

JAERI-M

6626

円柱および円筒における二次元問題の
変位と応力, 歪

1976年7月

原山 泰雄・山田 礼司・泉 文男

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

円柱および円筒における二次元問題の変位と応力, 歪

日本原子力研究所東海研究所安全工学部

原山泰雄・山田礼司・泉 文男

(1976年6月23日受理)

原子力の諸分野の構造設計において重要な円柱および円筒の軸対称二次元問題のうち, 代表的な平面歪, Laméの条件, 平面応力に関する変位, 歪, 応力の関係式をまとめたものである。弾性歪の外に熱歪をも取入れて整理した。式の誘導はオーソドックスに行なった。例えば, 平面応力状態の式から平面歪状態の式への誘導は, 物性値の変換によって求める方法等をとっていない。また, 取扱っているものは, 弾性法則が成立する範囲であるが, 積分定数は最も primitive に求めている。得られた変位等の式は表にして整理した。

Displacement, stress and strain in two-dimensional problems
of solid and hollow cylinders

Yasuo HARAYAMA, Rayji YAMADA and Fumio IZUMI

Division of Reactor Safety, Tokai, JAERI

(Received June 23, 1976)

Axially symmetrical two-dimensional problems in calculating stress and strain for solid and hollow cylinders are important in material strength of various equipments in nuclear technology.

The present report arranges the relationships of displacements, stresses and strains under plane stress, Lamé's condition and plane strain of two-dimensional problems, taking into account elastic and thermal strain.

The arranged relationships are shown as tables.

目 次

記号表	iv
はじめに	1
1. 一般関係式	1
2. 平衡方程式	3
3. 境界条件	5
4. 変位と応力および歪	9
5. まとめ	17
参考文献	17

Notation

- r, θ, z : Cylindrical coordinate.
- $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$: Normal stress components in cylindrical coordinate.
- u, v, w : Components of displacements parallel to coordinate axes.
- $\epsilon_r, \epsilon_t, \epsilon_z$: Strains in r -, θ -, and z -directions.
- E : Modulus of elasticity in tension and compression.
- ν : Poisson's ratio.
- α : Coefficients of thermal expansion.
- P_i : 1) Pressure acting on outside surface of solid cylinder.
2) Pressure acting on inside surface of hollow cylinder.
- P_o : Pressure acting on outside surface of hollow cylinder.
- P_f : Pressure acting on end surface of solid cylinder.
- P_c : Pressure acting on end surface of hollow cylinder.
- R : Radius of solid cylinder.
- R_i : Inside radius of hollow cylinder.
- R_o : Outside radius of hollow cylinder.
- T : Temperature.

はじめに

円柱および円筒の軸対称二次元問題は、原子力の諸分野の構造設計において重要である。特に、燃料棒の設計、強度評価には、不可欠なものである。

しかるに、円柱および円筒（円管）の応力、変位、歪の関係式をすべてにわたって記載し、handyに利用できるものがない。応力については、色々なテキストに導かれているが、変位、歪については必ずしも明確に述べられていない。そのため、必要に応じて変位等の式が誘導されている。そのさいしばしば条件の設定等において混乱を起し、誤った使用のされ方をしている場合がある。

この報告書は、円柱と円筒の軸対称二次元問題のうち代表的な平面歪、Laméの条件、平面応力に関する変位、歪、応力をまとめたものである。これらの応力等をまとめるにさいし、弾性歪の外に熱歪をも取入れて整理した。

式の誘導は、オーソドックスに行った。例えば、平面応力状態の式から平面歪状態の式へは、物性値の変換によって求めることも可能であるが、誘導にさいしては使用しなかった。ただし、最後にえられた式の検証には使用した。また、取扱っているものは、弾性法則が成立する範囲であるから、重ね合せが可能であり、積分定数の決定には、その法が便利であるが最もprimitiveに求めている。

得られた変位等の式は、最後に表にして整理した。利用上はこの表のみでよいと信じる。

1. 一般関係式

応力と歪に関する一般関係式 (general relationships) は、多くのテキストに記載されているが、後節で使用する関係上、温度変化による熱歪、熱応力を含んで書き下すと次のようである。ただし、二次元問題に限定するので剪断に関する応力および歪は除外する。また、座標は、円柱座標系を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t - \nu \sigma_z) + \alpha \Delta T \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_z - \nu \sigma_r) + \alpha \Delta T \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_t) + \alpha \Delta T \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

ここで、 ΔT はある基準温度からの温度差とする。

上式を σ (応力) に関して逆に解いたものは、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot E \left(\epsilon_r + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_t + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_z \right) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \\ \sigma_t &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot E \left(\epsilon_t + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_r \right) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

はじめに

円柱および円筒の軸対称二次元問題は、原子力の諸分野の構造設計において重要である。特に、燃料棒の設計、強度評価には、不可欠なものである。

しかるに、円柱および円筒（円管）の応力、変位、歪の関係式をすべてにわたって記載し、handyに利用できるものがない。応力については、色々なテキストに導かれているが、変位、歪については必ずしも明確に述べられていない。そのため、必要に応じて変位等の式が誘導されている。そのさいしばしば条件の設定等において混乱を起し、誤った使用のされ方をしている場合がある。

この報告書は、円柱と円筒の軸対称二次元問題のうち代表的な平面歪、Lameの条件、平面応力に関する変位、歪、応力をまとめたものである。これらの応力等をまとめるにさいし、弾性歪の外に熱歪をも取入れて整理した。

式の誘導は、オーソドックスに行った。例えば、平面応力状態の式から平面歪状態の式へは、物性値の変換によって求めることも可能であるが、誘導にさいしては使用しなかった。ただし、最後にえられた式の検証には使用した。また、取扱っているものは、弾性法則が成立する範囲であるから、重ね合せが可能であり、積分定数の決定には、その法が便利であるが最も primitive に求めている。

得られた変位等の式は、最後に表にして整理した。利用上はこの表のみでよいと信じる。

1. 一般関係式

応力と歪に関する一般関係式 (general relationships) は、多くのテキストに¹⁾記載されているが、後節で使用する関係上、温度変化による熱歪、熱応力を含んで書き下すと次のようである。ただし、二次元問題に限定するので剪断に関する応力および歪は除外する。また、座標は、円柱座標系を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t - \nu \sigma_z) + \alpha \Delta T \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_z - \nu \sigma_r) + \alpha \Delta T \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_t) + \alpha \Delta T \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

ここで、 ΔT はある基準温度からの温度差とする。

上式を σ (応力) に関して逆に解いたものは、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot E \left(\epsilon_r + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_t + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_z \right) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \\ \sigma_t &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot E \left(\epsilon_t + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_r \right) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$\sigma_z = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_r + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_t \right) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}$$

これらの応力および歪は、直応力、直歪 (normal stress, strain) であり、二次元問題のため主応力、主歪 (principal stress, strain) でもある。

1.1. 平均歪における一般関係式

先の関係式は、一般に成立する応力-歪の関係式である。その関係式に平面歪 (plane strain, $\epsilon_z=0$) の条件が導入された場合には、次のようになる。

(1.1) の第3式より、 $\epsilon_z=0$ から、

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_t) - \alpha\Delta TE$$

となるので、これを(1.1)の第1、第2式に代入することにより歪は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_t \right) + (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \epsilon_t &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_t - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right) + (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \epsilon_z &= 0 \quad (\text{条件}) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

である。また応力は(1.2)式より、ただちに、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \left(\epsilon_r + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_t \right) - \frac{\alpha\Delta T}{1-2\nu} E \\ \sigma_t &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \left(\epsilon_t + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_r \right) - \frac{\alpha\Delta T}{1-2\nu} E \\ \sigma_z &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_r + \epsilon_t) - \frac{\alpha\Delta T}{1-2\nu} E \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

と求められる。

1.2 平面応力における一般関係式

平面応力 (plane stress, $\sigma_z=0$) の場合の一般関係式は $\sigma_z=0$ よりただちに歪は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_t) + \alpha\Delta T \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r) + \alpha\Delta T \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

$$\left. \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \alpha\Delta T \right\}$$

となる。一方、応力は(1.1)の第3式から、 $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_t) + \alpha\Delta T$ が成立し、これより

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) - \frac{\alpha\Delta TE}{1-\nu} \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) - \frac{\alpha\Delta TE}{1-\nu} \\ \sigma_z &= 0 \quad (\text{条件}) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

が求められる。

2. 平衡方程式

円柱および円筒に関しては、次の平衡方程式が満足されている。¹⁾

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (2.1)$$

一方、円柱座標において中心軸に対し対称性がある場合変位と歪の間には、

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad (2.2)$$

が成立する。¹⁾

2.1. 平面歪の場合

(1.4)より、 $\sigma_r - \sigma_t$ および $d\sigma_r/dr$ を求め、かつ(2.2)式で与えられる関係式を使用することにより、

$$\sigma_r - \sigma_t = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) \right\} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \frac{dT}{dr} \quad (2.4)$$

が求められる。この二式を(2.1)式に代入することにより、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \alpha\Delta T \end{aligned} \right\}$$

となる。一方、応力は(1.1)の第3式から、 $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_t) + \alpha\Delta T$ が成立し、これより

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) - \frac{\alpha\Delta TE}{1-\nu} \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) - \frac{\alpha\Delta TE}{1-\nu} \\ \sigma_z &= 0 \quad (\text{条件}) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

が求められる。

2. 平衡方程式

円柱および円筒に関しては、次の平衡方程式が満足されている。¹⁾

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (2.1)$$

一方、円柱座標において中心軸に対し対称性がある場合変位と歪の間には、

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad (2.2)$$

が成立する。¹⁾

2.1. 平面歪の場合

(1.4)より、 $\sigma_r - \sigma_t$ および $d\sigma_r/dr$ を求め、かつ(2.2)式で与えられる関係式を使用することにより、

$$\sigma_r - \sigma_t = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) \right\} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \frac{dT}{dr} \quad (2.4)$$

が求められる。この二式を(2.1)式に代入することにより、

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{dr}$$

がえられる。この式は

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right\} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{dr}$$

と変形される。この微分方程式を解くことによって半径方向の変位の一般式が得られる。すなわち、

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int \alpha \Delta T \cdot r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2.5)$$

なお、この報告書で扱っているものは、軸対称二次元問題なので、半径方向以外の変位は関係しない。そこで半径方向の変位を単に変位と略称する。

上記の解は、平面歪のみならず、Lameの条件においても成立する。理由は、 $\epsilon_z = 0$ としても、 $\epsilon_z = \text{const}$ としても(2.3)、(2.4)式に何の影響も与えないからである。

2.2 平面応力の場合

(1.6)式より、 $\sigma_r - \sigma_t$ および $d\sigma_r/dr$ を求め、かつ(2.2)式で与えられる関係式を使用することにより、

$$\sigma_r - \sigma_t = \frac{1-\nu}{1-\nu^2} E \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} \right) + \nu \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) \right\} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{dT}{dr}$$

が求められる。この二式を(2.1)式に代入することにより、

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} \right) = \alpha (1+\nu) \frac{dT}{dr}$$

がえられる。この式は、前節と同じく

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right\} = \alpha (1+\nu) \frac{dT}{dr}$$

と変形される。この微分方程式を解くことによって変位の一般式がえられる。すなわち、

$$u = \frac{1}{r} \int \alpha (1+\nu) T r dr + c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (2.6)$$

である。

3. 境界条件

先に求めた(2.5)式と(2.6)式に含まれる積分定数は境界条件によって決定される。境界条件は、平面歪、平面応力条件に関しては、内、外面における半径方向応力がその面にかかる一符号を付けた圧力に等しいということである。圧力の符号を逆転する理由は、圧力が物体にかかったとき、圧縮応力として作用するからである。

Lameの条件の場合には、上記の外に σ_z に関する条件が付加される。すなわち、円柱の場合には

$$2\pi \int_0^R \sigma_z r dr = -\pi R^2 P_f$$

であり、円筒の場合には、

$$2\pi \int_{R_i}^{R_0} \sigma_z r dr = -\pi (R_0^2 - R_i^2) P_c$$

である。

3.1 平面歪

変位の一般解(2.5)式より、変位と歪の関係式(2.2)式を使用することにより、歪は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr + \alpha \Delta T \right] + c_1 - \frac{c_2}{r^2} \\ \epsilon_t &= \frac{u}{r} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr + c_1 + \frac{c_2}{r^2} \end{aligned} \right\} (3.1)$$

となる。これを(1.4)式で与えられる応力の式に代入することにより、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{c_1}{1-2\nu} - \frac{c_2}{r^2} \right\} \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T + \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{c_1}{1-2\nu} + \frac{c_2}{r^2} \right\} \\ \sigma_z &= \frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E c_1 - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T \end{aligned} \right\} (3.2)$$

が求まる。

3.1.A 円柱の場合

変位を与える式(2.5)で中心($r=0$)における変位が有限であるということより、ただちに積分定数の

$$c_2 = 0$$

が求まる。次に c_1 は、表面における半径方向応力が表面での圧力との間に $\sigma_r |_{r=R} = P_i$ という境界条件が成立しなければならないことから

$$c_1 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} P_i + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \quad (3.3)$$

と決定される。

3.1.B 円筒の場合

円筒に関する境界条件は

$$\sigma_r |_{r=R_i} = -P_i, \quad \sigma_r |_{r=R_0} = -P_0$$

である。この境界条件を (3.2) の第1式に適用することにより、積分定数は、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -(1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0 - P_i}{E} \\ &\quad + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \\ c_2 &= -(1+\nu) \frac{R_i^2 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0 - P_i}{E} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \end{aligned} \right\} (3.4)$$

と決定される。

3.2 Lamé の条件の場合

変位の一般式は、平面歪の場合と同じであるから、それより導かれる歪の一般式も平面歪と同一の式になる。 ϵ_r, ϵ_t は (3.1) 式で与えられる。ただし、 ϵ_z は0ではなく、 $\epsilon_z = \text{const}$ である。

応力は、この求められた $\epsilon_r, \epsilon_t, \epsilon_z = \text{const}$ を (1.2) 式に代入することにより、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{c_1}{1-2\nu} - \frac{c_2}{r^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z \right\} \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T + \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{c_1}{1-2\nu} + \frac{c_2}{r^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z \right\} \\ \sigma_z &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \cdot \epsilon_z + \frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} c_1 \end{aligned} \right\} \dots (3.5)$$

3.2 A 円柱の場合

境界条件の1つとして中心において変位が有限でなければならないことより $c_1 = 0$ となる。次に表面において $\sigma_r|_{r=R} = -P_i$ が成立しなければならないことより、(3.5)の第1式より

$$-\frac{E}{(1-\nu)} \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{c_1}{1-2\nu} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z \right) = -P_i$$

が成立する。結果として積分定数は、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} - \nu \epsilon_z \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

となる。

$\epsilon_z = 0$ とすれば、平面歪の場合の結果(3.3)式に一致する。正式には、 ϵ_z を決定しなければならないが、 ϵ_z は4.2で求めることにする。Lameの条件は平面歪の拡張なため平面歪で得られた式から求められることがある。 $\epsilon_z = 0$ 、すなわち平面歪として応力 σ_r, σ_t を求めても正しくLameの条件における応力がえられる。事実、上記(3.6)式で ϵ_z を意識的か無意識的か無視しているテキストもある。ただし、変位あるいは歪を求める場合には ϵ_z を無視して求めることはできないので注意すべきである。

3.2 B 円筒の場合

(3.5)式の第一式に境界条件、1) $\sigma_r|_{r=R_i} = -R_i$ 、2) $\sigma_r|_{r=R_0} = -P_0$ を適用することにより、積分定数が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} \\ &\quad - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0 - P_i}{E} - \nu \epsilon_z \\ c_2 &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - (1+\nu) \frac{R_0^2 R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0 - P_i}{E} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

ここで、 $\epsilon_z = 0$ とすれば平面歪の場合の積分定数(3.4)に一致する。 ϵ_z は4.2で決定される。また、3.2 Aで述べた注意はここでも成立する。

3.3 平面応力の場合

平面応力に関する変位の一般解(2.6)式に、変位と歪の関係式(2.2)式を使用することにより、歪は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= (1+\nu) \left[-\frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr + \alpha \Delta T \right] + c_1 - \frac{c_2}{r^2} \\ \epsilon_t &= (1+\nu) \frac{1}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr + c_1 + \frac{c_2}{r^2} \\ \epsilon_z &= (1+\nu) \alpha \Delta T - \frac{2\nu}{1-\nu} c_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となる。これを(1.6)式で与えられる応力の式に代入することにより、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{1-\nu} c_1 - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{c_2}{r^2} \\ \sigma_t &= \frac{E}{r^2} \int \alpha \Delta T r dr - E \alpha \Delta T + \frac{E}{1-\nu} c_1 + \frac{E}{1+\nu} \frac{c_2}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

が求まる。

3.3 A 円柱の場合

積分定数 c_2 は、中心における変位が有限であるという条件から、 $c_2 = 0$ である。 c_1 は、 $\sigma_r|_{r=R} = -P_i$ から(3.9)式を使って決められる。

結果として

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1-\nu}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - (1-\nu) \frac{P_i}{E} \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

がえられる。

3.3 B 円筒の場合

(3.9)式に境界条件 1) $\sigma_r|_{r=R_i} = -P_i$, 2) $\sigma_r|_{r=R_0} = -P_0$ を適用することにより、

積分定数は、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -(1-\nu) \frac{P_i}{E} - (1-\nu) \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0 - P_i}{E} + \frac{1-\nu}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \\ c_2 &= -(1+\nu) \frac{R_0^2 R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0 - P_i}{E} + (1+\nu) \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

と求まる。

4 変位と応力および歪

4.1. 平面歪

平面歪の一般形は(2.5)式で与えられる。すなわち、

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int \alpha \Delta T r dr + c_1 r + \frac{c_2}{r}$$

である。

4.1.A 円柱の場合

平面歪の変位の一般形に3.1節で求めた積分定数を代入することにより、円柱の場合の変位、

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{r}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - (1+\nu)(1-2\nu) r \frac{P_i}{E} \quad (4.1)$$

が求まる。この求められた変位から、変位と歪の関係式を使って次のように歪が決定される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \alpha \Delta T + (1-2\nu) \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \right] \\ &\quad - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} \\ \epsilon_t &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + (1-2\nu) \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \right] \\ &\quad - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} \\ \epsilon_z &= 0 \quad (\text{条件}) \end{aligned} \right\} (4.2)$$

上記(4.2)式を使い、応力と歪の関係式(1.4)より応力が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - P_i \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr - E \alpha \Delta T - P_i \\ \sigma_z &= \frac{2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{E}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T - 2\nu P_i \end{aligned} \right\} (4.2)'$$

この式のうち、 σ_r と σ_t は、Lameの条件においても成立する。

4.1 B 円筒の場合

平面歪の変位の一般形に3.1節で求めた積分定数を代入することにより、円筒の場合の変位

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{r}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \\
 & -(1+\nu)(1-2\nu) r \frac{P_i}{E} - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{R_0^2 r}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0 - P_i}{E} \\
 & -(1+\nu) \frac{R_0^2 - R_i^2}{r(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0 - P_i}{E} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{R_i^2}{r(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

が求まる。この求められた変位から、変位と歪の関係式(1.4)を使って、次のように歪が決定される。

$$\begin{aligned}
 \epsilon_r = & \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\alpha \Delta T - \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + \frac{(1-2\nu)r^2 - R_i^2}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \right] \\
 & + (1+\nu) \frac{R_i^2 \{ (1-2\nu)r^2 - R_0^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - (1+\nu) \frac{R_0^2 \{ (1-2\nu)r^2 - R_i^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} \\
 \epsilon_t = & \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + \frac{(1-2\nu)r^2 + R_i^2}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \right] \\
 & + (1+\nu) \frac{R_i^2 \{ (1-2\nu)r^2 + R_0^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - (1+\nu) \frac{R_0^2 \{ (1-2\nu)r^2 + R_i^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} \\
 \epsilon_z = & 0 \text{ (条件)}
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2 Lamé の条件

Laméの条件においても、変位の一般形は、平面歪の場合と同じである。

4.2 A 円柱の場合

変位の一般形に3.2節で求めた積分定数を代入することにより、円柱の場合の変位

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \left[\int_0^r \alpha \Delta T r dr + (1-2\nu) \frac{r^2}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \right] \\
 & -(1+\nu)(1-2\nu) r \frac{P_i}{E} - \nu r \epsilon_z \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

が求まる。この式で、 $\epsilon_z=0$ とおけば、これは平面歪の変位となる。逆に云えば ϵ_z が決定されなければ、Lameの条件の変位は正式には定まらない。 ϵ_z を求めるため4.1で計算したのと同じ方法によって、まず歪を計算すると、

$$\epsilon_r = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \alpha \Delta T + (1-2\nu) \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \right] \\ - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} - \nu \epsilon_z$$

$$\epsilon_t = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + (1-2\nu) \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \right] \\ - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} - \nu \epsilon_z$$

$$\epsilon_z = \text{const}$$

求めた歪を応力と歪の関係式(1.2)の第3式 σ_z に代入する。

$$\sigma_z = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \left[\epsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \Delta T + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1+\nu)(1-2\nu) \frac{P_i}{E} - 2\nu \epsilon_z \right\} \right] - E \frac{\alpha \Delta T}{1-2\nu} \\ = E \epsilon_z - \frac{1}{1-\nu} E \alpha \Delta T + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{E}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - 2\nu P_i$$

ϵ_z は、境界条件

$$2\pi \int_0^R \sigma_z r dr = -2\pi \int_0^R P_i r dr$$

から定められる。この式の左辺に先の σ_z を代入することにより、

$$\epsilon_z = 2\nu \frac{P_i}{E} - \frac{P_i}{E} + \frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \quad (4.6)$$

が決定される。

変位は、(4.5)および(4.6)式より

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{r}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr$$

$$-(1-\nu) r \frac{P_i}{E} + \nu r \frac{P_f}{E}$$

となる。したがって、Lame の条件下の歪は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\alpha \Delta T - \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr \right] + \frac{1-3\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \\ &\quad - (1-\nu) \frac{P_i}{E} + \nu \frac{P_f}{E} \\ \epsilon_t &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \\ &\quad - (1-\nu) \frac{P_i}{E} + \nu \frac{P_f}{E} \\ \epsilon_z &= \frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr + 2\nu \frac{P_i}{E} - \frac{P_f}{E} \end{aligned} \right\} (47)$$

となる。また応力は、次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{1-\nu} E \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \right] - P_i \\ \sigma_t &= \frac{1}{1-\nu} E \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - \alpha \Delta T \right] - P_i \\ \sigma_z &= \frac{1}{1-\nu} E \left[-\frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - \alpha \Delta T \right] - P_f \end{aligned} \right\} (48)$$

4.2 B 円筒の場合

変位の一般形に 3.2 節で求めた積分定数を代入することにより、円筒の場合の変位

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{(1-2\nu)r^2 + R_i^2}{r(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \\ &\quad + (1+\nu) \frac{R_i^2 \{ R_0^2 + (1-2\nu)r^2 \}}{r(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - (1+\nu) \frac{R_0^2 \{ (1-2\nu)r^2 + R_i^2 \}}{r(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} \\ &\quad - \nu r \epsilon_z \end{aligned} \quad (49)$$

が求まる。ここで $\epsilon_z = 0$ については、4.2Aで述べたことが成立している。未定の ϵ_z を決定するため、歪を計算する。

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + \alpha \Delta T + \frac{(1-2\nu)r^2 - R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \right] \\ &\quad + (1+\nu) \frac{(1-2\nu)r^2 R_i^2 - R_i^2 R_0^2}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - (1+\nu) \frac{(1-2\nu)r^2 R_0^2 - R_0^2 R_i^2}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} - \nu \epsilon_z \\ \epsilon_t &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + \frac{(1-2\nu)r^2 + R_i^2}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \right] \\ &\quad + (1+\nu) \frac{(1-2\nu)r^2 R_i^2 + R_0^2 R_i^2}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - (1+\nu) \frac{(1-2\nu)r^2 R_0^2 + R_0^2 R_i^2}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} \\ &\quad - \nu \epsilon_z \end{aligned}$$

この歪を応力と歪の関係式(1.2)の第3式 σ_z に代入する。

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_t) + E\epsilon_z - \alpha \Delta T E \\ &= \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{E}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr + \frac{2\nu R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} P_i - \frac{2\nu R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} P_0 \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T + E \epsilon_z \end{aligned}$$

ϵ_z は、境界条件

$$2\pi \int_{R_i}^{R_0} \sigma_z r dr = -2\pi \int_{R_i}^{R_0} P_c r dr = -\pi (R_0^2 - R_i^2) P_c$$

から定められる。この式の左辺に先の σ_z を代入することにより

$$\epsilon_z = \frac{2}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - 2\nu \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_i}{E} + 2\nu \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0}{E} - \frac{P_c}{E} \quad (4.10)$$

が決定される。

変位は、(4.9)および(4.10)より

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + \frac{(1-3\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2}{(1-\nu)(R_0^2 - R_i^2)} \frac{1}{r} \int_{R_i}^{R_0} \alpha (T - T_c) r dr$$

$$+ \frac{R_i^2 \{ (1-\nu) r^2 + (1+\nu) R_0^2 \}}{r (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_c}{E} - \frac{R_0^2 \{ (1-\nu) r^2 + (1+\nu) R_i^2 \}}{r (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} + \nu r \frac{P_c}{E}$$

(4.11)

と決定される。この変位より歪は、次のように整理される。

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\alpha \Delta T - \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr \right] + \frac{\{ (1-3\nu) r^2 - (1+\nu) R_i^2 \}}{(1-\nu) r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \\ &+ \frac{R_i^2 \{ (1-\nu) r^2 - (1+\nu) R_0^2 \}}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - \frac{R_0^2 \{ (1-\nu) r^2 - (1+\nu) R_i^2 \}}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} + \nu \frac{P_c}{E} \\ \epsilon_t &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + \frac{(1-3\nu) r^2 + (1+\nu) R_i^2}{(1-\nu) r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr \\ &+ \frac{R_i^2 \{ (1-\nu) r^2 + (1+\nu) R_0^2 \}}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - \frac{R_0^2 \{ (1-\nu) r^2 + (1+\nu) R_i^2 \}}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} + \nu \frac{P_c}{E} \\ \epsilon_z &= \frac{2}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - 2\nu \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_i}{E} + 2\nu \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0}{E} - \frac{P_c}{E} \end{aligned}$$

----- (4.12)

また、応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{r^2 - R_i^2}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr \right\} \\ &- \frac{R_i^2 (R_0^2 - r^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_i - \frac{R_0^2 (r^2 - R_i^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_0 \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{r^2 + R_i^2}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr + \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr - \alpha \Delta T \right\} \\ &+ \frac{R_i^2 (R_0^2 + r^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_i - \frac{R_0^2 (r^2 + R_i^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_0 \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{2}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - \alpha \Delta T \right\} - P_c \end{aligned}$$

(4.13)

この式で σ_r , σ_t は平面歪の場合と同じである。

4.3 平面応力の場合

平面応力の一般形は(2.6)式で与えられる。すなわち

$$u = (1+\nu) \frac{1}{r} \int \alpha \Delta T r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

である。

4.1.A 円柱の場合

平面応力の変位の一般形に3.3節で求めた積分定数を代入することにより、円柱に関する変位

$$u = (1+\nu) \frac{1}{r} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + (1-\nu) \frac{r}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - (1-\nu) \frac{P_i}{E} r \quad (4.14)$$

が定められる。上式より歪は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= (1+\nu) \left[-\frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \alpha \Delta T \right] + (1-\nu) \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr \\ &\quad - (1-\nu) \frac{P_i}{E} \\ \varepsilon_t &= (1+\nu) \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + (1-\nu) \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - (1-\nu) \frac{P_i}{E} \\ \varepsilon_z &= (1+\nu) \alpha \Delta T - \frac{2\nu}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr + 2\nu \frac{P_i}{E} \end{aligned} \right\} (4.15)$$

となる。

上式の ε_z の第一項は、その位置によって値が異なる。そのため、平面応力の適合条件を満足しなくなるのであるが薄板の場合には、平面応力の仮定を用いても十分な精度で解析できる。²⁾

応力は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - P_i \\ \sigma_t &= \frac{E}{r^2} \int_0^r \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{R^2} \int_0^R \alpha \Delta T r dr - E \alpha \Delta T - P_i \\ \sigma_z &= 0 \quad (\text{pl. stress}) \end{aligned} \right\} (4.16)$$

である。

4.3 B 円筒の場合

(2.6) および (3.16) 式より, 円筒に関する変位が次のように求まる。

$$u = \frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2}{r(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr + (1+\nu) \frac{1}{r} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr$$

$$+ \frac{R_i^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_0^2 \}}{r(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - \frac{R_0^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2 \}}{r(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E} \quad (4.17)$$

歪は, 上記に求められた変位からただちに次のように求められる。

$$\epsilon_r = \frac{(1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - (1+\nu) \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr + (1+\nu) \alpha \Delta T$$

$$+ \frac{R_i^2 \{ (1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_0^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - \frac{R_0^2 \{ (1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E}$$

$$\epsilon_t = \frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr + (1+\nu) \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr$$

$$+ \frac{R_i^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_0^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_i}{E} - \frac{R_0^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2 \}}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \frac{P_0}{E}$$

$$\epsilon_z = -2\nu \frac{1}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr + (1+\nu) \alpha \Delta T$$

$$- 2\nu \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_i}{E} + 2\nu \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_i^2} \frac{P_0}{E} \quad (4.18)$$

応力は, また次のようになる。

$$\sigma_r = E \frac{r^2 - R_i^2}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr - \frac{E}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr$$

$$- \frac{R_i^2(R_0^2 - r^2)}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} P_i - \frac{R_0^2(r^2 - R_i^2)}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} P_0$$

$$\sigma_t = E \frac{(r^2 + R_i^2)}{r^2(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} \alpha \Delta T r dr + \frac{E}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha \Delta T r dr - E \alpha \Delta T \quad (4.19)$$

$$+ \frac{R_i^2 (R_0^2 + r^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_i - \frac{R_0^2 (r^2 + R_i^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_0$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{pl. stress : 仮定})$$

なお、これらの式は熱および軸方向の圧力による項を除くと、Lame の条件で求めた変位、応力、歪と一致する。

5. ま と め

- 1) 二次元問題における円柱と円筒の変位および応力と歪を表-1~4にまとめて示す。
- 2) 表には、燃料棒として使用する場合のことを考慮して、燃料棒の場合の代表的温度分布を取ったときの式をも記載した。
- 3) 記載した式は、さらに無次元化表示等によってもっと簡単にもできるが、利用と物理的意味を考慮して primitive な形を採用した。
- 4) 平面歪と Lame の条件の応力のうち σ_r, σ_t は同じ形であるが、利用の便を考えて重複して記載した。
- 5) この表に記載した円筒の Lame の式は、通常の Lame の条件ではない。通常の Lame の条件に修正するためには

$$P_c = \frac{R_0^2 P_0 - R_i^2 P_i}{R_0^2 - R_i^2}$$

の置き直しが必要である。しかし、他の軸方向圧縮力等を考慮する場合、表にかかげた式の方が利用しやすいので上記の置き直しを行っていない。

参 考 文 献

- 1) S. Timoshenko & J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill.
- 2) J. S. Przemieniecki, "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill.

$$+ \frac{R_i^2 (R_0^2 + r^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_i - \frac{R_0^2 (r^2 + R_i^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_0$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{pl. stress : 仮定})$$

なお、これらの式は熱および軸方向の圧力による項を除くと、Lame の条件で求めた変位、応力、歪と一致する。

5. ま と め

- 1) 二次元問題における円柱と円筒の変位および応力と歪を表-1~4にまとめて示す。
- 2) 表には、燃料棒として使用する場合のことを考慮して、燃料棒の場合の代表的温度分布を取ったときの式をも記載した。
- 3) 記載した式は、さらに無次元化表示等によってもっと簡単にもできるが、利用と物理的意味を考慮して primitive な形を採用した。
- 4) 平面歪と Lame の条件の応力のうち σ_r, σ_t は同じ形であるが、利用の便を考慮して重複して記載した。
- 5) この表に記載した円筒の Lame の式は、通常の Lame の条件ではない。通常の Lame の条件に修正するためには

$$P_c = \frac{R_0^2 P_0 - R_i^2 P_i}{R_0^2 - R_i^2}$$

の置き直しが必要である。しかし、他の軸方向圧縮力等を考慮する場合、表にかかげた式の方が利用しやすいので上記の置き直しを行っていない。

参 考 文 献

- 1) S. Timoshenko & J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill.
- 2) J. S. Przemieniecki, "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill.

$$+ \frac{R_i^2 (R_0^2 + r^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_i - \frac{R_0^2 (r^2 + R_i^2)}{r^2 (R_0^2 - R_i^2)} P_0$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{pl. stress : 仮定})$$

なお、これらの式は熱および軸方向の圧力による項を除くと、Lame の条件で求めた変位、応力、歪と一致する。

5. ま と め

- 1) 二次元問題における円柱と円筒の変位および応力と歪を表-1~4にまとめて示す。
- 2) 表には、燃料棒として使用する場合のことを考慮して、燃料棒の場合の代表的温度分布を取ったときの式をも記載した。
- 3) 記載した式は、さらに無次元化表示等によってもっと簡単にもできるが、利用と物理的意味を考慮して primitive な形を採用した。
- 4) 平面歪と Lame の条件の応力のうち σ_r, σ_t は同じ形であるが、利用の便を考慮して重複して記載した。
- 5) この表に記載した円筒の Lame の式は、通常の Lame の条件ではない。通常の Lame の条件に修正するためには

$$P_c = \frac{R_0^2 P_0 - R_i^2 P_i}{R_0^2 - R_i^2}$$

の置き直しが必要である。しかし、他の軸方向圧縮力等を考慮する場合、表にかかげた式の方が利用しやすいので上記の置き直しを行っていない。

参 考 文 献

- 1) S. Timoshenko & J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill.
- 2) J. S. Przemieniecki, "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill.

Table 1

Notation

- r, θ, z : Cylindrical coordinates.
 $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$: Normal stress components in cylindrical coordinates.
 u, v, w : Components of displacements parallel to coordinate axes.
 $\epsilon_r, \epsilon_t, \epsilon_z$: Strains in r -, θ - and z -directions.
 E : Modulus of elasticity in tension and compression.
 ν : Poisson's ratio.
 α : Coefficient of thermal expansion.
 P_i : 1) Pressure acting on outside surface of solid cylinder.
 2) Pressure acting on inside surface of hollow cylinder.
 P_o : Pressure acting on outside surface of hollow cylinder.
 P_f : Pressure acting on end surface of solid cylinder.
 P_c : Pressure acting on end surface of hollow cylinder.
 R : Radius of solid cylinder.
 R_i : Inside radius of hollow cylinder.
 R_o : Outside radius of hollow cylinder.
 T : Temperature.

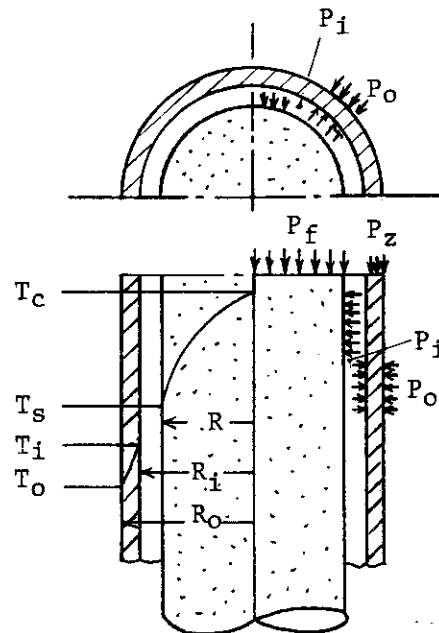


Table 2-1 Stress under plane strain on two dimensional problems

		solid cylinder		hollow cylinder			
stress	boundary condition	formulation	if temperature distribution is given by $T-T_s = (T_c-T_s)[1-(r/R)^2]$		formulation	if temperature distribution is given by $T-T_i = -(T_i-T_o)\ln(r/R_i)/\ln(R_o/R_i)$	
				<p>1) All parameters are finite at center ($r = 0$)</p> <p>2) $\sigma_r = -P_i$ at $r = R$</p>			
σ_r		$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T) r dr \right\}$	$\frac{E}{4(1-\nu)} \alpha(T_c-T_s) \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right\}$	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{r^2-R_i^2}{r^2(R_o^2-R_i^2)} \int_{R_i}^{R_o} \alpha(T-T) r dr - \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha(T-T_i) r dr \right\}$	$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)^2} \left\{ \ln(r/R_i)^2 - \frac{R_o^2(r^2-R_i^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} \right\} \ln(R_o/R_i)^2$		
σ_t		$-P_i$	$-P_i$	$-\frac{R_o^2(R_o^2-r^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} P_i - \frac{R_o^2(r^2-R_i^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} P_o$	$-\frac{R_o^2(R_o^2-r^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} P_i - \frac{R_o^2(r^2-R_i^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} P_o$		
σ_z		$-2\nu P_i$	$\frac{E}{4(1-\nu)} \alpha(T_c-T_s) \left[2\nu - 4 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} \right]$	$-\alpha(T-T_i) \left\{ \frac{R_i^2(R_o^2+r^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} P_i - \frac{R_o(r^2+R_i^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} P_o \right\}$	$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)^2} \left\{ \ln(r/R_i)^2 - \frac{R_o^2(r^2+R_i^2)}{r^2(R_o^2-R_i^2)} \right\} \ln(R_o/R_i)^2 + 2$		
		$-2\nu P_i$	$-2\nu P_i$	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{2\nu}{R_o^2-R_i^2} \int_{R_i}^{R_o} \alpha(T-T_i) r dr - \alpha(T-T_i) \right\}$	$\frac{E}{1-\nu} \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)^2} \left\{ \ln(r/R_i)^2 - \nu \frac{R_o^2}{R_o^2-R_i^2} \ln(R_o/R_i)^2 + \nu \right\}$		
				$+ 2\nu \left\{ \frac{R_i^2}{R_o^2-R_i^2} P_i - \frac{R_o^2}{R_o^2-R_i^2} P_o \right\}$			

Table 2-2 Displacement and strain under plane strain on two dimensional problems

	solid cylinder	hollow cylinder
	<p>formulation</p> <p>if temperature distribution is given by $T-T_s = (T_c-T_s) \{1-(r/R)^2\}$</p>	<p>if temperature distribution is given by $T-T_i = -(T_i-T_o) \ln(r/R_i) / \ln(R_o/R_i)$</p>
u	$\frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1-2\nu}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1}{r} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr \right\}$ $- \frac{P_1}{E} (1+\nu) (1-2\nu) r$	$- \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)} \left[\frac{1}{r} \{ r^2 \ln(r/R_i)^2 - (r^2 - R_i^2) \} \right]$ $+ \frac{\{ (1-2\nu) r^2 + R_i^2 \} \{ R_o^2 \ln(R_o/R_i)^2 - (R_o^2 - R_i^2) \}}{r (R_o^2 - R_i^2)}$ $+ (1+\nu) \frac{R_i^2 (R_o^2 + (1-2\nu) r^2)}{r (R_o^2 - R_i^2)} \frac{P_1}{E}$ $- (1+\nu) \frac{R_o^2 \{ (1-2\nu) r^2 + R_i^2 \}}{r (R_o^2 - R_i^2)} \frac{P_o}{E}$
ϵ_r	$\frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1-2\nu}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr \right\}$ $+ \alpha(T-T_s) \left\{ - (1+\nu) (1-2\nu) \frac{P_1}{E} \right\}$	$- \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)} \left[\frac{1}{r^2} \{ r^2 \ln(r/R_i)^2 - (r^2 - R_i^2) \} \right]$ $+ \frac{\{ (1-2\nu) r^2 - R_i^2 \} \{ R_o^2 \ln(R_o/R_i)^2 - (R_o^2 - R_i^2) \}}{r^2 (R_o^2 - R_i^2)}$ $- (1+\nu) \frac{R_i^2 \{ R_o^2 - (1-2\nu) r^2 \}}{r^2 (R_o^2 - R_i^2)} \frac{P_1}{E}$ $- (1+\nu) \frac{R_o^2 \{ (1-2\nu) r^2 - R_i^2 \}}{r^2 (R_o^2 - R_i^2)} \frac{P_o}{E}$
ϵ_t	$\frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1-2\nu}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr \right\}$ $- (1+\nu) (1-2\nu) \frac{P_1}{E}$	$+ \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)} \left[\frac{1}{r^2} \{ r^2 \ln(r/R_i)^2 - (r^2 - R_i^2) \} \right]$ $- \frac{\{ (1-2\nu) r^2 + R_i^2 \} \{ R_o^2 \ln(R_o/R_i)^2 - (R_o^2 - R_i^2) \}}{r^2 (R_o^2 - R_i^2)}$ $+ (1+\nu) \frac{R_i^2 \{ R_o^2 - (1-2\nu) r^2 \}}{r^2 (R_o^2 - R_i^2)} \frac{P_1}{E}$ $- (1+\nu) \frac{R_o^2 \{ (1-2\nu) r^2 - R_i^2 \}}{r^2 (R_o^2 - R_i^2)} \frac{P_o}{E}$
ϵ_z	0	0

Table 3-1 Stress under Lamé's condition on two dimensional problems

		solid cylinder	hollow cylinder	
		formulation	formulation	if temperature distribution is given by $T-T_1 = -(T_1-T_0) \ln(r/R_1) / \ln(R_0/R_1)$
boundary condition	1) All parameters are finite at center ($r = 0$)			
	2) $\sigma_r = -P_1$ at $r = R$			
	3) $2\pi \int_0^R \sigma_z r dr = -\pi R^2 P_f$			
stress	σ_r	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr \right\}$ $-P_1$	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{r^2-R_1^2}{r^2(R_0^2-R_1^2)} \int_{R_1}^{R_0} \alpha(T-T_1) r dr - \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \alpha(T-T_1) r dr \right\}$ $- \frac{R_1^2}{r^2} \frac{(R_0^2-r^2)}{(R_0^2-R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2}{r^2} \frac{(r^2-R_1^2)}{(R_0^2-R_1^2)} P_0$	$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\alpha(T_1-T_0)}{\ln(R_0/R_1)^2} \left\{ \ln(r/R_1)^2 - \frac{R_0^2(r^2-R_1^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} \right\} \ln(R_0/R_1)^2$ $- \frac{R_1^2(R_0^2-r^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2}{r^2} \frac{(r^2-R_1^2)}{(R_0^2-R_1^2)} P_0$
	σ_t	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr \right\}$ $- \alpha(T-T_s) \left\} - P_1$	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{r^2+R_1^2}{r^2(R_0^2-R_1^2)} \int_{R_1}^{R_0} \alpha(T-T_1) r dr + \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \alpha(T-T_1) r dr \right\}$ $- \alpha(T-T_1) \left\} + \frac{R_1^2}{r^2} \frac{(R_0^2+r^2)}{(R_0^2-R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2}{r^2} \frac{(r^2+R_1^2)}{(R_0^2-R_1^2)} P_0$	$\frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\alpha(T_1-T_0)}{\ln(R_0/R_1)^2} \left\{ \ln(r/R_1)^2 - \frac{R_0^2}{r^2} \frac{(r^2+R_1^2)}{(R_0^2-R_1^2)} \right\} \ln(R_0/R_1)^2 + 2$ $+ \frac{R_1^2}{r^2} \frac{(R_0^2+r^2)}{(R_0^2-R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2}{r^2} \frac{(r^2+R_1^2)}{(R_0^2-R_1^2)} P_0$
	σ_z	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr - \alpha(T-T_s) \right\}$ $- P_f$	$\frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{2}{R_0^2-R_1^2} \int_{R_1}^{R_0} \alpha(T-T_1) r dr - \alpha(T-T_1) \right\}$ $- P_c$	$\frac{E}{1-\nu} \frac{\alpha(T_1-T_0)}{\ln(R_0/R_1)^2} \left\{ \ln(r/R_1)^2 - \frac{R_0^2}{R_0^2-R_1^2} \ln(R_0/R_1)^2 + 1 \right\}$ $- P_c$

Table 3-2 Displacement and strain under Lamé's condition on two dimensional problem

	solid cylinder	hollow cylinder
	<p>formulation</p> <p>if temperature distribution is given by $T - T_s = (T_c - T_s) \{1 - (r/R)^2\}$</p>	<p>formulation</p> <p>if temperature distribution is given by $T - T_c = -(T_i - T_o) \ln(r/R_i) / \ln(R_o/R_i)$</p>
u	$\frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{r}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr$ $- (1-\nu) r \frac{P_f}{E} + \nu r \frac{P_c}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i - T_o)}{2(1-\nu) \ln(R_o/R_i)^2} \left[(1+\nu) \frac{r^2 \ln(r/R_i)^2 - (r^2 - R_i^2)}{r} \right]$ $+ \frac{\{(1-3\nu)r^2 + (1+\nu)R_o^2\} \{R_o^2 \ln(R_o/R_i)^2 - (R_o^2 - R_i^2)\}}{r(R_o^2 - R_i^2)}$ $+ \frac{R_i^2 \{(1+\nu)R_o^2 + (1-\nu)r^2\} P_f}{r(R_o^2 - R_i^2) E}$ $- \frac{R_o^2 \{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2\} P_o + \nu r \frac{P_c}{E}}{r(R_o^2 - R_i^2) E}$
er	$\frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr$ $- \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha(T-T_s)$ $- (1-\nu) \frac{P_f}{E} + \nu \frac{P_c}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i - T_o)}{2(1-\nu) \ln(R_o/R_i)^2} \left[(1+\nu) \frac{r^2 \ln(r/R_i)^2 - (r^2 - R_i^2)}{r^2} \right]$ $+ \frac{\{(1-3\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2\} \{R_o^2 \ln(R_o/R_i)^2 - (R_o^2 - R_i^2)\}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)}$ $- \frac{R_i^2 \{(1+\nu)R_o^2 - (1-\nu)r^2\} P_f}{r^2(R_o^2 - R_i^2) E}$ $- \frac{R_o^2 \{(1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2\} P_o + \nu \frac{P_c}{E}}{r^2(R_o^2 - R_i^2) E}$
et	$\frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr$ $- (1-\nu) \frac{P_f}{E} + \nu \frac{P_c}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i - T_o)}{2(1-\nu) \ln(R_o/R_i)^2} \left[(1+\nu) \frac{r^2 \ln(r/R_i)^2 - (r^2 - R_i^2)}{r^2} \right]$ $+ \frac{\{(1-3\nu)r^2 + (1+\nu)R_o^2\} \{R_o^2 \ln(R_o/R_i)^2 - (R_o^2 - R_i^2)\}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)}$ $+ \frac{R_i^2 \{(1+\nu)R_o^2 + (1-\nu)r^2\} P_f}{r^2(R_o^2 - R_i^2) E}$ $- \frac{R_o^2 \{(1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2\} P_o + \nu \frac{P_c}{E}}{r^2(R_o^2 - R_i^2) E}$
ez	$\frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr$ $+ 2\nu \frac{P_f}{E} - \frac{P_c}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i - T_o)}{\ln(R_o/R_i)^2} \left[\frac{R_o^2 \ln(R_o/R_i)^2 - (R_o^2 - R_i^2)}{R_o^2 - R_i^2} \right]$ $- 2\nu \frac{R_i^2 P_f}{R_o^2 - R_i^2 E} + 2\nu \frac{R_o^2 P_o}{R_o^2 - R_i^2 E} - \frac{P_c}{E}$

displacement and strain

Table 4-1 Stress under plane stress on two dimensional problems

		solid cylinder		hollow cylinder	
boundary condition	stress	if temperature distribution is given by $T-T_s = (T_c-T_s)\{1-(r/R)^2\}$		if temperature distribution is given by $T-T_1 = -(T_1-T_0)\ln(r/R_1)/\ln(R_0/R_1)$	
		formulation	formulation	formulation	formulation
		1) All parameters are finite at center ($r = 0$)		1) $\sigma_r = -P_0$, at $r = R_1$ $\sigma_r = -P_0$, at $r = R_0$	
σ_r	$-P_1$	$E \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr \right\}$	$\frac{E}{4} \alpha(T_c-T_s) \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right\}$	$E \frac{\alpha(T_1-T_0)}{2 \ln(R_0/R_1)} \left\{ \ln(r/R_1) \left[\frac{R_0^2(r^2-R_1^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} - \frac{R_0^2(r^2-R_1^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} \right] \ln(R_0/R_1) \right\}$	$- \frac{R_1^2(R_0^2-r^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2(r^2-R_1^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} P_0$
σ_t	$-P_1$	$E \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr \right\}$	$\frac{E}{4} \alpha(T_c-T_s) \left\{ 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right\}$	$E \frac{\alpha(T_1-T_0)}{2 \ln(R_0/R_1)} \left\{ \ln(r/R_1) \left[\frac{R_0^2(r^2+R_1^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} - \frac{R_0^2(r^2+R_1^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} \right] \ln(R_0/R_1) \right\}$	$+ \frac{R_1^2(R_0^2+r^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2(r^2+R_1^2)}{r^2(R_0^2-R_1^2)} P_0$
σ_z	0 (pl. stress)	$- \alpha(T-T_s) \left\{ -P_1 \right\}$	0	0	0

Table 4-1 Stress under plane stress on two dimensional problems

		solid cylinder	hollow cylinder	
boundary condition	stress	formulation	formulation	if temperature distribution is given by $T-T_1 = -(T_1-T_0) \ln(r/R_1) / \ln(R_0/R_1)$
		<p>1) All parameters are finite at center ($r = 0$)</p> <p>2) $\sigma_r = -P_1$ at $r = R$</p>	<p>1) $\sigma_r = -P_0$, at $r = R_1$</p> <p>$\sigma_r = -P_0$, at $r = R_0$</p>	
σ_r	$E \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr \right\}$ <p>- P_1</p>	$E \left\{ \frac{r^2 - R_1^2}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_0} \alpha(T-T_1) r dr - \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \alpha(T-T_1) r dr \right\}$ <p>- $\frac{R_0^2(R_0^2 - r^2)}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2(r^2 - R_1^2)}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} P_0$</p>	$\frac{E}{2} \frac{\alpha(T_1 - T_0)}{\ln(R_0/R_1)^2} \left\{ \ln(r/R_1)^2 - \frac{R_0^2(r^2 - R_1^2)}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} \right\} \ln(R_0/R_1)^2$	
σ_t	$E \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha(T-T_s) r dr \right\}$ <p>- $\alpha(T-T_s)$</p> <p>- P_1</p>	$E \left\{ \frac{r^2 + R_1^2}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_0} \alpha(T-T_1) r dr + \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \alpha(T-T_1) r dr \right\}$ <p>- $\alpha(T-T_1) \left\{ \frac{R_0^2(R_0^2 + r^2)}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} P_1 - \frac{R_0^2(r^2 + R_1^2)}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} P_0 \right\}$</p>	$\frac{E}{2} \frac{\alpha(T_1 - T_0)}{\ln(R_0/R_1)^2} \left\{ \ln(r/R_1)^2 - \frac{R_0^2(r^2 + R_1^2)}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} \right\} \ln(R_0/R_1)^2 + 2$	
σ_z	0 (pl. stress)	0	0	0

Table 4-2 Displacement and strain under plane stress on two dimensional problems

		solid cylinder	hollow cylinder	
displacement and strain	formulation	if temperature distribution is given by $T-T_s = (T_c-T_s)\{1-(r/R)^2\}$	if temperature distribution is given by $T-T_i = -(T_i-T_o)\ln(r/R_i)/\ln(R_o/R_i)$	
	u_r	$(1-\nu)\frac{r}{R^2}\int_0^R \alpha(T-T_s) r dr$ $+ (1+\nu)\frac{1}{r}\int_0^r \alpha(T-T_s) r dr$ $- (1-\nu)r \cdot \frac{P_1}{E}$	$\frac{\alpha(T_c-T_s)}{4} \left[(1-\nu)r + (1+\nu)r \left\{ 2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} \right]$ $- (1-\nu)r \frac{P_1}{E}$	$\frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_o^2}{r(R_o^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_o} \alpha(T-T_i) r dr$ $+ (1+\nu)\frac{1}{r} \int_{R_i}^r \alpha(T-T_i) r dr$ $+ \frac{R_i^2 \{ (1+\nu)R_o^2 + (1-\nu)r^2 \}}{r(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_1}{E}$ $- \frac{R_o^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2 \}}{r(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_o}{E}$
ϵ_r	$(1-\nu)\frac{1}{R^2}\int_0^R \alpha(T-T_s) r dr$ $- (1+\nu)\frac{1}{r^2}\int_0^r \alpha(T-T_s) r dr + (1+\nu)\alpha(T-T_s)$ $- (1-\nu)\frac{P_1}{E}$	$\frac{\alpha(T_c-T_s)}{4} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \left\{ 2 - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} \right]$ $- (1-\nu)\frac{P_1}{E}$	$\frac{(1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2}{r(R_o^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_o} \alpha(T-T_i) r dr$ $- (1+\nu)\frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha(T-T_i) r dr + (1+\nu)\alpha(T-T_i)$ $- \frac{R_i^2 \{ (1+\nu)R_o^2 - (1-\nu)r^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_1}{E}$ $- \frac{R_o^2 \{ (1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_o}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i-T_o)}{2\ln(R_o/R_i)} \left[\frac{(1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \{ R_o^2 \ln(R_o/R_i) - (R_o^2 - R_i^2) \} \right]$ $- (1+\nu)\frac{1}{r^2} \{ r^2 \ln(r/R_i) - (r^2 - R_i^2) \} + 2(1+\nu)\ln(r/R_i) \left[\frac{r}{R_i} \right]$ $- \frac{R_i^2 \{ (1+\nu)R_o^2 - (1-\nu)r^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_1}{E}$ $- \frac{R_o^2 \{ (1-\nu)r^2 - (1+\nu)R_i^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_o}{E}$
ϵ_t	$(1-\nu)\frac{1}{R^2}\int_0^R \alpha(T-T_s) r dr$ $+ (1+\nu)\frac{1}{r^2}\int_0^r \alpha(T-T_s) r dr$ $- (1-\nu)\frac{P_1}{E}$	$\frac{\alpha(T_c-T_s)}{4} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \left\{ 2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} \right]$ $- (1-\nu)\frac{P_1}{E}$	$\frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_o} \alpha(T-T_i) r dr$ $+ (1+\nu)\frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r \alpha(T-T_i) r dr$ $+ \frac{R_i^2 \{ (1+\nu)R_o^2 + (1-\nu)r^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_1}{E}$ $- \frac{R_o^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_o}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i-T_o)}{2\ln(R_o/R_i)} \left[\frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \{ R_o^2 \ln(R_o/R_i) - (R_o^2 - R_i^2) \} \right]$ $+ (1+\nu)\frac{1}{r^2} \{ r^2 \ln(r/R_i) - (r^2 - R_i^2) \}$ $+ \frac{R_i^2 \{ (1+\nu)R_o^2 + (1-\nu)r^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_1}{E}$ $- \frac{R_o^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_i^2 \}}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \cdot \frac{P_o}{E}$
ϵ_z	$- \frac{2\nu}{R^2}\int_0^R \alpha(T-T_s) r dr + (1+\nu)\alpha(T-T_s)$ $+ 2\nu\frac{P_1}{E}$	$\frac{\alpha(T_c-T_s)}{2} \left[-\nu + 2(1+\nu) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} \right]$ $+ 2\nu\frac{P_1}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)} \left[\frac{\nu}{R_o^2 - R_i^2} \{ R_o^2 \ln(R_o/R_i) - (R_o^2 - R_i^2) \} - (1+\nu)\ln(r/R_i) \right]$ $- 2\nu\frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \frac{P_1}{E} + 2\nu\frac{R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} \frac{P_o}{E}$	$- \frac{\alpha(T_i-T_o)}{\ln(R_o/R_i)} \left[\frac{\nu}{R_o^2 - R_i^2} \{ R_o^2 \ln(R_o/R_i) - (R_o^2 - R_i^2) \} - (1+\nu)\ln(r/R_i) \right]$ $- 2\nu\frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \frac{P_1}{E} + 2\nu\frac{R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} \frac{P_o}{E}$