JAERI-M
5934

トカマクにおける半径方向の電界の減衰

1974年12月

津田　孝

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M 5934

トカマクにおける半径方向の電界の減衰

日本原子力研究所東海研究所核融合研究室
津　田　　孝

（1974年11月29日）

バナナ領域のトカマクプラズマでの半径方向の電界の減衰の機構について調べた。非常に早い（$\sim \delta^{3/2}/\nu_{ii}q^2$，$\delta$はアスペクト比の逆数，$\nu_{ii}$はイオン衝突周波数，qは安全係数）電場の減衰の機構が存在することが示された。

又，トーラスプラズマの実効的な誘電率が$(B_T/B_\theta)^2$倍（B_Tはトロイダル，磁場B_θはポロイダル磁場）になることも示された。

JAERI-M 5934

Decay of Poloidal Rotation in a Tokamak Plasma

Takasi TUDA

Thermonuclear Fusion Laboratory, Tokai, JAERI
(Received November 29,1974)

The decay of poloidal rotation in a tokamak plasma has been studied for the banana regime. A very fast damping mechanism of the order $\delta^{3/2}/\nu_{ii}q^2$ (δ is the inverse aspect ratio, ν_{ii} the ion collision frequency, q the safety factor) is shown to exist. The plasma in a tokamak has a large effective dielectric constant by a factor $(B_T/B_\theta)^2$.

目　次　な　し

1 序　　論

軸対称のトカマクプラズマでも，いくつかの原因によって半径方向のイオンと電子の粒子束に差が生じる。つまり両極性（ambipolar）ではなくなる。

この非両極性の機構としては，たとえば次の様なものが考えられる。

1） 核融合反応で出てくるアルファ粒子のように高エネルギーの粒子はバナナ巾が大きすぎ，ポロイダル磁場の弱い装置では閉じ込めることは出来ず，直接，壁やリミターに失なわれる。

2） MHD不安定性や，不斉磁場の為に，完全な磁気面が形成されていない場合には，高速の電子（特に逃走電子）が，イオンより早く磁力線に沿って逃れ出る。

3） 静電的な乱れによる乱流輸送はかならずしも両極性ではない。

又，中性粒子入射加熱においては，入射された高速中性粒子がプラズマ中で電離したとき，電子とイオンのラーマー半径の大きさとその旋回中心の位置が異なるために荷電分離が生じ，強い電界の発生の原因となる。

もしこれらの原因で発生する電界が何んらかの機構で減衰しないで増加し続けるならば，やがては，MHD的な平衡が存在しなくなったり[1]，プラズマの損失を増加したり[2]，Kelvin−Helmholtz型の不安定性[3]の原因となったりする可能性がある。プラトー領域にあるトカマクプラズマに発生した電界の減衰は，Stix[4]やStringer[5]によって調べられており，いずれもイオンの衝突時間（ν_{ii}^{-1}）程度での減衰であるとしている。しかしその早い電場の減衰のもつ物理的な意味はかならずしも明らかではない。この論文の目的はバナナ領域での電場の減衰機構を調べるとともにRef 4やRef 5の物理的内容を明らかにすることである。

電場の時間変化を計算するには半径方向の電流 J_r を求める必要がある。しかし完全電離プラズマの軸対称トーラス中での拡散束は，クーロン衝突が運動量を保存することから，分布関数をラーマー半径と系の特徴的な長さの比で展開した第一近似では半径方向の電界とは関係なく両極性（つまり $J_r=0$）となり，電場の時間変化を決めることは出来ない。このことは最初，Kovrizhnykh[6]によって指摘された。この事情は均一磁場中での完全電離プラズマ（$\nu \ll \omega_c$，ω_c；サイクロトロン周波数 eB/m）の拡散現象の場合とよく似ている。均一磁場中での拡散課程のラーマー半径での展開の高次までの解析はLongmireとRosenbluth[7]によって行なわれており，展開の一次近似では拡散束は両極性で

$$\Gamma \simeq \nu_{ei}\rho_e^2 \frac{\partial n_e}{\partial x} \simeq \nu_{ie}\rho_i^2 \frac{\partial n_i}{\partial x}$$

となる。同種粒子間の衝突は拡散には寄与しない。展開の高次では同種粒子間の衝突による拡散束が存在し，イオン成分のより大きな粒子束

$$\Gamma_i \simeq \nu_{ii}\rho_i^4 n_i^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{ni} \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2}$$

が生じることが示されている。磁場に直角方向の電界は Γ_i による電流でゆっくりと変化する[8]。（$\tau \sim \dfrac{a^2}{\nu_{ii}\rho_i^2}$）バナナ領域の軸対称トーマスプラズマの輸送現象のラーマー半径での展開の

高次の効果はRosenbluth et al[9]によって計算されており，半径方向の電界の時間変化の割合は$\Delta T_i=0$の場合には

$$\tau_s = \frac{10}{\nu_{ii} q^2} \frac{a^2}{\rho_i^2}$$

a＝プラズマ半径，$q \equiv \frac{a B_T}{R B_\theta}$ 安全係数

の程度である。これはバナナ領域での粒子閉じ込め時間やエネルギー閉じ込め時間

$$\tau_n = \frac{\delta^{3/2} a^2}{\nu_e q^2 \rho_e^2}$$

$$\tau_E = \frac{\delta^{3/2} a^2}{\nu_{ii} q^2 \rho_i^2}$$

$$\delta \equiv \frac{a}{R}$$

と比べるとかなりゆっくりした過程である。このτ_sの値は，プラトー領域での電場の減衰時間～ν_{ii}^{-1}（Ref 4，Ref 5）とはあまりにも異なっている。これら両者はこの論文で明らかにするように異なった時間スケールでの現象である。

軸対称トーラス中で両極性拡散が成立する理由は均一磁場中での場合と多少異なっている。拡散が両極性であるためには，密度や温度，それに半径方向の電界E_rの時間変化が小さい（準定常状態）ことが必要である。密度nや温度Tが変化する時間スケールは通常，τ_nとτ_Eであり，各々の粒子の運動が変化する時間スケール

$$\tau_c = \nu^{-1}, \quad \tau_{c\,eff} = \delta\ \nu^{-1}$$

$$\tau_t = Rq/v_T, \quad \tau_b = Rq/\delta^{1/2}\ v_T, \quad v_T = (T/m)^{1/2}$$

等に比べ，充分に長いため拡散束を求める計算を行なう際には無視することが出来る。しかし電場E_rの場合にはもっと短い時間スケールで変化する可能性がある。この早い電場の時間変化は半径方向の電場と磁力線方向のプラズマの流れの間にある関係が成立しなければならないことによる。

よく知られている様に，バナナ領域の軸対称トーラスプラズマは準定常状態でイオンの磁力線方向の平均的流れ$\overline{U}_{/\!/ i}$が存在する。この磁力線方向の流れは均一磁場中でのプラズマの反磁性の流れと同様の機構で発生する。

バナナ領域では，磁力線方向にゆっくり動く粒子（$v_{/\!/} < \delta^{1/2} v_T$）の運動はトロイダル磁場の弱いトーラスの外側に捕促され，いわゆるバナナ軌道を描く。この軌道を動いている間にこの捕促粒子は半径方向にラーマー半径よりかなり長い距離を移動する。（$\Delta r \sim \delta^{1/2} m v_T / e B_\theta$）

従ってもし密度勾配があると同じ磁気面上で磁力線方向の異なった向きに運動する捕促粒子の数に（バナナ巾）×（密度勾配）×（捕促粒子の割合）だけの差が出きる。つまり捕促粒子は磁力線方向に平均として流れをもっていることになる。この捕促粒子の流れはクーロン衝突によって通過粒子にも流れを生じさせる。

この捕促粒子と通過粒子の間にクーロン衝突による摩擦力を生じない状態がバナナ領域の輸送係数を計算する際に求められているイオンの平均流である。この流れの値はRosenbluth et al [10] によれば

$$\overline{U}_{/\!/ i} = -\frac{T_i}{eB_\theta}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T_i}\frac{\partial \phi}{\partial r} - 0.17\frac{1}{T_i}\frac{\partial T_i}{\partial r}\right) \tag{1}$$

である。(1)式で与えられる$\overline{U}_{/\!/ i}$が存在する場合には，ν_{ii}は粒子束には直接関係せず，拡散はラーマー半径の展開の一次近似では両極性となる。

そこでこの章のはじめで述べたような原因で半径方向の電界が急に変化した場合を考えてみよう。この時$\overline{U}_{/\!/ i}$の値は(1)式を満足しなくなる。すると捕捉粒子と通過粒子の間にはクーロン衝突による摩擦力が働き$\overline{U}_{/\!/ i}$を(1)式を満足するように変化させる。この$\overline{U}_{/\!/ i}$を作り出すに必要な時間はν_{ii}^{-1}の程度であると考えられる。この$\overline{U}_{/\!/ i}$が(1)式を満足していない間は，第2章で示されるように，拡散はもはや両極性とはならず半径方向に電流を生じ，この電流によって加えられた電界は急速に減衰する。

この論文では上の議論にそって話を進める。第2章では軸対称トーラス中での$\overline{U}_{/\!/ i}$の時間変化と両極性でない粒子束の関係を一般的に求める。第3章では，バナナ領域での$\overline{U}_{/\!/ i}$の時間変化を具体的に計算する。これによって半径方向の電流が決められる。第4章ではポアソン方程式を解くことにより電場の時間変化を求める。

バナナ領域以外での領域での電場の早い減衰の問題は後の論文にゆずる。

2 軸対称トーラス中でのプラズマの運動量保存則

以下では，トカマク等の強いトロイダル磁場をもった軸対称・低ベータートーラス配位について考える。用いる座標系はいわゆる疑トロイダル座標（r, θ, φ）でφ（トロイダル方向）は巡回座標である。線素dsはつぎの式で与えられる。

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + R^2 h^2 (d\varphi)^2 \tag{2}$$

$h = 1 + \delta\cos\theta$　R；プラズマの主半径

ここで$\delta = r/R$はアスペクト比の逆数で$\delta \ll 1$であるとする。

平衡磁場配位は

$$B = [0, \Theta B_0/h, B_0/h] \tag{3}$$

$$\Theta = B_\theta / B_\varphi \ll 1$$

$$B = B_0/h$$

で与えられるとする。

速度空間の座標としては（ε, μ, σ）を用いる。すなわち

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + e\phi \tag{4}$$

$$\mu = \frac{mv^2}{2B}$$

m ；粒子の質料

e ；〃 の電荷

ϕ ；静電ポテンシャル

$v_\perp$ ；粒子の磁力線に直角方向の速度

である。すると磁力線方向の粒子の速度は

$$q=\sigma\left[\frac{2}{m}(\varepsilon-e\phi-\mu B)\right]^{1/2} \tag{5}$$

$$\sigma=\pm$$

で与えられる。又，速度空間の体積素は

$$d^3 v=\sum_{\sigma}\frac{2\pi B d\mu d\varepsilon}{m^2|q|} \tag{6}$$

である。

通常の新古典拡散理論の場合と同様に，ラーマー半径はあまり大きくないとする。すなわち

$$\frac{\partial^{1/2}\rho_i}{\Theta r_c}<<1$$

$$\rho_i=\frac{m v_T}{eB}\ ,\ v_T=\left(\frac{T_i}{m_i}\right)^{1/2}$$

r_c ；n，T，Θ，ϕが変化する特徴的な距離

平衡量（n，T，ϕ等）の時間変化はイオンのラーマー周期に比べて充分にゆっくりしているので，Kinetic Eqnationをラーマー周期で平均したDrift Kinetic Equationを用いることができ，イオン，電子のそれぞれについて下の様に表すことができる。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+e\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}+q\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

$$+\frac{m}{er}\left[q\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{q}{B}\right)\frac{\partial f}{\partial r}-q\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{B}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]=C(f) \tag{7}$$

但し粒子のr方向とθ方向へのドリフト速度は

$$v_{Dr}=\frac{m}{er}q\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{q}{B}\right)$$

$$v_{D\theta}=-\frac{m}{e}q\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{B}\right)$$

である。(7)式で，トロイダル電場E_φは以下の議論には関係がないので$E_\varphi=0$としてある。又分極ドリフト（$v_p=\frac{\partial E_r}{\partial t}/\omega_c B$）は一般には$\Delta B$ドリフト運動に比べて小さいし，ここで考える電場は半径方向のものでv_pによってすべての同種粒子は同じ速度で半径方向に動くため分布関数の形にはあまり影響を与えないので(7)式を解くときには無視する。

軸対称トーラスプラズマにおける拡散束の両極性の意味を調べるために(7)式のモーメントをとる。(7)式の両辺にqh^2をかけたのち速度空間での積分とθでの平均を行う。

左辺第3項は，θで部分積分を行うと

$$\oint\frac{d\theta}{2\pi}\int d\varepsilon\int\sum_{\sigma}\frac{2\pi B_0\, d\mu}{m^2|q|h}q^2 h^2\frac{\Theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

$$=-\frac{e\Theta B_0}{m}\oint\frac{d\theta}{2\pi}\int d^3v\,\frac{mq}{er}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{q}{B}\right)f$$

$$=-\frac{e\Theta B_0}{m}\oint\frac{h\,d\theta}{2\pi}\int d^3v\quad v_{Dr}f$$

$$=-\frac{e\Theta B_0}{m}\Gamma \qquad (8)$$

となる。左辺第4項も同様に

$$\oint\frac{d\theta}{2\pi}\int d^3v\,\frac{m}{er}qh^2\left[q\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{q}{B}\right)\frac{\partial f}{\partial r}-q\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{B}\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\oint\frac{h\,d\theta}{2\pi}\int d^3v\ v_0\cdot kqhv_{Dr}f$$

$$\equiv\frac{1}{mr}\frac{\partial}{\partial r}r\overline{P} \qquad (9)$$

となる。この項は v_{Dr} によって磁力線方向の運動量が半径方向に輸送される割合を示す。しかし(9)式の値は(8)式に比べてラーマー展開での高次の微小量になることに注意しておく。

もし，$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}\simeq 0$ とみなせる準定常状態では左辺第2項は消え，第1項より

$$\oint\frac{h\,d\theta}{2\pi}\int d^3v\,qh\frac{\partial f}{\partial t}=n\frac{\partial\overline{U}_{\parallel i}}{\partial t} \qquad (10)$$

となり，磁力線方向への平均流の時間変化を示す。この場合(10)式の値は(9)式と同様，ラーマー半径での展開の高次の量となる。しかし今，考えている $\frac{\partial\phi}{\partial t}\neq 0$ の場合にも(10)式は成立する。$e\phi\sim T$ (注) の程度であれば，電場が時間変化する間の n や T の変化は無視しうる。そこで $f=f_0+f_1$ とおく

$$f_0=n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon-e\phi}{T}\right)$$

$$f_0\gg|f_1|\text{—}\ f_1\sim O\left(\nu,\rho_i/a\right)$$

f_0 はマックスウェル分布であり，f_1 はクーロン衝突やラーマー効果によるマックスウェル分布からのずれである。

$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial t}=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial t}$ が $\varepsilon=\mathrm{const}$ に保っての微分であることに注意して

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=\frac{e}{T}\frac{\partial\phi}{\partial t}f_0$$

$$e\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}=-\frac{e}{T}\frac{\partial\phi}{\partial t}f_0$$

となり $\frac{\partial f_0}{\partial t}+e\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}$ は0となる。f_1 に対しては

$$\int \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3 v q \frac{\partial f_1}{\partial t} = n \frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t}$$

$$e\frac{\partial \phi}{\partial t}\int d^3 v q h \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon} = e\frac{\partial \phi}{\partial t}\int\int\sum_6 \frac{2\pi B_0\ d\mu d\varepsilon}{m^2\ |q|}\ q\ \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}$$

$$= e\frac{\partial \phi}{\partial t}\int\int\sum_6 6\ \frac{2\pi B_0\ d\mu}{m^2}\ \left[f_1\ \right]_0^{\infty}$$

$$=0$$

なぜなら分布関数fは$\varepsilon=\infty$で０，$\varepsilon\rightarrow 0$ではマックスウェル分布にならなければならない。従って

$$mn\frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t} - e\Theta B_0 \Gamma + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\overline{P}$$

$$= \int \frac{h\, d\theta}{2\pi} \int d^3 v q h C\ (f) \tag{11}$$

となる。(11)式の左辺の第３項はラーマー半径での展開の高次の量になるのでこの論文では，以下でこの項を無視する。しかしRosenbluth et al[9]ではこの項の寄与を計算することにより$\frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t}$を評価した。すなわちゆっくりした電場の時間変化を求めた。

準定常状態（$\frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t}=0$）では，(11)式は

$$e_j \Gamma_j = -\frac{1}{\Theta B_0}\int \frac{h^2 d\theta}{2\pi}\int d^3 v q C_j\ (f_j) \tag{11'}$$

$j=e，i，$；電子又はイオン成分であることを示す

となる。ここで

$$C_i = C_{ii} + C_{ie}$$
$$C_e = C_{ee} + C_{ei}$$

であり，かつ運動量保存より

$$\int d^3 v q C_{ee} = \int d^3 v q C_{ii} = 0$$
$$\int d^3 v q C_{ei} + \int d^3 v q C_{ie} = 0$$

である。従って

$$e_e \Gamma_e + e_i \Gamma_i = J_r = 0$$

となる。すなわち準定常状態ではラーマー半径での展開の第１近似では両極性となり$C_{ii}(f_i)$の項は$C_{ii}\ (f_i)/C_{ie}\ (f_i) \sim m_i/m_e$であるにもかかわらず$\Gamma_i$には寄与しない。

しかし$\overline{U}_{/\!/ i}$の時間変化を無視できない場合には，C_{ii}の寄与によるΓ_iが生じる。この磁力線方向の平均流の時間変化による粒子束は電子及びイオンの両方に生じるが，今，考えている問題ではイオンの粒子束の方が$(m_i/m_e)^{1/2}$倍だけ大きくなるので以下ではイオンの粒子束のみを考えればよい。

ところが(11)式より

$$m_i n_i \frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t} \simeq e\Theta B_0 \Gamma_i \tag{12}$$

の関係があるので，$\frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t}$又は$\Gamma_i$のどちらかを計算すればよい。以下では$\frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t}$を計算す

ることにする。

(注)　ここでは $|e\phi| \lesssim T$ とした。もし $|e\phi| >> T$ とすると $\overline{U}_{/\!/ i} \sim \dfrac{\phi}{B_\theta a}$ が V_T に比べて無視できなくなるので電場の時間変化する間の温度上昇も無視出来なくなる。又(9)式の $\dfrac{1}{mr}\dfrac{\partial}{\partial r} r\overline{P} \sim n\overline{U}_{/\!/ i}\dfrac{\rho_i V_T}{a^2}$ の項も，ラーマー展開の高次の量ではなくなる。

3　バナナ領域でのプラズマ流の時間変化

計算は通常の新古典拡散理論と同様に $\delta^{1/2}$, $\nu Rq/\delta^{\frac{3}{2}} V_T$, δ/a 等のパラメーター での展開を用いる。又，平衡状態（すなわち(1)式を満足している準定常状態）からの静電ポテンシャルのずれは T/e に比べて充分に小さく過度現象の間での T の変化等は無視できるものとする。

まず展開のパラメーターの0次では，マックスウェル分布であるとする。

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon - e\phi}{T}\right) \tag{13}$$

n, T, ϕ の θ 微分は 0（ρ^2/a^2, $\nu\rho/a$）の程度の量であり，n, T の時間変化は無視しうるとすると，

$n = n(r)$

$T = T(r)$

$\phi = \phi(r, t)$

と書ける。

$f = f_0 + f_1$ とすると(7)式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right) f_1$$

$$+ q\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial\theta} + \frac{m}{er}q\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{q}{B}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r} = C(f_1) \tag{14}$$

但し，$C(f_1)$ は線形化した衝突項で後に与える。第1項の f_0 に関する項は(10)式の場合と同様に消える。

上の式は，通常の新古典拡散 理論の場合に比べて $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ の項が存在する為，解析的に正確にに解くことは困難である。しかし線形であるので計算機を用いて数値的に解くのはそれほど困難ではないだろう。ここでは実用上，充分と思われる近似解を得ることを考える。

これから計算するのは捕促粒子と通過粒子の間のクーロン衝突による運動量のやりとり（つまり摩擦力）である。この場合には新古典拡散の時と同様にピッチ角散乱が重要でありエネルギー方向の拡散の効果は無視できる。

ここで(14)式の各項の各項の大きさを比較してみよう。第1項 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + e\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t}\right) f_1$ は $\nu_{ii} f_1$ の大きさである。右辺の衝突項はよく知られているように捕促粒子に対する実効的な衝突周波数の増加から $\nu_{ii} f_1/\delta$ 又，ここではバナナ領域（$\nu Rq/\delta^{\frac{3}{2}} V_T << 1$）を考えているので，左辺第2項，第3項は他の項に比べてはるかに大きい。

従って最も小さな $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + e\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}\right) f_1$ の項には，新古典拡散理論の解から予想される

近似解 (10) を用いて解くことにする。ここで計算したいのは$\overline{U}_{/\!/ i}$ であるので，必要なのはf_1の通過粒子の部分である。従ってこの部分で適当な近似解として

$$f_1^{(0)} = \frac{q\overline{U}_{/\!/ i}}{V_T^2} f_0 \tag{15}$$

$$V_T^2 = \frac{T}{m}$$

を用いることにする。従って第1項は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right) f_1^{(0)} =$$

$$= \frac{q\overline{U}_{/\!/ i}}{v_T^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + e\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) f_0 + \frac{\overline{U}_{/\!/ i} f_0}{V_T^2}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + e\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{q f_0}{V_T^2}\frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt}$$

第1項は0となる。第2項は(3)式より

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{e}{mq}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{mq}$$

であるからやはり0となり最後の項のみが残って

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right) f_1^{(0)} = \frac{q f_0}{V_T^2}\frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt} \tag{16}$$

となる。従って(14)式は

$$q\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{m}{er} q\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{q}{B}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r} = C(f_1) - \frac{q f_0}{V_T^2}\frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt} \tag{17}$$

以下の計算では衝突項として新古典拡散の計算によく用いられるランダウの衝突項を簡単化したもの (10) を用いる。

$$C(f_1) = \nu_{ii}\left\{\frac{mq}{B}\frac{\partial}{\partial \mu} q\mu\frac{\partial f_1}{\partial \mu} + q f_0\frac{mP}{T}\right\} \tag{18}$$

但し

$$P \equiv \frac{1}{\nu^*}\int d^3v\ \nu q f_1$$

$$\nu^* = \frac{m}{nT}\int d^3v\, q^2 f_0$$

$$\nu \equiv \frac{\sqrt{2}\pi e^4 \ln\Lambda n_0}{m^{1/2} T^{3/2}} x^{-\frac{3}{2}} h(x)$$

$$x = \frac{\varepsilon - e\phi}{T}$$

$$h(x) = \left(\eta + \frac{d\eta}{dx} - \frac{\eta}{2x}\right)$$

$$\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t} \sqrt{t}\, dt$$

この同種粒子に対する衝突項はバナナ領域で主要なピッチ角散乱を正確に取扱えるのと，これから行う計算で基本的な条件である運動量保存則を満足している。

以下の計算の手順は Ref (10)の Appendix A と同様である。まず

$$f_1 = -\frac{mq}{eB\Theta} \frac{\partial f_0}{\partial r} + g \tag{18}$$

と置くと(17)式は，

$$q\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} = C(g) - C\left(\frac{mq}{eB\Theta} \frac{\partial f_0}{\partial r}\right) - q f_0 \frac{m}{T} \frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt} \tag{19}$$

(13)式より

$$\frac{\partial f_0}{\partial r} = \left(A_1 + \frac{\varepsilon - e\phi}{T} A_2\right) f_0 \tag{20}$$

$$A_1 \equiv \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} + \frac{e}{T} \frac{d\phi}{dr}$$

$$A_2 \equiv \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$$

従って(19)式の右辺第2項は，

$$C\left(\frac{mq}{eB\Theta} \frac{\partial f_0}{\partial r}\right) = \frac{mA_1 f_0}{eB\Theta} \nu_{ii} \left(-q + \frac{m}{nT} \frac{q}{\nu^*} \int d^3v \nu_{ii} q^2 f_0\right)$$

$$+ \frac{mA_2 f_0}{eB\Theta} \nu_{ii} \left(-q \frac{\varepsilon - e\phi}{T} + \frac{m}{nT} \frac{q}{\nu^*} \int d^3v \nu_{ii} q^2 \frac{\varepsilon - e\phi}{T} f_0\right)$$

となり ν^* の定義より A_1 の項は消えて

$$C\left(\frac{mq}{eB\Theta} \frac{\partial f_0}{\partial r}\right) = \nu_{ii} \frac{mA_2 f_0}{eB\Theta} q \left(\frac{\overline{\nu}}{\nu^*} - \frac{\varepsilon - e\phi}{T}\right) \tag{21}$$

$$\overline{\nu} \equiv \frac{m}{nT} \int d^3v \ \nu q^2 \frac{\varepsilon - e\phi}{T} f_0$$

従って(19)式は

$$q\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} = C(g) - \nu_{ii} \frac{mA_2 f_0}{eB\Theta} q \left(\frac{\overline{\nu}}{\nu^*} - \frac{e\phi}{T}\right) - q f_0 \frac{m}{T} \frac{\partial \overline{U}_{/\!/ i}}{\partial t}$$

あるいは

$$q\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \nu \frac{mq}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} q\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \nu q S \tag{22}$$

$$S \equiv \left\{ -\frac{mA_2}{eB\Theta} \left(\frac{\overline{\nu}}{\nu^*} - \frac{\varepsilon - e\phi}{T}\right) - \frac{1}{\nu_{ii}} \frac{m}{T} \frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt}\right.$$

$$\left. + \frac{m}{nT} \frac{1}{\nu^*} \int d^3v \ \nu q g \right\} f_0 \tag{23}$$

バナナ領域（$\nu \ll \delta^{\frac{3}{2}} v_T / Rq$）を考えているので(22) 式の第1近似として

$$\frac{\partial g^{(0)}}{\partial \theta} = 0 \qquad (24)$$

とすることが出来る。$g = g^{(0)} + g^{(1)}$，$|g^{(0)}| >> |g^{(1)}|$ とすると，(23) 式は

$$q\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial \theta} - \nu \frac{mq}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} q\mu \frac{\partial g^{(0)}}{\partial \mu} = \nu q S \qquad (25)$$

となる。(25) 式の両辺を q で割ったのち θ で平均すると $g^{(1)}$ を消去でき，

$$-\nu \frac{m}{B_0} \frac{\partial}{\partial \mu} \langle qh \rangle \mu \frac{\partial g^{(0)}}{\partial \mu} = \nu \langle S \rangle \qquad (26)$$

但し

$$\langle A \rangle = \oint \frac{d\theta}{2\pi} A$$

従って

$$\frac{\partial g^{(0)}}{\partial \mu} = -\frac{B_0}{m\langle qh \rangle} \langle S \rangle H(\mu_T - \mu) \qquad (27)$$

但しHは階段関数で

H（x）＝1　x ≧ 0 →通過粒子

H（x）＝0　x < 0 →捕促粒子

従って(23) 式の最後の項は

$$\int d^3v\, \nu q g \simeq \int d^3v\, \nu q g^{(0)}$$

$$= -\int d^3v\, \nu q \mu \frac{\partial g^{(0)}}{\partial \mu}$$

$$= \int d^3v\, \nu \frac{q}{\langle qh \rangle} \frac{\mu B_0}{m} f_0 \langle S \rangle H(\mu_T - \mu)$$

$$= \int d^3v\, \nu \frac{q}{\langle qh \rangle} \frac{\mu B_0}{m} f_0 \left\{ -\frac{mA_2}{eB\Theta} \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu^*} - \frac{\varepsilon - e\phi}{T} \right) - \frac{1}{\nu_{ii}} \frac{d\bar{U}_{/\!/ i}}{dt} + \frac{m}{nT\nu^*} \int d^3v\, \nu q g \right\} H(\mu_T - \mu)$$

右辺の $\int d^3v\, \nu q g$ を左辺に移項して

$$\left\{ 1 - \frac{1}{nT\nu^*} \int d^3v\, \nu \frac{q}{\langle qh \rangle} \mu B_0 f_0 H(\mu_T - \mu) \right\} \int d^3v\, \nu q g$$

$$= \int d^3v\, \nu \frac{q}{\langle qh \rangle} \frac{\mu B_0}{m} f_0 \left\{ -\frac{mA_2}{eB\Theta} \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu^*} - \frac{\varepsilon - e\phi}{T} \right) - \frac{1}{\nu_{ii}} \frac{d\bar{U}_{/\!/ i}}{dt} \right\} \times H(\mu_T - \mu)$$

上式は $0(\delta^{1/2})$ の精度で

$$\sqrt{2\delta} \int d^3v\, \nu q g \simeq -n \frac{d\bar{U}_{/\!/ i}}{dt} \qquad (28)$$

従ってプラズマの平均流 $\bar{U}_{/\!/ i}$ が計算出来て

$$n\overline{U}_{/\!/ i} = \oint \frac{h\,d\theta}{2\pi} \int d^3 v\, q\, f_1$$

$$= -\oint \frac{h\,d\theta}{2\pi} \int d^3 v \quad q\mu \frac{\partial f_1}{\partial \mu}$$

$$= \oint \frac{h\,d\theta}{2\pi} \int d^3 v \left\{ -\frac{\mu}{e\Theta} \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\mu B q}{m\langle q h\rangle} \langle S\rangle H(\mu_T - \mu) \right\}$$

(23) 式と(28) 式を用いると

$$= \oint \frac{h\,d\theta}{2\pi} \int d^3 v \mu B_0 \left[-\frac{1}{e\Theta} \left(A_1 + \frac{\varepsilon - e\phi}{T} A_2\right) \right.$$

$$\left. - \frac{q}{\langle q h\rangle} H(\mu_T - \mu) \left\{ \frac{A_2}{e\Theta} \left(\frac{\overline{\nu}}{\nu^*} - \frac{\varepsilon - e\phi}{T} \right) . \frac{B}{T} \left(\frac{1}{\nu_{ii}} + \frac{1}{\sqrt{2\delta}\ \nu^*} \right) \frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt} \right] \right.$$

従って $0(\delta^{1/2})$ の精度で

$$\overline{U}_{/\!/ i} = -\frac{T}{eB\Theta}(A_1 + 1.33A_2) - \left(\frac{5.4}{\nu_0} + \frac{1.8}{\sqrt{\delta}\ \nu_0}\right) \frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt} \tag{29}$$

但し

$$\nu_0 \equiv \frac{\sqrt{2}\pi e^4 \ln \Lambda n}{m_i^{1/2} T_i^{3/2}}$$

又，以下の数値積分の結果を用いた。

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{h(x)} e^{-x} dx = 7.2$$
$$\int_0^\infty h(x) e^{-x} dx = 0.53$$
$$\int_0^\infty x h(x) e^{-x} dx = 0.71 \tag{30}$$

従って

$$\frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt} = -\frac{\nu_0}{5.4 + 1.8/\sqrt{\delta}} \left\{ \frac{T}{eB_0\Theta}(A_1 + 1.33A_2) + \overline{U}_{/\!/ i} \right\} \tag{31}$$

が得られる。定常状態 $\left(\frac{d\overline{U}_{/\!/ i}}{dt} = 0\right)$ では

$$\overline{U}_{/\!/ i} = -\frac{T}{eB\Theta}(A_1 + 1.33A_2) \tag{32}$$

であり(1)式の Ref(10) の結果と一致する。

(31) 式と(12) 式から半径方向のイオンの粒子束 Γ_i が求まる。同様の粒子束は電子にも存在するが $|\Gamma_e/\Gamma_i| \sim 0\,(m_e/m_i)$ であるので，$e\Gamma_i$ がそく半径方向の電流と考えられる。これから電場の時間変化を決めることが出来る。

4　軸対称トーラスにおけるポアソン方程式

この章では第2章，第3章で求めた両極性でないイオンの粒子束を用いて電場の時間変化に対する考察を行う。

これまでは電場の時間変化による半径方向のイオンの分極ドリフト運動

$$v_p = \frac{1}{\omega_c B}\frac{\partial E_r}{\partial t} \tag{33}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

の影響は無視してきた。しかし，この分極ドリフトは磁化プラズマ実効的な誘電率を大きく変えるので以下の電場の時間変化を決める議論では無視することが出来ない。

ポアソン方程式はMKS有理単位系を用いると

$$\Delta \cdot D = \rho \tag{34}$$

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi C^2}$$

P；電気分極　　C；光速

と書ける。(34) 式の両辺の時間微分をとると，電荷の連続の式を用いて

$$\Delta \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Delta \cdot J + \sigma_s \tag{35}$$

と表せる。ここで σ_s は第1章で考えた電荷の源である。

電気分極 P の時間変化は，(33) 式を用いて計算できる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = J_p = enV_p = \frac{en}{\omega_c B}\frac{\partial E}{\partial t}$$

J_p；分極電流　　n；イオン密度

従って

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \left(\varepsilon_0 + \frac{en}{\omega_c B}\right)\frac{\partial E}{\partial t} \tag{36}$$

となる。ここで $\left(\varepsilon_0 + \frac{en}{\omega_c B}\right)$ という係数はイオンの分極ドリフト運動による磁化プラズマの実効的な誘電率で，トカマクの一般的なパラメーター（$n \sim 5\times10^{19}\ m^{-3}$，$B \sim 5\,T$，水素で $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ $\frac{en}{\omega_c B} = 3.3\times10^{-9}$）では $\varepsilon_0 \ll \frac{en}{\omega_c B}$ であることに注意しておく。

以下の計算では 0 (δ) の程度の微小量は無視することにし，円柱座標系を用いる。半径方向の電場のみを考えるから，(35) 式は，

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial D_r}{\partial t}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_r) + \sigma_s$$

となり，r で積分して $J = e\Gamma_i$ を用いると

$$\left(\varepsilon_0 + \frac{en}{\omega_c B}\right)\frac{\partial E_r}{\partial t} = -e\Gamma_i + \frac{1}{r}\int_0^r r\sigma_s\,dr \tag{37}$$

$\varepsilon_0 \ll \frac{en}{\omega_c B}$ と(12) 式より

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = -\frac{B_0}{\Theta}\frac{\partial \overline{U}_{\parallel i}}{\partial t} + \frac{\omega_c B}{enr}\int_0^r r\sigma_s\,dr \tag{38}$$

(38) 式と(31) 式から σ_s を与えた際の $\overline{U}_{\parallel i}$ と E_r の時間変化を与えることが出来る。以下では

簡単な例としてσ_sとして時間的なデルタ関数を考える。$t=-0$までは(32)式で与えられる定常状態が実現されており電場はE_0であるとする。$t=0$で有限のσ_sが与えられ$t=+0$で電場がE_0+E_{ex}となった場合を考える。

$t=0$と$t=\infty$では定常状態であるから(32)式より

$$U_0=\overline{U}_{i\parallel}\ (t=0)=-\frac{T}{eB\Theta}\left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dr}-0.17\frac{1}{T}\frac{dT}{dr}\right)+\frac{E_0}{B_0\,\Theta}$$

$$U_f=\overline{U}_{i\parallel}\ (t=\infty)=-\frac{T}{eB\Theta}\left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dr}-0.17\frac{1}{T}\frac{dT}{dr}\right)+\frac{E_f}{B_0\,\Theta} \tag{39}$$

となっている。但し$E_f=E_r\ (t=\infty)$とする。又，n及びTは今，考えている時間スケールν_{ii}^{-1}では変化しない。

(31)式と(38)式より

$$\frac{d^2\,Er}{dt^2}=-\nu_{eff}\frac{dE_r}{dt}$$

$$\frac{d^2\,\overline{U}_{\parallel i}}{dt^2}=-\nu_{eff}\frac{d\overline{U}_{\parallel i}}{dt} \tag{40}$$

$$\nu_{eff}=\frac{\nu_0}{5.4+1.8/\sqrt{\delta}}\left(1+\frac{1}{\Theta^2}\right)$$

(40)式の解は，各々

$$E_r\ (t)=(E_0+E_{ex}-E_f)\ \exp\ (-\nu_{eff}\,t)+E_f$$

$$\overline{U}_{\parallel i}\ (t)=(U_0-U_f)\ \exp\ (-\nu_{eff}\,t)+U_f \tag{41}$$

又，$\overline{U}_{\parallel i}$の初期条件は(31)式より

$$\left.\frac{d\overline{U}_{\parallel i}}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\nu_0}{5.4+1.8/\sqrt{\delta}}\ \frac{E_{ex}}{B\Theta} \tag{42}$$

ところが(41)式では

$$\left.\frac{d\overline{U}_{\parallel i}}{dt}\right|_{t=0}=-\nu_{eff}\ (U_0-U_f)$$

又，(39)式より

$$U_0-U_f=\frac{E_0-E_f}{B_0\,\Theta}$$

であるから

$$E_0-E_f=\frac{E_{ex}}{1+\frac{1}{\Theta^2}}\simeq\Theta^2\ E_{ex} \tag{43}$$

つまり，外部からの電荷の源でE_{ex}だけ急に高められた電荷は，$\nu_{eff}^{-1}\sim\delta^{\frac{3}{2}}/\nu_{ii}q^2$の時間スケールで減衰し，電場は$\Theta^2$の程度まで小さくなる。この時$\overline{U}_{\parallel i}$は$\Theta E_{ex}/B$だけ変化する。

もしν_{eff}^{-1}より長い時間スケールで観測するならば，実効的な誘電率が(36)式の値に比べてΘ^{-2}倍大きくなったと考えられる。このことは(36)式の誘電率の増加が電場のエネルギーがE×Bドリフト運動による粒子の運動エネルギーに費やされた結果であることを考えれば$\overline{U}_{\parallel i}$

$\sim E/\Theta B$ と $E\times B$ ドリフトの Θ^{-1} 倍の流れを作りだすのに用いられる電場のエネルギーが Θ^{-2} になることからも納得できる。

5 議　　　　論

この論文で述べた電場の早い減衰の機構については，Sagdeev と Galeevが軸対称トーラスでの両極性拡散のもつ物理的意味を議論する論文[11]ですでに述べており(12)式に相当する式を導出している。この論文で示されたように，軸対称トーラスプラズマの両極性拡散は，主としてイオンの非両極性の拡散束による電場の変化によって成立するようになる。この過度状態の後に，Ref (6) で述べられたように両極性拡散となる。

この電場の早い減衰は，捕促粒子と通過粒子の摩擦によって生じることから理解できるように，ラーマ半径の展開の1次近似で起る現象でありRef (9) で述べてあるように0次近似の現象ではない。

この論文では，バナナ領域のみを取扱ったが，$\overline{U}_{/\!/ i}$ が時間変化する割合はプラトー及びMHD領域では，ランダウ減衰[5]及びParallel viscosityでそれぞれ決まり，同様の早い電場の減衰が存在する。

6 結　　　　論

これまで述べてきたように，バナナ領域の軸対称トーラス中のプラズマに外部からパルス的に電荷を注入すると発生した電界は非常に早い時間スケール（$\sim\delta^{\frac{3}{2}}/\nu_{ii}q^2$）で減衰する。しかし第2章で述べた近似の範囲内では，この電界は完全には打消されず Θ^2 の程度残存する。つまり ν_{ii}^{-1} より長い時間スケールでみれば，プラズマの実効的な誘電率は(36)式の通常の無衝突磁化プラズマの誘電率に比べて Θ^{-2} 倍の大きさになる。

残った電界や $\overline{U}_{/\!/ i}$ のゆっくりした時間変化を追跡するには，トロイダル磁場のリップルによる非両極性拡散や中性粒子との荷電交換[12]又はラーマー半径での展開の高次の補正[9]等の効果を考える必要がある。

謝　　　　辞

最後に，田中正俊氏，岡本正雄氏をはじめとして，議論いただいた核融合研究室の各氏に感謝します。

参　考　文　献

(1) H.P.Zehrfeld and B.J.Green : Nudear Fusion 12 569
(2) T.E.Stringer : Phys.Rev Letters 22 770 (1969)
(3) P.J.Catto et al : Phys.Fluids 16 1719 (1973)

(4) T.H.Stix : Phys.Fluids 16 1260 (1973)
(5) T.E.Stringer : J.Plasma Phys. 10 433 (1973)
(6) L.M.Kovrizhnykh : IC/70/86 (1970)
(7) C.L.Longmire and M.N.Rosenbluth : Phys.Rev. 103 507 (1956)
(8) V.E.Golant : Soviet Phys.Tech.Phys 8 189 (1968)
(9) M.N.Rosenbluth et al : IAEA-CN-28/C-12 (1971)
(10) M.N.Rosenbluth et al : Phys.Fluids 15 116 (1972)
(11) A.A.Galeev and R.Z.Sagdeev : Sov.Phy-Dokl. 14 1198 (1970)
(12) D.J.Sigmar and J.F.Clarke : ORNL-TM-4606 (1974)