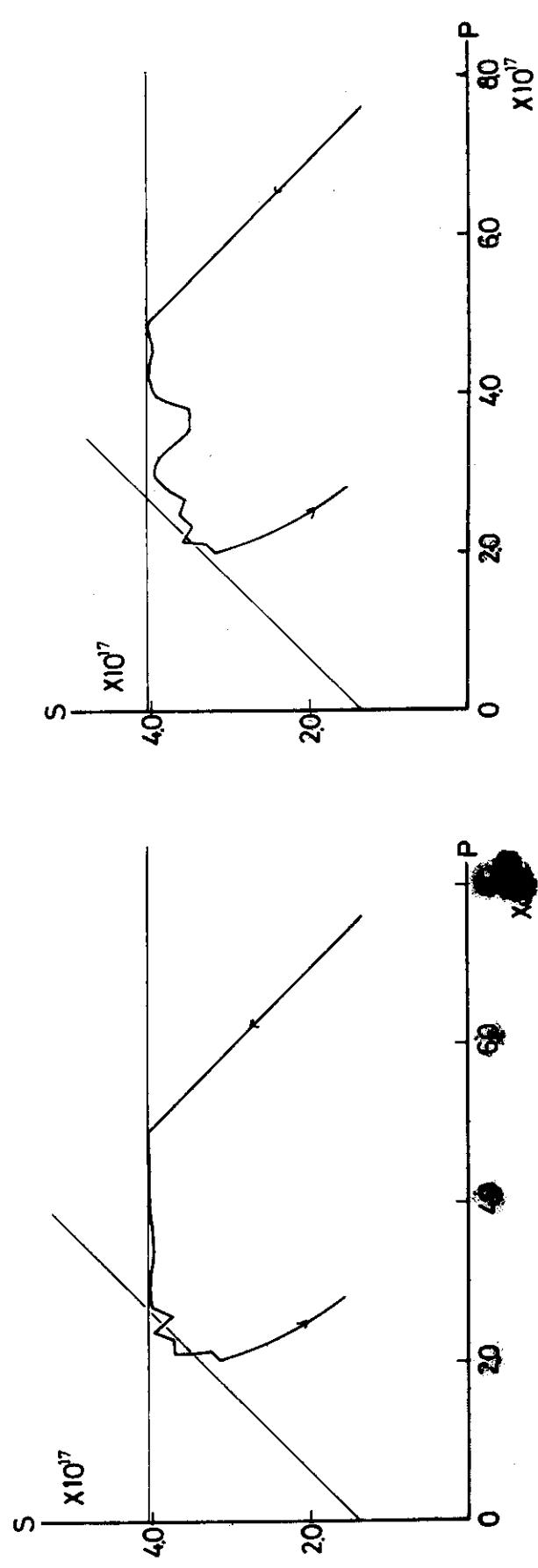
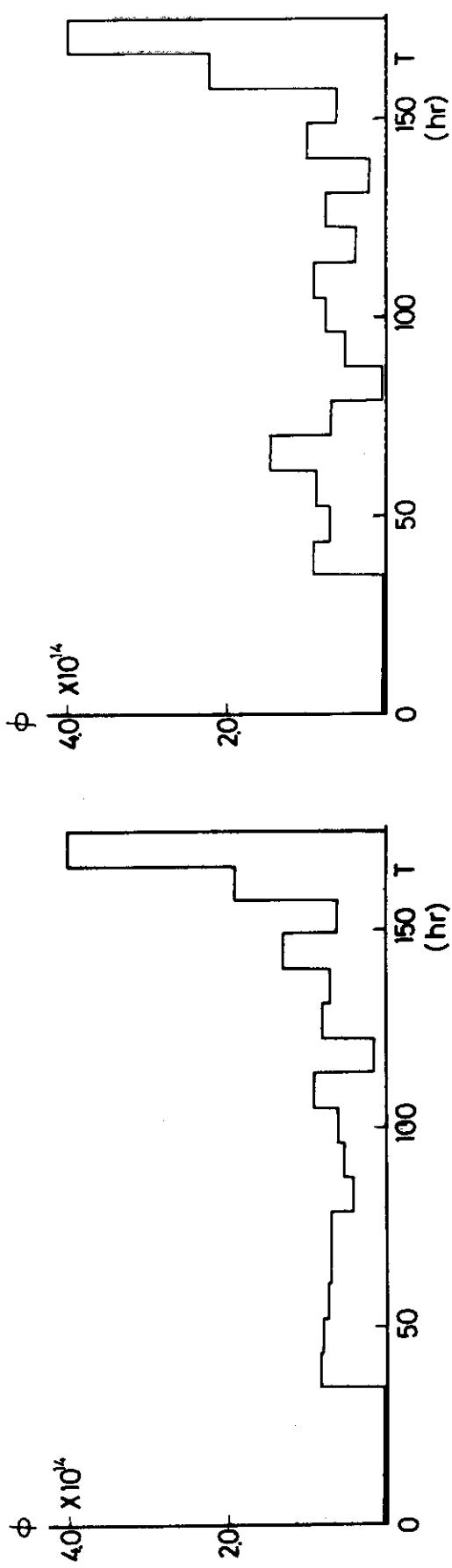


Fig. 20. Converged solution by F.S.R.P. method without blockwise search

Fig. 21. Converged solution by R.S.R.R. method without blockwise search

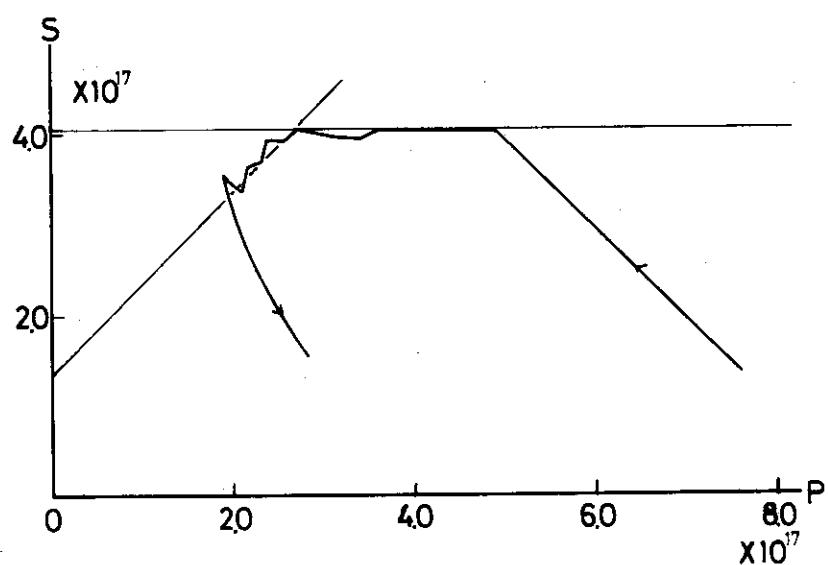
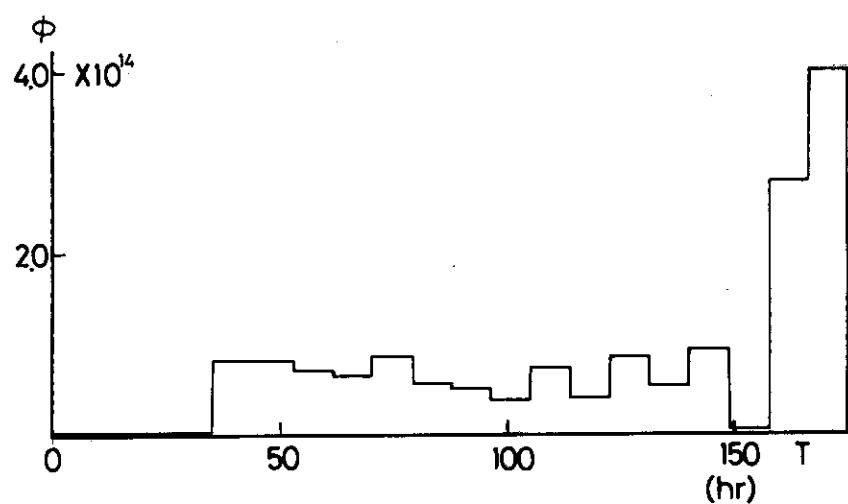


Fig. 22. Converged solution by imperfect blockwise search

Table - 5 Effect of blockwise search on convergence property

Case No.	Cost of I.G. $(\rho_{I.G.} / \rho_{opt}) - 1$	Cost at 10^3 iter $(\rho_{10^3} / \rho_{opt}) - 1$	1 st step		2 nd step		N_T
			N_1 / N_T	$(\rho_1 / \rho_{opt}) - 1$	N_1 / N_T	$(\rho_2 / \rho_{opt}) - 1$	
1	0.1260	1.29^{-2}	0.3022	6.46^{-3}	0.6769	8.08^{-4}	6781
2	0.1247	9.36^{-3}	0.4298	3.80^{-3}	0.7065	2.53^{-4}	6443
3	0.1258	7.57^{-3}	0.3338	5.44^{-3}	0.6545	7.09^{-4}	7366
4	0.1297	8.35^{-3}	0.2376	7.03^{-3}	0.6369	8.79^{-4}	6758
5	0.1320	7.11^{-3}	0.3330	4.87^{-3}	0.7006	4.06^{-4}	8283
6	0.1308	4.29^{-3}	0.3645	1.49^{-3}	0.6153	3.73^{-4}	7005
7	0.1685	7.33^{-3}	0.2744	6.37^{-3}	0.6324	9.54^{-4}	6410
8	0.1725	1.02^{-2}	0.2021	1.02^{-3}	0.5590	1.20^{-3}	6919
9	0.1783	1.10^{-2}	0.2480	9.58^{-2}	0.6446	5.64^{-4}	7330
10	0.1836	9.97^{-3}	0.3603	6.03^{-3}	0.6830	2.62^{-4}	7651
11	0.1884	5.11^{-2}	0.3276	3.40^{-3}	0.6114	7.29^{-4}	7296
12	0.1865	7.40^{-3}	0.2721	4.48^{-3}	0.5266	1.34^{-3}	8469

Table - 6 Estimation of the effect of blockwise search on convergence property

	group (I)		group (II)	
	average	deviation	average	deviation
$\Delta Q_{I.G.}$	1.28×10^{-1}	4.90×10^{-3}	1.80×10^{-1}	7.70×10^{-3}
N_T	7.11×10^3	6.53×10^2	7.35×10^3	6.95×10^2
$\Delta Q_{10^3} / \Delta Q_{I.G.}$	6.45×10^{-2}	1.70×10^{-2}	4.73×10^{-2}	1.63×10^{-2}
$\Delta Q_1 / \Delta Q_{I.G.}$	3.79×10^{-2}	1.42×10^{-2}	3.72×10^{-2}	1.38×10^{-2}
N_1 / N_T	3.34×10^{-1}	5.84×10^{-2}	2.81×10^{-1}	5.14×10^{-2}
$\Delta Q_2 / \Delta Q_{I.G.}$	4.60×10^{-3}	1.91×10^{-3}	4.70×10^{-3}	2.20×10^{-3}
N_2 / N_T	6.65×10^{-1}	3.26×10^{-2}	6.10×10^{-1}	5.24×10^{-2}

$S(t_f : \phi_{opt}) - 1$)に応じて便宜的に6例ずつ2組に分けて検討した。

実際の探索では、ブロック化をおこなった後再度ステップ巾の縮小をおこなっている。このためTable-5ではブロック化探索終了時の探索回数が全探索回数より小さい値となっている。Table-5に示された個々の探索例から多少とも一般性ある情報をうるため、平均化をおこなった結果をTable-6に示した。平均値の信頼性を知るために、個々の結果の平均値からの標準偏差も併せて示した。ブロック化前の段階で計算量すなわち探索回数は30%程度費やし、評価関数値は初期値に対して4%内外に減じているが、ブロック化後同じ程度の計算をおこなうことで評価関数値は0.5%までさらに減少させることができた(この傾向はいずれの場合にもみられるが、一般的な傾向とするには理論的なうらづけが不十分である)。この結果からもブロック化の効果は明らかであるが、見方をかえて評価関数値のみに着目するならばブロック化探索はおこなわなくとも十分ともいえる。評価関数値の数%の減少のために、その段階迄の計算量の2倍を費やすことは一般的には不適当であろう。ただし本計算例のように、解が連続変数を離散近似した問題についてのものである場合には、ブロック化をおこない詳細な解探索を遂行することによって、元の連続系の解についても有意義な情報を獲得しうる。Fig. 20, Fig. 21のような解から直ちにこれをおこなうことは先駆的知識の蓄積がなければ無理であるが、Fig. 14, Fig. 15から最適解について3.3.1に記したように推測することは容易に可能である。

本報で示す例ではブロック化はすべて、全変数をまとめて扱う探索で改良が極めて困難となる段階に達した後にはじめておこなっている。しかしながらTable-6に示されるように、探索が 10^3 回に達した段階ですでに評価関数値は全変数探索終了時の値に近接している。この段階でブロック化探索に切りかえた方が効率が良いと考えられるが、それは今後の課題である。

3.4 最大原理による考察

サマリウム毒作用の最適制御問題は、3.1で述べた問題において $t_f = \infty$ である場合については、ボントリヤーギンの最大原理による求解ができる。実際に統計的探索法を適用したのは、式(16), (17)であらわされるシステムを式(32), (33)のように近似したシステムであるが、この後者のシステムに最大原理を適用することはむずかしい。ここでは式(16), (17)のシステムを扱うことにして結果の比較は解軌道のパターンについてのみおこなうことにする。着目するシステム方程式をもう一度書く。

$$\frac{dP}{dt} = r_p \sum_f \phi - \lambda_p P \quad (34)$$

$$\frac{dS}{dt} = \lambda_p P - \sigma_s \phi S \quad (35)$$

制御終了時の目標直線を

$$S = -P + S_L \quad (36)$$

と定め、この直線上に最短時間で到達できる制御を見出すことを目的とする。このため評価関数も変ることになるが、この問題は先に述べた問題と等価になることは容易に確かめられる。式(36)の目標直線に与えられた初期点から最短時間で到達できる解の軌道が定まったとし、この時の評価関数値(制御所要時間)を t'_c とする。

他方、前述の問題 ($S(t_f)$ を最小化する場合) で、 t_c を大にとれば $S(t_f)$ の値は小さくなり、 t_c を小さく制限すれば $S(t_f)$ の値は増す。すなわち $S(t_f)$ の値は t_c に関して単調減少関数と考えてよい。したがってこの $S(t_f)$ の値がちょうど S_L に等しくなるような t_c を見出すことが可能なはずである。この t_c の値を t_c^* とすれば、この t_c^* は最短時間問題から得られた t_c' と等しくなければならず、解の形も一致するはずである。

もし $t_c^* < t_c'$ なら、最短時間問題の解が誤まっており、 t_c^* を与える解にとりかえられるべきである。またもし $t_c^* > t_c'$ ならば、 $S(t_f) = S_L$ とするために t_c^* でなく t_c' だけの制御時間があればよいから、残った $t_c^* - t_c'$ の時間、適正を制御をおこなえば $S(t_f)$ の値はさらに減らすことができる。これは S_L が $S(t_f)$ 最小化問題を条件 $0 \leq t \leq t_c^*$ で解いて得られた値であるという仮定に反していることになる。以上より、 $S(t_f)$ の値が S_L に近い時は、最短時間問題と $S(t_f)$ 最小化問題が等価になり、解の形が一致するであろうことは確かといえる。

式 (34), (35) の系に対し、最短時間問題を考えれば、H 関数は補助変数 ψ_p , ψ_s を導入して次のようになる。

$$\begin{aligned} H &= \psi_p \frac{dP}{dt} + \psi_s \frac{dS}{dt} \\ &= (r_p \sum_f \phi - \lambda_p P) \psi_p + (\lambda_p P - \sigma_s \phi S) \psi_s \\ &= \lambda_p P (\psi_s - \psi_p) + k \phi \end{aligned} \quad (37)$$

ここで k は切りかえ関数で

$$k = r_p \sum_f \psi_p - \sigma_s S \psi_s \quad (38)$$

である。制約条件として

$$0 \leq \phi \leq \phi_{\max} \quad (39)$$

$$\text{ならびに } q(S) = S - S_L \leq 0 \quad (40)$$

が与えられているが、最大原理から制約条件境界の内部では最適制御は

$$\phi = \begin{cases} \phi_m & \text{if } k > 0 \\ 0 & \text{if } k < 0 \end{cases} \quad (41)$$

で与えられることになる。また、境界 $q(S) = 0$ 上においては、最適軌道がこの上を動くなら $dS/dt = 0$ と考えられるゆえ、中性子束変化は次のように定まる。

$$\dot{\phi} = \lambda_p P / \sigma_s S_L \quad (42)$$

この他に、切かえ関数 k が連続的に 0 となる場合に対応して特異軌道を通る解が存在しうる。この解は

$$k = 0 \quad (43)$$

$$dk/dt = 0 \quad (44)$$

を解いて求まる。補助変数 ψ_p , ψ_s を消去する手続きを経て特異軌道は結局次のようになる。

$$S = r_p \sum_f / \sigma_s + P \quad (45)$$

これは (P , S) 面で傾き 1 の直線である。これに対応する制御は次のようになることは容易に導ける。

$$\dot{\phi} = 2 \lambda_p P / (r_p \sum_f + \sigma_s S) \quad (46)$$

以上から、最適解の全体は、式 (41), (42), (46) なる制御法の組合せで与えられること

になる。

3.3に述べた近似的最適解がこの条件をほぼ満たしていることは明らかであり、(P, S)面上で考察すれば他の解すなわち式(41), (42), (46)の、異なった組合せによる最適解構成は物理的にありえないことから、3.3の結果は連続系に対する理論的最適解のよい近似になっていると判断できる。

実際、最大原理に基づいて最適解を計算した結果をFig. 23に示す。この解は、システムの方程式と補助変数についての方程式を、目標直線上から逆時間方向に解いて求められたものである。統計的探索法による解は確かに真の最適解によく一致しているとみなせよう。双方の解の不一致分は、主として離散近似に起因するものであり、探索精度は十分良いと考える。

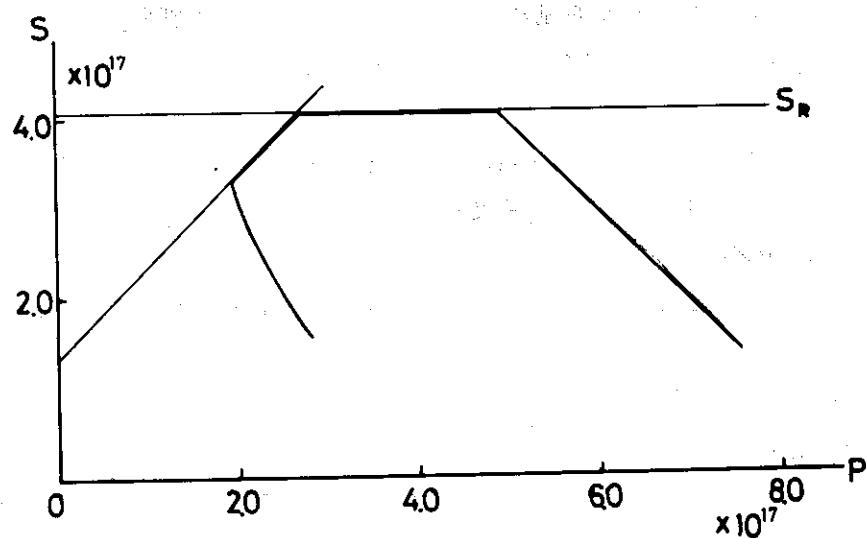
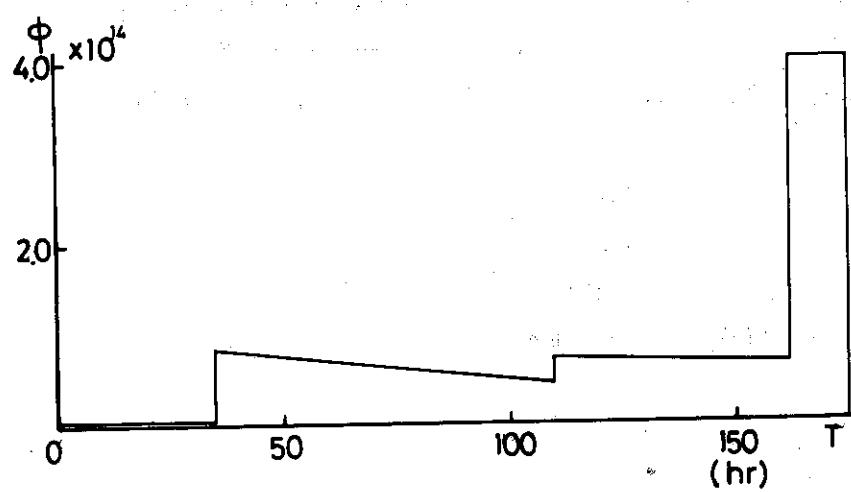


Fig. 23. Time optimal solution for continuous-time Sm-problem

4 その他の問題への応用例

4.1 クセノン毒作用最適制御問題

この問題については、これまでに多くの解析がなされており、最適解の形もよく知られている。この問題についても統計的探索法による解析を試みた。クセノンのふるまいは次式にしたがうと仮定する。

$$\frac{dI}{dt} = -\lambda_I I + \gamma_I \Sigma_f \phi \quad (47)$$

$$\frac{dX}{dt} = \lambda_I I - \lambda_X I - \phi \sigma_X X + r_X \Sigma_f \phi \quad (48)$$

ここで X, I はそれぞれ Xe-135 と I-135 の濃度、 λ は崩壊定数、 r は生成率、 σ は吸収断面積であり添字 X と I は対応する元素を示している。

$\phi = \phi_c$ なる一定値が長時間維持された時、 I, X は平衡値に達して、次のような値をとる。

$$I_{eq} = r_I I_f \phi_c / \lambda_I \quad (49)$$

$$X_{eq} = (r_I + r_X) \Sigma_f \phi_c / (\lambda_X + \sigma_X \phi_c) \quad (50)$$

中性子束レベルが 0 にされると I, X は

$$I = I_0 e^{-\lambda_I t} \quad (51)$$

$$X = -\alpha I_0 e^{-\lambda_I t} + (X_0 + \alpha I_0) e^{-\lambda_X t} \quad (52)$$

ただし $X = \frac{\lambda_I}{\lambda_I - \lambda_X}$ のように変化し、 X の値はある最大値 X_m まで増大した後に減衰する。ここで、最適化の目的を "指定された時間 t_f における X の値の最小化" と定める。これ以外にも種々の最適化目的が考えられるのはもちろんであるが、今後の研究方針との関係から、3章のサマリウムについての問題と同じ形の評価目的量を考えた。

この量は式 (52) から直ちに

$$X(t_f) = -\alpha I_0 e^{-\lambda_I t_f} + (X_0 + \alpha I_0) e^{-\lambda_X t_f} \quad (53)$$

と書くことができる。

サマリウムの場合と同様に、クセノン濃度は炉停止運転中、あるレベル以下に保たれていくなければならないし、また、中性子束レベルもその最大値が制限されることが必要である。これらから、制約条件として以下の式が満たされねばならない。

$$0 \leq X \leq X_L \quad (54)$$

$$0 \leq I \quad (55)$$

$$0 \leq \phi \leq \phi_{max} \quad (56)$$

この問題は、サマリウム問題におけると同様、等価的な最短時間制御問題におきかえることが可能である。

この変換された問題は、ポントリヤーゲンの最大原理を用いて解かれる。解法の詳細は省略するが、Fig.24 に示すような結果が得られる。すなわち、最適炉停止プログラムは①完全炉停止 $\phi = 0$ 、②緩やかに変化する中間出力部、③最大出力部 $\phi = \phi_{max}$ の3段階より成っている。

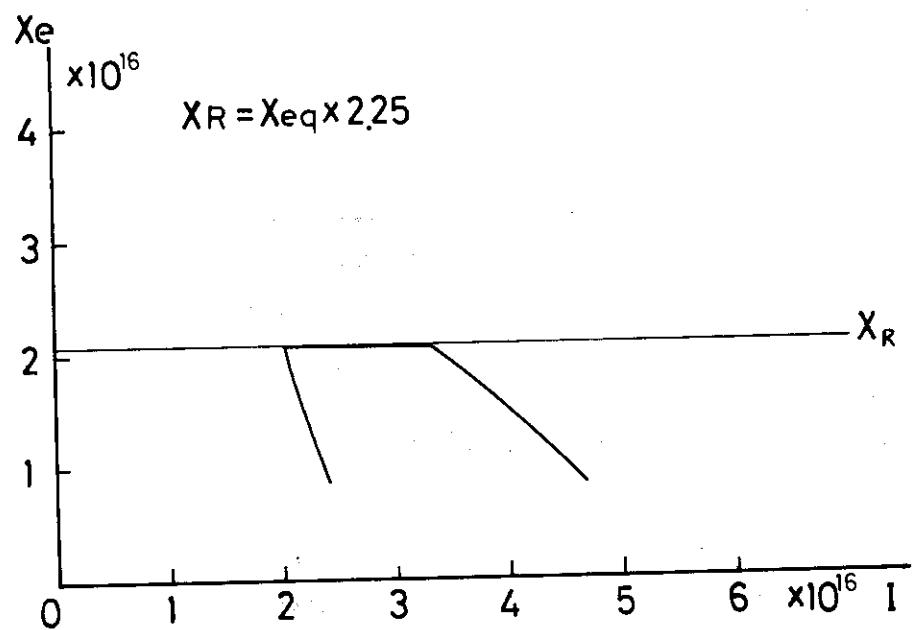
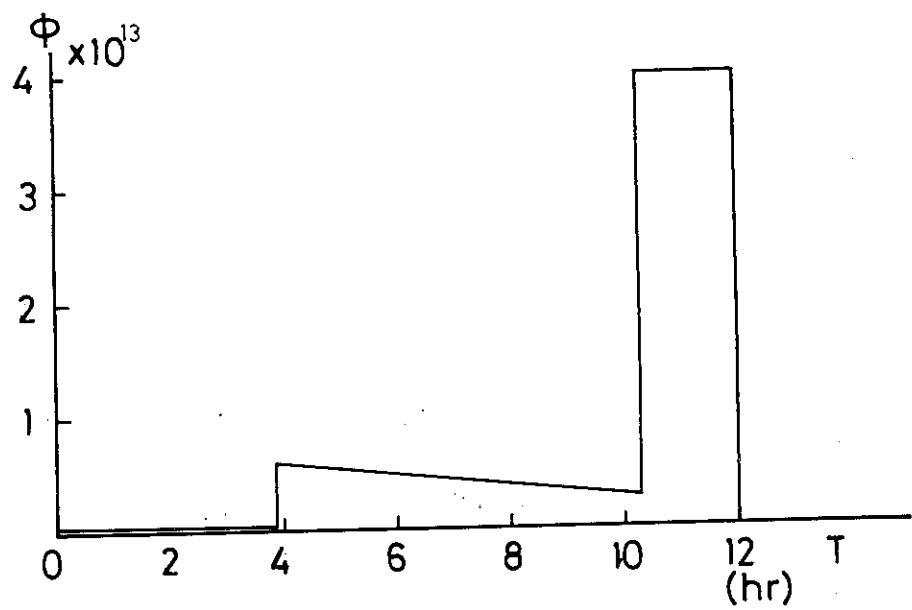


Fig. 24. Time optimal solution for continuous-time
Xe-problem

対応する I, X のふるまいは、これらを両軸とする位相面上に示されており、(2)の中間出力部は、 X の値が制約値 X_L をとり続けている状態に対応していることが明示されている。これから、もしも X_L の値が充分大であるなら（反応度に余裕があるなら）、最適炉停止プログラムは、(1)と(3)の部分のみから構成されるのであろうことは容易に推測されるが、実際に最大原理からもこれを確認することができる。

この問題を3章におけると同様、時間的に離散化近似し、統計的探索法を用いて求解を行なった。得られた解をFig 25～27に図示する。制約値 X_L を、平衡値 X_{eq} の3倍、2.5倍、2.25倍にとった時、最適解が上に述べた事情によって、その様相を変えていることは予想と一致している。この探索においては、計算量が余り大きにならないよう、探索回数を制限したため、3章の場合に比して $1/3$ 以下の探索回数しか費していない。解の特性を把握するのには、この結果でも十分であるが、理論的厳密解により近い形の解を得るには、時間メッシュの数 N を大にとると共に、更に多数回の探索を行なわねばならない。Fig. 25～27のいずれの場合においても、(1)あるいは(2)の部分から(3)に移行する際にFig 24にみられるような速やかな形がえられなかつたことは、探索回数が少ないとよりむしろ離散化がやや粗かつたことによるものと考えられる。

これらの計算は、いずれも F.S.R.R.アルゴリズムにより行ない、ペナルティ関数としてはヘビサイド型ペナルティを用いたが、3章の結果からみて探索回数が多数回許されているならいずれのアルゴリズム、ペナルティを用いても同様の結果が得られるものと思われる。

4.2 中性子束分布最適化問題

統計的探索法の他の適用例として、空間的な中性子束分布を最適化する問題をとりあげてみた。最適化の目的としては、炉心内全出力の最大化を考え、制御量としては制御材断面積の空間的分布を考えるとこの問題の数学的記述は次のようになる。簡単のため、空間的には一次元板状炉、反射体なしとし、中性子束はエネルギーを一組に近似すると拡散方程式は

$$D\nabla^2\phi + (\nu\Sigma_f - \Sigma_a - \Sigma_c)\phi = 0 \quad (57)$$

と書け、境界条件は

$$\phi(0) = 0 \quad (58)$$

$$\frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=d} = 0 \quad (59)$$

と書ける。

最適化対象としては

$$J = \int_0^d \Sigma_f \phi(x) dx \quad (60)$$

制約条件としては

$$0 \leq \phi(x) \leq \phi_{max} \quad (61)$$

$$\Sigma_{cL} \leq \Sigma_c(x) \leq \Sigma_{cG} \quad (62)$$

が考慮されねばならない。

この問題では最適化対象 J が、空間的な積分形式であり、状態変数の各時点における値がそれぞれ寄与するという性質を有している。これに対して炉停止最適化問題では状態変数の最終

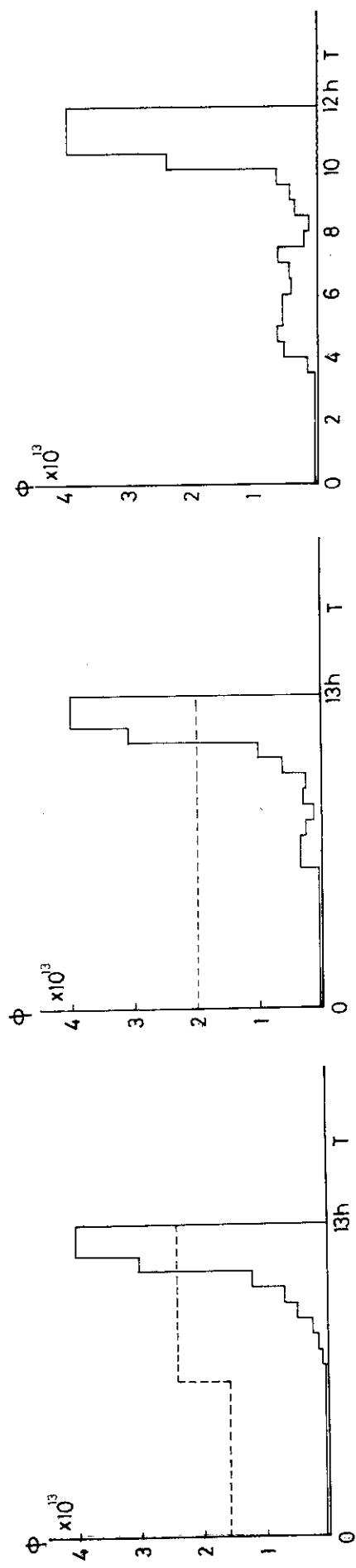


Fig. 25. Optimal solution obtained by F.S.R.R. method for minimizing X_e peak after shutdown ($X_R \leq X_{eq} \times 3.0$)

Fig. 26. Optimal solution obtained by F.S.R.R. method for minimizing X_e peak after shutdown ($X_R \leq X_{eq} \times 2.5$)

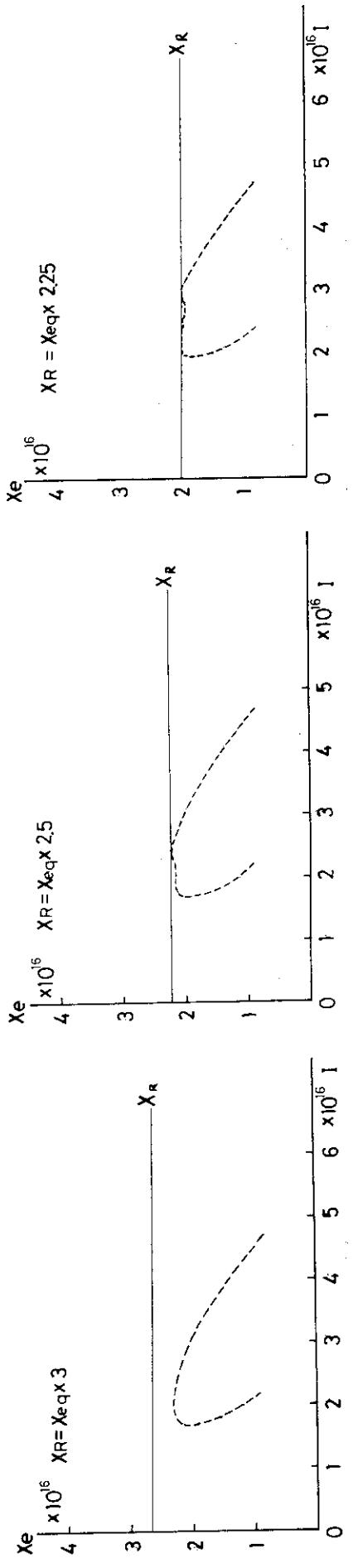


Fig. 27. Optimal solution obtained by T.S.R.R. method for minimizing X_e peak after shutdown ($X_R \leq X_{eq} \times 2.25$)

値（制御終了時点における値）のみが $S(t_f)$ の値を支配するという点で本質的な差異があり、これが探索特性に影響をもつこともありえよう。

この問題は次のように書きかえることができる。

$$\frac{dZ_1(x)}{dx} = Z_2(x) \quad (63)$$

$$\frac{dZ_2(x)}{dx} = -B^2 Z_1(x) + B^2 u(x) Z_1(x) \quad (64)$$

$$J = \int_0^d \Sigma_f Z_1(x) dx \quad (65)$$

$$0 \leq Z_1(x) \leq Z_{1\max} \quad (66)$$

$$u_{min} \leq u(x) \leq U_{max} \quad (67)$$

ただし、ここで

$$Z_1(x) = \phi(x), \quad X_2(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$B^2 = (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) / D, \quad u(x) = \Sigma_c(x) / (\nu \Sigma_f - \Sigma_a)$$

である。このように書きかえた問題は最大原理によって解くことができて、その解は次のように与えられることが知られている。¹⁰⁾

$$\Sigma_c(x) = \begin{cases} \Sigma_{c\min} & 0 \leq x \leq x_1 \\ \nu \Sigma_f - \Sigma_a & x_1 \leq x \leq d \end{cases} \quad (68)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_{max} \sin(B\sqrt{1-u_{min}}x) & 0 \leq x \leq x_1 \\ \phi_{max} & x_1 \leq x \leq d \end{cases} \quad (69)$$

$$x_1 = \pi / 2B\sqrt{1-u_{min}} \quad (70)$$

すなわち $x=0$ から x_1 までは Σ_c はその最小値をとり、 ϕ の値が増加して ϕ_{max} に達したら、以後 $x=x_1$ から $x=d$ までは Σ_c を $\nu \Sigma_f - \Sigma_a$ の値に保ち ϕ を ϕ_{max} に保つのが最適制御である。この問題を数値的に解く場合、空間座標を離散化し、各離散化座標点 x_i での I_c の値を変化させて J の値を調べるのが常道であるが、ここでは逆に中性子束の値 ϕ_i ($= \phi(x_i)$) を変化させることにした。これにより拡散方程式を解く必要がなくなり計算時間が大巾に短縮できる。

この場合、制御変数 ϕ_i を指定すれば、それに対応して

$$\Sigma_{ci} = \nu \Sigma_f - \Sigma_a + D\nu^2 \phi / \phi_i \quad (71)$$

ならびに評価目的量

$$J' = \sum_{i=1}^N \phi_i \quad (72)$$

が定まることがある。ただし、 Σ_{ci} の値が制約式 (62) を満足しない場合には、 J' の値にペ

ナルティが加えられることはもちろんである。

この問題を F.S.R.R 法を用いて解いた結果の代表的な例を Fig 28, 29 に示す。解析解にごく近い解がえられ探索の精度が良いことがこの場合にも確認できた。収斂までに必要な探索回数は $N = 16$ で $2 \times 10^3 \sim 4 \times 10^3$ 回である。この値が多少大きいのは、探索アルゴリズムにおいて ϕ_i の変動が空間的に矩形波状になっているため式(71)右辺第3項の絶対値が大きくなりすぎ、むだな試行が多くなるためである。また Σ_c の形が $x=0$ の近くでやや不正確になるのは、この部分では ϕ の値は小さく、そのため上記効果がより大きくなることに加え、 J' の値への寄与は当然小さいためと考えられる。これと対照的に $x_1 \leq x \leq d$ の領域での中性子束平担分布はいずれの場合も極めて良く探索されていることからも、 $x=0$ 近傍での不正確さは、探索法よりむしろ問題の性質それ自体によるものと考えられる。

$x_1 \leq x \leq d$ の領域での探索結果の良好さは、この他に先に述べた評価目的の特性にもよるものであろう。

この問題では ϕ_i の値を変化させれば、その評価関数への寄与は、他の ϕ_j ($j \neq i$) との相互干渉なしに直ちになされる。 Σ_{ci} を通じてのペナルティも ϕ_i とそれに相鄰する数点の ϕ_i によってのみ定まる。これに対して、炉停止最適化問題では、すべての ϕ_i は結局 ϕ_i ($i > i$) の効果と共に P_N , S_N の値に作用することで、その効果があらわれ、考慮されている。ペナルティへの寄与にしても事情は同様である。このように大巾に性質の異なる問題に対して、全く同じアルゴリズムによりほぼ同程度の計算量で解が探索でき、かつその精度が良いということは1章に述べた統計的探索法の長所、特質とよく合致しており、予想を裏付ける結果といえる。

ただし、統計的探索法を中性子束分布最適化に用いる際の定式化の段階、すなわち媒質の物理量と中性子束値のいずれを制御変数（操作量）にとるかの決定法について一般的に結論を下すのには、現段階で充分な情報はえられていない。さらに、この決定は、個々の問題設定により大きく影響をうけることも考えられ、今後の検討が必要である。

4.3 Rosenbrock のテスト関数¹¹⁾

これまで解いてきた問題はすべて常微分方程式で表わされるシステムを離散近似したものであった。このことが問題の特性を限定し、統計的探索法の精度や収斂性について片寄った情報に基づく判断をする危険性をなくするために、全く異なったタイプの問題についても本探索法の適用を試みた。ここで扱う Rosenbrock のテスト関数は次式で表わされる。

$$J = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (73)$$

これは最も広く用いられるテスト用関数で $(1, 1)$ に最小値 0 をもち $x_2 = x_1^2$ にそって急な谷を有する。

この解探索は初期点のとり方にに対する依存性が強く出ると予想されたので、初期点をいろいろ変えて探索を行なった。探索アルゴリズムとしては 2 章に述べた 4 種のすべてを用いたが、当然のことながら変数のプロック化は行なっていない。

この問題の解探索結果では、固定ステップアルゴリズムがむしろ効率が悪い傾向が認められたことは注意に値する。この問題のように急な、かつ曲った谷底に最適点が位置する場合には、座標軸方向かそれと 45° の方向にしか探索がなされない固定ステップ法では、ステップ巾

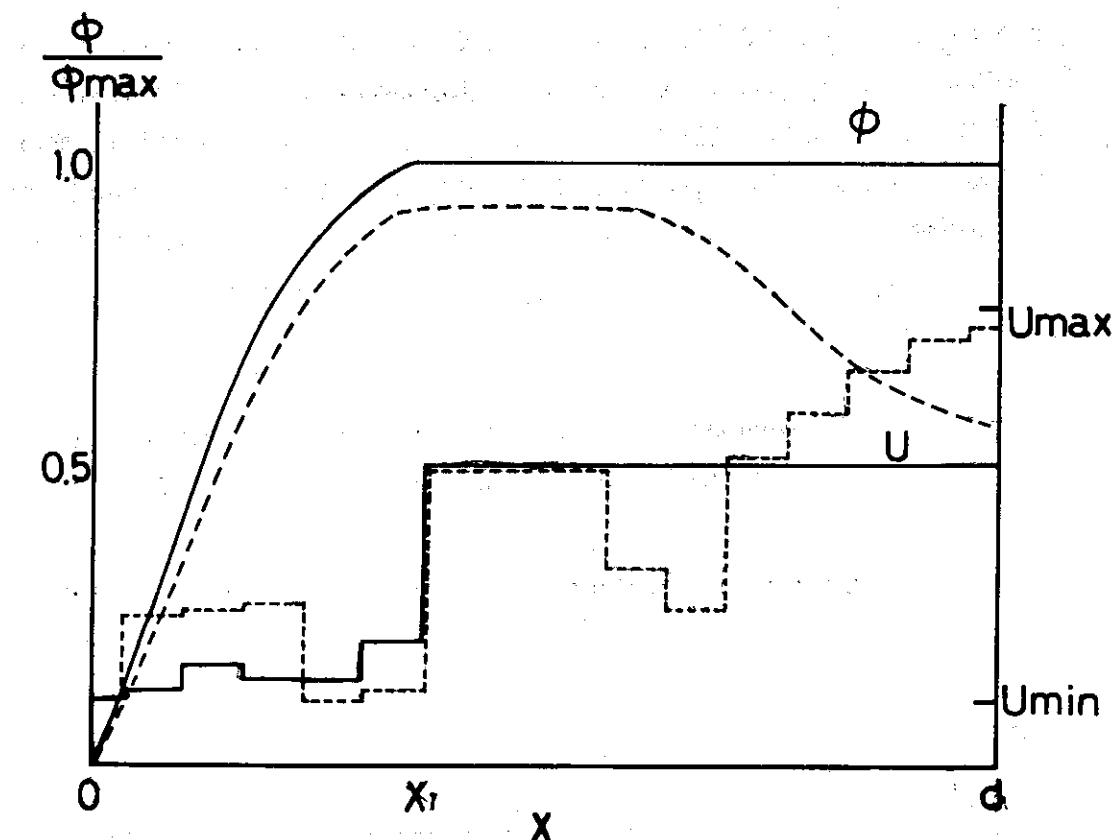


Fig. 28. Optimal solution for power maximization problem
(case 1)

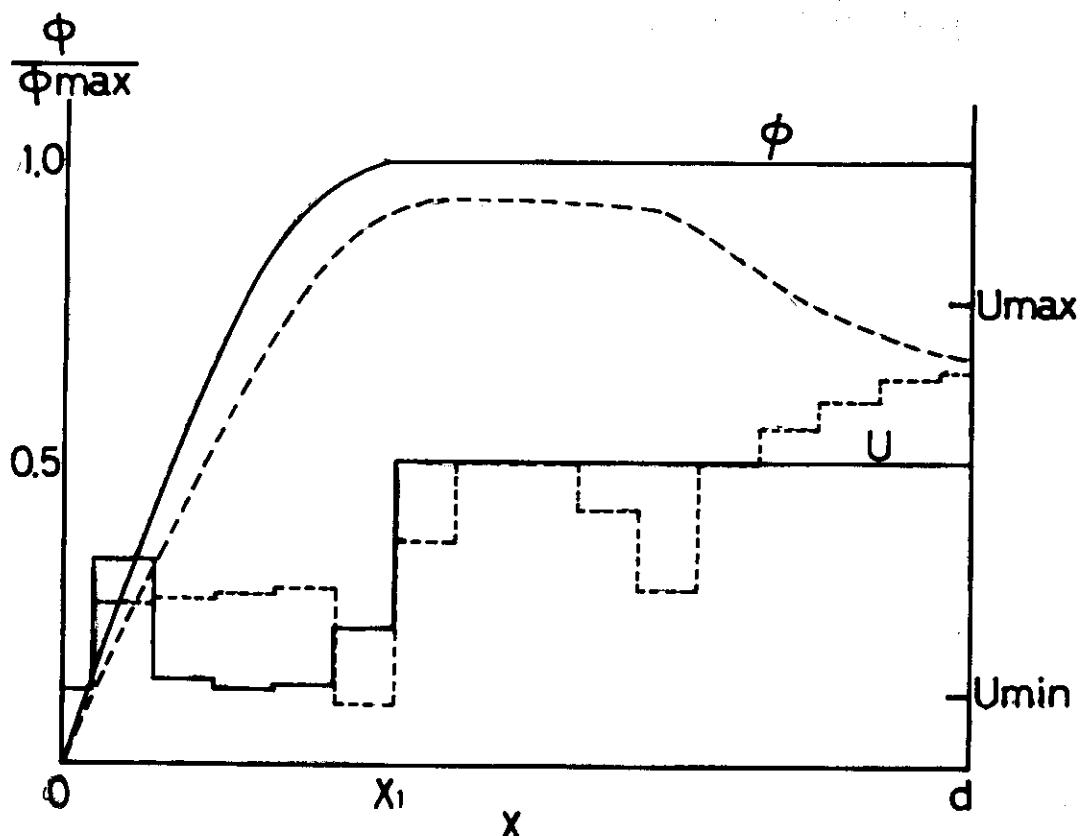


Fig. 29. Optimal solution for power maximization problem
(case 2)

をよほど小さくとらないとすぐ改良方向が見出せなくなる。このため、ランダムステップを用いた探索の方がより効果的になってくるのである。R.S.R.R法の適用結果をTable-7に示す。比較のため確定論的手法を用いて他の著者が行なった探索結果も示した。10³回程度の探索で、比較的良好な解が見出されているが、初期点によっては極めて少ない回数(≤200)で探索が成功している場合もあることは本手法の1つの特色を示すものといえる。ここで得られた結果は、最適点近傍での探索について有意義な情報を含んでおり、ステップ巾決定について今後の考察の必要性を示唆していると考える。

Table 7 Comparison of the effectiveness of search techniques
for finding the optimum of Rosenbrock's function

Method	R.S.R.R. average	R.S.R.R. best	P.S.	C.G.	V.M.
J _{final}	2.5×10^{-4}	2.4×10^{-10}	1.25×10^{-3}	2.16×10^{-5}	6.27×10^{-7}
J < 10 ⁻³	430	130	>200	>50	>50
J = J _{final}	600	138	250	80	80

P.S. ; pattern search

C.G. ; conjugate gradient method

V.M. ; variable metric method

5. 手法に関する考察

5.1 収斂解の最適性

統計的探索法によって得られた解の最適性については連続系についての理論解との関連においては定性的に確認してきたが、離散近似された問題そのものに対する最適性の吟味が必要である。離散化した問題の解は、原問題の解とは必ずしも一致しないゆえ、収斂解の最適性は前者との比較においてなされるのが妥当である。

この点に関し特にサマリウム毒作用最適制御問題に着目して検討を行なった。この問題について得られた収斂解は理論解と殆んど一致しており、この一致している部分についてはこれが離散化近似問題の厳密解とみなしてもよいと考える。収斂解の代表的な例をFig.30に示す。理論解と異なっている部分は、図中の ϕ_a , ϕ_b 値（位相面上では、特異軌道からのずれ）である。これらの値を変化させて、それに伴う $S(t_f)$ の値の変化を調べた結果をFig.31に示す。この結果から数値的には収斂解の ϕ_a , ϕ_b 値が最適であることが確認できた。離散化が $N=20$ 程度でなされている場合には、 ϕ_a , ϕ_b が収斂解のような値をとることは止むえないと考えられる。Nの値を現実的な範囲で大きくとっても、 Δt ($\equiv t_c/N$) がちょうど最大出力運転時間の整数分の1にならない限り特異軌道から全出力軌動への移行点ではFig.30と同様のずれが生じることになる。特異軌道に対応する中性子束変化パターンも連続系に対する解のまわりで変動しているが、この点についての検討は今のところ充分ではない。しかしながらFig.31の結果からも推定されるようにこの部分の感度は余り高くないことを、 $\Delta\phi$, Δt の値がある有限な大きさをもつことを考え合わせれば探索された収斂解は離散化問題の最適解であると判定して良いと考えた。もちろんこのような論法では厳密に最適性を検証したことにはならないが、一次元探索、二次元探索の範囲では収斂解が最小な $S(t_f)$ 値を与えていることは検証できたわけであり、少くとも勾配法に類した方法（共役勾配法、最急降下法等）やパターンサーチ法などで見出しうる「最適」点と同程度の最適点はえられたものとしてよいと考える。

5.2 確定論的手法との比較

サマリウム毒作用最適制御問題についていくつかの確定論的手法による最適解探索をおこなった。5.1でも述べたように多くの確定論的探索法では、改良点の探索は本質的には一次元的探索によりなされるとみなすことができる。たとえば勾配法などを用いる際に数値的に微係数が計算されるが、この時は変数の一つずつに逐次微小変動を与えて対応する評価関数変動から近似的に微係数が求められる。このため多数個の変数を同時に変動させることによって始めて改良方向を見出しうるような状態の点迄即に到達されてしまっているような場合、それ以後の探索が極めて困難になり探索が不完全なまま終了する可能性が強いことは当初から予想された。手法としては単一変数逐次変化法（univariate method）、固定ステップ勾配法の2つをとりあげた。前者における探索アルゴリズムは、変数成分 x_i の1つずつに逐次振動を与え改良がなされればその振動値に x_i の値を変えるが改良がなければ元の x_i の値のままを保ち x_{i+1} の値に振動を与えていくという手続きのくり返しである。この方法は評価関数の形が单峰性の場合などには充分適用性があることが知られている。

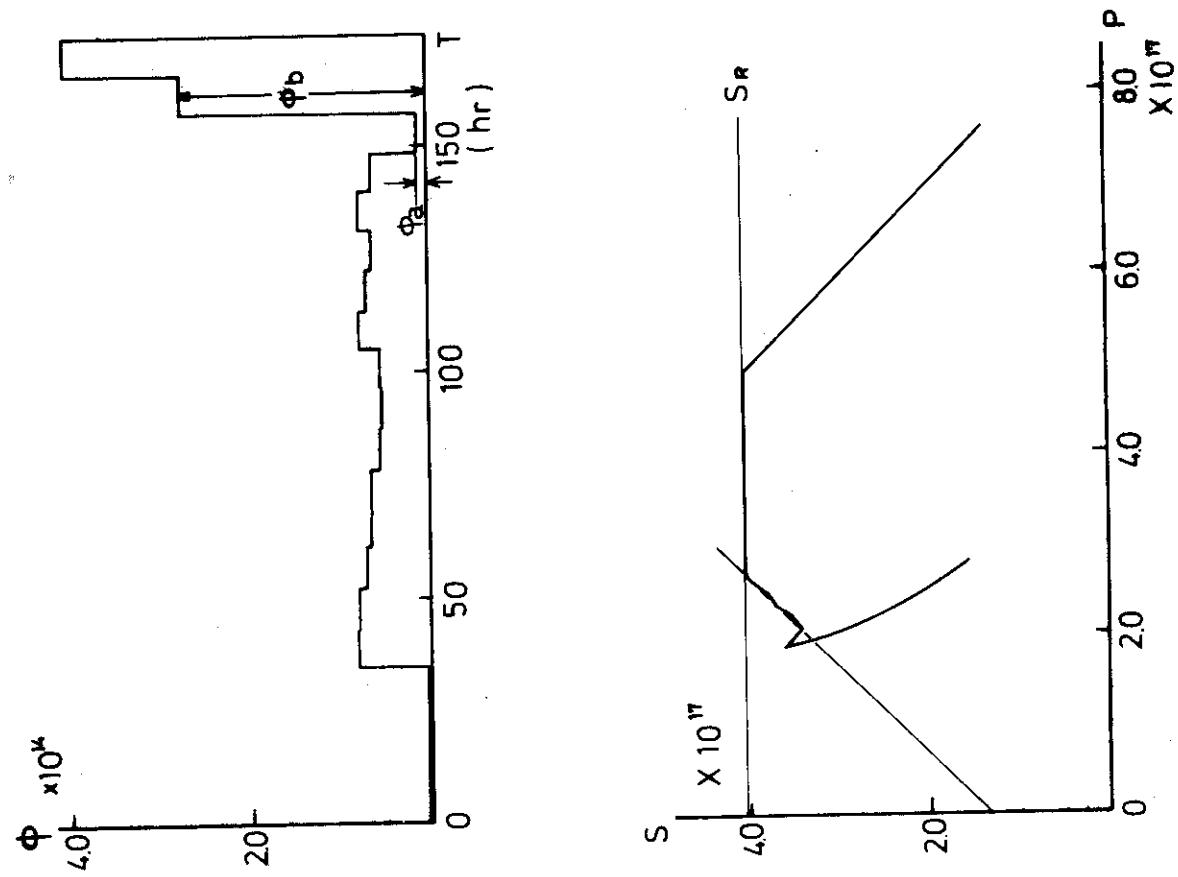


Fig. 30. Example of the converged solution for the system with restricted control action (stepwise control)

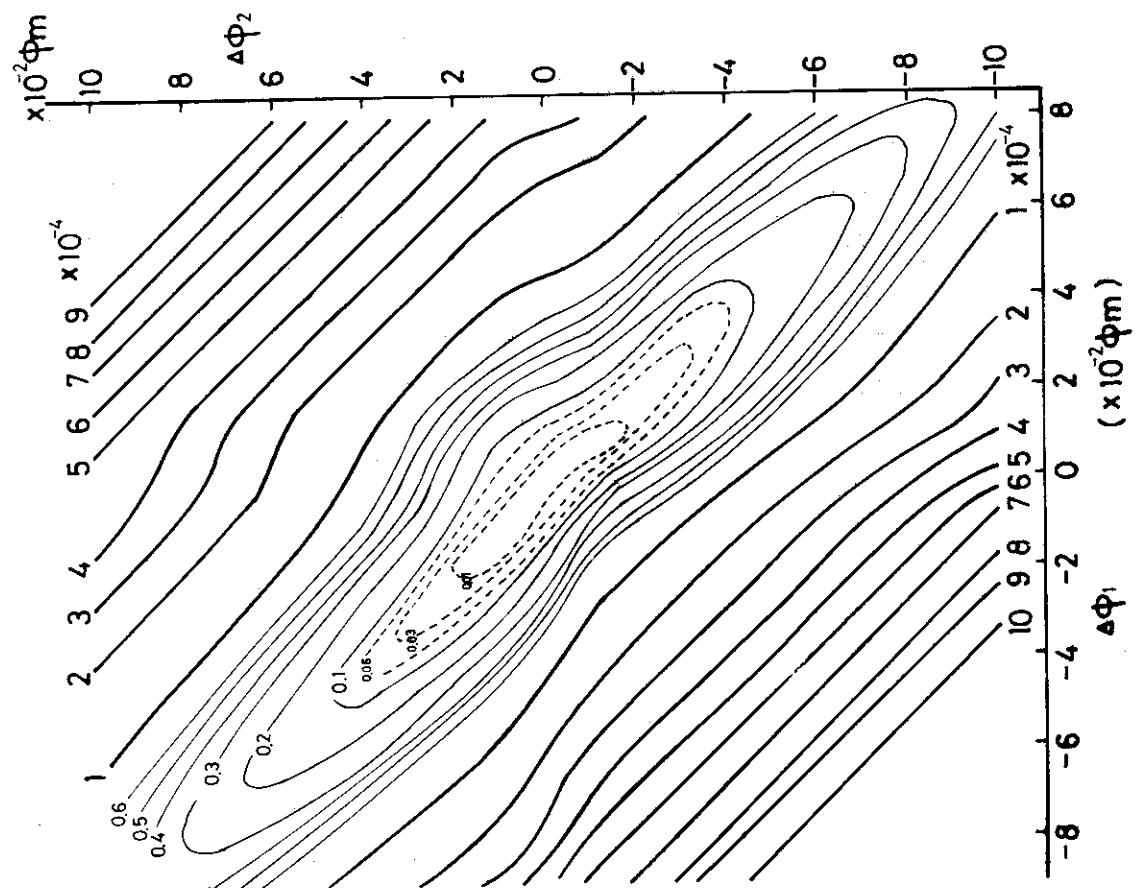


Fig. 31. Numerical examination of optimality concerning the value of ϕ_a and ϕ_b

後者においては、進み巾は固定されており進むべき方向のみが勾配の正負により決定される。すなわち

$$x_i = x_{i\text{opt}} - \delta \cdot \text{sgn} (\partial Q / \partial x_i) \quad (x_i = x_{i\text{opt}})$$

である。各 x_i について微分をとった後、振動は全 x_i に同時に与えられる点が前者との大きな違いである。探索の終了は前者ではすべての要素について改良がなくなる度に振動巾を小さくしてゆきこの巾が設定値以下になった時をもっておこなわれる。後者では $\partial Q / \partial x_i$ がすべての x_i について設定値以下になった時、あるいは $\partial Q / \partial x_i$ が負になる方向に進んで改良がみられなくなるたびの値を小さくしこの値が設定値以下になった時に探索が打ち切られる。これらの方法を用いることにより得られた収斂解の例を Fig. 32, 33 に示す。いずれの場合も最適解とはかなり異なった段階で探索が終了している。それぞれのアルゴリズムで探索がこのような形で終っている理由は次のように解釈できる。

单一変数逐次変化法の場合、変数振動は ϕ_1 から順次なされる。このため一度 Fig. 32 のような状態に達してしまうと解の前半は改良の余地があるにもかかわらず、後半の境界上軌道があるため前半を改良することができない。実際に Fig. 32 で ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 等の値は 0 となった方がより最適解に近い形であることもかかわらず、これらを 0 にすれば S の立上がりが早くなり制約条件が何ステップか後の段階で侵されることが明らかに知られる。逆に ϕ_1 から順に逐次振動を与えていっても同様な事態が生じることはもちろんである。

固定ステップ勾配法の場合は全体として中性子束の時間的変化が滑らかな形で探索が終了している。これは進み巾を各変数について一定にとり勾配の値には影響されないような形にしているためと思われる。

本来は勾配の値に応じて進み巾がとられ対応して各変数はそれぞれ異なる値をとることになるが、ここで用いた方法では符号が同じ勾配をもつ変数はすべて同一の変動をし結果的に Fig. 33 にみられるような変化パターンをとりやすい。この場合も境界軌道が部分的にせよ得られてしまえばそれ以後の改良が困難になることは容易に理解できる。このように確定論的手法においては多少とも問題が複雑になると探索が不十分で終了しがちな傾向が知られた。数学的には変数相互の干渉効果が強い問題、物理的には $t = t_1$ で行った操作の最終的効果が $t \geq t_1 + \tau$ において現われてくるような性質の問題については、多くの確定論的手法の適用性は大きく損なわれることが上の結果からも推測できる。

統計的探索法はこのような場合にも良い精度で近似最適解を与える上に 4.3 で述べたように確定論的手法が比較的適用しやすい問題についても実用的な探索回数の範囲で最適解を与えており (Table 7 参照)，非確定論的手法の有効性は明らかである。たとえ確定論的手法を主技法として各種最適化に用いていく際にも何らかの偶然性 (randomness) をアルゴリズム中に組込んでいくことが必要かつ効果的であろう。

5.3 今後の改良方針

本研究で用いた手法は、ごく基本的な探索法に若干の改良を施したものであり修正を行う余地は多く残されている。探索アルゴリズムの基本ロジックとしては本報に述べた 2 つの他にも種々のものが考えられるが¹⁾ それらの大部分は Random Reward 法、Random Punishment 法のい

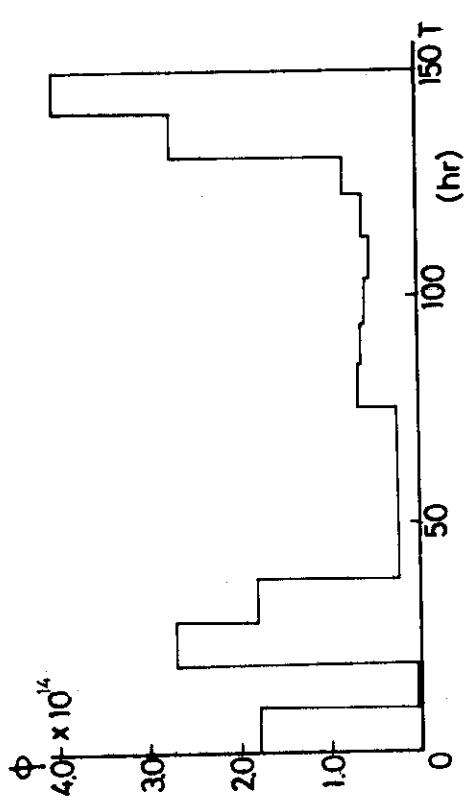


Fig. 32. Solution obtained by univariate search method

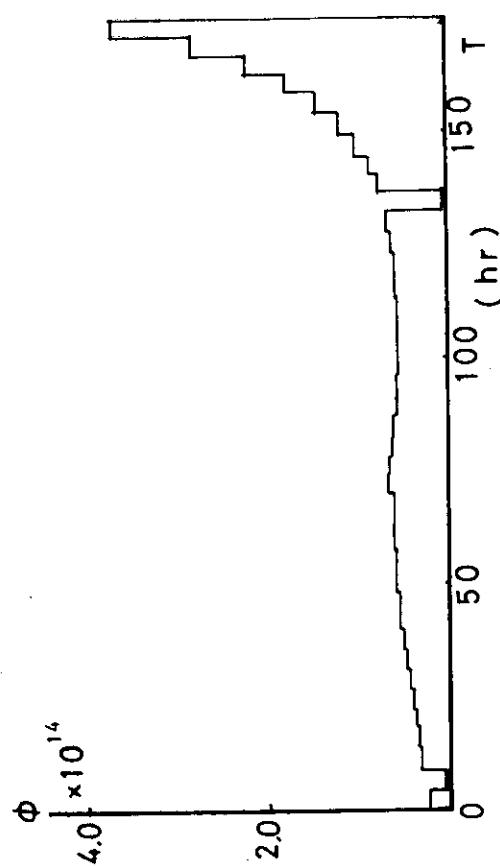
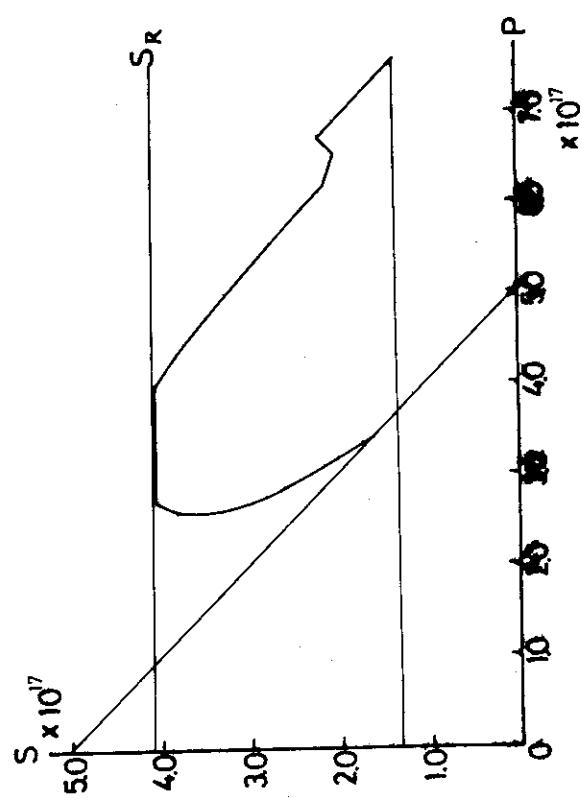


Fig. 33. Solution obtained by fixed step gradient method



すれかに近い特性をもち探索の効率、精度等には大きな違いはないと考えられる。むしろパラメータ Δt , $\Delta\phi$ 等の値を適正にすることが 2 章での考察などから考えて望ましい。いずれのパラメータも小にとれば精度は向上するが探索効率は低下するであろう。大にとれば逆の結果をまねくと思われる。それゆえこれらのパラメータには問題に応じた最適値が存在するはずであり何らかの手法でこれを見出しが出来れば探索の効率を増大させることが可能である。簡単な評価関数についてはこれを行なった例よりも知られているが¹²⁾ 本報でとり上げたような複雑な問題に対しての検討は今後の課題である。

Δt , $\Delta\phi$ の値を設定することは単に探索アルゴリズムのパラメータの設定としてのみならず、問題のカテゴリーを設定するという意味をもつ; Δt の値をごく小さくとて複雑な「最適」解が得られたとしてもそのような出力変化パターンをとることが運転上の便宜等から望ましくなく評価関数値も Δt を大にとった簡単な「最適」解に比して余り差異がないなら後者の解の方が現実的であることはいうまでもない。しかしながらこのような判定は最適解探索がなされた後で始めて可能なわけであり先駆的にはなされえない。

これらのパラメータの決定を単に探索精度や効率の観点からのみ行なってはならないことは今後の改良の際には十分に配慮すべき問題と考える。

本報で用いた手法は 5.2 で述べたように確定論的手法では探索が停止してしまうような状態点からも改良方向を見出しうる。この意味ではより大域的最適点に到達しやすい手法といえる。しかしパラメータ空間で大きくへだたった点に別の最適点が存在する場合にはこれを見出すことはむずかしい。本手法のままでも第一段階で $\Delta\phi$ を大にとつておけば大域的最適点に到達する確率が大になるがより確実にこれを行なうためには次のような手法が必要である。

- i) 現在のアルゴリズムで局所的最適点に達した後 $\Delta\phi_i$ の値をランダムに変え改良点の有無を調べる。もし改良点があればその点から再度元のアルゴリズムで探索を行う。
- ii) 始めから大域的探索アルゴリズム⁴⁾ を用いる。

この他に初期点を変えて現アルゴリズムをくり返し用いる考え方もあるがこれは i) に比して効率が悪いと考えられる。今後上の 2 つの方向について検討したい。

6 結 論

非確定論的手法であるところの統計的探索法を用いて若干の例につき最適解探索をおこなった。例としてとりあげた問題は、多変数、非線形システムの多峰性評価関数の最適点探索問題とじでの性質をもち、この意味で、一般性のある例題である。得られた結論を以下に記す。

(1) 統計的探索法により、精度良い最適解探索が達成できた。必要な試行回数も実用的な値の範囲内であった。

2) 確定論的手法では、多くの場合、探索は不完全なままで終了する傾向がみられた。

3) とりあげた問題の多くで、最適点近傍では変数値変動に対する評価関数の感度が低いため、探索の効率が低下した。評価関数値のみに着目すれば、より少ない回数で試行を打切ることが妥当である。

4) 基本的な統計的探索ロジックに加え、ステップ巾の減少と、変数のブロック化という改良を施したことは、探索精度の向上に有効であった。

5) 本手法は、確定論的手法に比し、大域的最適解の探索可能性が明らかに大である。

これらの特徴から考えて、本手法は原子炉システム最適化問題に対し充分な適用性をもつ手法であると評価してよいであろう。今後、若干の改良を加えつつ、他の手法では解析困難な最適化問題を処理するための主要な手段として用いていきたい。

謝 辞

本研究の一部は著者の一人、北村が、原子炉研修所高級課程研修生として在所中におこなったものである。

この間、東北大学工学部・柏山一典教授はじめ、同大学原子核工学科の教官諸氏、ならびに、原子力研究所原子炉制御研究室の皆様に多大の御助力をいただいた。心から感謝申し上げる。また、種々有意義な御意見を下さった原子炉研修所教官の皆様にも感謝する次第である。

参 考 文 献

1. Pontryagin, L. S., at. al. : "The Mathematical Theory of Optimal Processes" Interscience Publishers (1962)
2. Bellman, R., S. E. Dreyfus : "Applied Dynamic Programming" Princeton Univ. Press (1962)
3. Brooks, S. H., : "A Discussion of Random Methods for Seeking Maxima" Computer J. vol. 6, № 2, (1958)
4. Растрогин, Л. А., : "Статистические Методы Поиска" Наука (1968)
5. Mcmurtry, G. J., K. S. Fu, : "A Variable Structure Automaton Used as Multimodal Searching Technique" IEEE Trans, AC-11 № 3 (1966)
6. Растрогин, Л. А., и др, : "Задачи Статистические Оптимизации" Знантие (1971)

6 結 論

非確定論的手法であるところの統計的探索法を用いて若干の例につき最適解探索をおこなった。例としてとりあげた問題は、多変数、非線形システムの多峰性評価関数の最適点探索問題としての性質をもち、この意味で、一般性のある例題である。得られた結論を以下に記す。

- 1) 統計的探索法により、精度良い最適解探索が達成できた。必要な試行回数も実用的な値の範囲内であった。
- 2) 確定論的手法では、多くの場合、探索は不完全なままで終了する傾向がみられた。
- 3) とりあげた問題の多くで、最適点近傍では変数値変動に対する評価関数の感度が低いため、探索の効率が低下した。評価関数値のみに着目すれば、より少ない回数で試行を打切ることが妥当である。
- 4) 基本的な統計的探索ロジックに加え、ステップ巾の減少と、変数のブロック化という改良を施したことは、探索精度の向上に有効であった。
- 5) 本手法は、確定論的手法に比し、大域的最適解の探索可能性が明らかに大である。

これらの特徴から考えて、本手法は原子炉システム最適化問題に対し充分な適用性をもつ手法であると評価してよいであろう。今後、若干の改良を加えつつ、他の手法では解析困難な最適化問題を処理するための主要な手段として用いていきたい。

謝 辞

本研究の一部は著者の一人、北村が、原子炉研修所高級課程研修生として在所中におこなったものである。

この間、東北大学工学部・梶山一典教授はじめ、同大学原子核工学科の教官諸氏、ならびに、原子力研究所原子炉制御研究室の皆様に多大の御助力をいただいた。心から感謝申し上げる。また、種々有意義な御意見を下さった原子炉研修所教官の皆様にも感謝する次第である。

参 考 文 献

1. Pontryagin, L. S., at. al. : "The Mathematical Theory of Optimal Processes" Interscience Publishers (1962)
2. Bellman, R., S. E. Dreyfus : "Applied Dynamic Programming" Princeton Univ. Press (1962)
3. Brooks, S. H., : "A Discussion of Random Methods for Seeking Maxima" Computer J. vol. 6, № 2, (1958)
4. Растрогин, Л. А., : "Статистические Методы Поиска" Наука (1968)
5. Mcmurtry, G. J., K. S. Fu, : "A Variable Structure Automaton Used as Multimodal Searching Technique" IEEE Trans, AC-11 № 3 (1966)
6. Растрогин, Л. А., и др, : "Задачи Статистические Оптимизации" Зинатниe (1971)

6 結 論

非確定論的手法であるところの統計的探索法を用いて若干の例につき最適解探索をおこなつた。例としてとりあげた問題は、多変数、非線形システムの多峰性評価関数の最適点探索問題としての性質をもち、この意味で、一般性のある例題である。得られた結論を以下に記す。

- 1) 統計的探索法により、精度良い最適解探索が達成できた。必要な試行回数も実用的な値の範囲内であった。
- 2) 確定論的手法では、多くの場合、探索は不完全なままで終了する傾向がみられた。
- 3) とりあげた問題の多くで、最適点近傍では変数値変動に対する評価関数の感度が低いため、探索の効率が低下した。評価関数値のみに着目すれば、より少ない回数で試行を打切ることが妥当である。
- 4) 基本的な統計的探索ロジックに加え、ステップ巾の減少と、変数のブロック化という改良を施したことは、探索精度の向上に有効であった。
- 5) 本手法は、確定論的手法に比し、大域的最適解の探索可能性が明らかに大である。

これらの特徴から考えて、本手法は原子炉システム最適化問題に対し充分な適用性をもつ手法であると評価してよいであろう。今後、若干の改良を加えつつ、他の手法では解析困難な最適化問題を処理するための主要な手段として用いていきたい。

謝 辞

本研究の一部は著者の一人、北村が、原子炉研修所高級課程研修生として在所中におこなつたものである。

この間、東北大学工学部、相山一典教授はじめ、同大学原子核工学科の教官諸氏、ならびに、原子力研究所原子炉制御研究室の皆様に多大の御助力をいただいた。心から感謝申し上げる。また、種々有意義な御意見を下さった原子炉研修所教官の皆様にも感謝する次第である。

参 考 文 献

1. Pontryagin, L. S., at. al. : "The Mathematical Theory of Optimal Processes" Interscience Publishers (1962)
2. Bellman, R., S. E. Dreyfus : "Applied Dynamic Programming" Princeton Univ. Press (1962)
3. Brooks, S. H., : "A Discussion of Random Methods for Seeking Maxima" Computer J. vol. 6, № 2, (1958)
4. Растрогин, Л. А., : "Статистические Методы Поиска" Наука (1968)
5. Mcmurtry, G. J., K. S. Fu, : "A Variable Structure Automaton Used as Multimodal Searching Technique" IEEE Trans, AC-11 № 3 (1966)
6. Растрогин, Л. А., и др., : "Задачи Статистические Оптимизации" Знание (1971)

7. Heusener, G., : " Optimization of Sodium Cooled Fast Breeders by Nonlinear Programming Methods " EURFNR-830 (1970)
8. Shinohara, Y., J. Valat, : " Optimization of Xenon Poisoning by Minimization of the Xenon Peak " Compt Rend., vol. 259 (1964)
9. Артамкин В. Н, и др., : " Оптимальный Режим Остановки Реактора при Проведении Коротоко Временных Работ " Атомная Энергия Т. 25 В. 2 (1967)
10. Suda, N., et. al, : " Optimization of Neutron Flux Distribution " J. of Nucl. Sci and Tech., vol. 5, (1968)
11. Kowalik, J., M. R. Osborne : " Methods for Unconstrained Optimization Problems ", American Elsevier (1968)
12. Schumer, M. A, K. Steiglitz, : " Adaptive Step Size Random Search ", IEEE Trans. AC-13, № 3 (1968)