

JAERI-M

5 7 6 7

積分測定量を用いた群定数修正の基礎的研究

1974年7月

三 谷 浩

日 本 原 子 力 研 究 所  
Japan Atomic Energy Research Institute

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

積分測定量を用いた群定数修正の基礎的研究

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

三 谷 浩

( 1 9 7 4 年 6 月 1 8 日 受 理 )

高速炉の臨界実験から得られる種々の積分データを用いた群定数修正について、理論的ならびに数値的検討を行ない、その有効性を調べた。

最小二乗法の一般論を適用して、群定数修正の理論的基礎を確立し、修正操作は微分データを基準にし、これに相補的なものとして積分データの情報を利用していることを明確にした。群定数間の相関を求める一般論を作り、これを修正操作に取り入れて、核物理的観点からみて妥当な修正結果が得られるように考慮した。群定数に系統誤差が含まれている時には、残差の二乗和は非心カイ二乗分布に従うことを理論的に確認し、数値的にも実証した。これから、修正操作の妥当性を調べる方法としてカイ二乗検定を行なうことを提案する。

A B B N セットを基準の群定数に選び、Z P R - III, Z E B R A, V E R A, F C A で測定された積分データを用いて具体的に群定数修正を行ない、実際の数値計算で生ずる種々の問題を解決した。実効増倍率の系統的ずれを解消し、断面積の修正結果との関連を調べ、更に、群定数間の相関、群定数の平均誤差の影響、および、修正された群定数の精度についても検討した。また、群定数の修正結果を断面積の測定値および他の評価値と比較して吟味し、臨界量の予測についても検討して、群定数修正が極めて有効な方法であることを立証した。

A Basic Study on the Adjustment of Group Cross Sections  
by Means of Integral Data

Hiroshi MITANI

Division of Reactor Engineering, Tokai, JAERI

( Received June 18, 1974 )

Theoretical and numerical studies have been made on the adjustment of group cross sections by means of the integral data such as critical mass, reaction rate ratio and sample worth ratio obtained from fast critical experiments, to see usefulness of the method. The theoretical basis for the adjustment of group cross sections is established by use of the generalized method of least squares. In the adjusting process, information of the integral data is thus used to supplement the nuclear data. A theory of the correlation between group cross sections is derived; which permits reasonable adjustment of the group cross sections in nuclear physics. It is confirmed theoretically and proved numerically that the sum of squares of the residual in the least-square treatment has a non-central chi-square distribution when the group cross sections include systematic error. The  $\chi^2$ -test is proposed as a criterion for the validity of the adjusting process. Numerical study is made of the ABBN set, using the integral data obtained from ZPR-III, ZEBRA, VERA and FCA. Some practical problems are investigated, including the effect of the correlation between group cross sections and also the arbitrariness in the standard deviation of nuclear data on the adjusting process. The adjusted ABBN set is compared with differential cross section and other evaluated data, and the estimation of a critical mass by the adjusted results is also made. The adjustment of group cross sections by integral data is highly useful.

## 目 次

第1章 序論 .....	1
第2章 群定数修正の理論 .....	5
2-1 群定数 .....	5
2-2 最小二乗法による群定数修正 .....	6
2-3 修正された群定数および積分データの精度 .....	12
第3章 群定数間の相関 .....	17
3-1 はじめに .....	17
3-2 群定数間の相関の理論 .....	18
3-3 相関係数の数値例とその特性 .....	24
第4章 群定数の系統誤差 .....	31
4-1 系統誤差に関する仮説の検定 .....	31
4-2 系統誤差と残差の二乗和の統計分布 .....	33
4-3 残差の二乗和に関する数値的検討 .....	35
4-4 群定数に含まれる系統誤差の除去 .....	36
4-5 系統誤差に関するモデル .....	38
第5章 積分データの感度係数と一般化摂動法 .....	41
5-1 はじめに .....	41
5-2 感度係数の計算方法 .....	42
(1) 定義 .....	42
(2) 実効増倍率に対する摂動公式 .....	
(3) 反応率の比に対する摂動公式 .....	43
(4) 反応度価値およびその比に対する摂動公式 .....	46
5-3 世代別のインポートランスと Neumann 級数の対応 .....	48
5-4 感度係数の数値結果と積分データの特長 .....	53
第6章 群定数修正の数値的検討 .....	61
( A B B N セットの修正 ) .....	61
6-1 はじめに .....	61
6-2 回帰分析の方法 .....	61
6-3 積分データとその解析 .....	63
6-4 群定数と平均誤差 .....	64
6-5 積分データの修正結果 .....	66
6-6 修正された群定数および積分データの信頼度 .....	67
6-7 群定数の修正結果と測定値との比較 .....	68
6-8 実効増倍率の推定 .....	71
第7章 結論 .....	91

謝 辞 .....	93
附録 I 誤差方程式の重みと測定値の持つ情報量 .....	94
附録 II (2-55)式の導出と(2-58)式の性質 .....	99
附録 III ABBNセットの修正結果の教表 .....	102
参考文献 .....	107

## 1 序 論

高速炉では、増殖性を高めるために減速材を用いず、核分裂で生まれた中性子を直接利用するため、炉内の中性子スペクトラムは200~400Kevにピークを持つ巾の広い分布になり、高速炉で反応に寄与する中性子のエネルギーも数100evから数Mevと非常に広い範囲にわたっている。さらに、中性子と媒質原子との相互作用も、核分裂、捕獲、弾性散乱、非弾性散乱、等があり、断面積のエネルギー依存も複雑であるため、熱中性子炉の場合と異なって、中性子スペクトラムを解析的に求めることが非常に困難である。高速炉が提唱された初期の段階から、多群近似の方法が主要な計算方法として用いられている。最近、中性子束合成法、等が試みられているが、十分に確立されていないために将来とも多群近似の方法が用いられてゆくと思われる。

この多群近似の方法では、原子炉方程式の入力係数として多群定数が必要である。一般に、多群定数は中性子束を重みとして、断面積を定まったエネルギー区間で平均することによって計算されている。断面積は核物理的に測定されたもの、或は理論的に計算された、謂ゆる、核データが用いられている。代表的な多群定数セットとしては、YOM<sup>(1)</sup>、HR<sup>(2)</sup>、AHBN<sup>(3)</sup>等があるが、最近では個々の国で固有のセットを所有している。しかし、断面積の測定値の精度は必ずしも充分ではなく、また、核種や反応によっては、測定値が欠けているエネルギー領域もあり、現在の状況では核データの信頼度は低く<sup>(4)</sup>、従ってこれから作られた群定数も大きな不確定さを含んでいる。

一方高速炉の臨界実験から得られた積分データは解析値と比較され、解析方法の検討に用いられていたが、両者の間には系統的な不一致の存在することが問題になり、この不一致の主な原因は群定数セットの不確定さによることが多くの人々によって明らかにされた。特に、DaveyはZPR-III、 $k_{eff}$  4.8で得られた積分データを詳しく検討し、実験値と計算値の違いが非常に大きいことを報告している<sup>(6)</sup>。ZPR-III、 $k_{eff}$  4.8は大型高速炉の模擬炉心であり、この結果は将来の大型炉の諸特性を精度良く予測することが非常に困難であることを意味している。これに対して、大型炉の諸特性を要求される設計精度で推定するためには、核データの精度がどの程度でなければならないかについては、群定数が作成された初期の頃から研究されている<sup>(7)</sup>。最近では、大型炉の経済性の問題と直接関連させて具体的に研究され、主な核種について反応とエネルギー区間ごとに整理されている。<sup>(8)、(9)</sup> これらは現在の核データの精度<sup>(4)</sup>から考えると相当厳しいものであると思われる。

しかし、実験炉から原型炉の建設設計へと進んでいる状況で、早急に精度良い設計計算が要求されていることは明らかである。この要求に応え、核データの精度を急速に高めることは必ずしも容易ではない。一方、高速炉の臨界実験で直接大型炉のモックアップ実験を行なうためには、多量のPu燃料が必要であり、種々の困難な問題がある。さらに、原子炉の諸特性は流体力学のような相似則を用いて推定することが出来ない。結局、臨界実験で得られた結果を用いて、解析値の妥当性を調べながら、解析計算を通して大型炉の諸特性を推定することが主要な方法となる。この時には、積分データの実験値と解析値の不一致を解消することが非常に重

要であり、これはまた、核データの不確定さを取り除くことに努力が集中されるべきことを意味する。最近では、核データの検討のために積分データを利用することを目的として、形状的に簡単な系での標準実験も行なわれるようになり、群定数の不確定さを少なくすることに多大の努力がはらわれている。

この目的に最も有効な方法として、高速炉の臨界実験で得られた積分データの実験値に、実験誤差の範囲内で解析値が一致するように群定数を修正し、大型炉の諸特性を推定するのに利用する方法が、第3回のジュネーブ会議(1964)において、イタリア<sup>(10)</sup>およびイスラエル<sup>(11)</sup>から提唱された。イタリアは群定数修正を直接の目的としていたが、イスラエルは群定数を計算する時の矛盾を解決するために、直接積分データから群定数を求めることを意図していた。群定数を計算する時の矛盾とは、重み関数として用いる中性子束が、通常は、近似的にしか求められないが、もしこの中性子束が正確に求められれば、もはや群定数を必要としないことにある。もう1つは、重み関数として中性子束と随伴中性子束の積を用いるべきであると言う従来とは異なった方法が、Marchuk et al.<sup>(12)</sup>によって提唱されていた。しかし、積分データは群定数の複雑な関数であるため、直接積分データから群定数を求めることは不可能であり、イスラエルも後に群定数修正を目的とするようになっていく。

群定数修正の方法では、一般に修正すべき群定数の数は非常に多くなる。例えば、核種の数を10、反応の数を4、群の数を5としても全体で200にもなる。一方、利用出来る積分データの数はこれよりも少なく、100~50位である。群定数の精度を向上させるためには、断面積の核物理的測定の精度を向上させることが直接的で信頼度も高い。一方、積分データを利用する方法は間接的で、群定数の精度の向上からみて、情報量は核物理的測定に較べて劣る。しかし、断面積の測定値に含まれる不確定さは主として断面積の絶対測定に由来し、相対測定は正確である。即ち、断面積のエネルギー変化の相対値は正確であるが、絶対値に不確定さが含まれていると考えることが出来る。この場合には、積分データを用いて群定数を修正することが非常に有効である。

上記のように、修正すべき群定数の数に較べて、利用出来る積分データの数が少ない条件のもとで、群定数を修正する方法として、イタリアは基準に選んだ群定数から最もずれの少ないもので、積分データの実験値に解析値が完全に一致するものを選ぶように附帯条件のある変分法を利用した。しかし、一般に積分データの実験値はつねに測定誤差を含んでいる。これを考慮して、Hement et al.<sup>(13)</sup>は基準の群定数から最もずれが少なく、かつ、積分データの実験値に解析値が実験誤差の範囲内で出来るだけ良く一致するものを選ぶように改良した。一方、Pazy et al.<sup>(14)</sup>は同じ方法を用いて、修正された群定数の精度を評価する方法を示し、同時に、修正量を求める時に解くべき方程式の数は、修正すべき群定数の数ではなく利用する積分データの数に等しいことを明らかにしている。また、実際の数値的検討は、Ceccehni et al.<sup>(15)</sup> Rowland et al.<sup>(16,17)</sup>、Barre et al.<sup>(18)</sup>によってそれぞれ、ABBNセット、FGL-4セット、および、KFKセットの修正が4群域は5群に縮約されたものについて行なわれている。特に、Rowland et al.<sup>(16)</sup>は積分データに含まれる系統誤差も除去出来ることを示しているが疑問である。最近、スウェーデン<sup>(19)</sup>でも同様の計算が行なわれている。また、ドイツもフランスと共同で同様の作業を進める計画がある。



本論文では、積分データを用いた群定数修正を方法論として確立するために、最小二乗法の一般論を適用して、その理論的基礎を明確にし、この方法の統計的性質を明らかにする。さらに、具体的にA B B Nセットを修正し、これから実際の取扱いで生ずる種々の問題を解決し、臨界量の予測についても検討して、この方法が、実用的に非常に有効であることを明らかにする。

第2章では、積分データを用いた群定数修正の理論的基礎を確立するために、最小二乗法の一般論を適用する。通常は、修正すべき群定数の数に較べて、利用出来る積分データの数が少ないので、積分データのみを利用して、最小二乗法により群定数を修正することが出来ない。群定数は、断面積の核物理的測定値を用いて作られるので、最小二乗法の誤差方程式を組み立てる時、積分データと同時に群定数も測定値と考慮して取り入れる。これから、群定数修正は、微分データを基準にし、これに相補的なものとして、積分データの持つ情報を利用して、行なわれていることが明らかになる。尚、この最小二乗法には群定数間の相関が考慮されている。この場合でも、解くべき方程式の数は、利用する積分データの数に等しいことを導き、数値的取扱いが非常に簡単になることを示す。修正された群定数および積分データの精度の間には、両者の数にのみ依存する関係式があることを見出し、修正された群定数の精度を良くするためには、利用する積分データの数を多くすることが本質的に重要であることを明らかにする。

第3章では、群定数間の相関が計算出来る一般理論を作り、具体的に数値を求めて、その特性を調べる。群定数修正では、積分データの感度係数の特性が偏っている時には、核物理的観点からみて、妥当でない修正結果が得られる可能性があり、積分データの数が少ない時には、この傾向が特に著しくなる。これを是正するために、群定数間の相関を考慮し、全体の均衡を保ちながら、修正操作が行なわれるように意図する。群定数間の相関としては、断面積の核物理的性質に基づくものと、断面積の相対測定によるものがある。数値計算の結果、前者の相関は、隣り合った二つの群の間では非常に強く、相関係数は0.900よりも大きくなり、後者の相関係数は、断面積の絶対測定よりも相対測定の精度が良いので、 $1/\sqrt{2}$ よりも大きくなることを見出された。

第4章では、群定数修正の統計的性質および群定数に系統誤差が含まれている場合の影響を調べ、さらに、断面積の測定に基づいた系統誤差のモデルを作ると、最小二乗法を通して、この系統誤差が除去出来ることを明らかにする。最小二乗法では、残差の二乗和は、通常、カイ二乗分布に従う。群定数に系統誤差が含まれている時には、残差の二乗和は、非心カイ二乗分布に従うことを理論的に確証した。また、正規乱数を発生させて、積分データ、群定数、および仮想的な系統誤差を含む群定数を作り、実際に群定数修正を行なって、残差の二乗和の頻度分布を調べ、上記の理論的確認を数値的にも実証した。残差の二乗和が大きくなるのは、積分データの系統誤差、解析計算の不正確さ、積分データおよび群定数の平均誤差の不正確さにも関係する。従って、群定数修正全体の妥当性を調べる方法として、残差の二乗和について、カイ二乗検定を行なうことを提案する。

第5章では、群定数修正に必要な積分データの感度係数は、一般化摂動法で計算されるが、この方法を作用素表示で整理し、再臨界調整について新しい手法を与え、この方法が実用的に有効なものになるよう修正した。また、一般化摂動法で用いる世代別のインポートランスは、

積分方程式をNeumann級数展開で解く時の級数の各項に対応することを示し、その物理的意味を明らかにする。さらに、個々の積分データの感度係数を具体的に計算し、その特性を調べると共に、群定数修正で持つ有効性について論ずる。

第6章では、以上の各章で述べた理論的方法を、数値的に実証するために、高速炉の計算で広く用いられているABBNセットを基準の群定数に選び、高速炉の臨界実験装置、ZPR-III、VERA、ZEBRA、FCA、で測定された積分データを用いて、具体的に群定数修正を行ない、また、実際の数値計算で生ずる種々の問題を解決した。実効増倍率の系統的ずれを解消し、断面積の修正結果との関連を調べ、さらに、群定数間の相関、群定数の平均誤差の影響、および修正された群定数の精度についても検討した。また、群定数の修正結果を断面積の測定値および他の評価値と比較して吟味し、臨界量の予測についても検討して、群定数修正が実用的に非常に有効な方法であることを立証した。

第7章は、結論である。

## 2 群定数修正の理論

## 2-1 群定数

最初に修正すべき群定数について考える。多群近似では中性子束を計算する原子炉方程式の(1), (2), (3) 入力定数として "実効的な群定数" が必要である。これは次式で一般的に定義されている。

$$\bar{\sigma}_g = \frac{\int_{\Delta E_g} \hat{\sigma}(E) \phi(E) dE}{\int_{\Delta E_g} \phi(E) dE} \quad (2-1)$$

上式で、 $\hat{\sigma}(E)$  は微視的断面積で通常は核物理の測定から定められたものが用いられる。また、 $\phi(E)$  は重み関数として用いる中性子束であり、 $\Delta E_g$  はエネルギー群  $g$  のエネルギー巾である。

中性子束  $\phi(E)$  の正確な値は一般には知ることが出来ないで、通常は、基本モードの中性子束が用いられている。この中性子束は次の二つの項の積に分けることが出来る。1つは中性子束のなめらかな変化を表わす項  $\phi_g(E)$  で巨視的スペクトラムと呼ばれている。もう1つは共鳴吸収等の影響による中性子束の微細な変化を表わす項  $\phi_f(E)$  で微視的スペクトラムと呼ばれている。

$$\phi(E) = \phi_g(E) \phi_f(E) \quad (2-2)$$

この中性子束を用いると実効的な群定数は次のように表わすことが出来る。

$$\bar{\sigma}_g = \hat{\sigma}_g f_g \quad (2-3)$$

ここで  $\hat{\sigma}_g$  は平均断面積で

$$\hat{\sigma}_g = \frac{1}{W_g} \int_{\Delta E_g} \hat{\sigma}(E) \phi_g(E) dE \quad (2-4)$$

で与えられる。上式で  $W_g$  は規格化因子である。巨視的スペクトラム  $\phi_g(E)$  は ABBN<sup>(3)</sup> セットでは、2 Mev 以上で、核分裂スペクトラム、2 Mev 以下で  $1/E$  スペクトラムが用いられている。

(2-3) 式の  $f_g$  は自己遮蔽因子と呼ばれ

$$f_g = \frac{\int_{\Delta E_g} \hat{\sigma}(E) \phi_g(E) \phi_f(E) dE}{\hat{\sigma}_g \cdot \int_{\Delta E_g} \phi_g(E) \phi_f(E) dE} \quad (2-5)$$

で定義されている。これらの  $\hat{\sigma}_g$ 、 $f_g$  は通常の群定数セットではそれぞれの核種のそれぞれの反応について独立な数表として与えられる。<sup>(3)</sup> 一般に、自己遮蔽因子  $f_g$  は体系の濃度組成や温度に依存する。これに対して、平均断面積は上で述べた  $\phi_g(E)$  を用いると核種に固有な量となる。従って、積分データを用いて修正すべき群定数として、実効的な群定数  $\bar{\sigma}_g$  よりも平均断面積  $\hat{\sigma}_g$  を用いた方がよい。自己遮蔽因子は(2-5)式から分子分母に微視的断面積が含まれているので、断面積の不確定さに直接影響されず、従って、自己遮蔽因子の計算が正確であれば、種々の異なった特性を持つ体系の積分データを利用することが可能になる。これによって広いエネルギー範囲にわたって  $\hat{\sigma}_g$  を修正することが出来るようになり、修正操作の有効性が増大される。本論文では、平均断面積  $\hat{\sigma}_g$  を群定数と呼ぶことにする。

## 2-2 最小二乗法による群定数の修正

群定数修正では、高速炉の臨界実験で測定される種々の積分データ、例えば、臨界量、反応率の比、反応度値、中性子スペクトラム、等を利用する。これらの積分量は一般的に中性子束および随伴中性子束の汎函数と考えることが出来る。一方、中性子束および随伴中性子束は原子炉方程式を炉の形状で定まる境界条件のもとで解くことによって求められるので、原子炉方程式の係数である断面積の複雑な汎函数となる。これから、一般的に積分測定量は断面積の複雑な汎函数となる。しかし、通常はこれらの積分測定量を解析するのに多群近似の方法が用いられている。この場合には積分測定量は多群定数の関数と考えることが出来る。即ち、

$$m_i = f_i [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n] \quad (2-6)$$

と一般的に表示出来る。ここで  $\sigma_j$  は群定数である。

$m$ 個の積分データを  $\hat{m}_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) とすれば、これに最小二乗法を用いて積分量  $f_i [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$  を実験誤差  $\epsilon_i'$  の範囲内で一致するように、群定数  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  を修正するとすれば、次の誤差方程式が成り立つ。

$$f_i [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n] = \hat{m}_i - \epsilon_i' \quad (2-7)$$

( $i=1, 2, \dots, m$ )

一般に、最小二乗法が適用できるためには未知数の数よりも誤差方程式の数が多くなければならない。<sup>(23)</sup> しかし、実際に利用できる積分データの数は修正すべき群定数の数よりも少ない。この場合、(2-7)式だけから群定数を修正すると無限個の組の解が出てくる。従って、一意に群定数修正ができるためには、さらに群定数についての情報を含んだ方程式が必要である。ここで群定数は断面積の核物理で測定された値から直接定められるので、これを利用することを考える。

断面積の核物理での測定値、或はその平均値は、

$$\text{真値} = \text{測定値} - \text{誤差} \quad (2-8-a)$$

の関係を満す。測定値は厳密にはエネルギー的に連続ではないが、測定値が非常に多くて密な場合、或は測定値から作られた断面積の測定カーブについては連続エネルギーとして取扱って良い。この場合には(2-8-a)の関係から

$$\sigma(E) = \hat{\sigma}(E) - \epsilon' \quad (2-8-b)$$

が成り立つ。上式で、 $\sigma(E)$ ; 断面積の真の値、 $\hat{\sigma}(E)$ ; 測定値、 $\epsilon'$ ; 誤差、である。上式の両辺に  $\phi_g(E)/W_j$  を掛けて、 $\Delta E_j [E_{j-1}, E_j]$  の区間で積分を行う。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W_j} \int_{\Delta E_j} \sigma(E) \phi_g(E) dE \\ &= \frac{1}{W_j} \int_{\Delta E_j} \hat{\sigma}(E) \phi_g(E) dE \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{W_j} \int_{\Delta E_j} \epsilon^r \phi_g(E) dE \quad (2-8-c)$$

この式と(2-4)式を比較すると、左辺は群定数の真の値  $\sigma_j$ 、右辺の第1項は群定数  $\hat{\sigma}_j$  に等しい。これから群定数  $\hat{\sigma}_j$  は検出効率が

$$\begin{aligned} \epsilon(E) &= \phi_g(E) / W_j & E \in \Delta E_j \\ &= 0 & \text{otherwise} \end{aligned}$$

で与えられる仮想的なカウンターで測定された1種の測定値と考えることが出来る。(2-8-c)式の右辺の第2項はこの時の測定誤差となる。従って、(2-8-c)式は

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \hat{\sigma}_j - \epsilon_j^i \\ &(j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2-9)$$

と書換えることが出来る。積分量  $f_i[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$  に含まれるすべての群定数について(2-9)式の関係式が成り立つと考えて良いので、(2-9)式を新しい誤差方程式として、(2-7)式と組み合わせ、群定数修正の基本方程式とする。

以上により誤差方程式の数は  $N = n + m$  個になり、未知数  $\sigma_j$  の数  $n$  よりも常に多いので最小二乗法が適用出来る。(2-9)式を誤差方程式に加えることにより群定数修正の意味が非常に明確になる。即ち、積分データが1個もなければ、(2-9)式のみになり群定数は修正されず、 $\sigma_j = \hat{\sigma}_j$  となる。積分データが加わるとこの情報によって群定数が修正されてゆく。これから群定数修正は、核物理で測定された断面積から定められる群定数を基準にし、これに相補的なものとして、積分データの情報を利用していることになる。

積分量  $f_i[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$  は群定数  $\sigma_j$  の複雑な関数であるために、(2-7)式を直接利用することが出来ない。ここで、 $f_i[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$  を基準の群定数  $\hat{\sigma}_j$  のまわりでTaylor展開し、二次以上の項を省略すると、(2-7)式は

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\sigma_j - \hat{\sigma}_j) = m_i - f_i[\hat{\sigma}] - \epsilon_i^i \quad (2-10)$$

となる。上式で、

$$a_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_j} \right)_{\hat{\sigma}} \quad (2-11)$$

であり、これは積分データの感度係数と呼ばれる量で、通常は、摂動論で計算される<sup>(13)</sup> また、 $f_i[\hat{\sigma}]$  は基準の群定数を用いて計算された積分データの解析値である。

方程式(2-9)と(2-10)が最小二乗法の誤差方程式である。個々の積分データと群定数の測定精度が異なるので、各々の式の重みを考慮し、両者を同等なものとして取扱うことを考える。一般に、個々の測定値の平均誤差が与えられているので、これらを、積分データについては  $\Delta \hat{m}_i$ 、群定数については  $\Delta \hat{\sigma}_j$  とすれば、

$$P_i = \frac{\sigma^2}{\Delta \hat{m}_i^2} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2-12)$$

$$P_j = \frac{\sigma^2}{\Delta \hat{\sigma}_j^2} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2-13)$$

が各々(2-10)式および(2-9)式の重みとなる。定数 $\sigma^2$ は単位重みの分散と呼ばれている。しかし、測定値の平均誤差が与えられている時には、単に測定回数を与えられている時とは異なり、測定値について多くの情報が与えられていることに相当し、 $\sigma^2$ として任意の値が取れることがAgekyanによって議論されている。<sup>(24)</sup>これについては附録Iで詳しく述べる。

(2-9)、(2-10)式の各々に $\sqrt{P_j}$ 、 $\sqrt{P_i}$ を掛けると等しい重みを持つ次の方程式が得られる。<sup>(23)</sup>

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} (x_j - \hat{x}_j) = \hat{M}_i - \varepsilon_i \quad (2-14)$$

$$x_j = \hat{x}_j - \varepsilon_j \quad (2-15)$$

ここで、

$$x_j = \sigma_j \sqrt{P_j}, \quad \hat{x}_j = \hat{\sigma}_j \sqrt{P_i} \quad (2-16)$$

$$A_{ij} = \frac{\Delta \hat{\sigma}_j}{\Delta \hat{m}_i} a_{ij}, \quad \hat{M}_i = (\hat{m}_i - f_i[\hat{\sigma}]) \sqrt{P_i} \quad (2-17)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i' \sqrt{P_i}, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_j' \sqrt{P_j} \quad (2-18)$$

である。方程式(2-14)、(2-15)は次の行列表示で書換えることができる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{m}}_i - \mathbf{A}_1 \quad (2-19)$$

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_2 \quad (2-20)$$

上式の $\mathbf{x}$ 、 $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\mathbf{m}}_i$ 、 $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ はベクトルであり、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}}_i = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix} \quad (2-21-a)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (2-21-b)$$

で与えられる。また、 $\mathbf{A}$ は次の行列である。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

通常の最小二乗法では個々の測定の誤差  $A_1, A_2$  は平均値が零の正規分布に従うと仮定する。<sup>(23)</sup>

$$E(A_1) = 0, E(A_2) = 0 \quad (2-23)$$

これは、個々の測定にはいかなる系統誤差も含まれていないことを意味する。次に、個々の測定の分散について考える。積分データの相互に相関がないとすれば誤差の分散は

$$D(A_1) = \sigma^2 E \quad (2-24)$$

で与えられる。ただし、 $E$  は単位行列である。これに対して、群定数の相互の間には相関があるとす。この時には、誤差の共分散を考えねばならない。

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 \rho_{ij} \quad (2-25)$$

ここで、 $\rho_{ij}$  は群定数  $i$  と  $j$  の間の相関係数である。この相関係数の求め方については第3章で述べる。行列表示では(2-25)式は

$$E(A_2 A_2^T) = \sigma^2 \rho \quad (2-26)$$

となる。上式で  $A_2^T$  は  $A_2$  の転置行列である。本論文では  $A^T$  で一般に行列  $A$  の転置行列を表わすことにする。 $\rho$  は相関行列で

$$\rho = \begin{bmatrix} 1. & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1. & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

で表わされる。以下、数学的取扱いを簡単にするために、(2-19)、(2-20)式を1個の方程式にまとめて考える。

$$A(X - \hat{X}) = \hat{L} - A \quad (2-28)$$

ここで、 $A, \hat{L}, A$  は次の部分行列である。

$$A = \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}, \hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{L} \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

また、 $A$  の共分散行列は

$$B_A = \sigma^2 R \quad (2-30)$$

となる。ただし、 $R$  は

$$R = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

であり、 $\mathbf{U}$ はすべての要素が零の行列である。

方程式(2-28)で $\mu$ は真の誤差であり、 $\mathbf{X}$ は $\hat{\mathbf{X}}$ の真の値である。一般に、測定値の数が有限の時には、真の値 $\mathbf{X}$ それ自身を求めることができず、その推定値しか知ることができない。<sup>(23)</sup> 積分データと微分データ(群定数)の尤度関数は次の式で与えられる。

$$P(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_n) \\ = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{B}_d)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\hat{\mathbf{L}} - \mathbf{A}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}))^T \mathbf{K}^{-1} (\hat{\mathbf{L}} - \mathbf{A}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})) \right] \quad (2-32)$$

ここで、 $N = n + m$ はすべての測定データの数である。真の値 $\mathbf{X}$ の推定値を $\tilde{\mathbf{X}}$ とすれば、この推定値は(2-32)式の値を最大にすることから求められる。これを通常の方法では次のようにする。<sup>(23)</sup> 即ち、(2-19)、(2-20)式を次の残差方程式に書換える。

$$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{V}_1 \quad (2-33)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{V}_2 \quad (2-34)$$

上式で $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ は見かけの誤差、或は残差と呼ばれる。さらに、(2-33)、(2-34)式は次の1個の方程式

$$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = \hat{\mathbf{L}} - \mathbf{V} \quad (2-35)$$

にまとめることができる。ただし、

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (2-35')$$

である。この時、推定値 $\tilde{\mathbf{X}}$ は相関を考慮した残差の二乗和

$$Q = \mathbf{V}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{V} \\ = \sum_{i=1}^m (\hat{M}_i - \sum_j \Lambda_{ij} (\tilde{X}_j - \hat{X}_j))^2 + \sum_i \sum_j (\tilde{X}_i - \hat{X}_i) \rho_{ij}^{-1} (\tilde{X}_j - \hat{X}_j) \quad (2-36)$$

を最小にすることから求められる。ここで、 $\rho_{ij}^{-1}$ は $\rho$ の逆行列 $\rho^{-1}$ の $(i, j)$ 要素である。 $Q$ を $\tilde{X}_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )について最小にすることから

$$\mathbf{A}^T \mathbf{V}_1 + \rho^{-1} \mathbf{V}_2 = 0 \quad (2-37)$$

が得られる。この式は

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{V} = 0 \quad (2-38)$$

と書換えることができる。(2-35)式の両辺に $\mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1}$ を左から掛け、(2-38)式の関係を用いると正規方程式

$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{L} \quad (2-39)$$



が得られる。ここで  $C$  は

$$C = A^T R^{-1} A \quad (2-40)$$

で与えられる。  $n$  行  $n$  列の行列である。群定数の修正値は (2-39) 式を解くことによって

$$\tilde{X} = X + C^{-1} A^T R^{-1} \hat{L} \quad (2-41)$$

で求められる。しかし、この一般的表式では、群定数の修正量を計算するためには、行列  $C$  の逆行列を求める必要がある。行列  $C$  は  $n$  行  $n$  列なので群定数の数に等しい連立方程式を解かねばならなくなる。前に述べたように群定数の数は 200~250 程度になり、200~250 元の連立方程式を解くことは現在の数値計算では不可能に近く、もし解が求まったとしてもその信頼度は非常に低い。

群定数修正では基本方程式 (2-14)、(2-15) は特殊な構造であるために、未知数の数の連立方程式を解かなくても、利用する積分データの数に等しい連立方程式を解けば良いことは Pazy et al.<sup>(14)</sup> によって最初に指摘された。本論文では、群定数間の相関を考慮しているが、この場合でも積分データの数に等しい連立方程式を解けば良いことを示す。(2-37) 式を (2-34) 式に代入して

$$\tilde{X} = X + \rho A^T V_1 \quad (2-42)$$

が得られる。この式は群定数の修正値を求めるためには、積分データに関する残差  $V_1$  を計算すれば良いことを示している。(2-42) 式を (2-33) 式に代入すると  $V_1$  についての連立方程式

$$B V_1 = \hat{M} \quad (2-43)$$

が得られる。ここで、

$$B = E + A \rho A^T \quad (2-44)$$

である。  $B$  は積分データの数に等しい  $m$  行  $m$  列の行列である。(2-43) 式を  $V_1$  について解き、これを (2-42) 式に代入すれば、群定数の修正値は

$$\tilde{X} = \hat{X} + \rho A^T B^{-1} M \quad (2-45)$$

で与えられる。以上の解法は実際の数値計算では非常に便利であり、求まった解の精度も良くなる。特に行列  $B$  は対角要素が他の行列要素より大きく数値計算から考えて良い性質の行列である。(2-45) 式を具体的に表示すると

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_i + \Delta \sigma_i \sum_j \sum_k \sum_{\ell} \rho_{ij} A_{kj} (B^{-1})_{k\ell} \left( \frac{\hat{m}_{\ell} - f_{\ell}[\hat{\sigma}]}{\Delta \hat{m}_{\ell}} \right) \quad (2-46)$$

となる。これから、修正された群定数は、

- i) 積分データの感度係数、
- ii) 積分データの実験値と解析値の差、

## iii) 基準の群定数の平均誤差.

に比例していることが解る。これは、積分データの解析的取扱いが正確でなければならず、た、基準の群定数の平均誤差の選び方も重要であることを意味している。

以上の取扱いでは、積分測定量は群定数の複雑な関数なので、Taylor 展開を用いて(2-10)式のように線型近似を行なっている。積分データの実験値と解析値が大きくずれていない場合には良い近似となるが、もしこの近似が良くない時には、非線型最小二乗法を用いねばならない。しかし、非線型最小二乗法の一般論はない。群定数修正の場合には逐次近似の繰り返し最小二乗法が有効であると思われる。<sup>(26)</sup> 即ち、修正された群定数を用いて積分データと感度係数を再計算し、(2-10)式で $\hat{\sigma}_j$ の代りに修正された群定数 $\tilde{\sigma}$ を用いる。ただし、(2-9)式は変更しない。この基本方程式について新しい修正値を求める。この手順を残差の二乗和が収斂するまで繰り返せば良い。しかし、積分データおよび感度係数の再計算が必要なために非常に複雑であり、実際に計算されたことがなく、また、理論的にも十分に検討されていない。

## 2-3 修正された群定数および積分データの精度

修正された群定数および積分データの精度を調べることは、群定数修正の有効性を調べる一つの基準として非常に重要である。修正された群定数の精度を求めることは Pazy et al.<sup>(14)</sup> によって最初に行なわれたが十分に検討されなかった。この節では、修正された群定数および積分データの精度を求め、その性質を調べると共に、両者の精度の間に簡単な関係式があることを見出し、群定数修正の統計的性質を明らかにする。

まずはじめに推定値 $\tilde{X}$ および残差 $V$ の統計的性質を調べる。(2-28)式を(2-41)式に代入し

$$\tilde{X} - X = C^{-1} A^T R^{-1} A \quad (2-47)$$

が得られる。誤差 $A$ の期待値は零である。従って、推定値 $\tilde{X}$ の期待値は真の値 $X$ に等しい。即ち、

$$E(\tilde{X}) = X \quad (2-48)$$

となる。これはまた(2-20)式から明らかなように基準に選んだ群定数の期待値にも等しく、(2-48)式は我々が正しいものを推定していることを意味する。このような性質を持つ推定値を不偏推定量と呼ぶ。<sup>(23)</sup> 一方、推定値 $\tilde{X}$ の分散は(2-47)式を用い(2-30)式を利用すると

$$D(\tilde{X}) = E(\tilde{X} - X)(\tilde{X} - X)^T = \sigma^2 C^{-1} \quad (2-49)$$

となる。これから、推定値 $\tilde{X}_i$ は平均値が $X_i$ で標準偏差が $\sigma \sqrt{(C^{-1})_{ii}}$ の正規分布に従っていることになり、同様に、(2-16)式から修正された群定数 $\tilde{\sigma}_i$ は平均値が $\sigma_i$ で標準偏差が $\sigma \sqrt{(C^{-1})_{ii}} / \sqrt{P_i}$ の正規分布に従っていることが解る。これを規格化すると

$$\frac{(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i) \sqrt{P_i}}{\sigma \sqrt{(C^{-1})_{ii}}} \sim N(0, 1) \tag{2-50}$$

となる。ここで  $(C^{-1})_{ii}$  は  $C$  の逆行列の対角要素  $(i, i)$  であり、 $N(0, 1)$  は平均値が 0 で標準偏差が 1 の正規分布を表わす。

一方、残差の二乗和  $(V^T R^{-1} V) / \sigma^2$  は自由度が  $N - n$  のカイ二乗分布に従うことは簡単に証明出来る。ただし、 $N = n + m$  であり、自由度  $N - n$  は利用する積分データの数に等しくなる。ここで、

$$t_{N-n} = \frac{(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i) \sqrt{P_i}}{\sqrt{(C^{-1})_{ii} \frac{(V^T R^{-1} V)}{N-n}}} \tag{2-51}$$

となる量  $t_{N-n}$  を作ると、この  $t_{N-n}$  は自由度が  $N - n$  の Student 分布に従う。<sup>(23)</sup> 以下、信頼区間の方法を用いて誤差評価を行なう。今、適当な値  $p$  を選ぶと、(2-51) 式の  $t_{N-n}$  が Student 分布で  $(-r_{N-n}, r_{N-n})$  の間に入る確率が  $p$  であるような数  $r_{N-n}$  を Student 分布の表から選ぶことができる。これを次のように表示する。

$$P[-r_{N-n} < t_{N-n} < r_{N-n}] = p \tag{2-52}$$

これに (2-51) 式の関係を入れて、信頼区間

$$I_p [\tilde{\sigma}_i - r_{N-n} \Delta \tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_i + r_{N-n} \Delta \tilde{\sigma}_i] \tag{2-53}$$

が得られる。上式で  $\Delta \tilde{\sigma}_i$  は

$$\Delta \tilde{\sigma}_i = \Delta \hat{\sigma}_i \sqrt{(C^{-1})_{ii} \frac{(V^T R^{-1} V)}{(N-n) \sigma^2}} \tag{2-54}$$

で与えられる。これは修正された群定数の平均誤差であり、 $\sigma^2$  は (2-12)、(2-13) 式で与えた積分データおよび群定数の重みの比例定数で既知である。(2-54) 式で  $\sigma^2$  は残差に含まれる値と互いに消し合う。

群定数の真の値は有限回の測定では知ることのできない量である。しかし、この真の値が修正された群定数  $\tilde{\sigma}_i$  を中心にした  $[\tilde{\sigma}_i - r_{N-n} \Delta \tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_i + r_{N-n} \Delta \tilde{\sigma}_i]$  の間に存在する確率が  $p$  であることを (2-53) 式は表わしている。従って、平均誤差  $\Delta \tilde{\sigma}_i$  が小さければ当然修正された群定数の信頼度は高くなる。

修正された群定数の平均誤差  $\Delta \tilde{\sigma}_i$  を (2-54) 式から計算する時には、 $C$  と  $R$  の逆行列を求めねばならない。しかし、 $C$  は  $n$  行  $n$  列の行列であり、 $R$  も (2-31) 式から  $n$  行  $n$  列の行列  $\rho$  を含んでいるので、前にも指摘したように数値計算上非常に困難な問題となる。附録 II で示すように次の関係式が容易に求められる。即ち、

$$C^{-1} = \rho - \rho A^T B^{-1} A \rho \tag{2-55}$$

$$q = \frac{(W^T B^{-1} W)}{(N-n) \sigma^2} \tag{2-56}$$

これらの関係式を用いると(2-54)式は

$$\Delta \tilde{\sigma}_i = \Delta \hat{\sigma}_i (1 - \delta_{ii})^{1/2} q^{1/2} \quad (2-57)$$

と書換えることができる。ここで、 $\delta_{ii}$ は

$$\delta_{ii} = \sum_j \sum_k \sum_{\ell} \sum_m \rho_{ij} A_{kj} B_{k\ell}^{-1} A_{\ell m} \rho_{mi} \quad (2-58)$$

で計算される。附録IIの[2]で証明されているように $\delta_{ii}$ はすべての*i*について

$$1 > \delta_{ii} \geq 0 \quad (2-58')$$

の関係を満たす。これから、

$$1 > (1 - \delta_{ii})^{1/2} \quad (2-58'')$$

が得られる。従って、この項はつねに修正された群定数の精度を良くするように作用している。これは積分データから受け取る情報量に直接関係している。一方、*q*は利用する測定データの統計的性質に関係し、規格化されたカイ二乗分布に従う。この分布の平均値は1なので、*q*の実現値は1のまわりに分布した値となる。もし、*q*の値が1に等しいか或は1よりも小さい時には、(2-57)式から修正された群定数の精度は修正前の群定数の精度よりも良くなる。これに対して、*q*の値が1より大きくて、例えば、 $\delta_{ii}$ の最大値を $\delta_{max}$ とすると、

$$q > \frac{1}{1 - \delta_{max}} \quad (2-59)$$

なる時には、修正された群定数の精度はすべて修正前の群定数の精度よりも悪くなる。従って、修正後の群定数の精度は必ずしも修正前の群定数の精度よりも良くなるとは云えない。しかし、*q*の期待値は1なので、一般的に、修正後の群定数の精度は良くなる期待される。*q*の性質については第4章で詳しく論ずる。

次に、修正された積分データの精度について考える。修正された積分データは修正された群定数を用いて計算された値に等しいので、 $\hat{m}_i = f_i[\hat{\sigma}]$ と表わすことができる。ここで積分データの重みで規格化された量 $\tilde{L}_i = \sqrt{P_i} f_i[\hat{\sigma}]$ について考えると、

$$\tilde{L}_i = \sqrt{P_i} (f_i[\hat{\sigma}] + \sum_j a_{ij} (\tilde{\sigma}_j - \hat{\sigma}_j)) \quad (2-60)$$

となる。一方、修正された積分データの真の値は、群定数の真の値を用いて計算された値に等しい。即ち、

$$L_i = \sqrt{P_i} f_i[\sigma] \quad (2-61)$$

で表わされる。これを $\hat{\sigma}$ のまわりでTaylor展開をし、2次以上の項を省略すると

$$L_i = \sqrt{P_i} (f_i[\hat{\sigma}] + \sum_j a_{ij} (\sigma_j - \hat{\sigma}_j)) \quad (2-61')$$

となる。従って、(2-60)と(2-61')式から

$$\tilde{l}_i - l_i = \sum_{j=1}^{n_n} A_{ij} (\tilde{X}_j - X_j) \quad (2-62)$$

が得られる。或は行列表示で

$$\tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{L} = \mathbf{A} (\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) \quad (2-63)$$

となる。 $\tilde{\mathbf{L}}$ の分散は(2-49)式を用いて

$$D(\tilde{\mathbf{L}}) = E(\tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{L})(\tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{L})^T = \sigma^2 \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T \quad (2-64)$$

となる。これは、 $\tilde{l}_i$ が平均値が $l_i$ で標準偏差が $\sigma \sqrt{(\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)_{ii}}$ の正規分布に従うことを意味している。これから

$$\frac{(\tilde{m}_i - m_i) \sqrt{P_i}}{\sigma \sqrt{(\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)_{ii}}} \in N(0, 1) \quad (2-65)$$

と表示される。修正された群定数の場合と同じようにして、残差の二乗和を用いて、

$$t_{N-n} = \frac{(\tilde{m}_i - m_i) \sqrt{P_i}}{\sqrt{(\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)_{ii} \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}}{N-n}}} \quad (2-66)$$

なる量を作ると、 $t_{N-n}$ はStudent分布に従うので、 $\tilde{m}_i$ に対する信頼区間を構成できる。

$$I_p [\tilde{m}_i - \gamma_{N-n} \Delta \tilde{m}_i, \tilde{m}_i + \gamma_{N-n} \Delta \tilde{m}_i] \quad (2-67)$$

ここで $\Delta \tilde{m}_i$ は修正された積分データの平均誤差で、

$$\Delta \tilde{m}_i = \Delta \hat{m}_i \sqrt{(\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)_{ii} \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}}{(N-n) \sigma^2}} \quad (2-68)$$

で与えられる。上式に $\mathbf{C}^{-1}$ 、 $\mathbf{R}^{-1}$ が含まれているので、次のように変形した方が便利である。

$$\Delta \tilde{m}_i = \Delta \hat{m}_i (1 - B_{ii}^{-1})^{1/2} q^{1/2} \quad (2-69)$$

ただし $B_{ii}^{-1}$ は $\mathbf{B}$ の逆行列 $\mathbf{B}^{-1}$ の $(i, i)$ 要素で

$$1 > B_{ii}^{-1} \geq 0 \quad (2-70)$$

の条件を満足する。従って、修正された積分データの精度は修正された群定数の精度と同じように、 $q$ の値が1に等しいか或は1より小さい時には常に修正前の値よりも良くなる。

最後に、修正された積分データおよび修正された群定数の精度の間の関係を調べる。簡単のため、群定数間の相関がない場合について、次の量を考える。<sup>(2)</sup>

$$S = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta \tilde{m}_i}{\Delta \hat{m}_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Delta \tilde{\sigma}_j}{\Delta \hat{\sigma}_j} \right)^2 \quad (2-71)$$

ここで、 $\Delta \tilde{m}_i$ 、 $\Delta \hat{m}_i$  は積分データの修正後および修正前の平均誤差、 $\Delta \tilde{\sigma}_j$ 、 $\Delta \hat{\sigma}_j$  は群定数の修正後および修正前の平均誤差である。上式に (2-68)、および (2-54) 式で群定数間の相関がない場合の値を代入し、(2-29) 式の関係を用いると、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)_{ii} q + \sum_{j=1}^n \mathbf{C}_{jj}^{-1} q \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)_{ii} q \end{aligned} \quad (2-72)$$

(N=n+m)

となる。行列

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T \quad (2-73)$$

は対称行列であり、

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \quad (2-74)$$

なる関係を満足するので、 $\mathbf{U}$  は射影演算子である。ここで適当な直交行列  $\mathbf{F}$  を選ぶと  $\mathbf{U}$  は対角行列

$$\mathbf{D} = \mathbf{F} \mathbf{U} \mathbf{F}^T \quad (2-75)$$

に変換できる。(2-74) 式を用いると

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \quad (2-76)$$

なる関係が得られる。これから  $\mathbf{D}$  の要素も

$$d_i^2 = d_i \quad (2-77)$$

の関係を満たす。従って、 $d_i = 0, 1$  となる。 $d_i$  の値が 1 に等しい  $d_i$  の数は行列  $\mathbf{D}$  の階数に等しい。<sup>(23)</sup>  $\mathbf{C}$  は  $n$  行  $n$  列で正則行列なので、 $\mathbf{D}$  の階数は  $n$  になる。即ち、 $d_i = 1$  を満たす  $d_i$  の数は  $n$  個存在する。

数学の定理、「 $\mathbf{F}$  を正則行列とすると、 $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}^{-1}$  ならば、それらの対角和は変わらない。即ち、 $S_p(\mathbf{B}) = S_p(\mathbf{A})$  である。」を用いると、

$$S_p(\mathbf{U}) = S_p(\mathbf{D}) = n \quad (2-78)$$

が得られる。これから (2-72) 式の値は  $nq$  に等しくなる。(2-71) 式を全体の測定データの数  $N$  で平均して、

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta \tilde{m}_i}{\Delta \hat{m}_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Delta \tilde{\sigma}_j}{\Delta \hat{\sigma}_j} \right)^2 \right] = \frac{n}{N} q \quad (2-79)$$

となる。上式から全体の平均の精度は用いる積分データおよび群定数の数と残差の二乗和で定まる。これから全体の精度を良くするためには、群定数の数に較べて積分データの数を増加させることが本質的に重要であることが理解できる。(2-79) 式は最小二乗法の有効性を示す重要な関係式である。実際の数値的検討は第 6 章で詳しく述べる。

### 3 群定数間の相関

#### 3-1 はじめに

群定数修正において群定数間の相関を考慮することが Hemment et al.<sup>(13)</sup> によって最初に指摘された。群定数間の相関としては、二つの異なった型のものが存在する。一つは同じ反応で異なったエネルギー群の群定数間に存在するものであり、他の一つは異なった核種の異なった反応に属する群定数間に存在するものである。前者の相関は、断面積が核物理的性質に由来するモデルで記述されることに基づき、後者の相関は断面積の相対測定に由来する。前者の相関を求める方法は、断面積の測定値がエネルギー依存の任意関数の一次結合で表わされると仮定して、著者によって最初に与えられた。<sup>(28)</sup> さらに、これを一般化した方法および相対測定に基づく相関を計算する方法も著者によって与えられている。<sup>(22)</sup> 群定数間の相関は、群定数修正において取り上げられているが、Usachev<sup>(20)</sup> によって、原子炉の計算で任意の物理量を要求される精度で評価する時に、断面積の測定を最も有効に行なうためには、いかにすべきかと云う問題においても取り上げられている。

次に、群定数修正において群定数間の相関を考慮することが非常に重要であることを簡単な例について説明する。今、 $n$  群の  $^{10}\text{B}$  の捕獲断面積を 1 個の  $^{10}\text{B}$  の反応率の測定値を用いて修正する場合について考える。修正する群定数が  $n$  個で積分データが 1 個の時、群定数間の相関を考慮しなければ、群定数の修正量は (2-46) 式で、 $\rho_{ii}=1$ ,  $\rho_{ij}=0$ , とおいて、

$$\frac{\tilde{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i}{\Delta \sigma_i} = A_{1i} (\mathbf{B}^{-1})_{1,i} \frac{\hat{m}_1 - f_1[\hat{\sigma}]}{\Delta \hat{m}_1} \quad (3-1)$$

となる。ただし、 $(\mathbf{B}^{-1})_{1,i}$  は (2-44) 式から

$$(\mathbf{B}^{-1})_{1,i} = \frac{1}{1 + \sum_j^n A_{1,j}^2} \quad (3-2)$$

で与えられる。この量は群定数に直接関係しないので、(3-1) 式から群定数の修正量は感度係数に比例する。(3-1) 式で  $A_{1i}$  は

$$A_{1i} = \frac{\Delta \hat{\sigma}_i}{\Delta \hat{m}_1} a_{1i} = \frac{\Delta \hat{\sigma}_i / \hat{\sigma}_i}{\Delta \hat{m}_1 / \hat{m}_1} \cdot \frac{\hat{\sigma}_i}{f_1[\hat{\sigma}]} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) \hat{\sigma}$$

で与えられるので、 $\Delta \hat{\sigma}_i / \hat{\sigma}_i$  をすべてのエネルギー群で等しく取れば、修正量は

$$\frac{\tilde{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i}{\Delta \hat{\sigma}_i} \propto \frac{\hat{\sigma}_i}{f_1} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) \hat{\sigma}$$

となる。 $^{10}\text{B}$  の反応率の感度係数  $(\hat{\sigma}_i / f_1) a_{1i}$  を Fig. 3-1 に示してある。これから、群定数の修正量は Fig. 3-2 の点線で示す値となる。これは  $^{10}\text{B}$  の捕獲断面積として正しい修正値であるだろうか。 $^{10}\text{B}$  の捕獲断面積は核物理の測定から  $1/v$  法則に従うことが示されている。

一方、修正された値は  $1/\sqrt{v}$  法則からずれ、感度係数の大きいエネルギー領域で大きくなっている。従って、これは正しい修正であるとは言えない。

次に、群定数間の相関を取り入れると、群定数の修正量は (2-46) 式から

$$\frac{\tilde{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i}{\Delta \hat{\sigma}_i} = \sum_{j=1}^n \rho_{ij} A_{1j} (\mathbf{B}^{-1})_{1,1} \frac{\hat{m}_1 - f_1[\hat{\sigma}]}{\Delta \hat{m}_1} \quad (3-3)$$

となる。相関係数  $\rho_{ij}$  は断面積が  $1/\sqrt{v}$  法則に従う時には、次節で示すようにすべての群について、

$$\rho_{ij} = 1 \quad (3-4)$$

となる。これから群定数の修正量は

$$\frac{\tilde{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i}{\Delta \hat{\sigma}_i} = \left( \sum_{j=1}^n A_{1j} \right) (\mathbf{B}^{-1})_{1,1} \frac{\hat{m}_1 - f_1[\hat{\sigma}]}{\Delta \hat{m}_1} \quad (3-5)$$

となり、感度係数の和に比例し、すべてのエネルギー群に対して等しい割合となる。即ち、修正された群定数も  $1/\sqrt{v}$  法則に従い、核物理的観点からみて正しい修正値が得られたことになる。

以上の考察は非常に簡単な場合の結果であるが、しかし、実際の修正操作でも同様の傾向が内在していることは明らかである。即ち、修正量は感度係数の大きいエネルギー群で大きくなる。しかし、断面積の核物理的性質から考えて、これは必ずしも正しい修正を行なっているとは言えない。最小二乗法で、積分データの実験値と解析値の差を最も効率良く埋め合わせるためには、感度係数の大きいエネルギー群の群定数をできるだけ大きく修正した方がよいからである。この傾向を少なくしかつ正しい修正結果を得るためには、群定数間の相関を考慮することと、積分データの感度係数が広いエネルギー特性を持つようにすることが本質的に重要である。上記の例でも利用する積分データの数を多くし、感度係数が広いエネルギー特性を持つようにすれば、群定数の修正量は近似的に  $\left( \sum_k^m A_{k,1} \right)$  に比例するので、群定数間の相関を考慮しなくとも、 $1/\sqrt{v}$  からのずれは少なくなると思われる。

### 3-2 群定数間の相関の理論

群定数間の相関を求める理論を作るために、まずはじめに、断面積の測定値を用いて群定数を作成する手順について考えてみる。断面積の測定値が  $m$  個のエネルギー点で与えられたとすれば、これからまず1本の線を引き、エネルギーについて連続な断面積の測定カーブを求める。微視的断面積は、通常、実験で定めるべき未知パラメータを含んだ核物理的性質に由来するモデルで記述される場合が多い。この時には、測定値を用いて1本のカーブを求めることは、上記の未知パラメータを実験値から定めることに相当する。簡単なモデルとして、断面積が未知パラメータの一次結合で表わされる場合を考える。

$$\sigma(E) = \sum_{k=1}^n a_k g_k(E) \quad (3-6)$$

これは具体的には断面積が統計モデルで記述される場合に相当し、この時には、強度関数が未



知パラメータとなる。また、 $1/v$  法則に従う断面積では、上式で展開の第1項のみを取り、 $g_1(E) = 1/\sqrt{E}$  とすればよい。

断面積の測定値  $m_i$  が、 $\sigma(E)$  の展開項数  $n$  よりも多いエネルギー点  $m$  で与えられている時には、(3-6)式は未知パラメータ  $a_k$  の一次式なので、最小二乗法を用いてこの  $a_k$  を定めることができる。ここで、

$$b_{ik} = g_k(E_i) \quad (3-7)$$

とおけば、展開係数  $a_k$  を定める次の誤差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} b_{11} a_1 + b_{12} a_2 + \dots + b_{1n} a_n &= \hat{m}_1 - d_1 \\ b_{21} a_1 + b_{22} a_2 + \dots + b_{2n} a_n &= \hat{m}_2 - d_2 \\ \vdots & \\ b_{m1} a_1 + b_{m2} a_2 + \dots + b_{mn} a_n &= \hat{m}_m - d_m \end{aligned} \quad (3-8)$$

上式は行列表示で

$$BA = M - d \quad (3-9)$$

となる。 $A$  の推定値を  $\hat{A}$  とすれば、 $\hat{A}$  は次の残差方程式に従う。

$$B\hat{A} = \hat{M} - V \quad (3-10)$$

個々の測定値の平均誤差を  $d\hat{m}_i$  とすれば、その重みは

$$P_i = \frac{\sigma^2}{d\hat{m}_i^2} \quad (3-11)$$

で与えられる。或は行列表示で

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_n \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

となる。これから、推定値  $\hat{A}$  は

$$Q = V^T P V \quad (3-13)$$

を最小にすることから定められる。この時、正規方程式は

$$C\hat{A} = B^T P \hat{M} \quad (3-14)$$

となる。ここで、

$$C = B^T P B \quad (3-15)$$

である。(3-14)式を解いて推定値は

$$\hat{A} = C^{-1} B^T P M \quad (3-16)$$

で求められる。また、推定値  $\hat{A}$  の期待値は  $A$  なので、 $\hat{A}$  の分散は

$$D(\hat{A}) = E(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)^T = \sigma^2 C^{-1} \quad (3-17)$$

となる。従って、推定値  $a_k$  の平均誤差は

$$\Delta \hat{\sigma}_k = \sqrt{C_{kk}^{-1} \frac{V^T P V}{m-n}} \quad (3-18)$$

で計算される。

上記の手順で定められた係数  $\hat{a}_k$  を用いると、断面積の測定値から定められたカーブは

$$\hat{\sigma}(E) = \sum_{k=1}^n \hat{a}_k g_k(E) \quad (3-19)$$

となる。(2-4)式に  $\hat{\sigma}(E)$  を代入して、群定数は次式で与えられる。

$$\hat{\sigma}_j = \sum_{k=1}^n \hat{a}_k g_{jk} \quad (3-20)$$

$$(j=1, \dots, N)$$

ここで、

$$g_{jk} = \frac{1}{W_j} \int_{D_{Ej}} g_k(E) \phi(E) dE \quad (3-21)$$

である。(3-20)式から異なったエネルギー群に属する群定数でも、いくつかの共通のパラメータを含んでいる。群定数修正で、ある群の群定数を変化させることは、核物理的観点からはこのパラメータを変化させることに対応する。従って、1つの群の群定数が変化すれば、他の群の群定数も変化する。このような相互関係を群定数間の相関として修正操作に取り入れる。

(3-20)式で、実験から定められた  $\hat{a}_k$  は(3-16)式から明らかなように測定値  $\hat{m}_i$  の一次結合で表わされる。測定値  $\hat{m}_i$  は正規分布に従う値が実現していると想定されるので確率変数である。従って、この確率変数の一次結合で表わされる  $\hat{a}_k$  もまた正規分布に従う確率変数となり、同様に、 $\hat{a}_k$  の一次結合である群定数も正規分布に従う確率変数となる。パラメータ  $\hat{a}_k$  の真の値を  $a_k$  とすれば、群定数の真の値は

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^n a_k g_{jk} \quad (3-22)$$

で与えられる。群定数  $i$  と  $j$  の間の相関係数  $\rho_{ij}$  は一般的に

$$\rho_{ij} = \frac{E(\hat{\sigma}_i - \sigma_i)(\hat{\sigma}_j - \sigma_j)}{\sqrt{E(\hat{\sigma}_i - \sigma_i)^2 \cdot E(\hat{\sigma}_j - \sigma_j)^2}} \quad (3-23)$$

で計算できる。<sup>(29)</sup> まずはじめに、群定数  $j$  の分散を計算する。(3-20)と(3-22)式より

$$E(\hat{\sigma}_j - \sigma_j)^2 = \sum_k^n \sum_{k'}^n g_{jk} g_{jk'} E(\hat{a}_k - a_k)(\hat{a}_{k'} - a_{k'}) \quad (3-24)$$

となる。一般に、 $\hat{a}_k$  と  $\hat{a}_{k'}$  は (3-17) 式から相互に独立ではなく相関がある。この相関係数は

$$r_{kk'} = \frac{C_{kk'}^{-1}}{\sqrt{C_{kk}^{-1} \cdot C_{k'k'}^{-1}}} \quad (3-25)$$

で与えられる。これから、

$$E(\hat{a}_k - a_k)(\hat{a}_{k'} - a_{k'}) = r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'} \quad (3-26)$$

となる。ただし、 $\Delta \hat{a}_k$  は  $\hat{a}_k$  の平均誤差である。上式を (3-24) 式に代入して

$$E(\hat{\sigma}_j - \sigma_j)^2 = \sum_k^n \sum_{k'}^n g_{jk} g_{jk'} r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'} \quad (3-27)$$

となる。同様に

$$E(\hat{\sigma}_i - \sigma_i)^2 = \sum_k^n \sum_{k'}^n g_{ik} g_{ik'} r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'} \quad (3-27')$$

である。また、群定数  $i$  と  $j$  の共分散は

$$E(\hat{\sigma}_i - \sigma_i)(\hat{\sigma}_j - \sigma_j) = \sum_k^n \sum_{k'}^n g_{ik} g_{jk} r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'} \quad (3-28)$$

となる。以上の (3-27), (3-27'), (3-28) 式を (3-23) 式に代入して、群定数  $i$  と  $j$  の相関係数は

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{kk'}^n g_{ik} g_{jk} r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'}}{\sqrt{(\sum_{kk'}^n g_{ik} g_{ik'} r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'}) (\sum_{kk'}^n g_{jk} g_{jk'} r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'})}} \quad (3-29)$$

で計算される。相関係数は一般に次の関係を満足する。<sup>(29)</sup>

$$1 \geq \rho_{ij} \geq -1 \quad (3-30)$$

(3-29) 式で与えられる相関係数が上の関係を満すことは容易に証明できる。<sup>(28)</sup> 即ち、

(3-29) 式は

$$\rho_{ij}^2 = \frac{1}{1+r}$$

と書換えることができる。ここで

$$r = \frac{\sum_{(lm)} (g_{ile} g_{ilm} - g_{im} g_{ile})^2 \Delta \hat{a}_e^2 \Delta \hat{a}_m^2 (r_{le} r_{mm} - r_{me} r_{lm})}{(\sum_{kk'}^n g_{ik} g_{jk} r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'})^2}$$

で与えられる。上式で  $\sum_{(lm)}$  は  $n$  から作られるあらゆる対  $(lm)$  についての和を表わす。ここで、

$$r_{ll} r_{mm} - r_{ml} r_{lm} \geq 0$$

を満足するので、 $r \geq 0$  となる。これから

$$1 \geq \rho_{ij}^2$$

が得られ、(3-30)式が満足されていることが解る。

ここで断面積が  $1/v$  法則で記述される場合、或はさらに一般的に(3-6)式の展開で1つの項だけで表わされる場合について考える。相関係数は(3-29)式から

$$\rho_{ij} = \frac{g_{i1} g_{j1} \Delta \hat{a}_1^2}{\sqrt{g_{i1}^2 \Delta \hat{a}_1^2 g_{j1}^2 \Delta \hat{a}_1^2}} = 1 \quad (3-31)$$

となる。相関係数が1と云うことは二つの変数が完全に従属関係にあることを意味する。今の場合には、群定数のエネルギー群による相対値は完全に定まっており、その絶対値だけが問題となる。従って、或る群で群定数を1%変化させることは、他の群でも群定数を1%変化させることを意味し、1つの群の群定数を修正すれば他の群定数は自動的に定まってしまう。

断面積が未知パラメータの一次結合で表示される場合について考察したが、必ずしもすべての断面積が未知パラメータの一次結合で表示されるわけではない。一般的には、さらに複雑な関数で表わされる場合が多い。例えば、断面積が光学模型で解釈される場合等である。これを次のように一般的に表示する。

$$\sigma(E) = g(E, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3-32)$$

上式で未知パラメータ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  を真の値とすれば、 $\sigma(E)$  は断面積の真の値となる。これから群定数の真の値は、(3-32)式を(2-4)式に代入して、

$$\sigma_j = g_j(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3-33)$$

となる。ここで

$$g_j = \frac{1}{W_j} \int_{\Delta E_j} g(E, a_1, a_2, \dots, a_n) \phi(E) dE \quad (3-34)$$

である。(3-32)式に含まれる未知パラメータは、断面積の測定値から繰り返し最小二乗法により推定される。<sup>(80)</sup> この推定値を  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n$  とすれば、測定値から定められた断面積のカーブは、

$$\hat{\sigma}(E) = g(E, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n) \quad (3-35)$$

で与えられる。この断面積のカーブから定められる群定数は、(3-35)式を(2-4)式に代入して、

$$\hat{\sigma}_j = g_j(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n) \quad (3-36)$$

となる。ただし、 $g_j$  は (3-34) 式で未知パラメータの推定値  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n$  を代入したものである。(3-36) 式で  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n$  は確率変数なので、群定数  $\hat{\sigma}_j$  も確率変数となる。群定数の真の値は (3-33) 式で与えられるので、Taylor 展開を用いて次の関係式が得られる。

$$\hat{\sigma}_j - \sigma_j = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial g_j}{\partial a_k} \right) (\hat{a}_k - a_k) + \dots \quad (3-37)$$

これを (3-23) 式に代入し、群定数  $i$  と  $j$  の相関係数は

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{kk'}^n \left( \frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \left( \frac{\partial g_j}{\partial a_{k'}} \right) r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'}}{\sqrt{\left( \sum_{kk'}^n \left( \frac{\partial g_i}{\partial a_k} \right) \left( \frac{\partial g_i}{\partial a_{k'}} \right) r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'} \right) \left( \sum_{kk'}^n \left( \frac{\partial g_j}{\partial a_k} \right) \left( \frac{\partial g_j}{\partial a_{k'}} \right) r_{kk'} \Delta \hat{a}_k \Delta \hat{a}_{k'} \right)}} \quad (3-38)$$

となる。上式は一般的な表示なので、断面積が任意のモデルで記述される場合に適用できる。

次に、断面積の相対測定に基づく相関について考える。断面積  $\sigma_Y$  が標準断面積  $\sigma_X$  に対し相対的に定められる場合を取扱う。 $\sigma_X$  に対する  $\sigma_Y$  の相対値を  $r$  とすれば、断面積  $\sigma_Y$  は

$$\sigma_Y = r \sigma_X \quad (3-39)$$

で求められる。上式で  $\sigma_X$  および  $r$  をそれぞれ標準断面積および相対値の真の値とすれば、 $\sigma_Y$  は断面積の真の値となる。ここで、断面積の絶対測定値を  $\hat{\sigma}_X$ 、相対測定値を  $\hat{r}$  とすれば、測定から定まる断面積  $\hat{\sigma}_Y$  は

$$\hat{\sigma}_Y = \hat{r} \hat{\sigma}_X \quad (3-40)$$

となる。 $\hat{\sigma}_Y$  の分散は (3-39)、(3-40) 式を用いて、

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_Y - \sigma_Y)^2 &= E(\hat{r} \hat{\sigma}_X - r \sigma_X)^2 \\ &= \sigma_X^2 \Delta \hat{r}^2 + r^2 \Delta \hat{\sigma}_X^2 + \Delta \hat{r}^2 \Delta \hat{\sigma}_X^2 \end{aligned} \quad (3-41)$$

上式で  $\Delta r$ 、 $\Delta \sigma_X$  はそれぞれ  $r$  および  $\sigma_X$  の平均誤差である。尚、この式には  $\hat{r}$  および  $\hat{\sigma}_X$  の真の値が含まれているが、これは知ることのできない量なので測定値で置き換える。また (3-41) 式の右辺第 3 項は第 1 項および第 2 項に較べて小さいので省略する。

$$E(\hat{\sigma}_Y - \sigma_Y)^2 \doteq \hat{\sigma}_X^2 \Delta \hat{r}^2 + \hat{r}^2 \Delta \hat{\sigma}_X^2 \quad (3-42)$$

また  $\hat{\sigma}_X$  の分散は

$$E(\hat{\sigma}_X - \sigma_X)^2 = \Delta \hat{\sigma}_X^2 \quad (3-43)$$

と表わされる。一方、 $\hat{\sigma}_Y$  と  $\hat{\sigma}_X$  の共分散は

$$E(\hat{\sigma}_Y - \sigma_Y)(\hat{\sigma}_X - \sigma_X) = \hat{\Gamma} \Delta \hat{\sigma}_X^2 \quad (3-44)$$

となる。(3-42)~(3-44)式を(3-23)式に代入して、 $\hat{\sigma}_Y$ と $\hat{\sigma}_X$ の相関係数は

$$\rho_{X,Y} = \frac{\frac{\Delta \hat{\sigma}_X}{\hat{\sigma}_X}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta \hat{\sigma}_X}{\hat{\sigma}_X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma}}\right)^2}} \quad (3-45)$$

となる。相対測定に基づく相関係数は絶対測定および相対測定の相対誤差のみに関係し、相対測定の精度が良くなると相関係数は大きくなり、絶対測定の精度が良くなると相関係数は小さくなる。

### 3-3 相関係数の数値例とその特性

相関係数の具体的数値を求めるためには、断面積を記述する核物理的モデルを選択する必要がある。数値的取扱いが簡単であることを考慮して、1 Kev から 10 Mev のエネルギー範囲で統計モデルを用いることにする。厳密には、1 Mev 以上の領域では中性子と原子核の相互作用で直接過程からの寄与が比較的重要になるが、数学的取扱いが複雑なために省略する。また、1 Kev 以下の領域では、中性子の共鳴反応が重要になるが、これも取扱いが複雑なためと、高速炉ではこのエネルギー領域の反応の重要性が低いために群定数間の相関を考慮しないことにする。

統計モデルによると微視的断面積は次式で記述される。<sup>(8)</sup>

$$\sigma_x(E) = \sum_{\ell} \sigma_{x\ell}(E) = \sum_{\ell} g_{x\ell}(E) S_{\ell} \quad (3-46)$$

ここで、 $x$ は反応の種類、 $\ell$ は中性子の軌道角運動量、 $S_{\ell}$ は中性子の強度関数を表わす。ただし、 $g_{x\ell}(E)$ は次式で与えられる。<sup>(8)</sup>

$$g_{x\ell}(E) = \sum_J 2\pi^2 \kappa^2 P_{\ell} \sqrt{E} \frac{g_J \epsilon_{j\ell} \langle \Gamma_x \rangle_{\ell,J}}{\langle \Gamma \rangle_{\ell,J}} F_{\ell,J} \quad (3-47)$$

上式で、 $\kappa$ は中性子の波長、 $P_{\ell}$ は中性子の透過因子、 $g_J$ はスピンの統計的重み因子、 $\langle \Gamma_x \rangle$ 、 $\langle \Gamma \rangle$ はそれぞれ反応 $x$ に対する巾および全巾、 $F_{\ell,J}$ はレベル巾の"ゆらぎ"の補正因子である。

統計モデルでは実験から定めるべき値は $\langle \Gamma_x \rangle$ 、 $\langle \Gamma \rangle$ 、 $S_{\ell}$ である。この中で、 $\langle \Gamma_x \rangle$ 、 $\langle \Gamma \rangle$ は低エネルギーの分離された共鳴領域の実験値を用いて推定される。一方、 $S_{\ell}$ は $\ell=0, 1$ についてはレベル巾と同様に低エネルギーでの共鳴の実験値を用いて推定されるが、 $\ell \geq 2$ についてはKev領域の $\sigma_1(E)$ の実験値から定めるか、或は光学模型で計算によって求める。従って、 $\langle \Gamma_x \rangle$ 、 $\langle \Gamma \rangle$ を既知パラメータとし、 $S_{\ell}$ を未知パラメータと近似する。この時には、(3-46)式により断面積は $S_{\ell}$ の一次結合によって表わされ、前節の最初に述べた理

論が直接適用できる。

(3-46)式を用いて群定数を作ると次のようになる。

$$\hat{\sigma}_{x,i} = \sum_{\ell} \langle \sigma_x \rangle_{\ell,i} \quad (3-48)$$

ここで、

$$\langle \sigma_x \rangle_{\ell,i} = \frac{1}{W_i} \int_{\Delta E_i} \sigma_{x,\ell}(E) \phi(E) dE \quad (3-49)$$

である。これを用いて(3-29)式から群定数*i*と*j*の相関係数は

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{\ell} \langle \sigma_x \rangle_{\ell,i} \langle \sigma_x \rangle_{\ell,j} \left(\frac{\Delta S_{\ell}}{S_{\ell}}\right)^2}{\sqrt{\left(\sum_{\ell} \langle \sigma_x \rangle_{\ell,i}^2 \cdot \left(\frac{\Delta S_{\ell}}{S_{\ell}}\right)^2\right) \left(\sum_{\ell} \langle \sigma_x \rangle_{\ell,j}^2 \cdot \left(\frac{\Delta S_{\ell}}{S_{\ell}}\right)^2\right)}} \quad (3-50)$$

となる。上式で $\Delta S_{\ell}$ は強度関数の平均誤差である。また、異なった強度関数の間の相関は省略した。

強度関数 $S_{\ell}$ は(3-46)式で $\sigma_t(E)$ と置いた時、これが実験値に一致するように定めるべきであるが、手順が複雑になるので、ここでは計算によって求めた。中性子の軌道角運動量は $\ell=6$ までを考慮し、100Kev以上のエネルギー領域では、Emmerich<sup>(32)</sup>によって光学模型を用いて計算された透過係数 $T_{\ell}(E)$ が与えられているので、これから $S_{\ell}$ を推定した。両者の関係は

$$T_{\ell}(E) = 2\pi P_{\ell} \sqrt{E} S_{\ell} \quad (3-51)$$

によって与えられる。また、100Kev以下のエネルギー領域では、 $\ell=0,1$ の成分のみが寄与するが、100Kevで(3-51)式の関係が満たされるように強度関数を選んだ。尚、透過係数 $T_{\ell}(E)$ を用いると複合核形成断面積は

$$\sigma_{c\ell}(E) = \pi k^2 (2\ell+1) T_{\ell}(E) \quad (3-52)$$

で記述される。<sup>235</sup>Uの複合核形成断面積をFig. 3-3に示してある。(3-50)式で $\Delta S_{\ell}/S_{\ell}$ は、 $\ell=0,1$ に対しては20%、 $\ell \geq 2$ に対しては40%を仮定した。他のパラメータはKFK-120<sup>(33)</sup>の値を用いた。

<sup>235</sup>Uの核分裂断面積の相関係数をTable 3-1に示す。これは、25群のABBNセットを15群に縮約し、1~12群(1Kev~10Kev)について計算した結果である。近接した群の間の相関は非常に強いが、これは、Fig. 3-3から明らかなように、群巾よりもはるかに広い巾を持つ $\sigma_{c\ell}$ 成分の重ね合わせによって断面積が表わされているためである。この傾向が6, 7, 8, 群で非常に強く0.99~0.98であるのは $\ell=1$ の成分がこの領域で主要な部分を占めているからである。これに対して、 $\ell=0,1$ の二つの成分が同程度に寄与している9, 10群の間では相関はやや弱くなっている。また、100Kev以上のエネルギー群とそれ以下の群で相

関が存在するのは  $l=0, 1$  の二つの成分による。1群と12群の間にも弱い相関が存在するのはこのためである。

次に、 $^{239}\text{Pu}$  の核分裂断面積の相関係数を Table 3-2 に示す。 $^{235}\text{U}$  の値に較べて、 $^{239}\text{Pu}$  の相関は高エネルギー領域でやや強く、低エネルギー領域でやや弱い。これは  $^{239}\text{Pu}$  の核分裂断面積が  $^{235}\text{U}$  の値よりも高エネルギー領域で大きく、低エネルギー領域で小さいためであると思われる。しかし、両者の違いは極めて小さい。複合核形成断面積は中性子の入射エネルギーと標的核の質量数  $A$  に依存する。 $^{239}\text{Pu}$  と  $^{235}\text{U}$  の質量数がほぼ同じなので、複合核形成断面積もほぼ等しくなる。従って、 $\langle \sigma_f \rangle / \langle \sigma \rangle$  の違いが相関係数の大きさに与える影響が非常に小さいことになる。しかし、本論文の計算では、 $\langle \sigma_f \rangle$  や  $\langle \sigma \rangle$  を既知パラメータとして処理したためであるかもしれない。

$^{235}\text{U}$  と  $^{239}\text{Pu}$  の捕獲断面積の相関係数を Table 3-3 および Table 3-4 に与える。核分裂断面積と捕獲断面積の相関係数は高エネルギー領域でわずかに異なるがその他の領域ではほぼ等しい。また、 $^{235}\text{U}$  と  $^{239}\text{Pu}$  の捕獲断面積は、高エネルギー領域で後者がやや大きく、低エネルギー領域で前者がやや大きい。しかし、断面積の値の違いに較べて相関係数の値の違いが非常に小さい。

以上の計算は  $^{235}\text{U}$  と  $^{239}\text{Pu}$  について行なったが、 $^{238}\text{U}$  では非弾性散乱と捕獲の競合過程が重要になり、捕獲断面積の相関係数を正確に求めるためには、非弾性散乱断面積も正確に計算することが必要であると思われる。また、 $^{238}\text{U}$  の非弾性散乱断面積の相関係数を求めることも非常に重要な問題であるが、理論的に複雑である。

相対測定に基づく相関係数を絶対測定および相対測定の相対誤差を変化させて計算した結果を Table 3-5 に与える。絶対測定値  $\hat{\sigma}_x$  の誤差が大きいときには相関係数は大きくなり、相対測定値  $\hat{\sigma}$  の誤差が大きいときには相関係数は小さくなる。(3-40)式で  $\hat{\sigma}_y$  の変化は  $\hat{\sigma}_x$  の変化と  $\hat{\sigma}$  の変化によって生ずる。もし、 $\hat{\sigma}$  に誤差がなければ  $\hat{\sigma}_y$  の変化はすべて  $\hat{\sigma}_x$  の変化から生じ、 $\hat{\sigma}_y$  と  $\hat{\sigma}_x$  の相関係数は1になる。 $\hat{\sigma}$  の誤差が大きくなると、 $\hat{\sigma}_y$  の変化のうち  $\hat{\sigma}_x$  の変化によるものの割合が少なくなり、 $\hat{\sigma}_y$  と  $\hat{\sigma}_x$  の相関が弱くなり、相関係数は小さくなる。通常は、絶対測定に較べ相対測定の精度が良いので、相関係数は0.707よりも大きくなる。

群定数間の相関を考慮することが群定数の修正量およびその精度に与える影響については第6章で詳しく調べることにする。



Table 3-1 Correlation coefficients of  $U^{235}$  fission cross sections

group group	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.70	0.57	0.52	0.35	0.18	0.12	0.11	0.10	0.09	0.06	0.04
2	0.70	1.0	0.97	0.92	0.61	0.32	0.22	0.20	0.19	0.16	0.11	0.06
3	0.57	0.97	1.0	0.97	0.67	0.36	0.26	0.24	0.23	0.19	0.13	0.08
4	0.52	0.92	0.97	1.0	0.83	0.57	0.48	0.45	0.42	0.35	0.24	0.13
5	0.35	0.61	0.67	0.83	1.0	0.93	0.88	0.85	0.80	0.65	0.44	0.24
6	0.18	0.32	0.36	0.57	0.93	1.0	0.99	0.97	0.92	0.75	0.52	0.29
7	0.12	0.22	0.26	0.48	0.88	0.99	1.0	0.99	0.94	0.79	0.56	0.32
8	0.11	0.20	0.24	0.45	0.85	0.97	0.99	1.0	0.98	0.86	0.65	0.44
9	0.10	0.19	0.23	0.42	0.80	0.92	0.94	0.98	1.0	0.95	0.80	0.62
10	0.09	0.16	0.19	0.35	0.65	0.75	0.79	0.86	0.95	1.0	0.95	0.84
11	0.06	0.11	0.13	0.24	0.44	0.52	0.56	0.65	0.80	0.95	1.0	0.97
12	0.04	0.06	0.08	0.13	0.24	0.29	0.32	0.44	0.62	0.84	0.97	1.0

Table 3-2. Correlation Coefficients of Pu-239 Fission Cross Sections

Groups Groups	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.00	0.73	0.60	0.55	0.41	0.21	0.13	0.11	0.11	0.09	0.07	0.04
2	0.73	1.00	0.97	0.93	0.67	0.34	0.21	0.18	0.17	0.15	0.11	0.06
3	0.60	0.97	1.00	0.97	0.71	0.37	0.24	0.22	0.21	0.18	0.13	0.07
4	0.55	0.93	0.97	1.00	0.85	0.56	0.43	0.40	0.39	0.33	0.23	0.12
5	0.41	0.67	0.71	0.85	1.00	0.91	0.83	0.79	0.75	0.64	0.45	0.24
6	0.21	0.34	0.37	0.56	0.91	1.00	0.98	0.96	0.92	0.79	0.55	0.30
7	0.13	0.21	0.24	0.43	0.83	0.98	1.00	0.99	0.96	0.83	0.59	0.34
8	0.11	0.18	0.22	0.40	0.79	0.96	0.99	1.00	0.98	0.88	0.68	0.44
9	0.11	0.17	0.21	0.39	0.75	0.92	0.96	0.98	1.00	0.95	0.80	0.60
10	0.09	0.15	0.18	0.33	0.64	0.79	0.83	0.88	0.95	1.00	0.94	0.81
11	0.07	0.11	0.13	0.23	0.45	0.55	0.59	0.68	0.80	0.94	1.00	0.96
12	0.04	0.06	0.07	0.12	0.24	0.30	0.34	0.44	0.66	0.81	0.96	1.00

Table 3-3. Correlation Coefficients of U-235 Capture Cross Sections

Groups Groups	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.00	0.77	0.64	0.58	0.39	0.20	0.14	0.12	0.12	0.10	0.07	0.04
2	0.77	1.00	0.97	0.92	0.61	0.32	0.21	0.20	0.19	0.16	0.11	0.06
3	0.64	0.97	1.00	0.97	0.66	0.36	0.26	0.24	0.23	0.19	0.13	0.07
4	0.58	0.92	0.97	1.00	0.83	0.57	0.48	0.45	0.42	0.35	0.24	0.13
5	0.39	0.61	0.67	0.83	1.00	0.93	0.88	0.85	0.80	0.65	0.44	0.24
6	0.20	0.32	0.36	0.57	0.93	1.00	0.99	0.97	0.92	0.75	0.52	0.29
7	0.14	0.22	0.26	0.48	0.88	0.99	1.00	0.99	0.94	0.79	0.56	0.32
8	0.12	0.20	0.24	0.45	0.85	0.97	0.99	1.00	0.98	0.86	0.65	0.44
9	0.12	0.19	0.23	0.42	0.80	0.92	0.94	0.98	1.00	0.95	0.80	0.62
10	0.10	0.16	0.19	0.35	0.65	0.75	0.79	0.86	0.95	1.00	0.95	0.84
11	0.07	0.11	0.13	0.24	0.44	0.52	0.56	0.65	0.80	0.95	1.00	0.97
12	0.04	0.06	0.07	0.13	0.24	0.29	0.32	0.44	0.62	0.84	0.97	1.00

Table 3-4. Correlation coefficients of Pu-239 capture cross sections

Groups Groups	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.00	0.80	0.67	0.62	0.46	0.23	0.14	0.12	0.12	0.10	0.07	0.04
2	0.80	1.00	0.97	0.93	0.67	0.34	0.21	0.18	0.17	0.15	0.11	0.06
3	0.67	0.97	1.00	0.97	0.71	0.37	0.24	0.22	0.21	0.18	0.13	0.07
4	0.62	0.93	0.97	1.00	0.85	0.56	0.43	0.40	0.39	0.33	0.23	0.12
5	0.42	0.67	0.71	0.85	1.00	0.90	0.83	0.79	0.75	0.64	0.45	0.24
6	0.23	0.34	0.37	0.56	0.91	1.00	0.98	0.96	0.92	0.79	0.55	0.30
7	0.14	0.21	0.24	0.43	0.83	0.98	1.00	0.99	0.96	0.83	0.59	0.34
8	0.12	0.18	0.22	0.40	0.79	0.96	0.99	1.00	0.98	0.88	0.68	0.44
9	0.12	0.17	0.21	0.39	0.75	0.92	0.96	0.98	1.00	0.95	0.80	0.59
10	0.10	0.15	0.18	0.33	0.64	0.79	0.83	0.88	0.95	1.00	0.94	0.81
11	0.07	0.11	0.13	0.23	0.45	0.55	0.59	0.68	0.80	0.94	1.00	0.96
12	0.04	0.06	0.07	0.12	0.24	0.30	0.34	0.44	0.59	0.81	0.96	1.00

Table 3-5. Correlation coefficients due to relative measurements of cross sections

$\Delta\bar{\sigma}_x/\bar{\sigma}_x$ \ $\Delta\bar{\tau}/\bar{\tau}$	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200
0.025	0.894	0.949	0.970	0.981	0.986	0.990	0.992
0.050	0.707	0.832	0.894	0.928	0.949	0.962	0.970
0.075	0.555	0.707	0.800	0.857	0.894	0.919	0.936
0.100	0.447	0.600	0.707	0.781	0.832	0.868	0.894
0.125	0.371	0.515	0.625	0.707	0.768	0.814	0.848
0.150	0.316	0.447	0.555	0.640	0.707	0.759	0.800
0.175	0.275	0.394	0.496	0.581	0.651	0.707	0.753
0.200	0.243	0.351	0.447	0.530	0.600	0.659	0.707

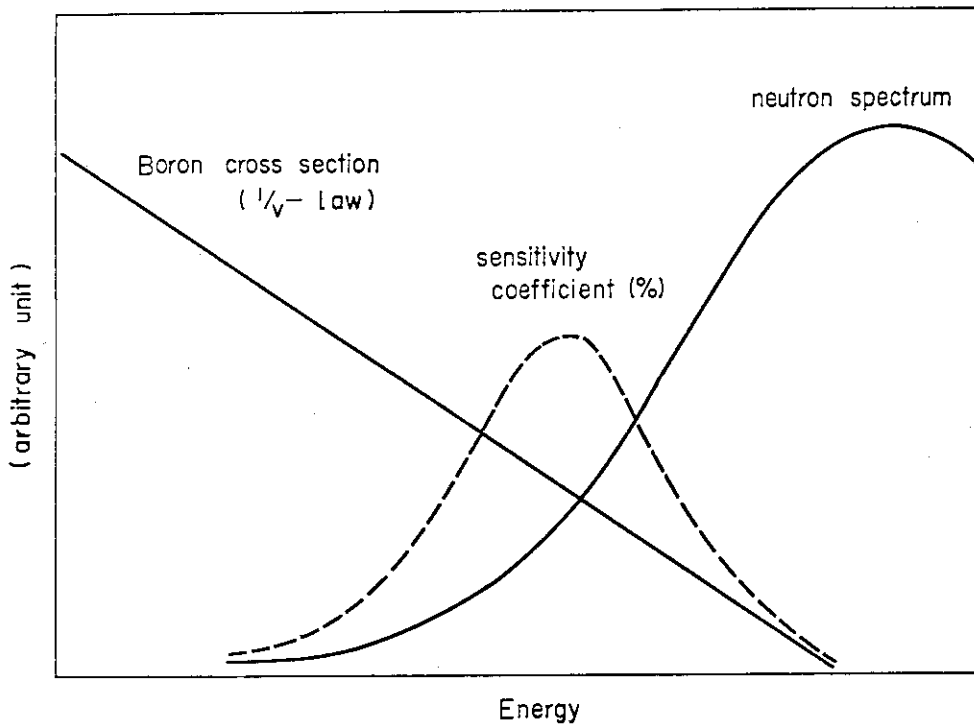


Fig. 3-1.. Boron cross section, neutron spectrum and resulting sensitivity coefficient of Boron reaction rate

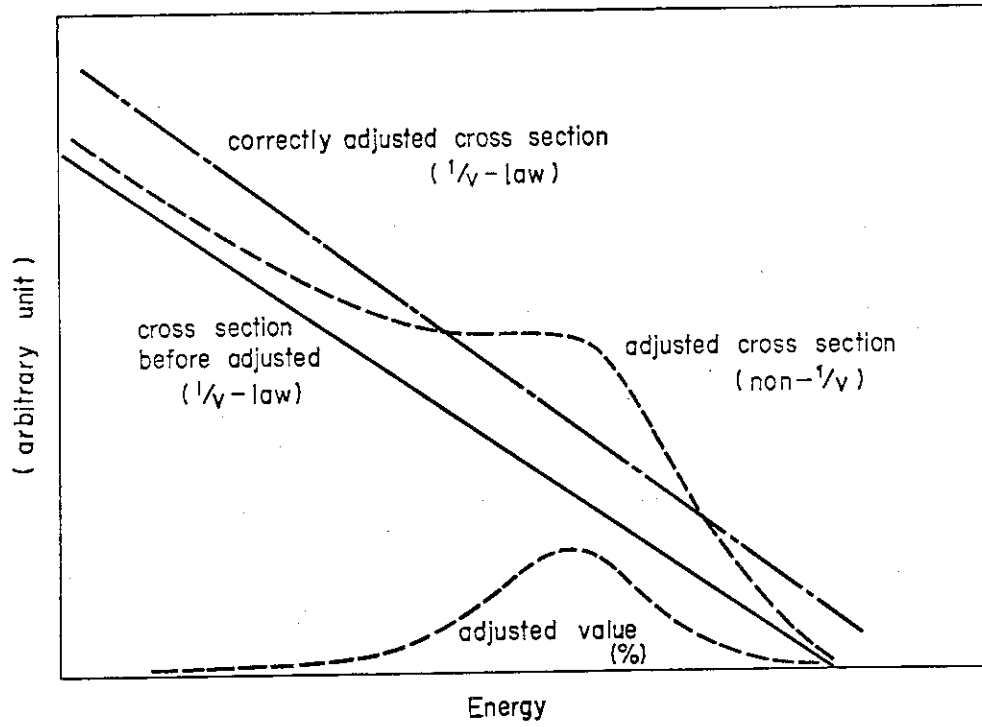


Fig.3-2. Depictive Boron cross section, before adjusted, adjusted, and correctly adjusted cross section

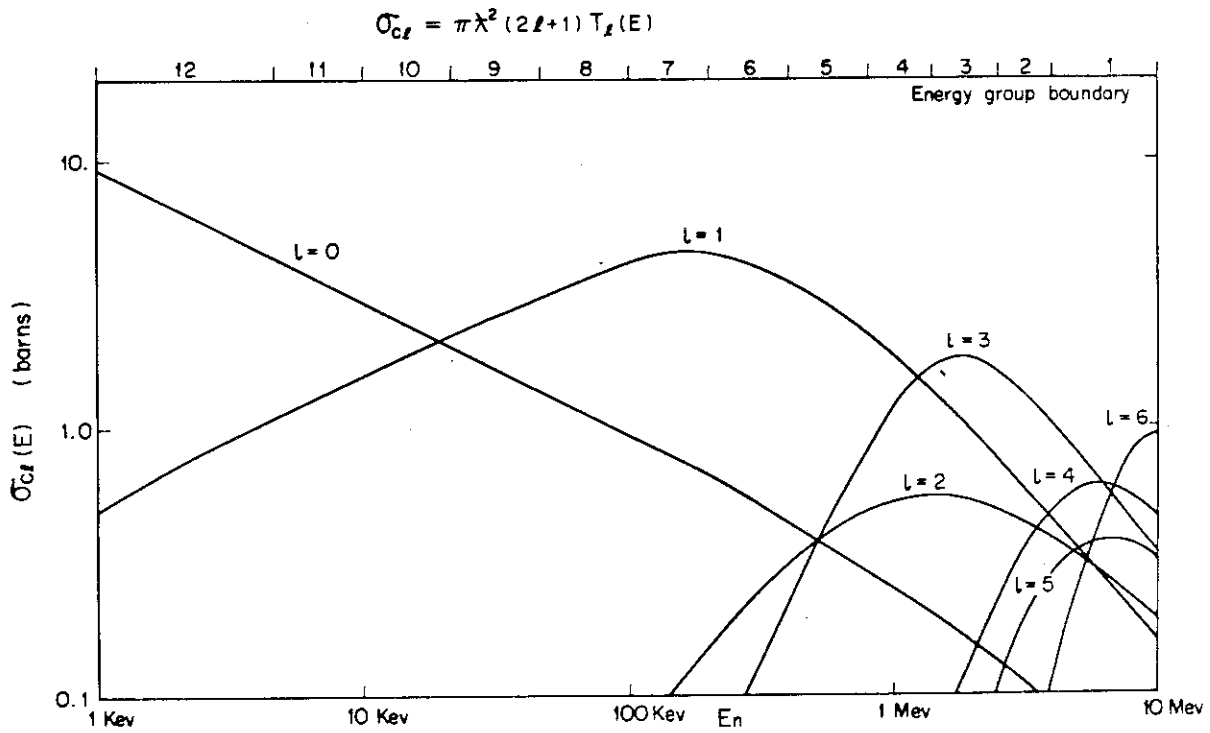


Fig. 3-3 Compound nucleus formation cross section for  $^{235}\text{U}$   
 $\sigma_{cl} = \pi \lambda^2 (2l+1) T_l(E)$

## 4 群定数の系統誤差

### 4-1 系統誤差に関する仮説の検定

群定数は断面積の測定値を用いて作られるが、この測定値に系統誤差が含まれているために、群定数に大きな不確定さが生ずると考えられている。系統誤差とは、測定において一定の条件のもとでつねに同じ大きさをもって生ずる誤差で、器械的誤差、物理的誤差、個人的誤差等があり、その原因が明らかになれば計算等により測定結果から除去できるものである。<sup>(24)</sup>しかし、通常は必ずしも原因が明らかでなく、従って測定値から除去できないままであることが多い。この場合には、測定値が一定のずれを含むことになる。しかし、群定数に系統誤差が含まれているか否かはその群定数の値のみでは判定できず、他の群定数と比較するか、或はこれを用いて計算した積分データの解析値と実験値とを比較しなければならない。

もし、群定数に系統誤差が含まれている時には、積分データの測定値と解析値が大きくずれる。群定数修正で、これを実験誤差の範囲内で一致するように修正すると、修正された群定数と基準の群定数との差が大きくなり、これは残差の値を大きくする。この結果として、第2章で述べたように修正された群定数および積分データの精度が悪くなる。また、修正された群定数は積分データの感度係数が大きい領域でゆがめられる可能性がある。従って、群定数に系統誤差が含まれているか否かを判定することが必要である。

積分データおよび群定数に系統誤差が含まれていない時には、 $Q/\sigma^2 = \hat{w}^T B^{-1} \hat{w} / \sigma^2$  はカイ二乗分布に従い、 $q = \hat{w}^T B^{-1} \hat{w} / (N-n)\sigma^2$  の実現値は1のまわりに分布している。一方、群定数に系統誤差が含まれている時には、次節で述べるように  $Q/\sigma^2$  は非心カイ二乗分布に従い、 $q$  は  $1 + \mu^2 / (N-n)$  のまわりに分布した値が実現する。これから、群定数に系統誤差が含まれている時には、 $q$  の実現値が1より大きくなる確率が増す。

ここで、群定数に系統誤差が含まれているか否かを判定するために、適当な値  $p$  を選ぶと、 $q$  が

$$P(q > \chi_p^2 / (N-n)) = \frac{p}{100} \quad (4-1)$$

の関係を満足する  $\chi_p^2$  を  $(N-n)$  の自由度のカイ二乗分布の表から選ぶことができる。ただし、(4-1)式は  $q$  が  $\chi_p^2 / (N-n)$  より大きな値をとる確率が  $p\%$  であることを意味する。従って、もし  $q$  の値が  $\chi_p^2 / (N-n)$  より大きければ、群定数に系統誤差が含まれている確率が  $(100-p)\%$  になる。通常  $p$  の値として1か或は5が用いられることが多い。例えば、積分データが30個の時、 $p$  の値として1を用いると、カイ二乗分布の表から  $\chi_p^2 = 5.0892$  が得られる。<sup>(29)</sup> 従って、 $\chi_p^2 / (N-n) = 1.696$  となり、(4-1)式は

$$P(q > 1.696) = \frac{1}{100} \quad (4-2)$$

となる。これから、 $q$  が1.696よりも大きい値を実現する確率が1%に過ぎないので、もし  $q$  が1.696よりも大きければ、系統誤差が含まれているためであると判定することになる。この

ように判定することには1%の危険性が含まれているので $p$ のことを危険係数とも呼ぶ。<sup>(29)</sup>  
 残差の二乗和を具体的に表示すると(2-56)式)

$$q = \frac{1}{(N-n)} \left[ \sum_{i,j}^n \left( \frac{\hat{m}_i - f_i[\hat{\sigma}]}{\Delta \hat{m}_i} \right) B_{ij}^{-1} \left( \frac{\hat{m}_j - f_j[\hat{\sigma}]}{\Delta \hat{m}_j} \right) \right] \quad (4-3)$$

となる。これから、残差の二乗和が大きくなるのは、

- i) 積分データの実験値と解析値の差が大きい、
- ii) 積分データの平均誤差が小さい、

ことが考えられる。一方、(2-36)式からは、

- iii) 群定数の平均誤差が小さい

ことも重要な因子となる。i)の原因としては、群定数に系統誤差が含まれているために計算値が実験値から大きくずれる、積分データに系統誤差が含まれている、解析計算の近似による誤差、などが考えられる。従って、上記のカイ二乗検定の方法は群定数修正全体の妥当性を調べるのに利用できる。即ち、実際の群定数修正を行なった時、 $q$ についてカイ二乗検定を行ない、 $q$ の値が大きくなり過ぎる時には、群定数修正全体について再検討する必要がある。

上記の方法は積分データが1個の場合にはさらに理解しやすい。この時には

$$B_{1,1}^{-1} = \frac{\Delta \hat{m}_1^2}{\Delta \hat{m}_1^2 + \sum_j^n a_{1j}^2 \Delta \hat{\sigma}_j^2} \quad (4-4)$$

となる。一方、実験値と計算値の差

$$\hat{M} = \hat{m}_1 - f_1[\hat{\sigma}] \quad (4-5)$$

を作り、誤差伝播の法則によりこの値の誤差を求めると

$$\delta M^2 = \Delta \hat{m}_1^2 + \sum_{j=1}^n a_{1j}^2 \Delta \hat{\sigma}_j^2 \quad (4-6)$$

となる。これは(4-4)式の分母に等しい。従って、(4-3)式より

$$q = \frac{(\hat{m}_1 - f_1[\hat{\sigma}])^2}{\Delta \hat{m}_1^2 + \sum_j^n a_{1j}^2 \Delta \hat{\sigma}_j^2} = \frac{\hat{M}^2}{\delta \hat{M}^2} \quad (4-7)$$

となる。これから、積分データの実験値と解析値の差が、その誤差に較べて大き過ぎる時に、実験値あるいは群定数に系統誤差が含まれると判定することになる。しかし、実験値は正規分布に従うと想定されるので、(4-7)式の $q$ は自由度1のカイ二乗分布に従う。これから、 $\hat{M}^2$ とその二乗平均誤差 $\delta M^2$ の大小関係だけで判定するのではなく、カイ二乗検定を用いることになる。

## 4-2 系統誤差と残差の二乗和の統計分布

この節では、群定数に系統誤差が含まれている場合に、残差の二乗和が従う統計分布について考える。しかし、以下の取扱いでは積分データには系統誤差が含まれていないと仮定するが、もし積分データに系統誤差が含まれている場合でも得られる結果は同じであり、統計分布に含まれるパラメータの値を修正すれば良い。また、以下の議論では、群定数間の相関は省略する。これは第2章の議論で相関行列 $\mathbf{R}$ を単位行列 $\mathbf{E}$ でおきかえれば良い。

群定数 $\sigma_i$ に含まれる系統誤差を $\sigma_i^s$ と仮定する。この時には、(2-28)式の誤差 $\mathbf{A}$ の期待値は零とは異なり、系統誤差によるずれを含むようになる。

$$E(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\Sigma} \quad (4-8)$$

ただし、 $\boldsymbol{\Sigma}$ は系統誤差のベクトルで

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

に分割できる。ここで第1列は積分データによるもので、系統誤差を含まないと仮定する。これに対して、 $\boldsymbol{\Sigma}_2$ は群定数に含まれる系統誤差で、その要素は

$$\Sigma_{21} = \sigma_i^s \sqrt{P_i} \quad (4-10)$$

で与えられる。 $P_i$ は群定数 $\hat{\sigma}_i$ の重みで、(2-13)式で与えられるものである。

(2-28)式を(2-35)式に代入し、(2-47)式の関係を用いると

$$\mathbf{V} = (\mathbf{E} - \mathbf{U})\mathbf{A} \quad (4-11)$$

となる。上式で

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T \quad (4-12)$$

であり、これは $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}$ の関係を満足する。これから残差の二乗和は

$$Q = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{A}^T (\mathbf{E} - \mathbf{U})\mathbf{A} \quad (4-13)$$

となる。(4-12)式から $\mathbf{U}$ は対称行列なので、適当な直交行列 $\mathbf{F}$ を用いると、対角行列に変換できる。

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

これを用いると(4-13)式は

$$Q = \mathbf{Y}^T (\mathbf{E} - \mathbf{U}) \mathbf{Y} \quad (4-15)$$

となる。ただし、

$$Y = F^T A \tag{4-16}$$

である。行列  $U$  は  $U^2 = D$  の関係を満足する。これから  $d_i^2 = d_i$  となり、 $d_i$  の値は  $d_i = 1$  or  $0$  となる。 $d_i$  の値が 1 に等しい  $d_i$  の数は行列  $U$  の階数に等しくなる。 $U$  の階数は  $n$  なので、行列  $(E - U)$  の要素の中で  $(N - n)$  個の値が 1 である。これから、

$$Q = \sum_i^{N-n} y_i^2 \tag{4-17}$$

となる。上式で  $y_i$  は  $Y$  の要素であり、(4-16)式から  $Y$  は  $A$  を変換したものである。よって、 $y_i$  は正規分布に従う。その期待値は

$$E(Y) = r^T \Sigma = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \tag{4-18}$$

となる。一方、 $Y$  の分散は  $A$  の分散に等しい。即ち

$$D(Y) = \sigma^2 E \tag{4-19}$$

である。従って、

$$y_i \in N(\mu_i, \sigma) \tag{4-20}$$

と表わされる。(4-18)と(4-19)式から  $\mu_i$  の二乗和は

$$\sum_{i=1}^N \mu_i^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_i^2 \sqrt{P_i})^2 \tag{4-21}$$

の関係を満足する。これは  $\mu_i$  の中で値が零でないものが必ず存在することを意味する。統計学の定理により

$$\frac{Q}{\sigma^2} = \frac{V^T V}{\sigma^2} = \sum_i^{N-n} \frac{y_i^2}{\sigma^2} \tag{4-22}$$

は自由度が  $N - n$  の非心カイ二乗分布に従う。<sup>(84)</sup> ここで非心パラメータは

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \sum_i^{N-n} \left(\frac{\mu_i}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^N (1-d_i) \left(\frac{\mu_i}{\sigma}\right)^2 \\ &= \Sigma^T (E-U) \Sigma / \sigma^2 \\ &= \Sigma_2^T A^T B^{-1} \Sigma_2 / \sigma^2 \end{aligned} \tag{4-23}$$

で与えられる。 $A$  は (2-22) 式、 $B$  は (2-44) 式から求められる。自由度が  $N - n$  の非心カイ二乗分布の平均値は  $N - n + \mu^2$  である。これから、 $q = V^T V / (N - n) \sigma^2$  の実現値は  $1 + \mu^2 / (N - n)$  のまわりに分布している。これは、もし群定数に系統誤差が含まれている場合には、 $q$  の実現値が 1 より大きくなる確率が増加することを意味する。しかし、実際の群



定数修正で  $q$  の値が与えられても、どの断面積にどの程度の大きさの系統誤差が含まれているかを判定することは困難である。

#### 4-3 残差の二乗和に関する数値的検討

残差の二乗和の統計的性質からカイ二乗検定を用いて群定数に系統誤差が含まれているか否かを判定する方法について述べ、系統誤差が含まれている時には、残差の二乗和は非心カイ二乗分布に従うことを理論的に確証した。この節では、これらのことを数値的に実証する。

残差の二乗和の統計的性質は、積分データおよび微分データ(群定数)が正規分布に従う確率変数の実現値であることに基づいて導かれる。これを模擬するために、50組の群定数と積分データを正規乱数を発生させて作成した。これにはまず群定数と積分データの真の値および平均誤差を設定することが必要である。数値実験であるために内部矛盾を含まなければいかなる値を選んでもよいが、ここでは群定数の真の値として A B B N セットの値を用いた。これから群定数の実現値は

$$\hat{\sigma}_j = \sigma_j + \Delta \hat{\sigma}_j r_j \quad (4-24)$$

によって作成できる。上式で、 $\sigma_j$  は群定数の真の値、 $\Delta \hat{\sigma}_j$  は平均誤差、 $r_j$  は正規分布に従う乱数である。

積分データの真の値は、計算モデルが正しいとすれば、群定数の真の値を用いて計算された値に等しくすることが必要である。この時、積分データの実験値は

$$\hat{m}_i = m_i + \Delta \hat{m}_i r_i \quad (4-25)$$

によって作成できる。ここで、 $m_i$  は積分データの真の値、 $\Delta \hat{m}_i$  は平均誤差、 $r_i$  は正規分布に従う乱数である。

群定数に系統誤差が含まれている場合に残差の二乗和に与える影響を調べるために、 $^{235}\text{U}$  の核分裂断面積に 30% の仮想的な系統誤差を含んでいる群定数を同じく 50 組作成した。

これらの群定数および積分データを用いて、実際の群定数修正を行ない、これから得られた残差の二乗和の頻度分布を Fig. 4-1 に示してある。系統誤差を含まない残差の二乗和は 1 のまわりに分布している。この分布は  $(N-n)$  で規格化されたカイ二乗分布に近い。これに対して、 $^{235}\text{U}$  の核分裂断面積に 30% の系統誤差を含めた場合の残差の二乗和は 1.65 のまわりに分布し、その巾は系統誤差を含まない場合に較べて広い。この分布は  $(N-n)$  で規格化された非心カイ二乗分布に近い。この二つの分布は互いに区別することができる。これは、

$^{235}\text{U}$  の核分裂断面積に 30% の系統誤差が含まれている場合には、カイ二乗検定により、系統誤差が含まれていることを判定できることを意味している。

系統誤差が含まれている場合の  $q$  の平均値は 1 よりも大きく、 $1 + \mu^2 / (N-n)$  で与えられる。 $^{235}\text{U}$  の核分裂断面積に 30% から 10% の仮想的な系統誤差が含まれている場合の非心パラメータ  $\mu^2$  および  $q$  の平均値を Table 4-1 に与える。系統誤差が 30% のときには、 $q$  の平均値は 1.65 であり、この値は前の数値実験の値とよく一致している。系統誤差が小さくなると、 $q$  の期待値は急速に 1 に近ずき、系統誤差が 15% 以下の時には、系統誤差が含まれ

ていることを判別するのは非常に困難であると思われる。 $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の平均誤差が15%なので、群定数の平均誤差よりも系統誤差が小さい時には、系統誤差が含まれていることを判定することが困難になる。

#### 4-4 群定数に含まれる系統誤差の除去

群定数に含まれる系統誤差が非常に大きいときには、群定数の修正量が、積分データの感度係数の大きいエネルギー群で強調され、ゆがめられる傾向が強くなり、核物理的観点からみて妥当でない結果が得られる可能性がある。また、修正された群定数の精度も悪くなる。もし、系統誤差が群定数のみに含まれ、積分データに含まれていないときには、群定数修正の操作により、この系統誤差を除去できることを明らかにする。しかし、積分データに系統誤差が含まれているときには、このような積分データは修正操作から除外することが望ましい。Rowland et al.<sup>(16)</sup>は積分データに系統誤差が含まれている場合でも、これを除去できることが可能であるとしているが、これは疑問である。

群定数に系統誤差が含まれているときには、群定数は次の二つの部分から成り立っていると考えられる。一つは正規分布に従う正常部分であり、他の一つは系統誤差の部分である。<sup>(24)</sup>

$$\hat{\sigma}_j = \hat{\sigma}_j^N + \hat{\sigma}_j^S \quad (4-26)$$

実際の測定で得られるのは $\hat{\sigma}_j$ である。しかし、最小二乗法を通して推定したいのは $\hat{\sigma}_j^N$ の真の値である。 $\sigma_j^N$ を $\hat{\sigma}_j^N$ の真の値とすれば、次の誤差方程式が成り立つ。

$$\sigma_j^N + \hat{\sigma}_j^S = \hat{\sigma}_j - \varepsilon_j^1 \quad (4-27)$$

一方、積分データについての誤差方程式は、(2-10)式で $\sigma_j$ を $\sigma_j^N$ に置き換えて

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\sigma_j^N - \hat{\sigma}_j) = \hat{m}_i - f_i[\hat{\sigma}] - \varepsilon_i^1 \quad (4-28)$$

となる。ただし、我々は系統誤差を含んだ $\hat{\sigma}_j$ しか測定で得られないので、 $\hat{\sigma}_j$ のまわりで $f_i[\sigma^N]$ を展開した。(4-27)式で推定すべき値は $\sigma_j^N$ と $\hat{\sigma}_j^S$ であり、したがって、全体の数は $2n$ となる。これに対して、測定データの数は $n+m$ であり、 $2n$ よりも少ない。これから、すべての群定数が互いに独立な、それ自身に固有の系統誤差を含んでいると仮定すると、系統誤差を群定数から除去できなくなる。系統誤差が除去できるためには系統誤差についての未知量の数が、利用する積分データの数より少なくなければならない。次の節で示すように、断面積の実際の測定に基づいて、系統誤差についての未知量が1つの反応について1個になるようなモデルを考える。反応の種類数は利用する積分データの数より少ないので、このモデルを仮定すれば系統誤差を除去することが可能になる。

ここで、修正すべき群定数を個々の反応に対応する $k$ 個の部分群に分け、各々の部分群に1個の系統誤差についての未知量 $\sigma_\ell^S$ を仮定する。この取扱いは、 $\ell$ 番目の部分群の個々の群定数の系統誤差は

$$\hat{\sigma}_j^S = r_{j\ell} \sigma_\ell^S \quad j \in \ell \quad (4-29)$$

で表わされる。\$r\_{j\ell}\$ は比例定数であり、次の節で具体的表式を与える。結局、最小二乗法の誤差方程式は次のようになる。

$$A(\bar{X}^N - \hat{X}) = \hat{W} - A_1 \tag{4-30}$$

$$\bar{X}^N - \hat{X} + G\bar{X}^S = -A_2 \tag{4-31}$$

ここで、\$G\$ は \$n\$ 行 \$k\$ 列の行列であり、その \$(j, \ell)\$ 要素は \$(\Delta\hat{\sigma}\_\ell / \Delta\hat{\sigma}\_j) r\_{j\ell}\$ に等しい。\$\bar{X}^S\$ はベクトルでその要素は \$\sigma\_\ell^S \sqrt{P\_\ell}\$ に等しい。\$(P\_\ell = \sigma^2 / \Delta\hat{\sigma}\_\ell^2)\$

修正された群定数および系統誤差の推定値は、

$$Q = \sum_i^m (\hat{M}_i - \sum_j^n A_{ij} (\bar{X}_j^N - \hat{X}_j))^2 + \sum_j^n (\hat{X}_j - \bar{X}_j^N - \sum_\ell^k G_{j\ell} \bar{X}_\ell^S)^2 \tag{4-32}$$

を最小にすることから求められる。ただし、

$$G_{j\ell} = \begin{cases} \frac{\Delta\hat{\sigma}_\ell}{\Delta\hat{\sigma}_j} r_{j\ell} & j \in \ell \\ 0 & j \notin \ell \end{cases} \tag{4-33}$$

なるように \$r\_{j\ell}\$ が定められている。また (4-32) 式では群定数の相関が省略されている。最終的に、修正された群定数は

$$\bar{X}^N = \hat{X} + \Omega^{-1} A^T B^{-1} \hat{W} \tag{4-34}$$

で求められる。同様に系統誤差についての未知量は

$$\bar{X}^S = - (G^T G)^{-1} G^T \Omega^{-1} A^T B^{-1} \hat{W} \tag{4-35}$$

で与えられる。ここで、\$B\$ および \$\Omega\$ は

$$B = E + A \Omega^{-1} A^T \tag{4-36}$$

$$\Omega = E - G (G^T G)^{-1} G^T \tag{4-37}$$

で与えられる行列である。\$\Omega\$ は \$(n, n)\$ 行列であるが、しかし対角化された部分行列である。

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_{k,k} \end{bmatrix} \tag{4-38}$$

行列要素 \$\Omega\_{\ell,\ell}\$ は \$\ell\$ 番目の反応に対応し、

$$\Omega_{\ell,\ell} = E - \frac{r r^T}{(r \ell r)} \tag{4-39}$$

である。ただし、

$$F_{\ell} = \begin{bmatrix} G_{i+1, \ell} \\ G_{i+2, \ell} \\ \vdots \\ G_{i+I, \ell} \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

である。 $\ell$ は $\ell$ 番目の部分群を表わし、 $I$ は $\ell$ 番目の部分群の群定数の数であり、これはエネルギー群の数に等しい。また、修正された群定数の平均誤差は

$$\Delta \tilde{\sigma}_i^N = \Delta \sigma_i \left( Q^{-1} - Q^{-1} A^T B^{-1} A Q^{-1} \right)_{ii}^{1/2} \sqrt{\frac{V^T V}{(N-n-k) \sigma^2}} \quad (4-41)$$

で求められる。上式で $V$ は(4-30)、(4-31)式で $X^N$ 、 $X^S$ をそれぞれ推定値 $\tilde{X}^N$ 、 $\tilde{X}^S$ でおきかえた時に $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$ が $V_1$ 、 $V_2$ になるので、これらを要素とする残差ベクトルである。以上の結果は得られた数式が複雑なので物理的考察が困難である。数値計算により第2章で求めた結果と比較することが必要である。

#### 4-5 系統誤差についてのモデル

通常の間扱いは、修正すべき群定数の数に較べて利用できる積分データの数が少ないので、個々の群定数に固有の系統誤差が含まれていると仮定して、これを推定できない。したがって、推定に有効な系統誤差のモデルを考える必要がある。

ここでは次のモデルを考える。即ち、断面積に系統誤差が含まれているのは、絶対測定に系統誤差が含まれているために生じ、相対測定には系統誤差が含まれていないと仮定する。この仮定は実際の断面積の測定から考えて極めて妥当なものと思われる。断面積の実際の測定は非常に複雑であると思われるが、これを簡単化し一般的に次の手順で行なわれると考えるとよい。ここで反応の種類が $X$ の断面積を考える。まずはじめにエネルギー $E_0$ で、この断面積の絶対測定が行なわれる。この値を $\hat{\sigma}_X(E_0)$ とする。次に、 $\hat{\sigma}_X(E_0)$ に相対的な測定がエネルギー $E_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )で行なわれたとし、この相対測定値を $\hat{\Gamma}_X(E_i/E_0)$ とする。この時、エネルギー $E_i$ での測定によって定められた値は

$$\hat{\sigma}_X(E_i) = \hat{\Gamma}_X(E_i/E_0) \hat{\sigma}_X(E_0) \quad (4-42)$$

となる。

ここで、絶対測定から得られた断面積 $\hat{\sigma}_X(E_0)$ に系統誤差が含まれていると仮定すると、 $\hat{\sigma}_X(E_0)$ は

$$\hat{\sigma}_X(E_0) = \hat{\sigma}_X^N(E_0) + \hat{\sigma}_X^S(E_0) \quad (4-43)$$

のように二つの成分の和で表わされる。右辺第1項は正規分布に従う正常部分であり、第2項は系統誤差の部分である。(4-43)式を(4-42)式に代入すると

$$\hat{\sigma}_X(E_i) = \hat{\sigma}_X^N(E_i) + \hat{\sigma}_X^S(E_i) \quad (4-44)$$

となり、 $\hat{\sigma}_x(E_i)$ も絶対測定に由来する系統誤差を含むようになる。ただし、(4-44)式の右辺の各項は

$$\hat{\sigma}_x^N(E_i) = \hat{r}_x(E_i/E_0) \hat{\sigma}_x^N(E_0) \quad (4-45)$$

$$\hat{\sigma}_x^S(E_i) = \hat{r}_x(E_i/E_0) \hat{\sigma}_x^S(E_0) \quad (4-46)$$

で与えられる。

前節の(4-29)式に含まれる $r_{j\ell}$ について考える。この $r_{j\ell}$ は(4-46)式の $\hat{r}_x(E_i/E_0)$ に対応する。しかし、実際には相対測定値 $\hat{r}_x(E_i/E_0)$ が与えられるよりは、各々のエネルギーでの断面積、 $\hat{\sigma}_x(E_i)$ 、 $\hat{\sigma}_x(E_0)$ が与えられる場合が多い。(4-29)式と(4-46)式を対応させ、(4-42)式の関係を用いると

$$r_{j,\ell} = \hat{r}_x(E_i/E_0) = \frac{\hat{\sigma}_x(E_i)}{\hat{\sigma}_x(E_0)} \quad (4-47)$$

となる。これを群定数を用いて表示すると近似的に

$$r_{j\ell} = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{x,j}}{\hat{\sigma}_{x,\ell}} & j \in \ell \\ = 0 & j \notin \ell \end{cases} \quad (4-48)$$

で求められる。ここで $\hat{\sigma}_{x,\ell}$ は絶対測定値に対応した群定数である。他の種類の反応断面積も同様に測定されることができると考えることができる。ここでは1つの反応について、あるエネルギー $E_0$ で1回だけ絶対測定が行なわれると仮定しているが、実際にはエネルギー範囲が広いので、数点で絶対測定が行なわれ規格化が行なわれている。また、異なった種類の反応の間でも絶対測定による規格化が行なわれている場合もある。したがって、エネルギー領域をいくつかの部分に分け、各々の部分で系統誤差の未知量を仮定することも考えられるが、これは問題に応じて選択すべきであろう。

以上のモデルを仮定すると、絶対測定に含まれる系統誤差を最小二乗法により除去できれば、他のエネルギーの断面積の系統誤差も除去できることになる。

Table 4-1. Non-central parameter  $\mu^2$  and mean value of Non-central  $\chi^2$ -distribution

(N-n=60)

systematic error U-235- $\sigma_f$ (%)	non-central parameter $\mu^2 = \Sigma_s^T A^T E^{-1} A \Sigma_s$	mean value $1 + \frac{\mu^2}{N-n}$
30	39.26	1.654
25	27.27	1.454
20	17.45	1.291
15	9.82	1.164
10	4.36	1.073

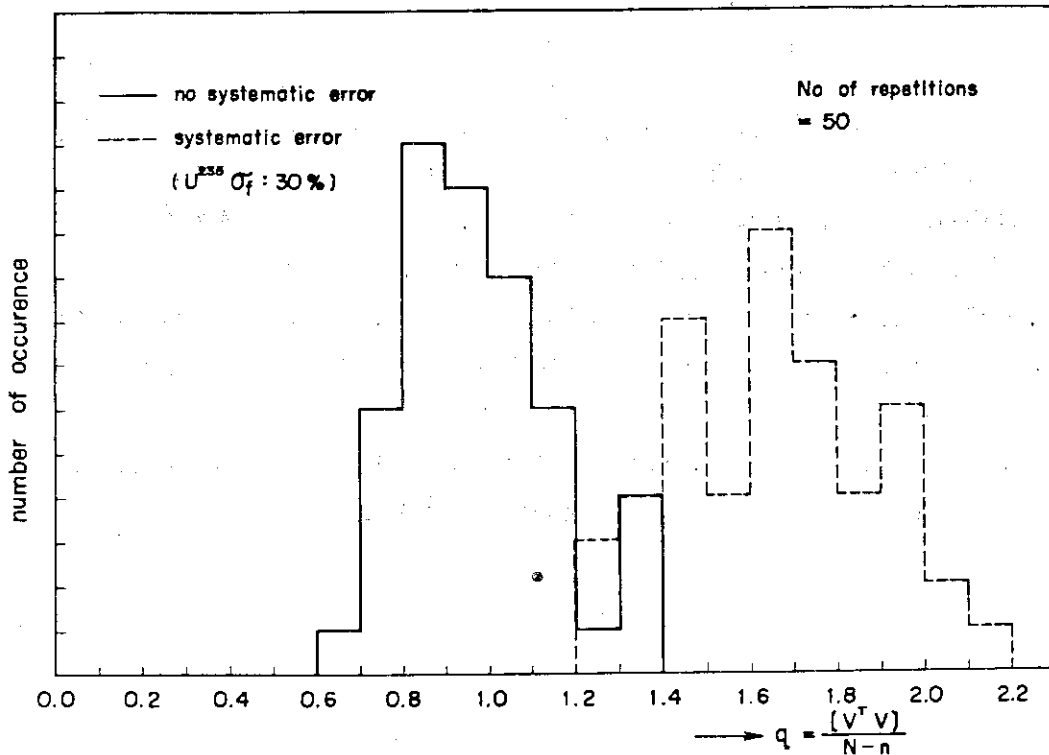


Fig. 4-1. Statistical behavior of sum of Squares of residual  $q = \frac{[V^T V]}{N-n}$

## 5 積分データの感度係数と一般化摂動法

### 5-1 はじめに

群定数修正では臨界実験から得られる種々の積分データを用いるが、これらは通常これに含まれる断面積の汎関数と考えることができる。しかし多群近似の方法で取扱うときには、多群定数の関数と考えて一般に表示することができる。これは非常に複雑な関数なので、最小二乗法による群定数修正では、線型近似を用いて積分データが表示されている。このときの群定数の一次の項の係数が群定数を単位量だけ変化させたときの積分量の変化に等しく、これは積分量の感度係数と呼ばれる量である。これを計算するには二つの方法があり、一つは群定数を変化させたときと変化させないときの積分量を計算し、両者の差より直接感度係数を求める方法であり、他の一つは摂動論を利用する方法である。

一般に群定数修正では非常に多くの積分データと群定数を取扱う。この際計算すべき感度係数の数は両者の数の積に等しい。従ってその数は非常に多く、直接積分量を計算する前者の方法では膨大な時間を必要とするので原理的に計算が不可能に近く、通常は摂動論による方法が広く用いられている。この摂動論では感度係数の特性を理解するのにも便利であり、方法自体の物理的興味も深く他の広範囲な応用が行なわれている。実効増倍率については体系のパラメータが変化した時の反応度を計算する通常の摂動法が用いられる。しかし他の積分データに対しては新しい摂動法を用いねばならない。これは次の理由による。即ち1次摂動法に制限したときでも実効増倍率には体系のパラメータの変化による中性子スペクトラムの変化は2次の効果であるが、他の反応率の比や反応度値には1次の効果として寄与するからである。これから実効増倍率以外の積分データに対しては体系のパラメータが変化したときの中性子スペクトラムの変化も計算しなければならない。

反応率の比については、1964年に Usachev<sup>(35)</sup>により上記の計算ができる新しい摂動法が与えられ、その物理的内容の深い洞察に対して非常な注目が集まった。この方法は Gandini<sup>(36)</sup>により拡張され、反応度値についても適用できるように一般化された。通常はこれらの方法を総称して一般化摂動法と呼んでいる。この一般化摂動法による計算が主要な部分を占めるが、実際の数値計算でも明らかにされるように、感度係数の値自身は直接反応率に含まれる断面積を変化させた効果が大きい。反応度値についても同様である。

最初に Usachev によって与えられた方法を作用素表示で整理し、従来の取扱いで不明確であった再臨界調整について新しい解釈を与え、Usachev の公式に含まれる作用素の変化に修正を加え、反応度の変化を計算する通常の摂動法と同様の実用性を持たせる。次に、上記の公式に含まれる世代別のインポートンスについて新しい解釈を与え、最後に感度係数を具体的に計算して個々の積分データの特性を調べる。

実際の数値計算では ABBN セットの 25 群について感度係数を計算し、群定数修正では任意の群に縮約して利用した。この縮約された感度係数は次の単純和の規則で求められる。

$$S_I = \sum_{i \in I} S_i \quad (5-1)$$

一般化摂動法では摂動法と非摂動法での中性子束、インポートランスの差を計算することが必要であるために、摂動系が定常状態になっていなければならない。即ち再臨界の操作が必要である。Usachev<sup>(85)</sup>が最初に提出した理論ではこの再臨界操作も含めたすべての変化を表わす作用素が直接表われていたため種々の混乱が生じた。Usachevは再臨界操作を体系に含まれる核分裂物質の濃度を変えることにより行なうことを示したが、一方Gandini et al.<sup>(88)</sup>は体系の半径を微量だけ変化させて計算している。しかしいずれの方法でも群定数を変化させた効果と再臨界操作による効果とが区別して表わすことが出来ず、正しい感度係数を計算していると考えることができない。通常実効増倍率に対する摂動計算では仮想的に核分裂放出中性子数 $\nu$ をすべてのエネルギー群で等しい割合だけ変化させる手法が用いられている。この手法による再臨界操作では、直接再臨界のために変化させた $\delta\nu/\nu$ が式の中にあられてこない。感度係数の計算を目的として開発したコードSALVAGEでは上記の手法を用いた。理論的証明は次節で与える。

一般化摂動法は種々の方面で応用され、非常に興味ある結果が得られているが、<sup>(65)</sup>ここでは群定数修正に対する応用のみに限定する。

## 5-2 感度係数の計算方法

### (1) 定義

ある任意の物理量を考えると、これにはいくつかのパラメータが含まれている。このパラメータを単位パーセントだけ変化させた時の物理量のパーセント変化をこのパラメータについての感度係数と呼んでいる。したがって積分データを群定数の関数として一般的に $f_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ と表示すると感度係数は

$$S_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_j}{f_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\sigma}_j} \right) = 100 \cdot \left( \frac{\partial f_i}{f_i} \right) \delta \hat{\sigma}_j \quad (5-2)$$

で与えられる。ここで $\delta \hat{\sigma}_j = \hat{\sigma}_j / 100$ であり、 $(\partial f_i / f_i)$ は一般に摂動論で計算される量である。

### (2) 実効増倍率に対する摂動公式

群定数修正では臨界量の代りに実効増倍率を取扱う。このとき体系のパラメータを微量 $\delta Q$ だけ変化させた場合の実効増倍率の変化は1次摂動法で

$$\frac{\delta K_{eff}}{K_{eff}} = - \frac{\langle \phi^* \delta Q \phi \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle} \quad (5-3)$$

で計算される。<sup>(40)</sup>ここで

$$\delta Q = \delta M - \frac{1}{K_{eff}} \delta S \quad (5-4)$$

である。ただし(5-3)式で $\phi, \phi^*$ は無摂動系での中性子束および随伴中性子束で

$$Q\phi = 0, \quad Q^*\phi^* = 0 \quad (5-5)$$

に従う。上式で



$$Q = M - \frac{1}{K_{\text{eff}}} S, \quad Q^* = M^* - \frac{1}{K_{\text{eff}}} S^* \quad (5-6)$$

であり、 $S$ は核分裂による中性子の生成作用素、 $M$ は吸収、拡散、減速を表わす作用素である。また $K_{\text{eff}}$ は無擾動系の実効増倍率である。

(3) 反応率の比に対する擾動公式

Usachev により与えられた方法を簡潔な作用素表示で整理する。最初に臨界体系を考える。この体系の中性子束および随伴中性子束は(5-5)式で計算される。ただし臨界状態について考えているので作用素は

$$Q = M - S, \quad Q^* = M^* - S^* \quad (5-7)$$

で与えられる。この状態で体系の群定数を微量だけ変化させたとすれば、この系は臨界からずれてくる。これを再び定常状態になるように制御する。このようなすべての過程を含む作用素の変化を

$$\delta Q = \delta P + \delta F \quad (5-8)$$

とする。ここで右辺第1項は群定数の変化、第2項は再臨界操作による作用素の変化を表わす。従って(5-4)式の $\delta Q$ は(5-8)式の $\delta P$ に対応している。新しい擾動状態は再び定常状態になっているので、この系の中性子束および随伴中性子束は

$$Q' \phi' = 0, \quad Q'^* \phi'^* = 0 \quad (5-9)$$

で記述される。ただし、

$$Q' = Q + \delta Q, \quad Q'^* = Q^* + \delta Q^* \quad (5-10)$$

であり、また再臨界条件は

$$\langle \phi^* \delta Q \phi' \rangle = 0 \quad (5-11)$$

で与えられる。上式から再臨界操作に必要な作用素の変化は(5-8)式を代入して定められる。

$$\frac{\langle \phi^* \delta F \phi' \rangle}{\langle \phi^* S' \phi' \rangle} = - \frac{\langle \phi^* \delta P \phi' \rangle}{\langle \phi^* S' \phi' \rangle} = \rho_{\delta P} \quad (5-12)$$

ここで擾動系および無擾動系で反応率を測定するとすれば反応率の変化は( $R = \langle \Sigma \phi \rangle$ ; 反応率)

$$\delta R = \langle \delta \Sigma \phi \rangle + \langle \Sigma \delta \phi \rangle \quad (5-13)$$

で求められる。ただし右辺第1項は測定に用いたカウンター或は浴自身の断面積の変化による効果、第2項は群定数の変化による中性子束の変化から生ずる効果を表わす。この第2項を計算することができれば反応率の変化が容易に求められる。

まず反応率に対する世代別のインポートランスについて考える。このインポートランスはUsachev によって物理的考察から導出されているがこれは次の逐次方程式に従う。

$$M^* \phi_0^* = \Sigma \quad (5-14)$$

$$M^* \phi_1^* = S^* \phi_0^* \quad (5-15)$$

⋮

$$M^* \phi_n^* = S^* \phi_{n-1}^* \quad (5-16)$$

⋮

ここで  $\phi_0^*$ ,  $\phi_1^*$ ,  $\dots$ ,  $\phi_n^*$ ,  $\dots$  はそれぞれ第 0 世代, 第 1 世代, 第 n 世代のインポートランスを表わしているが, その物理的意味は次節で詳しく論ずる。上の方程式系は通常の出カレベルに対するインポートランス方程式

$$M^* \phi^* = S^* \phi^* \quad (5-17)$$

を  $\Sigma$  をインポートランス源の初期値として解いたものである。従って n が無限大の時の反応率に対するインポートランスは通常の出カレベルに対するインポートランスに等しくなり, 定数倍だけ異なると思われる。

$$\phi_\infty^* = \lambda \phi^* \quad (5-18)$$

ここで定数  $\lambda$  は次のようにして定められる。(5-14) 式の両辺に  $\phi$  を掛けて積分し, 随伴作用素の定義式と (5-5) 式を用いると

$$\langle \Sigma \phi \rangle = \langle \phi_0^* S \phi \rangle \quad (5-19)$$

が得られる。同様に (5-16) 式の両辺に  $\phi$  を掛けて積分し

$$\langle \phi_n^* S \phi \rangle = \langle \phi_{n-1}^* S \phi \rangle \quad (5-20)$$

が得られる。この両式より次の関係式が求められる。

$$\langle \Sigma \phi \rangle = \langle \phi_0^* S \phi \rangle = \langle \phi_1^* S \phi \rangle = \dots = \lambda \langle \phi^* S \phi \rangle \quad (5-21)$$

これから

$$\lambda = \frac{\langle \Sigma \phi \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle} \quad (5-22)$$

となる。

以上の準備ができたので, (5-13) 式の右辺第 2 項を求める。このために (5-9) 式を次のように変形する。

$$M' \phi' - (S' - S) \phi' - S(\phi' - \phi) = S \phi \quad (5-23)$$

(5-14) 式に  $\phi'$  を掛け, (5-23) 式に  $\phi_0^*$  を掛けて積分し, (5-19) 式の関係を用いると

$$\langle \Sigma \delta \phi \rangle = -\langle \phi_0^* \delta Q \phi' \rangle + \langle \phi_0^* S(\phi' - \phi) \rangle \quad (5-24)$$

が得られる。従って反応率の変化は

$$\delta R = \langle \delta \Sigma \phi \rangle - \langle \phi_0^* \delta Q \phi' \rangle + \langle \phi_0^* S(\phi' - \phi) \rangle \quad (5-25)$$

で与えられる。上式は右辺第 3 項に摂動系と無摂動系の中性子束の差を陽に含んでいるために摂動公式として用いることができない。 $\phi_0^*$  は (5-14) 式から明らかなように  $\Sigma$  に依存して定まるので, (5-25) 式の第 3 項も  $\Sigma$  に依存している。次にこの項を消去するために  $\Sigma$  に依存しないようにする。この項は出力レベルの不定項をあらわしているために, 出力レベルの規格化が行なわれていれば消去することができる筈である。一般的に (5-16) 式に  $\phi'$  を掛け, (5-23) 式に  $\phi_n^*$  を掛けて積分し (5-20) 式の関係を用いると次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n-1}^* S(\phi' - \phi) \rangle &= -\langle \phi_n^* \delta Q \phi' \rangle \\ &+ \langle \phi_n^* S(\phi' - \phi) \rangle \end{aligned} \quad (5-26)$$

上式を逐次 (5-25) 式に代入してゆくと

$$\delta R = \langle \delta \Sigma \phi \rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_n^* \delta Q \phi' \rangle + \lambda \langle \phi^* S (\phi' - \phi) \rangle \quad (5-27)$$

が得られる。右辺第2項の  $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*$  は発散する可能性があるので、 $\phi_n^*$  の代わりにこの値から  $n \rightarrow \infty$  の漸近値  $\lambda \phi^*$  を差し引いた世代別の残差インポートランス

$$\phi_{n, \text{res}}^* = \phi_n^* - \lambda \phi^* \quad (5-28)$$

を用いる。臨界体系では  $\phi_n^*$  よりも  $\phi_{n, \text{res}}^*$  が重要な量であると思われる。この値は  $n$  が大きくなると急速に零に近づき、 $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n, \text{res}}^*$  の収束は非常に速い。(5-27)式の右辺第2項の各々から

$$\lambda \langle \phi^* \delta Q \phi' \rangle = 0$$

を差し引いておけば良い。これから次式が得られる。

$$\delta R = \langle \delta \Sigma \phi \rangle - \langle \phi^* \delta Q \phi' \rangle + \lambda \langle \phi^* S (\phi' - \phi) \rangle \quad (5-29)$$

ただし

$$\phi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n^* - \lambda \phi^*) \quad (5-30)$$

である。(5-29)式の  $\lambda$  に(5-22)式の関係を代入し

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\langle \delta \Sigma \phi \rangle - \langle \phi^* \delta Q \phi' \rangle}{\langle \Sigma \phi \rangle} + \frac{\langle \phi^* S (\phi' - \phi) \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle} \quad (5-31)$$

となる。右辺の第3項は反応率の種類に関係しない量であるためにこの項を消去するには反応率の比を考えれば良い。

$$r = \frac{\langle \Sigma_1 \phi \rangle}{\langle \Sigma_2 \phi \rangle} \quad (5-32)$$

上記の反応率の比に対する摂動公式は

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\langle \delta \Sigma_1 \phi \rangle - \langle \phi_1^* \delta Q \phi \rangle}{\langle \Sigma_1 \phi \rangle} + \frac{\langle \delta \Sigma_2 \phi \rangle - \langle \phi_2^* \delta Q \phi \rangle}{\langle \Sigma_2 \phi \rangle} \quad (5-33)$$

で与えられる。この公式が Usachev によって最初に提出された摂動公式を作用素表示で整理したものである。上式に含まれる作用素の変化  $\delta Q$  は(5-8)式で与えられ、群定数あるいは体系のパラメータを変化させたことによる作用素の変化と再臨界調整による作用素の変化を含んでいる。これでは不都合であるために、仮想的に核分裂当りの放出中性子数  $\nu$  を全エネルギー群で等しい割合だけ変化させて再臨界調整をおこなってみる。この時には(5-8)式あるいは(5-12)式で  $\delta F = -(\delta \nu / \nu) S$  とおけばよい。

$$-\frac{\delta \nu}{\nu} = -\frac{\langle \phi^* \delta P \phi \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle} \quad (5-34)$$

(5-33)式で

$$\begin{aligned}\langle \varphi_i^* \delta F \phi \rangle &= - \frac{\delta \nu}{\nu} \langle \varphi_i^* S \phi \rangle \\ &= - \frac{\delta \nu}{\nu} \sum_{\alpha=0} (\langle \phi_{\alpha}^* S \phi \rangle - \langle \Sigma \phi \rangle)\end{aligned}$$

となり、ここで(5-21)式の関係を用いると

$$\langle \varphi_i^* \delta F \phi \rangle = 0 \quad (5-35)$$

となる。これは $\nu$ を各エネルギー群で等しい割合だけ変化させることは、体系の反応度を直接変化させるが、中性子スペクトラムは2次の程度でしか変化させないことを意味する。(5-35)式から(5-33)式の $\delta Q$ は $\delta P$ でおきかえて良いことになる。或は $\delta Q$ は体系のパラメータを変化させた時の作用素の変化のみを表わすと考えてもよい。

Usachevの理論は体系の増殖比を計算するために提出されたものであるが、一般に任意の反応率の比に対しても適用できるし、さらに組み分けされた中性子スペクトラムの比に対しても応用できる。

#### (4) 反応度値およびその比に対する摂動公式

反応度値に対する摂動公式はUsachev<sup>(35)</sup>の方法を拡張することにより容易に導くことができるが、これはGandini<sup>(36)</sup>により最初に定式化され数学的取扱も簡単化された。ここでは(3)で述べたUsachevの方法を適用して、導出の要点と公式のみを与えることにする。

最初臨界状態にある体系に被測定物質を挿入し、この物質の反応度値を測定する。これは1次摂動法で取扱うことができるとすれば

$$\rho = \frac{\langle \phi^* H \phi \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle} \quad (5-36)$$

で計算される。ただし $H$ は被測定物質の作用素で、生成作用素は正、消滅作用素は負とする。次に上記の臨界体系で、体系のパラメータあるいは群定数を微量だけ変化させると、この系は臨界ではなくなるが適当な制御によって再び定常状態にする。この時の中性子束および随伴中性子束は(5-9)式で与えられ、作用素の変化は(5-8)式で与えられる。ここで作用素が $H' = H + \delta H$ の被測定物質を挿入して、その反応度値を測定する。前と同様に1次摂動法で取扱うことができるとすれば反応度値は

$$\rho' = \frac{\langle \phi'^* H' \phi' \rangle}{\langle \phi'^* S' \phi' \rangle} \quad (5-36)$$

で与えられる。従って反応度値に対する群定数が微量だけ変化した結果は

$$\begin{aligned}\frac{\delta \rho}{\rho} &= \frac{\rho' - \rho}{\rho} = \frac{\langle \phi^* \delta H \phi \rangle + \langle \delta \phi^* H \phi \rangle + \langle \phi^* H \delta \phi \rangle}{\langle \phi^* H \phi \rangle} \\ &= \frac{\langle \phi^* \delta S \phi \rangle + \langle \delta \phi^* S \phi \rangle + \langle \phi^* S \delta \phi \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle}\end{aligned} \quad (5-37)$$

で計算される。上式から反応度値の場合には随伴中性子束の変化を新しく計算することが必要である。その他の項は反応率の比の場合と全く同じようにして計算できる。

はじめに(5-37)式の $\langle \phi^* H \phi \rangle$ の項について考える。この中で $\langle \phi^* H \delta \phi \rangle = \langle \delta \phi H^* \phi^* \rangle$ の項は断面積が

$$\Sigma = H^* \phi^* \tag{5-38}$$

を持った反応率の場合と形式的に全く同じである。従って(5-14)式の $\Sigma$ を $H^* \phi^*$ でおきかえて世代別のインポートランスを求め、これから作られる残差インポートランスの和を $\varphi_H$ とすれば

$$\varphi_H^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n^* - \lambda_H \phi^*) \tag{5-39}$$

で与えられる。ただし $\lambda_H$ は(5-22)式で $\Sigma = H^* \phi^*$ とにおいて

$$\lambda_H = \frac{\langle \phi^* H^* \phi \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle} \tag{5-40}$$

となる。(5-39)式の $\varphi_H^*$ を用いると

$$\langle \phi^* H \delta \phi \rangle = -\langle \varphi_H^* \delta Q \phi' \rangle + \lambda_H \langle \phi^* S (\phi' - \phi) \rangle \tag{5-41}$$

となる。

次に $\langle \delta \phi^* H \phi \rangle$ について考える。これはインポートランスあるいは随伴中性子場で $\Sigma = H \phi$ なる断面積を持ったカウンターあるいは箔による一種の反応率と考えれば取扱いは今までに述べてきた方法で計算できる。しかし随伴中性子場での事象なので通常の中性子場での事象を全く反転させたものになる。この意味で $\Sigma = H \phi$ に対する世代別のインポートランスでなく、世代別の中性子束を考える。これは形式的にGandini<sup>(36)</sup>によって与えられたもので

$$M \phi_0 = H \phi \tag{5-42}$$

$$M \phi_1 = S \phi_0 \tag{5-43}$$

⋮

$$M \phi_n = S \phi_{n-1} \tag{5-44}$$

で計算される。ただし $n \rightarrow \infty$ の漸近値は世代別のインポートランスの場合と同じ理由で通常の中性子束の定数倍になる。

$$\phi_\infty = \mu_H \phi \tag{5-45}$$

この時の定数 $\mu_H$ は(5-40)で与えられる $\lambda_H$ に等しいことが容易に証明できる。これから世代別の残差中性子束の和は

$$\varphi_H = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n - \mu_H \phi) \tag{5-46}$$

で与えられる。従って

$$\langle \delta \phi^* H \phi \rangle = -\langle \phi^* \delta Q \varphi_H \rangle + \mu_H \langle (\phi^* - \phi) S \phi \rangle \tag{5-47}$$

となる。

同様の手順で $\langle \phi^* S \delta \phi \rangle$ ,  $\langle \delta \phi^* S H \rangle$ が求められるが、この場合に $\mu_s = \lambda_s = 1$ となり、また、 $S^* \phi^*$ に対する世代別のインポートランスはすべて通常のインポートランスに等しくなり、同様に $S \phi$ に対する世代別の中性子束は通常の中性子束に等しくなるので、各々の場合について、 $\varphi_s^* = 0$ ,  $\varphi_s = 0$ が成り立つ。これから

$$\langle \delta \phi^* S \phi \rangle = \langle (\phi'^* - \phi^*) S \phi \rangle \tag{5-48}$$

$$\langle \phi^* S \delta \phi \rangle = \langle \phi^* S (\phi' - \phi) \rangle \tag{5-49}$$

となり，出力レベルについての不定項のみとなる。

以上の結果から反応度値に対する摂動公式は

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\langle \phi^* \delta H \phi \rangle - \langle \phi^* \delta Q \varphi_H \rangle - \langle \varphi_H^* \delta Q \phi \rangle}{\langle \phi^* H \phi \rangle} - \frac{\langle \phi^* \delta S \phi \rangle}{\langle \phi^* S \phi \rangle} \quad (5-50)$$

となる。

次に反応率の比の場合と同じようにして，核分裂放出中性子数  $\nu$  を各エネルギー群で等しい割合だけ変化させて再臨界調整を行なう。即ち (5-8) 式の  $\delta F$  を  $-(\delta \nu / \nu) S$  に等しいとする。この時 (5-35) 式に対応して

$$\langle \varphi_H^* \delta F \phi \rangle = 0 \quad (5-51)$$

$$\langle \phi^* \delta F \varphi_H \rangle = 0 \quad (5-52)$$

が成り立つ。これから (5-50) 式の  $\delta Q$  は体系のパラメータあるいは群定数の変化による作用素の変化のみであると考えてよい。しかしこれは 1 次の摂動論の範囲内での取扱いに対する議論であってさらに高次の項を取扱うときには厳密な議論が必要である。

反応度値の比を

$$r = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (5-53)$$

とすれば (5-50) 式の最後の項は反応度値の種類に関係しないので次の摂動公式が得られる。

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\langle \phi^* \delta H_1 \phi \rangle - \langle \phi^* \delta Q \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_1^* \delta Q \phi \rangle}{\langle \phi^* H_1 \phi \rangle} - \frac{\langle \phi^* \delta H_2 \phi \rangle - \langle \phi^* \delta Q \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_2^* \delta Q \phi \rangle}{\langle \phi^* H_2 \phi \rangle} \quad (5-54)$$

### 5-3 世代別のインポートランスと Neumann 級数の対応

前節で，反応率の比，反応度値とその比に対する摂動公式を Usachev の方法によって導き出したが，この方法では任意の物理量に対する世代別のインポートランスが本質的に重要な役割をはたしている。Usachev の論文ではこの世代別のインポートランスが従う方程式がインポートランスの保存則を用いて物理的考察から導かれている。この世代別のインポートランスの概念は Hurwitz<sup>(41)</sup> により 1948 年に "danger coefficient" の理論の中で初めて述べられている。これは出力レベルに対する通常のインポートランスに対する解釈であり実用的価値が見出されなかったためもありあまり注目されなかった。その後 1958 年に Kadomtsev<sup>(42)</sup> により，任意の物理量に対してインポートランスが定義出来ることおよびこのインポートランスが満足する方程式が与えられた。従って Usachev の任意の物理量に対する世代別のインポートランスの概念は上の二つのものを結び合わせたものである。

通常出力レベルに対するインポートランスの物理的意味は多くの人々によって与えられてい

る。特に Usachev<sup>(43)</sup>, Selengut<sup>(44)</sup>, Weinberg<sup>(45)</sup>, Marchuck<sup>(46)</sup>, Lewins<sup>(47)</sup>らの論文解説はすぐれていて興味深い。ここでは Marchuk — Qrlov<sup>(46)</sup>によって与えられた随伴函数の理論にしたがって、任意の物理量に対するインポータンスの方程式を与え、次に未臨界系でこの方程式を解く際に、Fredholmの第2種の積分方程式に変換し、Neumann級数の展開方法を用いる。この時展開の各項が世代別のインポータンスに等しいことを示し、その物理的意味を明らかにする。

はじめに次の方程式を満足する中性子束を考える。

$$L\phi(x) = q(x) \quad (5-55)$$

ここでLは線型作用素であり、q(x)は媒質中の中性子源の分布を表わす。また、xはすべての変数の組を表わす。次に、任意の二つの関数q(x)およびh(x)の内積を次のように定義する。

$$\langle g, h \rangle = \int g(x) h(x) dx \quad (5-56)$$

中性子束 $\phi(x)$ の線型汎関数で規定される物理量は一般に上の内積の形で表現される。今 $p(x)$ で特徴づけられる物理量を考えると

$$J_p[\phi] = \langle \phi p \rangle \quad (5-57)$$

で表わされる。

作用素Lに対して随伴作用素 $L^*$ は次式で定義される。

$$\langle g L h \rangle = \langle h L^* g \rangle \quad (5-58)$$

上式でg, hは任意の関数である。ここで(5-55)式に対応して次の随伴方程式を考える。

$$L^* \phi_p^*(x) = p(x) \quad (5-59)$$

(5-58)式のh, gにそれぞれ(5-55), (5-59)式の解 $\phi, \phi_p^*$ を代入すると次の関係式が得られる。

$$\langle \phi_p^* L \phi \rangle = \langle \phi L^* \phi_p^* \rangle \quad (5-60)$$

あるいは上式に直接(5-55), (5-59)式を代入すると

$$\langle \phi_p^* q \rangle = \langle \phi p \rangle \quad (5-61)$$

となる。これから物理量 $J_p[\phi]$ を求めるには次の二つの方法がある。即ち、方程式(5-55)式を解いて $\phi(x)$ を求め、 $\langle \phi p \rangle$ により $J_p[\phi]$ を求めるか、あるいは(5-59)式を解いて $\phi_p^*(x)$ を求め

$$I_q[\phi_p^*] = \langle \phi_p^* q \rangle \quad (5-62)$$

より計算することも出来る。

次に未臨界体系での物理的過程および世代別のインポータンスについて考える。単位強さの中性子源を $x'$ に持ち込むと、(5-55)式は

$$L\phi(x, x') = \delta(x - x') \quad (5-63)$$

となる。上式を(5-61)式に代入すると $\phi_p^*$ は次のように表現できる。

$$\phi_p^*(x') = \int p(x) \phi(x, x') dx \quad (5-64)$$

これから $x'$ でのインポータンス $\phi_p^*(x')$ は、 $x'$ に単位強さの中性子源を持ち込んだときに、その体系の中で起きるPで特徴づけられる物理的過程の割合をあらわすことが理解できる。

次に未臨界系で(5-70)式を解いて $\phi_p^*(x)$ を具体的に求めることを考える。そのために作用素 $L$ を生成作用素 $S$ とそれ以外のすべての過程を表わす作用素 $M$ に分ける。

$$L = M - S \quad (5-65)$$

これに対する随伴作用素は次のようになる。

$$L^* = M^* - S^* \quad (5-66)$$

従って(5-70)式は

$$(M^* - S^*)\phi_p^* = p \quad (5-67)$$

となる。この方程式を解くために作用素 $M^*$ に対するGreen関数

$$M^*G^*(x, x') = \delta(x - x') \quad (5-68)$$

を考える。このGreen関数の物理的意味を理解するために(5-68)式に対応した

$$MG(x, x'') = \delta(x - x'') \quad (5-69)$$

に従うGreen関数 $G(x, x'')$ を定義する。随伴作用素の定義式(5-58)式を作用素 $M$ について考え、 $h, g$ の代りに $G(x, x'')$ ,  $G(x, x')$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & \int G^*(x, x')MG(x, x'')dx \\ &= \int G(x, x'')M^*G^*(x, x')dx \end{aligned} \quad (5-70)$$

となる。この式に(5-68), (5-69)式の関係代入すると次の相反定理が得られる。

$$G^*(x'', x') = G(x', x'') \quad (5-71)$$

これから(5-68)式の $G^*(x, x')$ は $G(x', x)$ に等しいことになる。従って、 $G^*(x, x')$ は $x$ での単位強さの源から生まれた中性子でまだ1度も核分裂を起こしていない中性子の $x'$ での分布を表わす。

Green関数 $G^*(x, x')$ を用いると(5-67)式は次の積分方程式に変換出来る。

$$\begin{aligned} \phi_p^*(x) &= \int G^*(x, x')P(x')dx' \\ &+ \int G^*(x, x')S^*\phi_p^*(x')dx' \end{aligned} \quad (5-72)$$

ここで

$$f^*(x) = \int G^*(x, x')P(x')dx' \quad (5-73)$$

$$K^*(x, x') = G^*(x, x')S^*(x') \quad (5-74)$$

とおき換える。ただし、 $f^*(x)$ ,  $K^*(x, x')$ の物理的意味は次のようになる。 $f^*(x)$ は $x$ での単位強さの源で生まれた中性子のうちまだ1度も核分裂を起こしていない中性子による体系全体で起こる物理的過程 $p$ の割合を表わす。一方、 $K^*(x, x')$ は $x$ での単位強さの源で生まれた中性子のうち、 $x'$ で最初の核分裂をおこない、それから生まれてくる中性子を表わす。(5-73), (5-74)式を用いると(5-72)は次のようになる。

$$\phi_p^*(x) = f^*(x) + \int K^*(x, x')\phi_p^*(x')dx' \quad (5-75)$$

これから $\phi_p^*(x)$ は $K^*(x, x')$ を核とする積分方程式で記述されることが解る。この方程式はFredholmの第2種の積分方程式と呼ばれている。<sup>(48)</sup>

ここで(5-75)式を解いて $\phi_p^*(x)$ を求めるために、(5-75)式を次の補助パラメータ $\lambda$ を含んだ方程式に変換する。



$$\phi_{p,\lambda}^*(x) = f_0^*(x) + \lambda \int K^*(x, x') \phi_{p,\lambda}^*(x') dx' \quad (5-76)$$

(5-76)式の解 $\phi_{p,\lambda}^*(x)$ で $\lambda \rightarrow 1$ にすれば(5-75)式の解になる。即ち、(5-77)(5-75)式を解くことと同等である。ここで $\phi_{p,\lambda}^*(x)$ を $\lambda$ の冪級数で表わす。

$$\phi_{p,\lambda}^*(x) = \phi_0^*(x) + \lambda \phi_1^*(x) + \dots \quad (5-77)$$

これを(5-76)式に代入し、 $\lambda$ の同じ冪の係数を方程式の両辺で等しいとおけば、 $\phi_n^*(x)$ を定める方程式系が得られる。

$$\phi_0^*(x) = f^*(x) \quad (5-78)$$

$$\phi_1^*(x) = \int K^*(x, x') \phi_0^*(x') dx' \quad (5-79)$$

⋮

$$\phi_n^*(x) = \int K^*(x, x') \phi_{n-1}^*(x') dx' \quad (5-80)$$

⋮

ここで反復核を次のように定義する。

$$K_1^*(x, x') = K^*(x, x') \quad (5-81)$$

$$K_2^*(x, x') = \int K^*(x, x_1) K^*(x_1, x') dx \quad (5-82)$$

⋮

$$K_n^*(x, x') = \int \dots \int K^*(x, x_1) K^*(x_1, x_2) \dots \dots K^*(x_{n-1}, x') dx_1 \dots dx_{n-1} \quad (5-83)$$

これらの反復核を用いると $\phi_0^*(x), \dots, \phi_n^*(x), \dots$ は次式で与えられる。

$$\phi_0^*(x) = f^*(x) \quad (5-84)$$

$$\phi_1^*(x) = \int K_1^*(x, x') f^*(x') dx' \quad (5-85)$$

⋮

$$\phi_n^*(x) = \int K_n^*(x, x') f^*(x') dx' \quad (5-86)$$

⋮

これから $\phi_0^*(x), \phi_1^*(x), \dots, \phi_n^*(x), \dots$ の持つ物理的意味は次のようになる。

$\phi_0^*(x)$ は $x$ の単位強さの源から出た中性子でまだ1度も核分裂を起こしていないものによる体系全体で起こる物理的過程 $p$ の割合をあらわす。 $\phi_1^*(x)$ は $x$ の単位強さの源から出た中性子による1回目の核分裂で生まれた中性子によって体系全体で起こる物理的過程 $p$ の割合をあらわす。同様に $\phi_n^*(x)$ は $x$ の単位強さの源から出た中性子による $n$ 回目の核分裂で生まれてきた中性子によって体系全体で起こる物理的過程 $p$ の割合を表わす。

(5-75)式の解 $\phi_p^*(x)$ は(5-77)式で $\lambda = 1$ とおいたものに等しい。

$$\phi_p^*(x) = \phi_0^*(x) + \phi_1^*(x) + \dots \quad (5-87)$$

上に述べたようにして $\phi_p^*(x)$ を求めることは、 $x$ に単位強さの源を持ち込んだとき、体系全体で起こる物理的過程 $p$ の割合を計算するのに、源から出た中性子でまだ1度も核分裂を起こ

していない中性子によるもの，1回目の核分裂で生まれてきた中性子によるもの，……，n回目の核分裂で生まれてきたものによるもの，……，に分けて計算していることになる。

次に上の方法で求めた， $\phi_0^*$ ， $\phi_1^*$ ，……， $\phi_n^*$ ，……はUsachevによって与えられた世代別のインポートランスに等しいことを示す。(5-78)~(5-80)式に(5-74)式の関係を代入し，各々の式の両辺に左から作用素 $M^*$ をかけると，次の方程式系が得られる。

$$M^* \phi_0^*(x) = \int M^* G^*(x, x') P(x') dx' \quad (5-88)$$

$$M^* \phi_1^*(x) = \int M^* G^*(x, x') S^* \phi_0^*(x') dx' \quad (5-89)$$

⋮

$$M^* \phi_n^*(x) = \int M^* G^*(x, x') S^* \phi_{n-1}^*(x') dx' \quad (5-90)$$

⋮

ここで(5-68)式の関係を用いると

$$M^* \phi_0^* = P \quad (5-91)$$

$$M^* \phi_1^* = S^* \phi_0^* \quad (5-92)$$

⋮

$$M^* \phi_n^* = S^* \phi_{n-1}^* \quad (5-93)$$

⋮

が得られる。上の方程式系で与えられる $\phi_0^*$ ， $\phi_1^*$ ，……， $\phi_n^*$ ，……はUsachevによって与えられた世代別のインポートランスに等しいことは(5-14)~(5-16)式と比較すれば明らかである。ここでは未臨界体系について考察したが，臨界体系について考えると，(5-87)式に対応する級数は発散してしまう。この場合には世代別のインポートランスからその漸近値

$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n^* = \lambda \phi^*$ を差し引いた残余インポートランスについて考えれば良い。

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n^* - \lambda \phi^*) \quad (5-94)$$

この $\varphi^*$ がみたすべき方程式は(5-14)~(5-16)式の各々の両辺から $\lambda M^* \phi^* = \lambda S^* \phi^*$ を差し引いて $\varphi_n^* (= \phi_n^* - \lambda \phi^*)$ の方程式に変換し，これらの無限個の方程式を加え合わせれば良い。

$$(M^* - S^*) \varphi^* = P - \lambda S^* \phi^* \quad (5-95)$$

この式の右辺の源は中性子束 $\phi$ を重みにして積分すると消えてしまうようになっている。上式を用いるとUsachev<sup>(35)</sup>が導いた摂動公式と同じものが容易に求められる。

尚，Marchuk - Qrlovの理論を臨界系に適用して，世代別のインポートランスを考えると次のようになる。(5-59)式で

$$L^* = M^*, \quad \rho(x) = S^* \phi^* \quad (5-96)$$

とおけば，通常の出カレベルに対するインポートランスの方程式が得られる。

$$M^* \phi^* = S^* \phi^* \quad (5-97)$$

この方程式は(5-67)式と同様にして積分方程式に変換出来る。未臨界系と同じ記号を用いて表示すると次の方程式が得られる。

$$\phi^*(x) = \int K^*(x, x') \phi^*(x') dx' \quad (5-98)$$

これは Fredholm の第2種の積分方程式の同次型である。上式は Neumann 級数展開の方法で解くことが出来ない。通常は逐次近似法が唯一の手法として原子炉の計算で用いられている。この方法では任意の既知関数  $\phi_0^*(x)$  を選んで、(5-98)式の右辺に代入して  $\phi_1^*(x)$  を求め、次にこの  $\phi_1^*(x)$  をまた(5-98)式の右辺に代入して  $\phi_2^*(x)$  を求める手順をくり返し、これが収斂するまで行なう。この時、もし  $\phi_0^*(x)$  として(5-59)式の解を用いたとすれば上の手順は

$$\phi_0^*(x) = \int G^*(x, x') p(x') dx' \quad (5-99)$$

$$\phi_1^*(x) = \int G^*(x, x') S^* \phi_0^*(x') dx' \quad (5-100)$$

$$\phi_n^*(x) = \int G^*(x, x') S^* \phi_{n-1}^*(x') dx' \quad (5-101)$$

で解を求めることになる。この方法で求められる  $n \rightarrow \infty$  の収斂値  $\phi_\infty^*(x)$  が定数倍を別にして、(5-98)式の解になっている。また、 $\phi_0^*, \phi_1^*, \dots, \phi_n^*, \dots$  は物理量  $J_p[\phi] = \langle \phi P \rangle$  の世代別のインポートランスになっている。これから任意の物理量の世代別のインポートランスは容易に計算出来ることが解る。しかも出力レベルに対する通常のインポートランスも同時に求められる。

#### 5-4 感度係数の数値結果と積分データの特性

5.2節で述べた摂動公式を用いて、群定数修正で利用する積分データの感度係数を具体的に計算し、個々のデータの特性を調べた。これらは AB BN セットを用い、コード SALVAGE で計算されたものであり、ここでは主として重い核種の断面積の影響について検討する。

最初に感度係数の計算に必要な世代別のインポートランスを Fig. 5-1 に示す。これは ZP R-III, No. 12 の炉中央での  $^{239}\text{Pu}$  の核分裂率に対するものであり、エネルギー群7の値の空間分布である。世代別のインポートランスの収束は非常に早く、世代数が11で通常出力レベルに対するインポートランスに等しくなっている。摂動計算では漸近値との差が問題になるが、この意味では世代が零のインポートランスの役割が重要であり、感度係数の特性はほとんどこれによって定まる。次に漸近値との差を加え合わせた残差インポートランス  $\phi_I^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n^* - \lambda \phi_I^*)$  を Fig. 5-2, 5-3 に示す。このインポートランスの持つ物理的意味は、空間のある点で単位強さの変化をエネルギー群 I で与えた時の積分データの変化量を与える。Fig. 5-2 は ZEBRA-2 での  $^{239}\text{Pu}$  の核分裂率のインポートランスであるが、例えば、エネルギー群7の捕獲断面積を炉心の中心から40cmの点で増加させたとすれば、摂動公式での符号の反転を考慮して、これは  $^{239}\text{Pu}$  の核分裂率を増加させる。もし体系全体で一様に断面積を変化させたときには、中性子束を重みにして体系全体で積分したものになる。Fig. 5-2 から反応率の測定点の近傍からの寄与が大きく、はなれた点からの寄与が小さくなる。また、摂動を加え

でも反応率が変化しない点が存在し、炉心の中心から2.4 cm以上はなれた点ではこのインポートランスが負になっている。これは体系の一部或は全体で群定数を変化させると体系のスペクトルが変化し、その系の反応の均衡がずれてくるが、これが臨界性を変えないように規格化しているためである。

Fig. 5-3 に  $^{238}\text{U}$  の核分裂率の  $\phi_1^*(x)$  を示してあるが、Fig. 5-2 と異なるのは3群の値に較べて、7, 11の値が極端に低くなっている。 $^{238}\text{U}$  の核分裂断面積は“しきい値”を持ち、ABBNセットでは1~5群しか値がない。従って6群よりエネルギーの低い群からの寄与が低くなり、直接反応に寄与する群あるいはその近傍の群からの影響が大きくなることを意味している。

次に個々の積分データの感度係数について詳しく検討する。ここで取扱う感度係数は、1%群定数を増加させた時の積分量の変化であり

$$S_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_i}{100} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_j} \right) \quad (5-102)$$

で与えられる量である。もし  $f_i[\hat{\sigma}]$  が二つの量の比

$$f_i[\hat{\sigma}] = \frac{h_1[\hat{\sigma}]}{h_2[\hat{\sigma}]} \quad (5-103)$$

で表わされる場合には

$$S_{ij} \doteq f_i \left[ \frac{h_1[\hat{\sigma} + \delta \hat{\sigma}_j] - h_1[\hat{\sigma}]}{h_1[\hat{\sigma}]} - \frac{h_2[\hat{\sigma} + \delta \hat{\sigma}_j] - h_2[\hat{\sigma}]}{h_2[\hat{\sigma}]} \right] \delta \sigma_j = \hat{\sigma}_j / 100 \quad (5-104)$$

である。

実効増倍率の感度係数を Fig. 5-4 に示す。これは ZEBRA-2 についての値であり、群定数を炉心、ブランケットも含めて一様に变化させたものである。この体系は Carbon で希釈した比較的大型な炉心である。実効増倍率の感度係数は概略的に变化させたエネルギー群の群定数の大きさとその群の中性子束および随伴中性子束の積に比例している。ただし非弾性散乱断面積では、变化させた群と中性子が減速されてゆく群のインポートランスの差に比例している。Fig. 5-4 で非弾性散乱断面積を1~4群で増加させると、インポートランスの低い5, 6群に減速される中性子が増加するため、1~4群の感度係数は負になっている。一方、5, 6群で非弾性散乱断面積を増加させるとそれよりもインポートランスの高い群へ減速されてゆく中性子が増すので感度係数は正となる。その他の断面積については中性子スペクトラムに較べてインポートランスは平坦なので、群定数と中性子束に比例しその核種の濃度にも比例している。 $^{238}\text{U}$  の核分裂断面積の感度係数が比較的大きいのは  $^{238}\text{U}$  の濃度が  $^{235}\text{U}$  のその6.16倍もあるためである。これらは25群について計算したものであるが18群以上(100 eV以下)ではほとんど零である。

次に反応率の比として、 $^{239}\text{Pu}$  と  $^{235}\text{U}$  の核分裂率の比の感度係数を Fig. 5-5 に示す。反応率の感度係数は直接カウンターあるいは箔の断面積を変化させた効果と体系の群定数を変化

させた効果との和で与えられる。Fig. 5-5 から直接浴の断面積を変化させた効果が大きく、群定数を変化させた効果は無視できる程度である。これは反応率の比を取っているために特に著しい。反応率のみについて考えると体系の群定数を変化させた効果は10~30%程度である。ZPR-Ⅲ, Ⅳ 48は大型炉の模擬炉心であり、Naが混入されているためにその散乱断面積が大きい13群で中性子束が低下している影響があらわれている。エネルギーの高い群では $^{239}\text{Pu}$ の反応率が $^{235}\text{U}$ の反応率よりも大きく、エネルギーの低い群では逆にになっている。従って $^{238}\text{U}$ の非弾性散乱断面積を増加させると低エネルギーに減速される中性子がふえるので、 $^{235}\text{U}$ の反応率の増大される割合が $^{239}\text{Pu}$ のそれよりも大きく、感度係数が負となる。一方、 $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ の捕獲断面積を増加させるとその群での中性子束およびそれより低い群での中性子束は低下し、相対的にそれより高い群での中性子束は大きくなる。これから低エネルギー(8群, 200 KeV以下)で捕獲断面積を増大させると $^{235}\text{U}$ の反応率の減少が $^{239}\text{Pu}$ のそれより大きくなり、感度係数は正になる。

Fig. 5-6に $^{240}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂率の比の感度係数を示す。 $^{240}\text{Pu}$ の値が非常に大きい。例えば5群での核分裂断面積の値を比較すると、 $^{240}\text{Pu}$ は1.50バーン、 $^{235}\text{U}$ は1.25バーンでほとんど変わらない。しかし反応率の値は $^{235}\text{U}$ の方が $^{240}\text{Pu}$ よりも4倍も大きい。したがって(5-104)式から明らかなように断面積の変化量はほぼ同じでも反応率全体に対する寄与の程度は $^{240}\text{Pu}$ の方が4倍位大きくなる。また、 $^{238}\text{U}$ の非弾性散乱断面積の感度係数が大きいのは、エネルギーの低い群に減速される中性子が増加すると、 $^{240}\text{Pu}$ の核分裂率が減少し逆に $^{235}\text{U}$ の核分裂率が増加する二つの効果が重なっているためである。

$^{238}\text{U}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂率の比の感度係数をFig. 5-7に示す。一般的傾向は $^{240}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂率の比の場合と同じである。ただし $^{239}\text{Pu}$ の核分裂断面積を増加させると $^{238}\text{U}$ の捕獲断面積を増加させた場合と全く同じ傾向を示している。一般に核分裂断面積を増加させることはその群での吸収断面積を増加させることと、核分裂で生まれて来る中性子を増加させることの二つの効果がある。前者は捕獲断面積を増加させることと全く同じであるが、後者の効果は中性子スペクトラムを変化させないので、反応率は変わらない。即ち、核分裂断面積を増加させることが反応率に与える影響と実効増倍率に与える影響は全く異なっている。

$^{238}\text{U}$ の捕獲率と $^{235}\text{U}$ の核分裂率の比の感度係数をFig. 5-8に示す。 $^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂率の比の場合と同じで直接浴の断面積を変えた時の効果が大きい。しかし $^{238}\text{U}$ の非弾性散乱断面積を増加させると、 $^{238}\text{U}$ の捕獲率と $^{235}\text{U}$ の核分裂率は共に増加するが、 $^{238}\text{U}$ の捕獲率の方が $^{235}\text{U}$ の核分裂率よりも低エネルギーで大きいので両者の比の感度係数は正になる。

$^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の反応度値の比の感度係数をFig. 5-9に示す。 $^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の反応度値は主として核分裂の正の効果で定まり、捕獲による負の効果が比較的小さいことがそれらの感度係数の値から理解できる。また、体系の群定数を変化させた時の効果も直接試料の核分裂断面積を変化させた効果に較べれば非常に小さい。しかし感度係数の値の大きさは他の積分データのそれに比較して小さくない。反応度値の場合、体系の群定数を変化させると、中性子束の変化と随伴中性子束の変化として作用し、両者の大小関係によって全体の値が定まる。 $^{238}\text{U}$ の核分裂断面積を増加させると $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{235}\text{U}$ の反応度値はともに減少するが、 $^{239}\text{Pu}$ の減少が大きいので感度係数は負になる。 $^{238}\text{U}$ の非弾性散乱断面積を増加させた場合低エネルギーに

減速される中性子が増加するので、低エネルギーで反応の割合の多い $^{235}\text{U}$ の反応度価値は増加し、 $^{239}\text{Pu}$ の値は5群以下で逆に減少するので、感度係数の値は負になる。次に $^{238}\text{U}$ の捕獲断面積を増加させる場合を考えると、この時には群定数を増加させた群およびその近傍の群で中性子束は低下し相対的に他の群で高くなるので両方の均衡によって定まる。この場合、 $^{239}\text{Pu}$ 、 $^{235}\text{U}$ の反応度価値はともに増加するが、高エネルギー群では $^{239}\text{Pu}$ の値の増加の割合が $^{235}\text{U}$ のそれよりも大きく、低エネルギー群ではその逆になっている。従って感度係数は高エネルギー群で正、低エネルギー群で負になっている。

$^{238}\text{U}$ と $^{235}\text{U}$ の反応度価値の比の感度係数をFig. 5-10に示す。ここで示す $^{238}\text{U}$ の反応度価値は負である。 $^{238}\text{U}$ の非弾性散乱断面積と核分裂断面積の感度係数が大きいのは直接試料の断面積を変化させた効果による。なお $^{235}\text{U}$ の核分裂と捕獲断面積を変化させた効果が低エネルギーで符号が反転しているのは、試料の断面積を変化させるよりも体系の断面積を変化させる効果の方が大きいためである。

以上により群定数修正に用いる積分データの感度係数を重い核種について調べ、具体的に積分データの特徴を知ることが出来た。積分データの特徴は中性子スペクトラムの特徴によって定まり、感度係数は6~10群(800Kev~20Kev)で大きいがそれよりエネルギーの低い群では非常に小さくなる。大型炉ではスペクトラムが軟かいので低エネルギー群での群定数が重要になってくる。この意味では大型炉を模擬した炉心での積分データやドブラー係数の測定値を用いるべきであろう。

感度係数は積分データの特徴を示す重要な量であるが、修正操作における積分データの重要度を示す指標でもあり、附録Iから明らかなように、ある群定数についてその積分データが持つ情報量に関係している。これはさらに一般の炉物理データの理解についてもあてはめることが出来ると思われる。

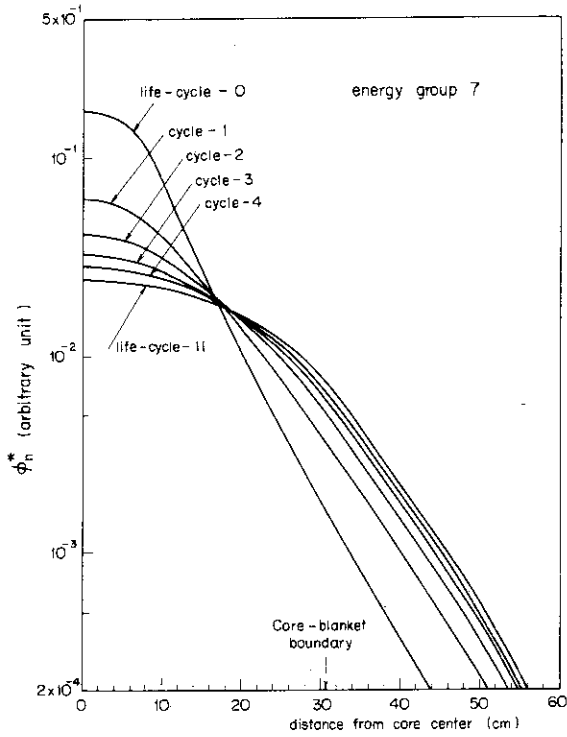


Fig. 5-1 Life-cycle importances of energy group 7 for  $^{239}\text{Pu}$  to  $^{235}\text{U}$  fission rate ratio (ZPR-3-12)

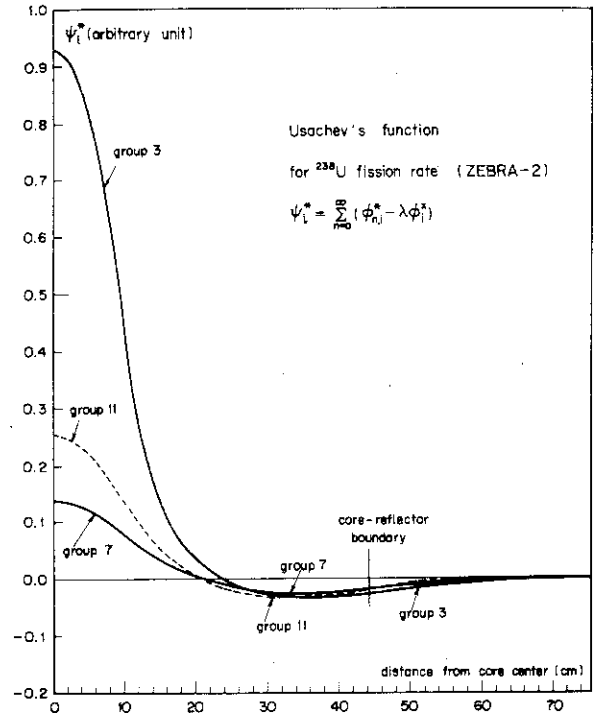


Fig. 5-3 Usachev's function for  $^{238}\text{U}$  fission rate (ZEBRA-2)

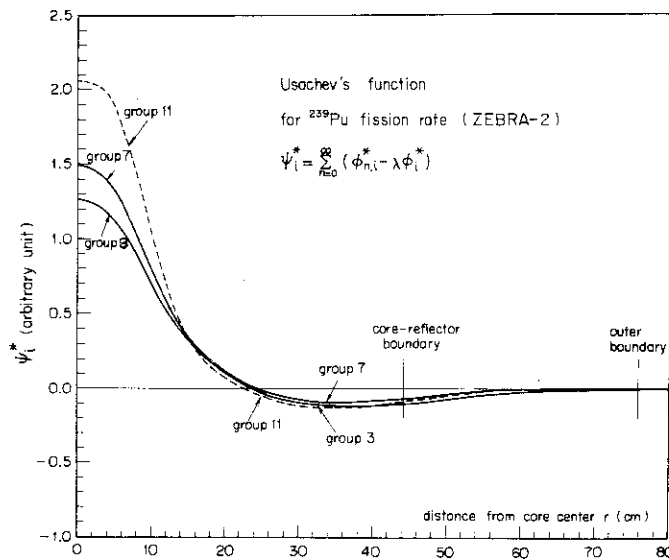


Fig. 5-2. Usachev's function for  $^{239}\text{Pu}$  fission rate (ZEBRA-2)

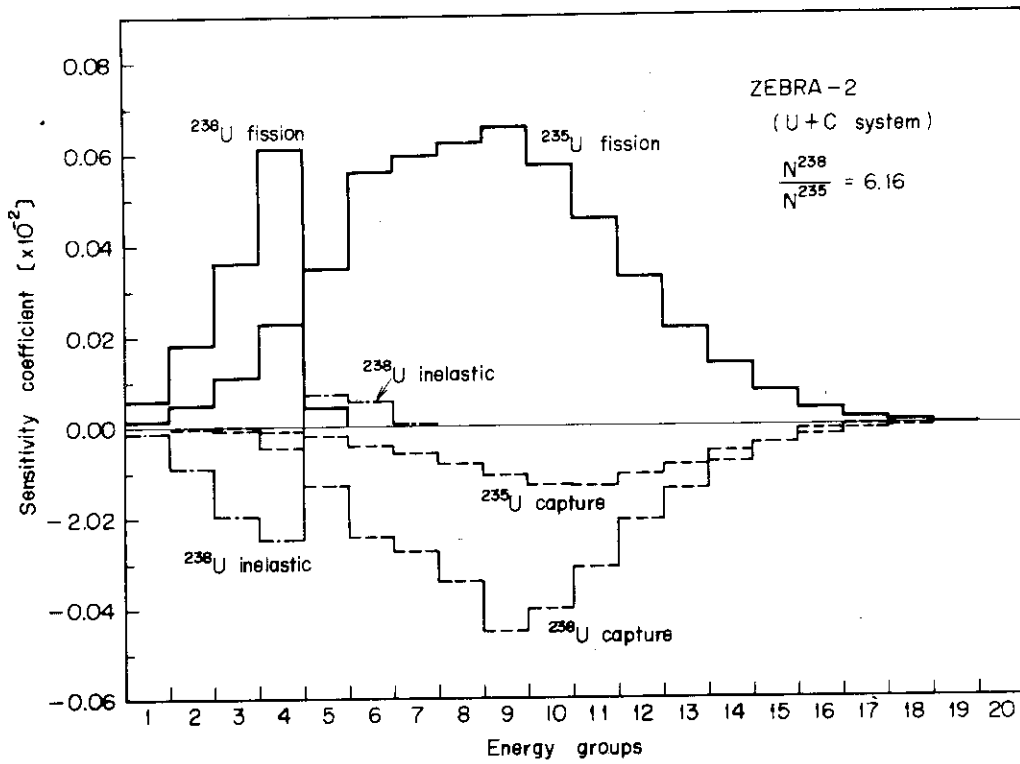


Fig. 5-4. Sensitivity coefficient of  $K_{\text{eff}}$  of ZEBRA-2

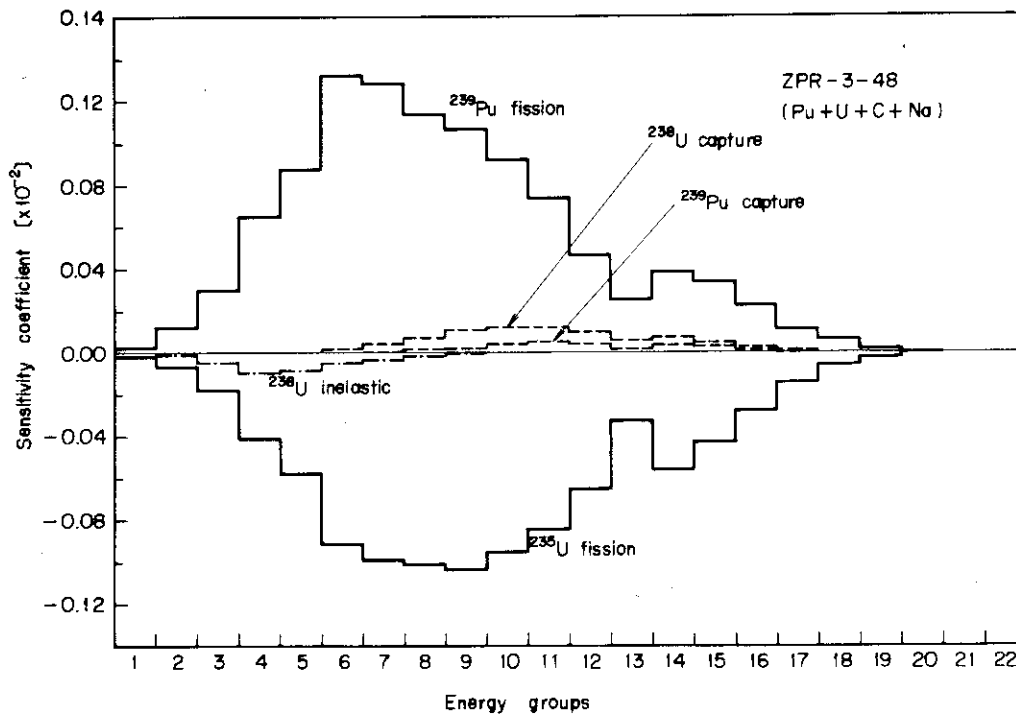


Fig. 5-5. Sensitivity coefficient of reaction rate ratio of  $^{238}\text{Pu}$  fission to  $^{236}\text{U}$  fission



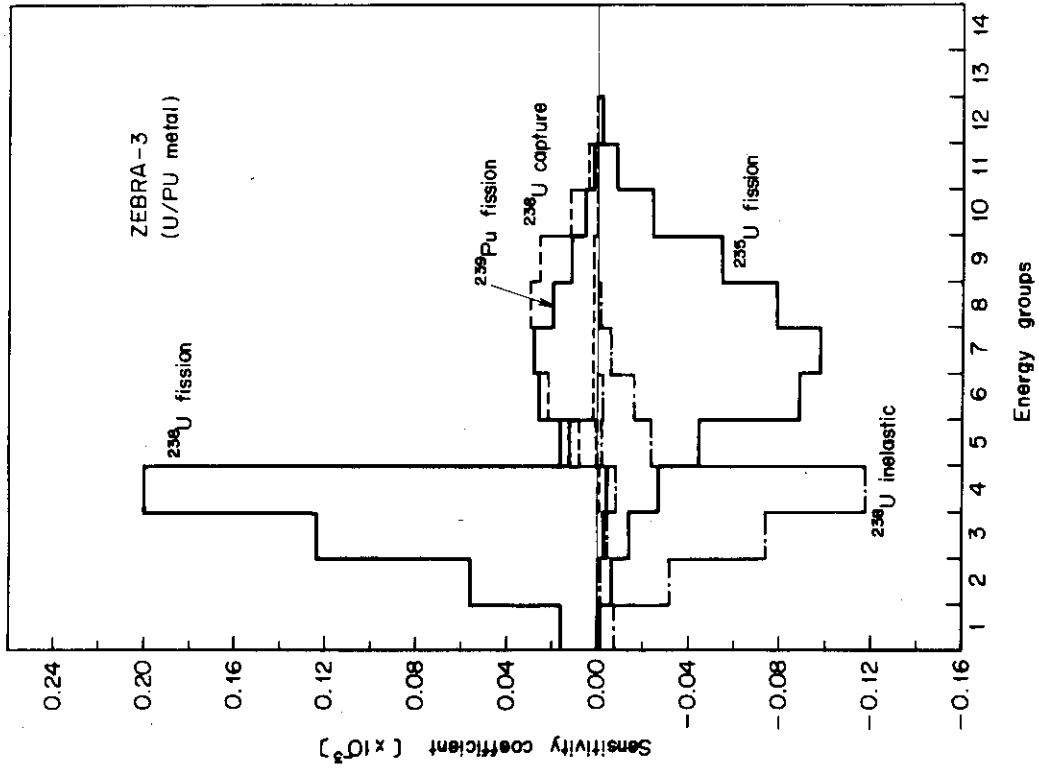


Fig. 5-7. Sensitivity coefficient of fission rate ratio of  $^{239}\text{U}$  to  $^{235}\text{U}$

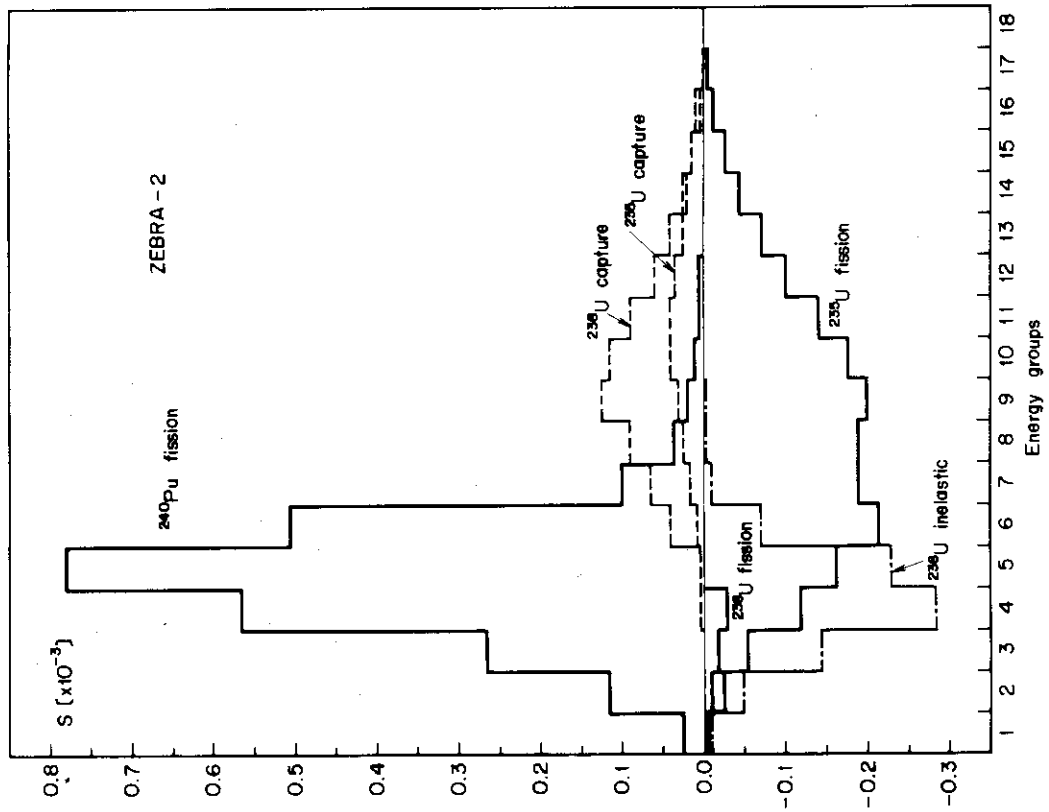


Fig. 5-6. Sensitivity coefficient of fission rate ratio of  $^{240}\text{Pu}$  to  $^{235}\text{U}$

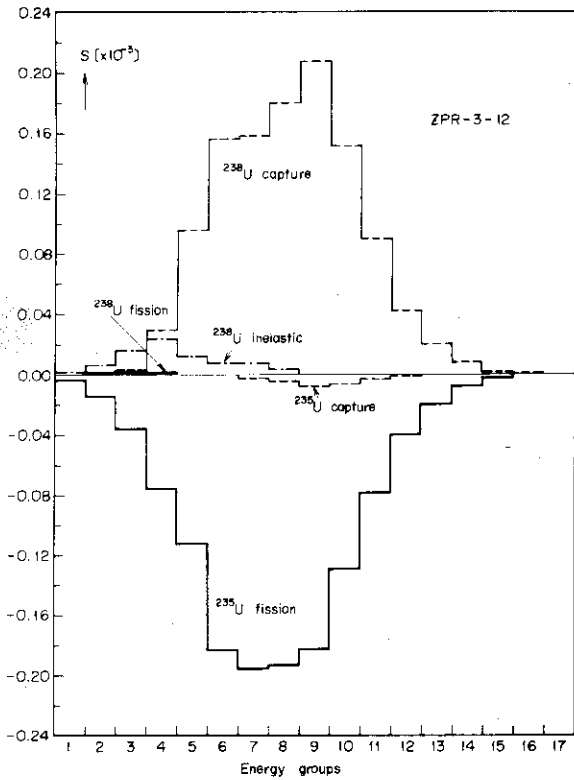


Fig. 5-8. Sensitivity coefficient of reaction rate ratio of  $^{238}\text{U}$  capture to  $^{235}\text{U}$  fission

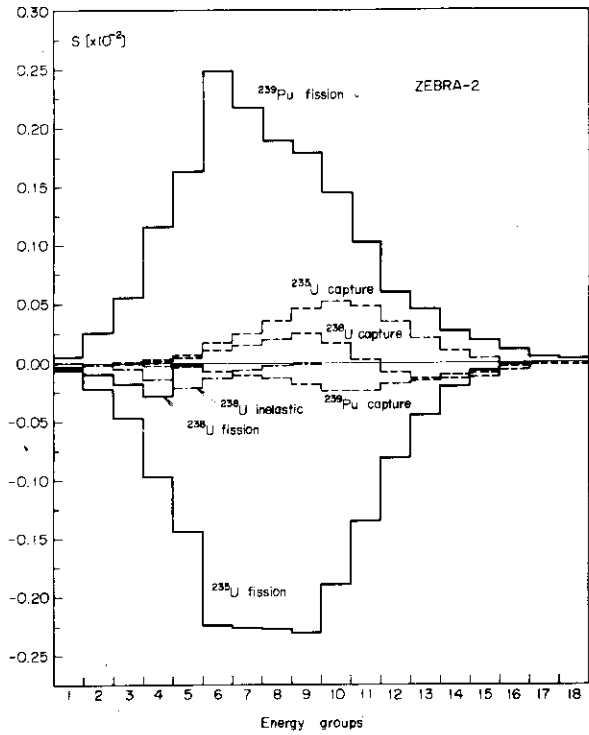


Fig. 5-9. Sensitivity coefficient of sample worth ratio of  $^{239}\text{Pu}$  to  $^{235}\text{U}$

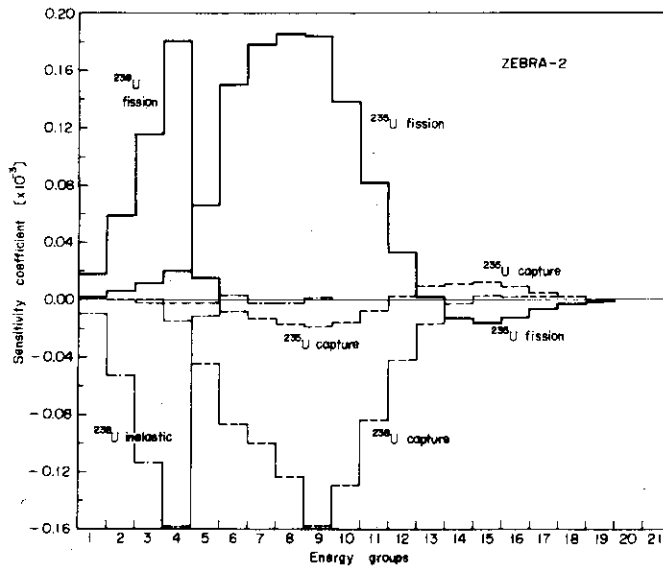


Fig. 5-10. Sensitivity coefficient of sample worth ratio of U-238 to U-235.

## 6 群定数修正の数値的検討 (ABBNセットの修正)

### 6-1 はじめに

群定数修正の数値的検討を行なうために、高速炉の計算で従来から広く用いられているABBNセット<sup>(3)</sup>を基準の群定数に選び具体的に修正を行なった。この修正を通して群定数修正の実際的な問題について検討し、併せてその有効性を調べた。ABBNセットはAbagyan et al.<sup>(3)</sup>によって作成され、群定数セットとしては典型的なものであり、共鳴吸収による自己遮蔽因子が温度および体系の濃度の関数として与えられているので、通常の炉物理計算はすべてこのセットを用いて行なうことができる。その後の群定数セットはABBNセットの形式を基本として作成されている。その特性も積分データの実験値と解析値の比較からかなり良く知られている。本論文では修正操作により個々の断面積について定量的に調べる。

群定数修正の実際的手順は次の通りである。

- 1) 積分データの集取選択
- 2) 基準の群定数セットによる積分データの解析計算(DTF-IV<sup>(49)</sup>, SALVAGE<sup>(37)</sup>)
- 3) 積分データの感度係数の計算(SALVAGE<sup>(37)</sup>)
- 4) 最小二乗法による群定数の修正(LEAST<sup>(37)</sup>)

上記の括弧内のコード名はその計算に用いたものであり、SALVAGE、LEASTの2個のコードは著者が開発したものである。DTF-IVは実効増倍率を計算するのに用い、SALVAGEは反応率の比、反応度価値の解析計算および積分データの感度係数の計算ができる。またLEASTは群定数間の相関を考慮した最小二乗法の計算ができる。DTF-IV、SALVAGEによる計算結果は磁気テープに保存され、同じく磁気テープに保存されているABBNセットと組み合わせられて、LEASTと連結されている。計算時間を最も必要とするのは、反応率の比および反応度価値の比の感度係数の計算であり、積分データの数が多いため、世代別の中性子束および随伴中性子束を計算しなければならないためである。ただし、LEASTによる最小二乗法の計算は10分程度であり、相関を考慮した場合には30分程度であるが、比較的計算時間が少ない。

この章では、まずはじめに、Baker<sup>(50)</sup>により提出された回帰分析の方法をABBNセットについて検討した結果について述べ、次に群定数修正について詳細に述べる。

### 6-2 回帰分析の方法

群定数修正では、積分データの実験値と解析値が実験誤差の範囲内で一致するように群定数を修正し、この修正結果を用いて大型炉の諸特性を推定する。しかし、群定数の数が多いので計算がかなり膨大なものになる。これに対して、Baker<sup>(50)</sup>によって提出された回帰分析の方法による大型炉の実効増倍率の予測は非常に簡単であり、群定数修正の方法と比較し、ABBNセットの大まかな性質を調べるために検討する。

この回帰分析の方法では、種々の体系について計算された実効増倍率の実験値からのずれを

その体系の濃度の1次関数で表わす。

$$K_{\text{eff}}^i = 1 + a_0 C_0^i + a_1 C_1^i + \dots \quad (6-1)$$

ここで、 $C_k^i$  は  $i$  番目の炉心での  $^{235}\text{U}$  の原子数密度で規格化された  $k$  番目の核種の原子数密度であり、 $a_k$  はその回帰係数であり体系に強く依存しない定数であると仮定する。(6-1) 式の関係は1つの体系について考えるときには、摂動論で簡単に導くことができる。この時、回帰係数は群定数の不確定さによる反応係数となる。しかし、(6-1) 式の  $a_k$  は種々の体系で計算された実効増倍率を用いて、最小二乗法で定められる。

(6-1) 式の関係を用いると未知の体系の臨界量を次のようにして推定できる。回帰係数を定めたと同じ群定数セットを用いて、未知の体系が臨界になるようにその系の濃度あるいは形状を定める。このとき  $K_{\text{eff},c} = 1$  であり臨界量が  $M_c$ 、質量係数が  $f_c = \frac{\Delta M}{M} / \frac{\Delta K}{K}$  であるとする。この計算で定められた臨界量  $M_c$  は群定数に含まれる不確定さのために実験値からずれる。このずれを補正するために、計算で定められたあるいは前もって与えられた濃度で(6-1) 式を用いて回帰分析の方法で実効増倍率  $K_{\text{eff},r}$  を推定する。この  $K_{\text{eff},r}$  は1からずれているが、このずれの分だけ補正したものが正しく推定された臨界量となる。即ち、

$$M_{\text{est}} = M_c \left( 1 + \frac{\Delta M_c}{M_c} \right) \quad (6-2)$$

ここで

$$\frac{\Delta M_c}{M_c} = (K_{\text{eff},r} - 1) \cdot f_c \quad (6-2')$$

であり、これが補正項である。

ABB N セットを用いて計算された ZPR-III, VERA, ZEBRA, FCA の 21 個の  $^{235}\text{U}$  系での実効増倍率から定められた回帰係数を Table 6-1 に示す。回帰係数からその核種の群定数の不確定さについて情報が得られる。Table 6-1 の結果から概略的に、ABB N セットは、 $^{235}\text{U}$  は over-reactive,  $^{238}\text{U}$  が under-reactive であると考えられる。また、Table 6-2 から実効増倍率の回帰分析により再計算された値は1のまわりに一様に分布し、平均値 1.0000, 標準偏差 0.0052 である。これは後で述べる群定数修正と同程度で臨界量を予測できることを示している。回帰分析の方法は非常に簡単であり、この方法が非常に精度良い予測を与えることは、この方法についてさらに検討する必要があると思われる。しかし、ここで用いた炉心は 21 個であり、これを 7 個の展開係数で表わしたためであるかもしれない。したがってさらに多くの炉心の実効増倍率を用いて検討する必要がある。

次に、炉心と反射体の両方の濃度を用いたときの回帰係数について計算した結果を Table 6-1 の第 3 列に示す。これから、反射体の  $^{238}\text{U}$ , SS の回帰係数の符号が炉心のそれと逆になっている。例えば、 $^{238}\text{U}$  の群定数の不確定さによる効果が炉心では負であり、反射体では正であるとは考えられない。Barre et al. <sup>(18)</sup> も同様の結果が得られることを報告している。1 個の炉心については回帰係数の物理的意味は明確であるが、種々の異なった体系の結果を同時に考慮する時には、回帰係数自身が濃度の複雑な関数となるために、回帰係数の物理的意味があいまいになる。したがって(6-1) 式は1つの実験式として取扱うべきであろう。

## 6-3 積分データとその解析

群定数の修正量は利用する積分データの実験値と解析値の差、およびその感度係数の大きさに直接関係している。したがって積分データの選択においては

- i) 解析計算が正確に行なえる
- ii) 実験値に系統誤差が含まれていない
- iii) 感度係数が広いエネルギー特性をもつ

の条件が満たされていることが重要である。さらに積分データの実験誤差が正確に与えられていることが大切である。

本論文の計算では、Davey et al. <sup>(51)</sup> によって編集された、10個の炉心を含むベンチマーク実験の結果、Baker <sup>(50)</sup> によって整理されているZPR-IIIの一連の実験結果、およびFCAで行なわれた実験結果 <sup>(52)</sup>、の中から最終的に56個の積分データを選択した。これらは臨界量が25個、反応率の比が18個、反応度値の比が13個である。最終的な選択では、系統誤差が含まれていると思われる積分データを除外する目的で試験的な群定数修正を行ない残差の大きい積分データを排除した。

Rowland et al. <sup>(16)</sup> は最小二乗法により群定数修正をおこなうと同時に積分データに含まれる系統誤差も除去することを考えているが、積分データの情報を利用して群定数を修正する観点から考えると、不確かな積分データは最初から除外しておくべきである。

臨界量は非均質な円筒炉心について測定される。これは直接解析計算が複雑なので、種々の補正をおこなって均質な球型炉心の値に換算される。これらは、中心間隔、境界の不規則凹凸、非均質効果であり、実験的に補正され、まず均質な円筒炉心での臨界量が定められる。この値に形状因子をかけて均質な球型炉心での臨界量およびこれに対応する臨界半径が求められる。Davey <sup>(53)</sup> によりZPR-IIIの22個の炉心についておこなわれた結果をTable 6-3, 6-4に示す。通常炉物理計算や群定数修正では臨界量を用いなくて実効増倍率について実験値と比較されている。解析計算と実験値を比較するためには、均質な球型炉心について実験から定められた組成の原子数密度、炉心半径、反射体の厚さ、等が必要であり、ZPR-III, VERA, ZEBRAの炉心についてDavey <sup>(51)</sup>, Baker <sup>(50)</sup> により編集されたものがあり、これを用いた。これらの一部をTable 6-5, 6-6に示す。

ここで用いた炉心は中性子の平均自由行程の3~12倍程度である。したがって拡散近似では充分でなく、 $S_n$ 近似による計算が必要である。 $S_n$ 近似と拡散近似の差や、 $S_n$ 近似の $n$ を2~16と変えた場合、炉心と反射体のメッシュ間隔を変化させた場合の実効増倍率に与える影響を詳細に調べた。炉心半径と平均自由行程の比が典型的な3個の炉心について $S_2 \sim S_{16}$ の計算をおこない相互に比較した。結果をTable 6-7に示す。 $R_0/\lambda$ が最も小さい炉心でも $S_{16}$ と $S_2$ の差は0.1%以下なので、本論文で用いる実効増倍率の計算はすべて $S_2$ でおこなう。これらの計算から $S_\infty$ と $S_2$ との差は0.2%以下であると思われる。ただし散乱断面積の非等方性は $l=1$ まで考慮し、計算コードはDOYCシステム <sup>(55)</sup> 中のDTF-IV <sup>(49)</sup> を用いた。次に、炉心と反射体でメッシュ間隔の中を変えた時の実効増倍率の違いを $S_2$ について調べた。結果をTable 6-8に示す。炉心でメッシュ間隔を0.3~2.6 cm 変化させたが実効増倍率はほとんど変わらない。一方、反射体で0.4~6.0 cm 変化させると実効増倍率は0.1%程度変化

する。この結果からメッシュ間隔は炉心で1 cm, 反射体で1.5 cm程度にすることが望ましいと思われる。最後に,  $S_0$  と拡散近似を用いて2.5個の炉心について実効増倍率を計算し, 両者の差を炉心か  $R_0/\lambda$  をパラメータとして整理したものをFig. 6-1に示す。 $R_0/\lambda$  が小さい炉心では2%の差があるが,  $R_0/\lambda$  が大きくなるとその差は小さくなる。しかし  $R_0/\lambda = 1.4$  でも0.2%程度の差がある。この結果から, 通常の高速炉の臨界実験の解析では拡散近似による計算は不十分であり,  $S_n$  による計算が必要である。なお, Bakerも同様の計算を  $S_0$  と拡散近似について種々の群定数セットを用いて調べている。これから両者の差は群定数セットによって変わらないことを指摘し, これを炉心ごとに整理している。

群定数修正に用いる2.5個の実効増倍率を  $S_0$  で計算した結果を炉心の<sup>238</sup>Uと<sup>235</sup>U, あるいは<sup>238</sup>Uと<sup>239</sup>Puの粒子比で整理したものをFig. 6-2に示す。計算値は粒子比  $N^{238}/N^{235}$  or  $N^{239}$  が大きい炉では小さくなり, 実験値 ( $K_{off} = 1.00$ ) から系統的なずれを示し, 平均値1.0284, 標準偏差0.0220である。同様のずれはJAERIセットを用いた計算値にも見出されている。(54)

反応率の比および反応度価値の実験値はDavey et al. (51) によって編集されたベンチマーク実験の結果から選ばれた。反応率の比は均質球型炉についてSALVAGEを用いて拡散近似で計算された。結果をTable 6-9およびFig. 6-4に示す。計算値と実験値の間には系統的なずれはない。反応度価値については, 実験値と計算値の間には一定のずれがあるので, 修正操作に用いる積分データとしては反応度価値そのものではなく<sup>235</sup>Uの反応度価値との比を用いた。計算はSALVAGEに組み込まれている拡散近似の一次摂動法を用いた。計算結果をTable 6-10およびFig. 6-3に示す。実験値と計算値の間には系統的なずれはない。

積分データの実験誤差(平均誤差)は個々のデータの重みとして用いるので修正操作では重要な役割を占めている。反応率の比と反応度価値の比については, Davey (51) によって編集されている値を用いた。一方, 実効増倍率については, 種々の補正をおこなっているもので, これらの補正項から生ずる誤差も考慮する必要がある。誤差の主なものとして, i)  $S_{\infty}$  と  $S_0$  の差(0.2%), ii) 非均質効果(0.2%), iii) 形状因子(0.2%), iv) 測定誤差(臨界量で2%, 実効増倍率で0.4%), が考えられる。これらを合計して全体で0.6%より小さくなるので, ここでは0.6%を用いることにする。

#### 6-4 群定数と平均誤差

修正すべき群定数としては, 修正操作に用いる積分データに含まれるすべてのものを考慮すべきであるが, 全体の群定数の数が非常に多くなり, 種々の制限があるので次のような選択をおこなった。2.5群のABBNセットを1.5群に縮約し, 核種と反応の種類をTable 6-11に示すものに制限した。

修正すべき群定数の数が非常に多い時には修正された群定数の精度が悪くなる。一方, 修正すべき群定数の数が少なすぎるときには, 積分データの修正値と実験値の一致が悪くなる。しかし, 後者のことは修正すべき群定数の数が利用する積分データの数より多い時には考慮する必要がないと思われる。この時には, 修正操作に利用する積分データに含まれるすべての核種と反応を取り入れ, 縮約エネルギー群の数を断面積の核物理的特性と炉物理的要求を考慮した

上で、できるだけ少なくする方が最適な群定数の選択になると思われる。本論文では、群定数間の相関を考慮した時の影響を調べ、さらに断面積の測定値と修正された群定数を出来るだけ詳細に比較するために、15群に縮約されたABBNセットを基準とし、修正された群定数の精度を調べる時に、5, 7, 10, 12群に縮約されたものにつれても検討した。ABBNセットと縮約群の構造をTable 6-12に示す。

修正操作では群定数の重みとして平均二乗誤差の逆数を用いる。しかしABBNセットの作成データを知ることができず、その精度についても全く不明である。したがって現在の状況での核データの精度を調べ、これよりも大きい平均誤差を用いることが最も良い方法であると思われる。 $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積は最も重要な反応であり、他の断面積の測定の基準として比較的精度良く測定されていたが、1970年のヘルシンキの核データの国際会議で、Poenitz<sup>(3)</sup>, Davey<sup>(56)</sup>によって、100Kev~1Mevで±15%の精度であることが報告され、注目された。ABBNセットの核データは少なくとも1964年より以前であることから推察して、上記の値よりも大きいことが予想されるが、本論文では±15%を全エネルギー範囲について用いた。他の核種の核分裂断面積の精度も同様に±15%の値を用いた。他の反応については、BNL-325<sup>(57)</sup>やKFK-120<sup>(33)</sup>から推定されるものよりもやや大きい値を用いた。1つの反応については、全エネルギー群で精度は等しいと仮定した。測定誤差について詳細な情報がないときには上記の仮定が最も妥当な選択であると思われる。Table 6-11のセット3に与えられている平均誤差を基準として、以下の計算で用いる。

上記の結果から明らかなように群定数の誤差(平均誤差)を正確に推定することが困難であるために、平均誤差の選び方が群定数の修正量に与える影響が具体的に調べられた。Table 6-11に示す5組の平均誤差を設定し、これを用いて群定数修正をおこなって相互に比較した。 $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の修正結果をTable 6-13に示す。積分データの感度係数の大きいエネルギー群(5~8群)で修正量は仮定した平均誤差の値に較べてそれ程大きく変わっていない。特に5, 7群では修正量は全く等しいと考えてよい。これは、仮定した5組のセットでは異なる核種や反応で平均誤差の相対的大きさがほぼ同じく、その絶対値だけがセット間で異なるために、群定数の修正操作で群定数間の相対的重みが乱されないためである。しかし、他の群では修正量がかなり違っているものもあるが、その大きさは仮定した平均誤差の値の違いに較べて小さい。以上の修正操作での残差の二乗和をTable 6-15に示す。平均誤差が小さすぎるときには残差の二乗和は非常に大きくなり、積分データの修正値と実験値の一致も悪い。これは群定数の修正量の巾が強く制限されているためであり、見かけ上で群定数に系統誤差が含まれていることと同等になる。

次に、 $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の平均誤差のみを7, 10, 15, 20, 25%と変化させ、他の断面積の平均誤差をTable 6-11のセット3に固定して修正をおこなった。 $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の修正結果をTable 6-14に示す。前の修正結果(Table 6-13)に較べると著しい相違がある。この場合には修正量は近似的に平均誤差に比例している。これは $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積と他の反応断面積の平均誤差の相対値が個々のセットで異なるために、最小二乗法で群定数の重みの内部構造がみだされ、これが修正量に直接影響するためであると思われる。

以上の数値計算から群定数の平均誤差は群定数間の相対的な重みが正しく与えられるように

選択されていることが重要であり、この場合には正しい修正量が得られる。

### 6-5 積分データの修正結果

前節までに実際の修正操作を行なうに必要な種々の問題点を吟味したので、この節以降は ABBN セットを修正した結果について具体的に検討する。個々の修正された群定数の詳細な検討をおこなう前に、修正操作の有効性を調べる方法として、積分データが如何に改良されたかを検討することが重要である。修正操作に直接利用した積分データの改良された結果は、修正された群定数による他の積分データの予測の上限を与える1つの目安となると思われる。これはまた群定数の修正操作で積分データの個々の有効性を知るためにも必要である。この目的で積分データの積類別に、修正前と修正後で、次式で与えられる量を計算し相互に比較した。

$$d_i = \sqrt{\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \left( \frac{\tilde{m}_j - \hat{m}_j}{\Delta \hat{m}_j} \right)^2} \quad (6-3)$$

上式で、 $m_i$  は積分データ  $i$  の数、 $\tilde{m}_j$  は修正前の解析値あるいは修正後の解析値、 $\hat{m}_j$  は実験値、 $\Delta \hat{m}_j$  は実験誤差（平均誤差）である。

(6-3) 式の量は実験誤差に較べて積分データの修正前および修正後の解析値が実験値から平均的にどの程度ずれているかを示している。これは修正前後の群定数の全体的な特徴を知る上で重要な量でもある。計算結果を Table 6-16 に示す。修正前の  $d_i$  で特徴的なことは、実効増倍率の値が非常に大きく、反応率の比、 $\sigma_f^{239} / \sigma_f^{235}$  と  $\sigma_c^{238} / \sigma_f^{235}$  の値は1より小さい。積分データ全体では修正前に解析値は実験値から実験誤差の4.180倍ずれているが、この大部分は実効増倍率のずれからきている。これは積分データの実験誤差と ABBN セットの全体的傾向にもよるが、実効増倍率以外の積分データは二つの量の比の形になっているために群定数セットの不確定さの影響が少なくなるためと思われる。一方、修正後にはすべての種類の積分データは実験誤差の範囲内に解析値と実験値の差が入っている。Table 6-16 で  $(adj/cal)^2$  は積分データの修正される割合を表わすが、実効増倍率の修正が最も強く、他の種類のデータの修正はこれに強く左右されている。また、 $\sigma_f^{239} / \sigma_f^{235}$ 、 $\sigma_f^{240} / \sigma_f^{235}$  の修正の程度が弱いのは、実効増倍率の中に Pu 系の値が4個しか含まれていないためと思われる。群定数間の相関を考慮した修正結果も Table 6-16 に示してあるが、全体の修正程度はわずかに良くなり、個々の種類の積分データの修正も少しは変化しているが、本質的な違いがあるとは思われない。しかしこれは全体的な結果であって個々の群定数の修正まで考慮した時には非常に複雑になる。

実効増倍率の個々の炉心について修正された結果を Fig. 6-2 および Table 6-17 に示す。修正前の系統的なずれは解消され、修正後には実験値のまわりに一様に分布し、その平均値は 1.0000 で標準偏差は 0.0050 である。修正前の値  $1.0284 \pm 0.0220$  に較べて非常に良く修正され、また修正値の精度も良くなっている。この精度について調べると Pu 系の数が少ないために、この系での精度が他の U 系に較べてやや悪くなっている。実効増倍率の系統的なずれの解消と群定数の個々の修正の関係については 6-7 節で詳しく検討する。

反応率の比および反応度値の比の修正結果を Fig. 6-3, 6-4 に示す。修正前の値と修



正後の値には特徴的な差はないが、修正後の値は前に述べたように平均的に実験誤差の範囲内で実験値の近傍に分布している。しかし実効増倍率の修正と比較して分布の様相が異なるのは、実験誤差の異なる種々のデータを同時に示したためであって、積分データの特性的でないことは、Table 6-16の修正された後の  $d_i$  がすべての種類のデータについてほぼ同じ値であることから明らかである。積分データの数が非常に多い時には、実効増倍率と他の種類のデータを分けて、群定数修正を行ない相互に比較すれば、修正操作での役割の違いと相互に補完している関連が一層明らかになる。概略的な特性の違いは線型化近似を行なった誤差方程式と第5章の感度係数の大きさから調べることが出来る。最も端的な違いは、実効増倍率にはほとんどすべての群定数が含まれている。このうちの一部分を含んでいるのが反応率の比、反応度価値の比であると考えて良い。従って、実効増倍率の修正は部分的に反応率の比や反応度価値の比からの制約をうけているが、これがかえって正しい修正結果を導いていると思われる。もし反応率の比や反応度価値の比を用いない時には、積分データとしての実効増倍率の修正は非常に改良されるが、修正された個々の群定数は不正確になる可能性がある。この観点からすれば、反応率の比や反応度価値の比を用いることは修正操作全体の調整に非常に有効に作用していると思われる。

#### 6-6 修正された群定数および積分データの信頼度

群定数および積分データの精度が群定数の修正によりどの程度改良されるかについて調べる。第2章で示したように群定数と積分データの平均誤差は次の関係式を満足する。

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta \tilde{m}_i}{\Delta \hat{m}_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Delta \tilde{\sigma}_j}{\Delta \hat{\sigma}_j} \right)^2 \right] = \frac{n}{N} q \quad (6-4)$$

ここで、 $\Delta \tilde{m}_i$ 、 $\Delta \hat{m}_i$  はそれぞれ修正後および修正前の積分データの平均誤差、 $\Delta \tilde{\sigma}_j$ 、 $\Delta \hat{\sigma}_j$  は同様に修正後および修正前の群定数の平均誤差である。n、Nは群定数の数および群定数と積分データの数の和であり、qは残差の二乗和から作られる量で  $(\mathbf{V}^T \mathbf{V}) / (N-n)\sigma^2$  である。

(6-4)式から修正後には群定数と積分データの精度は平均的に  $n/N$  の程度で良くなることが期待される。ただし修正操作の統計的性質のみでなく、平均誤差の値、系統誤差の存在等がqの値に影響するので非常に複雑である。しかし群定数に較べて積分データの数を多くすることが修正操作により精度を改良することに本質的に重要である。

群定数と積分データの精度を、積分データの数を56個に固定して、群定数の縮約エネルギー群の数を5、7、10、12、15と変化させて検討した。結果をTable 6-18に示す。縮約エネルギー群の数を少なくすると当然修正された群定数と積分データの精度は良くなっている。しかし積分データの精度については5と15群でも大きな違いはない。

Table 6-18のqはすべての場合について同じ自由度のカイ二乗分布に従う。これは第2章に示したようにカイ二乗分布の自由度は利用する積分データの数にのみ関係するからである。縮約エネルギー群の数が5、7の場合にはqの値は1に非常に近い。しかし群数を多くするとqの値は大きくなり、10、12、15群のqの値は自由度が56のカイ二乗分布の15.8%、8.15

%, 5.75%点に対応している。<sup>(5)</sup>  $q$  の1%点の値は1.477なので、上記の  $q$  の値から、系統誤差が群定数および積分データに含まれている可能性がある。しかし試験的な群定数修正を行なって系統誤差が含まれていると思われる積分データを除去したので、ここで用いる積分データに系統誤差が含まれている可能性がほとんどない。一方 ABBN セットに含まれる不確定さには系統誤差によるものが多いと思われる。この場合には  $q$  の値が1より大きくなることは避けられない。

修正された群定数の精度は Table 6-18 の6, 7行に示してある。 $q$  で除した値は当然ながら1より小さくなる。これは積分データから受ける情報量に直接関係している。しかし修正された群定数の精度は縮約エネルギーの群数が10, 12, 15の時には修正前よりも悪くなっている。これは  $q$  の値が1より大きいことと、修正すべき群定数の数が積分データの数よりも相対的に多すぎるためである。これを改良するためには、群定数の平均誤差として系統誤差を充分にうめ合わす位に大きく取ることと、利用する積分データの数を多くすることが考えられる。しかし利用する積分データの数が限られている時には、縮約エネルギー群の数を出来るだけ少なくすることが良いと思われる。

群定数間の相関を考慮すると、修正された群定数も積分データもともにその精度が良くなっている。これは、相関を考慮すると群定数間に相互関係が生じ、みかけ上実効的なエネルギー群の数を少なくすることと同等になるためである。Table 6-18 から15群で相関を考慮すると、 $(n/N)q$  の値は7群と10群の中間の群定数を用いたことと等価になっている。従って利用出来る積分データの数が制限されている時に出来るだけ詳細に群定数を修正する必要がある場合には群定数間の相関を考慮した方が良いと思われる。

修正された積分データの二乗平均誤差は

$$\Delta \tilde{m}^2 = \sum_j^n (\Delta \tilde{\sigma}_j \alpha_{ij})^2 + \sum_{j=k}^n \Delta \tilde{\sigma}_j \alpha_{ij} r_{jk} \alpha_{ik} \Delta \tilde{\sigma}_k \quad (6-5)$$

で計算される。ここで

$$r_{jk} = \frac{C_{jk}^{-1}}{\sqrt{C_{jj}^{-1} C_{kk}^{-1}}} \quad (6-6)$$

ただし上式で、 $\alpha$  : 感度係数、 $\Delta \tilde{\sigma}_j$  : 修正された群定数の平均誤差、である。

修正された積分データの精度は、修正された群定数の精度が悪くなっている。10, 12, 15群の場合でも常に改良されている。これは(6-5)式で右辺第1項の分散成分は精度を悪くするように作用するが、共分散成分(第2項)は  $C_{jk}^{-1}$  が負の値になるものも含まれているので精度が良くなっている。これから個々の群定数の精度は悪くなる場合でも、修正された群定数全体が1つのセットとして積分データを精度良く予測することが期待される。

#### 6-7 群定数の修正結果と測定値との比較

群定数の修正結果の妥当性を調べるために、主な反応の断面積を微分測定値(核物理的)と比較し、個々の群定数の修正結果を具体的に検討する。また群定数間の相関を考慮することが修正結果に与える影響についても調べる。群定数の修正結果はより信頼度の高い群定数セット

として臨界実験の解析計算や大型炉の設計計算に利用されるが、修正に用いる積分データの特  
性が必ずしも全エネルギー範囲をおおいつくすことが出来ないために、修正結果を核データと  
比較してその妥当性を調べながら、新しい核データを選択し、新しい積分データを加えて修正  
操作を繰り返しながら順次群定数セットを改良してゆく必要がある。前に述べたように修正さ  
れた群定数の精度はエネルギー群の数が少ないときに良くなるが、ここでは出来るだけ詳細に  
核データの測定値と修正結果を比較するために、縮約エネルギー群を15群とした。以下主な  
反応の修正結果について調べる。

ABBNセットでは核分裂スペクトラムは

$$x(E)dE = A e^{-\frac{\omega}{T}} e^{-\frac{E}{T}} \sinh\left(\sqrt{2 \frac{\omega E}{T^2}}\right) \frac{dE}{T} \quad (6-7)$$

で計算されている。<sup>(3)</sup> ここで  $T = 0.965$ ,  $\omega = 0.533 \text{ Mev}$  である。この分布は中性子温度  
が  $1.29 \text{ Mev}$  の Maxwell 分布でもあらわされる。ここでは  $T$  と  $\omega$  を修正すべき変数として選  
んだ。修正の結果  $T$ ,  $\omega$  はそれぞれ  $1.92\%$  および  $0.8\%$  減少したが、この減少は実効増倍率  
を  $0.2 \sim 0.02\%$  程度低くさせる。しかし  $T$  および  $\omega$  の減少は非常に少ないので、核分裂中性  
子温度は  $1.29 \text{ Mev}$  とほとんど変わらないと考えるが、これは最近 Werle et al.<sup>(59)</sup> によ  
って測定された  $1.30 \text{ Mev}$  に非常に近い。この中性子温度については、イギリスは群定数修  
正の結果から現在の値よりも  $10\%$  位大きい値を用いるべきであることを示し問題視された  
が、中性子温度を  $10\%$  大きくすると実効増倍率は  $\sim 3\%$  も大きくなりこれは疑問である。

$^{235}\text{U}$  の核分裂断面積の修正結果を Fig. 6-5 に示す。 $^{235}\text{U}$  のこの断面積は、U系の臨界量  
を定めるのに最も重要なものであり、また KeV 領域での他の断面積を規格化するための標準  
断面積としても用いられている。修正結果は修正前の値に較べて、 $1.4 \text{ Mev}$  以上でわずかに  
増大し、 $0.8 \text{ Mev}$  以下では大きく減少している。しかし測定値と比較して全体の傾向は極めて  
妥当であると思われる。 $1 \text{ Mev}$  以下で修正後の値は大きく低下しているがこれは実効増倍率  
の解析が実験値に較べて大きく正にずれているのを修正した結果である。この修正により実効  
増倍率は平均的に  $4.5\%$  低下するが、これは炉心の  $N^{238}/N^{235}$  にほとんど依存せず、すべての  
体系に対して同じ値になる。相関を考慮した場合としない場合では、積分データの感度係数が  
大きいエネルギー群では修正値そのものにはほとんど違いはないが、 $200 \text{ KeV}$  以下では相関  
を考慮した方が低くなっている。両者の違いは、Table 6-19 から明らかなように相関を  
考慮すると全体の修正値がエネルギー群によって滑らかに変化していることにある。測定値と  
の比較では両者の違いが本質的なものであるとは思われぬが、あるいは基準とすべき測定デ  
ータが少ないためかもしれない。しかし修正された群定数の精度は相関を考慮すると非常に良  
くなり、積分データの感度係数が大きい群で特に著しい。 $^{239}\text{Pu}$  と  $^{235}\text{U}$  の核分裂断面積の比の  
間の相関を考慮した場合の修正結果は、相関を考慮しない場合の結果とほとんど変わらない。  
これは修正に用いている積分データのうち、 $^{235}\text{U}$  についての情報を含んだものが、 $^{239}\text{Pu}$  の情  
報を含んだものよりもはるかに多いため、 $^{235}\text{U}$  の修正結果は相関を考慮するか否かに影響され  
ないためであると思われる。

$^{235}\text{U}$  の捕獲断面積については、捕獲と分裂断面積の比として Fig. 6-6 に示してある。測

定値に較べて修正結果が大きすぎるように思われるが、この傾向は50Kev以下で特に著しい。このエネルギー群では積分データの感度係数が小さいので、修正結果の信頼度は高いとは言えない。これは分裂断面積が低く修正され、捕獲断面積が高く修正されている二つの効果が重なっているためであり、各々の修正値は特に大きくない。

$^{239}\text{Pu}$ の核分裂断面積の修正結果をFig. 6-7に示す。修正後の値は修正前の値に較べてかなり低いが、断面積の測定値と比較すると全体的な傾向は極めて妥当である。修正後の値が低いのは、 $^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂率の比の解析値と実験値が良く一致しているので、 $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積が実効増倍率の修正を通して低い値に修正されていることに強く影響されているためである。全体の修正結果は1.4 Mev以下でDaveyの評価値に極めて近い。群定数間の相関(Type-1)を考慮した時には、修正値は相関を考慮しない場合に較べて、400Kev以下で低く、800Kev以上で高くなっている。特に100~400Kevでは相関を考慮した時の値が低くなり過ぎるよう思われる。しかし100Kev以下ではむしろ相関を取り入れた場合がDaveyの評価値に近くなっている。 $^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の比の間の相関(Type-2)を考慮した時には、200~400Kevで修正値が非常に低い。これは $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の修正値が低いことに強く影響されているためである。

$^{239}\text{Pu}$ の捕獲断面積の修正結果を捕獲と分裂断面積の比としてFig. 6-8に示してある。また捕獲断面積自身の修正値は附録IIIのTable A-4に与えてある。捕獲断面積自身の修正量は小さいが、核分裂断面積が低く修正されているために、捕獲対分裂の比としては100Kev以下で修正前の値よりも高くなっている。しかしこれでも10Kev以下では測定値に較べると低く過ぎる。 $^{239}\text{Pu}$ の捕獲断面積の情報を直接含む積分データはなく、臨界量と反応度値の比から間接的に得ている。また10Kev以下では上記の積分データの感度係数は小さく、さらに修正前のABBNセットの値は実験値の1/2程度であり、上記の修正結果はむしろ当然であると思われる。これを改良するためにはこのエネルギー領域で感度係数の大きい積分データを多く用いることと、基準の群定数を検討して修正を加えておく必要がある。

$^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の比をFig. 6-9に示す。相関を考慮しない時の値は、200~400Kevで実験値に較べて大きくなり過ぎている。Type-2の相関を考慮するとかなり改良されている。他のエネルギー領域では修正結果は測定値と比較して極めて妥当であると思われる。以上の修正結果から1Mev近傍にこぶがあるように思われるが、同様の傾向を持つ実験報告もある。(5)

$^{235}\text{U}$ の捕獲断面積の修正結果をFig. 6-10に示す。修正値は200~800Kevで測定値に較べて低く過ぎると思われるが、Berlijn et al.<sup>(20)</sup>も積分測定の結果を利用して評価した値はこのエネルギー領域で低い値になることを報告している。修正前の値に較べて修正後の値は50Kev以下で高く、50Kev以上で低くなっているが、この結果は全体として実効増倍率を1.0~4.0%程度増加させるように作用している。これは $^{235}\text{U}$ の濃度が増加すると比例的に増している。

$^{235}\text{U}$ の非弾性散乱断面積の修正結果をFig. 6-11に示す。修正値は修正前の値に較べて400Kev~1.4Mevで高く、1.4Mev以上では低くなっている。後者の結果はIgarashi et al.<sup>(61)</sup>によって評価された値に極めて近い。しかし体系のインポートンスが最も低くな

る $^{238}\text{U}$ の核分裂断面積のしきい値近傍をさかいとして修正量の符号が逆転しているので、群定数間の相関を考慮して検討する必要があると思われる。修正後の全体の変化は実効増倍率を0.5～2.0%増加させるが、この正の効果は $^{238}\text{U}$ の濃度に近似的に比例している。(より厳密には $(N^{238}/N^{235})^{1/2}$ に近い)

$^{238}\text{U}$ の核分裂断面積の修正結果をFig. 6-12に示す。修正値は修正前の値に較べて2.5 Mev以下で減少し、それ以上で増大している。この変化は実効増倍率を0.1～0.3%程度減少させる。しかしこの減少は $^{238}\text{U}$ の捕獲断面積や非弾性散乱断面積の修正による効果に較べて小さい。従って、群定数修正の結果、実効増倍率の系統的ずれが解消されたのは次の理由による。(Fig. 6-2) $^{238}\text{U}$ の核分裂断面積を減少させることにより、平均的に4.5%だけ炉心の $N^{238}/N^{235}$ に関係なく一様に実効増倍率を低下させる。しかしこのままでは $^{238}\text{U}$ の濃度の大きい炉心では実効増倍率が低くなりすぎるので、 $^{238}\text{U}$ の捕獲と非弾性散乱断面積を修正することにより、 $^{238}\text{U}$ の濃度にはほぼ比例して実効増倍率の傾斜を持ち上げ、全体が一様に実験値(1.0000)のまわりに分布するように修正されたものと解釈される。

最後に軽い核および中重核の修正結果について簡単に述べる。Cの弾性散乱断面積が100 KeV～2 MeVで10～20%増加している。一方、NaとAlの弾性散乱断面積はわずかに減少しているが、両者の捕獲断面積はほとんど変化していない。これに対して、Feの弾性散乱断面積は100 KeV～2 MeVで10～30%減少し、捕獲断面積は同じエネルギー領域で5～10%増大している。Feの弾性散乱断面積の修正量が大きいのは実効増倍率の修正に由来しているが、仮定した平均誤差の大きさにも関係している。

以上により主な核種の主な反応断面積について、修正結果を直接測定値と比較したが、全体的にみて極めて妥当であると思われる。

#### 6-8 実効増倍率の推定

群定数修正の結果について詳細に調べたが、Table 6-17に示したように修正操作に直接取り入れた体系の実効増倍率は良く修正され、実験誤差の範囲内で実験値に一致していると考えることが出来る。これらの修正値は平均値が1.0000、標準偏差が0.0050であり、これは修正されたABB Nセットによる実効増倍率の予測の上限を示していると思われる。即ちここで得られたABB Nセットの修正値を用いて他の多くの炉系の実効増倍率を推定したときには、これらの推定値の標準偏差は0.0050よりも大きくなると思われる。以下Rowland<sup>(16)</sup>の方法を用いて直接修正操作に取り入れなかった炉の実効増倍率の予測について具体的に計算する。前節までに述べた修正操作では25個の実効増倍率を用いているが、このうちの1個を除外して24個の実効増倍率と他の31個の積分データ(合計54個)を用いて群定数修正を行ない、この修正された群定数を用いて除外した炉の実効増倍率を推定する。これを25個の体系に順次適用した結果をTable 6-20の"Estimated"の項に示す。比較のために修正前のABB Nセットで計算した値"Initial calculated"および直接修正操作に取り入れた時の値"Adjusted"も同じTableに示してある。"Estimated"は+1.30%から-1.20%の範囲内にあり平均値0.9997、標準偏差0.0076で、直接修正に取り入れた時の値に較べれば良くないが、"Initial calculated"に較べれば非常に良くなっている。この結果は修正

に用いた炉と類似の特性を持つ炉の実効増倍率を推定した場合であり、この時には±0.8%の精度で予測されたことになる。これは他の類似の炉についても同様の精度で実効増倍率を推定することが可能であることを示している。

次に修正に用いた炉とは特性の異なる炉として、FCA-V-2炉心について調べた。(62) これはJOYOのモックアップ炉心であり、形状と原子数密度をTable 6-21に示す。 $^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ がほぼ同程度含まれていることと、OおよびSSが非常に多く含まれていることが特徴的である。実効増倍率の計算結果をTable 6-22に示す。修正前のABBNセットによる結果は $K_{\text{eff}} = 1.0281$ である。これに対して修正されたABBNセットによる結果は、拡散近似で $K_{\text{eff}} = 0.9785$ 、これに $S_0$ 補正を行なって $K_{\text{eff}} = 0.9881$ となる。修正前に+2.81%ずれていたものが、修正後に-1.22%に改良されている。Table 6-20の“Estimated”の中にも-1.20%ずれているものがあることから考えれば、1個の炉心についての結果から直ちに判定することは出来ない。しかしこの炉については臨界量に換算して5.9%ずれていることになり、実験誤差が2%程度であることから考えれば必ずしも満足すべき値ではない。修正操作に用いたPu炉心が4個しかないために、Pu炉心についての予測がU炉心のそれよりも劣ることは明らかである。これから、大型炉の実効増倍率の予測を正確に行なうためには、Pu炉心で測定された積分データを修正操作に取り入れて群定数の修正を行なうことが大切であり、新しいデータを取り入れて修正操作により群定数の改良を行なうと同時に断面積の核物理での測定と比較して修正操作の妥当性を検討しながら、新しい核データも吸収して行くことが必要である。

Table 6-2. Initial calculated  $K_{eff}$  and estimated  $K_{eff}$  by regression method.

Assembly	$N^{238}/N^{235}$	Initial calculated $K_{eff}$	Estimated by regression method
ZPR-3-2A	0.07	1.0397	1.0023
6F	1.13	1.0267	0.9979
11	7.53	1.0056	0.9941
12	3.75	1.0233	1.0040
14	0.08	1.0103	0.9940
16	5.30	1.0137	1.0007
23	0.07	1.0398	1.0035
24	9.60	1.0076	0.9989
25	10.3	1.0052	0.9978
29	2.00	1.0572	0.9984
30	1.50	1.0553	1.0037
31	1.60	1.0549	1.0039
32	0.07	1.0777	1.0048
33	0.07	1.0622	0.9953
34	2.20	1.0505	0.9948
36	5.30	1.0282	1.0047
41	4.88	1.0274	0.9962
ZEBRA-1	7.37	1.0107	1.0006
2	6.16	1.0127	1.0109
VERA-1B	0.07	1.0147	0.9966
FCA-3-2-S	3.97	1.0146	0.9968

Table 6-1. Regression coefficients and its standard deviations (ABBN set)

(U-235 systems only used)

Nuclide	Regression coefficients ( $\times 10^4$ )	
	Core	Core + Blanket
Core		
U <sup>235</sup>	215 ± 36	200 ± 38
U <sup>238</sup>	- 21 ± 4	- 32 ± 11
SS	33 ± 3	28 ± 7
Al	16 ± 7	1 ± 15
C	- 9 ± 3	- 13 ± 6
Na	57 ± 50	37 ± 47
O	4 ± 10	1 ± 10
Blanket		
U <sup>238</sup>		21 ± 12
SS		- 61 ± 39
Initial averaged $K_{eff}$	1.0304 ± 0.0218	
After fitting $K_{eff}$	1.0000 ± 0.0053	
	1.0000 ± 0.0049	

Table 6-3. Experimental critical mass and various corrections of ZPR-III assemblies (from Davey)

ZPR-III Assembly NO.	Experimental Critical Mass (kg)	$\frac{(\Delta M/M)}{(\Delta K/K)}$	Experimental Corrections to Critical Mass			
			Hetero- geneity(kg)	Irregular Boundrry(kg)	Center Gap (kg)	Corrected Experimental Mass (kg)
2A	147.7	3.3	+ 3.8	- 0.1	- 1.1	150.3
6F	131.1	3.8	+ 3.4	- 0.1	- 1.1	133.3
11	240.6	7.0	+16.6	- 0.2	- 3.0	254.0
12	176.8	5.5	+ 5.8	- 0.1	- 1.8	180.7
14	136.0	3.8	+ 2.6	- 0.1	- 1.1	137.4
16	204.8	4.8	+10.2	- 0.2	- 2.0	212.8
23	258.1	4.5	+ 9.8	- 0.2	- 3.0	264.7
24	460.7	9.4	+35.7	- 0.4	- 6.0	490.0
25	581.6	7.2	+37.7	- 0.4	- 6.0	612.9
29	420.7	5.4	+24.0	- 0.2	- 3.0	441.5
30	394.9	5.7	+22.5	- 0.2	- 3.0	414.2
31	463.0	5.6	+25.9	- 0.2	- 3.0	485.7
32	227.5	4.2	+ 9.7	- 0.2	- 3.0	234.0
33	238.0	4.2	+ 9.7	- 0.2	- 3.0	244.5
34	503.0	5.0	+24.9	- 0.4	- 6.0	221.5
36	242.7	4.3	+10.4	- 0.2	- 3.0	249.9

Table 6-4. Shape factor correction for ZPR - III Assemblies (from Davey)

Assembly NO.	Assembly Volume (liters)	Approximate Radius of Sphere of Same Volume (cm)	Peak Shape Factor	L/D	f (L/D)	Actual Assembly Shape Factor	Critical Mass of Sphere (kg)
2A	56.4	24	0.96	0.97	0.997	0.96	144
6F	49.9	23	0.96	Sphere	-	-	133
11	134.9	32	0.94	0.88	1.000	0.94	239
12	100.5	29	0.95	0.87	1.000	0.95	172
14	77.3	26	0.96	0.99	0.996	0.96	132
16	116.4	30	0.95	0.91	1.000	0.95	202
23	148.5	33	0.94	0.84	0.998	0.94	249
24	324.6	43	0.93	0.93	1.000	0.93	456
25	432.6	47	0.92	0.90	1.000	0.92	564
29	451.5	48	0.92	0.79	0.992	0.91	402
30	356.4	44	0.92	0.80	0.994	0.91	377
31	425.0	47	0.92	0.73	0.980	0.90	437
32	131.0	32	0.94	1.17	0.972	0.91	213
33	136.9	32	0.94	1.14	0.977	0.92	225
34	574.4	52	0.91	0.94	0.999	0.91	475
36	138.1	32	0.94	1.44	0.920	0.87	217



Table 6-5. Compositions and Dimensions of Spherical Models of ZPR-III Assemblies (from Baker)

Assembly NO.	Composition, nuclei/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>-22</sup>									Critical Mass (kg)	R <sub>c</sub> (cm)
	U <sup>235</sup>	U <sup>238</sup>	Ni	Fe	Cr	Al	Na	O	C		
2A	0.6706	0.049	0.254	1.669	0.423	1.896				144	24
6F	0.6720	0.763	0.113	0.746	0.189	1.893				133	23
11	0.4565	3.443	0.084	0.555	0.140					239	32
12	0.4502	1.669	0.084	0.555	0.140				2.678	172	29
14	0.4502	0.034	0.084	0.555	0.140				5.356	132	26
16	0.4502	2.405	0.084	0.555	0.140				1.517	202	30
23	0.4450	0.034	0.083	0.551	0.139	2.582				249	33
24	0.3634	3.499	0.086	0.566	0.143					456	43
25	0.3442	3.560	0.084	0.555	0.140					564	47
29	0.2386	0.479	0.227	1.499	0.380	1.471		1.392		402	48
30	0.2837	0.434	0.226	1.487	0.376	1.408		0.697		377	44
31	0.2789	0.439	0.226	1.489	0.376	1.416				437	47
32	0.4445	0.032	0.747	4.917	1.245					213	32
33	0.4450	0.033	0.586	3.861	0.977		0.400			225	32
34	0.2242	0.494	0.226	1.493	0.387	1.538			0.761	475	52
36	0.4498	2.376	0.117	0.770	0.195		0.401			217	32
41	0.2861	1.397	0.130	0.856	0.217	1.079				462	47
Reflector	0.0091	3.998	0.067	0.440	0.112					Reflector Thickness 30cm	

Table 6-6. Compositions and Dimensions of Spherical Models of ZEBRA and VERA Assemblies (from Baker)

Assembly NO.	Composition, nuclei/cm <sup>3</sup> x 10 <sup>-22</sup>													Reflector Type	Critical Mass (kg)	R <sub>c</sub> (cm)
	Pu <sup>239</sup>	Pu <sup>240</sup>	Pu <sup>241</sup>	U <sup>235</sup>	U <sup>238</sup>	Ga	Cu	Ni	Fe	Cr	Al	Na	C			
Zebra 1				0.4655	3.433			0.032	0.447	0.082				E	214.9	31
2				0.2523	1.555			0.034	0.402	0.087			3.795	E	390.9	45
3	0.3465	0.0183	0.0016	0.0229	3.156	0.022	0.457	0.032	0.456	0.082				E	76.5	24
6A	0.1879	0.0144	0.0016	0.0046	0.635	0.012	0.083	0.044	0.453	0.127	0.250	0.447	2.959	F	172.2	38
Vera 1B				0.7349	0.056			0.069	0.628	0.164			5.754	G.H	84.2	19
11A	0.7213	0.0370	0.0028			0.045	0.959	0.066	0.609	0.158	0.001		4.620	G.H	32.8	14
Reflector E				0.0301	4.099			0.036	0.350	0.091						
F				0.0194	2.681			0.032	0.325	0.091			2.341			
G				0.025	3.440			0.071	0.646	0.168						
H				0.026	3.610			0.072	0.658	0.171						

Table 6-7. N' s effect in S<sub>N</sub> calculations for effective multiplication factors

Assembly	S <sub>N</sub>	K <sub>eff</sub> (S)	K <sub>eff</sub> (S <sub>N</sub> )-K <sub>eff</sub> (S <sub>16</sub> )
VERA-IIIA R/λ = 3.20	S <sub>2</sub>	1.04827	0.04451
	S <sub>4</sub>	1.00915	0.00539
	S <sub>6</sub>	1.00553	0.00179
	S <sub>8</sub>	1.00469	0.00093
	S <sub>12</sub>	1.00404	0.00028
	S <sub>16</sub>	1.00376	
ZPR-3-14 R/λ = 8.06	S <sub>2</sub>	1.03268	0.02472
	S <sub>4</sub>	1.01205	0.00209
	S <sub>6</sub>	1.01055	0.00059
	S <sub>8</sub>	1.01026	0.00030
	S <sub>12</sub>	1.01004	0.00008
	S <sub>16</sub>	1.00996	
ZPR-3-24 R/λ = 12.8	S <sub>2</sub>	1.01216	0.00463
	S <sub>4</sub>	1.00804	0.00051
	S <sub>6</sub>	1.00768	0.00015
	S <sub>8</sub>	1.00759	0.00006
	S <sub>12</sub>	1.00757	0.00004
	S <sub>16</sub>	1.00753	

Table 6-8. Effect of mesh intervals in core and reflector on k<sub>eff</sub> (ZPR-3-14) (S<sub>8</sub> calculations)

Core mesh interval (cm)	Reflector mesh interval (cm)	K <sub>eff</sub>
0.325	1.500	1.01026
0.867	1.500	1.01026
2.600	1.500	1.01034
0.867	0.430	1.01013
0.867	1.500	1.01026
0.867	3.000	1.01072
0.867	6.000	1.01111

Table 6-9. Experimental and calculated values of Reaction Rate Ratio (ABBN set)

reaction type	assembly	experimental value	calculated value	$\frac{E-C}{E}$ (%)
$\sigma_f^{239/238}$	ZEBRA-3	1.19	1.177	1.07
	VERA-1B	1.07	1.128	-5.44
	ZPR-3-6F	1.22	1.225	-0.37
	ZPR-3-11	1.19	1.172	1.54
	ZPR-3-12	1.12	1.108	1.05
	ZEBRA-2	0.987	0.9979	-1.11
	FCA-3-2-S	1.02	0.9899	2.95
$\sigma_f^{240,235}$	VERA-11A	0.475	0.4506	5.14
	ZEBRA-3	0.373	0.3697	0.89
	VERA-1B	0.400	0.4344	-8.60
	ZPR-3-6F	0.530	0.4860	8.29
	ZPR-3-11	0.340	0.3490	-2.66
	ZEBRA-2	0.234	0.2422	-3.53
$\sigma_f^{238/235}$	VERA-11A	0.0770	0.08013	-4.06
	ZPR-3-48	0.0307	0.03098	-0.92
	ZEBRA-3	0.0461	0.04421	4.09
	ZPR-3-6F	0.0780	0.07317	6.20
	ZPR-3-12	0.0470	0.04867	-3.56
	VERA-1B	0.131	0.1231	6.07
$\sigma_c^{238/235}$	ZPR-3-6F	0.104	0.1073	-3.15
	ZPR-3-11	0.112	0.1153	-2.94
	ZPR-3-12	0.123	0.1200	2.44

Table 6-10. Experimental and calculated values of Sample Worth Ratio (ABBN set)

reaction type	assembly	experimental value	calculated value	$\frac{E-C}{E}$ (%)
$^{239}$ Samp./Samp.	VERA-11A	1.814	1.714	5.51
	ZPR-3-48	1.338	1.423	-6.36
	ZEBRA-3	1.614	1.618	-0.24
	VERA-1B	1.751	1.761	-0.57
	ZPR-3-6F	1.832	1.749	4.53
	ZPR-3-11	1.699	1.618	4.78
$^{238}$ Samp./Samp.	ZEBRA-2	1.423	1.461	-2.70
	FCA-3-2-S	1.600	1.502	6.11
	ZPR-3-48	-0.0744	-0.0681	8.42
	ZEBRA-3	-0.0503	-0.0501	0.31
	ZPR-3-11	-0.0537	-0.0503	6.33
	ZPR-3-12	-0.0426	-0.0411	3.59
ZEBRA-2	-0.0775	-0.0674	13.0	

Table 6-12. Group structure of the ABBN set and collapsed 15,12,10,7, and 5 energy groups

Energy Groups	ABBN Set		Collapsed Energy Groups				
	1	Upper Energy Boundary	15	12	10	7	5
1	10.5 Mev		1	1	1	1	1
2	6.5						
3	4.0		2	2			
4	2.5		3	3	2		
5	1.4		4	4	3	2	2
6	0.8		5	5	4		
7	0.4		6	6	5	3	3
8	0.2		7	7	6	4	
9	0.1		8	8	7		
10	46.5 Kev		9	9	7	5	4
11	21.5		10	10	8		
12	10.0		11	11	8	6	
13	4.65		12	11	9		
14	2.15						
15	1.0		13				
16	465 ev						
17	215						
18	100		14				
19	46.5						
20	21.5			12	10	7	5
21	10.0						
22	4.65						
23	2.15		15				
24	1.0						
25	0.465						

Table 6-11. Five sets of assumed standard deviation of group cross sections

Nuclide	reaction type	assumed standard deviation (%)				
		1	2	3	4	5
X	T	3	4	5	7	10
	$\omega$	3	4	5	7	10
	$\sigma_c$	10	15	20	25	30
$Pu^{239}$	$\sigma_f$	7	10	15	20	25
	$\sigma_{in}$	20	25	30	35	40
	$\nu$	1	1.5	2	2.5	3
$Pu^{240}$	$\sigma_c$	20	25	30	35	40
	$\sigma_f$	20	25	30	35	40
	$\sigma_c$	10	15	20	25	30
$U^{235}$	$\sigma_f$	7	10	15	20	25
	$\sigma_{in}$	20	25	30	35	40
	$\nu$	1	1.5	2	2.5	3
$U^{238}$	$\sigma_c$	10	15	20	25	30
	$\sigma_f$	7	10	15	20	25
	$\sigma_{in}$	20	25	30	35	40
C	$\sigma_{el}$	10	15	20	25	30
	$\sigma_{el}$	10	15	20	25	30
	$\sigma_c$	20	25	30	35	40
Na	$\sigma_{el}$	10	15	20	25	30
	$\sigma_c$	20	25	30	35	40
	$\sigma_{el}$	10	15	20	25	30
Al	$\sigma_c$	20	25	30	35	40

Table 6-13. Dependence of adjusted values of U-235 fission cross section on assumed standard deviations (numerical experiment - 1)

energy groups	case No of assumed standard deviations				
	1	2	3	4	5
1	1.41 %	2.36 %	3.63 %	4.39 %	4.78 %
2	1.34	2.54	3.99	4.63	4.83
3	1.05	2.63	4.23	4.40	3.92
4	4.38	2.60	0.67	1.21	3.07
5	11.59	11.37	11.64	11.09	10.29
6	14.31	15.85	18.46	19.74	20.45
7	5.84	6.94	7.98	8.61	9.28
8	4.83	6.53	8.90	10.31	11.27
9	4.69	6.56	10.34	12.89	14.73
10	3.90	5.98	10.28	13.49	15.86
11	3.21	3.51	3.22	2.50	1.47
12	6.98	8.59	10.05	10.35	9.87
13	7.54	10.33	14.45	17.75	20.55
14	2.48	3.48	5.02	6.34	7.52
15	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03

Table 6-14. Dependence of adjusted values of U-235 fission cross section on assumed standard deviations (numerical experiment - 2)

energy groups	assumed standard deviations of <sup>235</sup> U fission cross section *									
	7 %	10 %	15 %	20 %	25 %	7 %	10 %	15 %	20 %	25 %
1	0.71 (%)	1.69 (%)	3.63 (%)	5.76 (%)	8.01 (%)					
2	0.65	1.85	3.99	5.98	7.78					
3	0.40	1.91	4.23	5.74	6.46					
4	1.96	1.61	0.67	0.09	0.83					
5	7.09	9.32	11.64	13.29	14.60					
6	9.67	13.61	18.46	22.59	26.82					
7	6.21	7.95	7.98	5.58	1.78					
8	5.47	7.56	8.90	8.10	5.86					
9	4.09	6.51	10.34	13.81	16.95					
10	3.14	5.53	10.28	15.75	21.69					
11	1.08	1.90	3.22	4.40	5.57					
12	3.36	5.90	10.05	13.46	16.10					
13	4.24	7.82	14.45	20.88	26.60					
14	1.43	2.66	5.02	7.35	9.46					
15	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04					

\* standard deviations of other nuclides are equal to that of case - 3 in numerical experiment - 1.

Table 6-15.

Dependence of the sum of squares of the residual on assumed standard deviations of group cross sections. (numerical experiment-1)

Case No	$\Phi^*$	$a = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\hat{m}_i - \tilde{m}_i}{\Delta \hat{m}_i} \right)^2$	$b = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\hat{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_j}{\Delta \hat{\sigma}_j} \right)^2$
1	2.682	74.17	76.00
2	1.823	47.11	54.95
3	1.309	34.64	38.69
4	1.034	29.26	28.63
5	0.8658	26.18	22.30

\*  $\Phi$  : the sum of squares of the residual  $\left( \Phi = \frac{a + b}{N - n} \right)$

Table 6-16.

Deviation of calculated and adjusted integral data from their measured values normalized by experimental error;

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\hat{m}_i - \tilde{m}_i}{\Delta \hat{m}_i} \right)^2}^{**}$$

integral data	initial calculated	no correlation		correlation = 1	
		adjusted	(adj/cal) <sup>2</sup>	adjusted	(adj/cal) <sup>2</sup>
Keff	5.945	0.808	0.018	0.732	0.015
$\sigma_f^{239} / \sigma_f^{235}$	0.806	0.633	0.617	0.701	0.757
$\sigma_f^{240} / \sigma_f^{235}$	1.288	0.934	0.526	0.989	0.589
$\sigma_f^{238} / \sigma_f^{235}$	1.894	0.695	0.135	0.689	0.132
$\sigma_c^{238} / \sigma_f^{235}$	0.967	0.315	0.106	0.425	0.193
$\frac{^{239}\text{Samp}}{\text{Samp}} / \frac{^{235}\text{Samp}}{\text{Samp}}$	2.241	0.951	0.180	0.939	0.176
$\frac{^{238}\text{Samp}}{\text{Samp}} / \frac{^{235}\text{Samp}}{\text{Samp}}$	2.222	0.688	0.095	0.740	0.111
average	4.180	0.786	0.0354	0.769	0.0339

\*\*  $\hat{m}_i$  : measured value,  $\tilde{m}_i$  : adjusted value,  $\Delta \hat{m}_i$  : standard deviation of measured value

Table 6-17. Initial calculated and adjusted effective multiplication factors of 25 assemblies.

assembly	$N^{235}$ , $N^{235}$ or $N^{239}$	initial calculated		adjusted	
		K	$\Delta K_{eff}^{**}$ (%)	$\tilde{K}_{eff}$	$\Delta \tilde{K}_{eff}$ (%)
ZPR-3-2A	0.07	1.0397	3.43	0.9984	0.34
6F	1.13	1.0267	3.46	0.9940	0.33
11	7.53	1.0056	4.36	0.9946	0.27
12	3.75	1.0233	3.43	1.0012	0.28
14	0.08	1.0103	2.78	1.0012	0.41
16	5.30	1.0137	3.81	0.9947	0.27
23	0.07	1.0398	3.39	1.0014	0.37
24	9.60	1.0076	4.69	0.9991	0.33
25	1.03	1.0052	4.79	0.9976	0.37
29	2.0	1.0572	3.23	1.0072	0.38
30	1.5	1.0553	3.33	1.0060	0.29
31	1.6	1.0549	3.50	1.0051	0.28
32	0.07	1.0777	3.61	1.0078	0.46
33	0.07	1.0622	3.53	0.9999	0.38
34	2.2	1.0505	3.27	1.0042	0.35
36	5.3	1.0282	4.05	1.0079	0.26
41	4.88	1.0274	3.89	0.9969	0.23
48*	4.50	1.0468	3.33	1.0085	0.40
ZEBRA-1	7.37	1.0107	4.40	1.0013	0.29
2	6.16	1.0127	3.49	0.9939	0.37
3*	9.11	0.9950	4.10	0.9946	0.49
6A*	3.38	1.0264	3.09	0.9976	0.44
VERA-1B	0.07	1.0147	2.89	0.9979	0.39
11A*	0.0	1.0047	3.21	0.9939	0.54
FCA-3-2-S	3.97	1.0146	3.13	0.9946	0.37

\* PU system

\*\* Standard deviation of calculated keff when a initial set has assumed standard deviations given in case 3 of Table 11.

Table 6-18. Reliability of adjusted group cross sections and adjusted integral data.

energy groups	No of group cross sections	$q^*$	$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta \tilde{m}_i}{\Delta \tilde{m}_i} \right)^2$	$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta \tilde{m}_i}{\Delta \tilde{m}_i} \right)^2 \frac{1}{q}$	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Delta \tilde{\sigma}_j}{\Delta \tilde{\sigma}_j} \right)^2$	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Delta \tilde{\sigma}_j}{\Delta \tilde{\sigma}_j} \right)^2 \frac{1}{q}$	$\frac{n}{N} q$
15	269	1.309	0.4501	0.3439	1.216	0.9290	1.084
15 Correlation-1	269	1.160	0.3979	0.3430	0.9801	0.8449	0.8181**
12	223	1.271	0.4435	0.3493	1.160	0.9127	1.016
10	185	1.207	0.4295	0.3558	1.077	0.8923	0.9266
7	129	0.9971	0.3729	0.3740	0.8353	0.8377	0.6952
5	95	0.9805	0.3581	0.3652	0.7694	0.7847	0.6169

\*  $q$  : the sum of squares of the residual.

\*\* mean value of columns 4 and 6.

Table 6-19. Adjusted values and their standard deviations of U-235 fission cross section without and with correlation.

energy groups	no correlation		correlation - 1		correlation - 2	
	$(\tilde{\sigma} - \hat{\sigma})/\hat{\sigma}$ %	$\Delta \tilde{\sigma}$ %	$(\tilde{\sigma} - \hat{\sigma})/\hat{\sigma}$ %	$\Delta \tilde{\sigma}$ %	$(\tilde{\sigma} - \hat{\sigma})/\hat{\sigma}$ %	$\Delta \tilde{\sigma}$ %
1	3.63	16.9	7.75	12.7	5.01	16.7
2	3.99	16.3	7.72	6.1	6.05	14.2
3	4.23	13.7	6.22	5.7	6.80	9.0
4	- 0.67	14.6	1.08	4.8	- 3.68	2.4
5	- 11.64	14.2	- 10.76	3.7	- 10.97	13.9
6	- 18.46	13.7	- 16.40	4.3	- 19.66	15.6
7	- 7.99	15.2	- 17.31	4.7	- 10.87	1.6
8	- 8.90	14.9	- 16.12	4.7	- 12.49	5.4
9	- 10.34	15.1	- 13.32	4.8	- 15.68	3.6
10	- 10.28	15.1	- 7.98	5.8	- 13.95	7.8
11	3.22	16.1	- 1.97	7.3	3.04	13.2
12	10.05	14.8	3.12	8.3	8.80	7.1
13	14.45	15.4	14.38	14.5	7.40	9.7
14	5.02	16.9	5.02	15.9	1.95	16.4
15	0.02	17.2	0.02	16.2	- 0.02	17.5



Table 6-20. Initial calculated, adjusted and estimated  $K_{eff}$ 's of ZPR-III, VERA, ZEBRA and FCA assemblies.  
(JōYo mock up core)

Assembly	$N^{238}/N^{235}$ or $N^{240}/N^{238}$	$K_{eff}$		
		Initial calculated	Adjusted	Estimated
ZPR-III-2A	0.07	1.0397	0.9984	0.9982
6F	1.13	1.0267	0.9940	0.9968
11	7.53	1.0056	0.9946	0.9933
12	3.75	1.0233	1.0012	1.0016
14	0.08	1.0103	1.0012	1.0007
16	5.30	1.0137	0.9947	0.9940
23	0.07	1.0398	1.0014	1.0022
24	9.60	1.0076	0.9991	0.9984
25	10.3	1.0052	0.9976	0.9962
29	2.0	1.0572	1.0072	1.0105
30	1.5	1.0553	1.0060	1.0075
31	1.6	1.0549	1.0051	1.0061
32	0.07	1.0777	1.0078	1.0145
33	0.07	1.0622	0.9999	1.0003
34	2.2	1.0505	1.0042	1.0053
36	5.3	1.0282	1.0079	1.0092
41	4.88	1.0274	0.9969	0.9964
48*	4.50	1.0468	1.0085	1.0130
ZEBRA-1	7.37	1.0107	1.0013	1.0012
2	6.16	1.0127	0.9939	0.9929
3*	9.11	0.9950	0.9946	0.9880
6A*	3.38	1.0264	0.9976	0.9968
VERA-1B	0.07	1.0147	0.9979	0.9963
11A*	0.0	1.0047	0.9939	0.9843
FCA-3-2-S	3.97	1.0146	0.9946	0.9930
Mean value		1.0284	1.0000	0.9997
Standard deviation		0.0220	0.0050	0.0076

Table 6-21. Atomic densities and geometry of FCA-V-2 assembly (JōYo mock up core)

Nuclide	Atomic density ( $10^{22}/\text{cm}^3$ )	
	Core	Blanket
Pu - 239	0.10458	
Pu - 240	0.00933	
Pu - 241	0.00107	
U - 235	0.14700	0.02891
U - 238	0.58359	3.9890
O	1.3101	
Na	0.81341	
Al	0.88295	
Cr	0.32734	0.1827
Fe	1.1950	0.6652
Ni	0.15345	0.07964

Experimental geometry (Cylinder)

Core	Radius	33.74 cm
	Height	60.96 cm
Blanket	Thickness	30.0 cm
Homogeneous spherical radius		36.51 cm

Table 6-22. Calculations of  $K_{eff}$  for FCA-V-2 assembly by using unadjusted and adjusted ABBN sets.

		$K_{eff}$	$K_{eff} (S_0)$
Experiment		1.000	
Unadjusted ABBN set	$S_0$ (DTF-IV)	1.0281	1.0281
	Diffusion	1.0185	
	$\Delta K_{eff}^{S_N}$ ( $S_N$ correction)	0.0096	
Adjusted ABBN set	Diffusion	0.9785	0.9881
	$S_N$ corrected(Diff+ $\Delta K_{eff}^{S_N}$ )	0.9881	

$$\frac{\Delta M}{M} / \frac{\Delta K}{K} = 4.81 \quad (\text{calculation})$$

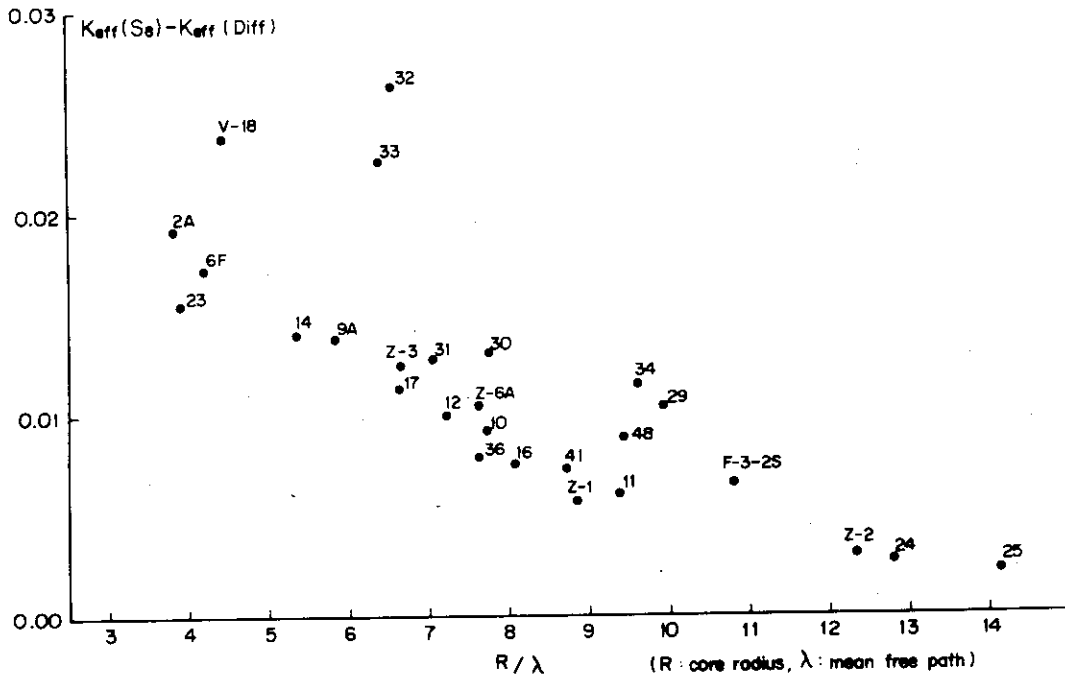


Fig. 6-1. Difference between  $S_a$  and diffusion calculations of effective multiplication factors for various assemblies

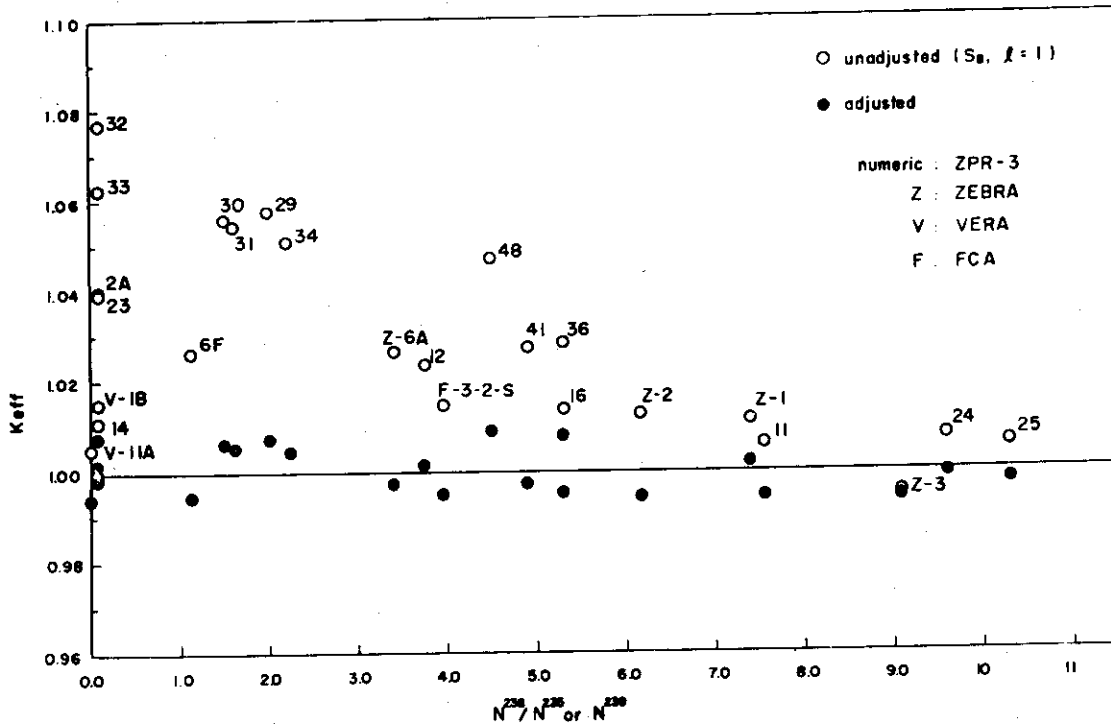


Fig. 6-2. Unadjusted and adjusted effective multiplication factors of various assemblies

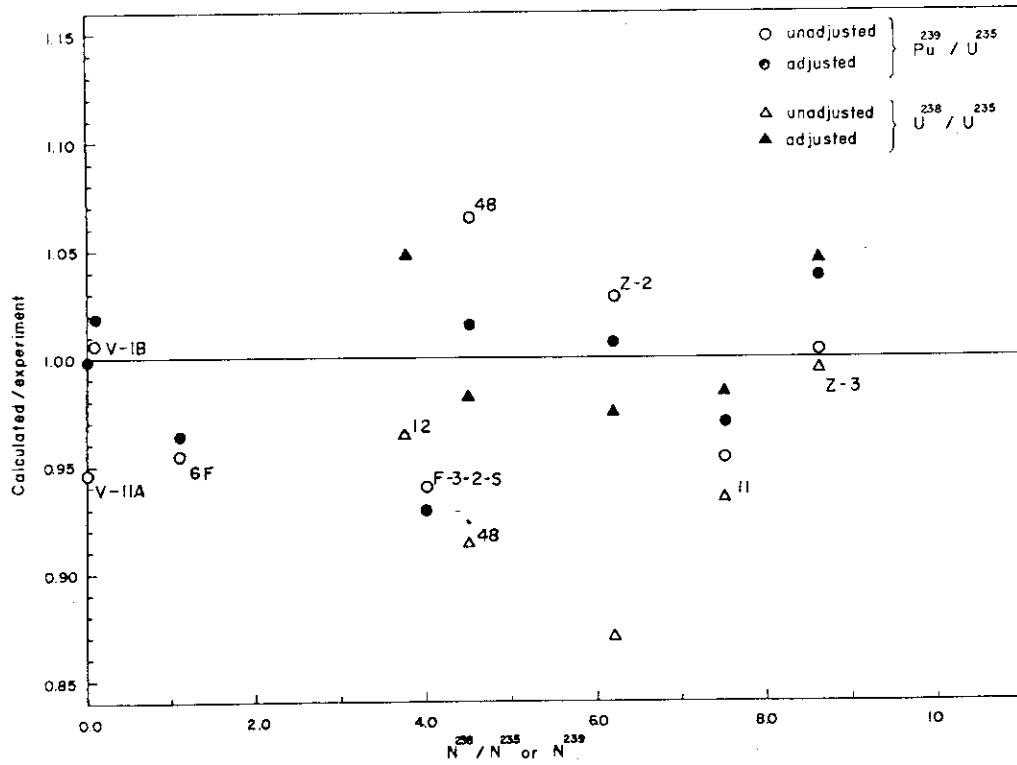


Fig. 6-3. Unadjusted and adjusted sample worth ratios of various assemblies.

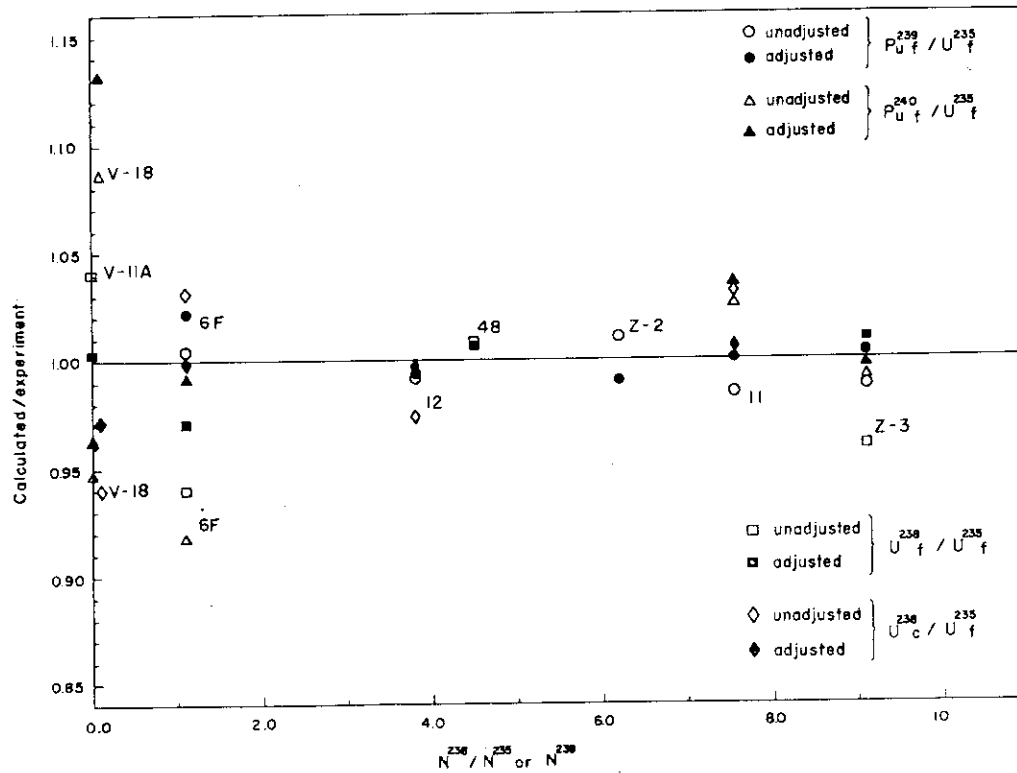


Fig. 6-4. Unadjusted and adjusted reaction rate ratios of various assemblies

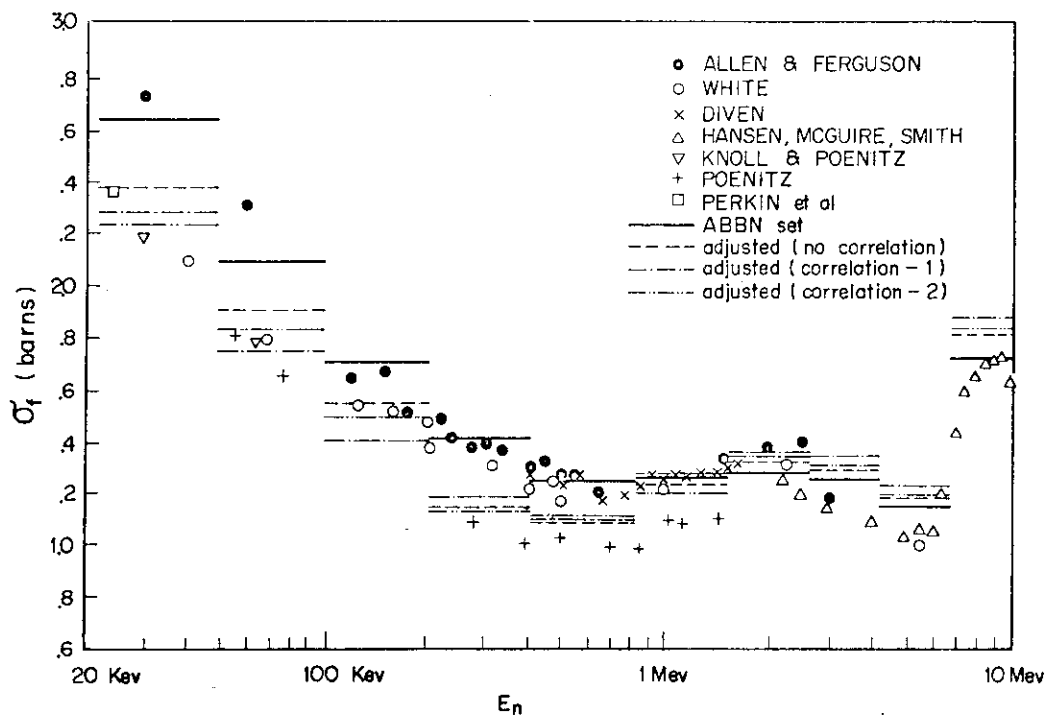


Fig. 6-5. U-235 fission cross section. (from Davey)

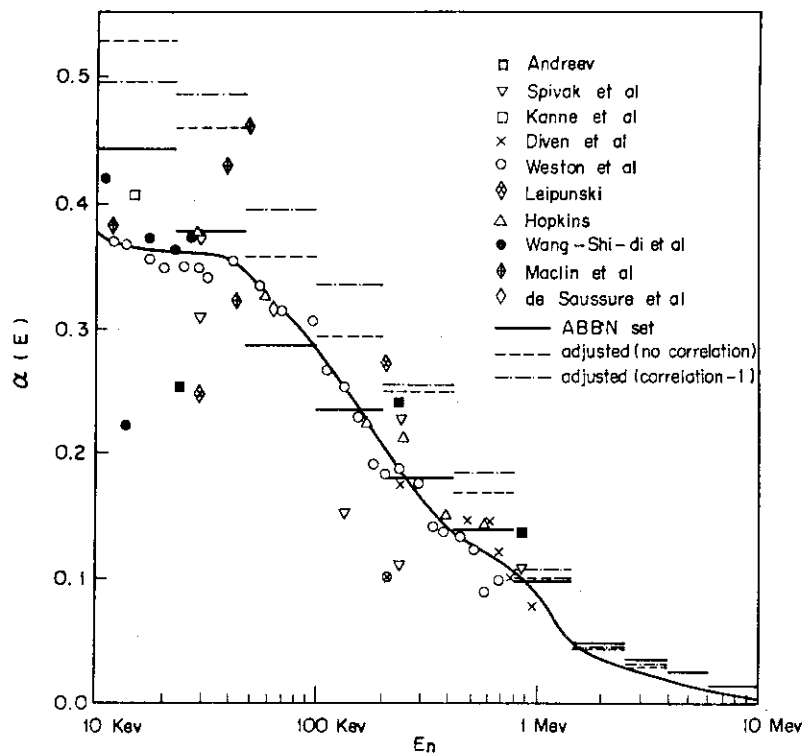


Fig. 6-6. U-235 capture to fission ratio (from KFK-120)

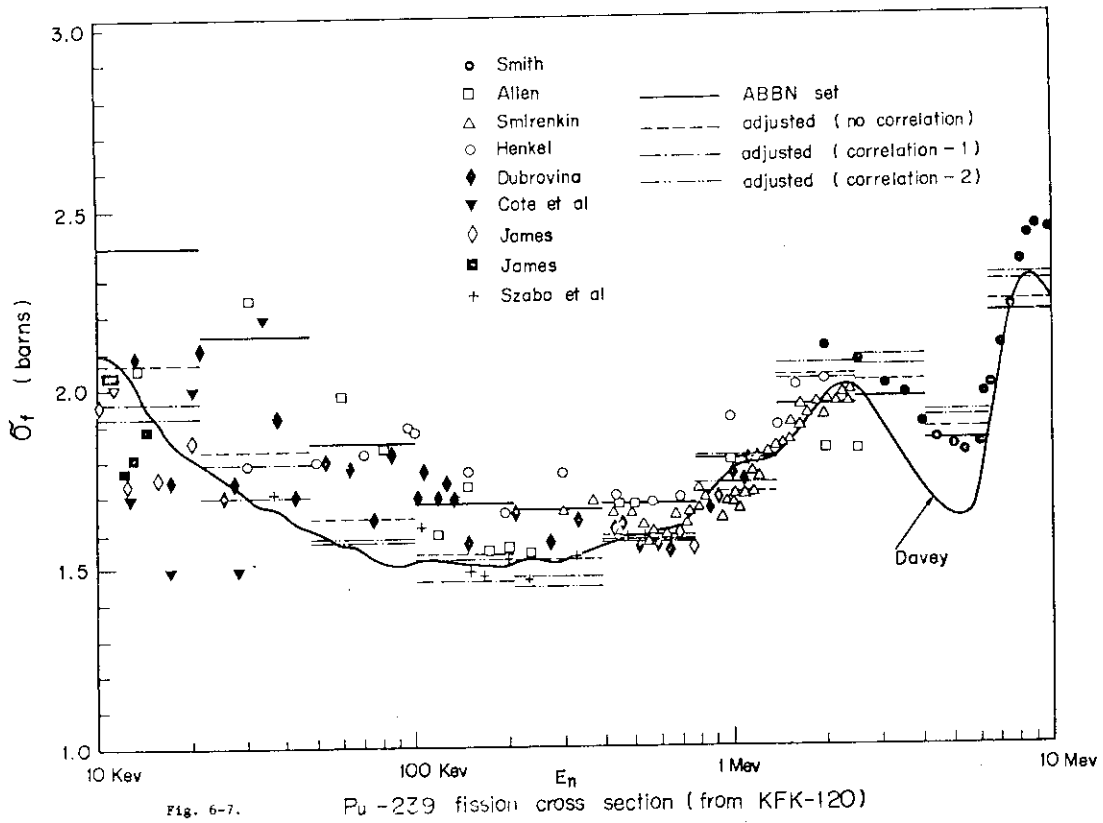


Fig. 6-7.

Pu-239 fission cross section (from KFK-120)

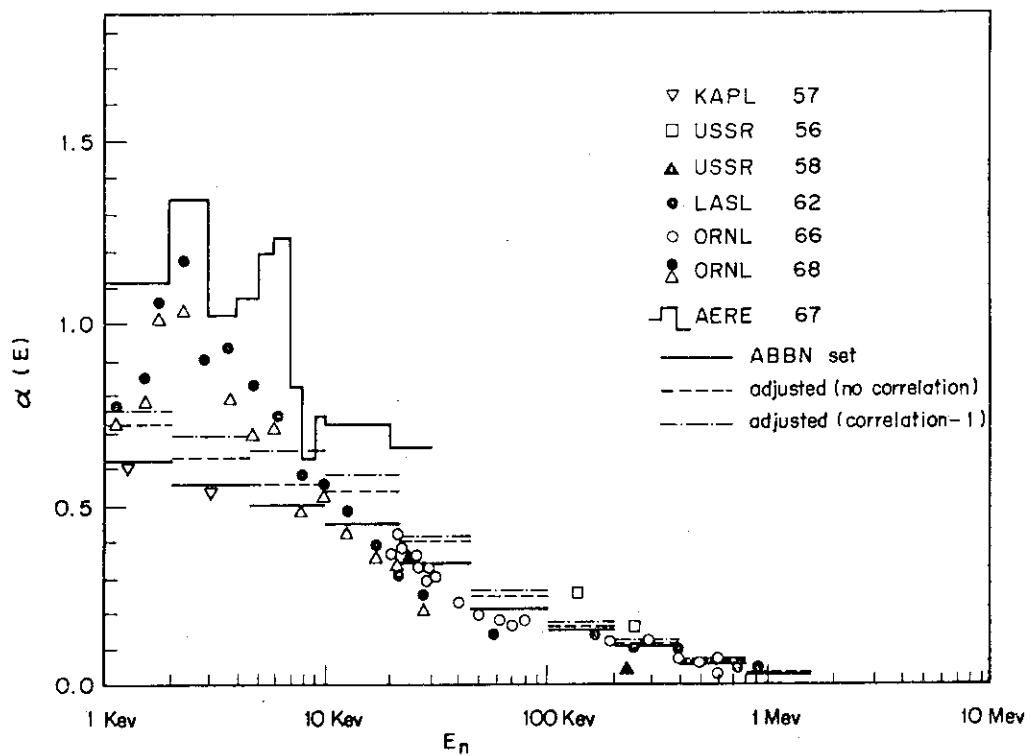


Fig. 6-8.

PU-239 capture to fission ratio (from Kikuchi)

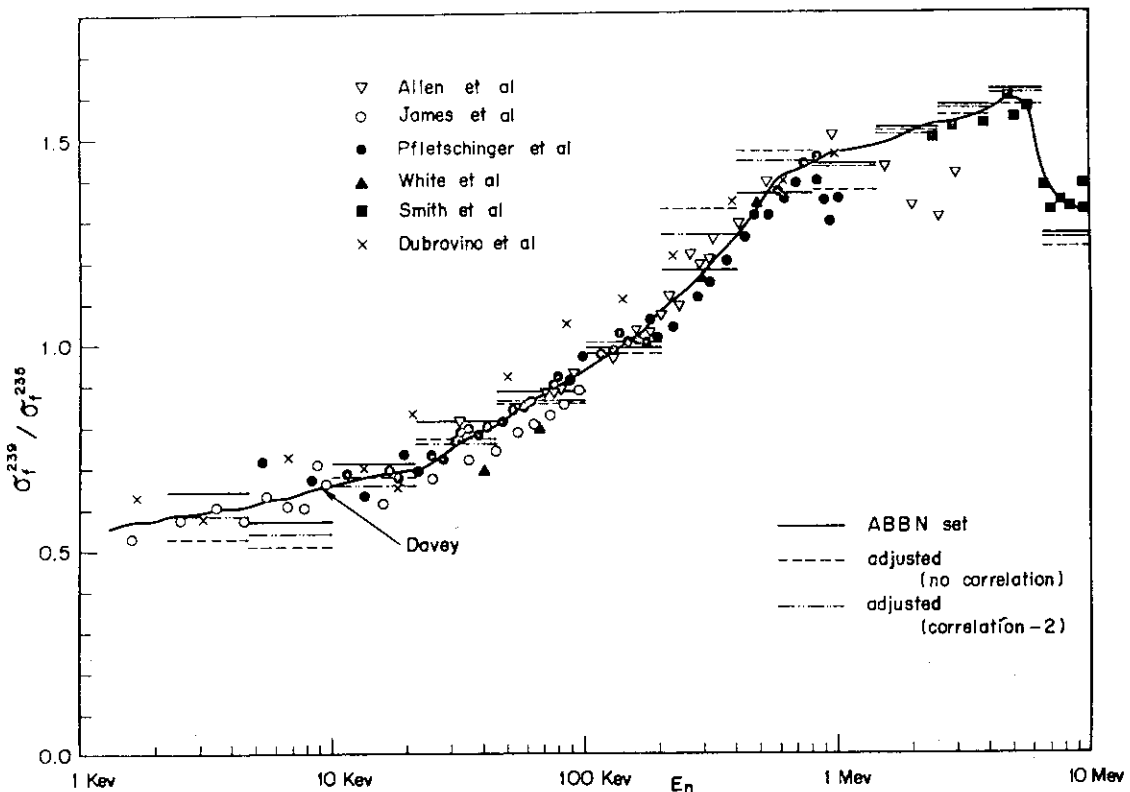


Fig. 6-9. Pu-239 fission cross section to U-235 fission cross section

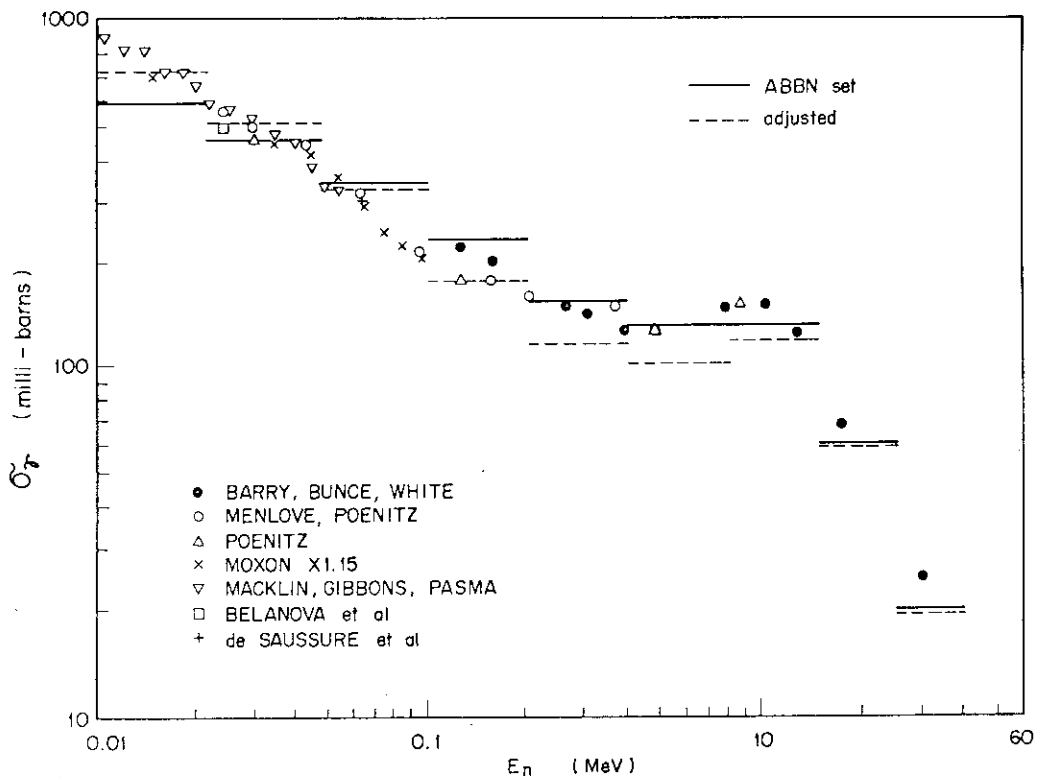


Fig. 6-10. U-238 capture cross section (from Davey)

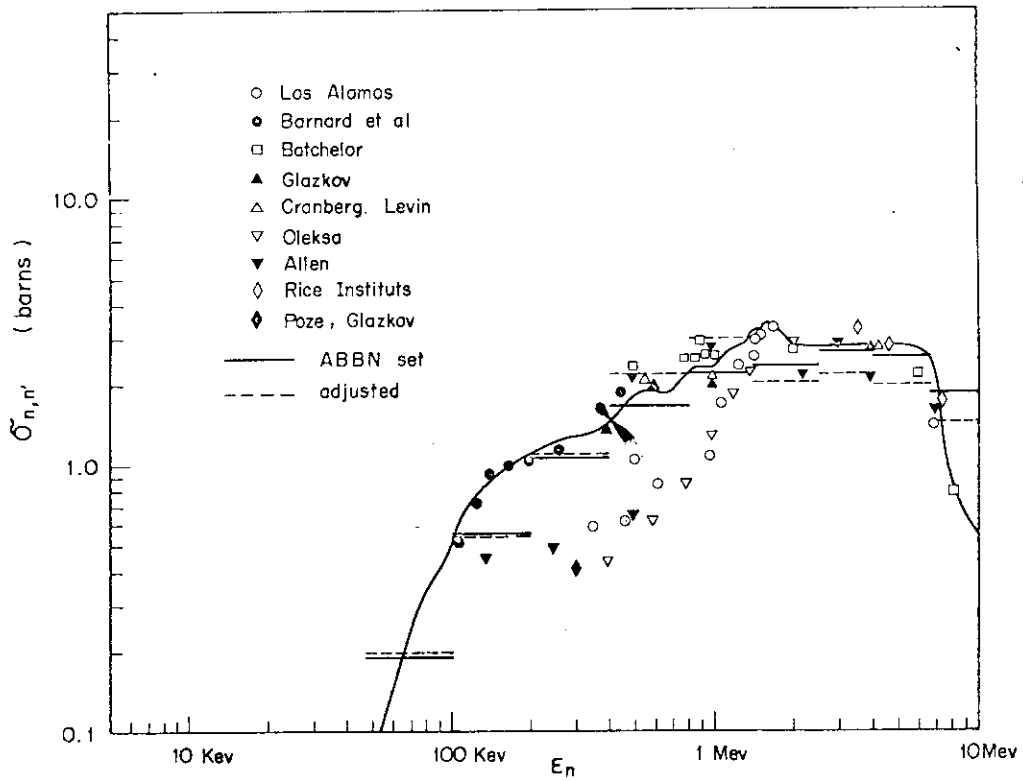


Fig. 6-11. U-238 Inelastic scattering cross section

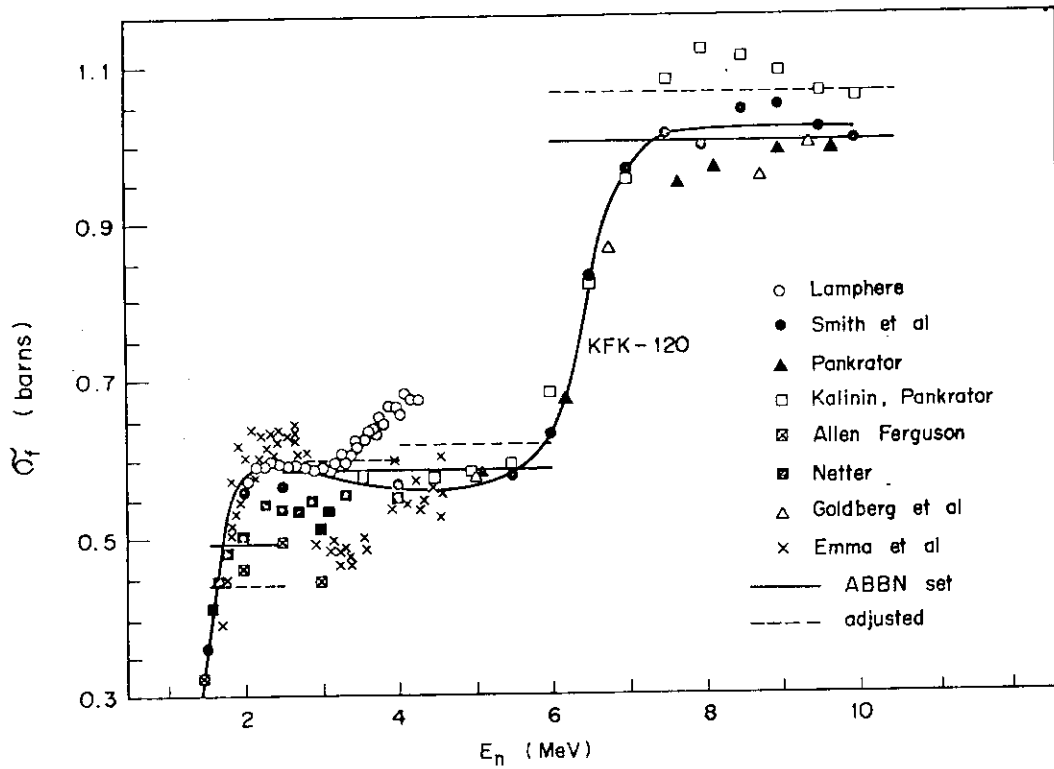


Fig. 6-12. U-238 fission cross section



## 7 結 論

積分データを用いた群定数修正について、理論的ならびに数値的検討を行ない、種々の特性およびその有効性について調べた。

群定数の修正操作は、臨界実験での積分データの測定、解析計算も含めた総合的な手法であるが、その理論的基礎は本研究により充分に確立されたと考えてよい。しかし、実際の取扱いでは、種々の問題があり、妥当でない修正結果を導く要因が存在する。この中で、積分データの解析計算が正確であること、積分データに系統誤差が含まれていないことが最も重要である。この両者は、群定数修正の理論の中ではつねにその差のかたちで入っているので、どちらが不正確であるかを区別することができないが、種々の特性を持つ積分データの実験値と解析値の総合的な比較と、試験的な群定数修正を行ない、残差の大きい積分データを修正操作から除外することにより、不確かな積分データを用いる危険性を少なくすることができる。次に、積分データの実験値と基準の群定数の平均誤差が正確に与えられていることが重要である。群定数の平均誤差については、個々の群定数の重みの相対的大きさが正確になるように選ばれていることが大切である。上記の諸量が不正確である時には、積分データおよび群定数に見かけの系統誤差が含まれているように作用するので、群定数修正全体の妥当性はカイ二乗検定により調べることができる。

次に、本論文で述べられている主な成果を要約すると次の通りである。

(1) 積分データと群定数を同等なものとして用いることにより、最小二乗法の一般論を適用して、群定数修正の基礎理論を確立した。この理論には群定数間の相関が考慮されている。この場合でも解くべき方程式の数は利用する積分データの数に等しいことを示した。群定数および積分データの修正後と修正前の平均誤差の比の二乗の平均値は  $(n/N)q$  に等しいことを示し、群定数修正の統計的性質を明らかにした。

(2) 群定数間の相関を求める一般的方法を与え、具体的数値を求めてその特性を調べた。断面積の核物理的モデルに基づく相関は隣り合う群定数間では非常に強く、相関係数は 0.90 よりも大きい。また、相対測定に基づく相関係数は、絶対測定よりも相対測定の精度がよいので、0.707 よりも大きくなる。

(3) 群定数に系統誤差が含まれているか否かを判定するために、残差の二乗和についてカイ二乗検定を行なうことを提案する。残差の二乗和は、積分データの実験値と解析値の差、積分データと群定数の平均誤差に関係しているので、修正操作全体の妥当性を調べるのにカイ二乗検定が利用できる。

(4) 群定数に系統誤差が含まれているときには、残差の二乗和は非心カイ二乗分布に従うことを理論的に確認し、群定数および積分データを正規乱数を発生させて作成し、これを数値的に実証した。

(5) 群定数に含まれる系統誤差が大きいときには、積分データの感度係数が大きいエネルギー群で、群定数がゆがめられて修正される可能性がある。断面積の測定に基づいた系統誤差のモデルを作ると、最小二乗法により、この系統誤差が除去できることを明らかにした。

(6) 積分データの感度係数を求める一般化摂動法を作用素表示で整理し、任意の物理量に対する世代別のインポートンスは、積分方程式を解く時のノイマン級数展開の各項に対応することを示し、物理的意味を明確にした。また、感度係数の具体的数値を求める積分データの特性が調べられた。

(7) Baker<sup>(50)</sup>により提出された実効増倍率に対する回帰分析の方法は、実効増倍率の推定について、群定数修正の方法と同程度の有効性を持つことが確認された。しかし、回帰係数の物理的意味は必ずしも明確でなく、さらに検討する必要がある。

(8) 群定数修正の結果、積分データは極めてよく改良され、実効増倍率、反応率の比、反応度値の比は、平均的に実験誤差の範囲内で実験値に一致するようになった。即ち、積分データの実験値と解析値の差は、修正前に実験誤差の4.180倍であり、これが修正後に0.786倍に改良された。特に実効増倍率の修正が最も著しく、修正前の系統的なずれが解消され、解析値が $1.0284 \pm 0.0220$ から $1.0000 \pm 0.0050$ に改良された。

(9) 修正された積分データの精度は修正前に較べて非常に良くなった。しかし、修正された群定数の精度は修正前に較べて必ずしも改良されるとは限らない。これは、修正すべき群定数に較べて利用した積分データの数が少ないためと、基準の群定数に系統誤差が含まれるためと思われる。しかし、この場合でも積分データの精度はつねに改良されているので、修正された群定数は全体で1つのセットとして、積分データを精度良く予測することが期待される。

(10) 群定数間の相関が群定数修正に与える影響が調べられた。積分データの感度係数の大きいエネルギー群では、相関を考慮するか否かによって修正値はほとんど変わらない。しかし相関を考慮すると全体の修正値がエネルギー群によってなめらかに変化する。また修正された群定数の精度も非常に良くなる。

(11) ABBNセットの修正結果のうち主なものを列記すると次の通りである。

- (i) 核分裂スペクトラムの中性子温度は1.29 Mevで修正によりほとんど変わらない。
- (ii)  $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積は、200Kev~800KevでWhite Poenitgの値の中間に修正され、200Kev以下で修正前の値より低く、1.4 Mev以上で高くなった。
- (iii)  $^{239}\text{Pu}$ の核分裂断面積の修正値は1.4 Mev以下でDaveyの評価値に近く、修正前の値より5~15%低い。
- (iv)  $^{239}\text{Pu}$ と $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の比は、200~400Kevで実験値よりもかなり大きくなり、また1 Mev近傍でこぶがあるように修正されたが実験的な裏づけもある。<sup>(5)</sup>
- (v)  $^{238}\text{U}$ の捕獲断面積は修正前の値に較べて100Kev~1 Mevで低く、50 Kev以下で高く修正された。
- (vi)  $^{238}\text{U}$ の非弾性散乱断面積は、修正値が400Kev~1.4 Mevで高く、1.4 Mev以上で低くなっている。後者の値はIgarashi et al.<sup>(61)</sup>の評価値に近い。
- (vii) 実効増倍率の解析値は修正前に系統的なずれを示し平均値が2.84%実験値より大きい。これは、 $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積を減少させることにより平均的に4.5%だけ $N^{238}/N^{235}$ に関係なく一様に下げられ、 $^{238}\text{U}$ の捕獲断面積の修正により1.0~4.0% $N^{238}/N^{235}$ に比例して持ち上げられ、同様に、 $^{238}\text{U}$ の非弾性散乱断面積の修正により0.5~2.0% $N^{238}/N^{235}$ に比例して持ち上げられることにより実験値のまわりに一様に分布するように修正された。

(2) 修正された群定数を用いて、実効増倍率を予測する計算が行われた。修正前の A B B N セットによる解析値は、平均値が 1.0284、標準偏差が 0.0220 である。これに対して、修正された A B B N セットによる予測値は、修正に用いた積分データと同じ特性を持つ炉系について、平均値が 0.9997、標準偏差が 0.0076 となり、群定数修正が非常に有効であることが示された。しかし修正に用いた積分データの特性と異なる炉系の予測についてはさらに検討する必要がある。

本研究により、積分データを用いた群定数修正の基礎的諸問題が解決され、この方法が群定数に含まれる不確定さを取り除くことに非常に有効であることが示された。

## 謝 辞

本論文作成にあたり、有益な助言と種々の御指導をいただいた九州大学工学部・大田正男教授に心から感謝いたします。また、九州大学工学部・三上操教授、長谷川修教授、片瀬彬教授、辻幹男教授ならびに神田幸則助教授には、種々の貴重な討論、御指導をいただいたことを深く感謝いたします。

尚、本研究を遂行するために、種々の御援助、御配慮をいただいた日本原子力研究所原子炉工学部・弘田実弥次長に深く感謝いたします。

また、本研究について、有益な討論をしていただいた日本原子力研究所高速炉物理研究室・黒井英雄氏に感謝いたします。さらに日本原子力研究所高速炉物理研究室・富岡秀剛氏（故人）、小山謹二氏にも有益な助言をしていただいたことを感謝いたします。尚、本研究を遂行するためには膨大な数値計算が必要であった。日本原子力研究所計算センター・磯田和男室長（現茨城大学）はじめ諸氏の方々に種々の御援助をしていただいたことを感謝いたします。

(2) 修正された群定数を用いて、実効増倍率を予測する計算が行われた。修正前の A B B N セットによる解析値は、平均値が 1.0284、標準偏差が 0.0220 である。これに対して、修正された A B B N セットによる予測値は、修正に用いた積分データと同じ特性を持つ炉系について、平均値が 0.9997、標準偏差が 0.0076 となり、群定数修正が非常に有効であることが示された。しかし修正に用いた積分データの特性と異なる炉系の予測についてはさらに検討する必要がある。

本研究により、積分データを用いた群定数修正の基礎的諸問題が解決され、この方法が群定数に含まれる不確定さを取り除くことに非常に有効であることが示された。

## 謝 辞

本論文作成にあたり、有益な助言と種々の御指導をいただいた九州大学工学部・大田正男教授に心から感謝いたします。また、九州大学工学部・三上操教授、長谷川修教授、片瀬彬教授、辻幹男教授ならびに神田幸則助教授には、種々の貴重な討論、御指導をいただいたことを深く感謝いたします。

尚、本研究を遂行するために、種々の御援助、御配慮をいただいた日本原子力研究所原子炉工学部・弘田実弥次長に深く感謝いたします。

また、本研究について、有益な討論をしていただいた日本原子力研究所高速炉物理研究室・黒井英雄氏に感謝いたします。さらに日本原子力研究所高速炉物理研究室・富岡秀剛氏（故人）、小山謹二氏にも有益な助言をしていただいたことを感謝いたします。尚、本研究を遂行するためには膨大な数値計算が必要であった。日本原子力研究所計算センター・磯田和男室長（現茨城大学）はじめ諸氏の方々に種々の御援助をしていただいたことを感謝いたします。

附録 I 誤差方程式の重みと測定値の持つ情報量

群定数修正で基本になる誤差方程式は、第2章の(2-7)および(2-9)式で与えられる。

$$f_i [\sigma_1, \dots, \sigma_n] = \hat{m}_i - \varepsilon_i \quad (1)$$

( i = 1, \dots, m )

$$\sigma_j = \hat{\sigma}_j - \varepsilon_j \quad (2)$$

ここで、 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  は群定数の真の値、 $\hat{m}_i$  は積分量の測定値、 $\hat{\sigma}_j$  は基準の群定数で、測定値と考へて取扱う。(1)、(2)式は積分データおよび微分データの誤差方程式であり、その物理的内容はまったく異なる。しかし、(2)式の左辺の $\sigma_j$ は、(1)式の左辺 $f_i [\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ の特別の場合であると考えることが出来る。しをがって、左辺の真の値を

$$g = \begin{bmatrix} f_1 [\sigma_1, \dots, \sigma_n] \\ \vdots \\ f_m [\sigma_1, \dots, \sigma_n] \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

で表わし、右辺の測定値を

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \vdots \\ \hat{m}_m \\ \hat{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

で表わせば、(1)、(2)式はその要素を用いて一般的に次の1つの式で表わすことが出来る。

$$g_i [\sigma_1, \dots, \sigma_n] = \hat{M}_i - \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, m+n) \quad (5)$$

これから、(1)、(2)式の測定値の持つ物理的内容は本質的に異なるが、数学的取扱いにおいては本質的な違いはないと考えることが出来る。

次に、(1)および(2)式の重み、或は(5)式の重みについて考える。最初に、各々の測定値がいかんして定められたかについて考える。即ち、(5)式の構造について考える。

測定値 $\hat{M}_i$ は1回の測定によって得られた生の測定値ではなく、何回か測定され値から定められた平均値である。測定回数を $n_i$ とし、測定値を $\hat{M}_{i,1}, \hat{M}_{i,2}, \dots, \hat{M}_{i,n_i}$ とすると、(5)式の $M_i$ は

$$\hat{M}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \hat{M}_{i,j} \quad (6)$$

で定められたものである。但し、(2)式の $\hat{\sigma}_j$ の値も、第2章の説明、或は第3章の(3-20)式

から考えれば、上の(6)式で一般的に表わされることは明らかである。この時、各々の測定について、

$$\text{真値} = \text{測定値} - \text{誤差} \quad (7)$$

の関係が成り立つ。真の値は  $g_i [\sigma_1, \dots, \sigma_n]$  に等しいので、

$$g_i [\sigma_1, \dots, \sigma_n] = \hat{M}_{i,1} - \varepsilon_{i,1} \quad (8)$$

$$g_i [\sigma_1, \dots, \sigma_n] = \hat{M}_{i,1} - \varepsilon_{i,1} \quad (9)$$

⋮

$$g_i [\sigma_1, \dots, \sigma_n] = \hat{M}_{i,n_i} - \varepsilon_{i,n_i} \quad (10)$$

が各々の測定にたいして成り立っている。これから、(5)式は(8)~(10)式を加え、 $n_i$  で割算することによって求めたものになる。この時、(5)式の  $\varepsilon_i$  は

$$\varepsilon_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{i,j} \quad (11)$$

に等しい。各々の測定の誤差  $\varepsilon_{i,j}$  の生起確率は、母集団の標準偏差を  $\sigma_{o,i}$  とすると、次の正規分布に従うと想定される。

$$f(\varepsilon_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{o,i}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{i,j}^2}{\sigma_{o,i}^2}} \quad (12)$$

これから  $\varepsilon_i$  は確立分布

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta M_i} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{\Delta M_i}\right)^2} \quad (13)$$

に従う。上式で

$$\Delta M_i = \frac{\sigma_{o,i}}{\sqrt{n_i}} \quad (14)$$

となる。実際に我々が実験情報として与えられるのは、測定値から定められた値（一般に測定値と呼ぶ） $\hat{M}_i$  および平均誤差  $\Delta \hat{M}_i$  である。この時平均誤差  $\Delta \hat{M}_i$  は、実験を行なった人によって計算されているが、一般的には生の測定値  $M_{i,j}$  および測定回数  $n_i$  を用いて、

$$S = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (M_{i,j} - \hat{M}_i)^2} \quad (15)$$

で計算された値  $S$  を(14)式の  $\sigma_{o,i}$  の代りに用いて、

$$\Delta \hat{M}_i = \frac{S}{\sqrt{n_i}} \quad (16)$$

で与えられる。

(13)式で  $\Delta M_i$  の代りに  $\Delta \hat{M}_i$  を用いると厳密には  $\varepsilon_i$  は Student 分布、(t 分布とも呼ばれる)に従う。この場合には数学的取扱いが複雑になるので、ここでは Gauss 分布(正規分布)に従うと近似する。

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta \hat{M}_i} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i^2}{(\Delta \hat{M}_i)^2}} \quad (17)$$

これから(5)式を用いて、 $\hat{M}_i$  は

$$f(\hat{M}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta \hat{M}_i} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\hat{M}_i - g_i[\sigma])^2}{(\Delta \hat{M}_i)^2}} \quad (18)$$

なる正規分布に従うと近似出来る。

この近似が成り立つとすれば、群定数の真の値が  $(\sigma_1, \sigma_1 + d\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2, \sigma_2 + d\sigma_2)$ ,  $\dots$ ,  $(\sigma_n, \sigma_n + d\sigma_n)$  の範囲内にある確率は、Bayes の定理により

$$\begin{aligned} & A e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} \frac{(\hat{M}_i - g_i[\sigma])^2}{(\Delta \hat{M}_i)^2}} d\sigma_1, \dots, d\sigma_n \\ &= A e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\varepsilon_i^2}{(\Delta \hat{M}_i)^2}} d\sigma_1, \dots, d\sigma_n \end{aligned} \quad (19)$$

で与えられる。最も確らしい  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  の値は

$$Q = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{(\hat{M}_i - g_i[\sigma])^2}{(\Delta \hat{M}_i)^2} = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\varepsilon_i^2}{(\Delta \hat{M}_i)^2} \quad (20)$$

を最小にすることによって求められる。したがって、(5)式の重みとして

$$P_i = \frac{\sigma^2}{(\Delta \hat{M}_i)^2} \quad (21)$$

を用いることが出来る。但し、 $\sigma^2$  は任意の比例定数であり、通常は1に等しくする。

上の議論では、測定値  $\hat{M}_i$  とその平均誤差  $\Delta \hat{M}_i$  が情報として与えられる場合について考察した。この時には、 $\varepsilon_i$  は正規分布に従うと近似した。もし情報として、測定値  $\hat{M}_i$  と測定回数  $n_i$  が与えられている場合には、 $\varepsilon_i$  の従う分布は正確に(13)式で与えられると考えて議論することが出来る。この場合、(5)式の重みは(14)式から

$$P_i \propto \frac{1}{\Delta M_i^2} \propto \frac{n_i}{\sigma_{oi}^2} \quad (22)$$

に比例している。ここで  $\sigma_{oi}^2$  は不明なので、母集団母分散はすべてのデータ  $\hat{M}_i$  に対して等しいと仮定すれば、(5)式の重みおよび  $\varepsilon_i$  の分散はそれぞれ

$$P_i = n_i, \quad \sigma_i^2 = \frac{\sigma_o^2}{P_i} \quad (23)$$

で与えられる。上式で  $\sigma_o^2$  は単位重みの分散であり未知量である。これは通常最小二乗法の処理によって定められている。(23)

以上のことから、いずれの場合にも確率的な意味では、近似あるいは仮定が行なわれている。しかし、測定量の情報としては、前者の方が多いと考えることが出来る。即ち(18)式から明らかなように、前者の場合には重みの中にデータの母集団の母分散についての情報が考

慮されている。一方、後者の場合には測定回数の違いのみしか考慮されていない。

次に、(1)式で左辺を線型近似を行なった場合について考える。この場合には(1)式は

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\sigma_j - \hat{\sigma}_j) = \hat{m}_i - f_i[\hat{\sigma}] - \varepsilon_i \quad (24)$$

となる。したがって左辺および右辺には、測定値 $\hat{m}_i$ および $\hat{\sigma}_j$ が含まれていることになる。しかし、 $\varepsilon_i$ はあくまでも $\hat{m}_i$ の誤差なので、重み $P_i$ は(21)式で与えられるものに等しい。一般に

$$u_i = h_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \quad (25)$$

なる表式で与えられる測定値 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ を含んだ $u_i$ の重みは、二乗平均誤差の逆数に比例するとして、<sup>(24)</sup>

$$P_{ui} = \frac{1}{\sum_{j,k}^{n,n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial \hat{x}_j}\right) \left(\frac{\partial h_i}{\partial \hat{x}_k}\right) \frac{\rho_{j,k}}{\sqrt{P_j} \sqrt{P_k}}} \quad (26)$$

で与えられる。但し、測定値 $\hat{x}_j$ の重みは $P_j$ であり、 $\rho_{j,k}$ は測定値 $\hat{x}_j, \hat{x}_k$ の間の相関係数である。ここで

$$u_i = \hat{m}_i - f_i[\hat{\sigma}] - \sum_{j=1}^n a_{ij} (\sigma_j - \hat{\sigma}_j) \quad (27)$$

とおくと、

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial \hat{m}_j}\right) = \delta_{ij} \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial \hat{\sigma}_j}\right) = 0 \quad (29)$$

なので、

$$P_{ui} = P_{mi} \quad (30)$$

となり、 $u_i = \varepsilon_i$ なので $\varepsilon_i$ の重みは測定値 $\hat{m}_i$ の重みに等しく、測定値 $\hat{\sigma}_j$ が含まれていることに関係しない。

以上により、(1)および(2)式は積分データと微分データの誤差方程式を表わすが、重みの取り方には本質的な違いはない。但し群定数を推定する時に持つ情報量は本質的に異なることは明らかである。次にこれを定量的に調べる。ここでFisherによって与えられた情報量を用いる。<sup>(25)</sup>

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の頻度分布が未知のパラメータ $\theta$ を含む密度関数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ によって表わされる時、 $L$ を $\theta$ の関数と考えれば、これが尤度関数である。この時

$$I = E \left( \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 = -E \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L \right) \quad (29)$$

を、 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ によって与えられる $\theta$ に関する情報量と定義されている。<sup>(25)</sup> (18)式により一般に測定値 $\hat{M}_i$ の尤度関数は次式で与えられる。

$$L(\hat{M}_i, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = A e^{-\frac{1}{2} \frac{(\hat{M}_i - g_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^2}{\Delta \hat{M}_i^2}} \quad (30)$$



従って、 $\hat{M}_i$  によって与えられる  $\sigma_j$  に関する情報量は

$$\begin{aligned} I(\hat{M}_i | \sigma_j) &= -E \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma_j^2} \log L \right) \\ &= \frac{1}{\Delta \hat{M}_i^2} \left( \frac{\partial g_i}{\partial \sigma_j} \right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

で与えられる。これから、積分データ  $\hat{m}_i$  によって

$$I(\hat{m}_i | \sigma_j) = \frac{a_{i,j}^2}{\Delta \hat{m}_i^2} \quad (32)$$

の情報が  $\sigma_j$  について与えられる。上式から積分データの精度が良く、感度係数が大きいとき情報量は多くなる。一方微分データからの情報は

$$I(\hat{\sigma}_i | \sigma_j) = \frac{\delta_{ij}}{\Delta \hat{\sigma}_i^2} \quad (33)$$

となり、二乗平均誤差の逆数のみに関係する。一般に、積分データの精度は微分データの精度よりも良いが、感度係数は1よりはるかに小さいので、1つの群定数  $\sigma_j$  については積分データの情報ははるかに少ない。しかし積分データは1個で多くの群定数についての情報を含んでいる。一方微分データは相関がないとすれば、1個で1個の  $\sigma_j$  についての情報しか含まない。従って、

$$I(m_i) = \sum_{j=1}^n I(\hat{m}_i | \sigma_j) = \frac{1}{\Delta \hat{m}_i^2} \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \quad (34)$$

と(33)式の値を比較すべきである。具体的数値により検討すれば、非常に興味ある結果が得られると思われる。この情報量的取扱いと最小二乗法の処理とから個々の積分データの有効性を示す指標を与えることが出来ると思われる。

附録Ⅱ (2-55)式の導出と(2-58)式の性質

[1] (2-55)式の導出。

行列Cは(n, n)行列で

$$C = A R^{-1} A \tag{1}$$

で与えられる。このCの逆行列C<sup>-1</sup>は修正された群定数の分散行列となる。これが(m, m)行列Bを用いて次式で表わされる。但しn > mである。

$$C^{-1} = \rho - \rho A^T B^{-1} A \rho \tag{2}$$

ここで

$$B = E + A \rho A^T \tag{3}$$

である。

証明

(1)式でAは

$$A = \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \tag{4}$$

で表わされるので、((2-29)式), Cは次のように分解される。

$$C = \rho^1 + A^T A \tag{5}$$

両辺に式からρを掛けて、

$$C = E + \rho A^T A \tag{6}$$

となる。上式に右からC<sup>-1</sup>を掛けて

$$C^{-1} = \rho - \rho A^T A C^{-1} \tag{7}$$

となる。(8)式の右からAを掛けると、

$$B A = A + A \rho A^T A \tag{8}$$

同様に(6)式の左からAを掛けると、

$$A \rho C = A + A \rho A^T A \tag{9}$$

となる。(8), (9)式の右辺は同じ値なので、

$$A \rho C = B A \tag{10}$$

が得られる。左からB<sup>-1</sup>を、右からC<sup>-1</sup>を掛けると次式が得られる。

$$B^{-1} A \rho = A C^{-1} \tag{11}$$

上式を(7)式の右辺第2項に代入して

$$C^{-1} = \rho - \rho A^T B^{-1} A \rho \tag{12}$$

が得られる。(証明終り)

[2]. 修正された群定数の平均誤差は

$$\Delta \hat{\sigma}_i = \Delta \hat{\sigma}_i (1 - r_{ii})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{V^T H^{-1} V}{N - n}} \tag{1}$$

で計算される。ここで

$$r_{ii} = \sum_{j, k, \ell, m} \rho_{ji} A_{ki} B_{k\ell}^{-1} A_{\ell m} \rho_{mi} \tag{2}$$

である。この  $r_{ii}$  は

$$1 > r_{ii} \geq 0 \tag{3}$$

を満たす。

1)  $r_{ii} \geq 0$  の証明

$r_{ii}$  は行列

$$H = \rho A^T B^{-1} A \rho \tag{4}$$

の  $(i, i)$  要素である。 $B^{-1}$  は

$$B = E + A \rho A^T \tag{5}$$

の逆行列である。 $\rho$  は群定数間の相関係数の行列である。今、

$$M = \begin{bmatrix} A^T \\ E \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \tag{6}$$

なる行列を考えると

$$B = M^T R M \tag{7}$$

で表わされる。但し、 $R$  は相関行列である。相関行列は一般に対称行列であり正値<sup>(23)</sup>である。

従って、適当な直交行列を選んで対角行列

$$D = F R F^T \tag{8}$$

を作ると対角要素はすべて正値である。これを用いると

$$\begin{aligned} B &= M^T F^T F R F^T F M \\ &= M^T F^T D F M \\ &= M^T F^T D^{1/2} \cdot D^{1/2} F M \\ &= U^T \cdot Q \quad (Q = D^{1/2} F M) \end{aligned} \tag{9}$$

と分解できる。ここで「任意の行列  $A$  から作った  $A^T A$  は非負である」と言う数学の定理を用いると行列  $B$  は非負であることが解る。<sup>(27)</sup> 一方  $B$  は逆行列が存在するので正則行列である。従って、

$$\begin{aligned} B^{-1} &= F^T F A^T R A F^T F \\ &= F^T D F = F^T D^{1/2} \cdot D^{1/2} F \\ &= Q^T \cdot Q \end{aligned} \tag{10}$$

に分解すると  $Q$  も又正則行列である。これから

$$\begin{aligned} B^{-1} &= Q^{-1} (Q^{-1})^T \\ &= S^T \cdot S \quad (S = (Q^{-1})^T) \end{aligned} \tag{11}$$

となり、 $S$  は正則行列なので  $B^{-1}$  は正値である。従って、

$$\begin{aligned} r_{ii} &= \rho^T A^T S^T S A \rho \\ &= G^T \cdot G \end{aligned} \tag{12}$$

となり、 $r_{ii}$  は非負である。これからその対角要素は非負となる。即ち

$$r_{ii} \geq 0 \tag{13}$$

ここで等号が成り立つのは積分データがない場合だけである。

ii)  $1 > r_{ii}$  の証明

$$C^{-1} = P - P A^T B^{-1} A P \quad (14)$$

の対角要素が  $1 - r_{ii}$  である。 $C^{-1}$  は分散行列なので正值である。したがって対角要素も正值である。

$$1 - r_{ii} > 0$$

即ち

$$1 > r_{ii} \quad (15)$$

となる。

## 附録Ⅲ ABBNセットの修正結果の数表

ABBNセットの修正結果のうち、主な核種の主な反応については、第6章で図で示したが、ここでは数表として与える。相関を考慮しない場合およびType-1の相関を考慮した場合の結果を比較のために示す。尚、以下の結果は、ABBNセットを15群に縮約し修正したものであり、ABBNセットのエネルギー群と縮約されたエネルギー群との対応はTable 6-12に示してある。

Table A-1 Adjusted cross sections and its percent change  
nuclide :  $U^{235}$  reaction type : fission

Energy group	ABBN set		Adjusted cross sections		
	Collapsed $\hat{\sigma}_f$ (barns)	No correlation		Correlation (Type-1)	
		$\tilde{\sigma}_f$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_f - \hat{\sigma}_f) / \hat{\sigma}_f (%)$	$\tilde{\sigma}_f$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_f - \hat{\sigma}_f) / \hat{\sigma}_f (%)$
1	1.24	1.29	3.63	1.34	7.75
2	1.25	1.30	3.99	1.35	7.72
3	1.28	1.33	4.23	1.36	6.22
4	1.25	1.24	- 0.67	1.26	1.08
5	1.23	1.09	- 11.6	1.10	-10.8
6	1.41	1.15	- 18.5	1.18	-16.4
7	1.70	1.56	- 7.99	1.41	-17.3
8	2.10	1.91	- 8.90	1.76	-16.1
9	2.65	2.38	- 10.3	2.30	-13.3
10	3.40	3.05	- 10.3	3.13	- 7.98
11	4.40	4.54	3.22	4.31	- 1.97
12	6.35	6.99	10.1	6.55	3.12
13	13.5	15.5	14.4	15.4	14.4
14	36.8	38.6	5.02	38.6	5.02
15	62.2	62.2	0.0	62.2	0.0

Table A-2 Adjusted cross sections and its percent change  
nuclide :  $U^{235}$  , reaction type : capture

Energy group	ABBN set		Adjusted cross sections		
	Collapsed $\hat{\sigma}_c$ (barns)	No correlation		Correlation (Type-1)	
		$\tilde{\sigma}_c$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_c - \hat{\sigma}_c) / \hat{\sigma}_c (%)$	$\tilde{\sigma}_c$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_c - \hat{\sigma}_c) / \hat{\sigma}_c (%)$
1	0.028	0.029	0.40	0.030	4.61
2	0.04	0.040	0.91	0.043	7.38
3	0.06	0.061	1.83	0.065	8.38
4	0.12	0.125	4.14	0.135	12.5
5	0.17	0.19	9.36	0.20	19.1
6	0.25	0.29	15.0	0.30	19.9
7	0.40	0.46	15.2	0.48	18.9
8	0.60	0.69	14.5	0.70	16.4
9	1.00	1.10	10.1	1.12	11.8
10	1.50	1.62	8.05	1.56	3.81
11	2.10	2.03	- 3.10	2.01	- 4.33
12	3.28	2.96	- 9.61	2.92	- 10.7
13	7.90	6.86	- 13.1	6.79	- 14.1
14	30.1	28.6	4.95	28.6	5.16
15	21.8	21.8	0.02	21.8	0.02

Table A-3 Adjusted cross sections and its percent change  
nuclide : Pu<sup>239</sup> reaction type : fission

Energy group	ABBN set		Adjusted cross sections		
	Collapsed $\hat{\sigma}_f$ (barns)	No correlation		Correlation (Type-1)	
		$\tilde{\sigma}_f$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_f - \hat{\sigma}_f) / \hat{\sigma}_f$ (%)	$\tilde{\sigma}_f$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_f - \hat{\sigma}_f) / \hat{\sigma}_f$ (%)
1	1.90	1.93	1.42	1.97	3.65
2	1.97	2.02	2.51	2.06	4.34
3	1.95	2.03	3.90	2.02	3.71
4	1.80	1.70	-5.49	1.82	0.88
5	1.68	1.59	-5.18	1.57	-6.40
6	1.66	1.52	-8.13	1.47	-11.5
7	1.68	1.53	-9.04	1.46	-13.3
8	1.85	1.64	-11.5	1.58	-14.8
9	2.15	1.83	-15.1	1.79	-16.7
10	2.40	2.07	-13.9	1.96	-18.5
11	2.50	2.30	-7.86	2.04	-18.5
12	3.80	3.47	-8.70	3.16	-16.8
13	10.3	9.37	-9.02	9.77	-5.18
14	53.0	52.1	-1.78	52.7	-0.48
15	371	371	0.0	371	0.0

Table A-4 Adjusted cross sections and its percent change  
nuclide : Pu<sup>239</sup>, reaction type : capture

Energy groups	ABBN set		Adjusted cross sections		
	Collapsed $\hat{\sigma}_c$ (barns)	No correlation		Correlation (Type-1)	
		$\tilde{\sigma}_c$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_c - \hat{\sigma}_c) / \hat{\sigma}_c$ (%)	$\tilde{\sigma}_c$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_c - \hat{\sigma}_c) / \hat{\sigma}_c$ (%)
1	0.019	0.019	0.04	0.019	0.85
2	0.03	0.030	0.10	0.030	1.20
3	0.04	0.040	0.24	0.041	1.35
4	0.06	0.060	0.09	0.061	2.09
5	0.11	0.110	0.16	0.114	3.54
6	0.17	0.170	-0.03	0.18	4.11
7	0.24	0.241	0.38	0.25	4.22
8	0.40	0.41	1.48	0.42	4.40
9	0.71	0.73	3.40	0.74	4.57
10	1.08	1.12	3.51	1.13	4.52
11	1.25	1.27	1.94	1.30	3.98
12	2.25	2.29	1.83	2.32	3.15
13	7.05	7.11	0.92	6.91	-1.96
14	40.8	40.5	-0.58	40.1	-1.68
15	264	264	-0.01	264	-0.01

Table A-5 Adjusted cross sections and its percent change  
nuclide : U<sup>238</sup>, reaction type : capture

Energy groups	ABBN set		Adjusted cross sections		
	Collapsed $\hat{\sigma}_c$ (barns)	No correlation		Correlation (Type-1) *	
		$\tilde{\sigma}_c$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_c - \hat{\sigma}_c) / \hat{\sigma}_c (%)$	$\tilde{\sigma}_c$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_c - \hat{\sigma}_c) / \hat{\sigma}_c (%)$
1	0.008	0.008	-0.14	0.008	-0.09
2	0.02	0.020	-0.40	0.02	-0.14
3	0.06	0.059	-1.38	0.06	-0.03
4	0.13	0.12	-7.55	0.12	-4.70
5	0.13	0.10	-22.2	0.10	-21.7
6	0.15	0.11	-23.5	0.11	-25.9
7	0.22	0.18	18.1	0.17	-22.1
8	0.35	0.33	-4.67	0.31	-10.3
9	0.46	0.53	14.5	0.50	9.58
10	0.60	0.73	20.9	0.69	15.8
11	0.78	0.86	10.2	0.84	7.58
12	1.65	1.81	9.87	1.75	5.90
13	4.05	4.26	5.18	4.16	2.65
14	43.0	43.2	0.55	42.9	-0.26
15	34.7	34.7	-0.01	34.7	-0.02

\* Correlation of U<sup>238</sup> capture is not taken into but correlation of U<sup>235</sup> and Pu<sup>239</sup> cross sections affects the adjustment of U<sup>238</sup> capture cross sections

Table A-6 Adjusted cross sections and its percent change  
nuclide : U<sup>238</sup>, reaction type : inelastic scattering

Energy group	ABBN set		Adjusted cross sections		
	Collapsed $\hat{\sigma}_{in}$ (barns)	No correlation		Correlation (Type-1) *	
		$\tilde{\sigma}_{in}$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_{in} - \hat{\sigma}_{in}) / \hat{\sigma}_{in} (%)$	$\tilde{\sigma}_{in}$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_{in} - \hat{\sigma}_{in}) / \hat{\sigma}_{in} (%)$
1	2.40	1.88	-21.5	1.89	-21.4
2	2.60	2.15	-17.3	2.14	-17.5
3	2.25	2.01	-10.5	2.03	-9.86
4	2.15	2.93	36.5	2.98	38.6
5	1.65	2.16	31.1	2.22	34.7
6	1.05	1.09	3.54	1.08	2.50
7	0.55	0.55	-0.53	0.54	-2.02
8	0.19	0.19	2.17	0.19	1.78
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

\* The Correlation of U<sup>238</sup> inelastic cross section is not taken into but correlations of U<sup>235</sup> and Pu<sup>239</sup> cross sections affect the adjustment of U<sup>238</sup> inelastic cross sections



Table A-7 Adjusted cross sections and its percent change  
 nuclide :  $U^{238}$ , reaction type : fission

Energy group	ABBN set Collapsed $\tilde{\sigma}_f$ (barns)	Adjusted cross sections			
		No correlation		Correlation (Type-1) *	
		$\tilde{\sigma}_f$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_f - \hat{\sigma}_f) / \hat{\sigma}_f$ (%)	$\tilde{\sigma}_f$ (barns)	$(\tilde{\sigma}_f - \hat{\sigma}_f) / \hat{\sigma}_f$ (%)
1	0.64	0.69	6.58	0.69	6.69
2	0.58	0.60	3.09	0.60	2.91
3	0.49	0.44	-9.49	0.44	-10.1
4	0.02	0.02	-0.24	0.02	-0.15
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

\* The correlation of  $U^{238}$  fission cross section is not taken into but the correlations of  $U^{235}$  and  $Pu^{239}$  slightly affect the adjustment of  $U^{238}$  fission cross sections

## 参考文献

- (1) S. Yiftah, D. Okrent, P. A. Moldauer, Fast Neutron Cross Section, Pergamon Press, London (1960).
- (2) G. E. Hansen, W. H. Roach, "Six and Sixteen Group Cross Sections for Fast and Intermediate Critical Assemblies," LAMS-2543 (1961).
- (3) L. P. Abagyan, N. Bazazyants, I. I. Bondarenks, M. N. Nikolaev, Group Constants for the Calculation of Nuclear Reactors, Consultants Bureau, Inc., New York (1964).
- (4) P. Greebler, B. A. Hutchins, R. B. Linford, "Sensitivity of Fast Reactor Economics to Uncertainties in Nuclear Data," Nuclear Applications, 4, 297 (1968).
- (5) W. P. Poenitz, "Recent Experimental Data for Heavy Nuclei," IAEA-CN-26/111 (1970).
- (6) W. G. Davey, "Intercomparison of Calculations for a Dilute Plutonium-fueled Fast Critical Assembly (ZPR-3 Assembly 48)," ANL-7320, 57 (1966).
- (7) T. P. Moorhead, "The Effects of Errors in Cross Section Data on Calculations for a Large Dilute Fast Reactor," SM-18/15 (1961).
- (8) P. Greebler, A. B. Hutchins, "User Requirements for Cross Sections in the Energy Range from 100 ev to 100 Kev," Conference on Neutron Cross Section Technology, Washington, D. C., March 22-24 (1966).
- (9) P. Greebler, A. B. Hutchins, "Significance of Neutron Data to Fast Reactor Power Plant Design," Conference on Neutron Cross Section Technology, Washington, D. C., March 4-7 (1968).
- (10) G. Cecchini, U. Farinelli, A. Gandini, M. Salvatores, "Analysis of integral data for fewgroup parameter evaluation of fast reactors," P/627 (1964).
- (11) M. Humi, J. J. Wagschal, Y. Yeivin, "Multigroup constants from integral data," P-668 (1964).
- (12) G. I. Marchuk, Numerical Methods for Nuclear Reactor Calculations, Consultants Bureau, Inc., New York (1959).
- (13) P. C. E. Hemment, E. D. Pendlebury, "The Optimisation of Neutron Cross-Section Data Adjustments to Give Agreement with Experimental Critical Sizes," ANL-7320, 88 (1966).
- (14) A. Pazy, G. Rakavy, Y. Reiss, Y. Yeivin, "Use of Integral Measurements as Supplementary Data in Neutron Cross-section Evaluation," ANL-7320, 270 (1966).

- (15) G. Cecchini, A. Gandini, I. D. Bono, B. Faleschini, "Comparison between Experimental and Theoretical Integral Data on Fast Critical Facilities. CALI, a Program for Generating "Effective" Nuclear Group Constants by a Correlation Method," ANL-7320, 107 (1966).
- (16) J. L. Rowlands, J. D. Macdougall, "The Use of Integral Measurements to Adjust Cross Sections and Predict Reactor Properties," BNES Conf., 1.16 (1969).
- (17) C. G. Campbell, J. L. Rowlands, "The Relationship of Microscopic and Integral Data," IAEA-CN-26/116 (1970).
- (18) J. Y. Barre, M. Heindler, T. Lacapelle, J. Ravier, "Lesson Drawn from Integral Experiments on a Set of Multigroup Cross Sections," BNES Conf., 1.15 (1969).
- (19) H. Häggblom, "Adjustment of Neutron Cross Section Data by a Least Square Fit of Calculated Quantities to Experimental Results," AE-422 (1971).
- (20) L. N. Usachev, Y. G. Bobkov, "Planning an Optimum Set of Microscopic Experiments and Evaluations to obtain a Given Accuracy in Reactor Parameter Calculations," (Private Communication)
- (21) 三谷浩, 黒井英雄, "積分測定量を用いた群定数の修正," JAERI-memo-3816, November (1969).
- (22) H. Mitani, H. Kuroi, "Adjustment of Group Cross Sections by Means of Integral Data (I), Theoretical Study," J. Nucl. Sci. Technol., 9[7], 389 (1972).
- (23) V. Y. Linnik, Method of Least Squares and Principles of the Theory of Observations, Pergamon Press, London (1961).
- (24) T. A. Agekyan, Foundation of Theory of Errors, Moscow (1968).  
( 本田勝, 幾志新吉共訳, "誤差論の基礎," 総合図書, 東京 ( 1969 ), )
- (25) C. R. Rao, Linear Statistical Inference and Its Applications, John Wiley & Sons, New York (1965).
- (26) H. O. Hartly, "The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares," Technometrics, 3, 269 (1961).
- (27) 遠山啓, 行列論, 共立出版, 東京 ( 1952 ) .
- (28) H. Mitani, H. Kuroi, "On the Correlation between Group Cross Sections to be Adjusted by Use of Integral Data," J. Nucl. Sci. Technol., 7[1], 56 (1970).
- (29) H. Cramer, ( 大石泰彦訳 ), 確立論入門, 東洋経済, 東京 ( 1966 ) .

- (30) Y. Tomita, "STAX2: A Computer Program for Calculating Neutron Elastic and Inelastic Scattering Cross Sections by Means of the Optical Model and Moldauer's Theory", JAERI-1191 (1970).
- (31) A. M. Lane, J. E. Lynn, "Fast Neutron Capture below 1 Mev: the Cross Sections for  $^{238}\text{U}$  and  $^{232}\text{Th}$ ", Prox. Phys. Soc. A70, 557 (1957).
- (32) W. S. Emmerich, Fast Neutron Physics, Part II, p.1057, Interscience, Publisher, New York (1960).
- (33) J. J. Schmidt, "Neutron Cross Sections for Fast Reactor Materials", KFK-120 (1966).
- (34) 増山元三郎, 少数例のまとめ方2, 竹内書店, 東京(1964).
- (35) L. N. Usachev, "Perturbation Theory for the Breeding Ratio and for Other Number Ratios Pertaining to Various Reactor Processes," J. Nucl. Energy, Parts A/B, 18, 571 (1964).
- (36) A. Gandini, "A Generalized Perturbation Method for Bi-linear Functionals of the Real and Adjoint Neutron Fluxes," J. Nucl. Energy, 21, 755 (1967).
- (37) H. Mitani, to be published.
- (38) A. Gandini, M. Salvatores, G. Sena, I. D. Bona, "Analysis of Fast Reactors by the CIAP and GLOPERT Codes Using Improved Perturbation Methods," ANL-7320, 304 (1966).
- (39) A. Gandini, "A Method of Correlation of Burnup Measurements for Physics Prediction of Fast Power-Reactor Life," Nucl. Sci. Eng., 38, 1 (1969).
- (40) R. V. Meghreblian, D. K. Holmes, Reactor Analysis, McGraw-Hill, New York (1960).
- (41) H. Hurwitz, "A Note on the Theory of Danger Coefficients," KAPL-98, (1948).
- (42) B. B. Kadomtsev, "The Role of the Green's Function in the Theory of Radiant Energy Transfer," Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R., 113, 541 (1957).
- (43) L. N. Usachev, "Equation for the Importance of Neutrons; Reactor Kinetics and the Theory of Perturbation," P/656, (1955).
- (44) D. S. Selengut, "Variational Analysis of Multi-Dimensional Systems," HW-59126, (1958).
- (45) A. M. Weinberg, E. P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactor, Univ. of Chicago Press, Illinois (1958).
- (46) G. L. Marchuk, V. V. Orlov, "The Theory of Adjoint Functions," Neutron Physics of Soviet, p.24 (1961).

- (47) J. Lewins, "The Time-Dependent Importance of Neutrons and Precursors," Nucl. Sci. Eng., 7, 268 (1960).
- (48) 吉田耕作, 積分方程式論, 岩波書店, 東京 (1950).
- (49) K. D. Lathrop, "DTF-IV, A FORTRAN-IV Program for Solving the Multi-group Transport Equation with Anisotropic Scattering," LA-3373 (1965).
- (50) A. R. Baker, "Comparative Studies of the Criticality of Fast Critical Assemblies," ANL-7320, 116 (1966).
- (51) W. G. Davey, A. L. Hess, "CSEWG Newsletter 18, Cross Section Evaluation Working Groups," (1969).
- (52) H. Kuroi, N. Mizoo, T. Ichimori, M. Obu, J. Hirota, "Correlation of Integral Data and Cross Sections in Intermediate Energy Cores," BNES, P.1.7 (1969).
- (53) W. G. Davey, "K-Calculation for 22 ZPR-III Fast Reactor Assemblies using ANL Cross Section Set 635," ANL-6570 (1962).
- (54) 高野秀機, 長谷川明, 桂木学, "高速臨界実験の解析とJAERIセットの改訂, JAERI-M-4215 (1971).
- (55) H. Kuroi, to be published.
- (56) W. G. Davey, "Status of Important Heavy-Element Nuclear Data above the Resonance Region," IAEA-CN-26/112 (1970).
- (57) D. J. Hughes, R. B. Schwartz, "Neutron Cross Sections," BNL-325, 2nd ed., Supp. No.2 (1966).
- (58) D. B. Owen, Handbook of Statistical Table, Pergamon Press, London (1962).
- (59) H. Werle, H. Bluhm, "Fission-Neutron Spectra Measurements of  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  and  $^{252}\text{Cf}$ ," J. Nucl. Energy, 26, 165 (1972).
- (60) J. J. H. Berlijn, R. E. Hunter, C. C. Cremer, "Neutron Cross Sections for  $^{235}\text{U}$  and  $^{238}\text{U}$  in the Energy Range 1 Kev to 14 Mev," LA-3527 (1968).
- (61) S. Igarashi, H. Nakamura, T. Murata, K. Nishimura, "Analysis of Neutron Inelastic Scattering by  $^{238}\text{U}$ ," IAEA-CN-26/27 (1970).
- (62) 飯島勉, 向山武彦, 溝尾宣辰, 他, "FCA-V-2炉心の臨界実験," JAERI-memo 4597 (1971).
- (63) 三谷浩, 黒井英雄, "積分量の感度係数と一般化摂動法," JAERI-M-4760 (1972)
- (64) H. Mitani, H. Kuroi, "Adjustment of Group Cross Sections by Means of Integral Data (II), Numerical Study," J. Nucl. Sci. Technol., 9 11, 642 (1972).
- (65) H. Mitani, "Higher Order Perturbation Method in Reactor Calculations," Nucl. Sci. Eng., 51, 180 (1973).

“積分測定量を用いた群定数修正の基礎的研究”の正誤表

頁	行(或は式)	誤	正
10	(2-33)	$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{V}_1$	$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{V}_1$
10	(2-35)	$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = \hat{\mathbf{L}} - \mathbf{V}$	$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{L}} - \mathbf{V}$
10	(2-39)	$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}$	$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{A}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{L}}$
11	(2-41)	$\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \mathbf{A}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{L}}$	$\tilde{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \mathbf{A}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{L}}$
11	(2-42)	$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \rho \mathbf{A}^T \mathbf{V}_1$	$\tilde{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}} + \rho \mathbf{A}^T \mathbf{V}_1$
11	(2-45)	$\tilde{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}} + \rho \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{M}$	$\tilde{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}} + \rho \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{M}}$
11	(2-46)	$\tilde{\sigma}_i = \sigma_i + \Delta \sigma_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \rho_{ij} \cdot A_{kj} (\mathbf{B}^{-1})_{k\ell} \left( \frac{\hat{m}_\ell - f_\ell(\hat{\sigma})}{\Delta \hat{m}_\ell} \right)$	$\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i + \Delta \hat{\sigma}_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \rho_{ij} \cdot A_{kj} (\mathbf{B}^{-1})_{k\ell} \left( \frac{\hat{m}_\ell - f_\ell(\hat{\sigma})}{\Delta \hat{m}_\ell} \right)$
13	(2-56)	$q = \frac{(\mathbf{M}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{M})}{(N-n) \sigma^2}$	$q = \frac{(\hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{M}})}{(N-n) \sigma^2}$
14	(2-61')	$l_i = \sqrt{P_i} (f_i(\hat{\sigma}) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (\sigma_j - \hat{\sigma}_j))$	$l_i = \sqrt{P_i} (f_i(\hat{\sigma}) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (\sigma_j - \hat{\sigma}_j))$
38	(4-41)	$\Delta \tilde{\sigma}_i = \Delta \sigma_i (\dots)$	$\Delta \hat{\sigma}_i = \Delta \hat{\sigma}_i (\dots)$
45	(5-30)	$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n^* - \lambda \phi^*)$	$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n^* - \lambda \phi^*)$
96	14	確立分布	確率分布
98	(34)	$I(m_i) = \sum_{j=1}^n I(\hat{m}_i   \sigma_j) \dots$	$I(\hat{m}_i) = \dots$