

JAERI-M

5 7 3 2

ガス拡散プラントのハイブリッド
シミュレーション

1974年7月

島崎潤也・原 昌雄

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

ガス拡散プラントのハイブリッドシミュレーション

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

島崎潤也，原 昌雄

(1974年5月21日受理)

ガス拡散法によるウラン濃縮プラントは所定濃度の濃縮ウランを得るためには分離器を千数百段カスケードに結合する必要がある。このプラントにおける種々の外乱に対するウラン-235の濃度変化の動特性を解析するため、その基本となる動特性方程式の検討とハイブリッドシミュレーションを完成した。ここで提出している動特性方程式は厳密な静特性を含む形であり、ここではさらに種々の近似レベルで考察を進めた。1つの動特性モデルは1階非線形偏微分方程式とその境界条件の形で与えた。いろいろの動特性解析にあつてはこの境界条件を変更すればよいが実際の解法となるとこの境界値問題を解くことにより2点境界値問題となる。ガス拡散プラントのスタートアップについてここではCSDT法による解法を示した。また濃度分布が比較的ゆるやかなことに注目しノード法も有効であることを付録に述べた。

Hybrid Simulation of Gaseous Diffusion Plant

Junya SHIMAZAKI and Masao HARA

Division of Reactor Engineering, Tokai, JAERI

(Received May 21, 1974)

A gaseous diffusion plant normally consists of over a thousand separators in cascade to obtain a specified slightly-enriched uranium. In order to analyze the dynamic behaviors of the concentration of ^{235}U versus external disturbances, the basic dynamic equations for the plant are examined and the digital-analog hybrid simulations are developed. The static characteristics are exactly included in these dynamic models, and reductions of the equations for permissible approximations are described. Each block in the models is presented in the form of a set of a nonlinear partial differential equation and an associated boundary condition. Therefore trimming of these boundary conditions could be effective in the simulations of various practical cases, but actually it requires to solve two-point boundary value problems. In start-up study of the plant, a simulation using a CSDT method is described, and effectiveness of a nodal method is also proposed in the appendix, considering that the distribution of the concentration is rather moderate.

目 次

1. はじめに	1
2. ガス拡散プラントの動特性	2
2.1 濃縮器のパラメータ	2
2.2 一般カスケードの基本的動特性方程式と正確な定常解	3
2.3 ステップカスケードの構成と最適化問題	7
2.3.1 ステップカスケードの構成	7
2.3.2 最適化構成について	9
3. ステップカスケード要素の動特性方程式	14
3.1 第 i ステップ内における扱い	14
3.2 ステップの変化段における扱い	16
4. ステップカスケードシステムの動特性方程式と定常分布 (連続モデル)	20
4.1 濃縮部と回収部の動特性	20
4.2 供給段の境界条件	21
4.3 基本方程式の近似	21
4.4 ステップカスケードの定常分布	22
4.5 分離係数, 段流量, 還流比が変化したときの定常分布を計算するプログラム	24
5. ステップカスケードのハイブリッドシミュレーション	31
5.1 ハイブリッド計算法	31
5.2 方形カスケードのハイブリッドシミュレーション	32
5.2.1 系の記述とハイブリッドシミュレーション	32
5.2.2 Scaled Equation	33
5.2.3 境界値問題の感度解析	35
5.2.4 ハイブリッドプログラムと計算例	37
5.3. ステップカスケードのハイブリッドシミュレーション	37
5.3.1 系の記述とハイブリッドシミュレーション	38
5.3.2 スタートアップの解析	40
6. 結 言	46
謝 辞	47
参考文献	47
Appendix A 最小還流比について	48
B 方形カスケードの定常分布 (解析的)	50
C ノード法によるハイブリッドシミュレーション	53
D 方形カスケードのハイブリッドプログラム	57
E ステップカスケードのハイブリッドプログラム	60

1. はじめに

ウランの同位体分離法で現在大規模な開発研究が進められているのはガス拡散法と遠心分離法(さらにノズル法も入れられるが)であろう。ガス拡散法によるウラン濃縮プラントはすでにアメリカ、ソ連、イギリス、フランス、中国などの諸外国で稼働しているが、その濃縮技術は非公開の色合いが濃く、こと濃縮プラントの動特性についてもごく大雑把なモデルによる解析しか公表されていない。しかしわが国でも隔膜、軸流圧縮機等のプラントコンポーネントの技術目標が達成し、問題が大規模プラントの安全性と効率におかれ、システム工学的な視点が重視されるようになれば正確な動特性把握が大切になってくる。

分離係数が小さいために所定濃度の濃縮ウラン(3%位の低濃縮ウランでも)を得るためには分離器(濃縮器)をカスケードにガス拡散法で数100段、遠心分離では数10段を結合する必要がある。このカスケードされたシステムの静特性と動特性をどのように記述するかは種々の用速に関して二三の方法が提出されている。ここではカスケード結合の形態に注目し、そこから動特性方程式とその境界条件を導く。動特性方程式の記述に重点がおかれるが、あわせてより正確な濃度分布を与える静特性の式も与えられる。一般に動特性としては正確な静特性ほどの記述は必要なく、また方程式が複雑になって取扱いが面倒なので近似化が必要になるが本報告書では近似の影響を充分配慮しながらいくつかの方程式を導いた。

一般の同位体分離に用いられる式はK. Cohenの連立偏微分方程式に対応している。ステップカスケードの動特性はこの一般式から直接導くことができるがここでは新たに物質バランスから導くことにした。それはその一般式には含まれていない境界段の扱いを主に述べるためと一般の段の方程式が容易に導くことができることからである。本報告書ではこのステップカスケードの記述が中心である。

ステップカスケードの構成をいかにするかに対する最適化問題がある。これはあるタイプについてすでに近似的に解かれており、ここでは詳しくは述べない。しかしその結果求められたプラントの設計パラメータを用いた静特性を任意選流比について求めるプログラムは作成した。それは静特性モデルの違いをチェックすることを目的として、動特性を扱う前チェックに使用される。線形モデルと非線形モデルの違いの比較からは濃度の大きさによって線形モデルを採用してよいということが示され回収部の解析やノード法による解法をより簡単にする。

段数と時間について連続に記述した動特性モデルは偏微分方程式で、ステップの変化段における境界条件と最上、最下、供給のそれぞれの段の境界条件を含めてまとめられた。この定常特性は一般に設計問題で広く用いられている微分方程式を完全に表わしている。

この連続形式の動特性の解法はハイブリッド計算機による分布系の動特性シミュレーションとして解いた。また方形カスケード(濃縮部)のスタートアップとステップカスケード(ORO-685;濃縮部3ステップ、回収部3ステップ)について異った選流比についてスタートアップ特性を解析例として求めた。より詳しい実プラントの運転制御に関わる動特性解析は今後の問題とした。

2. ガス拡散プラントの動特性

プラントの規模を最小にするカスケードは非混合の条件を満足する理想カスケードであるが構成の単純さ制御の有理さ(動特性が問題となる)から実用のカスケードとしてステップカスケード(Step Cascade or Squared-off Cascade)が考えられている。最終的に求めるべき動特性モデルはこのステップカスケードにおくが、まず一般カスケードの動特性モデルをその静特性(すなわちプラントの構成をある評価に従って定め、設計するモデル)にも用いられる形で提出し、とくに動特性の近似レベルに注意しながら導出する。ステップカスケードの構成を決定するために有名な最適化問題があるがそこで用いられる式も与えられる。

2.1 濃縮器のパラメータ

濃縮器の基本構造は図2-1に示すように隔膜によって高圧側と低圧側の2室に分けられ、高圧側の入口から $^{235}\text{UF}_6$ と $^{238}\text{UF}_6$ の混合ガスを供給すると2つのガスの平均飛行速度のわずかな差によって若干低圧側の $^{235}\text{UF}_6$ の組成が増える。低圧側から取り出される気体を濃縮分、高圧側に残って取り出される気体を減損分とよぶ。

P_h = 高圧側の圧力, P_l = 低圧側の圧力

N = 供給分の $^{235}\text{UF}_6$ 濃度(モル分率で表わす)

N' = 濃縮分の $^{235}\text{UF}_6$ 濃度

N'' = 減損分の $^{235}\text{UF}_6$ 濃度

L = 供給分流量, L' = 濃縮分流量

L'' = 減損分流量

で諸量を表示する。

カット(cut) θ は供給分に対する濃縮分の比をいい

$$\theta \equiv \frac{L'}{L} \quad \text{or} \quad \theta \equiv \frac{L'}{L'+L''} \quad \text{or} \quad L' = \theta L \quad (2-1)$$

でほぼ $\frac{1}{2}$ に等しい値である。

存在比(abundance ratio), R は $^{235}\text{UF}_6$ と $^{238}\text{UF}_6$ の濃度比を表わす

$$R' \equiv \frac{N'}{1-N'} \quad (\text{低圧側の存在比}) \quad (2-2)$$

$$\text{逆に } N' = \frac{R'}{1+R'} \quad (2-3)$$

分離係数(separation factor) α は高圧側と低圧側のそれぞれの存在比の比をいう。

$$\alpha \equiv \frac{N'(1-N'')}{N''(1-N')} \quad \text{or} \quad \frac{N'}{1-N'} = \alpha \frac{N''}{1-N''} \quad (2-4)$$

分離効率は隔膜の孔径, 操作圧力比, 境界層の効果, 表面拡散効果, 気体の流れ様式などによって決定される。カスケード全体にわたって α の値はほぼ一定と考えられるが圧力, 流量, 温度などの変化で変動する値である。

$$\alpha_0 = 1.00429 \quad (P_\ell \rightarrow 0)$$

$$\alpha \leq 1 + 0.00429 \times 1.42 = 1.006 \quad (\text{現在のところ})$$

$$r \equiv \frac{P_\ell}{P_h} \quad (2-5)$$

濃縮係数 (enrichment factor), ϵ

$$\epsilon \equiv \alpha - 1 \quad (2-6)$$

頭部分離係数 (head separation factor), β

$$\beta \equiv \frac{N'(1-N)}{N(1-N')} \quad \text{or} \quad \frac{N'}{1-N'} = \beta \frac{N}{1-N} \quad (2-7)$$

$$L'' = L - L' = (1-\theta)L \quad (2-8)$$

2.2 一般カスケードの基本動特性方程式と正確な定常解

1 回の分離操作で達成できる濃縮度はきわめて小さく、希望する濃縮ウランを得るためには多数 (数 100 ~ 数 1000) の濃縮器を用いて分離操作の回数を増やさなければならない。相隣りあった濃縮器 (段とよぶことにする) の普通の結合の様子を図 2-2 に示す。

第 n 段の濃度を N_n (濃縮分は \prime をつけ N_n' で、減損分は $\prime\prime$ をつけ N_n'' で、供給分はそのまま N_n とする) 流量を L_n (L_n' , L_n'' についても同様) で表示する。またホールドアップを H_n とし、高圧側 (減損側) のホールドアップを H_n'' と低圧側 (濃縮側) のホールドアップを H_n' とする。

$$H_n = H_n' + H_n'' \quad (2-9)$$

第 n 段のまわりの単位時間当りの物質バランスから次式が成立する。

$$\frac{d}{dt} (H_n' N_n' + H_n'' N_n'') = L_n N_n - L_n' N_n' - L_n'' N_n'' \quad (2-10)$$

$$\frac{d}{dt} (H_n' + H_n'') = L_n - L_n' - L_n'' \quad (2-11)$$

結合部分において完全混合が行なわれているとして

$$L_n N_n = N_{n+1}'' N_{n+1}'' + L_{n-1}' N_{n-1}' \quad (2-12)$$

$$L_n = L_{n+1}'' + N_{n-1}' \quad (2-13)$$

(10)~(13) の定常解は次のように求められる。

$$L_{n+1}'' N_{n+1}'' + L_{n-1}' N_{n-1}' - L_n' N_n' - L_n'' N_n'' = 0 \quad (2-14)$$

$$L_{n+1}'' + L_{n-1}' - L_n' - L_n'' = 0 \quad (2-15)$$

から取り出し流量 P , 濃縮度 N_p として

$$L_n' - L_{n+1}'' = L_{n-1}' - L_n'' = \dots = P$$

$$L_n' N_n' - L_{n+1}'' N_{n+1}'' = L_{n-1}' N_{n-1}' - L_n'' N_n'' = \dots = P N_p$$

$$P = L_n' - L_{n+1}'' \quad (2-16)$$

$$P N_p = L_n' N_n' - L_{n+1}'' N_{n+1}'' \quad (2-17)$$

(1617)から

$$P(N_p - N'_n) = L''_{n+1} (N'_n - N''_{n+1}) \quad (2-18)$$

$$\therefore N''_{n+1} = -\frac{PN_p}{L''_{n+1}} + \left(\frac{P}{L''_{n+1}} + 1\right)N'_n = \frac{-PN_p}{L''_{n+1}} + \frac{L'_n}{L''_{n+1}} N'_n \quad (2-19)$$

分離係数 α は各段によらず一定として用いる。

$$\frac{N'_n}{1-N'_n} = \alpha \frac{N''_n}{1-N''_n} \quad (2-20)$$

$$N'_n = \frac{\frac{\alpha N''_n}{1-N''_n}}{1 + \frac{\alpha N''_n}{1-N''_n}} = \frac{\alpha N''_n}{1 + (\alpha-1)N''_n} \quad (2-21)$$

$$\therefore N'_n = N''_n + \frac{(\alpha-1)N''_n(1-N''_n)}{1 + (\alpha-1)N''_n} \quad (2-22)$$

また逆に (2-20) を N''_n について解くと

$$N''_n = \frac{N'_n}{\alpha - (\alpha-1)N'_n} = \frac{N'_n}{1 + (\alpha-1)(1-N'_n)} \quad (2-23)$$

$$N''_n = N'_n - \frac{(\alpha-1)N'_n(1-N'_n)}{\alpha - (\alpha-1)N'_n} \quad (2-24)$$

(2-19) に (2-22) を用いて

$$N''_{n+1} = -\frac{PN_p}{L''_{n+1}} + \frac{L'_n}{L''_{n+1}} \left\{ N''_n + \frac{(\alpha-1)N''_n(1-N''_n)}{1 + (\alpha-1)N''_n} \right\}$$

$$N''_{n+1} = N''_n - \frac{P(N_p - N''_n)}{L''_{n+1}} + \frac{L'_n}{L''_{n+1}} \frac{(\alpha-1)N''_n(1-N''_n)}{1 + (\alpha-1)N''_n} \quad (2-25)$$

(2-25) 式は N''_n から N''_{n+1} を与える式であり N'_{n+1} を正確に求めたいならば (一段当りの N'_n と N''_n は普通無視されるだろう), (2-21) or (2-22) を用いればよい。(2-21) 式で α が十分 1 に近いことを用いて近似式を求めることができる。

$$N'_n = \alpha N''_n \{ 1 - (\alpha-1)N''_n + (\alpha-1)^2 N''_n{}^2 - \dots \} \quad (2-26)$$

$$N'_n \approx \alpha N''_n - \alpha(\alpha-1)N''_n{}^2 = N''_n + (\alpha-1)N''_n(1 - \alpha N''_n) \quad (2-27)$$

(2-22) から分母の $(\alpha-1)N''_n$ を 1 に比して十分小さいとして無視すれば次の近似式が導ける。

$$N'_n \approx N''_n + (\alpha-1)N''_n(1-N''_n) \quad (2-28)$$

(2-27) は (2-28) とほとんど同じ近似式である。

さらに近似を強めて $N'_n, N''_n \ll 1$ (低濃縮プラントのとき) には

$$N'_n \approx \alpha N''_n \quad (2-29)$$

が成立する。

N'_{n+1} に対する漸化式も (2-18) と (2-21) を用いて求められるが (2-25) 式の方が見やすい形である。(2-25) 式の形の式は (2-19) に (2-22) を用いて次のように与えられる。さらに N'_{n+1} を与える explicit な表現もえる。

$$\left\{ N'_n - N'_{n+1} + \frac{(\alpha-1)N'_{n+1}(1-N'_{n+1})}{1+(\alpha-1)(1-N'_{n+1})} \right\} = \frac{P}{L''_{n+1}} (N_p - N'_n) \quad (2-30)$$

$$N'_{n+1} = \frac{\frac{\alpha}{L''_{n+1}} (L'_n N'_n - P N_p)}{1 + \frac{(\alpha-1)}{L''_{n+1}} (L'_n N'_n - P N_p)} \quad (2-31)$$

(2-25) 式で段数が十分多く N'' , L' , L'' が n の連続量で表わされるとすれば次の微分方程式で十分に近似される。

$$\frac{dN''}{dn} = \frac{L'}{L''} (\alpha-1) N'' (1-N'') - \frac{P}{L''} (N_p - N'') \quad (2-32)$$

ただし $N''(n) = N'_n$, $L'(n) = L'_n$, $L''(n) = L''_{n+1}$

さらに $(\alpha-1)N'' \ll 1$ として省略されている。

(2-32) 式は一般のカスケード (段数によって流量が異なる) の濃度分布を与える式である。

(2-10) ~ (2-13) 式の右辺に注目し、一般のカスケードに対する動特性モデルを導びく。

(2-10) - (2-11) $\times N'_n$ から

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (L''_{n+1} N''_{n+1} + L'_{n-1} N'_{n-1} - L'_n N'_n - L''_n N''_n) - (L''_{n+1} N'_n + L'_{n-1} N'_{n-1} - L'_n N'_n - L''_n N''_n) \\ &= L''_{n+1} (N''_{n+1} - N'_n) + L'_{n-1} (N'_{n-1} - N'_n) - L''_n (N''_n - N'_n) \end{aligned} \quad (2-23)$$

$$L''_{n+1} (N''_{n+1} - N'_n) = \chi_{n+1} \quad (2-34)$$

とおくと

$$\chi_n = L''_n (N''_n - N'_{n-1}) = L''_n \left\{ N''_n - N''_{n-1} - \frac{(\alpha-1)N''_{n-1}(1-N''_{n-1})}{1+(\alpha-1)N''_{n-1}} \right\} \quad (2-35)$$

$$(2-33) = \chi_{n+1} - \chi_n + L''_n (N'_n - N'_{n-1}) - L'_{n-1} (N'_{n-1} - N'_{n-1})$$

$$= \chi_{n+1} - \chi_n + (L''_n - L'_{n-1}) (N'_n - N'_{n-1})$$

$$N'_n - N'_{n-1} = N''_n - N''_{n-1} + \frac{(\alpha-1)N''_n(1-N''_n)}{1+(\alpha-1)N''_n} - \frac{(\alpha-1)N''_{n-1}(1-N''_{n-1})}{1+(\alpha-1)N''_{n-1}}$$

段数 n が十分多いとして連続量で近似する。

$$\chi_{n+1} - \chi_n \rightarrow \frac{\partial}{\partial n} (L'' \frac{\partial N''}{\partial n}) - \frac{\partial}{\partial n} (L'' (\alpha-1) N'' (1-N''))$$

$$N'_n - N'_{n-1} \rightarrow \frac{\partial N''}{\partial n} - (\alpha-1) N'' (1-N'')$$

$$\begin{aligned} L_n'' - L_{n-1}' &\equiv -T_n \quad (T_n : \text{第 } n \text{ 段の上から正味入ってくる流量}) \\ -L_n'' + (L_n'' - L_{n-1}') &= -L_{n-1}' \rightarrow L' \end{aligned} \quad (2-36)$$

よって(33)は次式で近似される。

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ L_n'' \frac{\partial N''}{\partial n} - L' (\alpha-1) N'' (1-N'') \right\} - T \frac{\partial N''}{\partial n} \quad (2-37)$$

(2-36)式から

$$\Delta H_n = L_{n+1}'' - L_n' - (L_n'' - L_{n-1}') = -T_{n+1} + T_n \rightarrow -\frac{\partial T}{\partial n} \quad (2-38)$$

左辺の評価についてここでは次のように簡単に考えておく。

低圧側のホールドアップ H_n' は高圧側の H_n'' に比して無視されるので

$$\begin{aligned} H_n &= H_n'' + H_n' \approx H_n'' \\ H_n' N_n' + H_n'' N_n'' &\approx H_n N_n'' \\ \frac{d}{dt} (H_n N_n'') - \frac{dH_n}{dt} \cdot N_n' &\approx H_n \frac{dN_n''}{dt} \rightarrow H \frac{\partial N''}{\partial t} \end{aligned} \quad (2-39)$$

従って動特性モデルは次の偏微分方程式で記述される。

N'' を N とさらに置きかえて

$$H \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} (L_n'' \frac{\partial N}{\partial n} - L' (\alpha-1) N (1-N)) - T \frac{\partial N}{\partial n} \quad (2-40)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2-41)$$

(2-40) (2-41) の一般カスケードの方程式は各流量 $L'(n, t)$, $L''(n, t)$ を与えて, (2-36) から $T(n, t)$ が定まり従って $-\frac{\partial T}{\partial n}$ が求まる。これを用いて (2-41) から $H(n, t)$ が解かれ, それを用いて (2-40) 式から $N(n, t)$ を求めることになる。実際に解くために必要となる境界条件は後に述べる。

一般カスケードの基本動特性方程式は (2-40) と (2-41) の連立偏微分方程式で与えられたが流量の時間的変化が考えている動特性の時間領域で普通無視されるのでこれらの方程式は単一の偏微分方程式で扱うことができる。すなわち次の普通許される仮定を置いて基本方程式を变形しておく。

仮定*

- (i) 流動 L_n' と L_n'' は時間 t の関数ではない。
- (ii) 低圧側のホールドアップ H_n' は高圧側の H_n'' に比して無視され (前と同じ仮定) さらに H_n'' は L_n' に比例する。

$$H_n'' / L_n' \equiv h \quad (\text{一定値}) \quad (2-42)$$

(ii) の仮定によって(10)式 = 0 となり流量に関して定常状態が維持されている。

$$L''_{n+1} + L'_{n-1} - L'_n - L''_n = 0$$

$$L'_n - L''_{n+1} = P = T_n$$

が成立し、従って(2-40)式は次のようになる。

$$hL' \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} (L'' \frac{\partial N}{\partial n} - L'(\alpha-1)N(1-N) - PN) \quad (2-43)$$

ここではさらにステップカスケードに用いられる基本方程式を(2-33)式から導く。(2-40)式を導くとき流量は n の関数であったが、ステップカスケードを考えるとこれは任意ステップの中では一定となる。

そこで $L'_n \rightarrow L'$, $L''_n \rightarrow L''$

$$L' = P + L'' \quad (2-44)$$

として(2-33)式は次のように評価される。

$$\begin{aligned} & L''(N''_{n+1} - N''_n) + L'(N'_{n+1} - N'_n) \\ &= L''(N''_{n+1} - N''_n - N'_n - N'_{n-1}) - P(N'_n - N'_{n-1}) \end{aligned}$$

$N'_n = N''_n + g(n)$, $g(n) = (\alpha-1)N''_n(1-N''_n)$ の近似式表現を用いて

$$\begin{aligned} & L''(N''_{n+1} - 2N''_n + N''_{n-1}) - L''\{g(n) - g(n-1)\} - P\{N''_n - N''_{n-1} + g(n) - g(n-1)\} \\ &= L''(N''_{n+1} - 2N''_n + N''_{n-1}) - (P + L'')\{g(n) - g(n-1)\} - P(N''_n - N''_{n-1}) \end{aligned} \quad (2-45)$$

(2-44)の連続近似として次式を得る。

$$L'' \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - L' \frac{\partial}{\partial n} ((\alpha-1)N''(1-N'')) - P \frac{\partial N''}{\partial n} \quad (2-46)$$

前述の仮定(i)(ii)を用いて、(2-33)式の右辺 = $hL' \frac{\partial N''}{\partial t}$ となり動特性方程式は次のようにまとめられる。

$$hL' \frac{\partial N''}{\partial t} = L'' \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \{L'(\alpha-1)N''(1-N'') + PN''\} \quad (2-47)$$

$$L' = P + L'', L', L'' = \text{Constant}$$

(2-47)式はステップカスケードに用いられる方程式で上昇流量 L' と下降流量 L'' は各ステップの値(一定値)を用いる。

境界条件については3章で扱う。

2.3 ステップカスケードの構成と最適化問題

2.3.1 ステップカスケードの構成

ステップカスケードはプラントの規模を最小にする理想カスケードに構成上単純な方形カスケードをいくつか重ねて近づけるカスケードである。簡単にその構成と用いられる記号を述べる。

組成 N_F (モル濃度), 流量 F (mole/sec)の原料から組成 N_P , 流量 P の製品と組成 N_W ,

流量Wの廃棄材を取り出すプラントを考える。

必要なステップの数 = $m + b$

m = 濃縮部のステップ数, b = 回収部のステップ数

第 i 番目のステップに必要な段数 = n_i

第 i 番目のステップ内の上昇流量と下降流量をそれぞれ L_i' と L_i'' とし, また流入流量とカットをそれぞれ L_i と θ_i とする。

濃縮部全体の段数 = n_p , 上昇全流量 = J_p'

$$n_p = \sum_{i=1}^m n_i \quad (2-48)$$

$$J_p' = \sum_{i=1}^m J_i' = \sum_{i=1}^m n_i L_i' \quad (2-49)$$

供給段とステップの変わる段では幾分流量が異なるのでそれらの段では L' , L'' , L , θ を別に考察する必要がある。正確な定常解を求める場合には考慮すべきであろう。

第 i 番目のステップ内の第 n 段の濃縮器の流入濃度 = $N(i, n)$

濃縮側の濃度を $N'(i, n)$, 減損側の濃度を $N''(i, n)$ とする。

$$N'(i+1) \equiv N'(i+1, 0) \equiv N'(i, n_i) \quad (2-50)$$

ステップカスケードの規模をみるため設計例を2つあげる。

(1) 4%濃縮ウラン1500ton/year 製造新ガス拡散プラント(米国, 1970年技術で設計 8750tonSWU/year)

(山下静夫氏の推定計算)

$\alpha = 1.0044$ (推定)

$N_F = 0.711\%$, $F = 12,201$ ton/y

$N_P = 4.00\%$, $P = 1,500$ ton/y

$N_W = 0.25\%$, $W = 10,701$ ton/y

流入全流量 = 3.84582×10^9 ton/y (ウラン換算) で理想カスケードとの比は 1.0615 である。

この表の計算は各 n_i ($i=1, 2, 3$ と $-1, -2, -3$), N_F, N_P, N_W と P が与えられており, 全体の流量が最小になるように設計されていると仮定して境界濃度 $N'(i)$ ($i=1, 2$ と $-2, -3$), ステップ流量とカット L_i, θ_i ($i=-3, \dots, 3$) 分離係数 α を求めたものである。

(2) 5%濃縮ウラン1000ton/year 製造プラントの山下静夫氏による設計例

$\alpha = 1.0056$ (given), $m = 5, b = 2$

$F = 9338$ ton/y, $P = 1000$ ton/y, $W = 8338$ ton/y

全流量 2.38032×10^9 ton/y のうち濃縮部 1.10262×10^9 と回収部 1.27770×10^9 である。

ここでの計算は N_F, N_P, P と濃縮部のステップ数 m を与えてその境界濃度 $N'(i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) を東邦夫氏らの方法で決定し, それらを実現するそれぞれの方形カスケードの段数 n_i と流量 L_i を全流入流量が最小となるように求めたものである。回収部についても同様に扱う。

2.3.2 最適化構成について

まず濃縮部についてその最適化問題は次のように定式化される。供給段組成 N_F 、製品量とその組成 (P, N_p) とカスケード濃縮部のステップ数 m が与えられたとき濃縮部を最小にする中間組成 N_i ($i=1, 2, \dots, m-1$) および濃流比を求めること。

この最適構成問題の意味とすでに開発されている近似解法の概略を簡単に述べておこう。

- (1) $(m-1)$ 個の中間組成 N_i と m 個の流量 L_i'' の決定とともに、各ステップの段数 n_i さらにこれから全段数 n_p 、下降流量 J_i'' とその総流量 J_p'' 等 (L_i', J_i', J_p' や θ_i) が定まる。
- (2) この最適化問題の評価基準「濃縮部を最小にする」は J_p'' (or J_p') \rightarrow 最小とすることである。 m を段数全体にしたときの解が非混合の条件を満足する理想カスケードである。
- (3) この最適化問題はプラントの運転上の制約や制御上の望ましさからある拘束条件の下で上の評価基準を少し変更した形で与えることもできる。評価基準と拘束条件がいくつか異なる場合の解の検討から幾分汎用性をもったプラントを設計することができる。これは重みつき評価関数の最適問題でその重みを決定することである。プラントの運転上の制約として各供給と抜き出しはステップの区切りで行なう場合が考えられる。この時には中間組成 N_i のいくつかは与えられた形になり、この拘束条件のもとで全流量 $J_p'' \rightarrow$ 最小になるようにステップの規模 (n_i, L_i'' 等) を決定することになる。プラントの制御上望ましいこととして定常到達時間のより少ないプラントが考えられる。さらに操作の容易さと動特性を考慮した系の設計が主要であろう。
- (4) 最適化問題の解は理想カスケードの全下降流量 J_{ideal}'' と比較され m と N_p のパラメータサーベイが必要でそれによって製品 (P, N_p) を産出するプラントで実行容易で最適なステップ数 m が決定される。それによってプラントの構成問題が解決する。
- (5) 近似解法がいくつか提出されており東邦夫氏らの方法は次のようなものである。

$$A \equiv \left(\frac{N_p(1-N_F)}{N_F(1-N_p)} \right)^{1/m} \tag{2-51}$$

として

$$\frac{N_i}{1-N_i} = A^i \frac{N_F}{1-N_F} \quad i=1, \dots, m-1 \tag{2-52}$$

から

$$N_i = \frac{A^i N_F}{1-N_F} \bigg/ \left(1 - \frac{A^i N_F}{1-N_F} \right) \tag{2-53}$$

お求め

$$\left(\frac{J_i''}{P} \right) \rightarrow \text{最小}$$

にする L_i'' を図を用いて決定する。そして全体の $\left(\frac{J_p''}{P} \right)_{\min}$ は上で定めた中間濃度 N_1, N_2, \dots, N_{m-1} の値で近似的に良いことを示した。すなわち

$$(J''/P)_{\min} \approx \sum_{i=1}^m (J_i''/P)_{\min} \quad (2-54)$$

各ステップの段数は決定された L_i'' を用いて

$$n_i = (J_i''/P) / (L_i''/P) = J_i''/L_i'' \quad (2-55)$$

$$n_p = \sum_{i=1}^m n_i$$

- (6) 回収部についてその廃棄材の濃度 N_W は製品原価に対する回収部の建設費と原料費の寄与から経済的に流量 W とともに決定される。 N_W と W が定められれば回収部の最適構成は濃縮部と同様に扱われる。

すなわち、

「 N_F , N_W と W およびステップ数 b が与えられたとき、回収部を最小にする N_i と L_i'' ($-b \leq i \leq -2$) を決定すること」

の問題が提出され、この近似解法も同様に与えられる。

$$B \equiv \left(\frac{N_F(1-N_W)}{N_W(1-N_F)} \right)^{1/b} \quad (2-56)$$

として

$$N_i = \frac{B^i N_W}{1-N_W} / \left(1 + \frac{B^i N_W}{1-N_W} \right) \quad (2-57)$$

を定め (J_i''/W) を最小する L_i'' を図を用いて決定する。回収部における濃度は 1 に比較して小さい ($N_i \leq N_F = 0.0072\%$) ので近似解もより簡単になる。

W と N_W には次の関係がある。

$$PN_P + WN_W = FN_F = (P+W)N_F$$

$$\therefore P(N_P - N_F) = W(N_F - N_W) \quad (2-58)$$

- (7) 回収部の価値は濃縮部と対比して設計や動特性のうえて明確にしておくべきである。

Table 2-1 New 8,750 ton SWU/year plant (ORO-685)
(Unknown values are computed by
S. Yamasyita)

Step i	Assay at boundary N'(i)	Flow rate* L _i	Cut θ _i	Numbers of stages n _i
3	4.00	1.194	0.5006	270
2	1.88	2.522	0.5003	190
1	1.22	4.966	0.5002	240
	0.711			
-1	0.366	4.979	0.4989	310
-2	0.301	2.218	0.4776	100
-3	0.250	1.243	0.4957	70

* 10⁶ ton/year of uranium

Table 2-3 A Plant producing 5% uranium ata rate of
1,000 ton/year
(by S. Yamashita)

Step i	Assay at boundary N'(i)	Flow rate* L _i	Cut θ _i	Numbers of stages n _i
5	5.000%	0.2756	0.5018	109
4	3.414	0.6782	0.5007	130
3	2.319	1.2726	0.5004	138
2	1.569	2.1542	0.5002	143
1	1.059	3.4644	0.5001	145
	0.714			
-1	0.378	3.4644	0.4988	246
-2	0.002	2.2598	0.4986	188

* 10⁶ ton/year of uranium

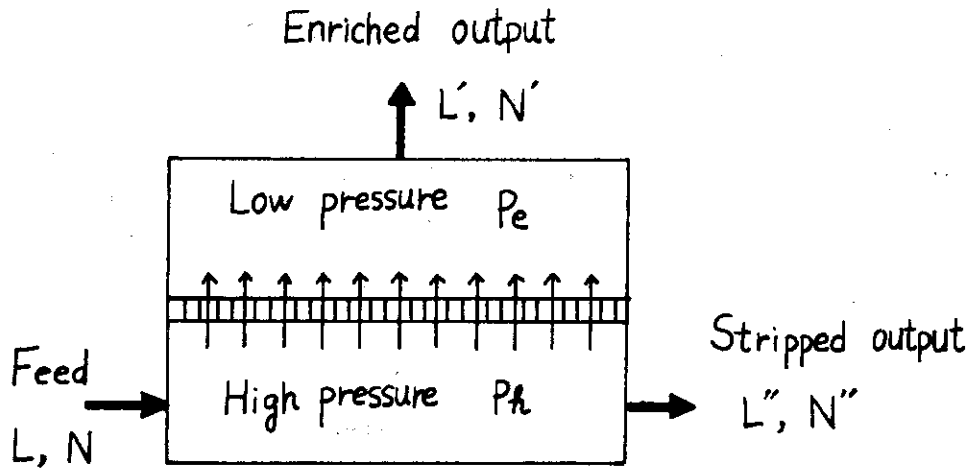


Fig. 2-1 Separating element

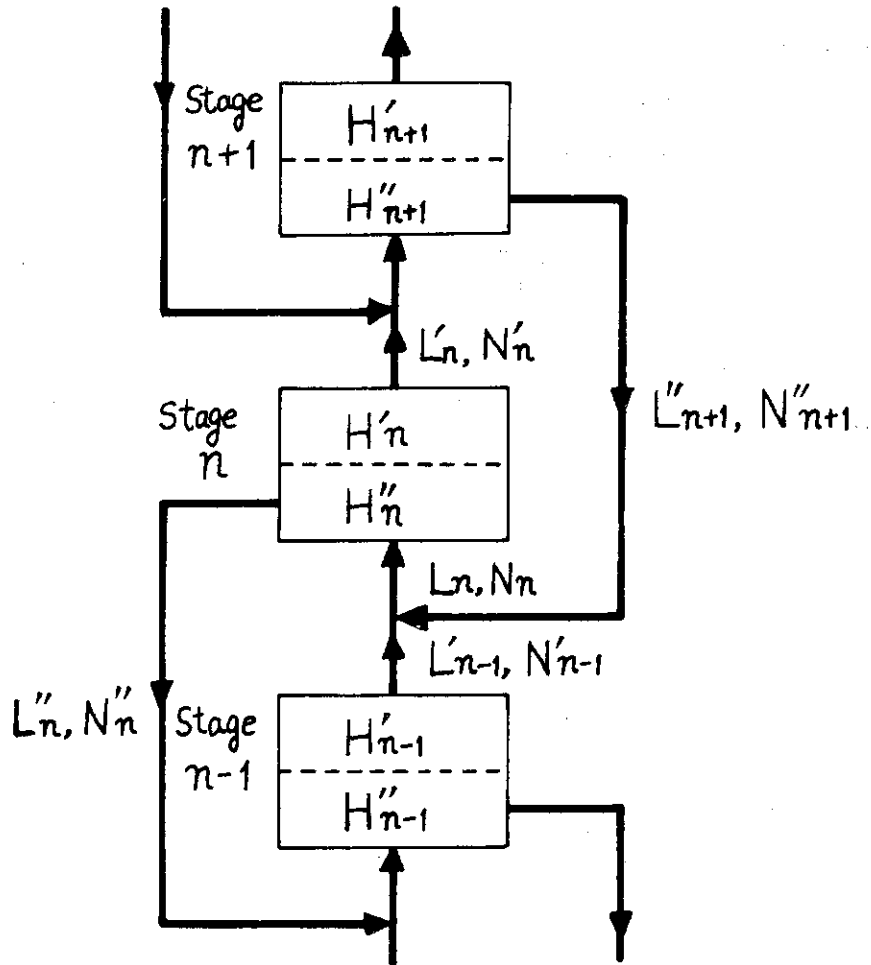


Fig. 2-2 Flow rates and compositions at stages of cascade

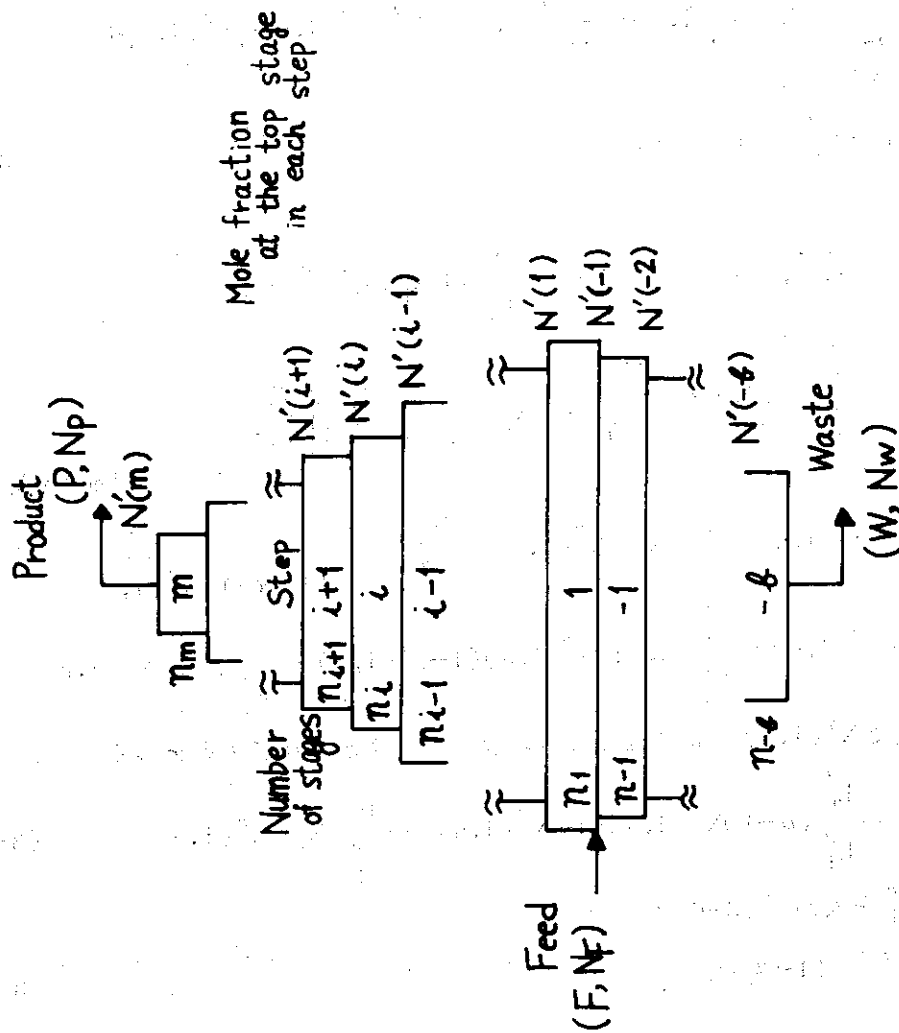


Fig. 2-3 Overall description of a step cascade

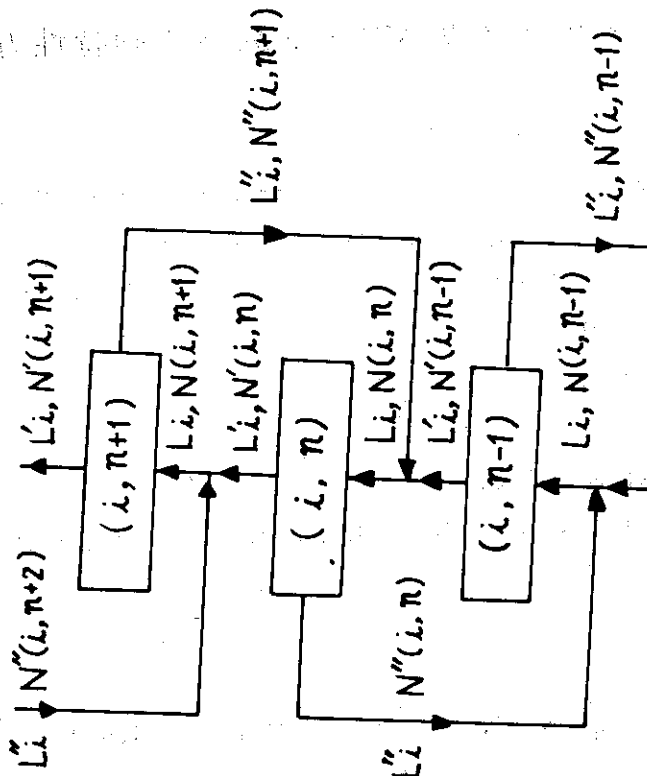


Fig. 2-4 Connection of the n -th stage in the i -th step

3. ステップカスケード要素の動特性方程式

ステップカスケードの構成問題が解かれその構造が完全に与えられたときに定常解と動特性を与える方程式を扱う。すでにこれらの方程式は一般のカスケードで導びいた(2-25)式や(2-47)式で与えられているが境界条件の問題が残されている。すなわち供給段, 最上段, 最下段, ステップの変わる段における取り扱いをどうするかである。ここでは定常解と近似動特性方程式を同時に物質バランスの式から求め境界条件を正確に考慮する。正確な定常解(静特性)を少し近似した形で含む動特性方程式が提出される。

3.1 第*i*ステップ内における扱い

第*i*ステップ内部($1 < n < n_i$)の各流量 L_i, L_i', L_i'' は一定で次の関係を満たす。

$$P = L_i' - L_i'' \quad (3-1)$$

$$L_i - L_i' - L_i'' = 0$$

$$\begin{aligned} hL_i' \frac{d}{dt} N''(i, n) &= L_i'' (N''(i, n+1) - N'(i, n)) + L_i' (N'(i, n-1) - N'(i, n)) \\ &\quad - L_i'' (N''(i, n) - N'(i, n)) \\ &= L_i'' (N''(i, n+1) - N''(i, n)) - L_i' (N_i'(i, n) - N'(i, n-1)) \end{aligned} \quad (3-2)$$

定常解は(3-2)式の右辺=0から

$$L_i' N'(i, n-1) - L_i'' N''(i, n) = PN_p \quad (3-3)$$

を用いて

$$\begin{aligned} N''(i, n+1) &= N''(i, n) + \frac{L_i'}{L_i''} N'(i, n) - \frac{1}{L_i''} (PN_p + L_i'' N''(i, n)) \\ &= \frac{L_i'}{L_i''} N'(i, n) - \frac{PN_p}{L_i''} \end{aligned}$$

(2-22)式を用いて

$$N''(i, n+1) = N''(i, n) - \frac{P}{L_i''} (N_p - N''(i, n)) + \frac{L_i'}{L_i''} \frac{(\alpha-1)N''(i, n)(1-N''(i, n))}{1+(\alpha-1)N''(i, n)} \quad (3-4)$$

$$N''(i, n+1) - N''(i, n) \approx \frac{L_i'}{L_i''} (\alpha-1)N''(i, n)(1-N''(i, n)) - \frac{P}{L_i''} (N_p - N''(i, n)) \quad (3-5)$$

(3-5)の近似式で $N''(i, n)$ を*n*に関して連続量で表わすとすれば次式を得る。

$$\frac{d}{dn} N''(i, n) = \frac{L_i'}{L_i''} (\alpha-1)N''(i, n)(1-N''(i, n)) - \frac{P}{L_i''} (N_p - N''(i, n)) \quad (3-6)$$

θ_i, L_i で L_i' と L_i'' を表わし(3-6)式を積分する。

$$L_i' = \theta_i L_i, \quad L_i'' = (1-\theta_i) L_i \quad (3-7)$$

$$\int_0^{n_i} dn = \int_{N_{i-1}''}^{N_i''} \frac{(1-\theta_i) dN}{\theta_i(\alpha-1)N(1-N) - \left(\frac{P}{L_i}\right)(N_P-N)} \quad (3-8)$$

$$\therefore n_i = \frac{(1-\theta_i)}{(\alpha-1)b_i} \ln \frac{1+a_i}{1-a_i} \quad (3-9)$$

ただし

$$a_i \equiv \frac{b_i(N_i'' - N_{i-1}'')}{(N_{i-1}'' + N_i'')(1+c_i) - 2N_{i-1}''N_i'' - 2c_iN_P}$$

$$b_i \equiv \sqrt{1+2c_i(1-2N_P)+c_i^2}$$

$$c_i \equiv (P/L_i)/\theta_i(\alpha-1)$$

(8)式は第*i*ステップ間の温度 N_{i-1}'' , N_i'' を与えてカスケードの濃縮器数を与えるよく知られた式である。

(3-6)式で $P \ll L_i', L_i''$ を用いれば $L_i' \approx L_i''$ となり次の近似が許される。

$$\frac{dN''}{dn} = (\alpha-1)N''(1-N'') - \frac{P}{L_i''}(N_P - N'') \quad (3-10)$$

このときには $L_i'' \approx L_i' \approx \frac{1}{2}L_i$ で評価できるので次のようにも書くことができる。

$$\frac{dN''}{dn} = (\alpha-1)N''(1-N'') - \frac{2P}{L_i}(N_P - N'') \quad (3-11)$$

また段数 n_i を与える (3-9)式は $\theta_i = \frac{1}{2}$ とすればよい。

動特性方程式 (3-2) にもどってその右辺を変形する。

$$N'(i,n) = N''(i,n) + g(n) \quad (3-12)$$

$$g(n) = \frac{(\alpha-1)N''(i,n)(1-N''(i,n))}{1+(\alpha-1)N''(i,n)} \approx (\alpha-1)N''(i,n)(1-N''(i,n))$$

の表現を用いて

$$\begin{aligned} & L_i''(N''(i,n+1) - N''(i,n)) - L_i'(N''(i,n) - N''(i,n-1)) - L_i'(g(n) - g(n-1)) \\ &= L_i''(N''(i,n+1) - 2N''(i,n) + N''(i,n-1)) - P(N''(i,n) - N''(i,n-1)) \\ & \quad - L_i'(g(n) - g(n-1)) \end{aligned}$$

$N''(i,n)$ を n に関する連続量で表現されるとすれば上式は

$$L_i'' \frac{d^2 N''(i,n)}{dn^2} - P \frac{dN''(i,n)}{dn} - L_i' \frac{d}{dn} \{(\alpha-1)N''(i,n)(1-N''(i,n))\} \quad (3-13)$$

となる。ゆえに動特性方程式は次のように与えられる。

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{L_i''}{L_i'} \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{P}{L_i'} N'' + (\alpha-1)N''(1-N'') \right) \quad (3-14)$$

すなわち

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{1-\theta_i}{\theta_i} \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{P}{\theta_i L_i} N'' + (\alpha-1) N'' (1-N'') \right) \quad (3-15)$$

3.2 ステップの変化段における扱い

ステップの変わり目 ($n=n_i$) におけるバランスを考える。(機縮部)

(i, n_i) の機縮器の上昇流量を L' とすると

$$\begin{aligned} L''_{i+1} + L'_i - L''_i - L' &= 0 \quad \text{から} \\ L' &= L'_i - L''_i + L''_{i+1} = P + L''_{i+1} = L'_{i+1} \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} hL' \frac{d}{dt} N''(i, n) &= L''_{i+1} (N''(i, n+1) - N'(i, n)) + L'_i (N'(i, n-1) - N'(i, n)) \\ &\quad - L''_i (N''(i, n) - N'(i, n)), \quad n = n_i \end{aligned} \quad (3-17)$$

$N''(i, n_i+1)$ は $N''(i+1, 1)$ を表わす。

定常値を与える式は (3-17) の右辺 = 0. (3-3) と (3-16) を用いて

$$\begin{aligned} N''(i, n+1) &= N'(i, n) + \frac{L''_i}{L''_{i+1}} (N''(i, n) - N'(i, n)) - \frac{L'_i}{L''_{i+1}} (N'(i, n-1) - N'(i, n)) \\ &= N''(i, n) - \frac{P}{L''_{i+1}} (N_P - N''(i, n)) + \frac{L'_{i+1}}{L''_{i+1}} \frac{(\alpha-1) N''(i, n) (1-N''(i, n))}{1+(\alpha-1) N''(i, n)} \end{aligned} \quad (3-18)$$

近似式として

$$\begin{aligned} N''(i, n+1) &\simeq N''(i, n) - \frac{P}{L''_{i+1}} (N_P - N''(i, n)) + \frac{L'_{i+1}}{L''_{i+1}} (\alpha-1) N''(i, n) (1-N''(i, n)) \\ n = n_i, \quad N''(i, n+1) &= N''(i+1, 1) \end{aligned} \quad (3-19)$$

動特性については (3-17) 式をさらに変形して

$$\begin{aligned} hL'_{i+1} \frac{d}{dt} N''(i, n) &= L''_{i+1} (N''(i, n+1) - N'(i, n)) - L''_i (N''(i, n) - N'(i, n-1)) \\ &\quad + (L''_i - L'_i) (N'(i, n) - N'(i, n-1)) \\ &= L''_{i+1} (N''(i, n+1) - N''(i, n)) - L''_i (N''(i, n) - N''(i, n-1)) \\ &\quad - (L''_i - L'_i) (N''(i, n) - N''(i, n-1)) - L''_{i+1} (N'(i, n) - N''(i, n)) \\ &\quad + L''_i (N'(i, n-1) - N''(i, n-1)) + (L''_i - L'_i) (N'(i, n) - N''(i, n)) \\ &\quad - N'(i, n-1) + N''(i, n-1) \end{aligned}$$

$N'(i, n) = N''(i, n) + (\alpha-1) N''(i, n) (1-N''(i, n))$ の近似をして

$$\begin{aligned} \therefore hL'_{i+1} \frac{d}{dt} N''(i, n) &= \{ L''_{i+1} N''(i, n+1) - (L''_{i+1} + L''_i) N''(i, n) + L''_i N''(i, n-1) \} \\ &\quad - P(N''(i, n) - N''(i, n-1)) - \{ L'_{i+1} (\alpha-1) N''(i, n) (1-N''(i, n)) \\ &\quad - L'_i (\alpha-1) N''(i, n-1) (1-N''(i, n-1)) \} \end{aligned} \quad (3-18')$$

$$n = n_i, N''(i, n+1) = N''(i+1, 1)$$

(3-18')式は形式的に

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{1}{L'} \frac{\partial}{\partial n} (L'' \frac{\partial N''}{\partial n}) - \frac{1}{L'} \frac{\partial}{\partial n} (L'(\alpha-1)N''(1-N'') + PN'') \quad (3-19')$$

のように一般カスケードの連続モデルと同じ式で書かれるがステップカスケードの $L'(i)$, $L''(i)$ は段階的に変化するので(3-19')式の微分は普通にはとれない。(3-19')式右辺の n に関する微分の意味は(3-18')式右辺で与えられる。しかしステップカスケードの連続モデルにおける扱いは $n = n_i$ で異なる2つの偏微分方程式を接続する境界条件の形で行なわれる。すなわちステップ i における(3-14)の形の偏微分方程式とステップ $i+1$ における同形の偏微分方程式の境界において

まず N'' の連続性

$$[N'']_{i+1} = [N'']_i \quad (3-20)$$

と(3-17)式右辺=0から

$$\begin{aligned} L''_{i+1} N''(i+1, 1) - L'_{i+1} N'(i, n_i) &= L''_i N''(i, n_i) - L'_i N'(i, n_i-1) \\ \therefore L''_{i+1} (N''(i+1, 1) - N''(i, n_i)) - PN''(i, n_i) - L'_{i+1} (\alpha-1) N''(i, n_i) (1-N''(i, n_i)) \\ &= L''_i (N''(i, n_i) - N''(i, n_i-1)) - PN''(i, n_i-1) - L'_i (\alpha-1) N''(i, n_i-1) (1-N''(i, n_i-1)) \end{aligned}$$

ステップの境界へ極限をとり連続表現を行って

$$L''_{i+1} \left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_{i+1} = L''_i \left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_i + (\alpha-1)(L'_{i+1} - L'_i) N''(1-N'') \quad (3-21)$$

の条件式を得る。 $[\quad]_i$ はステップ i から境界段への極限值を表わす。

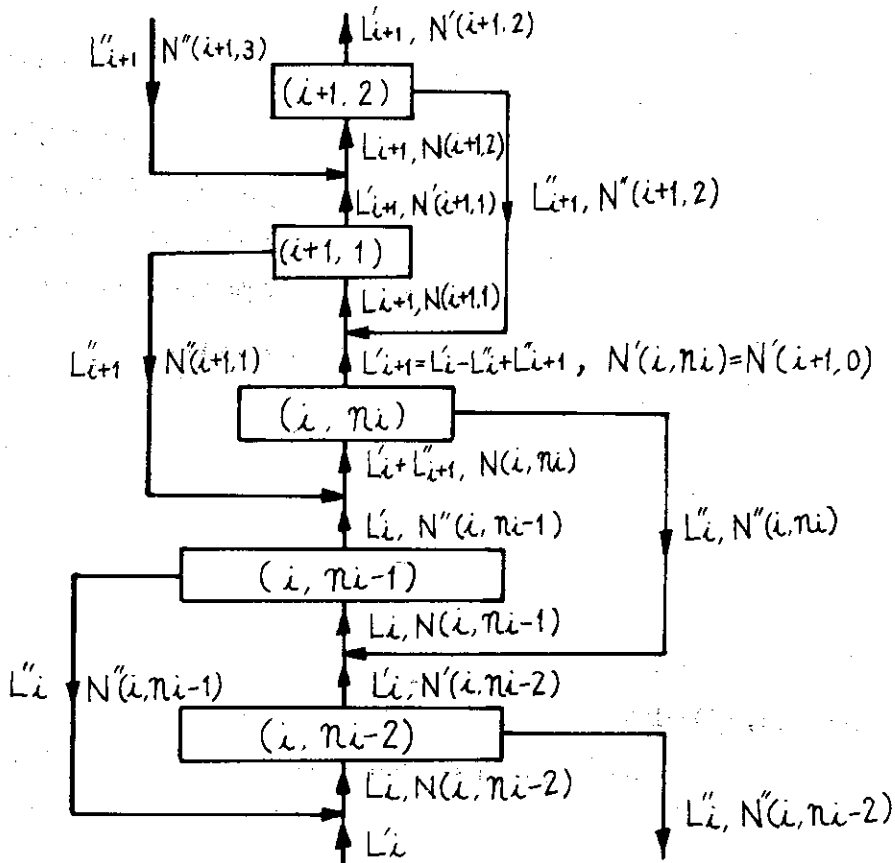


Fig. 3-1 Local cascade of stages in the i -th and $(i+1)$ -th steps

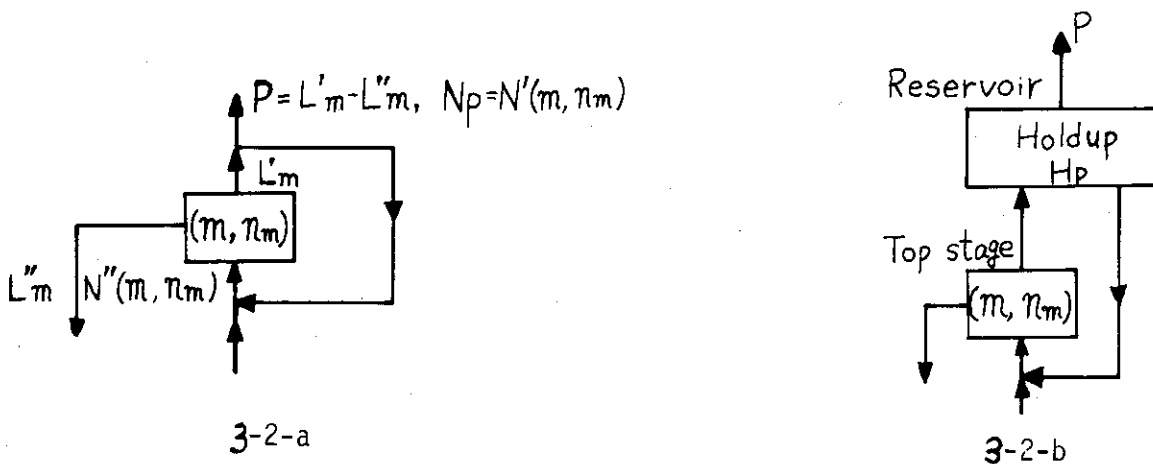


Fig. 3-2 Cascade at the top stage of diffusion plant

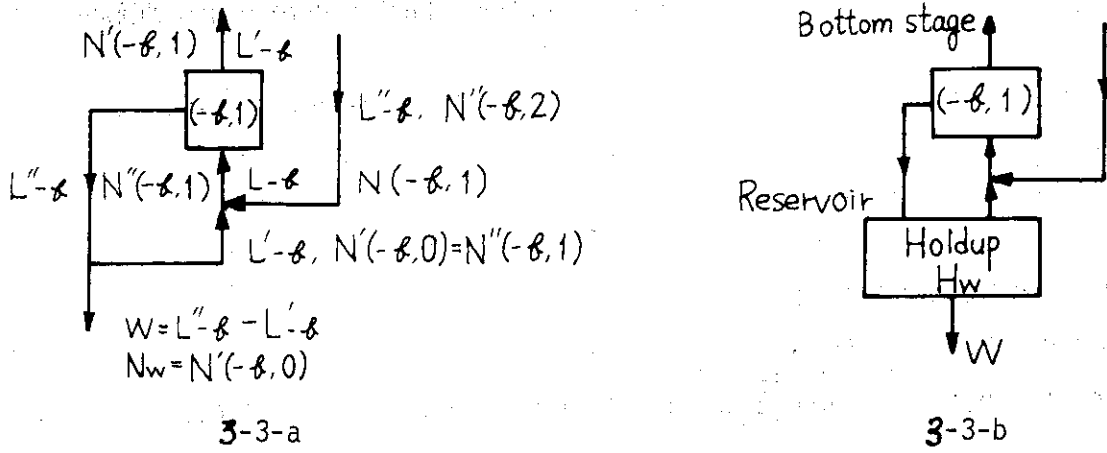


Fig. 3-3 Cascade at the bottom stage of diffusion plant

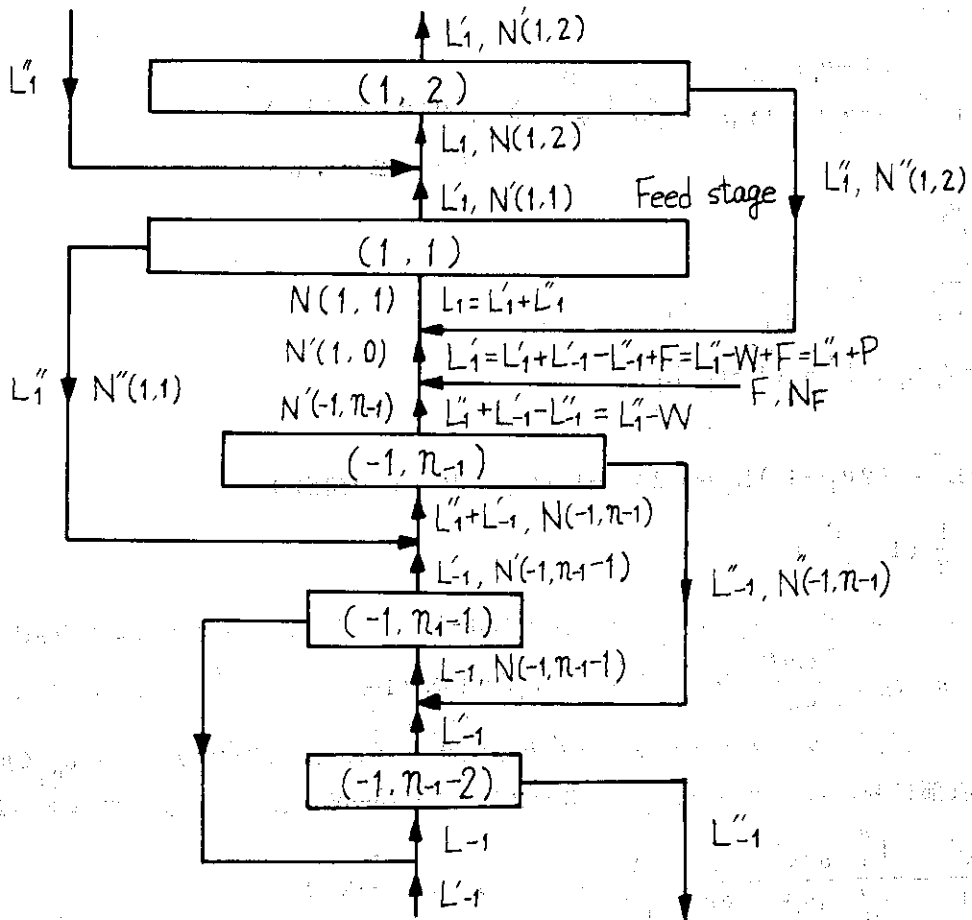


Fig. 3-4 Local cascade of feed stage and its nearby stages

4. ステップカスケードシステムの動特性方程式と定常分布(連続モデル)

ステップカスケードの動特性は各ステップごとにすでに(3-12)や(3-13)ステップの変化する段を除いて与えられた。ここでは回収部を含めた全カスケードの動特性方程式系とその境界条件をまとめて記述する。さらにそれらの方程式の近似式を与える。

4.1 濃縮部と回収部の動特性

$n = 0$ で供給段を表わし、そこから正の方向に濃縮部を負の方向に回収部をとる。第 i ステップの k 段の濃縮器は $n = \sum_{i=1}^{k-1} n_i + k$ ($i \geq 1$) で考える。このとき $N''(t, n)$ は時刻 t における第 n 濃縮器の濃度を表わす。

(3-12)と(3-13)から濃縮部における動特性方程式は次のように与えられる。

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{L_i'}{L_i} \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{P}{L_i'} N'' + (\alpha - 1) N'' (1 - N'') \right) \quad (4-1)$$

($i = 1, 2, \dots, m$)

あるいは

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{(1 - \theta_i)}{\theta_i} \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{P}{\theta_i L_i} N'' + (\alpha - 1) N'' (1 - N'') \right) \quad (4-2)$$

($i = 1, 2, \dots, m$)

カット θ_i の定義から

$$\frac{L_i'}{L_i' + L_i''} = \theta_i, \quad \frac{L_i''}{L_i'} = \frac{1 - \theta_i}{\theta_i}$$

$$L_i' = \theta_i L_i, \quad L_i'' = (1 - \theta_i) L_i$$

さらに

$$L_i' - L_i'' = (2\theta_i - 1) L_i = (2\theta_m - 1) L_m = P \quad (\text{濃縮部})$$

$$\therefore \theta_i = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P}{L_i} \right) \quad (4-3)$$

濃縮部におけるステップ変化がある段あるいは(3-47)式の方程式が変わるところの扱いは $N''(t, n)$ について連続と $\frac{\partial N''(t, n)}{\partial n}$ について $L_i'' \frac{\partial N''}{\partial n} - L_i' (\alpha - 1) N'' (1 - N'')$ のそれぞれのステップからの極限で連続によって行う。カスケードの最終段では境界条件たとえば(3-27)が $n = n_p$ で成り立つ。また回収部における動特性方程式は(3-12)式で $P \rightarrow -W$ として次のように与えられる。

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{L_i''}{L_i'} \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{-W}{L_i'} N'' + (\alpha - 1) N'' (1 - N'') \right) \quad (4-4)$$

($i = 1, -2, \dots, -b$)

回収部におけるカット θ_i は

$$L_i'' - L_i' = -(2\theta_i - 1) L_i = -(2\theta_{-b} - 1) L_{-b} = W \quad (\text{回収部})$$

$$\therefore \theta_i = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{W}{L_i}\right) \quad (4-5)$$

ステップの変化する段と最終段の取り扱いは濃縮部と同様に行えばよい。

4.2 供給段の境界条件

つぎに供給段 $n=0$ のところの扱いを考える。(3-43)式から

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{L_1''}{L_1'} \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{P}{L_1'} N'' + (\alpha-1) N'' (1-N'') \right) + \frac{F}{L_1'} (N_F - N'') \delta(n+0) \quad (4-6)$$

$\delta(n)$ はデルタ関数

$$h \frac{\partial N''}{\partial t} = \frac{L_{-1}''}{L_{-1}'} \frac{\partial^2 N''}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{-W}{L_{-1}'} N'' + (\alpha-1) N'' (1-N'') \right) \quad (4-7)$$

のように分布系への入力形で原料供給の扱いができる。

(4-6) (4-7) を $n=0$ を含む微小区間 $[-\epsilon, +\epsilon]$ で積分し $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考える。

$$\left\{ L_1'' \left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_1 - (\alpha-1) L_1' N'' (1-N'') \right\} - \left\{ L_{-1}'' \left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_{-1} - (\alpha-1) L_{-1}' N'' (1-N'') \right\} + F(N_F - N'') = 0, \quad n=0 \quad (4-8)$$

$$L_1'' \left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_1 = L_{-1}'' \left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_{-1} + (\alpha-1) (L_1' - L_{-1}') N'' (1-N'') + F(N'' - N_F), \quad n=0 \quad (4-9)$$

濃縮部第1ステップと回収部第-1ステップが同じ規模であれば

このとき $L_1' = L_{-1}'$, $L_1'' = L_{-1}''$,

$$\left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_1 = \left[\frac{\partial N''}{\partial n} \right]_{-1} + \frac{F}{L_1''} (N'' - N_F), \quad n=0 \quad (4-10)$$

の境界条件となる。

4.3 基本方程式の近似

動特性方程式(3-47)と(3-50)の $N''(t, n)$ を $N(t, n)$ で記述し、 $N(t, n)$ は同じステージでは N' あるいは N'' を表わしていると解釈できる。さらに $\tau = \frac{t}{h}$ の変数変換を行う。

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{P}{\theta_i L_i} N + (\alpha-1) N(1-N) \right) \quad (4-11)$$

($i=1, 2, \dots, m$) 濃縮部

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{W}{\theta_i L_i} N + (\alpha-1) N(1-N) \right) \quad (4-12)$$

($i=-1, -2, \dots, -b$) 回収部

N の表示は $N(\tau, n)$ としている。

カット θ_i はほとんど $\frac{1}{2}$ に近い値であるのでこの近似で(4-11)を書きかえれば

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{2P}{L_i} N + (\alpha-1) N(1-N) \right) \quad (4-13)$$

または

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} - \left[\frac{2P}{L_i} + (\alpha-1)(1-2N) \right] \frac{\partial N}{\partial n} \quad (4-14)$$

$$\theta_i \approx \frac{1}{2} \quad (4-15)$$

となる。

(4-11)(4-12)はnの領域によって異なる(m+b)個の偏微分方程式を与えるが定常状態のまわりでの外乱の特性や制御を微小変動で考える場合には定常解 $N_0(n)$ のまわりで線形近似をすることができる。

$$N(\tau, n) = N_0(n) + \chi(\tau, n) \quad (4-16)$$

$$\chi(n, t) \ll N_0(n)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} &= \frac{d^2 N_0}{dn^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2} - \left[\frac{2P}{L_i} + (\alpha-1)(1-2N_0-2\chi) \right] \left(\frac{dN_0}{dn} + \frac{\partial \chi}{\partial n} \right) \\ &= \frac{d^2 N_0}{dn^2} - \left[\frac{2P}{L_i} + (\alpha-1)(1-2N_0) \right] \frac{dN_0}{dn} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2} - \left[\frac{2P}{L_i} + (\alpha-1)(1-2N_0) \right] \frac{\partial \chi}{\partial n} \\ &\quad + (\alpha-1)2\chi \left(\frac{dN_0}{dn} + \frac{\partial \chi}{\partial n} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2} - \left[\frac{2P}{L_i} + (\alpha-1)(1-2N_0) \right] \frac{\partial \chi}{\partial n} + 2(\alpha-1) \frac{dN_0}{dn} \chi \quad (4-17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_0}{dn} &= (\alpha-1)N_0(1-N_0) - \frac{2P}{L_i}(N_P - N_0) \\ &= (\alpha-1)N_0 \left(\frac{2P}{(\alpha-1)L_i} + 1 - N_0 \right) - \frac{2P}{L_i} N_P \end{aligned}$$

から $N_P < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2P}{(\alpha-1)L_i} \right)$ 普通満足している条件のとき

$$\frac{dN_0}{dn} < (\alpha-1)N_P$$

で評価されるので(4-17)式右辺の最後の項は χ にかかる係数が小さくなり省略することができる。

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2} - \left[\frac{2P}{L_i} + (\alpha-1)(1-2N_0) \right] \frac{\partial \chi}{\partial n} \quad (4-18)$$

(4-14)あるいは(4-15)において

$$|N(\tau, n)| \ll \frac{1}{2}, \quad |N_0(n)| \ll \frac{1}{2}$$

のときにはそれぞれ線形の方程式で近似される。

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} - \left[\frac{2P}{L_i} + (\alpha-1) \right] \frac{\partial N}{\partial n} \quad (4-19)$$

4.4 ステップカスケードの定常分布

ステップカスケードの静特性は凝縮部について(3-5)あるいは(3-6)で与えられた。こ

では(4-1)式の動特性方程式の定常解として凝縮部と回収部について同様の方程式を導き、
従って(4-1)の動特性は(3-6)のタイプの静特性を完全に含むことを示す。

いま動特性を(4-13)式で考えよう。定常状態では $\frac{\partial N}{\partial \tau} = 0$ となり各ステップごとに段数 n
に関する常微分方程式が与えられる。それに最上段とステップの変化する段でそれぞれに与え
られる境界条件を用いる。

$$M_i = \sum_{k=1}^i n_k, \quad M_0 = 0, \quad M_m = M \quad (4-20)$$

とする。

$$L_i \frac{d^2 N}{dn^2} - \frac{d}{dn} \{ 2PN + (\alpha-1)L_i N(1-N) \} = 0 \quad (4-21)$$

$$(M_{i-1} < n < M, \quad i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\frac{dN}{dn} - (\alpha-1)N(1-N) = 0 \quad (n = M) \quad (4-22)$$

$$L_i \left[\frac{dN}{dn} \right]_i = L_{i-1} \left[\frac{dN}{dn} \right]_{i-1} + (\alpha-1)(L_i - L_{i-1})N(1-N) \quad (n = M_i) \quad (4-23)$$

あるいは

$$L_i \left\{ \left[\frac{dN}{dn} \right]_i - (\alpha-1)N(1-N) \right\} = L_{i-1} \left\{ \left[\frac{dN}{dn} \right]_{i-1} - (\alpha-1)N(1-N) \right\} \quad (4-24)$$

$$(n = M_i)$$

(4-21)を n について $n (> M_{m-1})$ から M まで積分して(4-22)の境界条件を用いれば

$$L_m \frac{dN}{dn} = (\alpha-1)L_m N(1-N) + 2PN - 2PN_p \quad (4-25)$$

$$(M_{m-1} < n < M)$$

を得る。再び(4-21)を $n (> M_{m-2})$ から M_{m-1} まで積分して(4-23)の境界条件といま求
めた(4-25)を $n = M_{m-1}$ で評価して用いて $(m-1)$ ステップにおける方程式が得られる。

$$L_{m-1} \frac{dN}{dn} - (\alpha-1)L_{m-1} N(1-N) - 2PN$$

$$= L_{m-1} \left\{ \left[\frac{dN}{dn} \right]_{m-1} - (\alpha-1)N(1-N) \right\} - 2PN_{m-1}$$

$$= L_m \left\{ \left[\frac{dN}{dn} \right]_m - (\alpha-1)N(1-N) \right\} - 2PN_{m-1}$$

$$= 2PN_p (M_{m-2} < n < M_{m-1}) \quad (4-26)$$

(4-25)と(4-26)はそれぞれの流量のみが異なる類似な方程式である。同様の操作を行っ
ていくと i ステップの方程式として次式を得る。

$$\frac{dN}{dn} = (\alpha-1)N(1-N) - \frac{2P}{L_i} (N_p - N) \quad (M_{i-1} < n < M_i) \quad (4-27)$$

(4-27)式は $i = 1, 2, \dots, m$ について成り立っている。

回収部については次のようになる。

$$\frac{dN}{dn} = (\alpha-1)N(1-N) + \frac{2W}{L_i} (N_w - N) \quad (4-28)$$

$$(M_i < n < M_{i+1}, \quad i = -1, -2, \dots, -b)$$

4.5 分離係数, 段間流量, 還流比が変化したときの定常分布を計算するプログラム

与えられた濃縮プラントで分離係数, 段間流量, 還流比が変化したときの定常分布を計算する方法を述べる。プラントの劣化や運転変更に対して有効である。

ステップカスケードの定常分布を(4-27)(4-28)から陽に与える式を導く。線形モデルと非線形モデルのそれぞれに対して第*i*ステップ(濃縮部と回収部で別々になる)の段数*n_i*を与えたとき境界濃度(*N_{i-1}*から*N_i*を定めるか逆に*N_i*から*N_{i-1}*を定める)を求める。あるいは境界濃度を与えて*n_i*を求める。計算例によってモデルの違いを検討する。方形カスケードにおける扱いは解析的に行える。(Appendix B)

4.5.1 線形モデル

基礎式は(4-27),(4-28)式から直ちに次のように与えられる。

$$\frac{dN}{dn} - \left(\frac{2P}{L_i} + \alpha - 1\right)N = -\frac{2P}{L_i} N_P \quad (\text{濃縮部}) \quad (4-29)$$

$$\frac{dN}{dn} + \left(\frac{2W}{L_i} - \alpha + 1\right)N = \frac{2W}{L_i} N_W \quad (\text{回収部}) \quad (4-30)$$

濃縮部で与えられる(4-29)式の解を考える。

$$c_i = \frac{2P}{L_i} / (\alpha - 1) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4-31)$$

として一般解は

$$N(n) = A \cdot \exp((\alpha - 1)(1 + c_i)n_i) + \frac{c_i}{1 + c_i} 2PN_P \quad (4-32)$$

で与えられ, 境界値を用いて定数Aが定められる。

$$N(0) = A + \frac{c_i}{1 + c_i} 2PN_P = N_{i-1}$$

$$N(n_i) = A \cdot \exp((\alpha - 1)(1 + c_i)n_i) + \frac{c_i}{1 + c_i} 2PN_P = N_i$$

から

$$N_i = N_{i-1} + \left\{ \exp((\alpha - 1)(1 + c_i)n_i) - 1 \right\} \left(N_{i-1} - \frac{c_i}{1 + c_i} N_P \right) \quad (4-33)$$

あるいは

$$N_{i-1} = N_i - \left\{ 1 - \exp(-(\alpha - 1)(1 + c_i)n_i) \right\} \left(N_i - \frac{c_i}{1 + c_i} N_P \right) \quad (4-34)$$

また*n_i*は次のように求められる。

$$n_i = \frac{1}{(\alpha - 1)(1 + c_i)} \ln \frac{N_i - \frac{c_i}{1 + c_i} N_P}{N_{i-1} - \frac{c_i}{1 + c_i} N_P} \quad (4-35)$$

回収部についても同様に考えられる。

$$c_i = \frac{2W}{L_i} / (\alpha - 1) \quad (i = -1, -2, \dots) \quad (4-36)$$

として

$$N_{i+1} = N_i + \left\{ \exp((\alpha-1)(1-c_i)n_i) - 1 \right\} \left(N_i - \frac{c_i}{c_i-1} N_W \right) \quad (4-37)$$

あるいは

$$N_i = N_{i+1} - \left\{ 1 - \exp(-(\alpha-1)(1-c_i)n_i) \right\} \left(N_{i+1} - \frac{c_i}{c_i-1} N_W \right) \quad (4-38)$$

さらに

$$n_i = \frac{1}{(\alpha-1)(c_i-1)} \ln \frac{N_{i+1} - \frac{c_i}{c_i-1} N_W}{N_i - \frac{c_i}{c_i-1} N_W} \quad (4-39)$$

(4-37)~(4-39)は $i = -1, -2, \dots$ に対する式で $N_0 = N_P$ と考える。

4.5.2 非線形モデル

基礎式は(4-27), (4-28)式で与えられる。

濃縮部について考える。(4-31)と同じに

$$c_i = \frac{2P}{L_i} / (\alpha-1) \quad (i=1, 2, \dots) \quad (4-40)$$

を定める。(4-27)から

$$\int_0^{n_i} dn = \int_{N_{i-1}}^{N_i} \frac{-1}{(\alpha-1)} \frac{dN}{N^2 - (1+c_i)N + c_i N_P} \quad (4-41)$$

$$(1+c_i)^2 - 4c_i N_P = (c_i+1-2N_P)^2 + 1 - (1-2N_P)^2 > 0$$

であり

$$b_i = \sqrt{(1+c_i)^2 - 4c_i N_P} \quad (4-42)$$

とおく。(4-41)は積分ができ

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{(\alpha-1)b_i} \left[\ln \frac{2N - (1+c_i) + b_i}{2N - (1+c_i) - b_i} \right]_{N_{i-1}}^{N_i} \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)b_i} \ln \frac{(2N_i - (1+c_i) + b_i)(2N_{i-1} - (1+c_i) - b_i)}{(2N_i - (1+c_i) - b_i)(2N_{i-1} - (1+c_i) + b_i)} \\ &= \frac{(2N_i - (1+c_i) + b_i)(2N_{i-1} - (1+c_i) - b_i)}{(\alpha-1)b_i} \\ &\quad - \frac{(2N_i - (1+c_i) - b_i)(2N_{i-1} - (1+c_i) + b_i)}{(\alpha-1)b_i} \\ &= -2 \left\{ b_i (N_i - N_{i-1}) + (1+c_i)(N_i + N_{i-1}) - 2N_{i-1}N_i - 2c_i N_P \right\} \\ \therefore n_i &= \frac{1}{(\alpha-1)b_i} \ln \frac{1+a_i}{1-a_i} \quad (4-43) \end{aligned}$$

ここで

$$a_i = \frac{b_i (N_i - N_{i-1})}{\left\{ (1+c_i)(N_i + N_{i-1}) - 2N_{i-1}N_i - 2c_i N_P \right\}} \quad (4-44)$$

(4-44)式を N_i あるいは N_{i-1} について解けば

$$\left\{ a_i (1+c_i - 2N_{i-1}) - b_i \right\} N_i = 2a_i c_i N_P - (a_i + a_i c_i + b_i) N_{i-1}$$

$d_i = b_i/a_i$ として

$$N_i = \frac{(1+c_i+d_i)N_{i-1} - 2c_i N_P}{2N_{i-1} + d_i - 1 - c_i} \quad (4-45)$$

あるいは

$$N_{i-1} = \frac{2c_i N_P + (d_i - 1 - c_i)N_i}{d_i + 1 + c_i - 2N_i} \quad (4-46)$$

ここで a_i は n_i を用いて (4-43) 式から次のように定められる。

$$\frac{1+a_i}{1-a_i} = \exp((\alpha-1)b_i n_i)$$

$$a_i = \frac{\exp((\alpha-1)b_i n_i) - 1}{\exp((\alpha-1)b_i n_i) + 1} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (4-47)$$

回収部についても同様に考えられる。

$$c_i = \frac{2W}{L_i} / (\alpha-1) \quad (i=-1, -2, \dots) \quad (4-48)$$

$$b_i = \sqrt{(c_i - 1)^2 + 4c_i N_W} \quad (4-49)$$

$$a_i = b_i (N_{i+1} - N_i) / \{(1-c_i)(N_{i+1} + N_i) - 2N_i N_{i+1} + 2c_i N_W\} \quad (4-50)$$

で与えて

$$n_i = \frac{1}{(\alpha-1)b_i} \ln \frac{1+a_i}{1-a_i} \quad (4-51)$$

となる。

逆に解いて表わせば

$d_i = b_i/a_i$ として

$$N_{i+1} = \frac{(1-c_i-d_i)N_i + 2c_i N_W}{2N_i + d_i + c_i - 1} \quad (4-52)$$

あるいは

$$N_i = \frac{(d_i + c_i - 1)N_{i+1} - 2c_i N_W}{d_i - c_i + 1 - 2N_{i+1}} \quad (4-53)$$

ここで a_i は (4-47) と同じ式で与えられる。

$$a_i = \frac{\exp((\alpha-1)b_i n_i) - 1}{\exp((\alpha-1)b_i n_i) + 1} \quad (i=-1, 2, \dots) \quad (4-54)$$

4.5.3 プログラムの概略

以上の諸式を用いて還流比と分離係数が設計値から変化したときのウラン濃縮プラントの定常分布を求めるデジタルプログラムを作成した。このプログラムによって次のような計算ができる。

- ① ウラン濃縮プラントのパラメータとしてステップ数 $m+b$, 各ステップにおける段数 n_i と流量 L_i , 製品量 P と廃棄量 W (従って供給量 $F = P + W$) , 供給濃度 N_P , 分離係数 α を与えてステップの境界段における濃縮ウラン濃度を求める。従って製品濃度 N_P と廃棄濃度 N_W

- もさらに任意の段における濃度も容易に求まる。
- ② 静特性で用いた方程式は非線形モデル(4-27)と(4-28)とこれをさらに線形で考えた線形モデル(4-29)と(4-30)の2つを考え、同じ濃度計算を行う。これはモデルによる近似を定量的に知るためである。
 - ③ 供給段の濃度を N_F に固定して濃縮部と回収部を別々に計算することもできる。非線形モデルでは(4-45)と(4-53)を用い、また線形モデルでは(4-33)と(4-38)を用いてそれぞれ N_P , N_W について収束計算を行う。供給段の濃度を N_F に固定すると出入りの物質バランス($PN_P + WN_W = FN_F$)が満足しないことが起る。
 - ④ 還流比を定格値から変えたとき供給段の濃度は供給濃度 N_F からずれる(供給段で混合が起る)が、この計算にはプラントへの出入りに関する ^{235}U の物質バランス($PN_P + WN_W = FN_F$)を用いて繰返し修正によって収束させている。
 - ⑤ 全還流($P=0$ さらに $W=0$ の場合)の計算にはプラント内に存在する全 ^{235}U 量の保存から供給段の濃度を求めている。すなわち

非線形モデルの場合

$$\frac{dN}{dn} = (\alpha - 1)N(1 - N)$$

$$\frac{1}{\alpha - 1} \int_{N_W}^{N_P} \frac{dN}{1 - N} = \int_0^M N dn = N_F \cdot M$$

$$\therefore (\alpha - 1)N_F \cdot M = \ln \frac{1 - N_W}{1 - N_P} \quad (4-55)$$

線形モデルの場合

$$(\alpha - 1)N_F \cdot M = N_P - N_W \quad (4-56)$$

- ⑥ 分離係数 α が変わったときの同様の計算ができる。

4.5.4 計算例

計算例を示す。表4-1は $N_P = 3.5\%$, $N_W = 0.37\%$, 全段1100の方形カスケードについて種々の還流比に対するウラン濃度を求めている。設計値は非線形モデル, 線形モデルともに大体あっている。線形モデルは非線形モデルと比較して幾分大きめにでる。このような低濃縮プラントでは線形モデルでも有効に用いられることを示し、少し定量的にみれば相対誤差を1%以内にとったとき濃度が4%を超えないときには線形モデル近似が許されると考えられる。濃度が10%近くの相対誤差は5%位で濃度が20%になると相対誤差が約20%と急激に増大する傾向を示す。これは非線形項の $N(1-N)$ が低濃縮において1.0に比して N を省略できることを示しており、特に1%以下の濃度を計算するステップでは線形モデルで十分であると考えてよいであろう。このことは動特性解析にあつては解析を容易にすることになる。

表4-2は8750 ton SWU新ガス拡散プラント(ORO-685)のステップカスケードに対して分離係数の変化に対する境界段のウラン濃度を求めている。流量, 分離係数の推定値は山下静夫氏の計算結果を用いている。この流量の値は非線形連続モデルで妥当な値であることが分かる。非線形モデルで考えた場合 $\alpha = 1.0044$ のときと同じ流量を用い $\alpha = 1.0043$, 1.0042 に変化した状態を考えると供給段において混合が起り最適運転からもまた製品濃度からも望まし

くない。そのときには還流比変更が必要になってくる。計算モデルの違いは濃度分布について著しいものになっていないが、供給段における混合状態を見ると線形モデルで計算したとき分離係数は1.0043に近い値を示している。

表4-3は同じステップカスケードにおける還流比変化に対するウラン濃度分布を与えている。

Table 4-1 ²³⁵U mole fraction for various reflux ratios in square cascade (N_p=3.5%, P=1000 ton/year, 1100 stages, α=1.0038)

4-1-a Rating operation and total reflux

Step i	Numbers of stages n _j	Flow rate* L _i	P*=1.0, W*=7.82		P=0.0, W=0.0	
			Nonlinear model	Linear model	Nonlinear model	Linear model
1	700	2560	3.495 %	3.526 %	3.011 %	3.056 %
			0.722	0.720	0.216	0.213
-1	400	2560	0.365	0.361	0.047	0.046

* 10³ ton/year of uranium

4-1-b Nonlinear model (W=7.82)

Step i	P=1.0	P=0.8	P=0.6	P=0.4	P=0.2	P=0.0
1	3.495 %	4.037 %	4.947 %	6.405 %	9.291 %	17.050 %
	0.722	0.745	0.783	0.848	0.989	1.417
-1	0.365	0.376	0.395	0.429	0.500	0.719

4-1-c Linear model (W=7.82)

Step i	P=1.0	P=0.8	P=0.6	P=0.4	P=0.2	P=0.0
1	3.526 %	4.116 %	5.017 %	6.548 %	9.742 %	20.465 %
	0.720	0.740	0.775	0.837	0.971	1.431
-1	0.361	0.372	0.390	0.421	0.488	0.719

4-1-d Nonlinear model (P=1.0)

Step i	W=7.82	W=7.0	W=6.0	W=5.0	W=4.0	W=3.0	W=2.0	W=1.0
1 %	3.495 %	3.410 %	3.259 %	3.051 %	2.768 %	2.395 %	1.930 %	1.368 %
	0.722	0.705	0.673	0.629	0.570	0.493	0.397	0.280
-1	0.365	0.335	0.296	0.253	0.208	0.161	0.115	0.071

Table 4-2 ^{235}U mole fraction in New 8750 ton SWU/year plant
when separation factor is changed

Step i	Numbers of stages n_i	Flow rate* L_i	$\alpha=1.0044$		$\alpha=1.0043$		$\alpha=1.0042$	
			Nonlinear model	Linear model	Nonlinear model	Linear model	Nonlinear model	Linear model
3	270	11944	4.008%	4.038%	3.925%	3.962%	3.854%	3.882%
2	190	25220	1.883	1.865	1.871	1.858	1.865	1.849
1	240	49663	1.220	1.207	1.220	1.211	1.225	1.213
			0.710	0.704	0.715	0.711	0.723	0.717
-1	310	49790	0.364	0.359	0.374	0.370	0.385	0.380
-2	100	22176	0.300	0.295	0.310	0.306	0.321	0.316
-3	70	12426	0.248	0.245	0.259	0.256	0.269	0.265

* 10^3 ton/yr. of uranium

Table 4-3 ^{235}U mole fraction for various reflux ratios in New
8750 ton SWU/year plant (ORO-685) ($P=1,500$ ton/yr,
 $W=10,701$ ton/yr, $\alpha=1.0044$)

4-3-a Nonlinear model

$P(\times 10^3 \text{ ton/yr.})$	1.5	1.25	1.0	0.75	0.5	0.25	0.0
Step							
3	4.008 %	4.591 %	5.440 %	6.767 %	9.103 %	14.220 %	30.705 %
2	1.883	2.060	2.324	2.741	3.494	5.235	11.900
1	1.220	1.293	1.403	1.576	1.888	2.616	5.531
	0.710	0.730	0.761	0.811	0.902	1.116	1.996
-1	0.364	0.375	0.391	0.417	0.464	0.575	1.034
-2	0.300	0.309	0.322	0.343	0.382	0.473	0.853
-3	0.248	0.257	0.268	0.286	0.318	0.894	0.710

4-3-b Linear model

$P(\times 10^3 \text{ ton/yr.})$	1.5	1.25	1.0	0.75	0.5	0.25	0.0
Step							
3	4.039 %	4.628 %	5.501 %	6.865 %	9.331 %	15.107 %	44.212 %
2	1.865	2.035	2.289	2.684	3.398	5.068	13.478
1	1.207	1.275	1.380	1.540	1.827	2.495	5.842
	0.704	0.721	0.751	0.796	0.878	1.070	2.032
-1	0.359	0.368	0.384	0.407	0.448	0.546	1.038
-2	0.295	0.303	0.316	0.335	0.369	0.450	0.854
-3	0.245	0.252	0.263	0.278	0.307	0.374	0.710

5. ステップカスケードのハイブリッドシミュレーション

5.1 ハイブリッド計算法

4章においてステップカスケードの基本動特性方程式と境界条件を求めた。これらの偏微分方程式をいかに解くかあるいはこの動特性モデルをいかにシミュレーションを行い種々のプラント動特性を解析するかを考える。一般的にいつて分布定数系モデルの動特性シミュレーションは次の3つの手法が考えられる。

1) DSDT法 (Discrete-Space-Discrete-Time Method)

これは空間変数、時間変数の両方について不連続にとり空間微分と時間微分をそれぞれ差分におきかえもとの方程式を有限差分方程式にして解く方法である。デジタル計算機で一般に用いられている。

2) DSCT法 (Discrete-Space-Continuous-Time Method)

空間的にノードに分割し各ノードを時間に関して常微分方程式で近似する方法である。これは分布系の多点集中定数系近似として広く一般的に用いられてきた。

3) CSDT法 (Continuous-Space-Discrete-Time Method)

時間変数を不連続に、空間変数を連続にとり時間微分を差分におきかえ、もとの方程式を差分微分方程式で近似する方法である。これはハイブリッド計算機で有効にシミュレーションでき比較的新しい手法である。

ここではCSDTの手法を用いたハイブリッド計算機によるシミュレーションを考える。手法1) 2) 3)のそれぞれの解の安定性、収束性、精度についての比較は興味ある困難な問題を含んでいる。CSDT法とDSCT法の手法上の定性的なおおまかな比較を少し記しておく。普通システム(プラント)は有限な空間で与えられているので空間をノードに分割したときノードの総数(集中定数系の次数)は有限になる。この有限個の常微分方程式系は同時に連立して解かれる。そこで分布定数系の構造自体が比較的とり入れやすく境界条件が自然な形に含まれ、またパラメータの空間依存性がノードごとにはあるが直接的に考慮される。しかしこのDSCT法の最大の欠点はハイブリッド計算機のハード上(基本素子の数)の制約からノードの総数をあまり多くとることができないことから生じてくる。大規模プラントのシミュレーションを考えたとき、そこには複数個の分布系を含んでおり他の集中系を含めて全体のバランスから最終的に1つの分布系のノード数が制限されてくる。そこで普通どこまでノード数を減らして分布系の近似が種々の入力パターンに対してある解の精度内で許されるかが問題となる。この定量的議論は一般的には困難で、分布系への入力パターンを限定してノード数をパラメータとして求めた解によって工学的センスで許される最小ノード数を決定することになる。

時間を分割するCSDT法は時刻 t の空間分布 $N_t(n)$ Δt 時間前の空間分布 $N_{t-\Delta t}(n)$ を決定する方法であり、ある時間区間の空間分布は境界条件付きの差分微分方程式の形で表わされ、空間分布変化は時間をパラメータとして求められる。 $N_{t-\Delta t}(n)$ はハイブリッド計算機のデジタルメモリーを用いて貯蔵され、 $N_t(n)$ の計算のときに出力される。分布系の n に関する微分がそのまま $N_t(n)$ の微分に対応しDSCT法のような方程式の数は増えない。しかし各時刻 t ごとに境界値問題を解かなければならない。パラメータの空間と時間の依存性は時間依存性は各

時刻 t ごとに係数を変更してまた空間依存性は可変定数系の方程式の形でハイブリッド計算機では近似的に容易に処理できる。そこでCSDT法の問題は境界値問題をいかに処理するか、分布系への入力パターンに対してより正確な分布を得るための情報処理があるか、時間幅 Δt を入力パターンと系の構造によってどう選んだらよいかである。

5.2 方形カスケードのハイブリッドシミュレーション

5.2.1 系の記述とハイブリッドシミュレーション

ウラン濃縮プラントの動特性シミュレーションを考えるに、まずプラントは単純なものにとり、そのCSDT法によるハイブリッドシミュレーションの方法を詳述する。方形カスケードで濃縮部のみ動特性おもにスタートアップを中心に解析する。種々の近似レベルの動特性方程式と境界条件を与えることができるが次の形で系を規定する。

$$h \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{2P}{L} N + (\alpha-1) N(1-N) \right) \quad (5-1)$$

$N(t, n)$: 第 n 段時刻 t の $^{235}\text{UF}_6$ の濃度

α : 分離係数

P : 製品取り出し流量

L : 上昇流量 (L') + 下降流量 (L'') を流量 (L) とする。

h : 各段のホールドアップ量 (H) / 上昇流量 (L') の値

(5-1) 式を次の境界条件と初期条件のもとで解く問題を考える。

$$n = 0 \quad N(t, 0) = N_F \quad (\text{原料組成}) \quad (5-2)$$

$$n = M \quad \frac{\partial N}{\partial n} - (\alpha-1) N(1-N) \Big|_{n=M} = 0 \quad (5-3)$$

$t = 0$ で初期分布はまず簡単に

$$N(0, n) = N_F \quad (5-4)$$

で与えておく。

$n=M$ の境界条件は最上段の結合の仕方や貯蔵タンクの有無によって変わってくるが (5-3) 式はごく普通のカスケードを最上段でも行ったものである。

(5-1) ~ (5-4) にCSDTの手法を応用する。時刻 t に関する差分を簡単に考えれば

$N(t, n)$ を $N_t(n)$ で表わし

$$\frac{\partial N(t, n)}{\partial t} \text{ を } \frac{N_t(n) - N_{t-\Delta t}(n)}{\Delta t} \text{ で評価して次の方程式を得る。}$$

$$\begin{aligned} h \frac{N_t(n) - N_{t-\Delta t}(n)}{\Delta t} &= \frac{d^2 N_t(n)}{dn^2} - \frac{d}{dn} \left\{ \frac{2P}{L} N_t(n) + (\alpha-1) N_t(n)(1-N_t(n)) \right\} \\ &= \frac{d^2 N_t(n)}{dn^2} - \left(\frac{2P}{L} + \alpha-1 \right) \frac{dN_t(n)}{dn} + 2(\alpha-1) N_t(n) \frac{dN_t(n)}{dn} \end{aligned} \quad (5-5)$$

$$\frac{dN_t(M)}{dn} = (\alpha-1) N_t(M)(1-N_t(M)) \quad (5-6)$$

$$N_t(0) = N_F \quad (5-7)$$

$$N_0(n) = N_F \quad 0 \leq n \leq M \tag{5-8}$$

定常分布は(5-5)式から $t \rightarrow \infty$ で $N_t(n) = N_{t-\Delta t}(n)$ (あるいは $\Delta t = \infty$ にとり) と考え、(5-6)と(5-7)の境界条件のもとでいわゆる2点境界値問題として解くことができる。すでに4章で述べたとまったく同じ形で求まる。

$N_\infty(n)$ を $N(n)$ と記して

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dn} &= (\alpha-1)N(1-N) - \frac{2P}{L}(N_P-N) \\ N(0) &= N_F, \quad N(W) = N_P \end{aligned} \right\} \tag{5-9}$$

この定常分布が空間変数の関数として正確に求められるということはCSDTの手法の興味ある利点である。一気に定常分布を求めるアルゴリズムは(5-9)の2点境界値問題を解くことであるが同時にこれは(5-5)~(5-7)の動特性の $t = \infty$ の極限の形と一致する。

時刻 $t - \Delta t$ の分布 $N_{t-\Delta t}(n)$ から時刻 t における分布 $N_t(n)$ を求めるには(5-5)の動特性方程式を(5-6)と(5-7)の境界条件で解けばよい。この2点境界値問題は $n = 0$ において未定な $\frac{dN}{dn}$ を解曲線上 $n = M$ で(5-6)を満足するようにして解かれる。この $\frac{dN}{dn} \Big|_{n=0}$ の値を求めるもっとも直接的なアルゴリズムは初めに与えた推定値と(5-7)で(5-5)式を解き $n = M$ で(5-6)の左辺を評価しこの誤差が許される範囲内に入っていなければその誤差に比例した値で推定値を変更してある範囲内に収束するまで繰り返すことである。このアルゴリズムは系の構造と推定値に対する解の感度を考えて後に数値的に検討される。

5.2.2 Scaled Equation

(5-5)式をアナログ回路でシミュレートするために時間と空間(段数)のスケージングを考え、具体的に数値を与えて境界値問題の解の様子を少しラフにチェックしてみる。一般に差分モデルから連続モデルを求めるためには

$$\Delta n = \frac{W}{n_P} \quad (n_P, \text{ノードの総数} \quad W, \text{全長}) \tag{5-10}$$

として差分方程式を $(\Delta n)^k$ (k は差分の段階)で割り $\Delta n \rightarrow 0$ と行い k 階の微分方程式の形で連続モデルを得る。いままでの機縮プラントの場合は

$$\frac{1}{\left(\frac{W}{n_P}\right)^2} \times (\text{差分モデルの左辺}) = \frac{1}{\Delta n^2} \times (\text{差分モデルの右辺})$$

から

$$\left(\frac{n_P}{W}\right)^2 \times (\quad) = \frac{1}{(\Delta n)^2} (\quad) - \left(\frac{n_P}{W}\right) \frac{1}{\Delta n} (\quad) \tag{5-11}$$

で $\Delta n \rightarrow 0$ とし $n = [0, W]$ の連続変数について微分方程式が得られる。 $W = 1$ とすれば n は $[0, 1]$ 区間の変数になり、この観点からいえばいままでの偏微分方程式の記述は $W = n_P$ として $n = [0, n_P]$ の連続変数で表わしたことになる。

(5-5)式で変数 n を $[0, 1]$ で表示するには $\frac{n}{n_P} \rightarrow n$ に変換すればよい。

$$\frac{h}{\Delta t} (n_P)^2 (N_t - N_{t-\Delta t}) = \frac{d^2 N_t}{dn^2} - \left(\frac{2P}{L} + \alpha - 1\right) n_P \frac{dn_t}{dn} + 2(\alpha - 1) n_P N_t \frac{dN_t}{dn} \tag{5-12}$$

次の方形カスケードの数值的に方程式，境界条件，時間のスケーリングなどを考えていく。

$$n_p = 700 \text{ 段}, \quad \alpha = 1.0038$$

$$N_p = 0.0350 \text{ (3.5\%)} \text{ 希望値}, \quad N_F = 0.0072 \text{ (0.72\%)}$$

$$H/L' = h = 5 \text{ 秒}, \quad P/L' = 1/1280$$

$$5 \times (700)^2 \cdot \frac{1}{\Delta t} (N_t - N_{t-\Delta t}) = \frac{d^2 N_t}{dn^2} - \left(\frac{1}{1280} + 0.0038 \right) \times 700 \frac{dN_t}{dn} + 2 \times 0.0038 \times 700 N_t \frac{dN_t}{dn}$$

$$24.5 \times 10^5 \cdot \frac{1}{\Delta t} (N_t - N_{t-\Delta t}) = \frac{d^2 N_t}{dn^2} - 3.2069 \frac{dN_t}{dn} + 5.320 N_t \frac{dN_t}{dn} \quad (5-13)$$

アナログ計算機用にスケーリングを考えて(ユニット・スケーリングを用いる)

$$0.2450 \times 10^5 \cdot \frac{1}{\Delta t} \left(\left[\frac{N_t}{0.1} \right] - \left[\frac{N_{t-\Delta t}}{0.1} \right] \right) = \frac{d^2 \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]^2} - 0.32069 \frac{d \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]} + 0.0532 \left[\frac{N_t}{0.1} \right] \frac{d \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]} \quad (5-14)$$

境界条件のスケーリング

$$\left[\frac{N_F}{0.1} \right] = 0.0720 \quad (5-15)$$

$$\frac{d \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]} - 7(\alpha - 1) \left[\frac{N_t}{0.1} \right] \left(10 - \left[\frac{N_t}{0.1} \right] \right) = 0 \quad (5-16)$$

(5-14)式で $\Delta t = 1 \text{ day} = 0.864 \times 10^5 \text{ sec}$ とれば

$$A = 0.2450 \times 10^5 / \Delta t = 0.2800$$

のように過渡応答を決定する過去の状態からのフィードバックのゲインが定まる。

$$\frac{d^2 \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]^2} - 0.32069 \frac{d \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]} + 0.0532 \left[\frac{N_t}{0.1} \right] \frac{d \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]} - 0.2800 \left[\frac{N_t}{0.1} \right] = -0.2800 \left[\frac{N_{t-\Delta t}}{0.1} \right] \quad (5-17)$$

アナログ計算部の Machine Equation が (5-17) 式で与えられ，その境界条件が (5-15) と (5-16) で示されている。この境界値問題を解くアルゴリズムは線形モデルと同様に考え (5-17) 式を用いて，その誤差分を

$$\left. \frac{d \left[\frac{N_t}{0.1} \right]}{d[10n]} \right|_{n=0} \equiv Y_0 \text{ (guess)} \quad (5-18)$$

の修正に用いる。すなわち

$$Y_0(\text{new}) = Y_0(\text{old}) - \text{GAIN} \times \{Y_2 - 7(\alpha - 1)Y_1(10 - Y_1)\} \quad (5-19)$$

ここで

$$Y_1 = \left[\frac{N_t}{0.1} \right] \Big|_{n=10} \quad (5-20)$$

$$Y_2 = \frac{d\left[\frac{N_t}{0.1}\right]}{d[10n]} \Big|_{n=10} \quad (5-21)$$

5.2.3 境界値問題の感度

(5-17)式で非線形項をおとし初期値の解に対する影響を考え、非線形境界値を解くための参考にする。

$$\left[\frac{N_t}{0.1} \right] \rightarrow \chi(n), \quad 10n \rightarrow n \text{ で簡単に, また係数も近似して扱う。}$$

まず定常解について

$$\frac{d^2 \chi}{dn^2} - 0.32 \frac{d\chi}{dn} = 0, \quad n = [0, 10] \quad (5-22)$$

$$\text{固有値は } \rho^2 - 0.32 = 0 \quad (5-23)$$

$$\text{から } \rho = 0, \quad 0.32$$

(5-22)の解をラプラス変換から求めると

$$\dot{\chi}(10) = e^{0.32 \times 10} \times \dot{\chi}(0) = 24.5 \dot{\chi}(0)$$

一方(5-16)を線形評価 ($\left[\frac{N_t}{0.1} \right] \ll 10$)した式から

$$\dot{\chi}(10) = 7(\alpha - 1) \chi_p \times 10 = 7 \times 0.0038 \times 0.35 \times 10 = 0.0931 \quad (5-26)$$

よって $\dot{\chi}(0)$ は

$$\dot{\chi}(0) = \frac{0.0931}{24.5} = 0.0038$$

に設定すればよい。非線形項は $\chi(n)$ の変化を幾分おさえるように働くため $\dot{\chi}(0)$ は上の値より少し大きく与えるようになる。

(5-26)で $\chi(10)$ の評価をその設計値を用いたが、この線形モデルで正確にとくには(5-10)で $\chi(10)$ を評価することになる。このときの $\dot{\chi}(0)$ と $\chi(10)$ の値は

$$24.5 \cdot \dot{\chi}(0) = 0.266 \times (0.072 + \frac{23.5}{0.32} \dot{\chi}(0))$$

$$\dot{\chi}(0) = 0.003856 \quad (5-27)$$

$$\chi(10) = 0.3552 \quad (5-28)$$

と求まる。近似のために3.5%より大きめにでている。つぎに過渡状態において

$\Delta t = 1 \text{ day}$ とした(5-17)式をさらに線形近似で用いる。

$$\frac{d^2 \chi_t}{dn^2} - 0.32 \frac{d\chi_t}{dn} - 0.28 \chi_t = -0.28 \chi_{t-\Delta t} \quad (5-29)$$

$t = k \Delta t$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)で $\chi_t = \chi_k$ と表わす。

$$\frac{d^2 \chi_1}{dn^2} - 0.32 \frac{d\chi_1}{dn} - 0.28 \chi_1 = -0.28 \chi_0, \quad \chi_0 = 0.072 \text{ 一定}$$

$\Delta\chi_k = \chi_k - \chi_{k-1}$ とし $\Delta\chi_k$ の方程式で (5-27) を扱う。

k を漸次増やしていくと $\Delta\chi_k$ は 0 に収束していき D になった状態が定常状態である。

$$\frac{d^2 \Delta\chi_1}{dn^2} - 0.32 \frac{d \Delta\chi_1}{dn} - 0.28 \Delta\chi_1 = 0 \quad (5-30)$$

$$\frac{d^2 \Delta\chi_2}{dn^2} - 0.32 \frac{d \Delta\chi_2}{dn} - 0.28 \Delta\chi_2 = -0.28 \Delta\chi_1 \quad (5-31)$$

⋮

$$\frac{d^2 \Delta\chi_k}{dn^2} - 0.32 \frac{d \Delta\chi_k}{dn} - 0.28 \Delta\chi_k = -0.28 \Delta\chi_{k-1} \quad (5-32)$$

⋮

固有値は

$$\rho^2 - 0.32\rho - 0.28 = 0 \quad \rho = -0.39, 0.71 \quad (5-33)$$

(5-30) の解 $\Delta\chi_1$ は $e^{-0.39n}$ と $e^{0.71n}$ の線形結合

(5-31) の解 $\Delta\chi_2$ は $e^{-0.39n}$, $ne^{-0.39n}$, $e^{0.71n}$, $ne^{0.71n}$ の線形結合

(5-32) の解 $\Delta\chi_k$ は

$$\Delta\chi_k = (c_1 + c_2 n + \dots + c_{k-1} n^{k-1}) e^{-0.39n} + (c'_1 + c'_2 n + \dots + c'_{k-1} n^{k-1}) e^{0.71n} \quad (5-34)$$

$\Delta\chi_k$ をもとにもどして $\chi_k(n)$ は (5-34) に定数を加えた形で表わされる。

$\chi_1(n)$ を求めてみる。

$$\chi_1(n) = c_1 e^{-0.39n} + c_2 e^{0.71n} + \chi_0$$

$$\chi_1(0) = c_1 + c_2 + \chi_0 = \chi_0 \quad \text{から } c_1 + c_2 = 0$$

$$\dot{\chi}_1(10) = -0.39 c_1 e^{-3.9} + 0.71 c_2 e^{7.1} = 0.266(c_1 e^{-3.9} + c_2 e^{7.1} + \chi_0)$$

$$-0.124 e^{-3.9} \cdot c_1 + 0.444 e^{7.1} \cdot c_2 = 0.266 \times 0.072$$

$$-0.0025 c_1 + 538 c_2 = 0.019 \quad (e^{-3.9} = 0.02, e^{7.1} = 1212)$$

$$\therefore c_1 = -c_2 = -0.356 \times 10^{-4}$$

$$\dot{\chi}_1(0) = -0.39 c_1 + 0.71 c_2 = 0.392 \times 10^{-4} \quad (5-35)$$

$$\chi_1(10) = c_2 e^{7.1} + 0.072 = 0.115 \quad (5-36)$$

t=0 から Δt 時間後の分布 $\chi_1(n)$ は $\chi_1(0) = 0.072$ と (5-35) で与えられる $\dot{\chi}_1(0) = 0.392 \times 10^{-4}$ で 2 点境界値問題が解かれて求められることになる。

(5-32) の解の初期値 $\Delta\dot{\chi}_k(0)$ の感度をしらべる。

$\Delta\chi_k(0) = 0$ であるので

$$\Delta\dot{\chi}_k(s) = \frac{\Delta\dot{\chi}_k(0)}{s^2 - 0.32s - 0.28} - \frac{0.28 \Delta\dot{\chi}_{k-1}(s)}{s^2 - 0.32s - 0.28}$$

$\Delta\dot{\chi}_k(0)$ に関する項は

$$\frac{\Delta\dot{\chi}_k(0)}{s^2 - 0.32s - 0.28} \xrightarrow{\text{ラプラス逆変換}} (-0.909e^{-0.39n} + 0.909e^{0.71n}) \Delta\dot{\chi}_k(0) = \Delta\dot{\chi}_{k1}(n)$$

$$\Delta \dot{\chi}_{k1}(n) = \frac{d}{dn} \Delta \chi_{k1}(n) = (0.035 e^{-0.39n} + 0.645 e^{0.71n}) \Delta \dot{\chi}_k(0)$$

$n=10$ で評価すると

$$\Delta \chi_{k1}(10) = 1.102 \times 10^3 \Delta \dot{\chi}_k(0) \quad (5-37)$$

$$\Delta \dot{\chi}_{k1}(10) = 0.782 \times 10^3 \Delta \chi_k(0) \quad (5-38)$$

そこで境界条件の誤差 $\Delta \dot{\chi}_k(10) - 0.266 \Delta \chi_k$ が正ならば $\Delta \dot{\chi}_k(0)$ が大きく与えすぎたことになりこの誤差によって $\Delta \dot{\chi}_k(0)$ を減少させることによって境界条件を満足することができる。解 $\chi_k(n)$ に対する初期値 $\dot{\chi}_k(0)$ についてまったく同様であり、 $\dot{\chi}_k(0)$ を決定するアルゴリズムは簡単に $\text{Gain} \times \{ \dot{\chi}_k(10) - 0.266 \chi_k(10) \}$ の形で修正していけばよい。このとき Δt 前の分布 $\chi_{k-1}(n)$ とそのフィードバックゲインを決める Δt のとり方に関して Gain を最適にとる必要があり、またもっとよい非線形の修正アルゴリズムが非線形モデルでは特に考えられるかも知れない。

スタートアップのときには

$$\chi_{k-1}(n) \leq \chi_k(n) \quad \text{で} \quad \frac{d\chi_k}{dn} \geq 0 \quad (5-39)$$

$$0 \leq \dot{\chi}_k(0) \leq 0.0039$$

$\dot{\chi}_k(0)$ の増加は $\chi_k(10)$ を増加させる。

なども考えて Gain が最も有効に決められる。一般的に最も有効な Gain 決定は動特性解析の型によると考えられる。

5.2.4 ハイブリッドプログラムと計算例

5.2.2 の諸式をもとにしたハイブリッド計算用のアナログプログラムを図 5-1 に示す。

図において $\frac{dN_t}{dn}$ の初期値 Y_0 はデジタル計算機から直接 DAC を通して繰返し設定される。2つの ADC 中 N_t は次の時刻 $t + \Delta t$ の分布を計算するために必要であり Δn でサンプルしてデジタルメモリーに貯蔵される。境界値問題の収束性の検討のために用いたテストプログラムでは積分時間を 10 sec にとり分布をそのままの形 (1次ホールドや折れ線近似を用いずにただの 0次ホールド) で比較的正確に再現させるために 0.1 sec のサンプリングとし 100 点の値で近似する。 Y_1 はこの 100 番目の値である。もう 1つの ADC される Y_2 は $\frac{dN_t}{dn}$ の $n=10$ sec (ただし machine value) の値のみをストアする。 Δt 前の分布 $N_{t-\Delta t}(n)$ はデジタル計算機から $N_t(n) - N_{t-\Delta t}(n)$ の形で 0.1 sec ごとにアナログ回路へ出力される。アナログ回路のオペレートは境界条件が許される範囲内に入るまで (5-19) によって Y_0 を変更して繰り返される。動特性の時間進みを与える Δt はアナログ回路の安定性から制限があり、現在のスケーリングのアナログ回路では $\Delta t=1$ day 位が限度でそれ以上ならば任意の値でよい。

次にハイブリッド計算プログラムの流れ図を示す。EAI 690 用ハイブリッドプログラムは Appendix C に載せる。

このプログラムは次の諸点について数値的に検討を行った。

- (1) まず定常分布を求めるプログラムとして用いられ、その解の収束性をチェックする。

- (2) 境界条件の誤差範囲をアナログの精度を考え比較的きつい 0.0005 ととったときの解の収束性と収束した解は満足するものであるか。
- (3) 境界値問題を解くアルゴリズム中の GAIN, Y_0 (初期推定値) の最適値をサーベイする。
- (4) 0.1 秒サンプリングで $N_i(n)$ の 100 個のストアと $N_i(n) - N_{i-\Delta t}(n)$ の 100 個のアウトプットは時間遅れや ADC と DAC の誤差が無視でき分布を正確に移しているか。
- (5) 時間幅 Δt をあらく与えて定常分布への収束は良いか。
- (6) Δt を 10 日, 5 日, 3 日, 2 日, 1 日と変えていってその中間分布の後日 (たとえば 20 日目) の分布への影響を調べる。そして現在のスケーリングのもとでアナログ回路の限界を知ること。

ここでのスタートアップはプラント全体に UF₆ ガスが均一に満たされた状態から全圧縮機が同時に起動状態になり、このとき系内の圧力と流量は各段の濃度変化に先だって定常状態になっているとして、この時点からの動特性解析を定常抜き出し操作で考えている。

図 5-4-a から 10 日以後の分布はかなりゆっくり変化しているので 10 日以後の分布計算には Δt を大きくとることができ、定常到達時間を問題にするときには Δt を可変にかなり大きくとって計算時間を短縮することができる。 Δt を 2 日, 3 日, 5 日として中間時点の分布から後日の分布への影響を調べてみると 15 日以後の分布にはたいした誤差を生じないことが分る (図 5-3)。図 5-4-b からこのプラントは大きな時定数をもつ系の時間応答を示し、定常抜き出し操作による運転では定常状態に達するのに 1 ヶ月半近くを要する。そこでスタートアップの問題はいかにしてこの定常到達時間を短縮した実現可能な運転方式を確立するかであり、簡単には還流比操作が考えられる。ここでは詳細な解析は行わない。このシミュレーションにおける計算時間は境界値問題の収束性と時間幅 Δt によって大きく左右される。前者の収束性を早くするには許される誤差 ϵ をなるべく大きくして初期推定値とゲインを最適にとることによってなされる。ある 1 つの動特性 (たとえばスタートアップ) を解析するには最初の推定値の探索には少し多くの繰返しを要するがそれ以後の分布計算にはせいぜい 5, 6 回で収束するようにゲインを調整すべきである。1 回の積分演算時間を今は 10 sec としているが計算時間を問題にするときにはモード選択またはスケール変更によって簡縮することができる。このときには境界値問題の誤差の与え方に注意する必要がある。時間幅 Δt の変更によって計算時間を短縮することはどんな動特性を解析するかによって Δt の可変の仕方が異なるが時間経過に従って応答が滑らかになることを考え、ある時間間隔で Δt を増やすことによって可能である。

5.3 ステップカスケードのハイブリッドシミュレーション

5.3.1 システムの記述とハイブリッドシミュレーション

ステップカスケードの動特性は 4 章の形で考える。凝縮部と回収部を合わせて扱い、ステップの変化段と供給段は解の接続条件として、さらに最上段と最下段の結合状態は外部との境界条件として用いられる。動特性シミュレーションは前節と同じ CSDT 法を用いることにするが境界条件の取り扱いによっていくつか異なった方法が考えられる。例えば凝縮部と回収部それぞれ別にアナログ回路を用意し、供給段から 2 つの回路を同時に演算させる方法、

最上段と最下段からパラレル演算をさせ供給段で境界条件のバランスをとる方法、最下段から最上段までシリーズ演算させ供給段をステップの変化段と同様に扱う方法などであるが、ここでは最もオーソドックに境界条件を扱い、1つのアナログ回路でステップとともに変更し最下段から最上段まで一気に演算する方法を採用する。すでに基本方程式と境界条件は4章で与えてあるが、近似を入れたシステムを簡単に記述する。

第*i*ステップの動特性方程式

$$h \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} + 2(\alpha-1)N \frac{\partial N}{\partial n} - \left(\frac{2P}{L_i} + \alpha-1 \right) \frac{\partial N}{\partial n} \quad (5-40)$$

(*i* = *b*+1, *b*+2, ..., *b*+*m*) 凝縮部

$$h \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} + 2(\alpha-1)N \frac{\partial N}{\partial n} + \left(\frac{2W}{L_i} - \alpha+1 \right) \frac{\partial N}{\partial n} \quad (5-41)$$

(*i* = 1, 2, ..., *b*) 回収部

境界条件 ;

$$n=0 \text{ (最下段)}, \quad \frac{\partial N}{\partial n} = (\alpha-1)N(1-N) \quad (5-42)$$

$$n = \sum_{k=1}^i n_k \text{ (} i=1, 2, \dots, b-1, b+1, \dots, b+m-1 \text{)} \quad (\text{ステップの変化段})$$

$$[N]_+ = [N]_-$$

$$\left[\frac{\partial N}{\partial n} \right]_+ = \frac{L_i}{L_{i+1}} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right]_- + \left(1 - \frac{L_i}{L_{i+1}} \right) (\alpha-1)N(1-N) \quad (5-43)$$

$$n = \sum_{k=1}^b n_k \text{ (供給段)}$$

$$[N]_+ = [N]_-$$

$$\left[\frac{\partial N}{\partial n} \right]_+ = \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right]_- + \frac{2F}{L_{b+1}} (N - N_F) \quad (5-44)$$

$$n = \sum_{k=1}^{b+m} n_k \text{ (最上段)}, \quad \frac{\partial N}{\partial n} = (\alpha-1)N(1-N) \quad (5-45)$$

初期条件 ; 方形カスケードの解析と同じスタートアップ考える。すなわち

$$t=0, \quad N(0, n) = N_F \quad (5-46)$$

凝縮パラメータ (α, N_F, P, W, L_i) は4章4でチェックした値を用いる。アナログ回路におけるスケリングは方形カスケードのときと同様に考えるが、凝縮部と回収部の全段を1つのアナログ回路で処理するので少しの工夫が必要になる。Appendix D にこの回路を示す。

時刻 t_1 の分布 $N_{t_1}(n) = N(t_1, n)$ から Δt 先の分布 $N_{t_1+\Delta t}(n)$ の分布を求めるアルゴリズムを簡単に述べる。(5-40)~(5-46)は前節と同様にCSDTの手法を用いて書きかえてあるとする。 $(N(t, n))$ を $N_t(n)$ で表わし、 $\frac{\partial N(t, n)}{\partial t}$ を $\frac{1}{\Delta t} (N_t(n) - N_{t-\Delta t}(n))$ で評価して表現形式をかえておく)

1. $N_{t_1+\Delta t}(0) = Y_0$ (時刻 $t_1+\Delta t$ における廃棄材濃度) の推定値を $N_{t_1}(0)$ の近くで与え、

(5-42)式から $\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(0)$ を計算する。 $N_{t_1+\Delta t}(0)$ と $\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(0)$ を初期値として (5-42)式 (回収部第1ステップで流量は L_1 を用いる) を $n=0$ から $n=n_1$ まで演算する。

2. $n=n_1$ の値 $N_{t_1+\Delta t}(n_1)$ と $\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(n_1)$ から (5-43)式を用いて $[N_{t_1+\Delta t}(n_1)]_+$ と $[\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(n_1)]_+$ の値を計算する。この値を初期値として (5-42)式 (回収部第2ステップで流量は L_2 を用いる) を $n=0$ から $n=n_2$ まで演算する。
3. 2と同じ操作を $n=n_2, n_3, \dots, n_{b-1}$ として $b-3$ 回繰返す。(1,2,3によって回収部のステップ全部の演算が終る)
4. $n=n_b$ の値 $N_{t_1+\Delta t}(n_b)$ と $\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(n_b)$ から (5-44)式を用いて $[N_{t_1+\Delta t}(n_b)]_+$ と $[\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(n_b)]_+$ の値を計算する。この値を初期値として (5-41)式 (凝縮部第 $b+1$ ステップで流量は L_{b+1} を用いる) を $n=0$ から $n=n_{b+1}$ まで演算する。
5. $n=n_{b+1}$ の値 $N_{t_1+\Delta t}(n_{b+1})$ と $\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(n_{b+1})$ から (5-43)式を用いて $[N_{t_1+\Delta t}(n_{b+1})]_+$ と $[\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(n_{b+1})]_+$ の値を計算する。この値を初期値として (5-41)式 (凝縮部第 $b+2$ ステップ) を $n=0$ から $n=n_{b+2}$ まで演算する。
6. 2と同じ操作を $n=n_{b+2}, \dots, n_{b+m-1}$ として $m-3$ 回繰返す。(4,5,6によって凝縮部のステップ全部の演算が終る)
7. $n=n_{b+m}$ の値 $N_{t_1+\Delta t}(n_{b+m})=Y$ と $\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(n_{b+m})=DY$ から (5-45)を満足しているかどうかを調べ、誤差が ϵ (適当に定常分布などの結果から定める) 以上ならばこの誤差によって始めの $N_{t_1+\Delta t}(0)$ の推定値を変更して1~7までの演算を収束するまで続ける。

推定値修正は簡単に次のようにして行う。

$$Y_0(\text{new}) = Y_0(\text{old}) - \text{GAIN} \times \text{ERR}$$

$$\text{ERR} = DY - (\alpha - 1)Y(1 - Y)$$

GAINは収束状況によって定める。

時刻 $t=0$ の初期状態から系の動特性解析をするには $t=0$ の初期分布 $N_0(n)$ から上のアルゴリズムによって Δt 時間先の分布 $N_1(n)$ が求まり、この分布をもとにして $t=2\Delta t$ の分布 $N_2(n)$ が、以下同様に $t=k\Delta t$ の分布 $N_k(n)$ がすぐ前の分布をもとにして定められる。定常分布常分布は $\Delta t \rightarrow \infty$ として中間の時刻の分布に関係なく上のアルゴリズムで求められる。

1のアルゴリズムは設定のしやすさと感度から $\frac{d}{dn} N_{t_1+\Delta t}(0)$ の推定値を与えて (5-42)式から $N_{t_1+\Delta t}(0)$ を求める方式に変更したが本質的にはどちらを先に与えてもよい。

5.3.2 スタートアップの解析

ガス拡散プラントにおけるスタートアップ(起動)の問題は2つの点で重要である。1つは所定の製品が取り出されるまでには幾週間という長い時間が必要になる点と圧縮機による動力費が分離費の約50%という高率を占めている点である。動力費を節約するとか、最大瞬間電力を小さくおさえるとかの点からはプラント全体の圧縮機を同時に起動させずに各ステップごとに適切な方法で起動して安定な定常状態に導くことが考えられる。また定常到達時間を手短かに変化させるものとして還流比操作が考えられる。ここでは還流比操作による起動特性を調べ圧縮機の起動方式は扱わない。

還流比操作による起動方式は次の4つが考えられる。

- ① 全還流操作で起動し最上段濃度 $N_p(t)$ が所定濃度に達した後 N_p と最下段濃度 N_w を定格流量で抜き出す。(全還流操作)
 - ② 初めから定格流量で製品と廃棄材を抜き出す。(一定抜き出し操作)
 - ③ 廃棄材は初めから抜き出し、製品は所定濃度になってから抜き出す。(所定濃度までPのみ全還流)
 - ④ 全還流操作で起動し、製品、廃棄材それぞれが所定濃度になった時点で抜き出す。(それぞれの所定濃度まで全還流操作)
- ④の起動方式はウラン原料を完全に処理し不必要な濃度の廃棄がないことが利点である。各起動方式によって定常運転に入るに要する時間は次の順である。

③, ④ < ① < ②

ハイブリッドシミュレーションの結果を図5-5に示す。図5-5は②の起動方式による濃縮部の各ステップの変化段、供給段、最下段における濃度の時間変化を表わす。滞留時間 $h = H/L'$ を5秒にとり、現在組んだアナログ回路の制約から Δt は5日が限度であった。段方向の濃度分布は図5-6に $\Delta t = 5$ 日ごとに定常分布とともに示される。任意の時刻 t における濃度分布 $N_i(n)$ は段数の連続関数で求められるがここでは10段ごと118個の値で処理された。図5-5から分るように供給段の濃度は時間ともにほとんど変化せず供給濃度(0.711%)を保っている。よって③の起動方式では濃縮部と回収部とを分離して解析してよいことになり、 $\Delta t = 5$ 日の制約が同一のアナログ回路を用いても緩められる。回収部の定常到達時間は濃縮部に比して早いので、解析は濃縮部のみに限ってよいことになる。このときは前節の方形カスケードの解析と同じように行えばよい。

図5-7は $P=0$, W =定格で起動したとき濃縮部の各ステップの変化段、供給段、最下段における濃度の時間変化を表わす。最上段の濃度は約6日で4%に達しさらに上昇をつづけるが最下段は一定抜き出し操作の時と同様に0.25%に近づき15日位から上昇し始める。さらに時間をとれば $P=0$, W =定格のときの定常分布まで供給段、最上段、最下段は上昇し、最下段は供給濃度に達する。供給段の濃度変化を見ると徐々に上昇していくが、③の起動方式を採った場合約6日で $P=0$ から定格値に変更されるのでほとんど一定で供給濃度に等しいと考えることができる。よって③の方式による解析も濃縮部のみで行ってよいことになる。ここで行ったハイブリッドシミュレーションは時間変化を正確に求める場合にはさらに工夫が必要である。 Δt が0.5日か1日に出来るアナログ回路に改良すべきである。方形カスケードの解析では達成できておりステップカスケードでも濃縮部のみの解析では直ちに行うことができるであろう。この意味で前記の供給段に対する解析は重要である。

還流比操作による起動方式の詳細な定量的解析は今後に残す。特に製品量 P が0から定格に急に変わったとき濃度変化は振動がないかを解析する必要がある。もし P の急変に対して濃度変化が大きいときには P を操作する方法をシミュレーションをつかって解析すべきである。滞留時間の変化に対する応答は時間軸を平行移動すれば処理できるが、配管中のホールドアップ量と輸送おくれを定量的に評価することも必要であろう。

Table 5-1 Convergence for boundary value problem in
the steady state calculation

TYPE Y_0 AND GAIN
0.0, 5.0,

J	Y_0	Y_1	Y_2	ERR
1	.00000	.07250	.00134	-.01901
2	.09506	.14086	.22583	-.01435
3	.16686	.19250	.39440	-.01077
4	.22075	.23132	.52050	-.00805
5	.26103	.26025	.61230	-.00619
6	.29200	.28247	.68347	-.00466
7	.31533	.29895	.73620	-.00352
8	.33294	.31115	.77563	-.00262
9	.34607	.32055	.80541	-.00199
10	.35603	.32751	.82775	-.00148
11	.36347	.33276	.84423	-.00114
12	.36919	.33679	.85705	-.00086
13	.37350	.33972	.86645	-.00064
14	.37674	.34191	.87353	-.00048

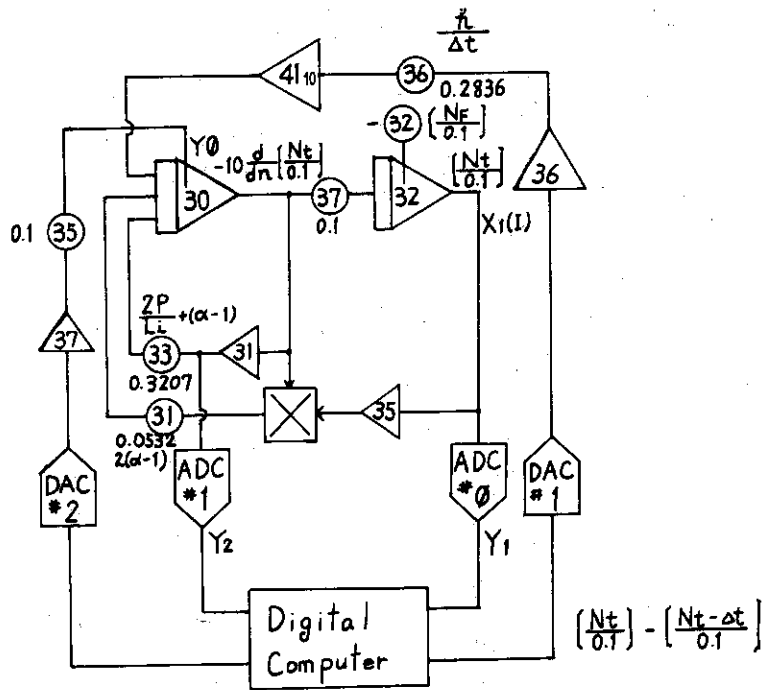


Fig. 5-1 Analog program (Square cascade)

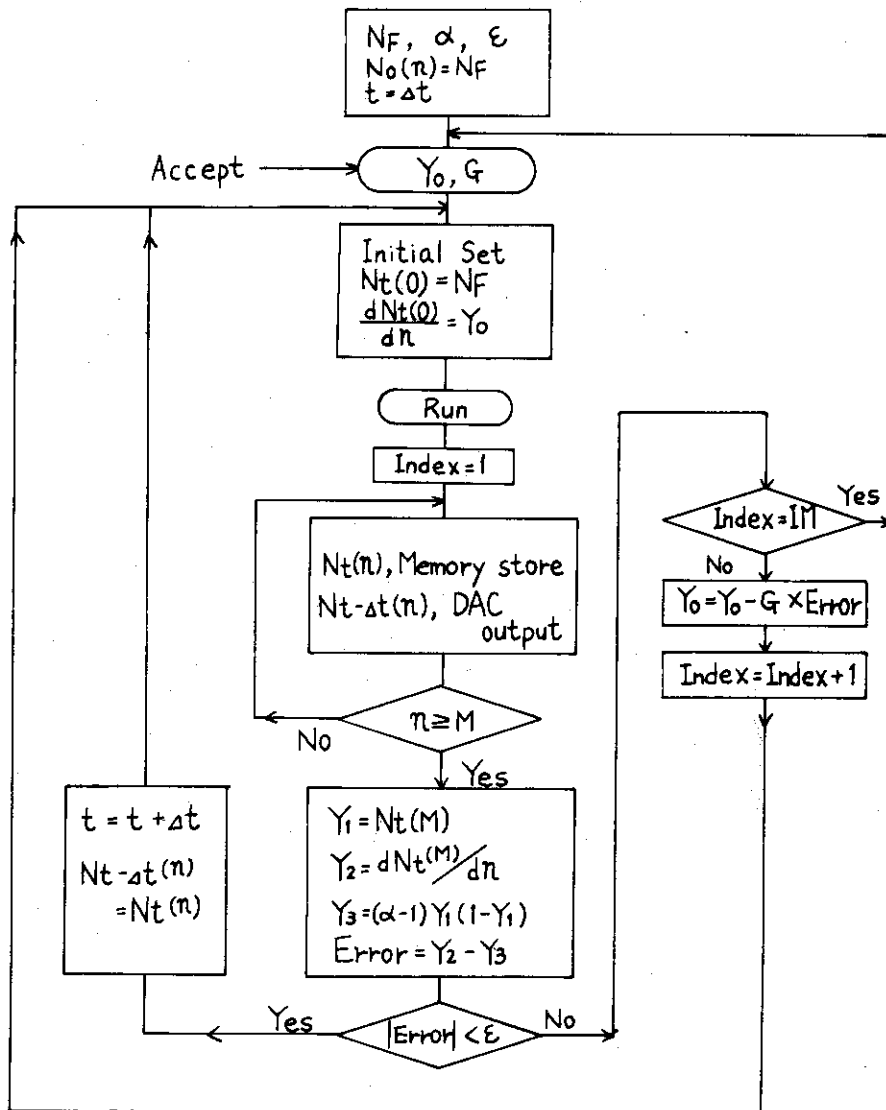


Fig. 5-2 Flow chart for the CSDT hybrid program (Square cascade)

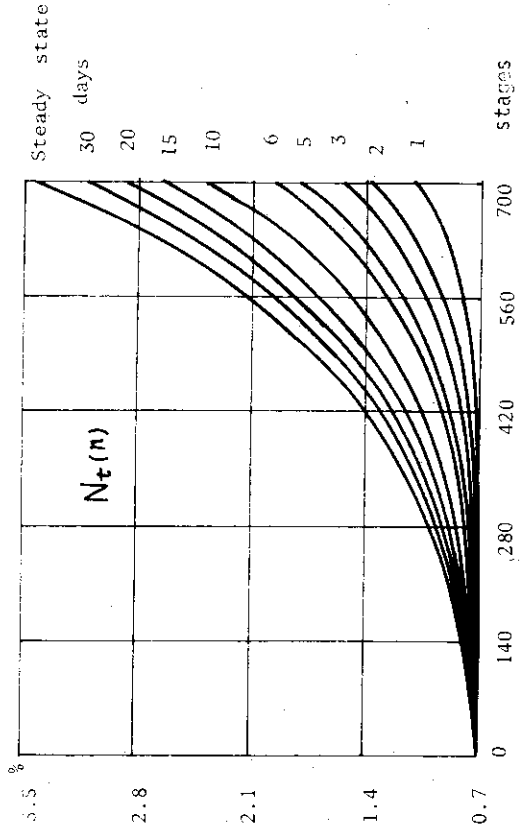


Fig. 5-4-a Mole fraction as a function of stages with various times

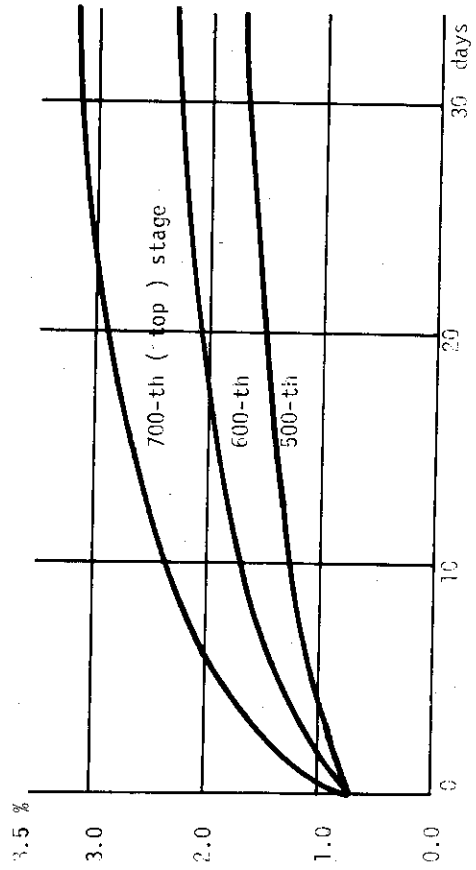


Fig. 5-4-b Mole fraction at the different stages in the startup (Square cascade)

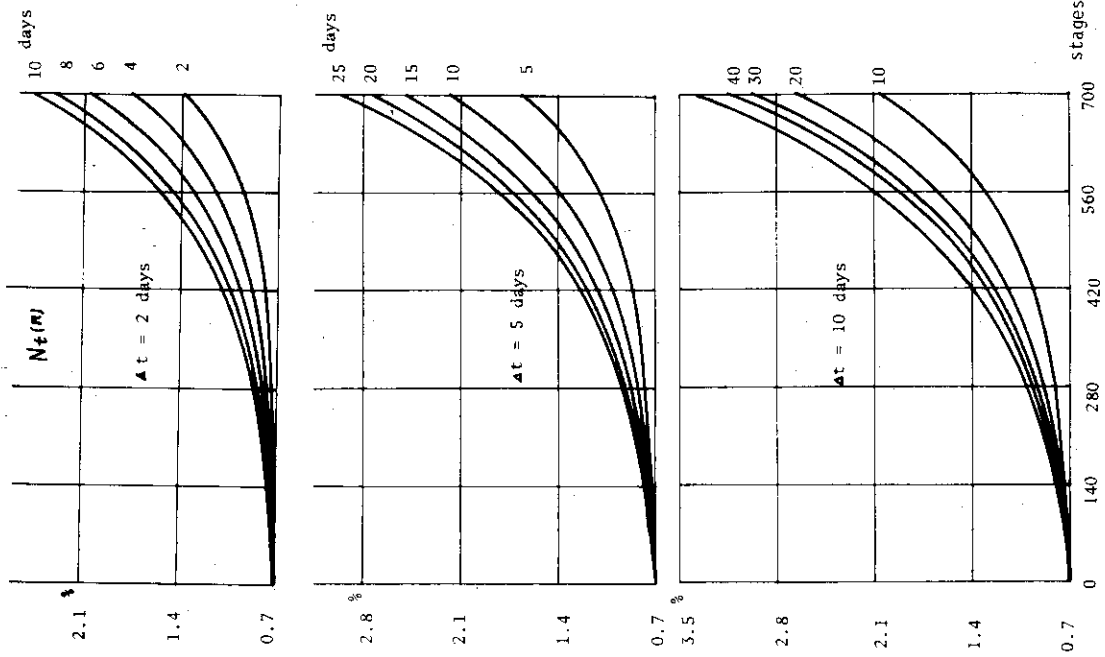


Fig. 5-3 Mole fraction changes with different time mesh

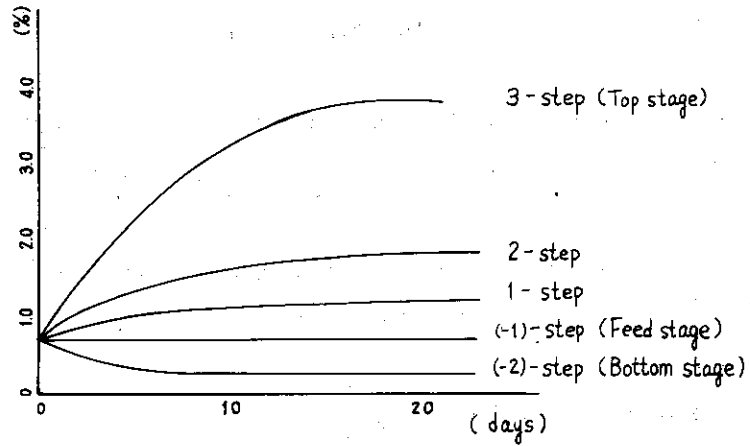


Fig. 5-5 Mole fraction at the outlet of each step in the startup for $P=0$ ton/yr. and $W=10.7 \times 10^3$ ton/yr. (rated value)

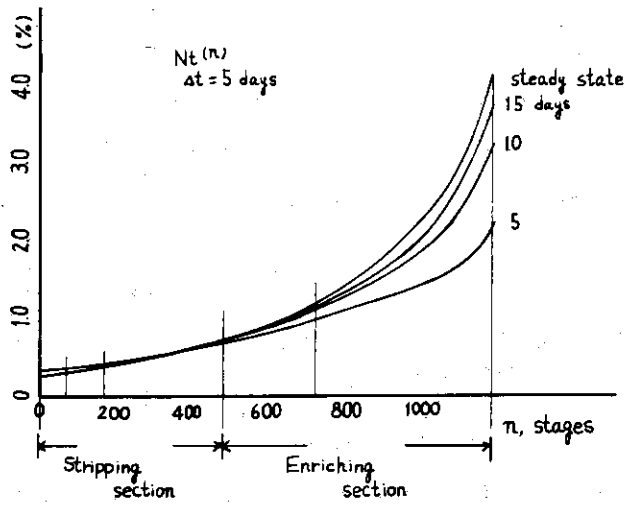


Fig. 5-6 Mole fraction as a function of stages with various times

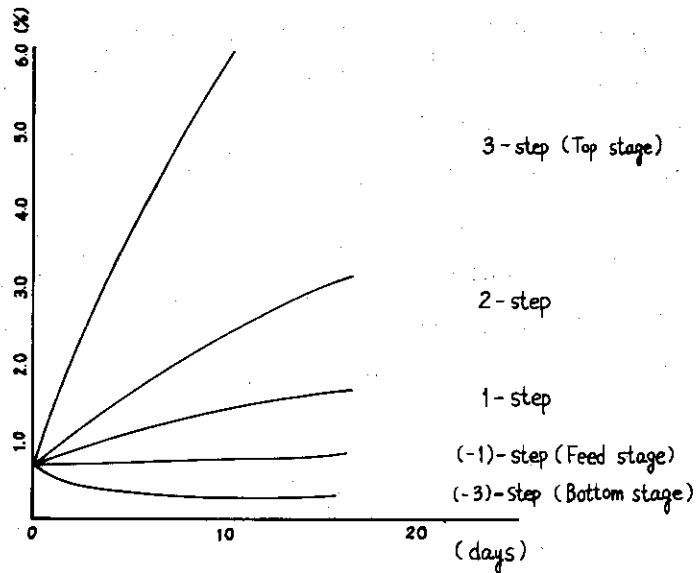


Fig. 5-7 Mole fraction at the outlet of each step in the startup for $P=1.5 \times 10^3$ ton/yr. and $W=10.7 \times 10^3$ ton/yr. (rated values)

6. 結 言

千数百段の分離器がカスケードに結合された凝縮プラントの動特性について、その基本方程式の検討とハイブリッドシミュレーションを行った。ここで得られた結果と注意事項は次の諸点である。

- (1) 各段間流量の変化する一般のカスケードについて動特性方程式を厳密な静特性を含む形で導いた。この方程式の連続モデル(凝度と流量についての連立偏微分方程式)はK, Cohenの形のものである。
- (2) ステップカスケードの動特性方程式は、ステップの内部において方形カスケード(流量が一定)として簡単に扱えるがステップの変化段、供給段さらにプラントの最上段、最下段の扱いには注意が必要である。ステップカスケードの静特性として通常の動特性より厳密な方程式が与えられた。動特性方程式の1つの帰結は連続モデル(時間と段数を独立変数とする偏微分方程式)におき、前記の特殊段における扱いをすべて境界条件として与えた。この条件式と連続モデルから別に与えられた定常分布を求める微分方程式を導くことができる。
- (3) 動特性解析を行うにあたって定常特性のチェックは重要である。とくに設計値から少し変更した運転が起動時や故障時には必要であり、そのために分離係数、段流量、選流比などが変化したとき定常分布計算を行うプログラムを作成した。設計問題に通常用いられる定常分布を与える微分方程式を用い、そこに含まれている非線形効果について定量的解析を行った。その結果凝度が小さいステップでは線形モデルで十分であることが示された。最適設計問題について全体的なスケッチを行ったがこれはある別な運転状態になったときプラントの最適運転からの距離を考えると参考にしろ。
- (4) 得られた動特性方程式のシミュレーションをハイブリッド計算機を用いて行った。ここで用いた方法は時間を不連続に空間(いまの場合は段数)を連続にして解析するCSDT法である。この方法は空間分布を正確にシミュレーションするには特に重要な方法で定常分布を正確に求めることができる。ここでは方形カスケードとステップカスケードのスタートアップ解析をシミュレーションチェックの意味で行った。スタートアップ、各種プラントの外乱、故障時などの動特性解析を完全な形で行っておらず今後の問題とした。解析を行うにあたっては上記のCSDT法において境界値問題の解法と収束性、時間幅が十分小さくとれるかに注意することが重要である。もう1つのハイブリッドシミュレーションとして空間をノードに分解する方法があり、Appendix Fに述べた。これは凝度の空間(段数)分布が比較的単純なことで、また3の考察から近似的に方程式が与えられることから有効である。特に数10点のノードで分布が比較的精度よく近似されればアナログプログラムは膨大となるが各種の動特性解析を容易に行うことができる。

謝 辞

本研究の遂行に関してはウラン濃縮研究室青地哲男室長ならびに成瀬雄二氏に懇篤な御検討を戴き、また同研究室の吉田浩氏にはプラントパラメータの数値および起動方式の考え方などについて多くの有意義な御討議と御提案をいただいた。

またハイブリッドシミュレーション技法ならびに演算に関しては当研究室渡辺光一氏の熱心な御協力を仰いだ。

本報告の作成に当り上記の方々に深甚な謝意を表する。

参考文献

- Cohen, K. : The Theory of Isotope Separation, McGraw-Hill Book Co.,
New York (1952)
- Higashi, K., A. Oya and J. Oishi : Characteristics of a Tapered Cascade
for Isotope Separation by Gaseous Diffusion, Nucl. Sci. Engng., 32,
pp.159-165 (1968)
- 日本揮発油株式会社 : ガス拡散プラントの非定常解析報告書 (1971.2.28)
東邦夫 ; ウラン濃縮 (日刊工業) (1971)
- Yamashita, S. : Methods of Calculation on a Step Cascade for Enriching
Uranium
J. Nucl. Sci. Technol., 9[8], pp.480-489 (1972)
- Yamashita, S. : A Method of Calculation on a Step Cascade with Side
Flow for Enriching Uranium,
J. Nucl. Sci. Technol., 9[12], pp.721-726 (1972)

謝 辞

本研究の遂行に関してはウラン濃縮研究室青地哲男室長ならびに成瀬雄二氏に懇篤な御検討を戴き、また同研究室の吉田浩氏にはプラントパラメータの数値および起動方式の考え方などについて多くの有意義な御討議と御提案をいただいた。

またハイブリッドシミュレーション技法ならびに演算に関しては当研究室渡辺光一氏の熱心な御協力を仰いだ。

本報告の作成に当り上記の方々に深甚な謝意を表する。

参考文献

- Cohen, K. : The Theory of Isotope Separation, McGraw-Hill Book Co.,
New York (1952)
- Higashi, K., A. Oya and J. Oishi : Characteristics of a Tapered Cascade
for Isotope Separation by Gaseous Diffusion, Nucl. Sci. Engng., 32,
pp.159-165 (1968)
- 日本揮発油株式会社 : ガス拡散プラントの非定常解析報告書 (1971.2.28)
東邦夫 ; ウラン濃縮 (日刊工業) (1971)
- Yamashita, S. : Methods of Calculation on a Step Cascade for Enriching
Uranium
J. Nucl. Sci. Technol., 9[8], pp.480-489 (1972)
- Yamashita, S. : A Method of Calculation on a Step Cascade with Side
Flow for Enriching Uranium,
J. Nucl. Sci. Technol., 9[12], pp.721-726 (1972)

Appendix A. 最小還流比 (minimum reflux ratio) について

ステップカスケードの定常状態を表わす式は次のように与えられた。

$$\frac{dN}{dn} = \frac{L'_i}{L''_i} (\alpha-1)N(1-N) - \frac{P}{L''_i} (N_P - N) = f(N) \quad (\text{A-1})$$

$$f(N) = (\alpha-1) \frac{L'_i}{L''_i} N \left[\left(\frac{P}{(\alpha-1)L'_i} + 1 \right) - N \right] - \frac{PN_P}{L''_i} \quad (\text{A-2})$$

$\frac{dN}{dn} \geq 0$ のためには $f(N) \geq 0$ が必要であり $f(N)$ は N について $0 \leq N \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P}{(\alpha-1)L'_i} \right)$ の範囲で増加関数であるので $f(N_{i-1}) = 0$ すなわち $\left. \frac{dN}{dn} \right|_{N_{i-1}} = 0$ の条件を考えてみる。

$$(\alpha-1)L'_i N_{i-1} (1-N_{i-1}) - P(N_P - N_{i-1}) = 0$$

から

$$\frac{L'_i}{P} = \frac{N_P - N_{i-1}}{(\alpha-1)N_{i-1}(1-N_{i-1})} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{N_P}{N_{i-1}} - \frac{1-N_P}{1-N_{i-1}} \right) \quad (\text{A-3})$$

L'_i/P にこの (A-3) の値を用いたとき、段数 n_i を評価する。

$$c_i = \frac{P}{L'_i} / (\alpha-1) = \frac{N_{i-1}(1-N_{i-1})}{N_P - N_{i-1}}$$

$$b_i = \sqrt{(1+c_i)^2 - 4c_i N_P} = 1 + c_i - 2N_{i-1}$$

$$a_i = b_i (N_i - N_{i-1}) / \{ (1+c_i)(N_i + N_{i-1}) - 2N_{i-1}N_i - 2N_i N_P \}$$

$$= b_i (N_i - N_{i-1}) / (1+c_i - 2N_{i-1})(N_i - N_{i-1}) = 1$$

となり $n_i = \infty$ になってしまう。すなわち $\frac{P}{L'_i}$ を 0 から $(\alpha-1) \frac{N_{i-1}(1-N_{i-1})}{N_P - N_{i-1}}$ まで変化したとき濃度 N_i を実現する段数 n_i は $\frac{1}{\alpha-1} \ln \frac{N_i(1-N_{i-1})}{(1-N_i)N_{i-1}}$ から $+\infty$ となる。

これは (A-2) の $\frac{L'_i}{P}$ を用いると段数をいくら増加しても所定の濃度 N_i を得られないことを意味している。このときの還流比 L'_i/P を最小還流比といい、ここでは $(L'_i/P)_{\min}$ で表わす。

流量 L'_i ($L'_i = L''_i + P$) が与えられていて P を上の値から減少させていき、ついにゼロにする。このとき還流比は ∞ となり、この状態を全還流という。 P の減少とともに必要な段数は減らすことができるがそれにも限度がある。全還流操作のときの濃度分布はカスケードの形に依存せず

$$R(n) = R(0) e^{(\alpha-1)n} \quad (\text{A-4})$$

$$R(n) = \frac{N(n)}{1-N(n)}, \quad R(0) = \frac{N_F}{1-N_F}$$

で簡単に表わされ、この分布までは還流比を操作することによって調整することができる。実際の流量を (A-2) の $(L'_i/P)_{\min}$ の値を用いて

$$L'_i = \rho_i \frac{P}{\alpha-1} \left(\frac{P}{N_{i-1}} - \frac{1-N_P}{1-N_{i-1}} \right), \quad \rho_i > 1 \quad (\text{A-5})$$

と表わされる。さらに差分式で与えた式を用いればより正確な表示ができる。

$$L'_i = \rho_i \frac{P}{\alpha-1} \frac{(N_P - N_{i-1})(1 + (\alpha-1)N_{i-1})}{N_{i-1}(1 - N_{i-1})}, \quad \rho_i > 1 \quad (\text{A-6})$$

$L'_i = L''_i + P$ で $P \ll L''_i$ を与えれば

$$\frac{L''_i}{P} \approx \frac{L'_i}{P}$$

で近似することができるので (A-3) を最小還流比を表わしているとしてよい。

$$(L''_i/P)_{\min} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{N_P}{N_{i-1}} - \frac{1-N_P}{1-N_{i-1}} \right) \quad (\text{A-7})$$

線形モデルで扱う場合には

$$(L''_i/P)_{\min} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{N_P}{N_{i-1}} - 1 \right) \quad (\text{A-8})$$

で表わされる。P=0 の全還流時の濃度分布 (A-4) に対してより簡単に次のように示される。

$$N(n) = N_P e^{(\alpha-1)n} \quad (\text{A-9})$$

Appendix B. 方形カスケードの定常分布(解析的)

(B.1) 全選流操作における定常分布

方形カスケードの全選流操作における定常分布を求める。回収部抜き出し段を $n=0$ にとり $[0, M_1]$ で回収部をまた $[M_1, M]$ で濃縮部を表す。 $n=M_1$ を供給段としている。

$$P=W=0 \quad (B-1)$$

とにおいて、動特性方程式は、

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial N}{\partial n} - (\alpha-1)N(1-N) \right) \quad (B-2)$$

となる。これを n について 0 から M まで積分をし、両端で境界条件を用いる。

$$\int_0^M \frac{\partial N}{\partial \tau} dn = \frac{\partial N}{\partial n} - (\alpha-1)N(1-N) \Big|_0^M = 0$$

$$\int_0^M \{N(\tau, n) - N(0, n)\} dn = 0 \quad (B-3)$$

(B-3) 式はプラント全体に含まれる ^{235}U の量が不変であることを示している。特に定常分布 $\tau = \infty$ において

$$\int_0^M N(\infty, n) dn = \int_0^M N(0, n) dn = N_F \cdot M \quad (B-4)$$

となる。(B-2) から定常分布を与える方程式は境界条件と同一の形である。 $N(\infty, n)$ を $N(n)$ と記して

$$\frac{dN}{dn} - (\alpha-1)N(1-N) = 0 \quad (B-5)$$

$$\frac{N(n)}{1-N(n)} = c e^{(\alpha-1)n} \quad (B-6)$$

定数 c は (B-4) の物質保存の条件式から決定される。(B-5) 式で $N(n) \leq N_F \ll 1$ とし線形近似が許されるときには c は容易に定められる。

$$N(n) = c e^{(\alpha-1)n} \quad (B-7)$$

$$c = \frac{(\alpha-1)M}{e^{(\alpha-1)M} - 1} N_F \quad (B-8)$$

(B.2) 任意抜き出し状態における定常分布

方形カスケードの定常抜き出し状態における定常分布。解析的表現が簡単になる線形モデルで扱う。

濃縮部と回収部の定常分布を与える方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{dN}{dn} - \left(\frac{2P}{L} + \alpha - 1 \right) N = - \frac{2P}{L} N_F \quad (M_1 \leq n \leq M) \quad (B-9)$$

$$\frac{dN}{dn} - \left(- \frac{2W}{L} + \alpha - 1 \right) N = \frac{2W}{L} N_W \quad (0 \leq n \leq M_1) \quad (B-10)$$

$n=M_1$ において $N(M_1) = \tilde{N}_F$ として

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{dn}\right)_{M_1+0} - \left(\frac{dN}{dn}\right)_{M_1-0} &= \frac{2}{L} (P+W)\tilde{N}_F - \frac{2}{L} (PN_P + WN_W) \\ &= \frac{2F}{L} (\tilde{N}_F - N_F) \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

もし $\tilde{N}_F = N_F$ が成り立てば (B-11) 式は 0 となり $n = M_1$ で滑らかとなる。(供給段で非混合の条件が成り立つ)

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を次のようにおく。

$$\frac{2P}{L} + \alpha - 1 = \varepsilon_1 \quad (\text{B-12})$$

$$\frac{2W}{L} - \alpha + 1 = \varepsilon_2 \quad (\text{B-13})$$

(B-9) (B-10) の解は次の形式に書くことができる。

$$N = c_1 e^{\varepsilon_1 n} + \frac{2P}{\varepsilon_1 L} N_P \quad (M_1 \leq n \leq M) \quad (\text{B-14})$$

$$N = c_2 e^{-\varepsilon_2 n} + \frac{2W}{\varepsilon_2 L} N_W \quad (0 \leq n \leq M_1) \quad (\text{B-15})$$

(B-14) (B-15) の定数 c_1, c_2 は

$$N(M) = N_P, \quad N(0) = N_W \quad (\text{B-16})$$

の条件から定まる。

$$N = \frac{N_P}{\varepsilon_1 L} \{ 2P + (\alpha - 1)L e^{\varepsilon_1(n-M)} \} \quad (M_1 \leq n \leq M) \quad (\text{B-17})$$

$$N = \frac{N_W}{\varepsilon_2 L} \{ 2W - (\alpha - 1)L e^{-\varepsilon_2 n} \} \quad (0 \leq n \leq M_1) \quad (\text{B-18})$$

$n = M_1$ で (B-17) (B-18) を評価して

$$N_P = \varepsilon_1 L \tilde{N}_F / \{ 2P + (\alpha - 1)L e^{-\varepsilon_1(M-M_1)} \} \quad (\text{B-19})$$

$$N_W = \varepsilon_2 L \tilde{N}_F / \{ 2W + (\alpha - 1)L e^{-\varepsilon_2 M_1} \} \quad (\text{B-20})$$

から

$$\frac{N_P}{N_W} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2W - (\alpha - 1)L e^{-\varepsilon_2 M_1}}{2P + (\alpha - 1)L e^{-\varepsilon_1(M-M_1)}} \quad (\text{B-21})$$

$$\frac{\tilde{N}_F}{N_F} = F \left/ \left[\frac{\varepsilon_1 L P}{2P + (\alpha - 1)L e^{-\varepsilon_1(M-M_1)}} + \frac{\varepsilon_2 L W}{2W - (\alpha - 1)L e^{-\varepsilon_2 M_1}} \right] \right. \quad (\text{B-22})$$

の関係式を得る。

最適抜き出し状態 (設計値どりの P, W の抜き出しを行う) では供給段 M_1 非混合条件がなりたち $\tilde{N}_F = N_F$ が成り立つ。このときには回収部と凝縮部は別々に計算することができる。

(B.3) $P=0, W=$ 定格における定常分布

方形カスケードで凝縮部は全還流で回収部は定常に抜き出しを行っているときの定常分布モデルは前と同様線形で扱う。

このときの定常分布は次の2つの微分方程式を満足する。

$$\frac{dN}{dn} - (\alpha - 1)N = 0 \quad (M_1 \leq n \leq M) \quad (B-23)$$

$$\frac{dN}{dn} + \left(\frac{2W}{L} - \alpha + 1\right)N = \frac{2W}{L} N_W \quad (0 \leq n \leq M_1)$$

この解は一般の抜き出し状態で求めた前の結果を利用することができる。

すなわち $P=0$ として

$$F=W, N_F=N_W \quad (B-24)$$

となり、さらに (B-22) 式から

$$\tilde{N}_F = N_F \cdot \frac{2W - (\alpha - 1)L e^{-\epsilon_1 M_1}}{2W - (\alpha - 1)L} \quad (B-25)$$

を得る。(B-21) 式からは

$$N_P = N_F e^{(\alpha - 1)(M - M_1)} \cdot \frac{2W - (\alpha - 1)L e^{-\epsilon_1 M_1}}{2W - (\alpha - 1)L} = \tilde{N}_F e^{(\alpha - 1)(M - M_1)} \quad (B-26)$$

が求まる。この定常状態から P の抜き出しを考えれば N_P の濃度が漸次減少しそれとともに \tilde{N}_F は N_F に $N_W=N_F$ も前に求めた値に下っていき、両端から定常抜き出しのときの定常分布に近づかずである。

次の方形カスケードについて以上の運転条件のもとで定常状態の濃度を表に示す。計算は線形モデルで前述の諸式で行っている。

全段 $n=1100$ うち優縮部 $n_p=700$, 回収部 $n_w=400$, 製品濃度 $N_p=3.5\%$,
 廃棄濃度 $N_w=0.37\%$, 供給濃度 $N_f=0.72\%$, 分離係数 $\alpha=1.0038$, 還流比 $\frac{P}{L} = \frac{1}{1280}$,
 $\frac{W}{L} = \frac{7.82}{1280}$

Table-B ^{235}U mole fraction for various reflux ratios
 (Square Cascade)

	P, W=rated values	P=1, W=rated value	P=2, W=0 (total reflux)
Top stage	3.527 %	20.508 %	3.056 %
Feed stage	0.720	1.435	0.214
Bottom stage	0.361	0.720	0.048

Appendix C. ノード法によるハイブリッドシミュレーション

本文ですでに基本的な動特性方程式を種々の近似レベルで検討を行った。連続モデルの動特性として $^{235}\text{UF}_6$ の濃度分布が時間と濃縮段の2つの独立変数をもつ偏微分方程式と境界条件の形で求められた。ここではこのタイプの動特性をノード法によって模擬し、スタートアップの解析を行う。前記報告書で行った動特性シミュレーションは空間連続-時間不連続(Continuous-Space Discrete-Time)の手法を用いて、ハイブリッドシミュレーションをオーソドックスに境界値問題を解く形で完成した。この方法は時間幅の問題と境界値問題の収束・精度に原理的なことではないが少しの困難さをもっていた。シミュレーションの結果、濃度の段数変化に対する分布は比較的単純であった。このことに注目し段数を数10のノードで近似的に扱って、いわゆる分布定数系のノード法によるシミュレーションを考察する。ノード法解法は境界値問題を自然に解いている点で大きな利点であるが解の精度と直接関係をもってくるノードの数の決定には十分注意する必要がある。特にハイブリッドシミュレーションではアナログ素子の制約内で十分精度がとれるかどうか定常分布やノード変化に対する解の感度から決定すべきことである。さらにノード法においては系の構造が直接とり入れられる形で系の空間依存特性、特に非線形性の近似には注意すべきで、これによってハイブリッドシミュレーションは大巾に有効度を増すであろう。また通常はノード数は固定して考えるが外乱や入力型の型によって変更できる様にシミュレーションを考慮しておきたいことである。

ステップカスケードの基本動特性方程式(連続モデルで)は次の形で与えられる。

$$hL'_i \frac{\partial N}{\partial t} = L''_i \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n} \{ PN + (\alpha - 1)L'_i N(1 - N) \} \quad \text{濃縮部} \quad (C-1)$$

(i = 1, 2, \dots, m)

$$hL'_i \frac{\partial N}{\partial t} = L''_i \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} + \frac{\partial}{\partial n} \{ WN - (\alpha - 1)L'_i N(1 - N) \} \quad \text{回収部} \quad (C-2)$$

(i = -1, -2, \dots, -b)

ここで濃縮プラント内にある $^{235}\text{UF}_6$ の総量 $N_T(t)$ を考える。

$$N_T(t) = \int_{\text{回収部} + \text{濃縮部}} hL'_i N(t, n) dn \quad (C-3)$$

(C-1), (C-2) さらにステップの変化段, 供給段, 最上段, 最下段における境界条件を用いて

$$\begin{aligned} \frac{dN_T(t)}{dt} &= \int_{M_{m-1}}^{M_m} + \int_{M_{m-2}}^{M_{m-1}} + \dots + \int_0^{M_1} + \int_{M_{-1}}^0 + \int_{M_{-2}}^{M_{-1}} + \dots + \int_{M_{-b}}^{M_{-b+1}} \\ &= -PN_P - F(N_0 - N_F) + PN_0 + WN_0 - WN_W \\ &= FN_F(t) - PN_P(t) - WN_W(t) \end{aligned} \quad (C-4)$$

(C-4) 式は濃縮プラントの任意時刻における $^{235}\text{UF}_6$ のプラントの外部との物質収支を表わしている。定常状態では

$$FN_F = PN_P + WN_W \quad (C-5)$$

を満足する。

(C-1) と (C-2) 式を n についてノードに分解する。Δn の段数幅でノードの総数を l 個と

し、それぞれの式の微分を差分で近似する仕方はもとのカスケード形態を考慮に入れて次のように行う。

$$\begin{aligned} hL_i'(\Delta n)^2 \frac{dN_n}{dt} &= L_i''(N_{n+1} - 2N_n + N_{n-1}) - (\alpha - 1)L_i' \Delta n \{N_n(1 - N_n) \\ &\quad - N_{n-1}(1 - N_{n-1})\} - P \Delta n (N_n - N_{n-1}) \\ &= L_i'' N_{n+1} - (P \Delta n + L_i'') N_n - (\alpha - 1)L_i' \Delta n N_n (1 - N_n) \\ &\quad - \{L_i'' N_n - (P \Delta n + L_i'') N_{n-1} - (\alpha - 1)L_i' \Delta n N_{n-1} (1 - N_{n-1})\} \end{aligned} \quad (C-6)$$

(C-5)式はステップ内の方程式で最上段、最下段、供給段のノードとステップの変化段を含むノードは別に与えられる。

最上段の境界条件から

$$N_{\ell+1} - N_{\ell} = (\alpha - 1) \Delta n N_{\ell} (1 - N_{\ell}) \quad (C-7)$$

上の関係式を用いて最上段ノードの方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} hL_m'(\Delta n)^2 \frac{dN_{\ell}}{dt} &= -P \Delta n \{N_{\ell} + (\alpha - 1)N_{\ell}(1 - N_{\ell})\} - \{L_m'' L_{\ell} - (P \Delta n + L_m'') N_{\ell-1} \\ &\quad - (\alpha - 1)L_m' \Delta n N_{\ell-1} (1 - N_{\ell-1})\} \end{aligned} \quad (C-8)$$

最下段ノードについても同様に考えられる。

$$N_1 - N_0 = (\alpha - 1) \Delta n N_0 (1 - N_0) \quad (C-9)$$

を用いて

$$\begin{aligned} hL_b'(\Delta n)^2 \frac{dN_1}{dt} &= L_b'' N_2 + (W \Delta n - L_b'') N_1 - (\alpha - 1)L_b' \Delta n N_1 (1 - N_1) \\ &\quad - W \Delta n \{N_0 + (\alpha - 1)N_0(1 - N_0)\} \end{aligned} \quad (C-10)$$

供給段ノードについては

$$\begin{aligned} hL_1'(\Delta n)^2 \frac{dN_f}{dt} &= L_1'' N_{f+1} - (P \Delta n + L_1'') N_f - (\alpha - 1)L_1' \Delta n N_f (1 - N_f) \\ &= \{L_{-1}'' N_f + (W \Delta n - L_{-1}'') N_{f-1} - (\alpha - 1)L_{-1}' \Delta n N_{f-1} (1 - N_{f-1})\} + F \Delta n N_f \end{aligned} \quad (C-11)$$

の方程式が成立し、(C-11)式右辺で各ステップからの極限をとれば以前に求めた供給段における境界条件と同一となる。

ステップの変化する段を含むノード点の扱いは

$$\begin{aligned} hL_i'(\Delta n)^2 \frac{dN_n}{dt} &= L_i'' N_{n+1} - (P \Delta n + L_i'') N_n - (\alpha - 1)L_i' \Delta n (1 - N_n) \\ &\quad - \{L_{i-1}'' N_n - (P \Delta n + L_{i-1}'') N_{n-1} - (\alpha - 1)L_{i-1}' \Delta n N_{n-1} (1 - N_{n-1})\} \end{aligned} \quad (C-12)$$

で行い、上式は各ステップからの極限をとれば以前に求めた境界条件となる。

(C-8)(C-10)(C-11)(C-12)で表わされるノード法で近似した動特性方程式から(C-3)式の $N_T(t)$ を評価する。

$$N_T(t) = \sum_{n=1}^{\ell} hL_i \Delta n N_n(t) \quad (C-13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_T}{dt} &= FN_F(t) - P\{N_\ell + (\alpha - 1)N_\ell(1 - N_\ell)\} - W\{N_0 + (\alpha - 1)N_0(1 - N_0)\} \\ &= FN_F(t) - PN_P(t) - WN_W(t) \end{aligned} \quad (C-14)$$

最上段と最下段のノードにおいて N_ℓ は製品濃度 N_P を、また N_1 は廃棄濃度 N_W を表わしていると考え (C-8) と (C-10) 式を簡略化することができる。このとき (C-13) 式は下の式で評価され、(C-14) 式の物質収支を満足するように処理される。

$$N_T(t) = \sum_{n=1}^{\ell-1} h L_i \Delta n \frac{1}{2} (N_n + N_{n+1}) \quad (C-15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h L'_m (\Delta n)^2 \frac{dN_\ell}{dt} &= -P \Delta n N_\ell - \{ L''_m N_\ell - (P \Delta n + L''_m) N_{\ell-1} \\ &\quad - (\alpha - 1) L'_m \Delta n N_{\ell-1} (1 - N_{\ell-1}) \} \end{aligned} \quad (C-16)$$

$$\frac{1}{2} h L'_b (\Delta n)^2 \frac{dN_1}{dt} = L''_b N_2 + (W \Delta n - L''_b) N_1 - (\alpha - 1) L'_b \Delta n N_1 (1 - N_1) - W \Delta n N_1 \quad (C-17)$$

(C-6)~(C-12) までの式を用いて $\Delta n = 1$ として定常分布を決定することは報告書で求めた厳密な解と完全に一致する。ここで問題となるのは定常分布をある精度内にとどめておくには Δn をどこまで大きくとることができるかということである。ハイブリッドの動特性シミュレーションを考え (C-6)(C-11)(C-12)(C-16)(C-17) から任意に Δn を与えたときの定常分布を求めておく。

$$\begin{aligned} L''_i N_{n+1} - (P \Delta n + L''_i) N_n - (\alpha - 1) L'_i \Delta n N_n (1 - N_n) &= -P \Delta n N_P \quad (\text{凝縮部}) \\ (n = f, f+1, \dots, \ell-1) (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (C-18)$$

$$\begin{aligned} L''_i N_{n+1} + (W \Delta n - L''_i) N_n - (\alpha - 1) L'_i \Delta n N_n (1 - N_n) &= W \Delta n N_W \quad (\text{回収部}) \\ (n = 1, 2, \dots, f-1) (i = -1, -2, \dots, -b) \end{aligned} \quad (C-19)$$

(C-11) からは

$$FN_F - PN_P - WN_W = 0$$

(C-18)(C-19) はそれぞれすでによく知られている方程式 (C-20)(C-21) の差分解である。

$$\frac{dN}{dn} = \frac{L'_i}{L''_i} (\alpha - 1) N(1 - N) - \frac{P}{L''_i} (N_P - N) \quad (\text{凝縮部}) \quad (C-20)$$

$$\frac{dN}{dn} = \frac{L'_i}{L''_i} (\alpha - 1) N(1 - N) + \frac{W}{L''_i} (N_W - N) \quad (\text{回収部}) \quad (C-21)$$

濃度 N の分布が比較的単純である (スタートアップや凝縮器の一部除去・挿入などの動特性解析において) ことから少数のノードで定常分布を精度よく合わせることができる。

ハイブリッドシミュレーションを考えたときアナログ素子でこれらの基本方程式を模擬することが次に問題となる。(C-6)(C-11)(C-16)(C-17) には非線形演算として2乗演算を含んでいるが n の領域に注意してこの演算を減らすことができる。すなわち $N(1-N)$ の形で右辺に入っているので N が1に比較して十分小さい回収部と凝縮部でも供給段に近い所では線

形近似を行う。積分器の範囲内（現在40台がすぐに使える）でノードの総数が抑えられているが現在解析すべき動特性（スタートアップなど）には十分であろう。スタートアップ解析には還流比操作を行う必要があるが、これは数が多いがポテンショの変更によって行う。実際のアナログプログラムに組む形で方程式を書きかえる。

$$L'_i \approx L''_i \approx \frac{L_i}{2}, \quad L_1 \approx L_{-1} \quad (C-22)$$

として記述を簡単にする。

(C-16), (C-6), (C-12), (C-11), (C-17) の諸式；

$$\frac{1}{2} R(\Delta n)^2 \frac{dN_\ell}{dt} = -(1 + \frac{2P}{L_m} \Delta n) N_\ell + (1 + \frac{2P}{L_m} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_{\ell-1} - (\alpha-1) \Delta n N_{\ell-1}^2 \quad (C-23)$$

$$h(\Delta n)^2 \frac{dN_n}{dt} = N_{n+1} - (2 + \frac{2P}{L_i} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_n + (\alpha-1) \Delta n N_n^2 + (1 + \frac{2P}{L_i} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_{n-1} - (\alpha-1) \Delta n N_{n-1}^2 \quad (C-24)$$

上式の線形近似式として

$$h(\Delta n)^2 \frac{dN_n}{dt} = N_{n+1} - (2 + \frac{2P}{L_i} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_n + (1 + \frac{2P}{L_i} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_{n-1} \quad (C-25)$$

$$h(\Delta n)^2 \frac{dN_n}{dt} = N_{n+1} - (1 + \frac{L_{i-1}}{L_i} + \frac{2P}{L_i} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_n + (\alpha-1) \Delta n N_n^2 + (\frac{L_{i-1}}{L_i} + \frac{2P}{L_i} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_{n-1} - (\alpha-1) \Delta n N_{n-1}^2 \quad (C-26)$$

$$h(\Delta n)^2 \frac{dN_f}{dt} = N_{f+1} - (2 + \frac{2P}{L_1} \Delta n + (\alpha-1) \Delta n) N_f + (1 + (\alpha-1) \Delta n - \frac{2W}{L_1} \Delta n) N_{f-1} + \frac{F}{L_1} \Delta n N_f \quad (C-27)$$

$$\frac{1}{2} h(\Delta n)^2 \frac{dN_1}{dt} = N_2 - (1 + (\alpha-1) \Delta n) N_1 \quad (C-28)$$

(C-23) ~ (C-28) 式を導びいた過程をふりかえれば、なにもすべてのステップで同一の段数間隔 Δn をとる必要はない。凝縮部の上段の濃度分布は定常分布から分るように傾配が下段に比較して急になることを考慮してステップごとに Δn を変えてとり、上側のステップの Δn をより小さくとることがシュミレーション上有効であろう。またプラントの故障のため一部段数の除去や復帰における動特性を考えると除去された凝縮器の附近で Δn を少し小さくとり空間分布の変動を解析することが望ましい。

ここでは1つのステップ内では同一の Δn を用いるとしておく。このときステップ内部のノード方程式は (C-24) あるいは (C-25) で任意の Δn を用いてよいが、ステップの変化段を含むノード方程式は定常分布を考慮して次の形に改められる。

i -ステップの段数幅を Δn_i , $(i-1)$ -ステップにおける段数幅を Δn_{i-1} として

$$\begin{aligned}
h(\Delta n_i)^2 \frac{dN_n}{dt} &= N_{n+1} - \left(1 + \frac{2P}{L_j} \Delta n_i\right) N_n - (\alpha-1) \Delta n_i N_n (1-N_n) \\
&\quad - \left\{ \frac{L_{i-1}}{L_j} N_n - \left(\frac{L_{i-1}}{L_j} + \frac{2P}{L_j} \Delta n_{i-1}\right) N_{n-1} - (\alpha-1) \Delta n_{i-1} N_{n-1} (1-N_{n-1}) \right\} \\
&= N_{n+1} - \left(1 + \frac{L_{i-1}}{L_j} + \frac{2P}{L_j} \Delta n_i + (\alpha-1) \Delta n_i\right) N_n + (\alpha-1) \Delta n_i N_n^2 \\
&\quad + \left(\frac{L_{i-1}}{L_j} + \frac{2P}{L_j} \Delta n_{i-1} + (\alpha-1) \Delta n_{i-1}\right) N_{n-1} - (\alpha-1) \Delta n_{i-1} N_{n-1}^2 \quad (C-29)
\end{aligned}$$

この線形近似式は

$$\begin{aligned}
h(\Delta n_i)^2 \frac{dN_n}{dt} &= N_{n+1} - \left(1 + \frac{L_{i-1}}{L_j} + \frac{2P}{L_j} \Delta n_i + (\alpha-1) \Delta n_i\right) N_n + \left(\frac{L_{i-1}}{L_j} + \frac{2P}{L_j} \Delta n_{i-1}\right. \\
&\quad \left.+ (\alpha-1) \Delta n_{i-1}\right) N_{n-1} \quad (C-30)
\end{aligned}$$

となる。

```

DIMENSION X0(100),X1(100)
LOGICAL SENSW,SAMPL
INITIAL SET
CALL GSHYIN (IERR,680)
CALL GSC(1,IERR)
ALFA=1.0038
EPSI=0.0005
CLEAR X0
DO 10 I=1,100
  X0(I)=0.0720
10 CONTINUE
20 TYPE 21
21 FORMAT(/,X,Y,IGTYPE Y0 AND GAIN/)
25. FORMAT(2F12.6)
CALL GSHYIN (IERR,680)
CALL GSC(1,IERR)
CALL GSDLY(5)
DASET =Y0
DAOUT1=0.0
CALL QJJDAR(DAOUT1,1,IERR)
CALL GSDLY(3)
CALL QJJDAR(DASET,2,IERR)
CALL GSDLY(3)
TYPE 26
26 FORMAT(/,5X,2H J,8X,2HY0,8X,2HY1,8X,2HY2,7X,3HERR/)
99 J=1
100 CALL GSDP(IERR)
100 CALL GSDLY(1)
MAXI=100
105 I=1
106 CALL QRSLL(1,SAMPL,IERR)
109 CALL QRSLL(1,SAMPL,IERR)
IF(.NOT.SAMPL) GO TO 109
CALL QRRADR(ADINI,0,1,IERR)
X1(I)=ADINI
DAOUT1=X0(I)-X1(I)
CALL QJJDAR(DAOUT1,1,IERR)
CALL GSDLY(3)
IF(I.GT.MAXI) GO TO 150
I=I+1
GO TO 106
150 CALL GSHY(IERR)
CALL GSDLY(2)
CALL QRRADR(ADIN2,1,1,IERR)
Y2=ADIN2
CALL QRRADR (ADINI,0,1,IERR)
Y1=ADINI
MAXJ=20
IF(MAXJ.LT.J) GO TO 20
Y07=(ALFA-1.)*Y1+(10.-Y1)
ERR=2/10.-Y0
WRITE(1,51) J,Y0,Y1,Y2,ERR
51 FORMAT(5X,12,4F10.5)
ERROR=ARS(IERR)
IF(EPSI.GT.ERROR)GO TO 160
J=J+1

```

```

Y0=Y0-GAIN*ERR
DASET=Y0
CALL GSHYIN (IERR)
CALL GSDLY(5)
CALL QJJDAR(DASET,2,IERR)
CALL GSDLY(3)
DAOUT1=0.0
CALL QJJDAR(DAOUT1,1,IERR)
CALL GSDLY(3)
GO TO 100
C
160 IF(.NOT.SENSW(1)) GO TO 180
CALL GSHYIN (IERR)
CALL GSDLY(5)
WRITE(1,30)
30 FORMAT (5X,16HREADY XY PLOTTER/)
DOUTX=0.0
DOUTY=0.0
CALL QJJDAR(DOUTX,4,IERR)
CALL QJJDAR(DOUTY,5,IERR)
CALL GSHYIN (IERR)
CALL GSHYIN (IERR)
PAUSE 01
DO 40 I=1,100
  RI=I
  RMAXI=MAXI
DOUTX=RI/RMAXI
DOUTY=XI(I)/0.35
CALL QJJDAR(DOUTX,4,IERR)
CALL QJJDAR(DOUTY,5,IERR)
CALL GSDLY(500)
CALL GSHYIN (IERR)
CALL GSHYIN (IERR)
CALL GSHYIN (IERR)
CALL GSHYIN (IERR)
CONTINUE
40
100 DO 161 I=1,100
  X0(I)=X1(I)
CONTINUE
161 IF(.NOT.SENSW(2)) GOTO 20
WRITE (16,60)
60 FORMAT(/,5X,35HSQUARE CASCADE DYNAMICS(1) START UP/)
WRITE(16,61)(X0(I),I=1,100)
61 FORMAT(5X,5F12.5)
GO TO 20
END

```

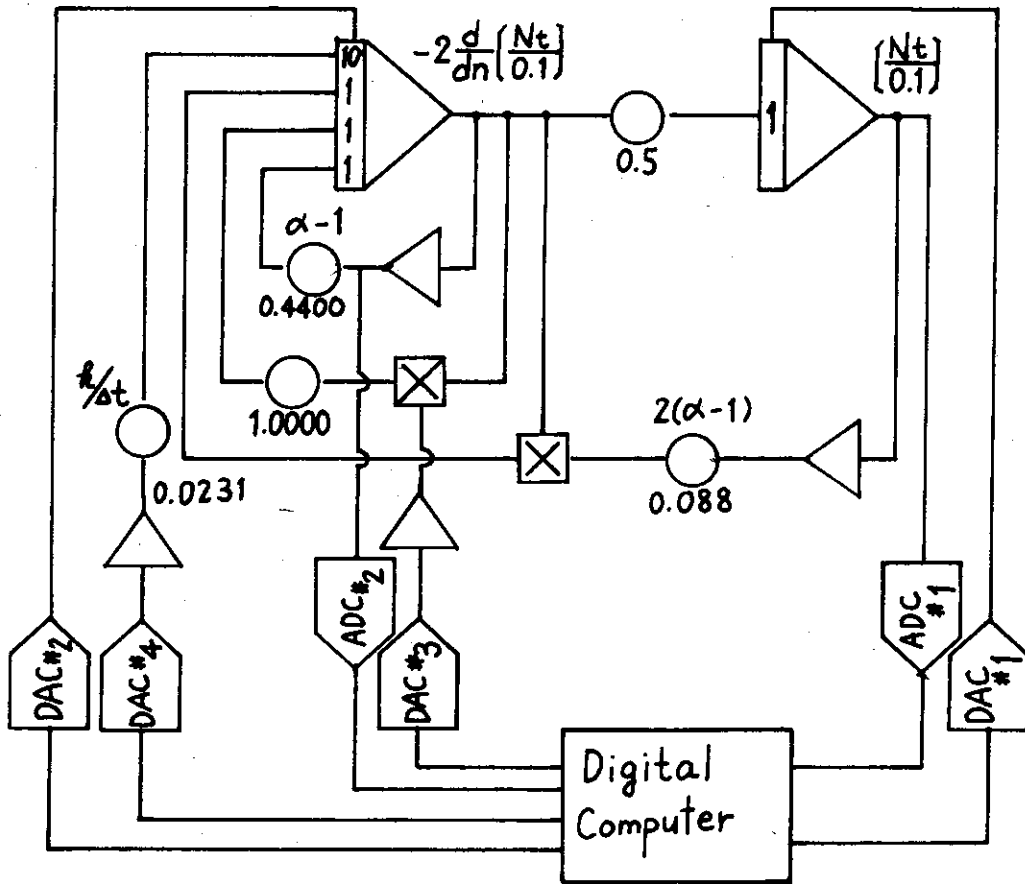



Fig. D Analog program (Step cascade)

```

DIMENSION XT(7,100),FL(6)
COMMON X(100),XD(100),NO(6),FLI(6),NSUM(6)
LOGICAL SAMPL,SENSM
CALL GSHYIN(IERR,688)
CALL OSC(1,IERR)
1 FORMAT(10I5)
2 FORMAT(6F10.5)
3 FORMAT(4X,12,5F10.5)
4 FORMAT(10F8.4)
5 FORMAT(6X,6ATIME =,F10.2,5X,4HDAYS)
6 FORMAT(3X,16HTYPE XO AND GAIN/)
7 FORMAT(//4X,2HJJ,8X,2HXO,7X,3HDXO,6X,2HXT,7X,3HDXT,7X,3HERR)
8 FORMAT(//5X,40HSTEP CASCADE DYNAMICS(1) START UP/)
C
PLANT PARAMETER INPUT
ALFA=1.8844
ALPHA=1.
READ(6,1) M,NB
NN=M*NB
READ(6,1)(NO(I),I=1,NN)
READ(6,2)(FL(I),I=1,NN)
DESIGN VALUE
READ(6,2) XP0,XF0,XM0
READ(6,2) PB,PO,MO
READ(6,2) EPS
NSUM(1)=NO(1)
WRITE(16,8)
I=2
118 NSUM(I)=NSUM(I-1)+NO(I)
IF(1.EQ.NN)GO TO 112
I=I+1
GO TO 118
112 NN=NSUM(NN)
DO 131 I=1,NB
FLI(I)=2.*MO/FL(I)+0.1
C
INITIAL DISTRIBUTION
DO 113 I=1,NN
XO(I)=XF0
XT(1,I)=XO(I)
DO 130 I=1,NN
I=NSUM(I)
IJ=I+1
130 XT(IJ,I)=XO(I)
J=0
133 WRITE(1,6)
ACCEPT 2, X(1),GAIN,PO
FB=PO*MF
DO 132 I=1,M
II=NB+I
132 FLI(II)=2.*PO/FL(II)+0.1
WRITE(1,7)
JJ=1
Y=X(1)
DY=AL*Y*(10.-Y)+100.
DX=DY
111 I=1
114 CALL STEP(I,Y,DY)
DY=DX
I=I+1
IF(I=NO) 115,116,117
115 DY=DY*FL(I-1)/FL(I)+(1.-FL(I-1))/FL(I))*AL*Y*(10.-Y)+100.
GO TO 114
116 DY=DY+2.*FO*(Y-XFO)/FL(I)*10.
GO TO 114
117 IF(I.GT.NN)GO TO 118
DY=DY*FL(I-1)/FL(I)+(1.-FL(I-1))/FL(I))*AL*Y*(10.-Y)+100.
GO TO 114
118 DD=DY-AL*Y*(10.-Y)+100.
IF(SENSM(5))GO TO 134
WRITE(1,3) JJ,X(1),DX1,Y,DY,DD
134 IF(ABS(DD)-EPS) 120,120,119
119 DX1=DX1-GAIN*DD
AB=DX1/AL/100.
Y=5.-SQRT(25.-4B)
JJ=JJ+1
IF(JJ.EQ.21)GO TO 133
GO TO 111
120 CONTINUE
TIME INCREMENT
IF(SENSM(1))GO TO 125
121 J=J+1
XT(1,J)=X(1)
DO 122 I=1,NN
II=NSUM(I)
IJ=I+1
122 XT(IJ,J)=X(II)
DO 123 I=1,NN
XO(I)=X(I)
IF(SENSM(2)) GO TO 133
RJ=J-1
WRITE(16,5) RJ
NM1=NM+1
XO(NM1)=Y
WRITE(16,4) (XO(I),I=1,NN1)
GO TO 133
125 CALL PLOT(X,NM)
GO TO 121
END

```

PAGE 1 C

```

SUBROUTINE STEP(I,Y,DY)
COMMON X(1500),XO(1500),NO(6),FLI(6),NSUM(6)
DIMENSION DASET(3),A(3)
LOGICAL SAMPL
NN=NO(I)
DASET(1)=Y
DASET(2)=DY
DASET(3)=FLI(I)*5.
II=NSUM(I)-NO(I)+1
CALL GSIC(IERR)
DO 10 K=1,3
10 CALL GMDAR(DASET(K),K,IERR)
X(II)=Y
DAOUT=XO(II)-X(II)
CALL GMDAR(DAOUT,4,IERR)
11 CALL GRSL(1,SAMPL,IERR)
12 CALL GRSL(1,SAMPL,IERR)
IF(.NOT.SAMPL)GO TO 12
J=1
CALL GSOP(IERR)
14 CALLORSL(1,SAMPL,IERR)
15 CALLORSL(1,SAMPL,IERR)
IF(.NOT.SAMPL)GO TO 15
IP(J,EG,NN)GO TO 16
II=II+1
CALL GRADR(ADIN,1,1,IERR)
X(II)=ADIN
DAOUT=XO(II)-X(II)
CALL GMDAR(DAOUT,4,IERR)
J=J+1
GO TO 14
16 CALL GSH(IERR)
CALL GSDLY(3)
CALL GRADR(A(1),1,2,IERR)
Y=A(1)
DY=A(2)*5.
RETURN
END
    
```

PAGE 1 C

```

SUBROUTINE PLOT(X,N)
DIMENSION X(1)
LOGICAL SENSW
CALL GSIC(IERR)
CALL GMCLL(15,.FALSE.,IERR)
NMAXI=N
RMAXI=N
DOUTX=0.0
DOUTY=X(1)
CALL GMDAR(DOUTY,5,IERR)
CALL GMDAR(DOUTY,6,IERR)
CALL GMCLL(15,.FALSE.,IERR)
WRITE(1,5)
5 FORMAT(5X,16HREADY XY PLOTTER/)
PAUSE 82
CALL GMCLL(15,.TRUE.,IERR)
CALL GSDLY(100)
DO 10 I=2,NMAXI
RI=I
DOUTY=RI/RMAXI
DOUTY=X(I)
CALL GMDAR(DOUTY,5,IERR)
CALL GMDAR(DOUTY,6,IERR)
CALL GSDLY(500)
CALL GMCLL(15,.TRUE.,IERR)
CALL GSDLY(100)
CALL GMCLL(15,.FALSE.,IERR)
IF(SENSW(4))GO TO 11
10 CONTINUE
11 RETURN
END
    
```