JAERI-M
6208

整数次変形ベッセル関数の計算方法と関数サブプログラム

1975年8月

河村　洋

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

整数次変形ベッセル関数の計算方法と関数サブプログラム

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部
河村　洋

（1975年7月23日受理）

変形ベッセル関数 $I_n(x)$，$K_n(x)$ の級数和を扱う場合には，高い次数まで精度のよい値が必要となる。そこで，$0 \leq x \leq 100$，$0 \leq n \leq 100$ の範囲で，単精度，倍精度，4倍精度を与える関数サブプログラムを作製した。それらの呼び法は

	$I_n(x)$	$K_n(x)$
単精度	BINX(N, X)	BKNX(N, X)
倍精度	DINX(N, X)	DKNX(N, X)
4倍精度	QINX(N, X)	QKNX(N, X)

である。ここに，Nは次数で整数型入力である。Xは変数 x で関数自体の精度に応じて，各々単精度，倍精度，4倍精度の実数型入力である。

本報では，変形ベッセル関数の昇べき級数，漸近級数，高次漸近級数の三種の級数展開形と積分形を検討し，必要な精度を与える範囲や計算時間などを調べた。

JAERI-M 6208

Calculation of the Modified Bessel Functions of Integer Order and The Function Subprograms

Hiroshi KAWAMURA
Division of Reactor Engineering, Tokai, JAERI
(Received July 23, 1975)

Function subprograms of the modified Bessel functions In(x) and Kn(x) have been prepared; they are single, double, and quadruple functions.

The ascending series, asymptotic expansion, large order expansion and integral representation are examined. Calculational methods are so chosen to meet the required accuracy.

The calling procedures are

Precision	In(x)	Kn(x)
Single	BINX(N,X)	BKNX(N,X)
Double	DINX(N,X)	DKNX(N,X)
Quadruple	QINX(N,X)	QKNX(N,X)

(N is an integer input, and X is a real input with single, double or quadruple precision, respectively.)

Accuracy of the calculations is studied in $0 \leq n \leq 100$ and $0 \leq x \leq 100$, and the calculation time is also measured.

目　　次

1. はしがき

変形ベッセル関数，$I_n(x)$ および $K_n(x)$ は

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\left(1+\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1}$$

を満足する二つの基本解である。これらは一般に広く用いられる関数であるから，とくに次数nの低い領域についてはシステムサブルーチン（SSL）が用意されている。一般の計算においては，次数が $n=0$ や1の現われる場合が多いが，たとえば $I_n(x)$ のnに関する級数和を含む問題を扱かうと，nが大きな領域まで充分に信頼のおける関数値が必要となる。実際，筆者はこの問題に遭遇した。しかも筆者の扱った級数和は，和を作る段階で有効数字のケタ落ちの生ずる形であったため，nが高次でしかも高精度の関数値を得る必要にせまられた。現存のシステムサブルーチンには，計算精度が充分に検討されていない領域が見いだされた。

現在，当研究所計算センターのFACOM 230−60システムには，システムサブルーチンとして，

BESINS(X, N, BES, ILL)	$I_n(x)$	（単精度）
BESKNS(X, N, BES, ILL)	$K_n(x)$	（単精度）
BESIND(X, N, BES, ILL)	$I_n(x)$	（倍精度）
BESKND(X, N, BES, ILL)	$K_n(x)$	（倍精度）

が用意されている。しかし実際にBESINDを用いたところ，次のような例が見い出された。

	x	n	BESINDの値	正しい $I_n(x)$ の値
（例1）	12.1	12	6.6656467×10	6.6656433×10
（例2）	50.0	40	2.5161705×10^{20}	6.0071790×10^{13}
（例3）	50.0	100	オーバーフロー	2.7278879×10^{-16}

例1はx，nとも比較的小さな領域であるが，倍精度関数であるにもかかわらず，6ケタの精度しか得られない。例2では全く異った値を与える。例3は $I_n(x)$ 自体は充分小さな値であるのに，計算が途中でオーバーフローしてしまう。

他方BESKNDでは，上記のような不都合はないが，計算精度は全領域について10ケタしか得られない。

今回は，$0\leq x\leq 100$，$0\leq n\leq 100$ の領域において，単精度，倍精度，および4倍精度の関数サブプログラムを作製したので，その結果を報告する。

2. 計　算　式

変形ベッセル関数の計算には，つぎの3種の級数展開形が使用できる。

(1) 昇ベキ展開形

(2) 漸近展開形

(3) 高次展開形

また，とくに$K_n(x)$の計算には(4)積分形が有用である。

2.1 昇ベキ展開形

$I_n(x)$と$K_n(x)$の昇ベキ展開形はつぎのように表わされる。[1]

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} K_n(x) = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \\ & +(-)^{n+1}\,\ell n\left(\frac{x}{2}\right)\cdot In(x) \\ & +(-)^n \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!} \end{aligned} \tag{3}$$

ここに$\psi(n)$は，

$$\psi(1) = -\gamma$$

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad (n \geq 2) \tag{4}$$

$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082$
$40243\ 1044$

である。このγは今回新らたに求めた。最後の1～2ケタには誤差がある。

とくに$n=0$の場合は，

$$I_0(x) = 1 + \frac{\frac{x^2}{4}}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^3}{(3!)^2} + \cdots\cdots \tag{5}$$

$$\begin{aligned} K_0(x) = {} & -\left\{\ell n\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right\} I_0(x) + \frac{\frac{x^2}{4}}{(1!)^2} \\ & + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{(2!)^2} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^3}{(3!)^2} + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

となる。

この展開形はxおよびnの全領域で収束する。しかしxが大きくかつnが小さい領域では収束が遅く，かつ計算の途中でオーバーフローの生ずることもあるので，適宜他の展開形を用いる。

また，$K_n(x)$ の昇ベキ展開形では重大なケタ落ちが生ずるので注意を要する。すなわち，xが大きくなるにしたがい式(3)の右辺第2項が第3項と符号が逆で絶対値が等しい値に近づく。たとえば $n=1$，$x=10$ のとき

$$K_1(10) \text{の正しい値} = 1.8648773\times10^{-5}$$

であるのに対し

式(3)の第1項＝　0.1000

第2項＝　4298.7898

第3項＝$-$4298.8898

となって，単精度の計算では有効数字は全く得られない。このようなケタ落ちは，$n=0, 1$ のときxが1より大きいすべての範囲で生ずるので；この範囲では他の計算法を用いる必要がある。

2.2　漸近展開形

漸近展開形はつぎのように表わされる。(1)

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1-\frac{4n^2-1}{8x}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8x)^2}-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8x)^3}+\cdots\cdots\right\} \tag{7}$$

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left\{1+\frac{4n^2-1}{8x}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8x)^2}+\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8x)^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\} \tag{8}$$

この展開形は，$x\gg1$ かつ $x>n$ のとき成立する。しかし，この級数は全体としては発散するので，もっともよい精度の得られる項数で計算を打ち切る必要がある。実際の計算にあたっては真の値は知らないわけであるからこのようなことは不可能にみえるが，式(7)あるいは(8)の各項を計算するとその絶対値に最小値が現われるので，そこで打ち切ればよい。

漸近展開形によって得られる計算の精度は，xによってきまり，xが大きくなるほど高い精度が得られる。たとえば$K_n(x)$ で $n=0$ のときに得られる精度は，

x の値	得られる精度
1	1ケタ
2	4ケタ
5	6ケタ
10	13ケタ

20	20ケタ
40	37ケタ以上

である。この精度の限界は，ケタ落ちや丸めの誤差などの数値計算上の技法とは関係のない原理的な限界である。

また，{　}内の和をとるにあたって，nが大きいときにはケタ落ちの生ずることがある。このような場合には，数値計算で扱える有効数字のケタ数の制限のために，上記の原理的な精度の限界までも達することができない。

現存のSSLのサブルーチンBESINDの解法説明書によれば，BESINDでは$x \geq 12$，$x > n$で漸近展開形を適用し，しかも一律に30項の計算を行なっている。さきにBESINDで問題のある点の一つとして，$x=12.1$，$n=12$で必要な精度が得られないことを示した（例1）。これは，上で述べたような漸近展開で得られる精度の限界についての検討が不充分なためと考えられる。また，計算を一律に30項まで行なうという方法も適切でない。これらが，BESINDで正しい値が得られない場合のある原因であろうと思われる。

2.3 高次展開形

高次展開形は次数nの大きい領域に対して成立し，[1]

$$I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{n\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{n^k}\right\} \tag{9}$$

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{e^{-n\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{n^k}\right\} \tag{10}$$

と表される。ここで，

$$z=\frac{x}{n},\quad t=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\quad \eta=\sqrt{1+z^2}+\ln\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}} \tag{11}$$

である。$u_k(t)$の最初の4項は，つぎのような関数である。

$$\begin{aligned}
&u_0(t)=1\\
&u_1(t)=(3t-5t^3)/24\\
&u_2(t)=(81t^2-462t^4+385t^6)/1152\\
&u_3(t)=(30375t^3-369603t^5+765765t^7-425425t^9)/414720\\
&u_4(t)=(4465125t^4-94121676t^6+349922430t^8-446185740t^{10}\\
&\qquad\qquad+185910725t^{12})/39813120
\end{aligned} \tag{12}$$

この展開形では，xおよびnが大きいとき比較的よい精度がえられる。しかし4項のみでは8ケタ以上の精度をうることはできない。

2.4 積分形

$K_n(x)$を求めるにあたっては，積分形が有利である。

$$K_n(x)=\int_0^{\infty} {}^{-x\cosh u}\cosh(nu)\,du \tag{13}$$

この積分形は積分範囲が無限遠までであるが，被積分関数はuが大きくなるにしたがって急速に減少するので，数値計算も容易である。

いま，台形則に従がって数値積分を行ない，きざみ巾をh，そのときの誤差をEとする。すなわち，

$$\int_0^\infty f(u)du = h\left\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{k=1}^{\infty} f(kh)\right\}+E \tag{14}$$

このとき，誤差Eは大略つぎのように表わされる。[2]

$$|E| \sim \left[\frac{\pi}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)\sinh\left(\frac{2\pi^2}{h}\right)}\right]^{0.5} \left(\frac{4\pi}{xh}\right)^n \tag{15}$$

但，この関係は，$h \ll (2\pi/x)$ かつ $h \ll (2\pi/n)$ のときにのみ成立する。実際に筆者が $K_n(x)$ で $n=0$，$x=2$ について数値積分を行なった結果によれば

h	式(15)	実際の誤差
0.5	2×10^{-9}	3×10^{-8}
0.4	1×10^{-11}	2×10^{-11}
0.3	3×10^{-15}	2×10^{-14}
0.2	2×10^{-22}	2×10^{-21}
0.15	1×10^{-29}	1×10^{-28}
0.1	4×10^{-44}	1×10^{-38}
0.08	7×10^{-55}	4×10^{-39}

となって，式(15)の関係がほぼよく成立していることがわかる。もっとも誤差が 10^{-38} 以下となるべき領域では，有効数字が足りないために誤差は 10^{-38} にとどまる。このように積分形によれば，比較的大きなhでよい精度をうることができる。

2.5 漸化式

$I_n(x)$ および $K_n(x)$ の従がう漸化式は，

$$I_{n+1} = \frac{2n}{x} I_n(x) - I_{n-1}(x) \tag{16}$$

$$K_{n+1} = \frac{2n}{x} K_n(x) + K_{n-1}(x) \tag{17}$$

である。このうち $I_n(x)$ の漸化式は，右辺が差の形になっているために，nが大きくなるにつれてケタ落ちが生じて数値計算には適さない。$K_n(x)$ では右辺が和になっているためこのような心配がなく，$n=0$ と1の値を知れば式(17)によって高次の関数値を求めることができる。他方 $I_n(x)$ はすべてのnについて，直接関数値を求めなければならない。

2.6 近似式

いくつかの極限で成立する近似式を以下にあげる。まず，xが小さいときの近似式は，式(2)，

(3)で x →0 とすると，

$$I_n(x) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (x \to 0) \tag{18}$$

$$K_n(x) \sim \frac{1}{2}(n-1)!\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \qquad (n \neq 0) \tag{19}$$

$$K_0(x) \sim \left\{\ell n\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right\} \qquad (n=0) \tag{20}$$

と求められる。

つぎに x が大きいときには，式(7)，(8)で x →∞として，

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad (x \to \infty, \ x/n \gg 1) \tag{21}$$

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\ e^x \tag{22}$$

となる。

最後に n が大きい場合の近似形は，式 (9)，(10) で x 一定のもとに n →∞とすることにより，

$$I_n(x) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (n \to \infty, \ n/x \gg 1) \tag{23}$$

$$K_n(x) \sim \frac{1}{2}\ (n-1)!\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \tag{24}$$

と求められる。

3. 関数サブプログラム

前章までに検討した計算法にもとづいて実際に作成した関数サブプログラムについて，その呼び法，計算法，計算時間について述べる。

3.1 単精度関数

〔呼び法〕 $I_n(x)$ = BINX(N, X)

$K_n(x)$ = BKNX(N, X)

BINX, BKNX ―単精度実数型入力

N ―整数入力

X ―単精度実数型入力

〔計算法〕 BINX：

$x \leq 1$	昇べキ展開形
$x \leq 20$ かつ $n \leq 50$	昇べキ展開形
$x > 20$ かつ $n \leq 10$	漸近展開形
その他の領域	高次展開形

BKNX：

$x \leq 1$	昇べキ展開形
$x \leq 10$ かつ $n \leq 50$	昇べキ展開形
$x \leq 10$ かつ $n \leq 10$	漸近展開形
その他の領域	高次展開形

〔計算時間〕 表1に示す。

3.2 倍精度関数

〔呼び法〕 $I_n(x)$ = DINX (N, X)

$K_n(x)$ = DKNX (N, X)

DINX, DKNX ― 倍精度実数型出力

N ―整数入力

X ― 倍精度実数型入力

〔計算法〕 DINX：

$x > 30$ かつ $n < 10$	漸近展開形
$x > 60$ かつ $n < 20$	漸近展開形
その他の領域	昇べキ展開形

DKNX：

$n = 0, 1$	$x \leq 1$	昇べキ展開形
	$1 < x \leq 20$	積分形 ($h = 0.15$)
	$20 < x$	漸近展開形
$n \geq 2$		漸化式

〔計算時間〕 表2に示す。

3.3 4倍精度関数

〔呼び法〕 $I_n(x)$ = QINX(N, X)

$K_n(x)$ = QKNX(N, X)

QINX, QKNX − 4倍精度実数型出力

N − 整数入力

X − 4倍精度実数型入力

〔計算法〕 QINX : $x>50$ かつ $n>10$, $x>80$ かつ $n<20$ } 漸近展開形

その他の領域　昇ベキ展開形

QKNX : $n=0$, 1

$\begin{cases} x\leq 1 & \text{昇ベキ展開形} \\ 1<x\leq 60 & \text{積分形}\ (h=0.06) \\ 60<x & \text{漸近展開形} \end{cases}$

$n\geq 2$　漸化式

〔計算時間〕 表3に示す。

3.4 変数の範囲と計算精度

以上の関数サブプログラムは, $0\leq x\leq 100$, $0\leq n\leq 100$ の範囲内で所要の精度が得られることを確認した。精度を確認するにあたっては, ロンスキヤン

$$I_n(x)K_{n+1}(x)+I_{n+1}(x)K_n(x)=\frac{1}{x} \tag{25}$$

の関係を用いた。すなわち,

$$E=x\{I_n(x)K_{n+1}(x)+I_{n+1}(x)K_n(x)\}-1 \tag{26}$$

を計算し, これが十分小さいことを確認した。表4には, DINXとDKNXを用いて作成した数表と, 式(26)のEの絶対値を示した。なお, 関数値が 10^{-76} 以下あるいは 10^{76} 以上となるときには, 当然ながら正しい値を与えることはできない。

次数nが負の場合には

$$I_{-n}(x)=I_n(x) \tag{27}$$

$$I_{-n}(x)=K_n(x) \tag{28}$$

の関係にしたがった。変数xが負の場合, $I_n(x)$ については,

$$I_n(-x)=(-1)^n I_n(x) \tag{29}$$

の関係を用いて計算を行なったが, $K_n(x)$ はxが負のとき虚数となるので, 関数値を0として計算を打ち切った。

最後に, QINX, QKNXのFORTRANリストを付章に挙げた。

表 1 BINX, BKNXの計算時間 (単位 msec)

n \ x	1	5	10	50	100
0	4／4	3／6	3／7	2／2	3／2
1	2／4	2／7	4／9	3／2	3／2
5	2／6	2／8	3／10	3／2	3／3
10	2／7	2／9	3／11	3／4	3／3
40	2／12	3／18	4／16	3／3	4／4
100				6／4	4／4

斜線の左はBINX, 右はBKNXの計算時間（FACOM230－60による）

表 2 DINX, DKNXの計算時間 (単位 msec)

n \ x	1	10	30	60	100
0	3／4	5／8	8／7	5／4	4／4
1	2／6	4／8	7／6	5／4	4／3
10	2／8	5／15	8／11	5／8	4／6
20	4／8	4／17	6／12	9／11	6／7
100			8／16	10／13	13／7

斜線の左はDINX, 右はDKNXの計算時間（FACOM230－60による）

表 3 QINX, QKNXの計算時間 (単位 msec)

n \ x	1	10	50	80	100
0	1／2	2／14	4／13	4／3	4／3
1	1／2	2／14	3／13	4／3	4／2
10	1／5	1／28	3／27	4／6	3／6
20	1／5	2／28	4／27	5／7	4／6
100			4／29	5／9	6／8

斜線の左はQINX, 右はQKNXの計算時間（FACOM230－75による）

参考文献

(1) Hand book of Mathematical Functions.
M.Abramowitz and I.A.Stegun (ed), Dover, New York, 1965.

(2) FETTIS, H. E, MTAC, Vol. 9, (1955), pp. 85－92.

表4　In(x), Kn(x) の数表と計算誤差

- - - - - - - - - - - - - - - - - X= 1.00 - - - - - - - - - - - - - - - - -

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	1.2660658777520083D+00	4.2102443824070833D-01	0.0
1	5.6515910399248503D-01	6.0190723019723457D-01	8.7E-19
2	1.3574766976703828D-01	1.6248388986351775D+00	0.0
3	2.2168424924331902D-02	7.1012628247379445D+00	0.0
4	2.7371202210468663D-03	4.4232415847062845D+01	8.7E-19
5	2.7146315595697188D-04	3.6096058960124070D+02	0.0
6	2.2488661477147573D-05	3.6538383118594699D+03	8.7E-19
7	1.5992182312009953D-06	4.4207020331914879D+04	8.7E-19
8	9.9606240333639786D-08	6.2255212295866778D+05	8.7E-19
9	5.5183858627586722D-09	1.0005040987670599D+07	1.7E-18
10	2.7529480398368736D-10	1.8071328990102945D+08	8.7E-19
20	3.9668359858190201D-25	6.2943693604245352D+22	8.7E-19
30	3.5395005881064477D-42	4.7061455267836269D+39	1.7E-18
40	1.1215097413314860D-60	1.1142206511787828D+58	0.0

- - - - - - - - - - - - - - - - - X= 2.00 - - - - - - - - - - - - - - - - -

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	2.2795853023360673D+00	1.1389387274953344D-01	0.0
1	1.5906368546373291D+00	1.3986588181652243D-01	0.0
2	6.8894844769873820D-01	2.5375975456605586D-01	0.0
3	2.1273995923985266D-01	6.4738539094863415D-01	8.7E-19
4	5.0728569979180238D-02	2.1959159274119583D+00	8.7E-19
5	9.8256793231317023D-03	9.4310491005964674D+00	0.0
6	1.6001733635217266D-03	4.9351161430394296D+01	0.0
7	2.2463914200134252D-04	3.0553801768296224D+02	8.7E-19
8	2.7699369512329010D-05	2.1881172852111300D+03	8.7E-19
9	3.0441859027104379D-06	1.7810476299372002D+04	0.0
10	3.0169638793506844D-07	1.6248240397955915D+05	4.3E-19
20	4.3105605761095483D-19	5.7708568527002410D+16	8.7E-19
30	3.8935196641831643D-33	4.2711257548876876D+30	8.7E-19
40	1.2558691921654163D-48	9.9408398847441119D+45	8.7E-19
50	3.3530428298606416D-65	2.9799817396049217D+62	8.7E-19

---------------- X= 5.00 ----------------

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	2.7239871823604447D+01	3.6910983340425943D-03	8.7E-19
1	2.4335642142450527D+01	4.0446134454521642D-03	1.7E-18
2	1.7505614966624236D+01	5.3089437122234600D-03	1.7E-18
3	1.0331150169151138D+01	8.2917684152309322D-03	8.7E-19
4	5.1082347636428699D+00	1.5259065810500579D-02	8.7E-19
5	2.1579745473225465D+00	3.2706273712031858D-02	2.6E-18
6	7.9228566899777702D-01	8.0671613234564294D-02	1.7E-18
7	2.5648894172788163D-01	2.2631814547498616D-01	8.7E-19
8	7.4116632159708459D-02	7.1436242056452556D-01	1.7E-18
9	1.9315718816814558D-02	2.5122778912814679D+00	8.7E-19
10	4.5800444191760513D-03	9.7585628291778101D+00	8.7E-19
20	5.0242393579718060D-11	4.8270005206214847D+08	1.7E-18
30	3.9978449712505648D-21	4.1121320636260597D+18	1.7E-18
40	1.1804269803595625D-32	1.0507567219474983D+30	8.7E-19
50	2.9314696468108502D-45	3.3943222434301614D+42	1.7E-18
60	1.0015816712993345D-58	8.2914258415033009D+55	1.7E-18
70	6.5403710354469661D-73	1.0893420741878466D+70	0.0

---------------- X= 10.00 ----------------

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	2.8157166284662545D+03	1.7780062316167652D-05	1.7E-18
1	2.6709883037012547D+03	1.8648773453825585D-05	1.7E-18
2	2.2815189677260035D+03	2.1509817006932769D-05	1.7E-18
3	1.7583807166108532D+03	2.7252700256598692D-05	1.7E-18
4	1.2264905377594916D+03	3.7861437160891984D-05	1.7E-18
5	7.7718828640325996D+02	5.7541849985312279D-05	2.6E-18
6	4.4930225135623164D+02	9.5403287146204263D-05	1.7E-18
7	2.3802558477578199D+02	1.7202579456075740D-04	8.7E-19
8	1.1606643267013685D+02	3.3623939953126462D-04	1.7E-18
9	5.2319292503563042D+01	7.1000883381078078D-04	1.7E-18
10	2.1891706163723371D+01	1.6142553003906700D-03	8.7E-19
20	1.2507997356449476D-04	1.7874427820770548D+02	8.7E-19
30	7.7875697831630483D-12	2.0302478125352421D+09	3.5E-18
40	2.0421232739878621D-20	5.9382246806493500D+17	1.7E-18
50	4.7568945607268399D-30	2.0613737753892575D+27	0.0
60	1.5683092935846136D-40	5.2412622853259802D+37	1.3E-18
70	1.0047183125987461D-51	7.0378472577313052D+48	1.3E-18
80	1.5727623789148532D-63	3.9432082134511583D+60	4.3E-19
90	7.1531746364439281D-76	7.7190513871991598D+72	8.7E-19

X= 20.00

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	4.3558282559553533D+07	5.7412378153365243D-10	8.7E-19
1	4.2454973385127770D+07	5.8830579695570382D-10	0.0
2	3.9312785221040756D+07	6.3295436122922281D-10	8.7E-19
3	3.4592416340919619D+07	7.1489666920154838D-10	8.7E-19
4	2.8935060318764871D+07	8.4742336198968733D-10	0.0
5	2.3018392213413671D+07	1.0538660139974233D-09	8.7E-19
6	1.7425864212058035D+07	1.3743563689883990D-09	8.7E-19
7	1.2562873686178850D+07	1.8784798353904627D-09	8.7E-19
8	8.6318526317328405D+06	2.6892922537617229D-09	0.0
9	5.6573915807925771D+06	4.0299136383998410D-09	0.0
10	3.5402002090195211D+06	6.3162145283215798D-09	8.7E-19
20	3.1887503288536148D+03	5.5431116361258163D-06	4.3E-19
30	8.2132462497325631D-02	1.6883087719470801D-01	1.7E-18
40	1.3151119250302272D-07	8.5011173077363343D+04	4.3E-19
50	2.2551205757604039D-14	4.1171120912201772D+11	8.7E-19
60	6.0629297550856557D-22	1.3039253298517453D+19	8.7E-19
70	3.3685511634860447D-30	2.0388539686731173D+27	2.6E-18
80	4.7586091052933075D-39	1.2741887793095834D+36	2.6E-18
90	2.0068022642691879D-48	2.7024323281711126D+45	1.7E-18
100	2.8703193216428772D-58	1.7081356456876033D+55	8.7E-19

X= 30.00

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	7.8167229782397748D+11	2.1324774964630564D-14	2.6E-18
1	7.6853203893895699D+11	2.1677320018915494D-14	2.2E-18
2	7.3043682856138035D+11	2.2769929632558263D-14	2.2E-18
3	6.7114046179743961D+11	2.4713310636589930D-14	2.2E-18
4	5.9620873620189243D+11	2.7712591759876249D-14	2.2E-18
5	5.1215146547693497D+11	3.2103335105890263D-14	1.3E-18
6	4.2549158104291411D+11	3.8413703461839670D-14	2.2E-18
7	3.4195483305976932D+11	4.7468816490626131D-14	2.6E-18
8	2.6591265894835509D+11	6.0565817824131865D-14	1.3E-18
9	2.0013474828731328D+11	7.9770585996829792D-14	2.2E-18
10	1.4583180997596712D+11	1.0842816942222974D-13	8.7E-19
20	1.1269851044483771D+09	1.2304516475442477D-11	7.8E-18
30	5.3650961087079533D+05	2.1965122563995390D-08	8.7E-18
40	2.4055697639533881D+01	4.1568547695014407D-04	8.7E-18
50	1.4590106916468947D-04	5.8770686258007237D+01	7.8E-18
60	1.5955773253636701D-10	4.6713096235994667D+07	7.8E-18
70	3.9409832840600027D-17	1.6658915770116269D+14	8.7E-18
80	2.6264696240183168D-24	2.2280918483636685D+21	8.7E-18
90	5.4467915828639306D-32	9.6762232707325992D+28	8.7E-18
100	3.9476420053334280D-40	1.2131584253026668D+37	7.8E-18

X= 40.00

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	1.4894774793419900D+16	8.3928611000995671D-19	0.0
1	1.4707396163259353D+16	8.4971319548610387D-19	4.3E-19
2	1.4159404985256932D+16	8.8177176978426191D-19	4.3E-19
3	1.3291455664733659D+16	9.3789037246453006D-19	4.3E-19
4	1.2165686635546883D+16	1.0224553256539414D-18	0.0
5	1.0858318337624283D+16	1.1423814375953183D-18	0.0
6	9.4511070511408125D+15	1.3080506850527710D-18	1.3E-18
7	8.0229862222820389D+15	1.5347966431111496D-18	1.3E-18
8	6.6430618733420989D+15	1.8452295101416734D-18	4.3E-19
9	5.3657614729451994D+15	2.2728884471678190D-18	8.7E-19
10	4.2284692105167592D+15	2.8680293113671919D-18	4.3E-18
20	1.0445963312947992D+14	1.0703023799997379D-16	1.1E-17
30	2.7269541250656896D+11	3.6670011340654642D-14	1.1E-17
40	9.5753466317139004D+07	9.2305544536064921D-11	8.7E-18
50	5.7268656631289897D+03	1.3634854128794100D-06	8.7E-18
60	7.1856419684525868D-02	9.6492787492223801D-02	1.0E-17
70	2.2560093354901202D-07	2.7489493701686544D+04	8.7E-18
80	2.0529525861541668D-13	2.7229647569287018D+10	8.7E-18
90	6.1205647620052623D-20	8.2944903935579559D+16	7.8E-18
100	6.6249380222596139D-27	7.0074023297775703D+23	7.8E-18

X= 50.00

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	2.9325537838493363D+20	3.4101677497894956D-23	8.7E-19
1	2.9030785901035568D+20	3.4441022267175557D-23	1.3E-18
2	2.8164306402451940D+20	3.5479318388581978D-23	8.7E-19
3	2.6777641388839412D+20	3.7279367738262115D-23	1.3E-18
4	2.4950989435791211D+20	3.9952842517173432D-23	1.3E-18
5	2.2785483079112819D+20	4.3671822541009864D-23	4.3E-19
6	2.0393892819968647D+20	4.8687207025375404D-23	0.0
7	1.7890948802320343D+20	5.5356752227099961D-23	0.0
8	1.5384427155318951D+20	6.4187097648963394D-23	8.7E-19
9	1.2967932112618279D+20	7.5896623474768247D-23	0.0
10	1.0715971594776370D+20	9.1509882099879962D-23	6.1E-18
20	5.4420084027529975D+18	1.7061483797220351D-21	1.6E-17
30	4.2749936497955949D+16	2.0058168144151079D-19	1.6E-17
40	6.0071789743211149D+13	1.2998697091950808D-16	1.6E-17
50	1.7650802430016712D+10	4.0060134766400896D-13	1.6E-17
60	1.2594392827575529D+06	5.0830073462328324D-09	1.6E-17
70	2.4980735033733956D+01	2.3267150827390170D-04	1.3E-17
80	1.5508872082842242D-04	3.4173569206791308D+01	1.5E-17
90	3.3402938708051045D-10	1.4538814256006472D+07	1.6E-17
100	2.7278879470966916D-16	1.6394035276269252D+13	1.6E-17

- - - - - - - - - - - - - - - - - X= 60.00 - - - - - - - - - - - - - - - - -

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	5.8940770556098011D+24	1.4138978405591078D-27	2.2E-18
1	5.8447515883904682D+24	1.4256320265171043D-27	3.0E-18
2	5.6992520026634521D+24	1.4614189081096780D-27	3.5E-18
3	5.4648014548795714D+24	1.5230599537244162D-27	3.0E-18
4	5.1527718571754950D+24	1.6137249034821196D-27	2.2E-18
5	4.7777652072561720D+24	1.7382232741886988D-27	2.6E-18
6	4.3564776559661330D+24	1.9034287825135694D-27	3.0E-18
7	3.9064696760629454D+24	2.1189090306914127D-27	2.6E-18
8	3.4449680648847790D+24	2.3978408896748990D-27	2.6E-18
9	2.9878115254270044D+24	2.7583332679380525D-27	2.6E-18
10	2.5486246072566777D+24	3.2253408700563148D-27	5.2E-18
20	2.1091734863057240D+23	3.7482954006874724D-26	1.7E-17
30	3.5634994123518100D+21	2.0916405470316506D-24	1.6E-17
40	1.3483773543882440D+19	5.1422476530462040D-22	1.8E-17
50	1.2704607933652174D+16	5.0389298085176515D-19	1.7E-17
60	3.3208432670456367D+12	1.7743926209872152D-15	1.7E-17
70	2.6695038898476381D+08	2.0315377287228477D-11	1.9E-17
80	7.2547012597154917D+03	6.8920143305569609D-07	1.8E-17
90	7.2576965326011801D-02	6.3690514101911985D-02	1.8E-17
100	2.8832770906491969D-07	1.4870012754946299D+04	1.6E-17

- - - - - - - - - - - - - - - - - X= 70.00 - - - - - - - - - - - - - - - - -

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	1.2015889579125463D+29	5.9446613372925023D-32	6.9E-18
1	1.1929750788892312D+29	5.9869736739138570D-32	6.9E-18
2	1.1675039556585683D+29	6.1157177279757554D-32	6.1E-18
3	1.1262605671373130D+29	6.3364432583696144D-32	6.1E-18
4	1.0709673356182272D+29	6.6588414358360081D-32	6.9E-18
5	1.0038643002095156D+29	7.0974537081794439D-32	7.8E-18
6	9.2755814987401068D+28	7.6727633941473572D-32	7.8E-18
7	8.4485433165968518D+28	8.4127845757475623D-32	7.8E-18
8	7.5858728354207364D+28	9.3553203092968697D-32	6.9E-18
9	6.7146295256435406D+28	1.0551143503586847D-31	6.9E-18
10	5.8592538145409688D+28	1.2068471495933487D-31	6.1E-18
20	6.8946130527930835D+27	9.9615763479998895D-31	2.2E-17
30	2.0410663458476162D+26	3.2166266511460314D-29	2.6E-17
40	1.6173201806538742D+24	3.8345628969386729D-27	2.7E-17
50	3.6944034898904903D+21	1.5732816234949000D-24	2.6E-17
60	2.6331915560299588D+18	2.0595577434296631D-21	2.4E-17
70	6.3365829088112054D+14	7.9707225176911166D-18	2.6E-17
80	5.5506868170266021D+10	8.4738396691726910D-14	2.6E-17
90	1.8981971735919222D+06	2.3102217931696989D-09	2.7E-17
100	2.7017219102595394D+01	1.5161193930722306D-04	2.9E-17

X= 80.00

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	2.475178404334170 4D+33	2.5251198425054719D-36	0.0
1	2.4596595795675408D+33	2.5408531275211701D-36	0.0
2	2.4136869148449819D+33	2.5886411706935011D-36	0.0
3	2.3389752338252917D+33	2.6702851860558451D-36	4.3E-19
4	2.2382637723080850D+33	2.7889125596476895D-36	0.0
5	2.1151488565944832D+33	2.9491764420206141D-36	8.7E-19
6	1.9738701652337746D+33	3.1575596149002663D-36	8.7E-19
7	1.8190683318094170D+33	3.4228103842556540D-36	0.0
8	1.6555332071671267D+33	3.7565514321450057D-36	4.3E-19
9	1.4879616903759917D+33	4.1741206706846552D-36	0.0
10	1.3207418268325285D+33	4.6957285830490531D-36	0.0
20	2.0265314377577584D+32	2.9920407657642266D-35	5.2E-18
30	9.1987338426633020D+30	6.3618440762439865D-34	2.2E-17
40	1.2897808250476509D+29	4.3342014548614512D-32	2.2E-17
50	5.8927749458163607D+26	8.9940101003189463D-30	2.2E-17
60	9.3062400321125634D+23	5.3727047428917005D-27	2.2E-17
70	5.3988707739820616D+20	8.7121365087419617D-24	2.1E-17
80	1.2216388242124360D+17	3.6175872337545157D-20	2.2E-17
90	1.1418233477889885D+13	3.6365044314967285D-16	2.0E-17
100	4.6519483285061021D+08	8.3928710724649080D-12	2.1E-17

X=100.00

N	IN(X)	KN(X)	ERROR
0	1.0737517071310738D+42	4.6566282291759022D-45	1.7E-18
1	1.0683693903381625D+42	4.6798537356369094D-45	1.3E-18
2	1.0523843193243105D+42	4.7502253038886403D-45	8.7E-19
3	1.0262740175651900D+42	4.8698627477924550D-45	1.3E-18
4	9.9080787827039914D+41	5.0424170687561876D-45	1.7E-18
5	9.4700938730355810D+41	5.2732561132929500D-45	1.7E-18
6	8.9610693954004333D+41	5.5697426800854826D-45	1.3E-18
7	8.3947655455875290D+41	5.9416252349032080D-45	1.3E-18
8	7.7858022190181793D+41	6.4015702129719318D-45	1.3E-18
9	7.1490371905446203D+41	6.9658764689787170D-45	8.7E-19
10	6.4989755247201476D+41	7.6554279773881008D-45	8.7E-19
20	1.4483461256427171D+41	3.3852054148901702D-44	1.0E-17
30	1.2061548704498434D+40	3.9706020559593988D-43	2.8E-17
40	3.8417054996804276D+38	1.2084207999827006D-41	2.9E-17
50	4.8219580855940807D+36	9.2745226536133261D-40	2.9E-17
60	2.4691003858200678D+34	1.7364442835366806D-37	2.7E-17
70	5.3548458292259718D+31	7.6494167560706101D-35	2.6E-17
80	5.1129829028234015D+28	7.6361037387276308D-32	2.8E-17
90	2.2343879639736855D+25	1.6632980673565739D-28	2.5E-17
100	4.6415349416161991D+21	7.6171296304940856D-25	2.8E-17

付章　QINX, QKNXのフォートランリスト

```
ST-NO                    SOURCE PROGRAM                                    SEQ

      REAL FUNCTION QINX*16(NN,XI)
C
C     MODIFIED BESSEL FUNCTION IN(X)
C        NN - INTEGER, NEGATIVE, ZERO, POSITIVE.
C         XI - REAL*16,           NEGATIVE,ZERO,POSITIVE
C     CODED BY HIROSHI KAWAMURA, JUNE, 1975.
C
      REAL*16          DN,DX,A,AA,B,BB,C,CC,D,DD,E,EE,F,FF,G,GG,S,PAI,
     1    U1,U2,U3,U4,T,Z,ET,SG,XI
      DATA EPS/1.0E-40/ ,
     *PAI/3.14159265358979323846264338327950288412100 /
      N=IABS(NN)
      DX=QABS(XI)
      X=DX
      SG=1
      IF(XI.LT.0.) SG=(-1 )**N
      DN=N
      IF(DX.GT.50.0 .AND. N.LE.10) GO TO 300
      IF(DX.GT.80.0 .AND. N.LE.20) GO TO 300
C
  100 CONTINUE
      A=1.
      IF(N.EQ.0) GO TO 115
      DO 110 I=1,N
      F=I
      A=A*(DX/2.0)/F
  110 CONTINUE
  115 CONTINUE
C
      C=1.
      B=1.
      E=DX*DX/4.
      K=0
  120 CONTINUE
      BB=0
  130 CONTINUE
      K=K+1
      F=K
      G=DN+F
      B=B*E/(F*G)
      BB=BB+B
      KK=(K/5)*5
      IF(KK.NE.K) GO TO 130
      C=C+BB
      FF=BB/EPS
      AA=B/C
      G=A*C
C     WRITE(6,630) K,C,B,AA,G
      IF(FF.GT.C) GO TO 120
C
      M=K
      A=A*C
      QINX=A
C     WRITE(6,600) M,A
C 600 FORMAT('0ASCENDING   M=',I5,T40,'BINX=',T50,1PQ50.40)
      GO TO 900
C
```

ST-NO SOURCE PROGRAM (@INX) SE(

```
  300 CONTINUE
      B=1.
      D=4.0*DN*DN
      C=1.
      S=1.
      CC=1.
      K=0
  310 CONTINUE
      BB=0
  330 CONTINUE
      DD=CC
      D1=S*C
      K=K+1
      S=S*(-1.)
      F=K
      E=2*K-1
      C=C*(D-E*E)/(F*8.0*DX)
      BB=BB+S*C
      CC=@ABS(C)
      AA=CC/@ABS(B)
      SC=S*C
      D2=D1*SC
      IF(CC.GT.DD) GO TO 340
      KK=(K/5)*5
      IF(KK.NE.K) GO TO 330
  340 CONTINUE
      B=B+BB
C        G=B/(2.0*PAI*DX)**0.5
C     GG=DX/2.
C        G=    G*@EXP(GG)*@EXP(GG)
C     WRITE(6,630) K,SC,B,AA,G
C 630 FORMAT(' K=',I4,'  SC=',1PE12.5,'  B=',D12.5,'  AA=',D12.5,'   A='
C    *  ,Q50.40)
      IF(D2.LT.0.) GO TO 310
      IF(CC.GT.DD) GO TO 320
      B1=@ABS(BB)
      EPSB=EPS*@ABS(B)
      IF(B1.LT.EPSB) GO TO 320
      GO TO 310
C
  320 CONTINUE
      M=K
         A=B/(2.0*PAI*DX)**0.5
      DD=DX/2.
         A=    A*@EXP(DD)*@EXP(DD)
      @INX=A
C     WRITE(6,620) M,A    ,AA
C 620 FORMAT('0ACSYMP        M=',I5,T40,'BINX=',T50,1P@50.40,5X,'AA=',
C    *   E10.2)
  390 CONTINUE
C
  900 CONTINUE
      @INX=@INX*SG
  910 IF=1
  920 IF=2
      RETURN
      END
```

ST-NO SOURCE PROGRAM SE(

```
      REAL FUNCTION QKNX*16(NN,XI)
C
C     MODIFIED BESSEL FUNCTION KN(X)
C        NN - INTEGER, NEGATIVE, ZERO, POSITIVE.
C        XI - REAL*16, POSITIVE ONLY
C     CODED BY HIROSHI KAWAMURA, JUNE, 1975.
C
      REAL*16          DN,DX,DK,A,B,C,D,E,F,FF,G,GG,GAM,A1,A2,S,PAI,
     1     AA,BB,CC,DD,EE,U1,U2,U3,U4,T,Z,ET ,BIN ,XI
      DATA EPS/1.0E-40/ ,
     *PAI/3.14159265358979323846264338327950288412100 /
     *GAM/0.57721566490153286060651209008240243104390O/
C
      IF(XI.LE.0.) GO TO 970
      NK=IABS(NN)
      DX=QABS(XI)
      X=DX
C
      N1=1
      N2=2
      IF(NK.EQ.0) N2=1
      IF(NK.EQ.1) N1=2
      DO 500 NC=N1,N2
      N=NC-1
      DN=N
      IF(DX.GT.60.) GO TO 300
      IF(DX.GT.1.0) GO TO 400
  100 CONTINUE
      A=1.
      IF(N.EQ.0) GO TO 115
      DO 110 I=1,N
      F=I
      A=A*(DX/2.0)/F
  110 CONTINUE
  115 CONTINUE
C
      C=1.
      B=1.
      E=DX*DX/4.
      K=0
  120 CONTINUE
      K=K+1
      F=K
      G=DN+F
      B=B*E/(F*G)
      C=C+B
      FF=B/EPS
      IF(FF.GT.C) GO TO 120
      M=K
      BIN =A*C
C
      IF(N.NE.0) GO TO 20
      FF=DX/2.
      A=DX**2/4.
      C=A
      B=A
      D=1.
```

```
ST-NO                    SOURCE PROGRAM      ( QKNX   )                        SE(

      K=1
   10 CONTINUE
      K=K+1
      M=K
      DK=K
      D=D+(1./DK)
      C=C*B  /(DK*DK)
      E=D*C
      A=A+E
      IF(E.GT.EPS*A) GO TO 10
C      AG=A
      QKNX=A-(QLOG(DX/2.)+GAM)*BIN
      U1=QKNX
C     AA=-(QLOG(DX/2.)+GAM)*BIN
C     DD=A+AA
C     WRITE(6,601) M,A,AA,DD
C 601 FORMAT('ON=0 ASCENDING   M=',I5, T40,'A=',T50,1PQ50.40/ T40,'AA=',
C    1     T50,Q50.40 / T40,'BKNX=',T50,Q50.40)
      GO TO 500
C
   20 CONTINUE
      FF=DX/2.
      A=(-1.)**(N+1)*QLOG(FF) *BIN
C
      G=1./DX
      IF(N.EQ.1) GO TO 35
      DO 30 K=1,N-1
      DK=K
   30 G=G*(2./DX)*DK
   35 CONTINUE
      C=1.
      A1=1.
      IF(N.EQ.1) GO TO 45
      DO 40 K=1,N-1
      M1=K
      DK=K
      FF=N-K
      C=C/(DK*FF) *(-DX**2/4.)
      A1=A1+C
      EPSA=EPS*QABS(A1)
      IF(QABS(C).LT.EPSA) GO TO 45
   40 CONTINUE
   45 CONTINUE
      IF(N.EQ.1) M1=0
      A1=G*A1
C
      G=1.
      DO 50 K=1,N
      DK=K
      G=G*(DX/2.)/DK
   50 CONTINUE
      G=G*(-1.)**N/2.
C
      D=-GAM-GAM
      DO 55 K=1,N
      DK=K
      D=D+(1./DK)
```

ST-NO SOURCE PROGRAM (QKNX)

```
   55 CONTINUE
C
      C=1.
      A2=D
      K=0
   60 CONTINUE
      K=K+1
      M2=K
      DK=K
      FF=N+K
      D=D+(1./DK)+(1./FF)
      C=C/(DK*FF) *(DX**2/4.)
      E=D*C
      A2=A2+E
      EPSA=EPS*QABS(A2)
      IF(E.GT.EPSA) GO TO 60
C
      A2=G*A2
      QKNX=A+A1+A2
      U2=QKNX
C     DD=A+A1+A2
C          WRITE(6,602) A,M1,A1,M2,A2,DD
C 602 FORMAT('0    ASCENDING',T40, 'A=',T50,1PQ50.40/
C    1              T20,'M1=',I5,T40,'A1=',T50,Q50.40/
C    2              T20,'M2=',I5,T40,'A2=',T50,Q50.40/
C    3              T40,'BKNX=',T50,Q50.40)
      GO TO 500
C
  300 CONTINUE
      B=1.
      D=4.*DN*DN
      C=1.
      CC=1.
      K=0
  310 CONTINUE
      DD=CC
      K=K+1
      M=K
      DK=K
      E=2*K-1
      C=C*(D-E*E)/(DK*8.*DX)
      B=B+C
      CC=QABS(C)
      AA=CC/B
      AA=QABS(AA)
      IF(K.LT.N+3) GO TO 310
      IF(AA.LT.EPS      ) GO TO 320
      IF(CC.LT.DD) GO TO 310
      B=B-0.5*C
C
  320 CONTINUE
      FF=(PAI/(2.*DX))**0.5 *B
      IF(DX.GT.352.) GO TO 940
      DD=DX/2.
      QKNX=FF*QEXP(-DD)*QEXP(-DD)
      IF(N.EQ.0) U1=QKNX
      IF(N.EQ.1) U2=QKNX
```

ST-NO SOURCE PROGRAM (QKNX) SE(

```
C         EE=FF*QEXP(-DD)*QEXP(-DD)
C              WRITE(6,604) M,EE,AA
C 604 FORMAT('0ASYMP     M=',I5,T40,'BKNX=',T50,1PQ50.40,10X,'AA=',Q12.5)
          GO TO 500
  390 CONTINUE
C
C         INTEGRAL FORM
  400 CONTINUE
          B=0.1
          IF(DX.GT.10.) B=0.06
          A=QEXP(-DX)/2.0
          A1=A
          K=0
  410 K=K+1
          C=QFLOAT(K)*B
          DD=(QEXP(C)+QEXP(-C))/2.
          D=DX*DD
          E=QEXP(-D)
          IF(N.EQ.0) CC=1.D0
          IF(N.NE.0) CC=DD
          E=E*CC
          A=A+E
          AE=A1*EPS*0.01
          IF(E.GT.AE) GO TO 410
          A=B*A
          QKNX=A
          IF(N.EQ.0) U1=QKNX
          IF(N.EQ.1) U2=QKNX
C
C         WRITE(6,610) B,K,A,EST,ERR
C 610 FORMAT('0INTEGRAL FORM B=',F5.3,5X,'K=',I4,T40,'BKNX=',T50,1PQ50.
C        140/ 3X,'ESTIMATED ERROR=',  E9.1,3X,'ACTUAL=',E9.1)
  490 CONTINUE
  500 CONTINUE
C
          IF(NK.LE.1) RETURN
C
          DO 600 IN=2,NK
          DN=IN-1
          QKNX=2.*DN*U2/DX+U1
          U1=U2
          U2=QKNX
  600 CONTINUE
          RETURN
C
  920 IF=2
          GO TO 990
  940 IF=4
  990 WRITE(6,690) XI,NN,IF
  690 FORMAT('0  BKNX NO ATAI GA FUTASHIKA DE ARU,  BKNX=0 TO SURS
        1    'X=',E15.8,'    N=',I10,'    IF=',I1)
          QKNX=0
          RETURN
C
  970 CONTINUE
          WRITE(6,670) XI,NN
  670 FORMAT('0   BKNX DE X GA FU DEARU, BKNX=0 TO SURU.    X=',E15.8,

        1    'N=',I10)
          QKNX=0
          RETURN
          END
```