

JAERI-M

6853

1点近似法・準静的近似法の数値解法アルゴリズム
とベンチマークテストの現状

(空間依存動特性計算コードのベンチマークテスト・2)

1976年12月

伊勢武治

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

1点近似法・準静的近似法の数値解法アルゴリズム とベンチマークテストの現状

(空間依存動特性計算コードのベンチマークテスト・2)

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

伊 勢 武 治

(1976年12月3日受理)

空間依存動特性コードのベンチマークテストの指針を得るために、1点近似法および準静的近似法による数値解法のアルゴリズムとベンチマークテストの現状が調べられ、その評価がなされた。

1点近似法はそのままでも小型炉では良い近似であるが、時間・空間分解法の基でもあるので、現在でも尚発展が見られる。Padé型の応用は、安定性という点から良い数値解を与えるので、現在でも発展しつつある。マトリックス分解法は、直接法へ拡張ができるという点で興味のある方法である。

準静的近似ではIQ法が最良である。この方法は直接法に比べて1桁程少ない計算時間が期待でき且つ、直接法に比べて精度が高く安定であることが数値例で示されている。熱中性子炉でも高速炉でも良い近似で適用でき、特に高速炉においては時間ステップ数が非常に多いので、この近似法が唯一の方法であろう。実用性では、現在の処、2次元拡散理論に基づくコードが最適で、3次元拡散および2次元輸送に基づくコードも見受けられるが、現在の電子計算機の能力から云っても実用的でない。いずれにせよ動特性コードでは、空間を必ず解くので、この方面の实在問題を良くフォローした数値解法の開発が急務であろう。

Present Status on Numerical Algorithms and Benchmark Tests
for Point Kinetics and Quasi-Static Approximate Kinetics
(Benchmark Tests on the Space-Dependent Neutron Kinetics Code*2)

Takeharu ISE

Division of Reactor Engineering, Tokai, JAERI

(Received December 3, 1976)

Review studies have been made on algorithms of numerical analysis and benchmark tests on point kinetics and quasistatic approximate kinetics computer codes to perform efficiently benchmark tests on space-dependent neutron kinetics codes.

Point kinetics methods have now been improved since they can be directly applied to the factorization procedures. Methods based on Padé rational function give numerically stable solutions and methods on matrix-splitting are interested in the fact that they are applicable to the direct integration methods.

An improved quasistatic (IQ) approximation is the best and the most practical method; it is numerically shown that the IQ method has a high stability and precision and the computation time which is about one tenth of that of the direct method. IQ method is applicable to thermal reactors as well as fast reactors and especially fitted for fast reactors to which many time steps are necessary.

Two-dimensional diffusion kinetics codes are most practicable though there exist also three-dimensional diffusion kinetics code as well as two-dimensional transport kinetics code. On developing a space-dependent kinetics code, in any case, it is desirable to improve the method so as to have a high computing speed for solving static diffusion and transport equations.

目 次

1. ま え が き	1
2. 1点近似法	2
2.1 1点近似法による動特性解析の問題点	2
2.2 1点近似法の最近の発展	6
3. 準静的近似	18
3.1 準静的近似の解法アルゴリズム	18
3.2 ベンチマーク・テストの現状	23
4. あとがき	73
参考文献	75

1. ま え が き

原子炉動特性解析に対するベンチマークテストの意義^{A1)}およびベンチマークテストの現状の一部(時間依存輸送方程式に対して)^{A2)}については既に述べた。ここでは、動特性解析理論の基となっている1点近似法とその直接的応用である準静的近似の数値解法とベンチマークテストの現状について述べ、これらの方法の有用性について議論したい。

初めて動特性解析が行われるようになったのは1950年前後で、第2章でふれる1点近似法によるものである。1点近似法は原子炉内の空間分布を考慮しないので、数値計算も容易である。また、炉心温度の上昇などのフィードバックも単純化してではあるが考慮できるので、現在でも目的によってはよく用いられている。

しかしながら、局所的な空間の時間的変化が問題となってくる大型発電炉などでは、1点近似法の精度が悪くなってくる。これらの問題点に対する良い近似解法のひとつは、その実用性で評判の高い準静的近似法で、第3章で取り扱う。この方法は、内容的には空間依存性を良くフォローするが、方法的には、1点近似法に近い非常にユニークな方法である。

尚、動特性解析については、Keepinのテキスト程度^{A5,A6)}、数値解析についてはVargaのテキスト程度^{A9,A10)}の知識は、仮定してあるので、本文中においては詳しい記号の定義は省略されている。必要に応じて参照されたい(参考文献の一般の項も参照)。

2 1点近似法

第2.1節では、1点近似法による原子炉動特性解析の限界について述べる。1点近似法は、空間依存動特性解析の数値解法の開発に良きヒントを与えることもあるので、現在でも改良は続けられている。これら最近の動向については第2.2章でふれる。尚、古典的な1点近似法については、良い文献^{A14)}もあるので、ここでは割愛する。

2.1 1点近似法による動特性解析の問題点

1点近似法による動特性解析の検討は第3章でも高速炉体系および熱中性子炉体系に対して、準静的近似との検討の意味においてなされているが、Yasinsky^{B11)}が系統的に熱中性子炉系に対して検討を行っているので、以下に紹介する。

体系としては板状の軽水減速の動力炉モデルを考える。体系の大小に対する1点近似法の精度を調べる為に、比較的大型な (large loosely coupled core)、厚さ240 cmのモデルと比較的小型な (small tightly coupled core) 厚さ60 cmのモデルを考える。領域は3領域から成り、動特性のモデルとしては、即効的な過渡現象 (prompt critical transient problem)^{*1)}と遅効的な過渡現象 (delayed critical transient problem)^{*1)}とをとりあげる。これで用いられたパラメータは **Table 2.1** に示す。

最初に即効的な過渡現象について述べる。**Fig. 2.1**は大型炉心モデルの、**Fig. 2.2**は小型炉心モデルの中性子束の時間依存性を示しているが、比較のために断熱近似の解と厳密解 (θ -法による WIGLE コードの結果)とを一緒に載せてある。断熱近似では中性子束を分解したとき ($\phi(\mathbf{r}, t) = N(t)\phi^l(\mathbf{r})$; $N(t)$ は振幅関数、 $\phi^l(\mathbf{r})$ が形状関数)に、形状関数は過渡現象間における時刻 t の定常状態の式 (群定数のみが時間依存、第3.1節参照)を解いて得られている。一方1点近似では、形状関数は $t=0$ のときのそのままを用いているので、大型炉では (**Fig. 2.1** 参照)、1点近似は 10^4 の桁で過少評価しているが、これに比べて、断熱近似は、過大評価ではあるが、かなり良い。^{*2)} 小型炉になると (**Fig. 2.2** 参照)、1点近似の誤差も1桁以内におさまってくるが、上記の傾向は変わらない。

次に、遅効的な現象について調べたのが**Fig. 2.3**および**Fig. 2.4**で、少し見方を変えて、ある時間後の熱中性子束の空間分布を示してある。ここでも、大型炉では (**Fig. 2.3** 参照) 1点近似の精度は他の近似法に比べてもかなり悪いが、小型炉 (**Fig. 2.4** 参照) ではかなり良い近似になっていて、実用上使える時もある。尚、図中で示した合成法 (synthesis) は普通、空間時間合成法 (space-time synthesis) と呼ばれている方法で、空間と時間とを分離する意味では断熱近似と似ているが、更にこれらの1次結合 ($\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_k N_k(t)\phi_k(\mathbf{r})$) として求めたものであるので、断熱近似よりは確かに良い近似となっている。

以上、軽水炉をモデル化して、1点近似の精度について調べてきたが、現在発電炉として動いてい

*1) ここで云う即効的な過渡現象とは、原子炉始動時の制御棒逸走のような速い事故に対応し、遅効的な過渡現象とは、通常運転時の制御棒誤操作のような遅い事故に対応する。

*2) 図では振幅関数 (amplitude function) で画かれているが、中性子束と考えてよい。

Table 2.1 Material parameter and transient parameters
for critical core models
($\beta = 0.0064$, $\lambda = 0.08 \text{ sec}^{-1}$)B11)

	240-cm core	60-cm core
D_1 (cm)	1.69531	
D_2 (cm)	0.409718	
Σ_{a1} (cm^{-1})	0.0137513	
Σ_{a2} (cm^{-1})	0.261361	
Σ_{r1} (cm^{-1})	0.0164444	
$\nu\Sigma_{f1}$ (cm^{-1})	0.0194962	0.0213143
$\nu\Sigma_{f2}$ (cm^{-1})	0.497857	0.544286
B^2 region 1	0.0109100	
region 2	0.0120000	
(cm^{-2}) region 3	0.0108900	
In 0.01 sec a)		
$\Delta(\nu\Sigma_{f1})$ (cm^{-1})	-0.0037198	-0.00880
$\Delta(\nu\Sigma_{f2})$ (cm^{-1})	-0.094992	-0.224716
0 < t < 0.8 sec b)	+0.0002381	+0.0007081
$\Delta(\nu\Sigma_{f1})$ (cm^{-1})		
0.8 < t < 100 sec	0.0	0.0
0 < t < 0.8 sec	+0.006084	+0.018081
$\Delta(\nu\Sigma_{f2})$ (cm^{-1})		
0.8 < t < 100 sec	0.0	0.0

a) Perturbed fission cross sections for prompt critical transient problem.

b) Perturbed fission cross sections for delayed critical transient problem.

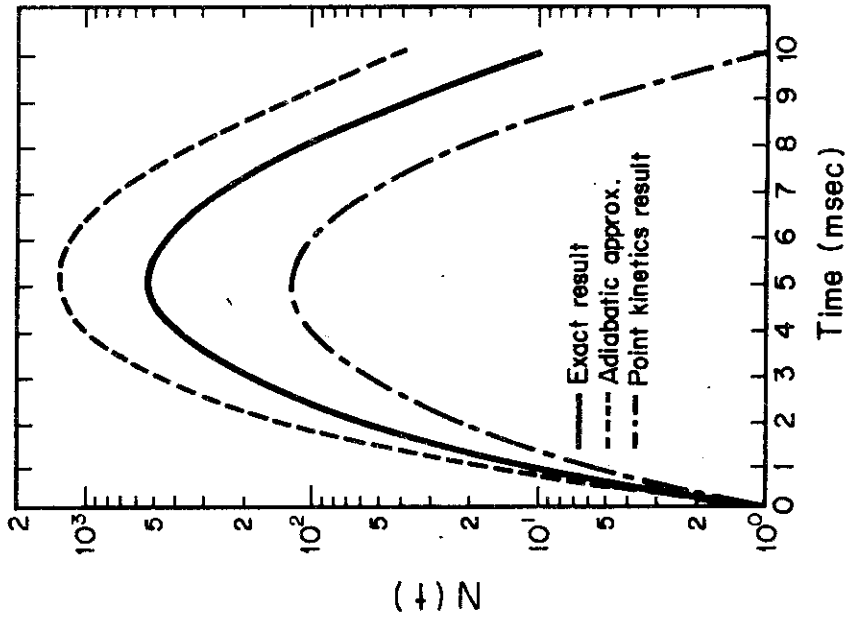


Fig. 2.1 Prompt critical excursion amplitude function for a large thermal core

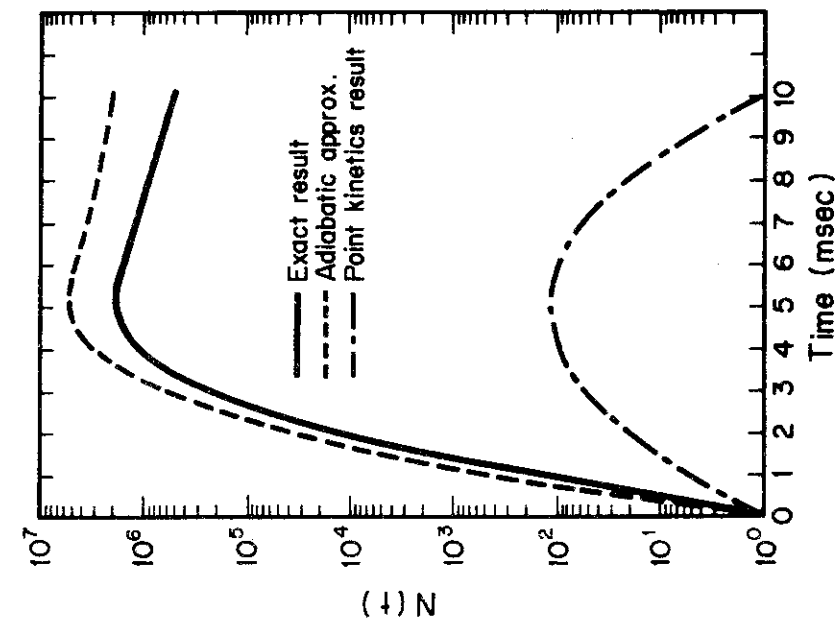


Fig. 2.2 Prompt critical excursion amplitude function for a small thermal core

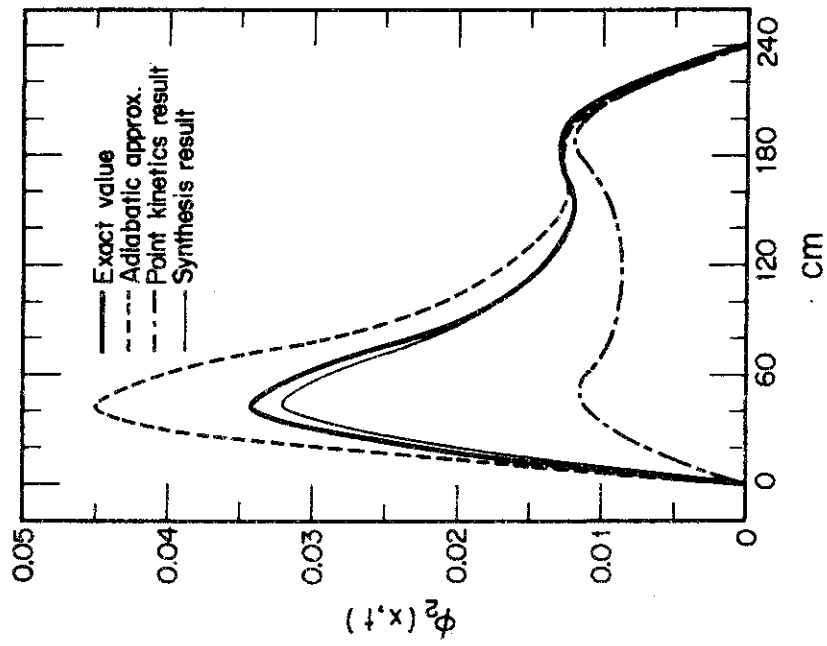


Fig. 2.3 Delayed critical excursion thermal flux at 0.8 sec for a larger thermal core^{BII}

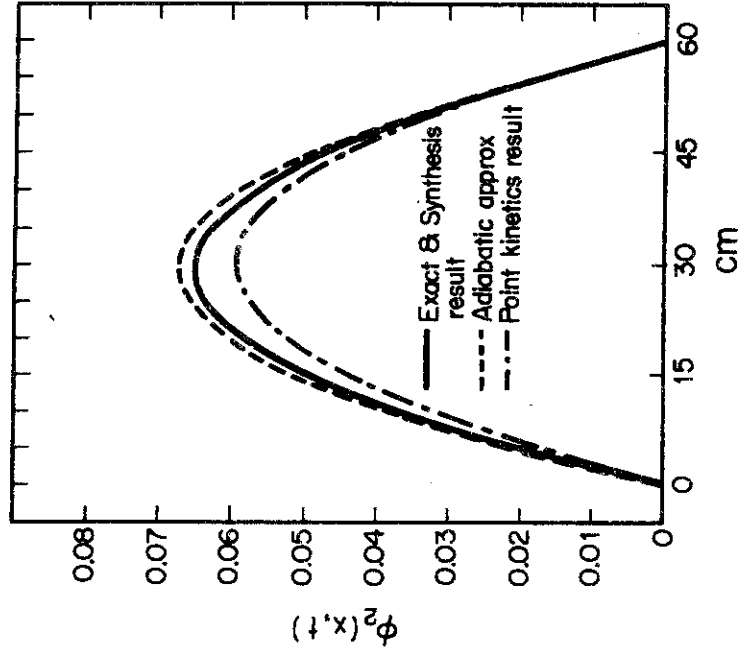


Fig. 2.4 Delayed critical excursion thermal flux at 1 sec for a small thermal core^{BII}

る大型炉では、1点近似による動特性解析では不十分で、空間依存性を取り扱える動特性解析に依らなければならないことが結論づけられる。しかしながら、TRIGA炉^{B20,24)}のような小型の研究炉では、**Fig. 2. 5**に示すように、1点近似（ここでは、Fucks - Nordheimによる解析的モデルであるが、炉心の温度上昇によるフィードバックも考慮）でも、実験値との一致も大変良く、実用上も充分であるとされている。

2.2 1点近似法の最近の発展

解が安定で且つ、時間ステップを大きく採れる方法への努力は現在でも続けられている。1点近似法の式は、簡単な定数係数のときは常微分方程式となるので、常微分方程式におけるいろいろな解法アルゴリズム^{A16)}を用いることができる。係数がより複雑（挿入反応度の形とか、温度のフィードバックの形によるが）な場合とか、空間依存動特性へのアプローチのことを考えると、結局、時間ステップに関して外挿した結果を過去の値を用いて修正するという、陰解法的なアルゴリズムに寄らなければ安定な解が得られない。^{B21)}

1点近似解法の最近の傾向としては、陰解法に基づいたPade近似型の方法^{A9)}と区分多項式を用いる方法に分けられよう。空間依存動特性解析のみに指向を合わせれば、one step型で解く区分多項式を用いる方法でなければならない。Hansenらのマトリックス分解法^{B12, B26, B28)}は現在空間依存動特性解析にも用いられている方法である。

一般に、1点動特性の式は次のように書ける（記号については、文献A5かA14を参照されたい）。

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{A} N(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(t) \quad (2.1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{A} N(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.2)$$

これをマトリックス形式で書くと次のようになる（以下時間変数tの記号は省略する）。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} N \\ C_1 \\ \vdots \\ C_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho - \beta}{A}, & \lambda_1 & \dots & \lambda_I \\ \frac{\beta_1}{A}, & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_I}{A}, & 0 & \dots & -\lambda_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C_1 \\ \vdots \\ C_I \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

まとめると

$$\frac{d\psi}{dt} = A\psi \quad (2.4)$$

ρ は一般には時間依存で、挿入反応度および温度フィードバックが含まれるが、そのときは方程式が非線形となる。

*) 直径60cm, 高さ40cm程のZrH減速軽水冷却の研究炉。^{B18)}パルス炉としても使われている。^{B22, B23)}

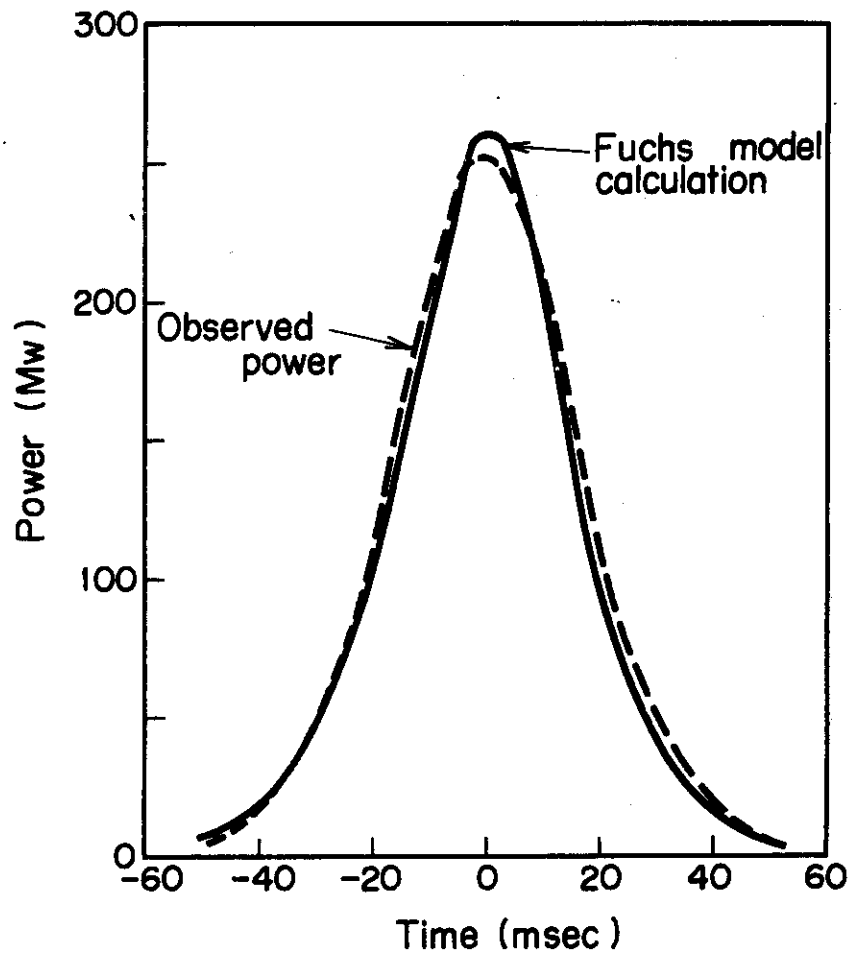


Fig. 2.5 Transient power for 1.6% reactivity insertion in the TRIGA reactor^{B18)}

Hansen^{B12)}らは、マトリックスAの分解に基づく次のような解法アルゴリズムを導いている。いま、時刻 t_j から t_{j+1} のステップで、 ρ は定数とし、時刻間で平均値 $\bar{\rho}$ と与えられ、時間ステップで ρ は変化するとすると、各時間ステップ内では、(2.4) 式の解は次式で書かれる。

$$\Psi_{j+1} = e^{Ah} \Psi_j \quad (h = t_{j+1} - t_j) \quad (2.5)$$

ここで次のようにマトリックスAの分解を採り入れる。

すなわち、

$$A = L + D + U \quad (2.6)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\beta_1}{A} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \frac{\beta_I}{A} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_I \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\rho - \beta}{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & -\lambda_I \end{bmatrix}$$

(2.8)

(2.9)

これらを用いて、 e^{Ah} の近似として次に示す式が考えられる。

$$G_1(h) = e^{\frac{Lh}{2}} e^{\frac{Uh}{2}} e^{Dh} e^{\frac{Uh}{2}} e^{\frac{Lh}{2}} \quad (2.10)$$

誤差は次式で示される。

$$\|G_1(h) - e^{Ah}\| \leq O(h^3) \quad (2.11)$$

(2.10) 式において、 e^{Dh} は容易に計算できる。他の因子は展開して1次項まで採ると、 $G_1(h)$ は次のようになる。

$$G_1(h) = \left(I + \frac{h}{2L}\right) \left(I + \frac{h}{2U}\right) e^{hD} \left(I + \frac{h}{2U}\right) \left(I + \frac{h}{2L}\right) \quad (2.12)$$

これは容易に計算できて、結局、各時間ステップ内での解は(2.12)式の結果を用いて次式で計算できる。

$$\Psi_{j+1} = G_1(h) \Psi_j \quad (2.13)$$

G_1 中の各要素は非負であることから、 G_1 の非負であることが示され、その結果、ここで採用された近似は安定であることが示されている。ステップ状の反応度挿入に対する解析解との比較は **Table 2.2**

に示してあるが、大変良い近似であることがわかる。また、ここでのアプローチは空間依存動特性解析向きで、事実、計算コード(GAKIN^{D6})に採用されている。

Nobrega^{B13}は、(2.5)式の前で仮定した条件の下で逆時間式で求めたパラメータを補正したPade近似型^{A12}の誤差 $O(h^3)$ である解を求めている。ここで提唱されたアルゴリズムは、次式で示すような e^{hA} の展開式を基としている。

$$e^{hA} = f(hA) + \sum_{i=0}^J \{ e^{hw_i} - f(hw_i) \} u_i v_i^T \quad (2.14)$$

ここで $f(X)$ は e^X の1つの近似式であり、 u_i, v_i は、固有値 w_i を持つ A および A^T の固有ベクトルであり、 $u_i^T v_i = 1$ と規格化されている。ここでの方法は、各 i に対して

$$|e^{hw_i} - f(hw_i)| \ll 1 \quad (2.15)$$

が成り立つとして、(2.14)式の i の和の項を落すところが出発点である。ここで、 w_i は次式で示すように順序づけられている。

$$w_I < -\lambda_I < w_{I-1} < -\lambda_{I-1} < \dots < -\lambda_2 < w_1 < -\lambda_1 < w_0 \quad (2.16)$$

$f(X)$ は w_0 および w_I を除く全ての w_i に対して、(2.15)式が成り立つように選ばれる近似式である。この際、 w_0 および w_I は逆時間式からNewton-Raphson法^{A10}で求められる。

$f(X)$ に対しては、 $O(h^3)$ であり、且つ安定なCrank-Nicolson法(Pade近似の $P(1,1)$)：

$$f(X) = \left(1 - \frac{X}{2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{X}{2}\right) \quad (2.17)$$

およびPade近似の $P(2,0)$ ：

$$f(X) = \left(1 - X + \frac{1}{2}X^2\right)^{-1} \quad (2.18)$$

の2つが採用されている。各時間ステップでは、上の2つの式に含まれている逆マトリックスの計算をしなければならない。したがって、次式で示すような陽的な表現が導かれる。すなわち、

Crank-Nicolson近似に対しては、

$$\left[I - \frac{1}{2}hA\right]^{-1} = r a b^T + D \quad (2.19)$$

Padeの $P(2,0)$ 近似に対しては

$$\left[I - hA + \frac{1}{2}h^2 A^2\right]^{-1} = r_1 a_1 b_1^T + r_2 a_2 b_2^T + D' \quad (2.20)$$

ここに

$$r = \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}A} + \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i/A}{\bar{\rho} + \lambda_i}\right)^{-1} \quad (2.21)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta + \lambda_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\delta}{\delta + \lambda_I} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$a = \left[1, \frac{\beta_1/A}{\delta + \lambda_1}, \dots, \frac{\beta_I/A}{\delta + \lambda_I} \right]^T \quad (2.23)$$

$$b = \left[1, \frac{\lambda_1}{\delta + \lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_I}{\delta + \lambda_I} \right]^T \quad (2.24)$$

$$\delta = \frac{2}{h} \quad (2.25)$$

で、 r_1, r_2, a_1, a_2, D' もこれらと似たような形をしたものである。

数値的な検討は熱中性子炉および高速炉（炉パラメータは **Table 2.3** 参照）に対してなされていて +0.5 \$ のステップ状の反応度挿入に対しては、高速炉（**Table 2.4** 参照）および熱中性子炉（**Table 2.5**）とも Crank-Nicolson 近似（Padé P (1.1) に相当）が一番精度が悪く、高速炉においては Padé P (2.0) 近似と Padé P (1.1) + w_6 近似が同程度に精度が高く、熱中性子炉においては、Padé P (1.1) + w_6 近似が Δt の小さいときは最も精度が良く、 Δt が大きくなるに従って、高速炉と同じ結果となっている。これらの結果から、Crank-Nicolson 自身に補正項 w_6 を加えるとかなり広い範囲の Δt （ここでは 0.01~1.00 sec）に対して精度の向上をもたらす、特に熱中性子炉に対しては Δt の小さい（0.01~0.1 sec）ときに、他の近似より 3 桁良い精度を与える。また一般的に云って、Padé P (2.0) 近似の方が Crank-Nicolson 近似より精度が高い。

区分多項式の 1 点近似法への応用は、1955 年頃から始まっているが、精度の高い解を得るのに成功したのは Kavanove (1960 年)^{B1)} で、しばらくは彼の方法が用いられていた。最近になって、Kang らが^{B3, B4)}、微分まで連続にする区分 Hermite 多項式を用いることによって、one step アルゴリズムに基づく高次の解を得るのに成功し、係数が定数のときは、Pade 近似になることを示している。

いま、(2.4) 式を $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ に対して積分すると、

$$\psi_{i+1} - \psi_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) \psi(s) ds \quad (2.26)$$

と書ける。ここで $\psi(t)$ を区分 Hermite 多項式の基底関数 $\{u_j^k(t)\}_{k=1}^{m-1}$ ($2m-1$ が多項式の次数) で展開する。

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ a_i^k u_i^k(t) + a_{i+1}^k u_{i+1}^k(t) \right\}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (2.27)$$

ここに

$$a_j^k \equiv \frac{d^k}{dt^k} \psi(t) \Big|_{t_j}, \quad j = i, i+1$$

Table 2.2 Results for step reactivity problem by the matrix-splitting method due to Hansen et al.^{B12)}

Time (sec)	Analytic N(t)	Numeric N(t)
0.0	1.0	1.0
5.0	6.411	6.408
10.0	16.60	16.61
15.0	41.79	41.81

$$\rho = 0.00375 \text{ (step)}, \quad \beta = 0.0075$$

$$\Lambda = 5.0 \times 10^{-5} \text{ sec}, \quad \Delta t = 10^{-3} \text{ sec}$$

$$I = 6 \text{ (delayed neutron groups)}$$

Table 2.3 Parameters for two typical modeled reactors^{B13)}

Delayed neutron group	Thermal reactor		Fast reactor	
	λ_i	β_i	λ_i	β_i
1	0.0127	2.850×10^{-4}	0.0129	1.672×10^{-4}
2	0.0317	1.5975×10^{-3}	0.0311	1.232×10^{-3}
3	0.115	1.410×10^{-3}	0.134	9.504×10^{-4}
4	0.311	3.0525×10^{-3}	0.331	1.443×10^{-3}
5	1.40	9.600×10^{-4}	1.26	4.534×10^{-4}
6	3.87	1.950×10^{-4}	3.21	1.540×10^{-4}
	$\beta = 0.00750$		$\beta = 0.00440$	
	$\Lambda = 5 \times 10^{-4} \text{ sec}$		$\Lambda = 1 \times 10^{-7} \text{ sec}$	

Table 2.4 Percent errors and exact N(t) in Case 1
(+0.5 \$ step reactivity into a fast reactor)^{B13)}

$\Delta t(\text{sec})$	Method [*])	t = 0.1 sec	t = 1.0 sec	t = 10 sec
0.01	(a)	-9.65×10^{-5}	-7.53×10^{-5}	-7.85×10^{-5}
	(b)	$+4.82 \times 10^{-5}$	$+3.77 \times 10^{-5}$	0.0
	(c)	-4.02×10	-6.11	0.0
0.10	(a)	-7.32×10^{-3}	-7.34×10^{-3}	-6.28×10^{-3}
	(b)	$+4.53 \times 10^{-3}$	-4.18×10^{-3}	$+3.14 \times 10^{-3}$
	(c)	$+4.81 \times 10$	-3.70	-6.54
0.25	(a)	—	-3.93×10^{-2}	-3.99×10^{-2}
	(b)	—	$+2.62 \times 10^{-2}$	$+1.94 \times 10^{-2}$
	(c)	—	-3.75×10	-7.60
0.50	(a)	—	-1.29×10^{-1}	-1.64×10^{-1}
	(b)	—	$+1.08 \times 10^{-1}$	$+7.77 \times 10^{-2}$
	(c)	—	-3.75×10	-7.71
1.00	(a)	—	-3.91×10^{-1}	-6.93×10^{-1}
	(b)	—	$+6.88 \times 10^{-1}$	$+3.12 \times 10^{-1}$
	(c)	—	$+3.83 \times 10$	-7.52
Exact N(t)		2.075317	2.655853	12.74654

*) (a) Padé (2,0), (b) Padé (1,1) + w_5 term, (c) Crank-Nicolson

Table 2.5 Percent errors and exact N(t) in Case 2
(-0.5 \$ step reactivity into a thermal reactor)^{B13)}

$\Delta t(\text{sec})$	Method [*])	t = 0.1 sec	t = 1 sec	t = 10 sec
0.01	(a)	$+7.99 \times 10^{-2}$	$+6.59 \times 10^{-5}$	0.0
	(b)	-2.86×10^{-5}	-4.94×10^{-5}	0.0
	(c)	-4.70×10^{-2}	-4.94×10^{-5}	0.0
0.10	(a)	+3.15	$+6.44 \times 10^{-3}$	-7.07×10^{-4}
	(b)	-3.88×10^{-3}	-3.71×10^{-3}	-3.53×10^{-4}
	(c)	-7.78	-3.71×10^{-3}	-3.53×10^{-4}
0.25	(a)	—	$+3.44 \times 10^{-2}$	$+4.37 \times 10^{-3}$
	(b)	—	-2.32×10^{-2}	-2.27×10^{-3}
	(c)	—	+2.83	-2.27×10^{-3}
0.50	(a)	—	$+1.19 \times 10^{-1}$	$+1.69 \times 10^{-2}$
	(b)	—	-9.05×10^{-2}	-9.09×10^{-3}
	(c)	—	+2.62 × 10	$+5.92 \times 10^{-2}$
1.00	(a)	—	$+5.01 \times 10^{-1}$	$+6.34 \times 10^{-2}$
	(b)	—	$+6.86 \times 10^{-1}$	-3.64×10^{-2}
	(c)	—	-4.55×10	+1.41 × 10
Exact N(t)		0.6989252	0.6070536	0.3960777

*) (a) Padé (2,0), (b) Padé (1,1) + w_5 term, (c) Crank-Nicolson

結局, 一般的な $A(t)$ に対して, 次式を得る。

$$\Psi_{i+1} = \left\{ I - \sum_{k=1}^{m-1} A_{i+1}^k A_{i+1}^k \right\}^{-1} \left\{ I + \sum_{k=1}^{m-1} A_i^k A_i^k \right\} \Psi_i \quad (2.28)$$

ここに,

$$A_i^k = \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t) u_i^k(t) dt$$

$$A_{i+1}^k = \int_{t_j}^{t_{j+1}} A(t) u_{i+1}^k(t) dt$$

(2.28) 式からわかるように, $A(t)$ が定数のときは Padé 近似型になっている。ここで, 低次 ($m=1$ および $m=2$) の基底関数は次のように書ける。

$m=1$ (1次式) に対して

$$u_j^0(t) = \begin{cases} x, & t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ y, & t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ 0, & [t_{j-1}, t_{j+1}] \text{の範囲外} \end{cases} \quad (2.29)$$

$m=2$ (3次式) に対して

$$u_j^0(t) = \begin{cases} 3x^2 - 2x^3 & t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ 3y^2 - 2y^3 & t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ 0, & [t_{j-1}, t_{j+1}] \text{の範囲外} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$u_j^1(t) = \begin{cases} (-x^2 + x^3) \Delta t_{j-1}, & t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ (y^2 - y^3) \Delta t_j, & t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ 0, & [t_{j-1}, t_{j+1}] \text{の範囲外} \end{cases} \quad (2.31)$$

ここに,

$$x = \frac{t - t_{j-1}}{\Delta t_{j-1}}$$

$$y = \frac{t_{j+1} - t}{\Delta t_{j-1}}$$

$$\Delta t_{j-1} = t_j - t_{j-1}$$

これらを用いて, $\rho(t) = \rho_0 + \rho_{\Delta} t$ の1次式型挿入反応度 (ramp reactivity insertion) の場合を扱うと, 次式に示すように, one step 型の式を得る ($\Delta t_j = \Delta t$ (定数) とする)。

$$B_{i+1} \Psi_{i+1} = B_i \Psi_i \quad (2.32)$$

ここに

$m=1$ (1次多項式) のときは

$$\left. \begin{aligned} B_i &= I + \frac{\Delta t}{2} A_{i+1} - \frac{\Delta t^3}{3} A_{\Delta} \\ B_{i+1} &= I - \frac{\Delta t}{2} A_i - \frac{\Delta t^3}{3} A_{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

m=2 (3次多項式) のときは

$$\left. \begin{aligned} B_i &= I + \frac{\Delta t}{2} A_{i+1} - \frac{7}{20} \Delta t^2 A_{\Delta} + \left[\frac{\Delta t^2}{12} A_{i+1} - \frac{\Delta t^3}{20} A_{\Delta} \right] A_i \\ B_{i+1} &= I - \frac{\Delta t}{2} A_i - \frac{7}{20} \Delta t^2 A_{\Delta} + \left[\frac{\Delta t^2}{12} A_i + \frac{\Delta t^3}{20} A_{\Delta} \right] A_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

で、また

$$A_i = A(t_i)$$

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \rho_{\Delta} & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & & & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

である。

ステップ状挿入反応度 ($\rho_{\Delta} = 0$) のときは、(2.33) 式および (2.34) 式において、 A_{Δ} を含む項がゼロになるので、 $m=1$ に対しては、Crank-Nicolson 近似 (Padé P(1,1))、 $m=2$ に対しては、Padé P(2,2) となっている。

Table 2.6 は、熱中性子炉モデル ($\lambda = 5 \times 10^{-4}$ sec) に対する $N(t)$ の計算値であるが、確かに、高次の Hermite 多項式を用いた方が収束のオーダーが高いことを示しており、理論的に求めた $O(\Delta t^{2m})$ に従っている。同じ $m=1$ でも直接積分 (time integration) の式で求めた方が良い収束を示している。ここで云う直接積分とは、(2.2) 式を積分して得られた $C_i(t)$ を (2.1) 式に代入し、そしてその結果を時間ステップに対して積分して得られた式、すなわち、

$$N_{i+1} - N_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\rho(t) - \beta}{\lambda} N(t) dt$$

$$+ \sum_{l=1}^L \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda_l \left\{ C_{l0} e^{-\lambda_l t} + \frac{\beta_l}{\lambda} \int_0^t N(s) e^{-\lambda_l(t-s)} ds \right\} dt \quad (2.35)$$

の $N(t)$ に区分 Hermite 多項式を用いて解いて得られたものを指す。尚、Crank-Nicolson 近似では $\rho(t)$ の各時間ステップにおいて、平均値 $\bar{\rho}$ を用いた方が、収束の次数が2倍程度大きくなることを示しているが、これは片側差分よりも中心差分の方が精度が高いのと同じ理屈である。

Table 2.7 は高速炉モデル ($\lambda = 10^{-7}$ sec) に対する $N(t)$ の計算値であるが、熱中性子炉モデルのと

Table 2.6 N(t) for a thermal reactor problem (6 delayed neutron groups, $\rho(t) = (\beta/2)t$, $\beta = 0.0075$, $\Lambda = 5 \times 10^{-4}$ sec)^{B3)}

Time (sec)	Δt (sec)	Crank-Nicolson		Method using Hermite polynomials		
		Using $\rho(t_i)$ *1)	Using $\bar{\rho}$ *1)	m = 1	m = 2	Time integration m = 1
1.0	0.005	1.9540000	1.9499905	1.9499942	1.9499987	1.9499928
	0.01	1.9400027	1.9499660	1.9499808	1.9499987	1.9499751
	0.05	1.9002928	1.9491803	1.9495497	1.9499987	1.9494094
	0.1	1.8513059	1.9467323	1.9482021	1.9499962	1.9476481
	0.5	1.5316543	1.8818173	1.9144400	1.9465955	1.9046032
Order of convergence		0.95	1.93	1.92	4.48	2.08
2.0	0.005	11.147961	11.228276	11.228411	11.228372	11.228349
	0.01	11.068160	11.227991	11.228529	11.228372	11.228282
	0.05	10.450756	11.218824	11.232274	11.228358	11.226118
	0.1	9.7275836	11.189778	11.243498	11.227962	11.219269
	0.5	5.4308838	10.013090	11.145270	10.943181	10.925652
Order of convergence		0.95	1.86	1.97	4.36	2.09

*1) Calculations have been performed assuming $\rho(t) = \rho(t_i)$ or $\rho(t) = \bar{\rho} = (\rho(t_i) + \rho(t_{i+1}))/2$ for $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

Table 2.7 N(t) for a fast reactor problem (the same data as for a thermal reactor problem except $\Lambda = 10^{-7}$ sec)^{B3)}

Time (sec)	Δt (sec)	Crank-Nicolson	Method using Hermite polynomials		
			m = 1	m = 1	Time integration m = 1
1.0	0.005	2.2806399	2.2881928	2.2882052	2.2881461
	0.01	2.2741454 (0.61%) [*]	2.2881595 (2.01 × 10 ⁻³ %) [*]	2.2881994 (2.53 × 10 ⁻⁴ %) [*]	2.2881894 (6.90 × 10 ⁻⁴ %) [*]
	0.05	2.2242740	2.2870330	2.2873140	2.2867310
	0.1	2.1617929	2.2835253	2.2761511	2.2823753
	0.5	1.7398362	2.1903963	2.1453451	2.1770162
Order of convergence		0.947	1.93	3.75	1.90
2.0	0.005	0.11790377 × 10 ⁵	0.21803225 × 10 ⁵	0.20657232 × 10 ⁵	0.20264628 × 10 ⁵
	0.01	0.65411931 × 10 ⁴ (68.3%) [*]	0.21227155 × 10 ⁵ (2.75%) [*]	0.18399171 × 10 ⁵ (10.92%) [*]	0.20823698 × 10 ⁵ (0.81%) [*]
	0.05	0.51885734 × 10 ³	0.39038912 × 10 ⁴	0.67090612 × 10 ⁴	0.89757093 × 10 ⁴
	0.1	0.15045759 × 10 ³	0.11526595 × 10 ⁴	0.63665597 × 10 ⁴	0.2678006 × 10 ⁴
	0.5	0.98040854 × 10	0.62508242 × 10 ²	0.13191022 × 10 ⁵	0.10859238 × 10 ³

*) Relative error for $\Delta t = 0.001$ sec based on $N(1.0) = 2.2882052$ and $N(2.0) = 0.20657232 \times 10^5$

きと同様に、Hermite法では安定性を示しているが、 $5 \times 10^{-3} \leq \Delta t \leq 5 \times 10^{-1}$ のときには、一様収束性がくずれている。また、このときのCrank-Nicolson法では、更に悪い結果を示している。この高速炉モデルに対しても直接積分の式で求めた方が収束性が改善されている。ここで示されたHermite法はone step毎に反復をしないで動特性方程式を解けるので空間依存動特性解析向きであろう。

準静的空間依存動特性解析コードFX2（第3.2節参照）で用いられている1点近似の解法は、温度フィードバックを考えているので、各時間ステップ毎に $\ln N(t)$ を2次外挿した結果を用いて反復し解を求めるという非常に精度が良い安定な方法であり、Kavanoveの方法の発展と考えられるが、数値例がないので割愛する。

Kangらの提唱したHermite直接積分方式（既出）では $\Delta t \rightarrow \infty$ になると $|B_i| \rightarrow 1$ となって、Pade型マトリックスの振舞が悪くなり、この方法の長所が薄くなる。この点をHennartが、(2.26)式の右辺の $\Psi(s)$ にPadé近似を適用することにより、改良($\Delta t \rightarrow \infty$ に対して $|B_i^*| \rightarrow 0$)している。すなわち(2.32)式に相当するone step型のA-安定な式、

$$\Psi_{i+1} = B_i^* \Psi_i \tag{2.36}$$

を導き出している。ここに B_i^* は改良されたPadé型のマトリックスであり、Table 2.8にKangと同じ1次式挿入反応度 ($\rho(t) = \rho_0 + \rho_{\Delta} t$) に対する B_i^* の式が示されている。Table 2.9には、Kangと同じ例題に対する数値例を示したが、Kangの示した値よりも改良されており、ここでの方法の優位性が示されている。

1点近似法の式を解くいろいろのアルゴリズムの比較は、時間ステップとの関連においてIzumiらが行っている。また、フィードバックの考慮も含めてはKuriらが行っている。これらの結果をみても、Crank-Nicolson法は確かに良い近似ではあるが、外挿法を組み合わせた方が更に良い結果を与えることを示している。

Table 2.8 Advanced matrix B_i^* for ramp reactivity insertions due to Hansen et al. (B8)

Padé scheme	Advanced matrix B_i^*
P(1,1)M	$[I - \frac{1}{2} \Delta t A(t_i + \frac{2}{3} \Delta t)]^{-1} [I + \frac{1}{2} \Delta t A(t_i + \frac{1}{3} \Delta t)]$
P(2,0)M	$[I - \Delta t A(t_i + \frac{1}{2} \Delta t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 A(t_i + \frac{1}{3} \Delta t) A(t_i + \Delta t)]^{-1}$
P(2,1)M	$[I - \frac{2}{3} \Delta t A(t_i + \frac{5}{8} \Delta t) + \frac{1}{6} \Delta t^2 A(t_i + \frac{1}{2} \Delta t) A(t_i + \Delta t)]^{-1}$ $\times [I - \frac{1}{3} \Delta t A(t_i + \frac{1}{4} \Delta t)]$
P(2,2)M	$[I - \frac{1}{2} \Delta t A(t_i + \frac{7}{10} \Delta t) + \frac{1}{12} \Delta t^2 A(t_i + \frac{1}{10} \Delta t) A(t_i + \Delta t)]^{-1}$ $\times [I + \frac{1}{2} \Delta t A(t_i + \frac{3}{10} \Delta t) + \frac{1}{12} \Delta t^2 A(t_i + \frac{4}{10} \Delta t) A(t_i)]$

The same expressions are valid for Padé schemes if A is evaluated at $t_i + \frac{1}{2} \Delta t$.

Table 2.9 Percent errors for two test cases given by Kang^{B8}

	Time (sec)	1.0						2.0					
		0.05		0.1		0.5		0.05		0.1		0.5	
		At (sec)											
Thermal reactor with ramp insertion of +0.5\$/sec	P(1,1)	-4.2×10 ⁻²	-1.7×10 ⁻¹	-3.4	-8.5×10 ⁻²	-3.4×10 ⁻¹	-8.8	-4.2×10 ⁻²	-1.7×10 ⁻¹	-3.4	-8.5×10 ⁻²	-3.4×10 ⁻¹	-8.8
	P(1,1)M	-2.3×10 ⁻²	-9.2×10 ⁻²	-1.7	+3.5×10 ⁻²	+1.4×10 ⁻¹	+2.2	-2.3×10 ⁻²	-9.2×10 ⁻²	-1.7	+3.5×10 ⁻²	+1.4×10 ⁻¹	+2.2
	P(2,0)	-3.1×10 ⁻¹	-1.1	-1.2×10	-2.8×10 ⁻¹	-1.1	-1.9×10	-3.1×10 ⁻¹	-1.1	-1.2×10	-2.8×10 ⁻¹	-1.1	-1.9×10
	P(2,0)M	-4.0×10 ⁻²	-1.4×10 ⁻¹	+1.9	-7.5×10 ⁻²	-3.1×10 ⁻¹	-4.6	-4.0×10 ⁻²	-1.4×10 ⁻¹	+1.9	-7.5×10 ⁻²	-3.1×10 ⁻¹	-4.6
	P(2,1)	-1.5×10 ⁻¹	-5.5×10 ⁻¹	-9.2	-1.5×10 ⁻¹	-6.0×10 ⁻¹	-1.3×10	-1.5×10 ⁻¹	-5.5×10 ⁻¹	-9.2	-1.5×10 ⁻¹	-6.0×10 ⁻¹	-1.3×10
	P(2,1)M	+4.3×10 ⁻⁴	-3.4×10 ⁻³	+2.9×10 ⁻¹	-1.1×10 ⁻³	-8.8×10 ⁻³	-5.1×10 ⁻¹	+4.3×10 ⁻⁴	-3.4×10 ⁻³	+2.9×10 ⁻¹	-1.1×10 ⁻³	-8.8×10 ⁻³	-5.1×10 ⁻¹
	P(2,2)	-1.5×10 ⁻¹	-6.1×10 ⁻¹	-1.3×10	-1.5×10 ⁻¹	-6.1×10 ⁻¹	-1.4×10	-1.5×10 ⁻¹	-6.1×10 ⁻¹	-1.3×10	-1.5×10 ⁻¹	-6.1×10 ⁻¹	-1.4×10
	P(2,2)M	+7.6×10 ⁻⁶	+1.3×10 ⁻⁴	+1.3×10 ⁻¹	-3.2×10 ⁻⁵	-3.7×10 ⁻⁴	-7.9×10 ⁻²	+7.6×10 ⁻⁶	+1.3×10 ⁻⁴	+1.3×10 ⁻¹	-3.2×10 ⁻⁵	-3.7×10 ⁻⁴	-7.9×10 ⁻²
	Time (sec)	0.5						1.0					
Fast reactor with ramp insertion of -1.0\$/sec	t (sec)	0.05	0.1	0.5	0.05	0.1	0.5	0.05	0.1	0.5	0.05	0.1	0.5
	P(1,1)	+5.9×10 ⁻²	-5.1×10 ⁻¹	-1.1×10	+1.1×10 ⁻¹	+4.5×10 ⁻¹	+9.4	+5.9×10 ⁻²	-5.1×10 ⁻¹	-1.1×10	+1.1×10 ⁻¹	+4.5×10 ⁻¹	+9.4
	P(1,1)M	+3.2×10 ⁻²	-3.0×10 ⁻¹	-6.7	+5.5×10 ⁻²	+2.3×10 ⁻¹	+5.0	+3.2×10 ⁻²	-3.0×10 ⁻¹	-6.7	+5.5×10 ⁻²	+2.3×10 ⁻¹	+5.0
	P(2,0)	+1.7	+3.5	+2.0×10 ²	+1.3	+2.6	+1.4×10	+1.7	+3.5	+2.0×10 ²	+1.3	+2.6	+1.4×10
	P(2,0)M	-1.2×10 ⁻³	-5.5×10 ⁻³	-9.1×10 ⁻²	+4.5×10 ⁻⁴	-1.1×10 ⁻³	-4.8×10 ⁻²	-1.2×10 ⁻³	-5.5×10 ⁻³	-9.1×10 ⁻²	+4.5×10 ⁻⁴	-1.1×10 ⁻³	-4.8×10 ⁻²
	P(2,1)	+1.7	+3.4	+2.0×10 ²	+1.3	+2.6	+1.4×10	+1.7	+3.4	+2.0×10 ²	+1.3	+2.6	+1.4×10
	P(2,1)M	+5.2×10 ⁻⁴	+7.4×10 ⁻³	+3.2×10	+1.0×10 ⁻³	+1.2×10 ⁻³	+2.0×10 ⁻²	+5.2×10 ⁻⁴	+7.4×10 ⁻³	+3.2×10	+1.0×10 ⁻³	+1.2×10 ⁻³	+2.0×10 ⁻²
	P(2,2)	+5.0×10	+5.1×10	+5.1×10 ²	+1.0×10 ²	+1.1×10 ²	+1.1×10 ²	+5.0×10	+5.1×10	+5.1×10 ²	+1.0×10 ²	+1.1×10 ²	+1.1×10 ²
P(2,2)M	-1.0×10 ⁻³	+3.8×10 ⁻⁴	+4.2×10 ⁻²	-3.1×10 ⁻⁴	+1.8×10 ⁻³	+6.7×10 ⁻²	-1.0×10 ⁻³	+3.8×10 ⁻⁴	+4.2×10 ⁻²	-3.1×10 ⁻⁴	+1.8×10 ⁻³	+6.7×10 ⁻²	

3. 準静的近似

第3.1節では、準静的近似の発展的な意味において、断熱近似、(古典的)準静的近似(普通QS法と略称されている)および改良型準静的近似(IQ法或いはIQS法と略称されている)の計算アルゴリズムを示す。第3.2節では、今後の動特性計算コードの開発の指針を得る為に、いくつかのテスト例を示し、それらの検討を行う。特に断わらない限り空間については差分法^{A9)}で解かれているものとする。尚、Galatiが、本人自身がmeta-static近似と呼んでいる準静的近似を発表しているが、ここではこの方法を半静的近似と呼んでおく。

3.1 準静的近似の解法アルゴリズム

空間依存動特性方程式を解くアルゴリズムとして、分解的取扱いに含まれるものがいくつかあるので、これらについて簡単にふれておく。

ここで解かれるべき方程式は次の時間依存多群拡散方程式である。^{O4)}

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, E, t) = [-M + F_p] \phi(\mathbf{r}, E, t) + S_d[\phi(\mathbf{r}, E, t)] \quad (3.1)$$

ここに、Mは除去および散乱を示す演算子、 F_p は即発的核分裂の演算子である。 S_d は遅発中性子による中性子源で、中性子束についての畳み込み積分の形をしている。

ここで云う分解的取扱い(factorization technique)とは次式のように中性子束 $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ を振幅関数(amplitude function) $N(t)$ と形状関数(shape function) $\psi(\mathbf{r}, E, t)$ に分解した形から出発するもので、1点近似による動特性解法に近いものである。

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = N(t) \psi(\mathbf{r}, E, t); N(0) = 1.0 \quad (3.2)$$

ここに、 $N(t)$ は中性子束 $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ の時間依存の主成分を受持つものであり、 $\psi(\mathbf{r}, E, t)$ は時間的には従属的な成分しか受持たないが、空間およびエネルギー変化が考慮されているものと仮定する。この分解法では、解の一意性に対する要求から、 $\psi(\mathbf{r}, E, t)$ が全時間に対して (\mathbf{r}, E) の全ての点に対して正で且つ有界であることが必要でこのことは次式による条件と同等である。

$$\iint \frac{\psi^\dagger(\mathbf{r}, E) \psi(\mathbf{r}, E, t)}{v} d\mathbf{r} dE = A(\text{constant}) \quad (3.3)$$

この条件を用いると(3.2)式の分解法で1点近似のアルゴリズムを用いることができる。ここに(3.3)式において $\psi(\mathbf{r}, E)$ は定常状態の系における随伴中性子束である。

このように分解法では中性子束を振幅関数 $N(t)$ と形状関数 $\psi(\mathbf{r}, E, t)$ に分けるので、それぞれに対する方程式の間を関連づける式を通して、収束が良くなるように時間に関して反復を行うのが特徴である。

いま(3.3)式を考慮すると振幅関数 $N(t)$ に対する方程式は次のように1点近似動特性方程式の形になる。

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta(t)]}{\Lambda(t)} N(t) + \sum_k \lambda_k C_k(t) \quad (3.4)$$

ここに、パラメータ ρ, β, \dots は以下に示すように形状関数 $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ で平均された量である。また特に断わらない限り、これらパラメータおよび除去演算子などの時間依存性については通例に従って記号上省略する。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{F} \iint \phi^+(\mathbf{r}, E) [-M + F_p + F_d] \phi(\mathbf{r}, E, t) d\mathbf{r} dE \\ F_d &= \text{遅発中性子による核分裂演算子} \\ \Lambda &= \frac{1}{F} \iint \phi^+(\mathbf{r}, E) \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, E, t) d\mathbf{r} dE \\ \beta &= \sum_k \beta_k \\ \beta_k &= \frac{1}{F} \iint \phi^+(\mathbf{r}, E) F_{d,k} \phi(\mathbf{r}, E, t) d\mathbf{r} dE \\ F &= \iint \phi^+(\mathbf{r}, E) [F_p + F_d] \phi(\mathbf{r}, E, t) d\mathbf{r} dE \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$C_k(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\beta(t')}{\Lambda(t')} N(t') e^{-\lambda_k(t-t')} dt' \quad (3.6)$$

λ_k = 遅発中性子の先行核のグループ k に対する減衰定数

一方、形状関数に対する方程式は (3.2) 式を (3.1) 式に代入することによって得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} [-M + F_p] \phi(\mathbf{r}, E, t) + \frac{S_d [N(t') \cdot \phi(\mathbf{r}, E, t')]}{N(t)} \\ = \frac{1}{v} \left[\frac{dN(t)}{dt} \cdot \frac{\phi(\mathbf{r}, E, t)}{N(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, E, t) \right] \quad (3.7) \end{aligned}$$

ここで (3.4) 式 ~ (3.7) 式は、次の3つの点でカップリングされている。

- (3.7) 式で、遅発中性子項が $N(t')$ の関数であり、また $N(t)$ で割られている。
- (3.7) 式の右辺が $(dN/dt)/N$ を含んでいる。
- これらの式で、フィードバックは、全核断面積の時間依存性に在って、これらが $t' \leq t$ の全ての t' での中性子束 $\phi(t')$ の関数になっている。

分解法のアプローチでは、ここまではどの近似法でも同じであるが、これから先は近似の導入の仕方で異ってくる。特に形状関数の時間依存性が、振幅関数に比べて重要でないという点で近似の仕方が分かれてくる。以下にその3つの近似法を記す。

断熱近似 (adiabatic approximation)

普通云われている断熱近似では次の2つの近似が採り入れられている。まづ第1に、遅発中性子源

の形状と即発中性子源のそれと区別しない（これは先行核の分布による時間遅れを無視することに相当）こと。すなわち、

$$F_p \phi(\mathbf{r}, E, t) + \frac{S_d [N(t') \phi(\mathbf{r}, E, t')]}{N(t)} \longrightarrow F \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (3.8)$$

第2に、(3.7)式における時間微分項を無視すること。これはまた、次式に示すように形状関数に対する定常状態の固有値問題と同等である。

$$\left[-M + \frac{1}{k} F \right] \phi(\mathbf{r}, E, t) = 0 \quad (3.9)$$

このことは、結局(3.4)式と(3.7)式のカップリングを大方無視することであるが、フィードバックによるカップリング、すなわち、除去および中性子源に対する演算子の $\phi(\mathbf{r}, E, t')$ ($t' \leq t$)は考慮する。この断熱近似による方法は歴史的にも初めて動特性解析に空間依存性を取り入れた方法である。

更に(3.9)式の左辺に次式に示すように、定数 α を導入して解き、

$$\left[-M + \left(1 - \frac{\alpha}{\nu}\right) F \right] \phi(\mathbf{r}, E, t) = 0 \quad (3.10)$$

この α を、時間ステップに対する振幅方程式：

$$N(t) = N(0) e^{\alpha t} \quad (3.11)$$

に用いて解く改良された方法(A_X-1コード)もある。^{D1)}
準静的近似 (quasi-static approximation, QS法)^{O8)}

この近似でも形状関数の時間依存性は振幅関数のそれに比べて重要でないことを利用して、 $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ の時間微分項を無視すると形状関数は次式から求められる。

$$\left[-M + F_p - \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} \right] \phi(\mathbf{r}, E, t) = - \frac{S_d [N(t') \phi(\mathbf{r}, E, t')]}{N(t)} \quad (3.12)$$

最近準静的近似と云われているのは、この近似よりもむしろ、次に述べる改良型を指すことの方が多
 い。

改良型準静的近似 (improved quasi-static approximation, IQ法)

この方法では(3.7)式のどの項も無視しないで解くのであるが、その際 ϕ の時間微分を次式のよ
 うに1次の陰形差分(implicit difference)で置き換える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, E, t) = \frac{[\phi(\mathbf{r}, E, t) - \phi(\mathbf{r}, E, t - \Delta t)]}{\Delta t} \quad (3.13)$$

このように1次の差分形を用いたことで、形状関数 ϕ が時間的にゆっくり変化しているとしているの
 で、 $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ そのものを扱うよりも、より大きい時間ステップ Δt を用いることができるし、ま
 た、このような時間ステップでも安定であり、 Δt についての線形性が、自動的に(3.3)式の関係
 を満足する。更に、プログラム化も容易である。

この方法では、 $S_d [N(t') \cdot \phi(\mathbf{r}, E, t')]$ を $t' \leq t$ までの中性子束から直接求めるがその際 (3.7) 式では非同次の源として扱われる。 $(dN/dt)/N$ は前の時間ステップで (3.4) 式から求められる。したがって、 ϕ は次式から計算される。

$$\begin{aligned} & \left[-M + F_p - \frac{1}{v} \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\Delta t} \right) \right] \phi(\mathbf{r}, E, t) \\ & = - \left\{ \frac{S_d [N(t') \phi(\mathbf{r}, E, t')]}{N(t')} + \frac{\phi(\mathbf{r}, E, t - \Delta t)}{\Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

これらの式を解く際の時間ステップの切り方は3段階から構成されている。一番小さい時間ステップサイズは予め ρ , β , λ などがわかっているとして (3.4) 式を解くときである。最も大きい時間ステップサイズは (3.7) 式で形状関数 $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ を求めるときである。もう1つの中間的な時間ステップサイズは (3.5) 式における内積積分の際内挿するときや、また挿入反応度の時間的変化を採り入れるときなどに用いられる (後述の Fig. 3.12 参照)。

実際には (3.2) 式の解は (3.3) 式を必ずしも満足しないので (3.4) 式 ~ (3.7) 式の間を反復させても収束しないことが多い。そこで、次のような改善策が採られている。まず、(3.7) 式を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} & \left[-M - \frac{1}{v} \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) \right] \phi'(\mathbf{r}, E, t) \\ & = -\frac{1}{\gamma} F_p \phi'(\mathbf{r}, E, t) - \left\{ \frac{S_d [N(t') \phi(\mathbf{r}, E, t')]}{N(t')} + \frac{\phi(\mathbf{r}, E, t - \Delta t)}{v \Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここに

$$\gamma = \frac{1}{A} \iint \frac{\phi^+(\mathbf{r}, E) \phi'(\mathbf{r}, E, t)}{v} d\mathbf{r} dE \quad (3.16)$$

γ の値は、定常状態における固有値を求めるのと同じようにして (3.15) 式内で反復させて決められる。この辺のアルゴリズムの要旨は次の通りである。最初に ϕ' について解かれたとすると、次に γ の値について吟味される。 γ の値が1から離れていたら、 Δt 内で $\phi(\mathbf{r}, E, t - \Delta t)$ と $\phi'(\mathbf{r}, E, t)$ の間を内挿して、これを用いて計算された係数 ((3.5) 式参照) を使って、 Δt についての振幅関数が再計算される ((3.4) 式参照)。この新しい解を用いて (3.15) 式が再び解かれる。この反復において、 $\phi'(\mathbf{r}, E, t)$ が $\phi(\mathbf{r}, E, t - \Delta t)$ より $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ に近くなり、最後に $\phi'(\mathbf{r}, E, t) \equiv \phi(\mathbf{r}, E, t)$ および $\gamma \equiv 1.0$ に収束する。この収束は非常に速く、ここで述べた改善によって高速炉モデル ($A = 10^{-7}$ sec, 26群) で、 ϕ についての反復計算が $1/3$ 以下になったと Meneley は報告している。⁽³⁾

プログラムとしては、1次元拡散を Meneley⁽⁵⁾, Billington⁽²⁵⁾ らが作成し、2次元拡散を Sha⁽¹⁰⁾, Ferguson⁽¹²⁾, Dodds⁽¹⁵⁾, Hennart⁽²¹⁾, Billington⁽²⁵⁾, 可児⁽²³⁾, 大西⁽²⁸⁾ らが、3次元拡散を Dastur⁽¹⁹⁾, Fletcher⁽²⁶⁾

らが作成している。最近、2次元輸送コード^{C30)}も作成されたとのことである。

半静的近似 (meta-static approximation, MS法)^{C17, C18, C29)}

Ott - Meneley らの提唱した準静的近似の系統では、随伴中性子束に対する時間依存性については考慮していなかった。Galati は、 ω モード法による動特性方程式がエネルギー群数2のときは簡単になるのに目を付けて、随伴中性子束の時間依存性をも考慮した式を導き出している。^{C17)}

既に述べた1点近似および準静的近似から推察できるように、多群の時間依存中性子束は、指数関数および形状関数で記述することができる。すなわち、

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = a \phi_g(\mathbf{r}) e^{\omega t} + q_g(\mathbf{r}, t) \quad (3.17)$$

ここで、 $\phi_g(\mathbf{r})$ は形状関数で、(3.1)式で時間微分項の微分を ω と置きかえることによって得られる(すなわち、モード法における最大固有値問題の解)と考えると、静的な方程式を解くのと同様である。更に、エネルギー群数2のときは、遅発中性子に関する式も一緒にまとめることができる。すなわち、 ψ_g は次に示す式を解くことによって得られる。

$$\left. \begin{aligned} \omega \frac{1}{v_1} \phi_1 &= \nabla \cdot D \nabla \phi_1 - (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \phi_1 \\ &+ \frac{1}{\mu} (\nu \Sigma_{f1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f2} \phi_2) \\ \omega \frac{1}{v_2} \phi_2 &= \nabla \cdot D \nabla \phi_2 - \Sigma_{a2} \phi_2 + \Sigma_r \psi_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

ここに

$$\frac{1}{\mu} = 1 - \sum_i \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \quad (3.19)$$

ここで、 ω および μ は、適当な初期推定値を用いて、(3.18)式と(3.19)式との間を反復させて求められる。普通は、1, 2回で収束する。

一方、規格化因子 a は、(3.18)式を解いて得られる中性子束と、(3.18)式に対する随伴方程式を解いて得られる随伴中性子束を用いて、次式によって求められる。

$$a = \frac{\int d\mathbf{r} (\phi_1^+ \frac{1}{v_1} \phi_{01} + \phi_2^+ \frac{1}{v_2} \phi_{02} + \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \omega} \phi_1^+ C_{0i})}{\int d\mathbf{r} \left[\phi_1^+ \frac{1}{v_1} \psi_1 + \phi_2^+ \frac{1}{v_2} \psi_2 + \sum_i \frac{\lambda_i + \beta_i}{(\lambda_i + \omega)^2} \phi_1^+ (\nu \Sigma_{f1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f2} \phi_2) \right]}$$

ここに、下つき添字の0は初期の値を用いることを示し、積分は原子炉体系の全空間についてである。

この半静的近似と他の方法との比較については、Galati 自身は1次元拡散問題で行っているが、^{C17)}2次元拡散についてもプログラム化されている。^{C18, C29)}

*) 例えば文献A14の第III・E章参照。

3.2 ベンチマーク・テストの現状

準静的近似法は、先に述べたように Ott らによって提案され Meneley, Fuller らによって発展をみているが、歴史的には、1点近似→断熱近似→準静的近似と発展してきた。これらの近似の数値的比較を Ott-Meneley^(C4)が行っている。

体系は、簡単な3領域からなる1次元板状炉で、熱中性子(軽水減速)炉と高速炉(LMFBR)を対象とし、代表的な核的逸走のときの動特性を調べている。用いられた2群群定数は Table 3.1 に示してある。Fig. 3.1 は3%の反応度が挿入されたときの熱中性子炉モデルに対する反応度の時間的変化の様子を示している。準静的近似(QX1)は、1点近似に較べて遥かに良い近似であることが示されている。Fig. 3.2 は準静的近似の挿入反応度の関数として振幅関数の誤差の様子を示す。高速炉モデルの方が熱中性子炉モデルより良い精度を示していることに注意されたい。Fig. 3.3 は、100 \$/secの反応度が挿入されたときの反応度変化であるが、断熱近似は1点近似に比べ遥かに良い近似であり、これより準静的近似の方が更に良い近似であることが示されている。Table 3.2 には、熱中性子炉モデルに対してではあるが、中性子束の比較が示されている。この表でも1点近似→断熱近似→古典的準静的近似→改良型準静的近似と良い近似に向っているが、この中で特に改良型準静的近似の精度が高いのが注目を引く。このことは、改良型近似において、形状関数を安定な方法(陰形差分)で正確に解き、1点近似と反復させたことで非常に旨味がでてきたことを意味する。

Fuller^(C6)は、Staceyの与えた、熱中性子炉をモデルにした板状1次元の問題(第1領域が40 cm, 第2領域が160 cm, 第3領域が40 cmの3領域で左右外側境界は真空。反応度の摂動は第1領域の Σ_a^2 (熱群)を変えて行く、群定数などについてはTable 3.3 参照, $\beta = 0.0075$)に対し巾広い数値的検討を行っている。反応度変化は未臨界過渡現象(sub-critical transient), 遅効的過臨界過渡現象(delayed supercritical transient)の3種類を考えている。対象の計算コードとしてはQX1(準静的近似により高速炉用に開発された^(C5)), RAUMZEIT(時間差分に対して、積分してしまう方法 Time-integrated method と Crank-Nicolson 型陰形差分解法のふたつのオプションがある^(D3)), および WIGLE(θ -方法による差分解法, 安定な方法であるので、時間を細かく採れば厳密解を与えるとされている^(D2))を用いる。挿入反応度については以下に示すそれぞれの Table の注に示してある。

未臨界過渡現象に対する全出力の様子は Table 3.4 に示してあるが、いずれの方法でも非常に良い一致を見ている。局所的な出力の様子は Table 3.5 に示してある。第1領域は他の領域に比べて時間変化が特に激しいが、他の領域内様, 3つの計算コード共非常に良い一致をみている。このことは局所的にみてもQX1コードは正しく計算されていることがわかる。遅効的過臨界過渡現象に対しても全出力の様子(Table 3.6 参照)でも、局所的な様子(Table 3.7 参照)でも、QX1コードの計算値は他のコードによる計算値と良く一致している。即効的過臨界過渡現象に対する全出力の様子は Table 3.8 に示してあるが、この場合は反応度挿入度(300 \$/sec 相当)が大変酷しいので、QX1コードでは、形状関数の時間微分項の誤差が累積して、表のように厳密解より若干過大評価となって現れてくる。それでも後述のように最適の時間ステップをとると満足な結果を与える。局所的な様子(Table 3.9)では、QX1は領域1(反応度を挿入した領域)では若干過大評価となり、領域3では初期では若干過少評価で中期以後では過大評価となっている。いずれの場合に対してもQX1の形状関数の反復計算回数の過半分は反応度挿入時間内で喰っている。

次に、時間ステップサイズによる影響を調べよう。一番反応度挿入の速い場合について示したのが

Table 3.1 Two group constants for comparison between quasistatic approximation and other approaches^{C4)}

	Thermal core	Fast core a)
D_1 (cm)	1.69531	2.29373
D_2 (cm)	0.409718	1.26637
Σ_{a1} (cm ⁻¹)	0.0137513	3.80491×10^{-3}
Σ_{a2} (cm ⁻¹)	0.261361	6.10512×10^{-3}
Σ_{21} (cm ⁻¹)	0.0164444	6.13867×10^{-3}
$\nu\Sigma_{f1}$ (cm ⁻¹)	0.0194962	8.06219×10^{-3}
$\nu\Sigma_{f2}$ (cm ⁻¹)	0.497857	5.97499×10^{-3}
B^2 (cm ⁻²)	Region 1	4.02460×10^{-4}
	Region 2	1.33045×10^{-3}
	Region 3	3.65044×10^{-4}
$1/\nu_1$ (sec/cm)	0.	9.97486×10^{-10}
$1/\nu_2$ (sec/cm)	4.5455×10^{-6}	4.26076×10^{-9}
χ_1	1.0	0.973
χ_2	0.0	0.027
Λ (sec)	1.045×10^{-5}	3.0×10^{-7}

a) Cross sections were obtained by collapsing 22 groups for LMFBR core.

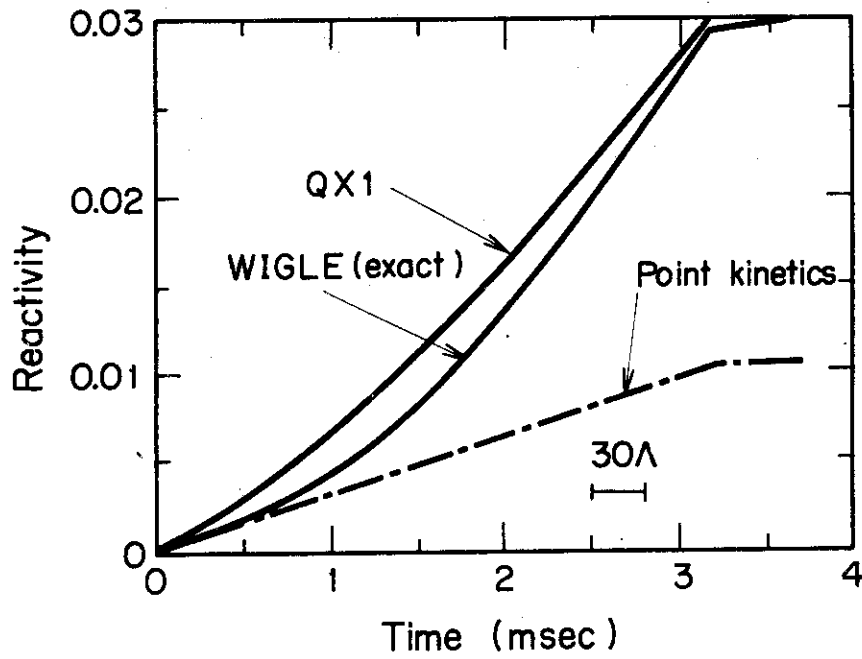


Fig. 3.1 Time delay effects on reactivity calculated by different methods (linear ramp insertion of 1000 $\$/\text{sec}$ in a larger thermal core without delayed neutrons)^(C4)

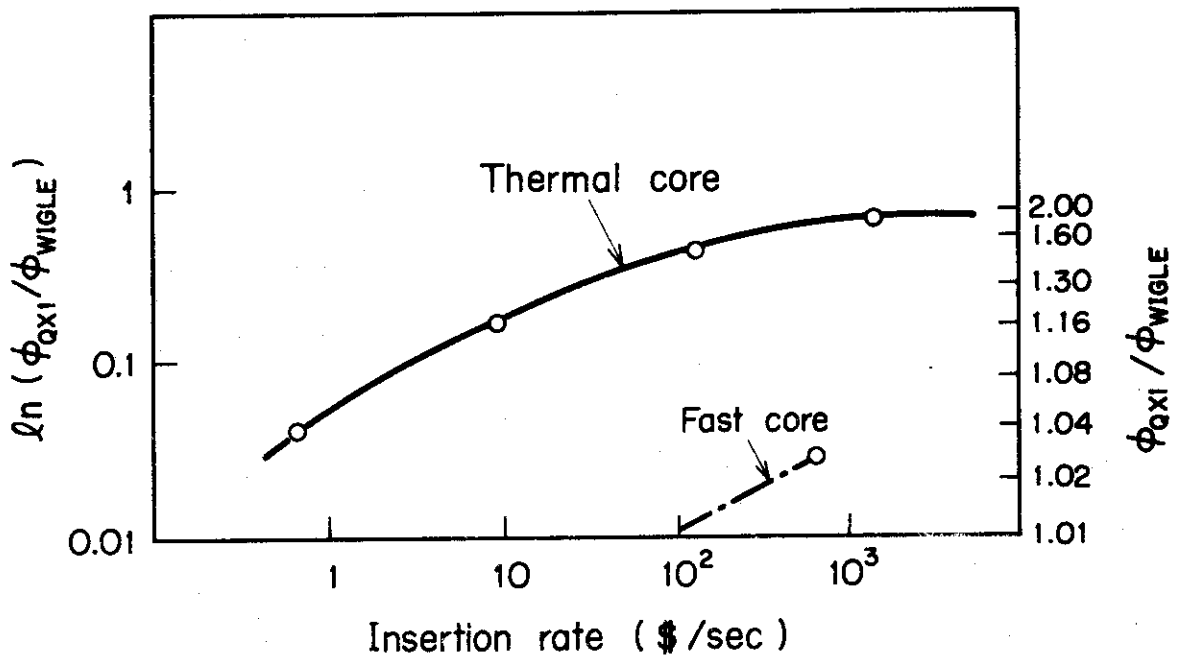


Fig. 3.2 Amplitude function errors resulting from neglecting the shape function time derivative, as a function of the reactivity insertion rate^(C4)

Table 3.2 Comparison of amplitude functions at $t = 0.022$ sec after the reactivity ramp insertion (100 $\$/\text{sec}$) in a slab thermal core for various factorization approaches shown in Fig. 3.3^{C4}

Reactor types		Models				
		Direct numerical (WIGLE)	Improved quasistatic	Quasistatic	Adiabatic	Point kinetics
Thermal core		14.92	14.92	16.18	21.27	2.253
$\Lambda = 1 \times 10^{-5}$ sec	ϕ/ϕ_{WIGLE}	1.000	1.000	1.084	1.426	0.1510
Thermal core		2.793×10^{17}	2.793×10^{17}	2.919×10^{17}	3.947×10^{17}	2.280
$\Lambda = 3 \times 10^{-7}$ sec	ϕ/ϕ_{WIGLE}	1.000	1.000	1.045	1.413	8.163×10^{-18}

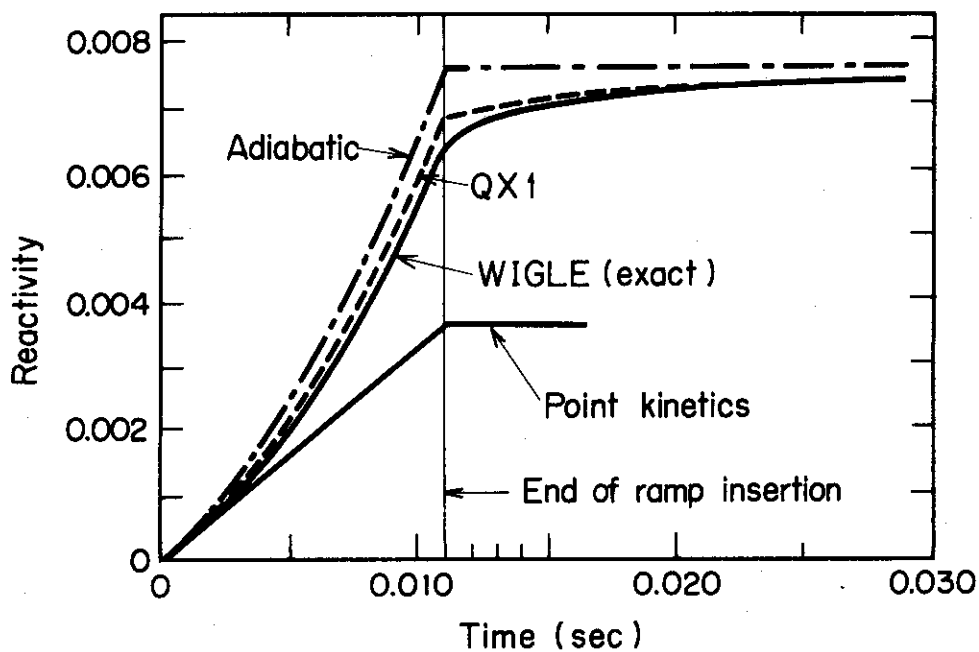


Fig. 3.3 Reactivity computed by different methods for a ramp insertion (100 $\$/\text{sec}$) in a large thermal core ($\Lambda = 1.045 \times 10^{-5}$ sec, $\beta = 0.0064$)^{C4}

Table 3.3 Initial two-group constants and delayed neutron parameters used for one-dimensional thermal reactor kinetics benchmark calculations⁽⁶⁾

Two-group constants			Delayed neutron parameters		
Region	1 and 3	2	Family	Effective delay fraction	Decay constant
D^1 (cm)	1.50	1.00	1	2.50×10^{-4}	1.24×10^{-2}
D^2 (cm)	0.50	0.50			
Σ_a^1 (cm^{-1})	0.026	0.020	2	1.64×10^{-3}	3.05×10^{-2}
Σ_a^2 (cm^{-1})	0.18	0.080			
$\nu\Sigma_f^1$ (cm^{-1})	0.010	0.005	3	1.47×10^{-3}	1.11×10^{-1}
$\nu\Sigma_f^2$ (cm^{-1})	0.200	0.099			
$\Sigma^{1 \rightarrow 2}$ (cm^{-1})	0.015	0.010	4	2.96×10^{-3}	3.01×10^{-1}
χ^1	1.00	1.0	5	8.60×10^{-4}	1.14
χ^2	0.0	0.0			
ν^1 (cm/sec)	1×10^7	1×10^7	6	3.20×10^{-4}	3.01
ν^2 (cm/sec)	3×10^5	3×10^5			

Table 3.4 Comparison of total powers calculated for subcritical transient^(C6)*1)

Time (sec)	One-dimensional kinetics code			Cumulative number of shape functions in QX1
	RAUMZEIT*2)	WIGLE	QX1	
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	
0.1	0.9299	0.9298	0.9298	7
0.2	0.8733	0.8732	0.8733	11
0.5	0.7597	0.7596	0.7597	21
1.0	0.6588	0.6588	0.6588	36
1.5	0.6432	0.6432	0.6433	41
2.0	0.6307	0.6306	0.6307	44

*1) This transient is a 3 % ramp increase in Σ_a^2 (thermal group) in 1.0 sec.

*2) Time-integrated algorithm in RAUMZEIT code was used.

Table 3.5 Comparison of relative regional powers calculated for subcritical transient^(C6)

Region	Code	Time (sec)						
		0.0	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0
1	RAUMZEIT	1.0000	0.8621	0.7521	0.5337	0.3453	0.3236	0.3066
	WIGLE	1.0000	0.8621	0.7520	0.5336	0.3452	0.3235	0.3066
	QX1	1.0000	0.8621	0.7521	0.5336	0.3452	0.3236	0.3066
2	RAUMZEIT	1.0000	0.9340	0.8805	0.7724	0.6753	0.6588	0.6455
	WIGLE	1.0000	0.9339	0.8804	0.7724	0.6753	0.6587	0.6455
	QX1	1.0000	0.9340	0.8805	0.7724	0.6753	0.6588	0.6455
3	RAUMZEIT	1.0000	0.9910	0.9831	0.9655	0.9463	0.9382	0.9312
	WIGLE	1.0000	0.9910	0.9830	0.9655	0.9462	0.9381	0.9311
	QX1	1.0000	0.9910	0.9831	0.9656	0.9463	0.9383	0.9312

Table 3.6 Comparison of total powers calculated for delayed supercritical transient^(C6)*1)

Time (sec)	One-dimensional kinetics code*2)			Cumulative number of shape functions in QX1
	RAUMZEIT	WIGLE	QX1	
0.0	1.000	1.000	1.000	
0.1	1.028	1.028	1.028	5
0.2	1.063	1.062	1.063	7
0.5	1.205	1.205	1.205	12
1.0	1.740	1.740	1.740	26
1.5	1.959	1.959	1.959	33
2.0	2.166	2.165	2.166	37
3.0	2.606	2.605	2.606	43
4.0	3.108	3.107	3.108	48

*1) This transient is due to a 1 % ramp decrease in Σ_a^2 in 1.0 sec.

*2) The time step size for both WIGLE and RAUMZEIT is 1×10^{-3} sec. For QX1, the average time step of shape functions is 0.04 sec.

Table 3.7 Comparison of relative regional powers calculated for delayed supercritical transient^(C6)

Region	Code	Time (sec)						
		0.0	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0
1	RAUMZEIT	1.000	1.056	1.399	2.435	3.216	4.017	4.928
	WIGLE	1.000	1.056	1.399	2.435	3.215	4.016	4.927
	QX1	1.000	1.056	1.398	2.435	3.216	4.017	4.928
2	RAUMZEIT	1.000	1.027	1.194	1.701	2.113	2.540	3.027
	WIGLE	1.000	1.027	1.193	1.701	2.113	2.539	3.026
	QX1	1.000	1.027	1.193	1.701	2.113	2.540	3.027
3	RAUMZEIT	1.000	1.004	1.029	1.107	1.119	1.299	1.417
	WIGLE	1.000	1.004	1.028	1.107	1.119	1.298	1.416
	QX1	1.000	1.004	1.029	1.107	1.119	1.298	1.416

Table 3.8 Comparison of total powers calculated for prompt supercritical transient(C6)*1)

Time (sec)	One-dimensional kinetics code*2)			Cumulative number of shape functions in QX1
	RAUMZEIT	WIGLE	QX1	
0.000	1.000	1.000	1.000	
0.001	1.022	1.022	1.022	3
0.005	1.659	1.659	1.666	39
0.010	1.565×10	1.565×10	1.573×10	139
0.012	7.019×10	7.019×10	7.055×10	187
0.015	6.804×10 ²	6.803×10 ²	6.836×10 ²	214
0.018	6.613×10 ³	6.611×10 ³	6.642×10 ³	220
0.020	3.012×10 ⁴	3.011×10 ⁴	3.025×10 ⁴	222

*1) This transient is due to a 5 % ramp decrease in Σ_a^2 for 0.01 sec (equivalent to a 300 \$/sec insertion).

*2) The time step size for both WIGLE and RAUMZEIT is 1×10^{-5} sec. For QX1, the average time step of shape functions is 9×10^{-5} sec.

Table 3.9 Comparison of relative regional powers calculated for prompt supercritical transient(C6)

Region		Time (sec)					
		0.000	0.001	0.005	0.010	0.015	0.020
1	RAUMZEIT	1.000	1.058	2.484	3.481×10	1.570×10 ³	6.956×10 ⁴
	WIGLE	1.000	1.058	2.484	3.481×10	1.570×10 ³	6.954×10 ⁴
	QX1	1.000	1.068	2.507	3.497×10	1.577×10 ³	6.986×10 ⁴
2	RAUMZEIT	1.000	1.014	1.544	1.258×10	5.389×10 ²	2.385×10 ⁴
	WIGLE	1.000	1.014	1.544	1.258×10	5.388×10 ²	2.385×10 ⁴
	QX1	1.000	1.013	1.550	1.265×10	5.414×10 ²	2.396×10 ⁴
3	RAUMZEIT	1.000	1.000	1.017	1.342	1.486×10	6.181×10 ²
	WIGLE	1.000	1.000	1.017	1.342	1.485×10	6.179×10 ²
	QX1	1.000	0.991	1.010	1.351	1.500×10	6.214×10 ²

Table 3.10 である。厳密解を WIGLE コードの 10^{-5} sec のステップサイズの値とすると、ステップサイズを増加させても QX1 は (RAUMZEIT も) かなりよい精度を保っているが、WIGLE は、よく標準コードとして用いられるのに、満足な精度を示していない。**Fig. 3.4** はこれらの関係をわかりやすくする為に図にしたものである。尚、図では RAUMZEIT の結果は WIGLE のそれと一致している。

QX1 コードは、元来高速炉用に作られたものなので、ここで、中性子速度を 2 桁上げて高速炉を模擬してみよう。他の条件は熱中性子炉モデルと同じである。時間ステップサイズを変えて、全出力を比較したのが **Table 3.11** および **Fig. 3.5** である。ここでも、QX1 は時間ステップサイズの影響を受けにくいことを示している。これは又、熱中性子炉モデルよりも影響を受けにくい。同じ精度であれば、QX1 コードでは RAUMZEIT コードの 20 倍大きいステップサイズが採れる。一方、熱中性子炉モデルでは 4 倍程であった。この点から見ても、QX1 コードは熱中性子炉よりは高速炉向きと云えよう。この傾向は、群定数などの炉パラメータを高速炉のものにすれば、更に強まると思われる。

次に、Galati が彼自身が提唱した半静的近似について、1 次元板状体系に対する検討を行っているので以下に示そう。⁽¹⁷⁾ 問題としては、Yasinsky が 1 点近似の適性範囲について検討したときの (第 2.1 節で既出) 熱中性子炉モデル (**Table 2.1** 参照) を採り上げている。

240 cm 炉では即効的過渡現象に対する高速エネルギー群の中性子束は、**Fig. 3.6** に示すように、2.5 msec までは厳密解と非常に良い一致を示している。誤差は時刻の経過と共に伝播して行くが、7.5 msec でも高々 18% である。2.5 msec 後の熱中性子束については **Fig. 3.7** に示してあるが、厳密解との一致は非常に良い。図には、(3.20) 式の ϕ_g^+ を初期の値 ϕ_{0g}^+ で置きかえたときの曲線 (semi-asymptotic approx.) も載せられているが、これは、時間に依存しない随伴中性子束を用いたことに相当し、したがって、この問題では、随伴中性子束にも時間依存性を考慮すべきであることが示されている。

60 cm 炉のような小型になると、**Fig. 3.6** に対応する図は **Fig. 3.8** であるが、全ての時刻において良い一致を示すようになる。**Fig. 3.7** に対応する図は **Fig. 3.9** であるが、240 cm 炉と同様な結果を示している。

遅効的な過渡現象に対しては、240 cm 炉の熱中性子束分布が **Fig. 3.10** に示してある (1 点近似の際の **Fig. 2.3** も参照)。半静的近似が、摂動を受けた領域から離れたところでは厳密解と若干ずれてはいるが、大体良い一致である (縦軸目盛に注意)。60 cm 炉では全体に亘って良い一致を示すが、特に、1 秒後のときは、他の全ての方法とも良く一致し図上では区別が付かない (1 点近似の際の **Fig. 2.4** 参照)。

尚、いつれの図においても、合成法 (synthesis) が厳密解と良く一致しているのは、体系が単純 (板状) な為であろう。

次に、2 次元拡散コードでのテスト例を示そう。最初に Dodds らの検討を紹介する。⁽¹⁵⁾ **Fig. 3.11** に示すような (R-Z) 体系の重水減速型熱中性子炉がモデルである。Transient No 1 は炉心の中央の ring 1 の領域の冷却材が 3 秒間で喪失してしまうときで、部分的に減速材がなくなること (蒸気になってしまうことも含めて) に相当する。Transient No 2 は、炉心の比較的周辺にある ring 5 の領域の熱中性子吸収が 12 秒間でゼロになる場合で、原子炉の運転開始時の事故を模擬している。

準静的近似による計算コード TWODQD および直接解法による計算コード TWODTA (多分、

Table 3.10 Comparison of total powers calculated for prompt supercritical transient as a function of time step size(C6)

Time (sec)	Time step size (sec)									
	RAUMZEIT*1)		WIGLE				QXI(Average step size of shape, functions)			
	TI:10 ⁻⁵	AV:10 ⁻⁵	TI:10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻³	9.0×10 ⁻⁵	2.1×10 ⁻⁴	8.7×10 ⁻⁴	
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
0.001	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	
0.005	1.659	1.659	1.659	1.659	1.659	1.672	1.666	1.673	1.673	
0.010	1.565×10	1.565×10	1.566×10	1.565×10	1.567×10	1.802×10	1.573×10	1.583×10	1.571×10	
0.012	7.019×10	7.019×10	7.028×10	7.019×10	7.033×10	8.768×10	7.055×10	7.092×10	6.993×10	
0.015	6.804×10 ²	6.803×10 ²	6.818×10 ²	6.803×10 ²	6.824×10 ²	9.582×10 ²	6.836×10 ²	6.868×10 ²	6.740×10 ²	
0.018	6.613×10 ³	6.612×10 ³	6.632×10 ³	6.611×10 ³	6.639×10 ³	1.049×10 ⁴	6.642×10 ³	6.674×10 ³	6.544×10 ³	
0.020	3.012×10 ⁴	3.011×10 ⁴	3.022×10 ⁴	3.011×10 ⁴	3.026×10 ⁴	5.176×10 ⁴	3.025×10 ⁴	3.040×10 ⁴	2.980×10 ⁴	

*1) TI stands for the time-integrated approximation and AV the Crank-Nicolson difference method in the temporal difference algorithm.

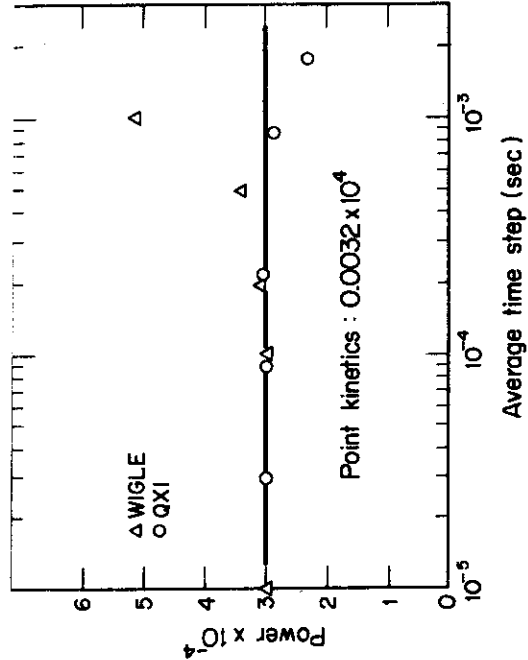


Fig. 3.4 Power at 0.02 sec as a function of time step size for prompt supercritical transient(C6)

Table 3.11 Total power for transient with neutron velocities increased by a factor of 100 for a fast reactor analysis as a function of time step size (C6)

Time (sec)	Time step size (sec)									
	RAUMZEIT					QX1				
	10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	5×10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	2.0×10 ⁻⁵	8.5×10 ⁻⁵	1.4×10 ⁻⁴	5.0×10 ⁻⁴	1.0×10 ⁻³	
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.001	1.178	1.178	1.178	1.178	1.178	1.178	1.178	1.178	1.178	1.178
0.002	1.558	1.558	1.558	1.559	1.558	1.558	1.558	1.558	1.558	1.558
0.003	2.797	2.797	2.797	2.798	2.797	2.797	2.797	2.787	2.759	2.759
0.004	2.072×10	2.073×10	2.085×10	2.125×10	2.072×10	2.072×10	2.066×10	2.006×10	1.832×10	1.832×10
0.005	1.537×10 ⁵	1.553×10 ⁵	2.037×10 ⁵	6.327×10 ⁵	1.535×10 ⁵	1.532×10 ⁵	1.527×10 ⁵	1.407×10 ⁵	1.189×10 ⁵	1.189×10 ⁵

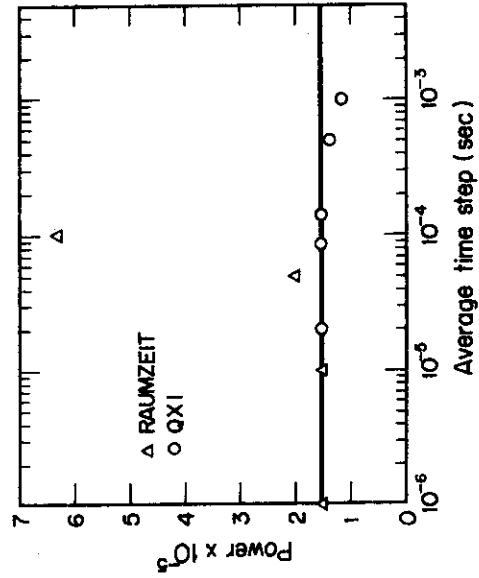


Fig. 3.5 Power at 0.005 sec as a function of time step size for transient with neutron velocities increased by a factor of 100 (C6)

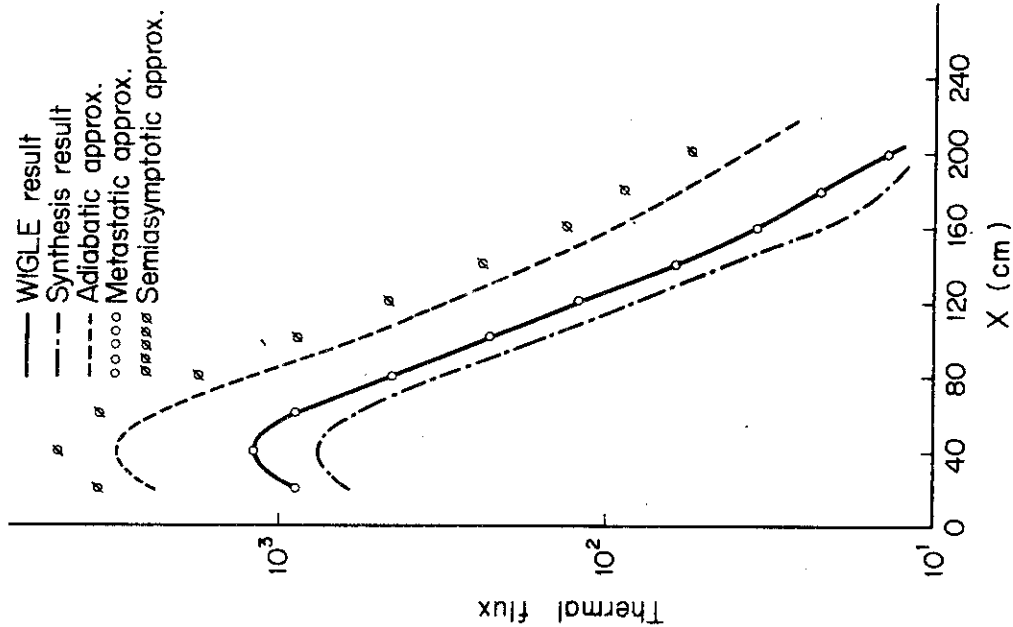


Fig. 3.7 Superprompt critical excursion thermal flux at $t = 2.5$ msec for a large thermal core(Cl7)

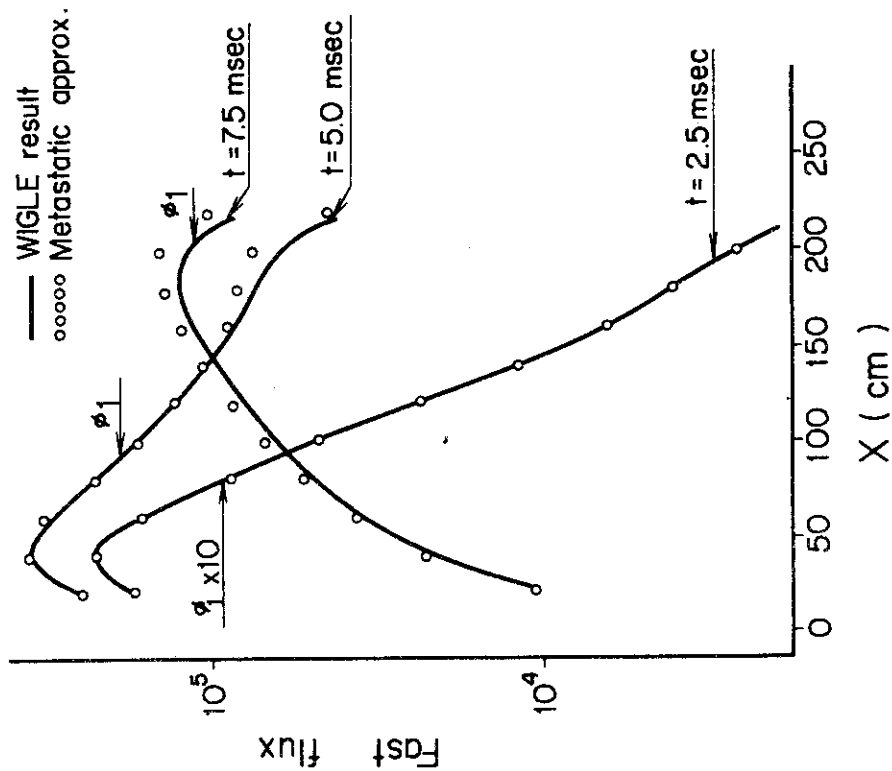


Fig. 3.6 Superprompt critical excursion fast flux for a large thermal core(Cl7)

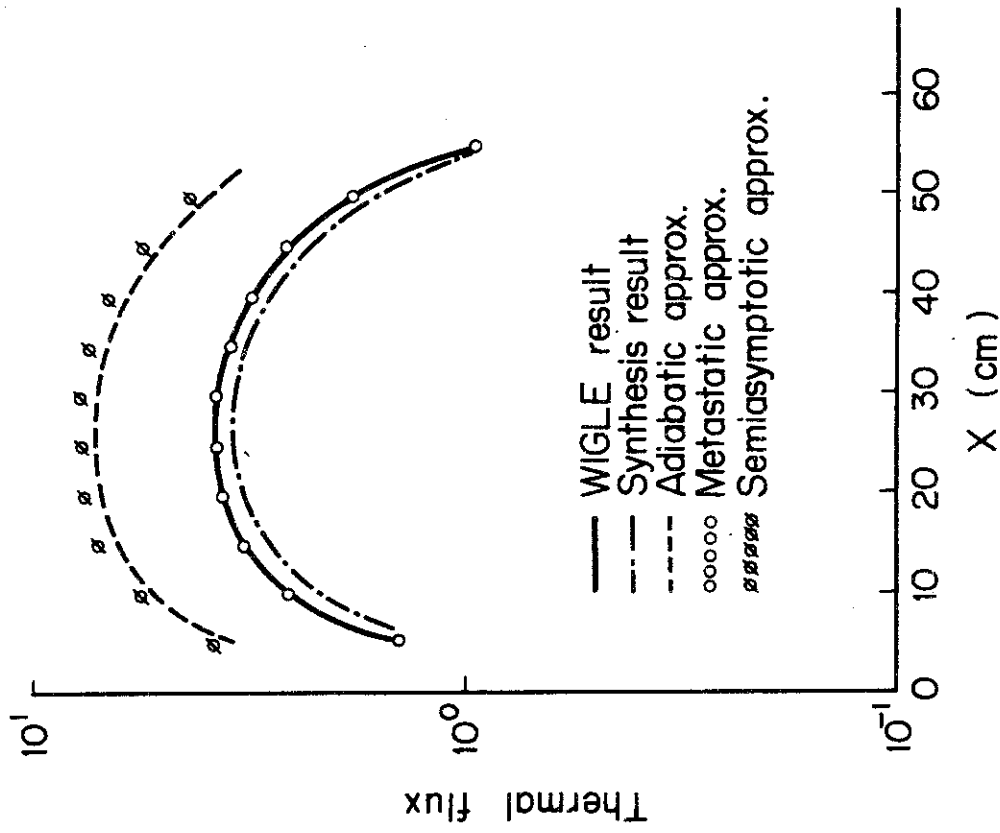


Fig. 3.9 Superprompt critical excursion thermal flux at $t = 2.5$ msec for a small thermal core (C17)

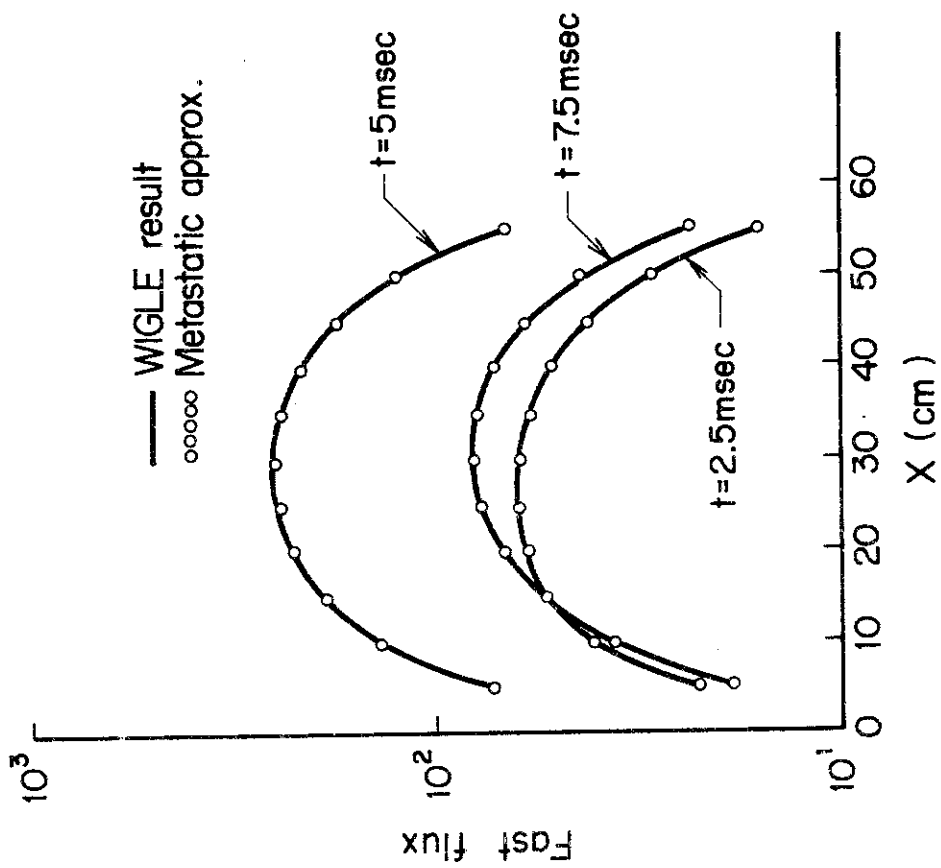


Fig. 3.8 Superprompt critical excursion fast flux for a small thermal core (C17)

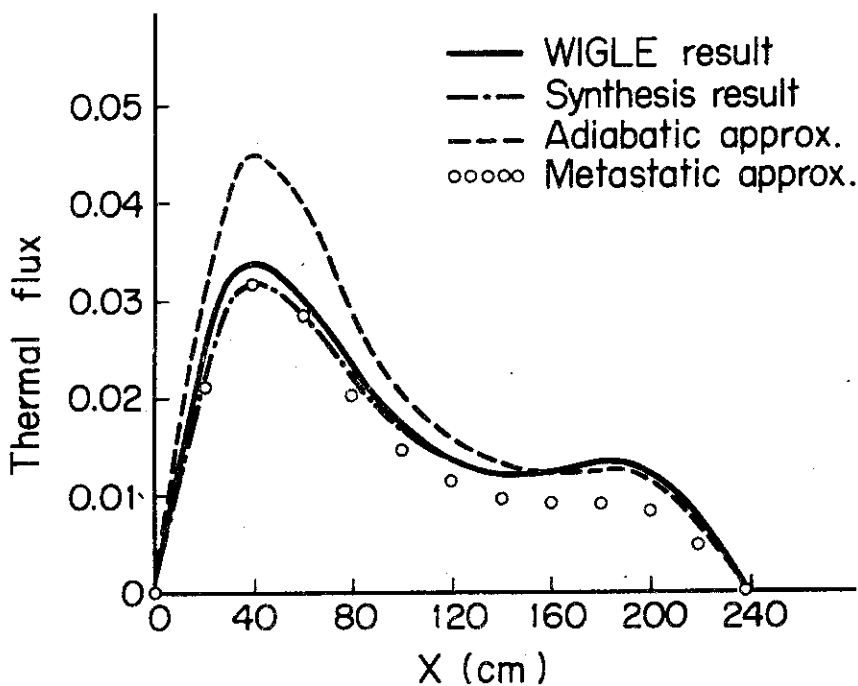


Fig. 3.10 Subprompt critical excursion thermal flux at $t = 0.8$ sec for a large thermal core⁽¹⁷⁾

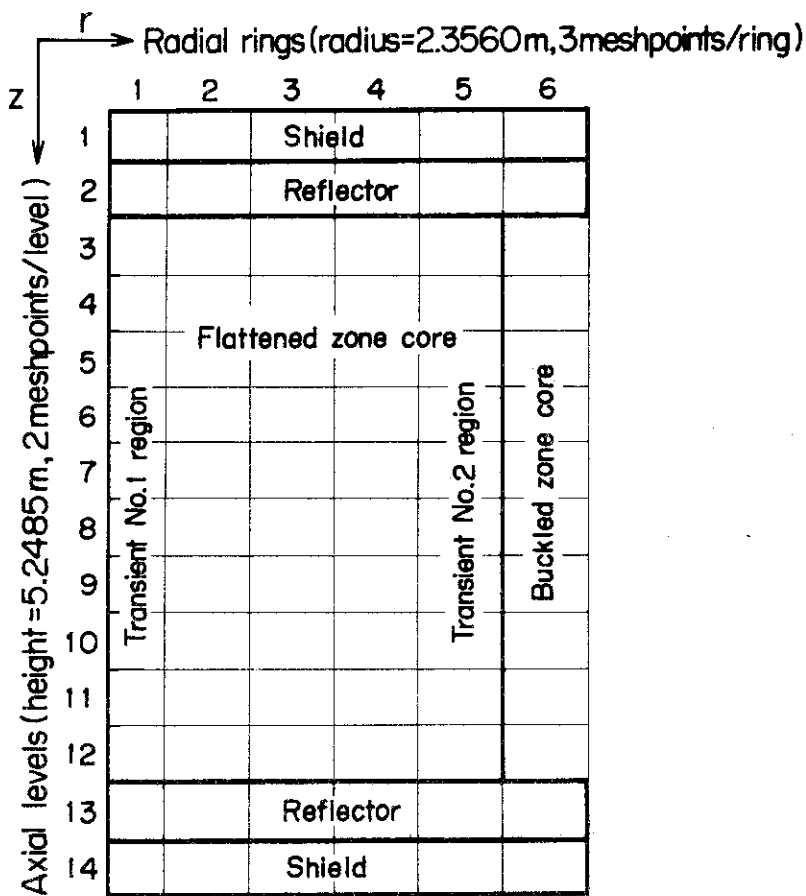


Fig. 3.11 Transient No.1 (flow loss from ring 1 in 3 sec) and transient No.2 (Σ_a reduction for ring 5 in 12 sec) for numerical tests⁽¹⁵⁾

TWIGLE 相当) を用いたときの時間ステップの流れ図は Fig. 3.12 に示してある。 Δt_E は熱水力計算のときの時間ステップである。

TWODQDコードの元のものは $\Delta t_E = \Delta t_p$ であったが、ここでは $\Delta t_E \leq \Delta t_p$ に採れるように改良されている。このことにより、 $\Delta t_p = 4 \Delta t_E$ にして計算したら、精度を落すことなしにCPU時間で30%節約できた。また、TWODTAコードにおいても $\Delta t_E \leq \Delta t$ が採れるように改良されたが、このことにより熱水力計算における数値安定性が改善された。

Transient No. 1 は空間依存性は大きい時間依存性は比較的ゆるい。一方 Transient No. 2 は空間依存性は少ない時間依存性が強い。Fig. 3.13 には、これら両者の時間ステップ 0.05 sec における様子を示した。縦目盛の単位に注意されたい。どちらの Transient に対しても直接法および準静的近似法による結果は略同じである。

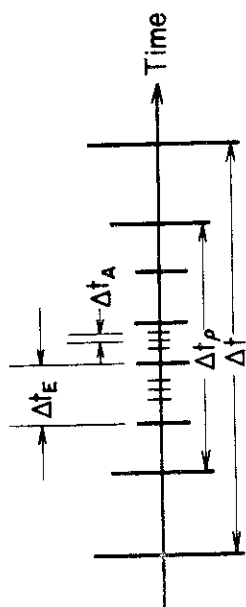
次に、両計算コードの時間ステップの採り方による依存性について調べたのが Table 3.12 (Transient No. 1 に対して) および Table 3.13 (Transient No. 2 に対して) である。Transient No. 1 の場合には、時間ステップを大きくとるに従い、どちらの方法も近似の精度が、同じ割合で落ちていくが、直接法で $\Delta t = 2$ sec のときに数値計算上 おかしなことが出ているのに反し、準静的方法ではこのような問題は起きていない。更に、Transient No. 2 の場合には、直接法では上に起きたような問題がより強く現われている。

これらの原因は、直接法では、大きい時間ステップを採ると、それがすぐ効いて大きな打ち切り誤差 (truncation error) が出てくるのに反し、準静的方法では、この時間ステップは振幅関数 $N(t)$ の方で小さく採るので、小さい打ち切り誤差しか伴わない。したがって時間による依存性が大きい程この傾向が現われる (Transient No. 1 に対して Transient No. 2)。これらの結果から、同じ精度の結果に対して、準静的方法の方が直接法に比して可成り計算時間が節約できる筈である。事実、Transient No. 2 の場合に対してであるが、平均出力の誤差 5% に対して、準静的方法では90秒であるが、直接法では 440 秒 (CPU time) であり、1/5 に節約ができた。一方、Transient No. 1 は時間依存性はあまり強くないので、Transient No. 2 の場合ほど計算時間は節約できなかった。さらに、空間の方のメッシュサイズの大きさも精度に効いてくるのでそれほど計算時間の節約ができなくなる。これらの様子については Fig. 3.14 (Transient No. 1) および Fig. 3.15 (Transient No. 2) に示してある。

Mayer^(8,9) はフィードバック (密度変化、温度変化など) を採り入れた高速炉用 2 次元拡散コード KINTIC-1 を作成していて、Reed⁽¹⁰⁾ が作成した 2 次元拡散コード MITKIN (指数変換法による直接法; 厳密解との一致性が比較的良いと云われている) と比較検討している。KINTIC-1 コードの方法は準静的方法 (QS 法) によっている。

Fig. 3.16 は正方形原子炉の中央の領域に 3 種類の反応度 ($\Delta \Sigma_a$ として) を挿入したときの炉心中央の点における高速中性子束の変化を示している (群定数は Table 3.14 参照)。いずれの場合に対しても、両コードの結果は良く一致していると云える。計算時間 (IBM 360/85) は $\Delta \Sigma_a = -0.0035 \text{ cm}^{-1}$ の場合で両コードは略同じで、 $\Delta \Sigma_a = -0.007 \text{ cm}^{-1}$ の場合は KINTIC-1 が MITKIN の 1/2.5、 $\Delta \Sigma_a = -0.009 \text{ cm}^{-1}$ の場合は 1/4 であり、挿入反応度の大きい程、両コードの計算時間の差が大きくなっている。

次に Fig. 3.17 の体系で第 4 群 (熱群) の Σ_a に 0.2 秒間に -0.003 cm^{-1} の反応度挿入を行った場合



TWQDQD (Quasistatic) method

$$\phi(x, E, t) = N(t) \psi(x, E, t)$$

- (A) Solve for $N(t)$ using Δt_A
- (B) Solve the engineering equations using Δt_E
- (C) Calculate inner products (reactivity, etc.) using Δt_P
- (D) Solve for $\psi(x, E, t)$ using Δt

TWODTA (Direct) method

- (A) Solve the engineering equations using Δt_E
 - (B) Solve for $\phi(x, E, t)$ using Δt
- Let $\Delta t_A = 0.005 \text{ sec.}$, $\Delta t_E = 0.05 \text{ sec.}$

Fig. 3.12 Flow diagram of time step sizes used in TWODQD and TWODTA codes(C15)

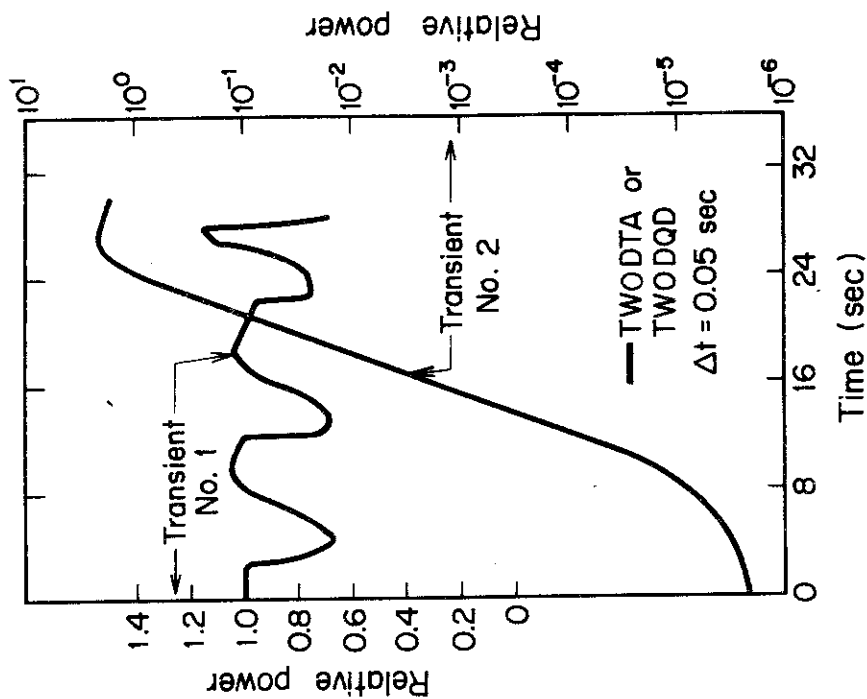


Fig. 3.13 Power traces due to direct (TWODTA) and quasistatic (TWODQD) methods for two transient tests(C15)

Table 3.12 Sensitivity of TWODTA and TWODQD codes to the time step size for transient No.1 (average percent error in power vs. time step size)⁽¹⁵⁾

TWODTA (Direct)		TWODQD (Quasistatic)	
Δt (sec)	Average power error (%)	Δt_p (sec)	Average power error (%)
0.05	0.0(reference)	0.05	0.62
0.2	3.07	0.05	1.54
		0.2	2.89
0.5	3.69	0.05	2.50
		0.5	3.22
1.0	5.69	0.05	5.66
		1.0	6.27
2.0	a)	1.0	8.08

a) Numerical difficulties encountered.

Table 3.13 Sensitivity of TWODTA and TWODQD codes to the time step size for transient No.2 (average percent error in power vs. time step size)⁽¹⁵⁾

TWODTA (Direct)		TWODTA (Quasistatic)	
Δt (sec)	Average power error (%)	Δt_p (sec)	Average power error (%)
0.05	0.0(reference)	0.05	0.23
0.50	18.80	0.05	0.24
1.00	65.20	0.05	0.49
		1.00	3.21
2.00	a)	0.05	0.62
		1.00	2.98
4.00	a)	1.00	4.38

a) Numerical difficulties encountered.

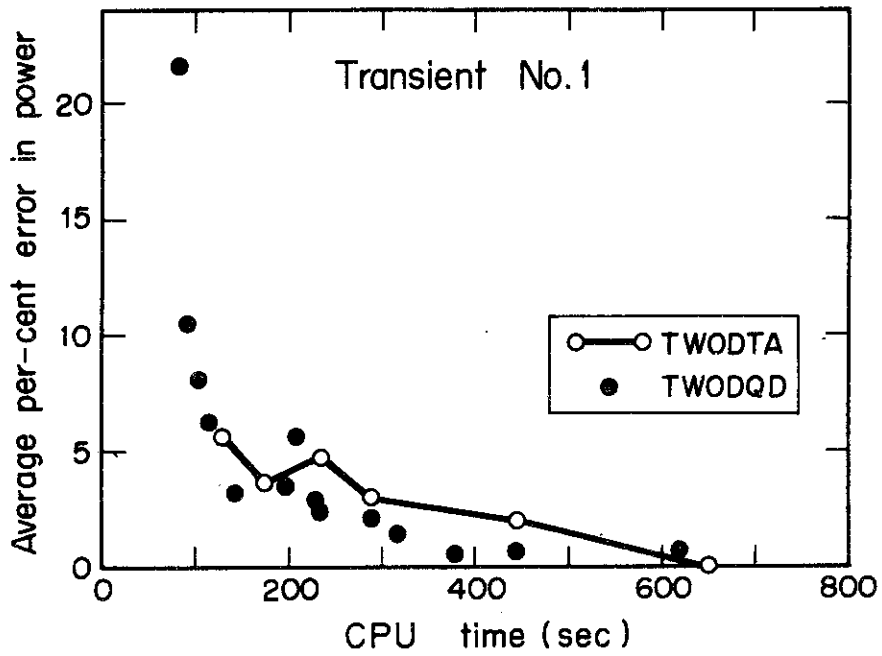


Fig. 3.14 Computing cost for transient No.1(C15)

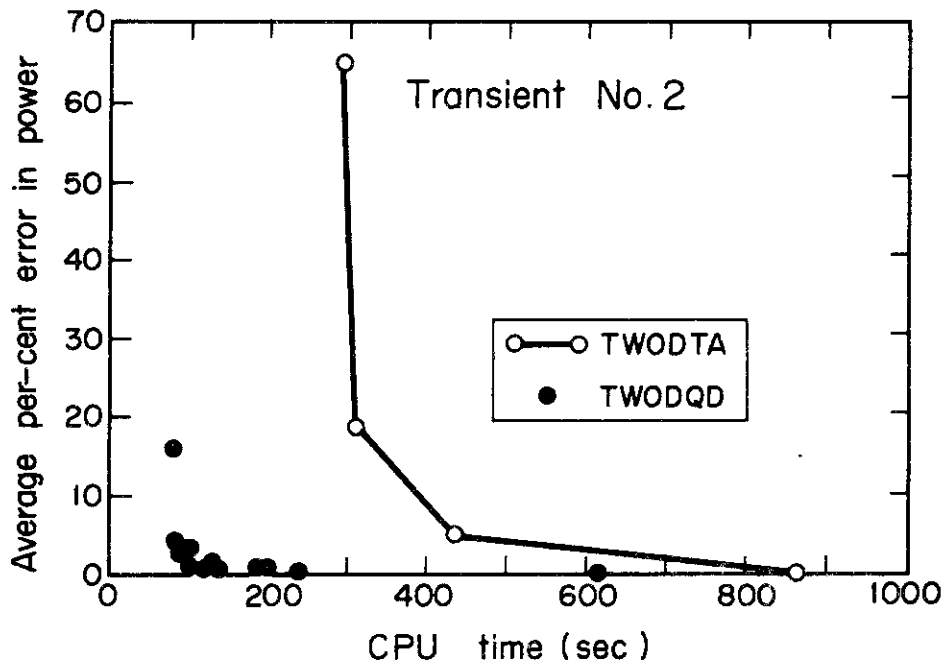


Fig. 3.15 Computing cost for transient No.2(C15)

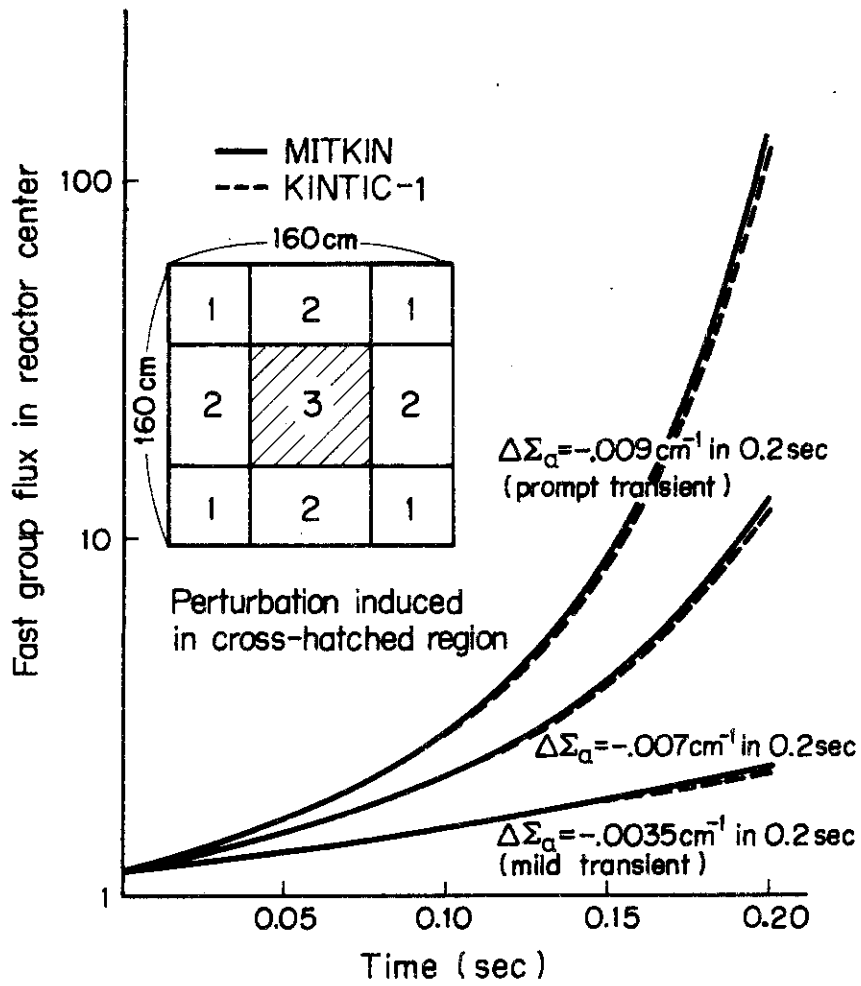


Fig. 3.16 Comparison of fast fluxes between KINTIC-1 and MITKIN codes for MITKIN test case 6 (square geometry)^{C9)}

Table 3.14 Two group constants for MITKIN test case 6 (one precursor group)⁽⁹⁾

	Materials 1 and 2	Material 3
D_1 (cm)	1.4	1.3
D_2 (cm)	0.4	0.5
Σ_{c1} (cm^{-1})	0.0065	0.0065
Σ_{c2} (cm^{-1})	0.05	0.02
ν_1	2.1877	2.1877
ν_2	2.1877	2.1877
Σ_{f1} (cm^{-1})	0.0035	0.0015
Σ_{f2} (cm^{-1})	0.1	0.03
$\Sigma_{1 \rightarrow 2}$ (cm^{-1})	0.001	0.01
v_1 (cm/sec)	0.1×10^8	
v_2 (cm/sec)	0.2×10^6	
χ_1	1.0	
χ_2	0.0	

$\lambda = 0.08(\text{sec}^{-1}), \beta = 0.0075$

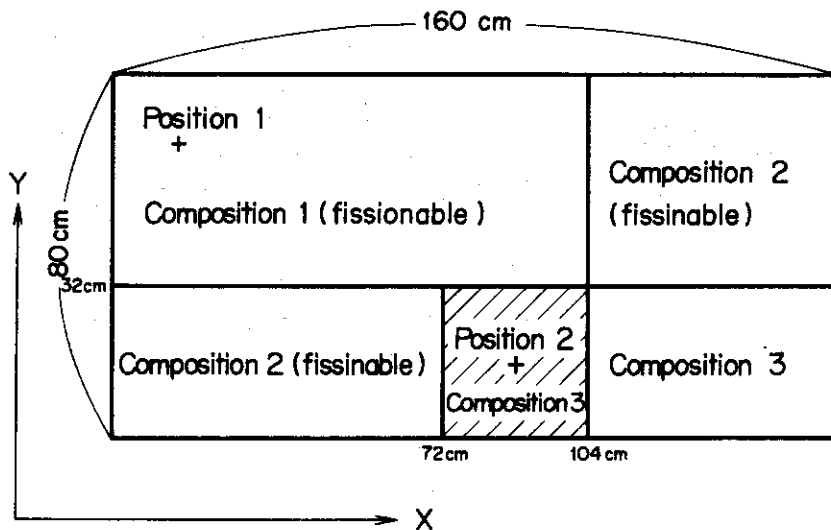


Fig. 3.17 Geometry for comparison with MITKIN test case 8 (Σ_c and Σ_f of composition 1 are about twice as big as composition 2. $\Sigma_c = -0.003 \text{ cm}^{-1}$ in 0.2 sec is induced into the cross-hatched region)⁽⁹⁾

について調べられた（群定数は **Table 3.15** 参照）。両コードの計算の際の出発値の中性子分布が異っていたので直接比較しにくい^{*}が、Fig. 3.17 中の position 2 の反応度変化が終了後の中性子束の比を見ると **Table 3.16** に示す如く 20% 程の差が見られる。この場合に対して KINTIC-1 と同じ空間メッシュで MITKIN の計算を行ったら不安定な結果を示した。同じく **Table 3.17** に、スタートから 3 秒後とスタート時の中性子束の比を示してあるが、この結果では、KINTIC-1 と MITKIN との一致は良い。

R-Z 2 次元熱中性子炉モデル（PWR を簡単化した、2 層のブランケットを持つ原子炉；**Fig. 3.18** 参照）に対して、KINTIC-1 と TWIGLE (θ -方法、普通この方法で解かれた値が厳密解とされている^{D5}) との比較も行われている。**Fig. 3.19** には内側ブランケットの外周附近における Z 方向の中性子束分布を示してあるが、両コードの一致性は非常によい。反応度挿入としては、制御棒全部を少し引抜いたときを考えている。これらの経験の裏付けを得て、SEFOR (superprompt critical experiment) に対する即効的臨界変化の様子も計算してあったが他の方法との比較をしてないので割愛する。

Sha らは、LMFBR の炉心溶融事故解析 (disassembly accident analysis) のために、実用的な 2 次元 (r, z) 動特性解析計算コード：FX2-VENUS を作成しており、現在でも改良が続けられている。^{C10, C11} このコードでは、中性子の動特性には、多群拡散近似を用いた改良型準静的近似を用い、流体（流体の圧力、密度、およびこれらの速度）、エネルギーバランス、およびこれらの中性子方程式に結び付ける状態方程式等の式も解いている。この際、Doppler 効果および物質の移動によるフィードバックが考慮される。以前、このコードに相当する AX-1 コードがあったが、AX-1 コードは断熱近似に基づく 1 次元で、フィードバック無しだったのに比べて、FX2-VENUS は本格的な事故解析用コードである。

以下では、LMFBR での Na ボイド生成によって燃料（被覆材も含めて）が溶融し、その結果炉心の下方に溶融燃料が貯るときの様子について解析する。FX2-VENUS のテストのために、断熱近似および 1 点近似との比較を FX2 の部分で行う。尚 FX2^{C13} では中性子の、VENUS^{C14} では熱水力関係の振舞いをとり扱っている。

原子炉モデルは、**Fig. 3.20** に示す如く、2 炉心領域からなる 2 次元 (r, Z) 体系である。原子炉は初め core 1 および core 2 の第 15 領域で、完全な Na ボイドが生成したところから出発し、次に、領域 4 ~ 8 の燃料が溶融して、その結果、領域 2 および領域 3 に貯って行く。このときの熱出力レベルは 837 MW で、通常運転レベルの 2 倍以上である。ここで採り入れられる時間変化のモデルは次の通りである。core 1 の領域 6 ~ 9 が領域 2 ~ 5 へ落下し、その結果、領域 3 ~ 5 は密度が 2 倍になり、一方、領域 7 ~ 9 の密度はゼロになる。そして、この領域 7 ~ 9 の処に、上部反射体の領域 10 および 11 が落下してきて埋める。これらの物質の移動が反応度に及ぼす時間変化を調べるのである。計算は、26 群を縮約した 4 群の断面積を用いて行われた。

Table 3.18 には、上記の溶融時間の 4 倍後の時刻における計算結果（反応度）を示す。この表から云えることは、ここでの問題に対してまづ第 1 に、断熱近似（拡散近似）と FX2 コードとの計算結果は良い一致をしているので、断熱近似でも充分であること。第 2 には、拡散近似（断熱近似）は時

*) 空間メッシュの切り方も MIKIN の方が 2 倍粗くとっている。

Table 3.15 Four-group constants for MITKIN test core 8
(one precursor group)⁽⁹⁾

Material	Group constant	Energy group			
		1	2	3	4
1	$D^i(\text{cm})$	2.7778	1.0753	0.64103	0.16260
	$\Sigma_C^i(\text{cm}^{-1})$	0.0013	0.001	0.0097	0.115
	ν^i	1.4507	1.4507	1.4507	1.4507
	$\Sigma_F^i(\text{cm}^{-1})$	0.00136	0.00197	0.0262	0.54
	$\Sigma^{i,i+1}(\text{cm}^{-1})$	0.0586	0.00197	0.085	0.0
2	$D^i(\text{cm})$	3.3333	1.3889	0.83333	2.0833
	$\Sigma_C^i(\text{cm}^{-1})$	0.00065	0.0005	0.0045	0.058
	ν^i	1.4507	1.4507	1.4507	1.4507
	$\Sigma_F^i(\text{cm}^{-1})$	0.0007	0.0009	0.0131	0.274
	$\Sigma^{i,i+1}(\text{cm}^{-1})$	0.0586	0.0828	0.0850	0.0
3 and 4	$D^i(\text{cm})$	4.1667	2.0833	1.0753	0.26247
	$\Sigma_C^i(\text{cm}^{-1})$	0.00077	0.00072	0.00051	0.012
	ν^i	0.0	0.0	0.0	0.0
	$\Sigma_F^i(\text{cm}^{-1})$	0.0	0.0	0.0	0.0
	$\Sigma^{i,i+1}(\text{cm}^{-1})$	0.0570	0.0822	0.0847	0.0
	$\nu^i(\text{cm}/\text{sec})$	0.1×10^{10}	0.1×10^9	0.5×10^7	0.2×10^6
	χ^i	0.755	0.245	0.0	0.0

$$\lambda = 0.08(\text{sec}^{-1}), \beta = 0.0064$$

Table 3.16 Comparison of flux (at position 1)/flux (position 2) ratios between KINTIC-1 and MITKIN after mild transient ($\Delta\Sigma_a = -0.003 \text{ cm}^{-1}$ in 0.2 sec for MITKIN test case 8)^{C9)}

Energy group	Ratio of fluxes at position 1 to position 2	
	MITKIN	KINTIC-1
1	3.4	4.05
2	3.13	3.71
3	1.94	2.26
4	3.79×10^{-2}	4.16×10^{-2}

Table 3.17 Comparison of flux (at 0.3 sec)/flux (at 0.0 sec) ratios between KINTIC-1 and MITKIN for MITKIN test case 8^{C9)}

Energy group	At position 1		At position 2	
	MITKIN	KINTIC-1	MITKIN	KINTIC-1
1	1.135	1.133	1.181	1.179
2	1.135	1.133	1.181	1.176
3	1.135	1.133	1.181	1.176
4	1.135	1.133	1.485	1.489

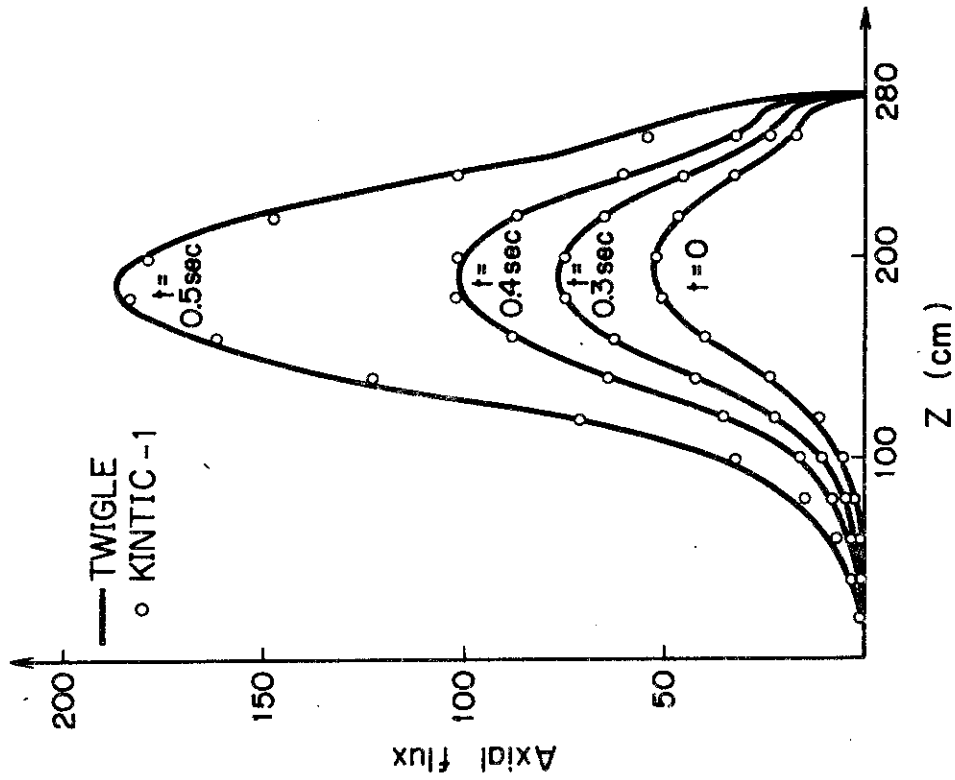


Fig. 3.19 Axial flux distribution in the inner blanket for simplified PWRC9

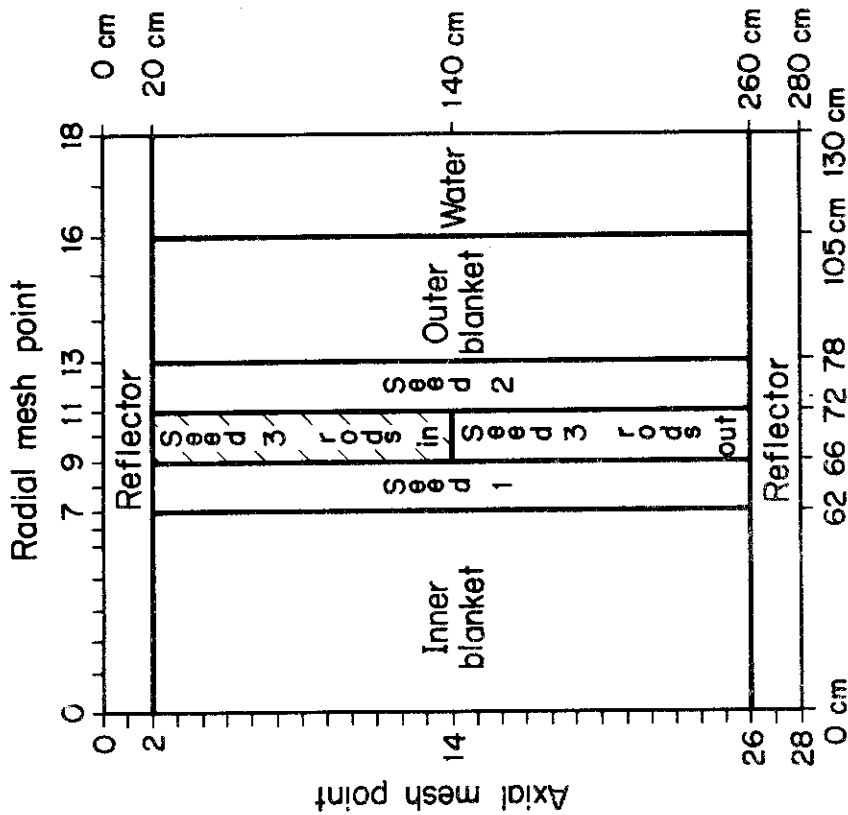


Fig. 3.18 Simplified PWR cylindrical geometry for test problems D9)

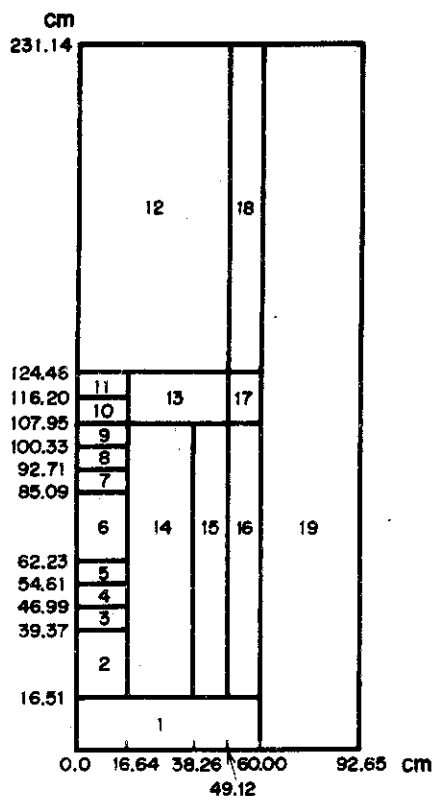


Fig. 3.20 Cylindrical configuration of LMFBR for FX2-VENUS calculation (core 1 = regions 2 ~ 9 and 14, core 2 = regions 15 and 16) (C13)

Table 3.18 Comparison of kinetics models on reactivities from disassembly accident in LMFBR (C12)

Time (sec)	Adiabatic model		FX2 spatial model	FX2 point model
	Transport (S_4)	Diffusion		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.124640	0.002068	0.002119	0.002116	0.001622
0.176268	0.003538	0.003500	0.003495	0.001804
0.215883	0.003728	0.003523	0.003517	0.000441

$\beta_{eff} = 0.0033898$. k_{eff} (static) is 1.062066 in the diffusion theory or 1.073076 in the transport theory.

刻 0.176268 sec までは輸送理論と良い一致を見ていること。0.215883 sec 後になると輸送理論とずれてくるが、このときには、領域 9~11 が、75% ボイドになっていて、同時に領域 7 および 8 は反射材になっていて、その結果、領域 9~11 に輸送理論による影響が強くなるためである。

一方、1点近似は非常に悪く、反応度を過少評価してしまっている。その結果 0.176268 sec 以後では、他の空間依存性を考慮した近似では、即効性超臨界の傾向になるのに反し、1点近似では、遅効性臨界の傾向になってしまっている。1点近似のこの悪さは、局部的変化を見ても明らかである。

Fig. 3.21 に 0.215883 sec 後の中心軸における第 1 群の中性子束分布を示す。領域 2~5 では 1点近似では極端に過少評価となっている。拡散近似は、領域 4 および 5 で、中性子束を若干過少評価しているが、1点近似より遥かに良い近似で且つ、形状関数についての反復回数は僅か(数回以下)なので、この点では、1点近似の特徴を生かしていると云えよう。

Dastur^{O19)}らは、改良型準静的近似(IQ法)による3次元拡散近似の動特性計算コード CERBERUS を作成し、これを用いて重水炉 CANDU (Canada Deuterium Uranium) を解析した結果を NEACRP のベンチマークテストに関する会議に提出している。この3次元コードを用いることによって、冷却材が抜けるとき、および、制御棒が逸走するときの原子炉の状況が解析でき、その結果、**Fig. 3.22** に示すように(i)中性子の平坦化は、炉心の区分間のディカップリング(decoupling of reactor segments)の増加をもたらすこと、(ii)特に即効的未臨界過渡現象(prompt subcritical transient)のときに、遅発中子の空間分布がとり入れられたことによって、出力の増加が認められること、**Fig. 3.23**に見られるように(iii)重水中の光中性子の分布をとり入れたことによって、出力に差が見られること、などが評価できたとしている。

次に、準静的近似の形状関数に対する(3.14)式の空間分布に有限要素法^{A12)}を適用して解いている例があるのでその結果を紹介する。時間に関しては元の陰形差分そのままを用いている。

拡散方程式を解く際に、普通有限要素法で解くときは1次の区分内挿多項式が用いられるが、高次の区分内挿多項式を用いると精度を上げることができるので、少ない分割点^{A12, A3)}で済む。この長所を生かして、Hennart^{O20, C21)}は1次元および2次元拡散に対して、3次(cubic)および5次(quintic)の内挿多項式を用いて解いている。以下の計算例に対する体系は、1次元板状で、群定数などについては **Table 3.19** に示してある。挿入反応度が、ステップ状に $\Delta(\rho/\rho_f)$ で 0.001 cm^{-1} であったときの、過渡現象時(during the transient)の様子を **Table 3.20** に、漸近的(asymptotic)な様子を **Table 3.21** に示してある。表では5次の区分多項式を用いて、 $\Delta t = 10^{-5} \text{ sec}$ 、 $\Delta x = 10 \text{ cm}$ で解いたときの解を標準値として比較した結果を%で表示してある。

表で示した程度の空間メッシュサイズの変動に対しては、過渡現象時(**Table 3.20**)では、どの時間ステップを採ってもあまり精度が変らない。一方漸近的なとき(**Table 3.21**)では、5次区分多項式を用いたときには精度が変らないのに対し、3次区分多項式を用いたときには精度がいくらか変る。また、時間ステップ $\Delta t = 10^{-5} \text{ sec}$ のときは他の時間ステップのときに比べて、過渡現象時でも、漸近的現象のときでも、5次区分多項式を用いたときの精度が、3次区分多項式を用いたときより3~5桁良い。このことは、空間ステップのとり方と時間ステップのとり方とは解に対してお互に影響を及ぼすことを示している。2次元体系に対する結果は残念ながら未だ発表されていないが区間に対しては双3次のスプライン区分多項式(bicubic spline)を用いて、X-Y体系を解くことになる。

また、可児^{C23)}らは、やはり、2次元拡散近似(r-Z)に Kang らの示した3次の Hermite 多項式を

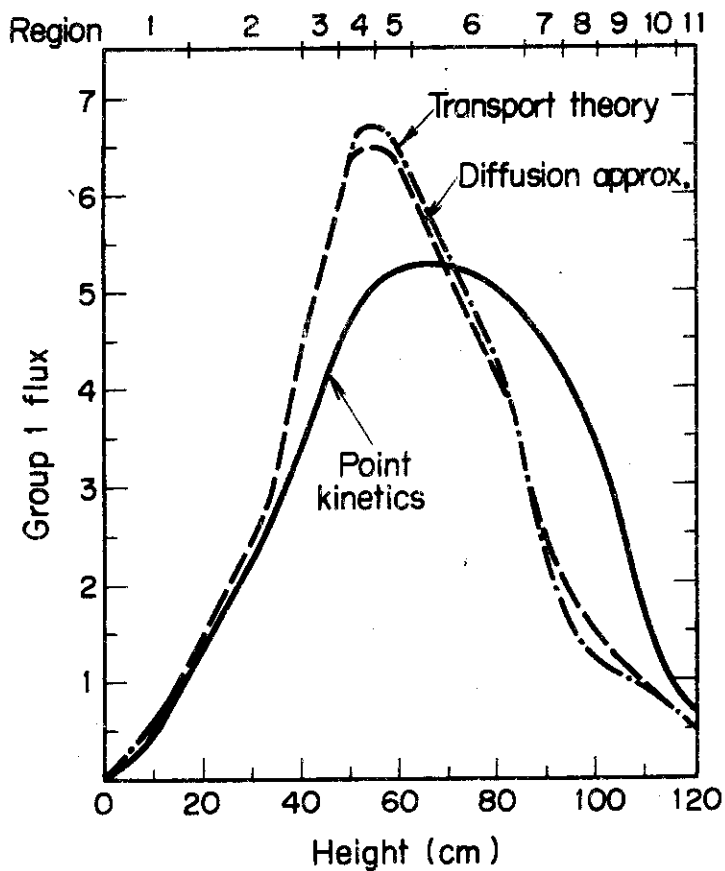


Fig. 3.21 Group 1 axial flux in LMFBR at 0.215883 sec by FX2 code (C13)

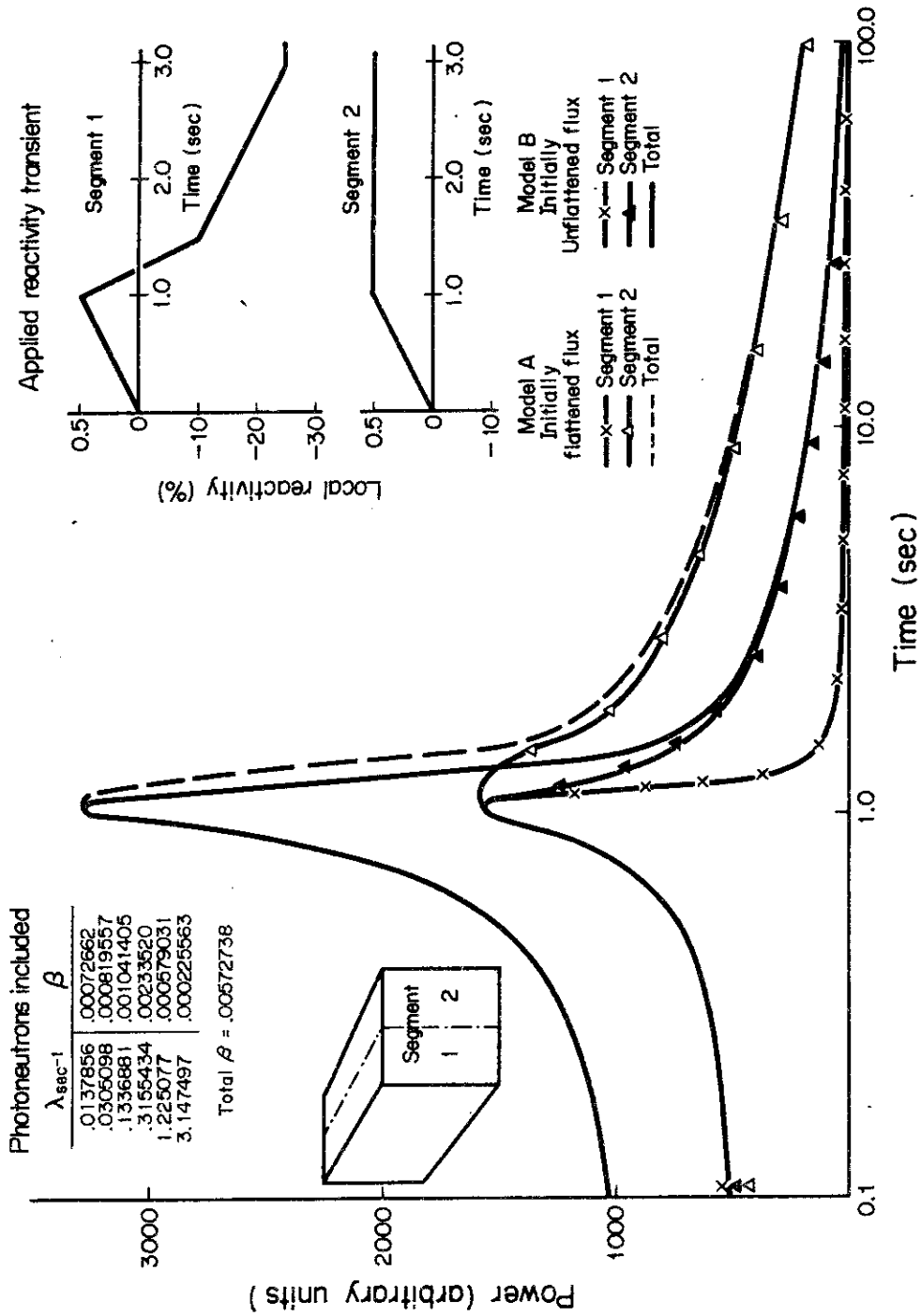


Fig. 3.22 Effect of neutronic decoupling on power pulse C19)

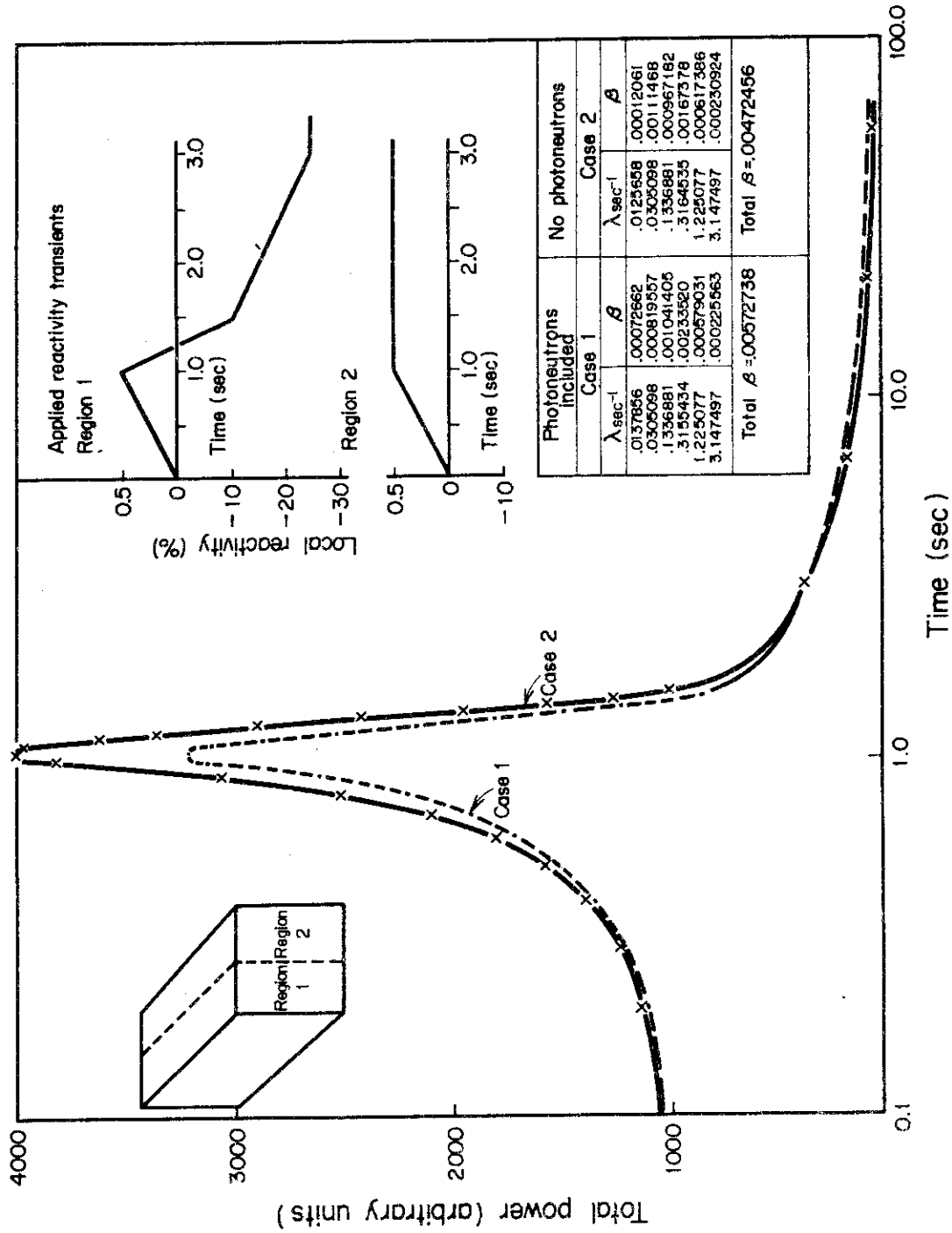


Fig. 3.23 Effect of photoneutrons on power pulse C19

Table 3.19 One-group critical constants with two-groups of delayed neutrons for a two-regions slab reactor (inserted step reactivity is 0.001 in $\Delta(\nu\Sigma_f)$ (cm⁻¹))^{C21)}

	Region 1 (80 cm)	Region 2 (80 cm)
D(cm)	3.50	3.50
Σ_t (cm ⁻¹)	0.030000	0.030000
Σ_f (cm ⁻¹)	0.030900	0.031735
λ_1 (sec ⁻¹)	1.13	
β_1	5.73×10^{-3}	
λ_2 (sec ⁻¹)	1.24×10^{-2}	
β_2	1.70×10^{-3}	
v(cm/sec)	5.00×10^{-5}	

Table 3.20 Comparison of the neutron fluxes to the reference solution ($\Delta t = 10^{-5}$ sec, $\Delta x = 10$ cm, using piecewise quintic polynomials) at 0.001 sec (during the transient)^{C21)*}

Spatial mesh: Δx (cm)	Time step : Δt (sec)					
	10^{-5}		10^{-4}		10^{-3}	
	Cubic	Quintic	Cubic	Quintic	Cubic	Quintic
10	2.80×10^{-2}	0	1.74×10^{-2}	7.31×10^{-3}	5.99×10^{-2}	8.52×10^{-2}
20	2.81×10^{-2}	2.12×10^{-6}	1.74×10^{-2}	7.31×10^{-3}	6.00×10^{-2}	8.52×10^{-2}
40	2.80×10^{-2}	4.68×10^{-6}	1.79×10^{-2}	7.33×10^{-3}	6.05×10^{-2}	8.52×10^{-2}

*) The values in the table are the differences expressed in percents.

Table 3.21 Comparisons of the asymptotic neutron fluxes to the reference solution at 0.015 sec^{C21)}

Spatial mesh: Δx (cm)	Time step : Δt (sec)					
	10^{-5}		10^{-4}		10^{-3}	
	Cubic	Quintic	Cubic	Quintic	Cubic	Quintic
10	2.80×10^{-2}	0	2.15×10^{-2}	2.32×10^{-2}	1.56×10^{-2}	1.74×10^{-2}
20	2.97×10^{-2}	4.77×10^{-7}	2.29×10^{-2}	2.32×10^{-2}	1.75×10^{-2}	1.74×10^{-2}
40	5.23×10^{-2}	2.50×10^{-5}	3.42×10^{-2}	2.32×10^{-2}	1.08×10^{-2}	1.74×10^{-2}

適用して解いた例を公表している。Table 3.22 に示すように、差分を用いて解いたときよりかなり良い結果を得ていて、計算時間の点でもかなり有利であったとのことである。

最後に、久しく待たれていた NEACRP の空間依存動特性ベンチマークテスト の結果が最近発表されたが、^{A8)} その中で、いくつかの準静的近似に依る計算コードが含まれているので、以下に紹介する。

尚、ベンチマークテストの問題の詳細については、文献を参照されたい。

^{C24)} 1次元動特性問題は多次元動特性問題への出発点であり、適当にモデル化することにより解法アルゴリズムの実際的な問題への適応性の検討ができる。Table 3.23 は、熱中性子炉をモデルとした1次元ベンチマークテストの問題である。すべての問題は、Fig. 3.24 に示すように軸方向の問題としてとり扱われ、制御棒が凡そ半分程挿入されたときにちょうど臨界状態であるところから出発する。そして制御棒挿入の方向は冷却材の流れの方向と逆とし、炉心内で核分裂によって発生した熱はすべて冷却材に移ると仮定する。摂動は、制御棒の移動か、又は、領域群定数の時間的変化としてとり扱う。

ベンチマークテストの対象とされた計算コードを Table 3.24 に示す。残念ながら多くのコードの内容が未だ公開されていない。我々がここで関心があるのは、CYCLOPSコード(IQ法)とNADYP-Aコード(半静的近似)であるが、NADYP-Aコードは2次元(R,Z)であるので適当にモデル化して用いられている。ここでの問題は、いづれも時間的にはゆっくりした過渡現象に属するが、問題としては温度係数(α で表示)などを含めて一応バラエティに富んでいる。テストの結果は(Table 3.25~Table 3.28参照)全問題に対して、準静的近似(IQ法; CYCLOPSコード)および半静的近似(NADYP-Aコード)が精度の点でも計算時間の点でも、明らかに最も優れていることを示している。半静的近似は、時間ステップ毎に随伴中性子束の計算を行うが、ここでの問題では、この計算が無駄であることを示している。しかし、この結果は先の例(Fig. 3.7参照)と異っている。問題によるのであろう。また、これらの計算コードは、一般に安定な解法と云われている陰解法(TRANS)コードおよびCrank-Nicolson法(KINAX)コードとの一致も良い。

CYCLOPSコードでは振幅関数の計算は区分多項式(スプライン関数)を用いての選点法^{A15)}(collocation method; 重み関数に δ 関数を用いた重み付き残差法(weighted residual method))に依っている。区分多項式の次数に関する検討も行っている所以以下に述べる。この中の2次区分多項式によって解かれた結果が上記で述べてきたベンチマークテストの中で示されたものである。

Table 3.30 は、時間ステップをTable 3.29のように採ったとき、2次区分多項式と3次区分多項式を用いた際のベンチマーク問題Case Aの結果である。両者の結果は全く一致し、3次式を用いたときの方が計算時間が半分になっている。更に時間ステップを細かく採った例がCase Cに対してであるが、Table 3.31 およびTable 3.32 に示されている。この場合は計算時間が更に3分の1に短縮されている。Table 3.33 はCase Bに対して、区分多項式の次数および時間ステップの中による影響について調べた結果であるが、高次多項式を用いると、結果の精度を落さずに時間ステップが大きく採れ、その結果計算時間の短縮ができることを示している。

2次元ベンチマークテストは、高速炉(SNR-300)の燃料溶融事故を対象に行われている。問題(Table 3.34 およびFig. 3.25参照)はすべて計算コードに適用できるように簡単化されている。用いられた計算コードは4つであるが、この内3つが我々が関心の持つ準静的近似に属する(Table 3.35参照)。

Case 1の結果の出力の様子(Fig. 3.26参照)を観ると、SPARK(IQ法)^{C27)}、ADEP(ADE法)^{D8)}

Table 3.22 Comparison of thermal fluxes in spatial difference and finite element codes in two-dimensional improved quasistatic approximation^{C23)}

Time (sec)	Spatial difference code (TWIGLE)	Spatial finite element code (FEMSYNDY)*)
0.0	5.39	5.39
0.1	7.25	7.17(-1.1%)
0.2	11.19	10.96(-2.1%)
0.5	12.04	11.77(-2.2%)
Calculation time (sec)	550 (IBM 360/65)	73 (HITAC 8800)

*) Five iterative calculations for amplitude function.

Table 3.23 Transient cases of one-dimensional benchmark problems typical for a thermal reactor^{C24)}

Problem & object	Temperature feedback	Initial absorber tip position	Transient problem	Transient time
Case A : rod withdrawal	$\alpha = -0.0002/^\circ\text{C}$ $\Sigma_{a,0}^1 = 0.00086 \text{ cm}^{-1}$	246.735 cm	Withdrawn at 1 cm/sec until rod tip reaches the core boundary and then fixed.	300 sec
Case B rod withdrawal	$\alpha = +0.00002/^\circ\text{C}$ $\Sigma_{a,0}^1 = 0.0012 \text{ cm}^{-1}$	298.39 cm	Withdrawn at 1 cm/sec for 100 sec and then fixed.	200 sec
Case C : rod blowout	$\alpha = -0.0002/^\circ\text{C}$ $\Sigma_{a,0}^1 = 0.00086 \text{ cm}^{-1}$	246.735 cm	Blown out at 200 cm/sec for 10 sec and then returned to initial position lineally in 1 sec where fixed.	300 sec
Case D : loss of moderator	$\alpha = -0.0002/^\circ\text{C}$ $\Sigma_{a,0}^1 = 0.00086 \text{ cm}^{-1}$	246.735 cm	Removal cross section is reduced over 200 sec for all z: $\Sigma_{1+2}(z,0) (1 - \frac{t}{200})$	200 sec

All problems have been made under the following assumptions;

- a) Only 2 prompt neutron groups and 6 delayed neutron groups.
- b) Temperature feedback in 1st group only.
- c) Absorber effect in 2nd group only.
- d) Data constant within each material region in axial direction apart from movable control absorber and temperature-dependent data.
- e) Radial leakage is ignored.

Table 3.24 Codes used in NEACRP one-dimensional kinetics benchmark problem C24)

Code	Code developer	Characteristics	Write-up
KINAX3	CEGB (U.K.)	Crank-Nicolson method for the neutron diffusion and heat transfer equations. 1 neutron group and 6 delayed neutron families. Fixed optional time step.	Refer D7
NAKIN	NAIG (Japan)	GAKIN method. Variable dimensioning. Automatic adjustment for time step. Crank-Nicolson method for the heat transfer equation.	No, but refer D6
CINTAX	CENS (France)	Discontinuous time synthesis method with 2 neutron groups (under development).	No
ADEP	CRNL (Canada)	Alternating direction explicit method (ADE) or, as an option, the exponentially transformed ADE in 1- and 2-dimensions. Variable dimensioning.	Refer D8
CYCLOPS	UK-RIS (U.K.)	IQ method. Solution of the heat transfer equation by piecewise polynomial representation (under development).	No, but refer C24
TRANS	ABA (Sweden)	Fully implicit method with 2 neutron groups.	No
NADYP-A	CSN (Italy)	Metastatic method in 2 dimension R-Z geometry with 2 neutron groups. Solution of the steady state equations by representing the fluxes as a sum of the trigonometric and/or Bessel functions.	No, but refer C17
EXTRA (AnaLog)	UK-WIN UK-AN	GAKIN method with automatic choice of step length. Solved as a large set of ordinary differential equations on the analogue computer.	No No

Table 3.25 Comparison of the results for one-dimensional benchmark test "Case A" (C24)

	Time (sec)	Average	NADYP-A	ADEP	CYCLOPS	EXTRA	TRANS	(Analog)	NAKIN	KINAX-3
Coolant outlet temperature (°C)	0	800	800	800	800	800	800	800	800	800
	50	920	935	935	929	831	935	900	948	939
	100	1075	1076	1090	1090	999	1085	1070	1102	1079
	200	1301	1299	1336	1336	1286	1319	1200	1338	1293
	300	1337	1352	1385	1385	1330	1361	1220	-	1326
Maximum fuel temperature T _{f,max} at 350 cm (°C)	0	1043	1031	1047	1047	1069	1044	1000	1043	1056
	50	1238	1230	1258	1258	1135	1259	1200	1284	1272
	100	1687	1681	1748	1748	1607	1754	1620	1796	1532
	200	2314	2761	2954	2954	2847	2892	2440	2943	2750
	300	2928	2958	3096	3096	2984	3015	2500	-	2870
Fuel surface temperature T _s at 350 cm (°C)	0	843	840	844	844	851	843	833	843	845
	50	985	996	1003	1003	895	1004	950	1020	1005
	100	1205	1195	1226	1226	1130	1220	1200	1241	1536
	200	1571	1547	1615	1615	1573	1585	1500	1610	1566
	300	1602	1606	1651	1651	1607	1616	1530	-	-
Fast group flux ϕ_1 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	7.4×10^{13}	7.2×10^{13}	7.6×10^{13}	7.6×10^{13}	8.2×10^{13}	7.4×10^{13}	5.6×10^{13}	7.5×10^{13}	$\phi_1 + \phi_2$
	50	1.6×10^{14}	1.6×10^{14}	1.8×10^{14}	1.8×10^{14}	1.4×10^{14}	1.7×10^{14}	1.4×10^{14}	1.8×10^{14}	1.2×10^{14}
	100	2.8×10^{14}	2.6×10^{14}	3.0×10^{14}	3.0×10^{14}	3.1×10^{14}	3.0×10^{14}	2.1×10^{14}	3.1×10^{14}	2.6×10^{14}
	200	4.5×10^{14}	4.4×10^{14}	4.8×10^{14}	4.8×10^{14}	4.6×10^{14}	4.7×10^{14}	3.3×10^{14}	4.8×10^{14}	-
	300	4.4×10^{14}	4.5×10^{14}	4.7×10^{14}	4.7×10^{14}	4.5×10^{14}	4.6×10^{14}	3.3×10^{14}	-	4.6×10^{14}
Thermal group flux ϕ_2 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	3.8×10^{13}	3.6×10^{13}	3.8×10^{13}	3.8×10^{13}	4.1×10^{13}	3.7×10^{13}	2.8×10^{13}	3.7×10^{13}	7.6×10^{14}
	50	8.5×10^{13}	8.0×10^{13}	9.0×10^{13}	9.0×10^{13}	6.7×10^{13}	8.6×10^{13}	8.0×10^{13}	8.9×10^{13}	7.6×10^{14}
	100	1.5×10^{14}	1.4×10^{14}	1.6×10^{14}	1.6×10^{14}	1.6×10^{14}	1.6×10^{14}	1.1×10^{14}	1.7×10^{14}	7.6×10^{14}
	200	2.6×10^{14}	2.5×10^{14}	2.8×10^{14}	2.8×10^{14}	2.6×10^{14}	2.7×10^{14}	1.8×10^{14}	2.8×10^{14}	7.3×10^{14}
	300	2.6×10^{15}	2.6×10^{14}	2.7×10^{14}	2.7×10^{14}	2.6×10^{14}	2.7×10^{14}	1.8×10^{14}	-	-

Table 3.25 (Continued)

	Time (sec)	Average	NADYP-A	ADEP	CYCLOPS	EXTRA	TRANS	(Analog)	NAKIN	KINAX-3
Position of max. $T_{f,max}$ (cm)	0	162	130	148	150	167	160	167	205	170
	50	174	190	148	170	167	170	183	175	190
	100	199	190	216	190	188	200	200	195	210
	200	231	210	216	230	229	240	250	235	240
	300	236	210	216	250	250	240	250	-	240
Maximum value of $T_{f,max}$ (°C)	0	2273	2309	2286	2326	2306	2305	2400	1614	2318
	50	2778	2808	2784	2849	2407	2793	2900	2850	2833
	100	3079	3132	2986	3157	2872	3076	3150	3138	3125
	200	3339	3390	3285	3422	3313	3329	3220	3388	3367
	300	3322	3376	3298	3410	3299	3316	3200	-	3357
Rod tip position (cm)		249	247	246	-	258	250	245	247	247
Mean difference from average (%)			4.4	3.6	4.1	5.7	2.3	11.3	5.7	2.9
Approx. relative computing time (sec)	Steady state		210	1	4	27	1	-	6	26
	Transient			900	110	32	138	300	1488	50

Table 3.26 Comparison of $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ and $T_{f,max}(z)$ at 10 sec and times at which $\phi_1(z)$ reaches $10^{15}/\text{cm}^2\text{sec}$ for one-dimensional benchmark test "Case B" (C24)

	NADYP-A	NAKIN	ADEP	TRANS	EXTRA
$T_{f,max}(150 \text{ cm})$	2350	2500	2200	2400	2100
$\phi_2(150 \text{ cm})$	8.0×10^{14}	1.8×10^{15}	2.7×10^{14}	7.8×10^{14}	2.3×10^{14}
$\phi_1(150 \text{ cm})$	1.2×10^{15}	1.8×10^{15}	4.6×10^{14}	1.3×10^{15}	4.4×10^{14}
$T_{f,max}(250 \text{ cm})$	2100	2000	1900	2200	2100
$\phi_2(250 \text{ cm})$	5.5×10^{14}	2.8×10^{14}	2.3×10^{14}	6.5×10^{14}	2.2×10^{14}
$\phi_1(250 \text{ cm})$	8.0×10^{14}	5.0×10^{14}	4.2×10^{14}	1.1×10^{14}	3.9×10^{14}
Time(150cm) at $\phi_1=10^{15}$	9	9	17	9	32
Time(250cm) at $\phi_2=10^{15}$	11	18	17	10	34
Relative time per 10 sec transient	20	215	472	17	94

Table 3.27 Comparison of the results for one-dimensional benchmark test "Case C(C24)

	Time (sec)	Average	NADYP-A	ADEP	CYCLOPS	EXTRA	TRANS	NAKIN	CINTAX	KINAX-3
Coolant outlet temperature (°C)	0	800	800	800	800	800	800	800	800	800
	50	867	880	813	894	838	884	887	873	869
	100	812	816	760	824	814	821	819	828	816
	200	801	800	805	801	801	801	801	801	801
	300	801	800	805	800	800	800	800	-	800
Maximum fuel temperature T _{f,max} at 350 cm (°C)	0	1047	1050	1031	1047	1064	1044	1043	1040	1056
	50	1430	1456	1404	1466	1421	1435	1441	1424	1395
	100	1127	1136	1044	1134	1140	1128	1120	1187	1129
	200	1052	1052	1048	1050	1067	1048	1046	1044	1059
	300	1051	1051	1048	1047	1064	1044	1043	-	1056
Fuel surface temperature T _s at 350 cm (°C)	0	844	844	840	844	850	843	843	844	846
	50	955	976	896	978	933	969	972	964	955
	100	863	871	804	871	870	869	867	888	868
	200	846	845	846	845	851	844	844	844	846
	300	845	844	846	844	850	843	843	-	846
Fast group flux φ ₁ at 350 cm (n/cm ² sec)	0	7.5×10 ¹³	7.2×10 ¹³	7.2×10 ¹³	7.6×10 ¹³	8.0×10 ¹³	7.5×10 ¹³	7.5×10 ¹³	7.1×10 ¹³	φ ₁ φ ₂
	50	6.8×10 ¹³	6.3×10 ¹³	3.4×10 ¹³	7.0×10 ¹³	8.8×10 ¹³	7.0×10 ¹³	6.9×10 ¹³	7.7×10 ¹³	1.2×10 ¹⁴
	100	8.1×10 ¹³	7.0×10 ¹³	1.0×10 ¹³	7.5×10 ¹³	8.5×10 ¹³	7.4×10 ¹³	7.4×10 ¹³	9.2×10 ¹³	1.2×10 ¹⁴
	200	7.5×10 ¹³	7.2×10 ¹³	7.0×10 ¹³	7.6×10 ¹³	7.9×10 ¹³	7.5×10 ¹³	7.5×10 ¹³	7.1×10 ¹³	1.1×10 ¹⁴
	300	7.5×10 ¹³	7.2×10 ¹³	7.0×10 ¹³	7.6×10 ¹³	8.0×10 ¹³	7.5×10 ¹³	7.5×10 ¹³	-	1.1×10 ¹⁴
Thermal group flux φ ₂ at 350 cm (n/cm ² sec)	0	3.8×10 ¹³	3.9×10 ¹³	3.5×10 ¹³	3.8×10 ¹³	4.0×10 ¹³	3.7×10 ¹³	3.7×10 ¹³	3.5×10 ¹³	1.2×10 ¹⁴
	50	3.6×10 ¹³	3.5×10 ¹³	1.8×10 ¹³	3.5×10 ¹³	4.6×10 ¹³	3.5×10 ¹³	3.4×10 ¹³	3.9×10 ¹³	1.2×10 ¹⁴
	100	4.1×10 ¹³	3.8×10 ¹³	5.1×10 ¹³	3.7×10 ¹³	4.3×10 ¹³	3.7×10 ¹³	3.7×10 ¹³	4.8×10 ¹³	1.2×10 ¹⁴
	200	3.8×10 ¹³	3.9×10 ¹³	3.4×10 ¹³	3.8×10 ¹³	4.1×10 ¹³	3.7×10 ¹³	3.7×10 ¹³	3.5×10 ¹³	1.2×10 ¹⁴
	300	3.8×10 ¹³	3.9×10 ¹³	3.4×10 ¹³	3.8×10 ¹³	4.0×10 ¹³	3.7×10 ¹³	3.7×10 ¹³	-	1.2×10 ¹⁴

Table 3.27 (Continued)

	Time (sec)	Average	NADYP-A	ADEP	CYCLOPS	EXTRA	TRANS	NAKIN	CINTAX	KINAX-3
Position of max. Tf, max (cm)	0	162	130	148	150	172	160	205	160	170
	50	177	190	148	170	190	170	175	180	190
	100	154	130	148	150	172	160	155	140	180
	200	154	130	148	150	172	160	155	150	170
	300	155	130	148	150	172	160	155	-	170
Maximum value of Tf, max	0	2224	2309	2286	2326	2302	2305	1614	2333	2318
	50	2203	2276	1846	2296	2084	2273	2287	2254	2305
	100	2264	2296	2016	2316	2274	2296	2310	2298	2301
	200	2313	2309	2298	2326	2302	2305	2318	2325	2318
	300	2311	2309	2298	2326	2302	2305	2318	-	2318
Rod tip position (cm)		248	247	246	-	256	250	247	246	247
Mean difference from average (%)		4.5	4.5	9.9	2.5	5.8	2.0	3.4	4.7	2.9
Approx. relative computing time (sec)	Steady state			1	4	65	1	6	3	26
	Transient			900	156	1299	157	1280	284	81

Table 3.28 Comparison of the results for one-dimensional benchmark test "Case D"(C24)

	Time (sec)	Average	NADYP-A	ADEP	EXTRA	NAKIN	(Analog)
Coolant outlet temperature (°C)	0	800	800	800	800	800	800
	50	556	520	518	629	634	580
	100	392	378	372	411	377	420
	200	311	306	306	313	311	320
Maximum fuel temperature Tf,max at 350 cm (°C)	0	1036	1050	1031	1070	1043	986
	50	814	780	758	919	781	835
	100	524	494	490	588	486	560
	200	328	317	320	333	328	340
Fuel surface temperature Ts at 350 cm (°C)	0	842	844	840	850	843	833
	50	588	557	542	666	558	617
	100	406	387	388	437	383	433
	200	312	306	308	313	311	320
Fast group flux ϕ_1 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	7.5×10^{13}	7.2×10^{13}	7.2×10^{13}	8.2×10^{13}	7.5×10^{13}	-
	50	3.5×10^{12}	1.9×10^{12}	1.5×10^{12}	9.8×10^{12}	2.2×10^{12}	-
	100	2.5×10^{11}	2.6×10^{11}	2.5×10^{10}	4.8×10^{11}	2.4×10^{11}	-
	200	3.0×10^{10}	6.1×10^{10}	2.5×10^9	2.9×10^{10}	2.9×10^{10}	-
Thermal group flux ϕ_2 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	3.8×10^{13}	3.9×10^{13}	3.6×10^{10}	4.1×10^{13}	3.7×10^{13}	-
	50	1.4×10^{12}	7.9×10^{11}	5.6×10^{10}	3.8×10^{12}	8.1×10^{11}	-
	100	8.0×10^{10}	6.9×10^{10}	6.1×10^{10}	1.3×10^{11}	5.9×10^{10}	-
	200	3.3×10^8	7.3×10^7	1.2×10^5	2.9×10^4	1.2×10^9	-
Position of max. Tf,max (cm)	0	164	130	148	162	205	176
	50	193	190	216	176	185	200
	100	352	490	479	216	225	-
	200	481	490	479	500	455	-

Table 3.28 (Continued)

	Time (sec)	Average	NADYP-A	ADEP	EXTRA	NAKIN	(Analog)
Maximum value of $T_{f,max}$ ($^{\circ}C$)	0	2182	2309	2286	2300	1614	2400
	50	1096	1002	918	1406	1004	1150
	100	542	519	510	621	482	580
	200	338	327	327	349	338	350
Rod tip position (cm)		249	247	246	258	247	245
Mean difference from average (%)			14.3	22.1	28.0	18.8	4.5
Approx. relative computing time (sec)	Steady state		160	1	72	6	
	Transient			1000	453	1546	200

Table 3.29 Time steps used in CYCLOPS's calculations for Case A problem (C25)

End of time interval (sec)	Quadratic polynomials		Cubic polynomials	
	Amplitude fn. time step (sec)	Spatial fn. time step (sec)	Amplitude fn. time step (sec)	Spatial fn. time step (sec)
50	0.5	2.5	0.5	2.5
100	0.5	2.5	1.25	2.5
225	0.5	2.5	1.25	12.5
300	0.5	2.5	2.5	12.5

Table 3.31 Time step used in CYCLOPS's calculations for Case C (C25)

End of time interval (sec)	Quadratic		Cubic	
	Amplitude fn. time step (sec)	Spatial fn. time step (sec)	Amplitude fn. time step (sec)	Spatial fn. time step (sec)
10	0.025	0.125	0.25	1.25
11	0.0125	0.0625	0.125	0.25
12	0.025	0.125	0.125	0.25
15	0.05	0.25	0.25	1.0
20	0.1	0.5	0.25	1.0
50	0.1	0.5	0.25	1.25
60	0.5	2.5	0.25	1.25
100	1.0	20.0	1.25	12.5
300	1.0	25.0	2.5	25.0

Table 3.30 Results and calculation times of CYCLOPS code for Case AC25)

	Time (sec)	Quadratic (Table 3.25)	Cubic
Coolant outlet temperature (°C)	0	800	800
	50	929	929
	100	1090	1078
	200	1336	1327
	300	1385	1385
Maximum fuel temperature $T_{f,max}$ at 350 cm (°C)	0	1047	1047
	50	1258	1258
	100	1748	1743
	200	2954	2935
	300	3096	3097
Fuel surface T_s at 350 cm (°C)	0	844	844
	50	1003	1003
	100	1226	1223
	200	1615	1609
	300	1651	1651
Fast group flux ϕ_1 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	7.6×10^{13}	7.6×10^{13}
	50	1.8×10^{14}	1.8×10^{14}
	100	3.0×10^{14}	3.0×10^{14}
	200	4.8×10^{14}	5.1×10^{14}
	300	4.7×10^{14}	4.7×10^{14}
Thermal group flux ϕ_2 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	3.8×10^{13}	3.8×10^{13}
	50	9.0×10^{13}	9.0×10^{13}
	100	1.6×10^{14}	1.6×10^{14}
	200	2.8×10^{14}	3.0×10^{14}
	300	2.7×10^{14}	2.8×10^{14}
Position of max. $T_{f,max}$ (cm)	0	150	150
	50	170	170
	100	190	190
	200	230	230
	300	250	250
Maximum value of $T_{f,max}$ (°C)	0	2326	2326
	50	2849	2849
	100	3157	3159
	200	3422	3420
	300	3410	3410
Approx. computing time on IBM 370 /164 (sec)	Steady state	4	4
	Transient	110	51

Spatial (z) mesh interval = 20 cm

Table 3.32 Results and calculation times in CYCLOPS code for Case C(25)

	Time (sec)	Quadratic (Table 3.27)	Cubic
Coolant outlet temperature (°C)	0	800	800
	50	894	890
	100	824	824
	200	801	801
	300	800	800
Maximum fuel temperature $T_{f,max}$ at 350 cm (°C)	0	1047	1047
	50	1466	1455
	100	1134	1133
	200	1050	1051
	300	1047	1047
Fuel surface temperature T_s at 350 cm (°C)	0	844	844
	50	978	976
	100	871	870
	200	845	845
	300	844	844
Fast group flux ϕ_1 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	7.6×10^{13}	7.6×10^{13}
	50	7.0×10^{13}	7.1×10^{13}
	100	7.5×10^{13}	7.5×10^{13}
	200	7.6×10^{13}	7.6×10^{13}
	300	7.6×10^{13}	7.6×10^{13}
Thermal group flux ϕ_2 at 350 cm (n/cm ² sec)	0	3.8×10^{13}	3.8×10^{13}
	50	3.5×10^{13}	3.5×10^{13}
	100	3.7×10^{13}	3.7×10^{13}
	200	3.8×10^{13}	3.8×10^{13}
	300	3.8×10^{13}	3.8×10^{13}
Position of max. $T_{f,max}$ (cm)	0	150	150
	50	170	170
	100	150	150
	200	150	150
	300	150	150
Maximum value of $T_{f,max}$ (°C)	0	2326	2326
	50	2296	2297
	100	2316	2316
	200	2326	2326
	300	2326	2326
Approx. comput- ing time on IBM 370/165(sec)	Steady state	4	4
	Transient	156	56

Spatial (z) mesh interval = 20 cm

Table 3.33 Comparison of $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ and $T_{f,max}(z)$ at 10 sec and times at which ϕ_1 reaches $10^{15}/\text{cm}^2\text{sec}$ for one-dimensional benchmark test Case B(25)

	Case B1	Case B2	Case B3
$T_{f,max}(150\text{cm})$ ($^{\circ}\text{C}$)	2373	2368	2352
$\phi_1(150\text{cm})$ ($\text{cm}^{-2}\text{sec}^{-1}$)	1.3×10^{15}	1.3×10^{15}	1.3×10^{15}
$\phi_2(150\text{cm})$ ($\text{cm}^{-2}\text{sec}^{-1}$)	7.6×10^{14}	7.6×10^{14}	7.3×10^{14}
$T_{f,max}(250\text{cm})$ ($^{\circ}\text{C}$)	2208	2205	2194
$\phi_1(250\text{cm})$ ($\text{cm}^{-2}\text{sec}^{-1}$)	1.1×10^{15}	1.1×10^{15}	1.1×10^{15}
$\phi_2(250\text{cm})$ ($\text{cm}^{-2}\text{sec}^{-1}$)	6.4×10^{14}	6.4×10^{14}	6.2×10^{14}
Time(150cm) at $\phi_1=10^{15}$ (sec)	9	9	9
Time(250cm) at $\phi_2=10^{15}$ (sec)	10	10	10
Time per 10 sec transient on IBM370/165	8	4	4

Case B1: Amplitude function time step = 0.25 sec.
Spatial function recalculation = 1 sec.
Quadratic piecewise polynomials.

Case B2: Amplitude function time step = 0.25 sec.
Spatial function recalculation = 2 sec.
Cubic piecewise polynomials.

Case B3: Amplitude function time step = 1.0 sec.
Spatial function recalculation = 2 sec.
Cubic piecewise polynomials.

Table 3.34 Transient problems for two-dimensional benchmark test for a fast reactor (C29)

Problem	Feedback	Transient	Transient time
Case 1 2 neutron groups	$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial T} = \frac{i}{\rho} \frac{300}{T}$ in zone 1 and 2 (i = capture, fission)	Control rod bank (region 4) is axially withdrawn by 6.5 cm in 15 msec and replaced by sodium (region 5).	100 msec
Case 2 2 neutron groups	Extra Doppler reactivity $T \left(\frac{1}{k_{eff}} \frac{\partial k_{eff}}{\partial T} \right) = \gamma$ $\gamma = -0.007$	Same as for case 1	100 msec
Case 3 6 neutron groups	Same as for case 1	Same as for case 1	100 msec
Case 4 6 neutron groups	Same as for case 3 except for $\gamma = -0.007$	Same as for case 1	100 msec

Table 3.35 Codes used in NEACRP two-dimensional kinetic benchmark problem (C29)

Code	Code developer	Characteristics	Write-up
SPARK	UK-RIS	1Q method, 1-, 2- and 3-dimensional fast reactor disassembly analysis code.	Refer C25 & C26
ADEF	CRNL (Canada)	ADE method (see Table 3.24). Reference code.	Refer D8
NADYP-A	CSN (Italy)	Metastatic method (see Table 3.24)	Refer C16
KINTIC-1	GFK (Germany)	Quasistatic method.	Refer C9

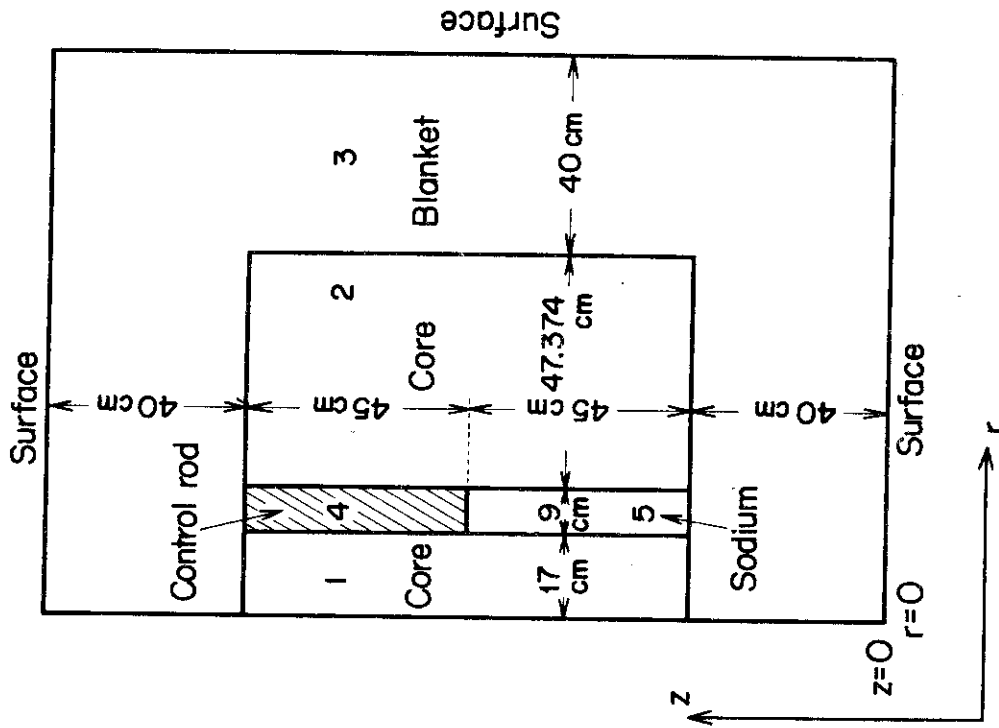


Fig. 3.25 Cylindrical configuration for two-dimensional fast reactor benchmark problem (C29)

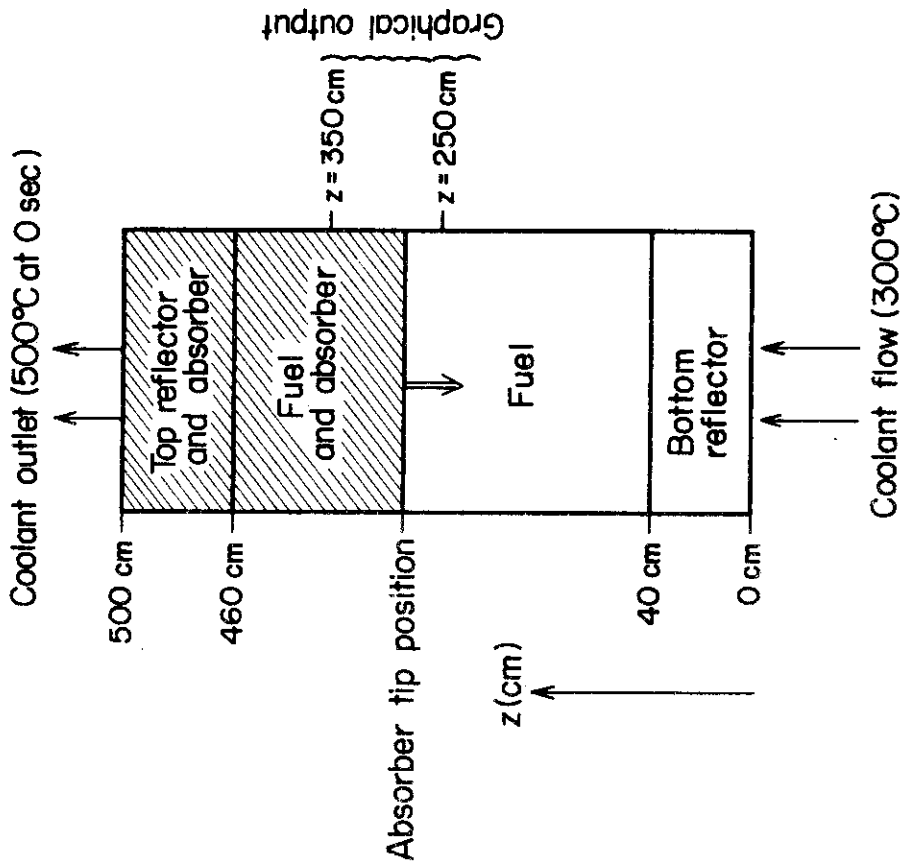


Fig. 3.24 One-dimensional benchmark problem typical for thermal reactor (C24)

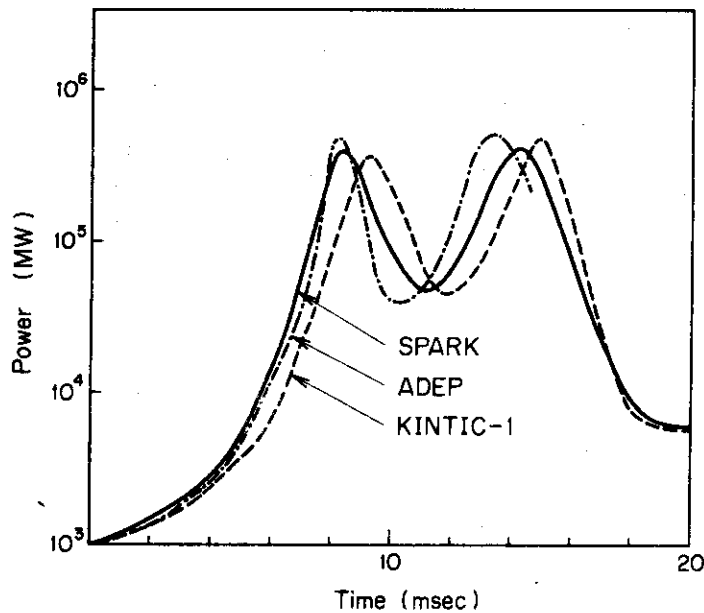


Fig. 3.26 Comparison of 3 codes for Case 1 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^{C29)}

およびKINTIC-1 (QS法^{C9)})のコード間で出力で最大25%、ピークの位置で最大10%の差が現われているが、発散はしていない。一方、NADYP-Aコード^{O17)}はFig. 3.27に示すように、超臨界になる処で発散を起してしまっている。これはこのコード(半静的近似)に対しては、時間ステップの幅が最適でなかったか、或いは、振幅関数と形状関数との間で行われる反復回数が不充分であった為であろう。SPARKコードとKINTIC-1コードとの差は、方法としては、形状関数の時間依存性の取り扱いにあるのだが、両コードにおいて空間メッシュを変えても、値の変動はなかった。定常状態の中性子束分布に差があるので、この影響について調べる必要がある。Table 3.36には計算時間および使用した記憶容量を示した。空間メッシュ数を考慮に入れるとKINTIC-1コードの方がSPARKコードより可成り速いと云えよう(SPARKコードは1次元、2次元、3次元とできるのだが)。準静的近似の仲間では、特にNADYP-AのCPU時間が大きいのは、形状関数の随伴中性子束の時間依存性を考慮した為である。Fig. 3.28はCase 1に対するSPARKとKINTIC-1による反応度の比較であるがIQ法(SPARK)とQS法(KINTIC-1)との若干の差が認められる。Case 2はCase 1にDopplerフィードバックを入れたのであるがFig. 3.29に示すようにCase 1と殆んど変わらない。Case 3は、Case 1に於いて、エネルギー群数を2から6にしたのであるがFig. 3.30に示すように、SPARKよりKINTIC-1の方がエネルギー群数の影響を受けやすいことがわかる。Case 3に対してではあるが、各エネルギー群毎に両コードの中性子束の比較をしたのがTable 3.37であるが、両コードの値の差は4~9%あり、静的状態の差をそのまま引継いでいる。Table 3.38は計算時間の比であるが、KINTIC-1コードの方が空間メッシュ点が3倍強多いことを考慮すると、SPARKコードに比べてかなり速くまた記憶容量も少ないと云える。しかしながら、KINTIC-1コードはQS法の方を採用しているので、上記の検討から判断しても、IQ法の採用を含めて改良の余地がある。

Table 3.36 Comparison of code performance for Case 1 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^{C29)}

	SPARK	ADEP*1)	NADYP-A	KINTIC-1
Computer*2)	ICL470	CDC6600	IBM370/165	IBM370/168
Spatial meshes	384	1036	-	1320
Elapsed time (min)	13	-	-	44
CPU time (min)	9	57	15	6
Storage (KW)	200	20	192	210

*1) ADEP's values are for solution with larger time steps than for final solution.

*2) ICL470 is slower by a factor 4 than IBM370/168. CDC6600, IBM370/165 and IBM370/168 are equivalent each other.

Table 3.37 Comparison of time and group dependent flux shape indicator: $\phi_g(r=20\text{cm}, z=88.25\text{cm})/\phi_g(r=38\text{cm}, z=88.25\text{cm})$ for Case 3 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^{C29)}

Energy group	t = 0 msec		t = 100 msec	
	SPARK	KINTIC-1	SPARK	KINTIC-1
1	0.69	0.72	0.80	0.83
2	0.84	0.85	0.90	0.92
3	0.87	0.87	0.93	0.94
4	0.94	0.97	1.01	1.03
5	0.85	0.88	1.17	1.36
6	0.64	0.71	1.46	1.80

Table 3.38 Comparison of code performance for Case 3 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^{C29)}

	Computer	Spatial meshes	Elapsed time (min)	CPU time (min)	Storage (KW)
SPARK	ICL470	384	30	25	200
KINTIC-1	IBM370/168	1320	104	19	250

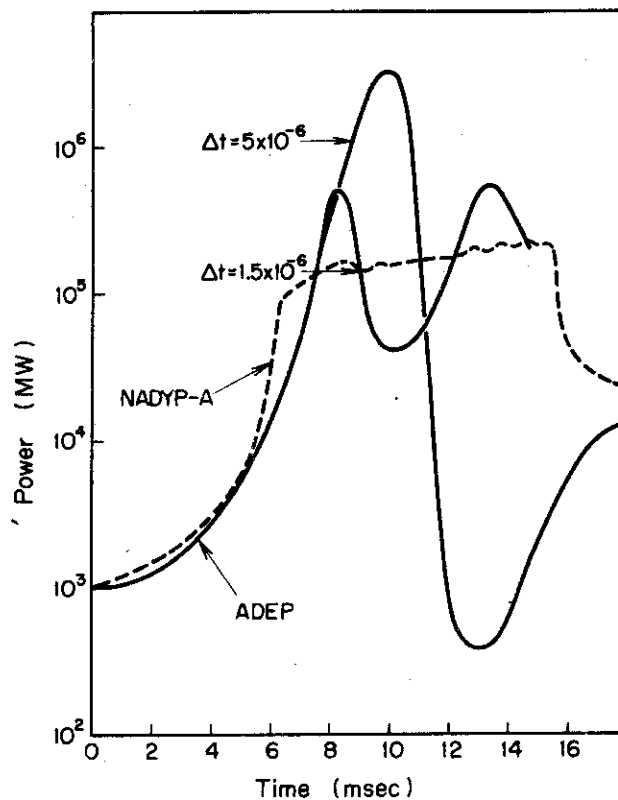


Fig. 3.27 Unappropriateness of NADYP-A code for Case 1 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^(C29)

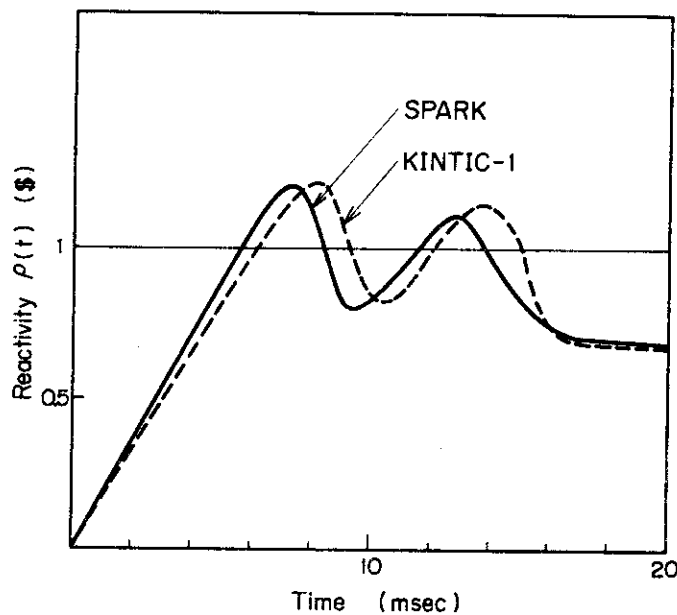


Fig. 3.28 Comparison between SPARK and KINTIC-1 codes for Case 1 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^(C29)

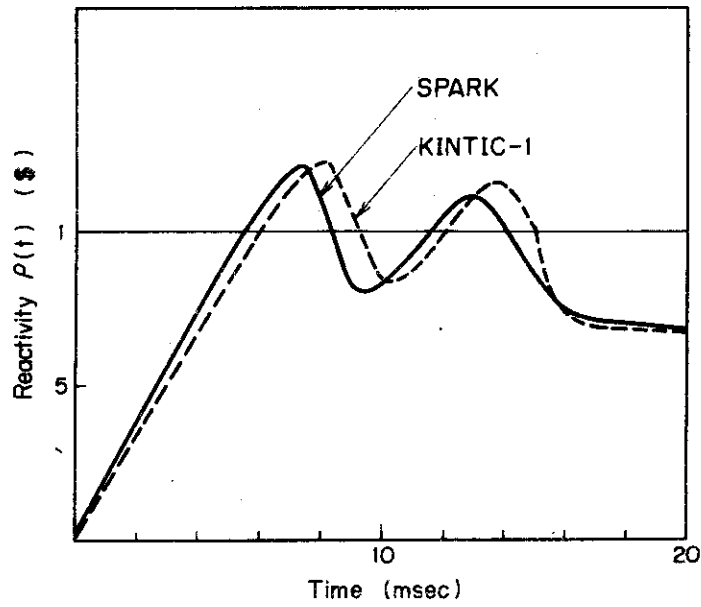


Fig. 3.29 Comparison between SPARK and KINTIC-1 codes for Case 2 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^(C29)

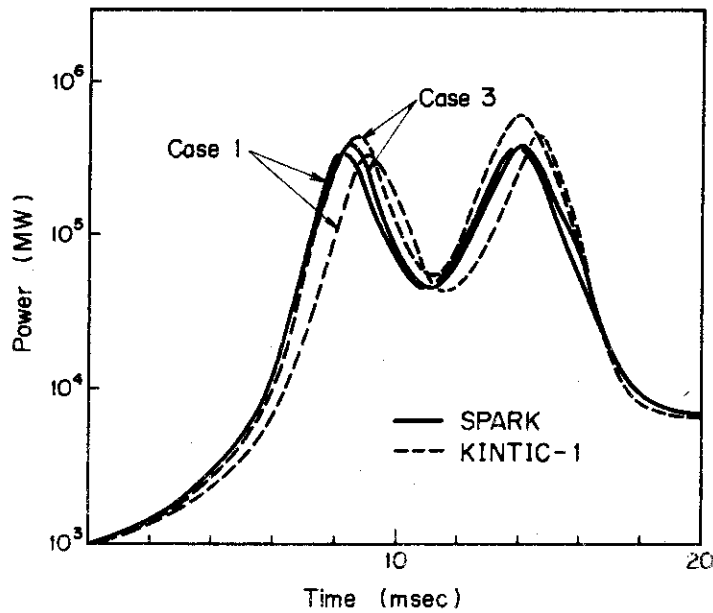


Fig. 3.30 Comparison between SPARK and KINTIC-1 codes for Case 1 and Case 3 of two-dimensional fast reactor benchmark problem^(C29)

4. あとがき

1 点近似法について

- i) 1点近似式そのものを解くのであれば、常微分方程式の数値解法の中から、特に安定度の高い方法が応用できよう。^{A16~A18)}準静的近似で用いられている Kavanove の方法もこの類で、ステップサイズの自動調節ができる。最近のものでは Urabe の方法^{A17)}があり、パルス波形の解析に向いていると云われているので、今後、準静的近似のコード開発を行う際参考になろう。現在プログラム化も^{A19)}されているので、常微分方程式の数値解法のベンチマークテストの対象にも含まれているとのことである。
- ii) 安定で高精度と云うことであれば、Nobrega や Hennart の Padé 型の拡張に属する方法も価値がある。
- iii) 空間依存性への拡張と云う観点からは、Hansen のマトリックス分解法があり、今後の発展も期待できよう。

準静的近似について

- i) 準静的近似の中ではやはり改良型 (IQ 法) を用いるべきで、事実どの計算例でも良い結果を与えている。
- ii) IQ 法は非常に経済的 (直接法より計算時間で1桁ぐらい速い) であり、熱中性子炉にも高速炉にも精度の高い解析手段である。特に高速炉は時間ステップ数が多いから、直接法は使い難いので実用上 IQ 法しか対象にならないと云っても過言ではない。
- iii) IQ 法は、時間ステップサイズの精度への影響は非常に小さい。一方、従来標準用として用いられてきた直接法のコードの精度は、時間ステップサイズによる影響が大きい。この傾向は高速炉においてより強く現われる。
- iv) 随伴中性子束に時間依存性を考慮すると計算時間にかなり影響を与える。精度は高くなると云う例と変わらないという両方の例があった。一般には、考慮する必要はなさそうである。
- v) 振幅関数に対する高次近似 (区分多項式) の導入は、確かに精度を向上させ、計算時間も短くなりそうである。但し、1点近似の解法における注意が必要である。
- vi) 形状関数に対する高次近似は確かに精度を向上させ計算時間も短くなりそうであるが、ここでこの計算例はアカデミックで実際のでない感じがする。
- vii) 3次元拡散問題への応用が見られたが、^{C19, C32)}これは現在の計算機の能力への挑戦であろう (計算時間は多分数10時間かかるであろう)。数値解析上の画期的改良が望まれる。
- viii) 2次元輸送問題への応用例が1つあった。^{C30)}高速炉などでは、炉心に大きなボイドが生成するので確かに魅力的な応用であるが、実用的にするには、種々の仮定の導入とか、加速法などの画期的改良が必要であろう。
- ix) Table 4.1 に現在世界で発表されていた準静的近似の計算コードを掲げた。このうち、高速炉用としては FX2-VENUS が、熱中性子炉用としては TWODQD が、実験などと照合しつつ、かなりの長い年月をかけて開発されていて、現在でも改良がすすめられている。

Table 4.1 Space-dependent kinetics codes based on the quasi-static method

Code	Developer	Characteristics
QX1 (1971)	Ott-Meneley (ANL) C1~C7)	1-dimensional multigroup diffusion with IQ method, fast reactor analysis.
CYCLOPS (1975)	Billington (UKAEA) C24, C25)	1-dimensional diffusion with IQ method, using amplitude function by piecewise polynomial method, for thermal reactor analysis.
— (1972)	Hennart et al. (Univ. Brussels) C20, 21)	1- and 2-dimensional diffusion with IQ method, using shape function by piecewise polynomial method, for academic analysis.
FX2 (1971)	Sha et al. (ANL) C10~C13)	2-dimensional (R-Z) multigroup diffusion with IQ method for LMFBR analysis.
KINTIC-1 (1972)	Mayer-Bachmann (KFK) C8, C9)	2-dimensional (R-Z) multigroup diffusion with QS method for fast reactor analysis.
TWODQD (1972)	Dodds et al. (SRL) C15, C16, C31)	2-dimensional (R-Z) diffusion with IQ method for D ₂ O moderated reactor analysis.
KINE-2 (1972)	Galati et al. (CNEN) C17, C18)	2-dimensional (R-Z) multigroup diffusion with meta-static method for neutronic analysis.
FEMSYNDY (1975)	Kani et al. (Univ. Tokyo) C23)	2-dimensional (R-Z) diffusion with IQ method, using shape function by piecewise polynomial, for neutronic analysis.
SPARK (1975)	Fletcher (UKAEA) C26, C27)	1-, 2-, and 3-dimensional multigroup diffusion with IQ method for fast reactor analysis.
—	Ohnishi (Hitachi) C28)	2-dimensional (triangular torus-RZ) diffusion with IQ method, using amplitude function by R.K. method and shape function by FEM, for neutronic analysis.
CERBERUS (1975)	Dastur-Buss (AECL) C19)	3-dimensional (XYZ) diffusion with IQ method for CANDU reactor analysis.
SIMMER (1976)	Smith et al. (LASL) C30)	2-dimensional (RZ) transport (S _N) with IQ method for IMFBR analysis.

参考文献

一般

- A1) 朝岡草見, 中原康明, 伊勢武治, 筒井恒夫, 西田雄彦, 堀上邦彦, 藤村統一郎, 出田隆士, 鈴木忠和, "中性子・ガンマ線輸送と動特性計算コードのベンチマーク・テストの問題点," JAERI-M 5557 (1974)
- A2) 伊勢武治, 堀上邦彦, 小林健介, "時間依存輸送方程式の数値解法アルゴリズムとベンチマークテストの現状(空間依存動特性計算コードのベンチマークテスト・1)," JAERI-M 6373 (1975)
- A3) Hetrick D.L. (ed.), "Dynamics of nuclear reactor systems," Univ. of Arizona (1972).
- A4) Stacey Jr. W.M., "Space-time nuclear reactor kinetics," Academic Press (1969).
- A5) Keepin G.R., "Physics of nuclear reactor kinetics," Addison-Wesley (1965).
- A6) Henry A.F., "Nuclear Reactor Analysis," MIT Press (1975).
- A7) Butler D.K., Meneley D.A., "Recent developments in fast reactor kinetics," Nuclear Safety, 11, 289~295 (1970).
- A8) ———, "NEACRP/CSNI specialist meeting on new developments in 3-D neutron kinetics and review of kinetics benchmark calculations," MRR-145 (1975).
- A9) Varga R.S., "Matrix iterative analysis," Prentice-Hall; 渋谷政昭, 棚町芳弘, 金子正久, 野田隆, 共訳, "大型行列の反復解法," サイエンス社 (1974)
- A10) McCalla T.M., "Introduction to numerical methods and FORTRAN programming," John Wiley & Sons; 三浦功, 田尾陽一, 共訳, "数値計算法概論," サイエンス社 (1972)
- A11) ———, "Numerical reactor calculations," IAEA (1972).
- A12) Strong G., Fix G.J., "An analysis of the finite element analysis method," Prentice-Hall (1973).
- A13) Hennart J.P., "Numerical methods of high order accuracy for one-dimensional diffusion equation," Nucl. Sci. Eng., 50 185~199 (1973).
- A14) Yasinsky J.B., "Notes on nuclear reactor kinetics," WAPD-TM-960 (1970).
- A15) Fuller E.L., "Weighted residual methods in space-dependent reactor dynamics," ANL-7565 (1969).
- A16) Shampine L.F., Gordon M.K., "Computer solution of ordinary differential equations," W.H. Freeman and Company (1975).

- A17) Urabe M., "An implicit one-step method of high-order accuracy for the numerical integration of ordinary differential equations," Numer. Math., 15, 151~164 (1970).
- A18) Liniger W., Willoughby R.A., "Efficient integration methods for the stiff systems of ordinary differential equations," SIAM J. Numer. Anal. 7, 47~66 (1970).
- A19) 西田雄彦(私信)

1点近似動特性解析

- B1) Kavanove J.J., "Numerical solution of the one-group, space independent reactor kinetics equations for neutron density given the excess reactivity," ANL-6132 (1960).
- B2) Izumi M., Noda T., "An implicit method for the lumped parameter reactor-kinetics equations by repeated extrapolation," Nucl. Sci. Eng., 41 299~303 (1970).
- B3)a) Kang C.M., K.F. Hansen, "Finite element methods for reactivity analysis," Nucl. Sci. Eng., 51, 456~495 (1973).
- B4)a) Kang C.M., K.F. Hansen, "Finite element methods for space-time reactor analysis," MIT-3903-5 (1971).
- B5) Dubois G., Grossman L.M., "Optimized Taylor series method in point kinetics calculations," Trans. Am. Nucl. Soc., 15 288~289 (1972).
- B6) Apostolokis G.E., "On the accuracy of point kinetics," Trans. Am. Nucl. Soc., 17, 476~477 (1973).
- B7) Hennart J.P., Torres B.B., "Generalized Pade and Chebyshev approximations for point kinetics," Nucl. Sci. Eng., 59 170~187 (1976).
- B8) Hennart J.P., "Piecewise polynomials for point and space kinetics with variable reactivity," Trans. Am. Nucl. Soc., 19, 179~180 (1974).
- B9) Fuller E.L., "The point kinetics algorithm for FX2," ANL-7910 (1972) 503~508.
- B10) Y. Nakahara, T. Ise, K. Kobayashi, Y. Itoh, "A direct method for the numerical solution of a class of nonlinear Volterra integro-differential equations and its application to the nonlinear fission and fusion reactor kinetics," JAERI-M 6351 (1976).
- B11) Yasinsky J.B., Henry A.F., "Some numerical experiments concerning space-time reactor kinetics behavior," Nucl. Sci. Eng., 22, 171~181 (1965).
-
- a) 時間依存拡散方程式の時間と空間両方に有限要素を適用している。

- B12) Hansen K.F., Floise R., Chang I.J., "A new method of integrating the point kinetics equations," Trans. Am. Nucl. Soc., 12, 617~618 (1969).
- B13) de Nóbrega J.A.W., Henry A.K., "Time integration methods for reactor kinetics," MITNE-136 (1971).
- B14) 可児吉男, 近藤駿介, 安成弘, "一点炉動特性方程式の数値解法の検討," 日本原子学会予稿集, 昭和50年4月年会, D 1, P 165
- B15) Fiebig R., Krüger A., "GENDY: A general reactor dynamics program," Atomkernenergie, 22, 193~195 (1973).
- B16) Canosa J., "A new method for nonlinear reactor dynamics program," Nukleonik, 9, 289~295 (1967).
- B17) Canosa J., "Ramp reactor excursions with nonlinear feedback," Nukleonik, 10, 41~45 (1967).
- B18) Stone R.S., Sleeper H.P., Stahl Jr. R.H., West G., "Transient behavior of TRIGA, a zirconium-hydride, water-moderated reactor," Nucl. Sci. Eng., 6, 255~259 (1959).
- B19) Becker M., "A generalized formulation of point nuclear kinetics equations," Nucl. Sci. Eng. 31, 458~464 (1968).
- B20) Thayer G.R., Miley G.H., Jones B.G., "An experimental study of two coupled reactors," Nucl. Tech. 25, 56~67 (1975).
- B21) Dovooght J., Mund E., "A-stable algorithms for neutron kinetics," P.21 of A11 (1972).
- B22) 橋本修, 他 "NSRRの臨界および特性試験(5)動特性パラメータの検討," 日本原子力学会昭和50年秋の分科会, B 36
- B23) 伊勢武治, 他, "NSRR(安全性研究炉)の炉特性解析," 日本原子力学会誌, 17, 314~321 (1975)
- B24) Fiebig R., "Accuracy problems in the point kinetics of the Ott-Hahn reactor," (in German), GKSS 74/E/14 (1974).
- B25) Rice K., Kurstedt Jr. H.A., Omega R.J., "A formulation of the reflected-reactor point kinetics equations," ANS meet. 23, 589 (1976).
- B26) Omega R.J., Karcher K.E., "An extension of Hansen's method to a nonlinear point dynamics model," ANS meet. 23, 589~599 (1976).
- B27) Omega R.J., Karcher K.E., "Nonlinear dynamics of a pressurized water reactor core," Nucl. Sci. Eng. 61, 276~282 (1976).
- B28) Meister G., "Numerical integration of the reactor kinetics equations with exponentially fitted implicit methods," JÜL-1307 (1976).
- B29) Lawrence R.D., Dorning J.J., "A smoothing and extrapolation method for point kinetics," ANS meet. 24, 199~201 (1976).

準静的近似動特性解析

- C1) Ott K.O., "Quasistatic treatment of spatial phenomena in reactor dynamics," Nucl. Sci. Eng., 26, 563~565 (1966).
- C2) Meneley D.A., Ott K.O., Wiener E.S., "Space-time kinetics — the QX1 code," ANL-7310, 471~476 (1968).
- C3) Meneley D.A., Ott K.O., Wiener E.S., "Further developments of the quasistatic neutron kinetics model," ANL-7410, 398~400 (1969).
- C4) Ott K.O., Meneley D.A., "Accuracy of the quasistatic treatment spatial reactor kinetics," Nucl. Sci. Eng., 36, 402~411 (1969).
- C5) Meneley D.A., Ott K.O., "Fast reactor kinetics — the QX1 code," ANL-7769 (1971).
- C6) Fuller E.L., "One-dimensional space-time kinetics benchmark calculations," ANL-7912, 497~502 (1972).
- C7) Fuller E.L., Meneley D.A., Naser J.A., "Increasing time step sizes in QX1 by using a temperature correction to reactivity," Trans. Am. Nucl. Soc. 15, 289 (1972).
- C8) Mayer L., Bachmann H., "Two-dimensional calculation of a reactor excursions with the quasistatic method," [Space dependent reactor dynamics] Proceeding of a specialist meeting on 'reactivity effects in large power reactors', Ispra (Oct. 1970), EUR 4731f-e 253~260.
- C9) Mayer L., Bachmann H., "KINTIC-1: A program for the calculation of two-dimensional reactor dynamics of fast reactors with the quasistatic method," KFK 1627 (1972).
- C10) Sha W.T., Daly T.A., Lindeman A.J., Fuller E.L., Meneley D.A., Leaf G.K. "Two-dimensional fast reactor disassembly analysis with space-time kinetics," Proceeding of conference on new developments in reactor mathematics and applications, Idaho Falls (Mar. 1971) CONF-710302 Vol.II, 128~157.
- C11) Meneley D.A., Leaf G.K., Lindeman A.J., Daly T.A., Sha W.T., "A kinetics model for fast reactor analysis in two dimensions," 483~500 of A3.
- C12) Ferguson D.R., Daly T.A., Fuller E.L., "Improvement of and calculations with two-dimensional space-time kinetics code," CONF-730414, IX59~IX71 (1973).
- C13) McLaughlin T.P., "Preliminary topical report on comparison reactor disassembly calculations" LA-6106-MS (1975).
- C14) Jackson J.F., Nicholson R.B., "VENUS-II: An LMFBR disassembly program," ANL-7951 (1972).

- C15) Dodds Jr. H.L., "Accuracy of the quasistatic method for two-dimensional thermal reactor transients with feedback," Nucl. Sci. Eng., 59, 271~276 (1976).
- C16) Dodds Jr. H.L., Parks P.B., Bailey C.E., Baumann N.P., Currie R.L., Stewart J.W., "Space-dependent transient reactor experiments and calculations at Savannah River Laboratory" Trans. Am. Nucl. Soc. 16, 292~293 (1973), および DP-MS-73-4 (1973).
- C17) Galati A., "The metastatic method in nuclear reactor core kinetics calculations," Nucl. Sci. Eng., 37, 30~40 (1969).
- C18) Buffoni G., Conforto G., Damico P., Galati A., Mosiello R., Musco A., Norelli F., "KINE-2: Un codice di cinetica a due dimension," RT/FI (72)26 (1972).
- C19) Dastur A.R., Buss D.B., "Space-time kinetics of CANDU systems," AECL-5181 (1975).
- C20) Jaucot A., Mund E., Hennart J.P., "Quasistatic approximation and piecewise polynomials for one-dimensional multigroup equations," Trans. Am. Nucl. Soc. 15, 787~788 (1972).
- C21) Hennart J.P., Jaucot A., Renda V., "Piecewise polynomial approximations for one- and two-dimensional space-time kinetics equations," IAEA-SM-154/16, 675~688 of A11.
- C22) Nelson J.V., Hardie R.W., "The accuracy of coarsemesh three-dimensional calculations for quasistatic fast reactor transient analysis," Trans. Am. Nucl. Soc., 21, 475 (1975). See also HEDL-SA-764 (1975).
- C23) 可児吉男, 近藤駿介, 安成弘, "有限要素法及びエネルギーモード合成法の2次元時間依存拡散方程式への適用," 日本原子力学会予稿集, 昭和50年11月炉物理・炉工学分科会, B 43
- C24) Billington D.E., Buffoni G., Childs E.H., Coofer D.K., Galati A., Gnattas S., McDonnell F.M., Mosiello R., Musco A., Norelli F., Otsuka T., Pörn K., Sidell J., Tsunoyama S., "Survey of the results of one-dimensional kinetic benchmark problem typical for a thermal reactor," 323~411 of A8.
- C25) Billington D.E., "CYCLOPS: A program for the solution of the few group one dimensional neutron kinetics equations with temperature feedback," 355~405 of A8.
- C26) Fletcher J.K., Perks M.A., "The spatial kinetics program SPARK and its application to fast reactor transients," 257~287 of A8.
- C27) Fletcher J.K., "SPARK: A computer program to solve the time dependent multigroup neutron diffusion equations in one, two or three dimensions,

TRG reports 2707 (R).

- C28) 大西忠博, "準静的方法と有限要素法による2次元空間動特性," 日本原子力学会予稿集, 昭和51年炉物理・炉工学分科会, B 2
- C29) Buffoni A., Fletcher J.K., Galati A., McDonnell F.N., Musco A., Vãth L., "Survey of the results of a two-dimensional kinetic benchmark problem typical for a fast reactor," 505 551 of A8.
- C30) Smith L.L., "Quasistatic treatment of the time-dependent discrete rodinates neutron transport equation," ANS meet. 23, 205 206 (1976).
- C31) McDonnell F.N., "D₂O reactor kinetics benchmark problem," AECL-5377 (1976).
- C32) Kugler G. and Dastur A.R., "Accuracy of the improved quasistatic space time method checked with experiment," AECL-5553 (1976).

その他

- D1) Okrent D., Cook J.M., Sakus D., Lazerus R.B., Wells M.B., "AX1: Computing program for coupled Neutronics-hydrodynamics calculations on the IBM-704," ANL-5977 (1959).
- D2) Henry A.F., Vota A.V., "WIGLE2: A program for the solution of the one-dimensional, two-group space-time diffusion equations accounting for temperature, Xenon, and control feedback," WAPD-TM-532 (1965).
- D3) Adams C.H., Stacey Jr. W.M., "RAUMZEIT: A program to solve coupled time-dependent neutron diffusion equations in one space dimension," KAPL-M-6728 (1967).
- D4) Reed W.H., Hansen K.F., "Finite difference techniques for the solution of the reactor kinetics equations," MIT-3903-2 (1969).
- D5) Yasinsky J.B., Natelson M., Hageman L.A., "TWIGL: A program to solve the two-dimensional, two-group, space-time neutron diffusion equations with temperature feedback," WAPD-TM-743 (1968).
- D6) Hansen K.F., Johnson S.R., "GAKIN: A program for the solution of the one-dimensional, multigroup, space-time dependent diffusion equations," GA-7543 (1967).
- D7) Ellis J., "The kinex one-dimensional reactor kinetic program KINAX3," CD/NS/11, NPCC/RKWP/P286 (1963).
- D8) Denning R.S., "ADEP: A one- and two-dimensional few group kinetic code," BML-1911 (1971).
- D9) Yasinsky J.B., "Numerical studies of combined space-time synthesis," Nucl. Sci. Eng., 34, 158~168 (1968).