

JAERI-M

6931

磁気プローブによる位置・断面形状検出

(プラズマ位置・断面形状制御・IV)

(臨界プラズマ試験装置設計報告・XXXIII)

1977年2月

相川裕史・小方厚・鈴木康夫

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

磁気プローブによる位置・断面形状検出
(プラズマ位置・断面形状制御・Ⅳ)
(臨界プラズマ試験装置設計報告・XXX Ⅲ)

日本原子力研究所大型トカマク開発部
相川裕史・小方 厚・鈴木康夫
(1977年1月24日受理)

本稿はトカマク・プラズマの位置・断面形状をトロイダル効果を考慮に入れて、磁気プローブ信号から得る方法を与えている。即ち、プラズマ電流密度の多重極分解法にトロイダル効果と、垂直方向の非対称性をとり入れて、水平、垂直方向変位、楕円度を求めている。更に、この方法で計算される変位と、実際に測定される信号から得られる変位との誤差に関して、最小2乗法に基づいて評価している。それによると、測定誤差はプローブの設置誤差に比例し、プローブの個数の2乗根に逆比例する。

JAERI-M 6931

Detection of the Position and Cross-section of a Tokamak
Plasma with Magnetic Probes

Hiroshi AIKAWA, Atsushi OGATA, and Yasuo SUZUKI

Division of Large Tokamak Development, Tokai, JAERI

(Received January 24, 1977)

The position and cross-sectional shape of a Tokamak plasma are obtained analytically from magnetic probe signals, taking into consideration the toroidal effect. Multipole moment analysis of the plasma current density, introducing the vertical asymmetry, shows the horizontal and vertical displacements and the elliptical deviation. The error in the measurement is estimated by means of the least square method.

The observed error is proportional to the error of setting the probes, and inversely proportional to the square root of the number of probes.

目 次

1. はじめに	1
2. 磁気プローブによる位置・断面形状の検出	1
(多重極モーメント展開による方法)	1
3. 磁気プローブ測定における誤差の評価	5
4. おわりに	11
付 録	12

1. はじめに

臨界プラズマ試験装置 (JT-60) はシュルレストカマクであり、位置・断面形状制御を行う必要がある。実際、設計は進展している。^{1), 2), 3)} 位置・断面形状の検出器としては、磁気プローブ、光学系、制御用コイルに流れる渦電流等を利用する方法が、考えられるが、本稿では、磁気プローブによる検出法を述べる。磁気プローブ信号からトカマク・プラズマの変位を計算する方法は、これまでソ連において、一連の研究が、なされてきた。しかし、それらは、プラズマ変位のフィードバック制御に使うには、あまり簡単ではなく、外部磁場電流、ポロイダル・ベータ値 (β_p)、内部インダクタンス (L_1)、プラズマ半径 (a_p) などの情報を必要としている。更にそれらは円筒近似や垂直方向の対称性を仮定している。ここでは、トロイダル効果を考慮に入れて水平、垂直方向の変位を同時に磁気プローブ信号から得る方法を考えている。即ち、Zakharov と Shafranov によって開発されたプラズマ電流密度の多重極分解法⁴⁾に、(a_p/R) の2次までのトロイダル効果と垂直方向の非対称性をとり入れて、水平、垂直方向変位 ($4_H, 4_V$) を求めた。更にこの変位と、プラズマ・パラメータとの関係を与えた。

また、この方法で計算される $4_H, 4_V$ と実際に測定される信号から得られる変位との誤差に関して、最小2乗法における分散を導入して考察してある。それによると、プローブの設置誤差の程度によって、プローブの個数を調節すればよい事がわかる。即ち、JT-60 の設計を例にとると設置誤差を0.1ラジアンと仮定すれば、1%の精度を上げるには、50個のプローブが必要となるが、2.5%なら、8個でよい事がわかる。

2. 磁気プローブによる位置・断面形状検出 (多重極モーメント展開による方法)^{4), 5)}

トカマク・プラズマ中を流れるトロイダル電流による磁場を磁気プローブで測定する事により、プラズマの位置・断面形状を知る事ができる。それは、電流密度の多重極モーメントと、電流が作る磁場との間の関係式を利用する事である。即ち、電荷密度の分布により生ずる多重極電場を求める事と同じ類推で考えられる。しかし、我々の場合は、後述する様に、磁気プローブに、かかる信号としては、プラズマ電流のみを考慮すればよいので非常に簡単になる。

まず、プラズマの外部では、

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

で、磁場が、与えられる。この辺に、スカラー的にベクトル \mathbf{q} の積をとる。 \mathbf{q} は、

$$\text{rot } \mathbf{q} = \nabla g, \quad (2.2)$$

を満足する非回転場のベクトル・ポテンシャルである。 g は、非回転場のスカラー・ポテンシャルである。

次に、ベクトル公式

$$\text{div} (\mathbf{B} \times \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{q}, \quad (2.3)$$

1. はじめに

臨界プラズマ試験装置 (JT-60) はシュルレストカマクであり、位置・断面形状制御を行う必要がある。実際、設計は進展している。^{1), 2), 3)} 位置・断面形状の検出器としては、磁気プローブ、光学系、制御用コイルに流れる渦電流等を利用する方法が、考えられるが、本稿では、磁気プローブによる検出法を述べる。磁気プローブ信号からトカマク・プラズマの変位を計算する方法は、これまでソ連において、一連の研究が、なされてきた。しかし、それらは、プラズマ変位のフィードバック制御に使うには、あまり簡単ではなく、外部磁場電流、ポロイダル・ベータ値 (β_p)、内部インダクタンス (ℓ_i)、プラズマ半径 (a_p) などの情報を必要としている。更にそれらは円筒近似や垂直方向の対称性を仮定している。ここでは、トロイダル効果を考慮に入れて水平、垂直方向の変位を同時に磁気プローブ信号から得る方法を考えている。即ち、Zakharov と Shafranov によって開発されたプラズマ電流密度の多重極分解法⁴⁾ に、(a_p/R) の2次までのトロイダル効果と垂直方向の非対称性をとり入れて、水平、垂直方向変位 (Δ_H, Δ_V) を求めた。更にこの変位と、プラズマ・パラメータとの関係を与えた。

また、この方法で計算される Δ_H, Δ_V と実際に測定される信号から得られる変位との誤差に関して、最小2乗法における分散を導入して考察してある。それによると、プローブの設置誤差の程度によって、プローブの個数を調節すればよい事がわかる。即ち、JT-60 の設計を例にとると設置誤差を 0.1 ラジアンと仮定すれば、1% の精度を上げるには、50 個のプローブが必要となるが、2.5% なら、8 個でよい事がわかる。

2. 磁気プローブによる位置・断面形状検出 (多重極モーメント展開による方法)^{4), 5)}

トカマク・プラズマ中を流れるトロイダル電流による磁場を磁気プローブで測定する事により、プラズマの位置・断面形状を知る事ができる。それは、電流密度の多重極モーメントと、電流が作る磁場との間の関係式を利用する事である。即ち、電荷密度の分布により生ずる多重極電場を求める事と同じ類推で考えられる。しかし、我々の場合は、後述する様に、磁気プローブに、かかる信号としては、プラズマ電流のみを考慮すればよいので非常に簡単になる。

まず、プラズマの外部では、

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

で、磁場が、与えられる。この辺に、スカラー的にベクトル \mathbf{q} の積をとる。 \mathbf{q} は、

$$\text{rot } \mathbf{q} = \nabla g, \quad (2.2)$$

を満足する非回転場のベクトル・ポテンシャルである。 g は、非回転場のスカラー・ポテンシャルである。

次に、ベクトル公式

$$\text{div} (\mathbf{B} \times \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{q}, \quad (2.3)$$

を用いて、表面積 S 、体積 V で、積分する。すると、

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{q} dV = \frac{1}{\mu_0} \oint \{ \mathbf{B} \times \mathbf{q} + g \mathbf{B} \} dS \quad (2.4)$$

を得る。ここで、軸対称の仮定 ($\partial/\partial\varphi=0$) を導入する。(座標系は、図 2.1 に示す) そこで、 $\mathbf{q} = \mathbf{e}_\varphi f / X$ 、 $dV = 2\pi X dS_\varphi$ と置くと、

$$\int j_\varphi f dS_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \oint_\ell (f B_r + Xg B_n) d\ell \quad (2.5)$$

を得る。この左辺の積分は、プラズマ断面積について行い、右辺の積分は、その断面積の周上の積分である。 B_r 、 B_n はそれぞれ、磁場の接線方向成分、垂直方向成分である。(図 2.1 参照)

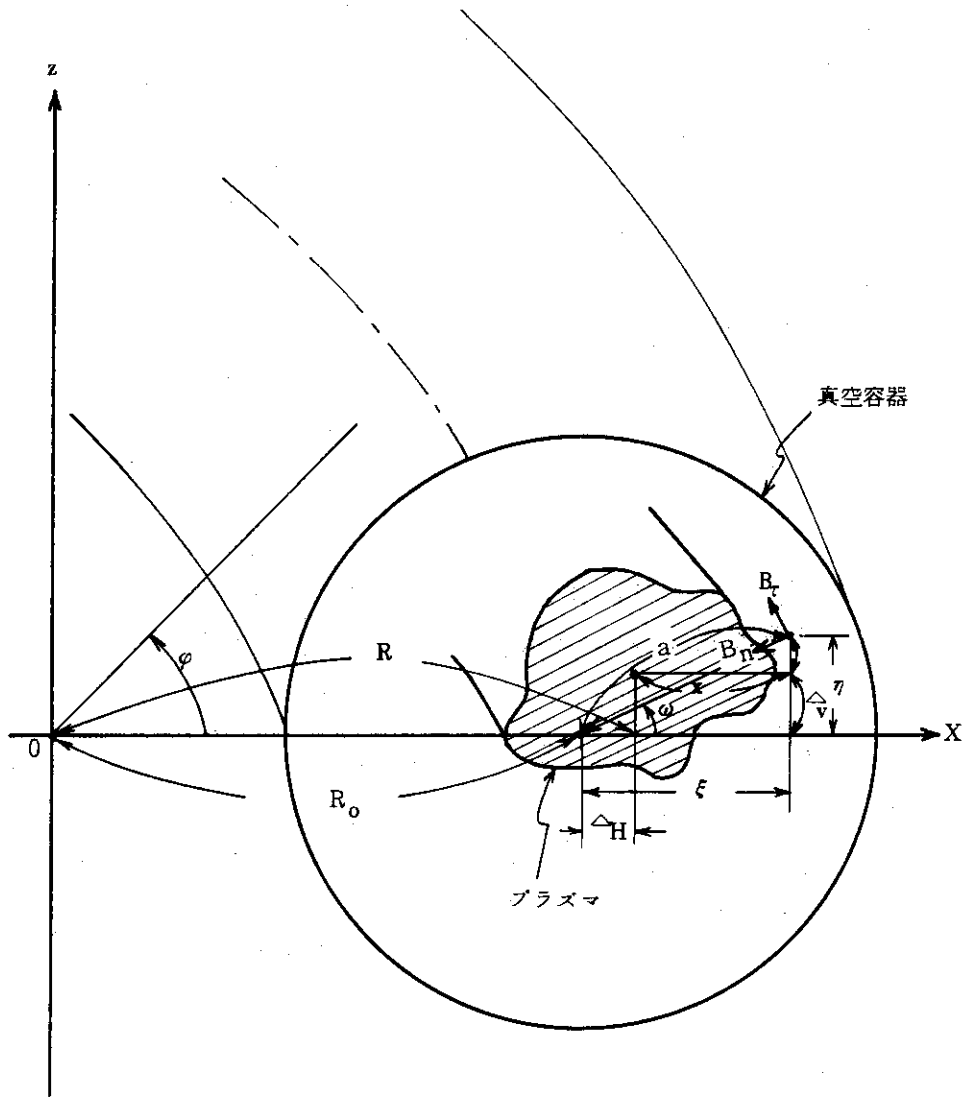


図 2.1 座 標 系

また、 f と g との関係式は (2.2) より、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} - \frac{1}{X} \cdot \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{X} \frac{\partial f}{\partial X} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial X} = -\frac{1}{X} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.7)$$

と、求められる。円筒近似において ($X=R+x, R \rightarrow \infty$) は、 f と g は、2次元ラプラス方程式の解となり、

$$f_m = (x+iz)^m, \quad g_m = -if_m/R \quad (2.8)$$

($m = 0, 1, 2, \dots$)

を得る。また、垂直方向の非対称を含んだトロイダル近似の場合 (2.6), (2.7) より、

$$\left. \begin{aligned} f^{(0)} &= 1, & g^{(0)} &= 0, \\ f^{(1)} &= z, & g^{(1)} &= -\log(X/R), \\ f^{(2)} &= X^2, & g^{(2)} &= 2z, \\ f^{(3)} &= X^2 z, & g^{(3)} &= z^2 - X^2/2, \\ f^{(4)} &= X^4 - 4X^2 z^2, & g^{(4)} &= 4X^2 z - \frac{8}{3}z^3, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

等々を得る。トロイダル・モーメントとして、(2.9)の一次結合をとる。

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= f^{(0)} = 1, & g_0 &= g^{(0)} = 0 \\ f_1 &= \frac{f^{(2)} + 2iRf^{(1)} - R^2f^{(0)}}{2R} & g_1 &= \frac{g^{(2)} + 2iRg^{(1)} - R^2g^{(0)}}{2R} \\ &= (x+iz) + x^2/2R & &= \frac{z}{R} - i\log(X/R) \\ & & &\approx \frac{z-ix}{R} + \frac{i}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 \\ f_2 &= \frac{f^{(3)} - R^2f^{(1)}}{R^2} & g_2 &= \frac{g^{(3)} - R^2g^{(1)}}{R^2} \\ &= \frac{2xz}{R} \left(1 + \frac{x}{2R}\right) & &= \frac{z^2 - x^2}{R^2} - \frac{1}{2} \\ f_3 &= \frac{f^{(4)} - 2R^2f^{(2)} + R^4f^{(0)}}{4R^2} & g_3 &= \frac{g^{(4)} - 2R^2g^{(2)} + R^4g^{(0)}}{4R^2} \\ &= x^2 \left(1 + \frac{x}{R} + \frac{x^2}{4R^2}\right) & &= \frac{2xz}{R} + \frac{x^2 z - \frac{2z^3}{3}}{R^2} \\ & & &- z^2 \left(1 + \frac{x}{R}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

(2.10) は (x/R) の2次の微量までの近似である。円筒近似で求めた (2.8) 式と比較してみると、 f_1, g_1 とともに (2.10) の第1項は、(2.8) 式と一致する。即ち、(2.10) の第2項が、トロイダル効果をあらわしていると考えられる。虚数部は、垂直方向の変位分を表わすと考えられる。ここで、 R の意味について、検討しよう。図 2.1 にある様に、 R は、プラズマ中心の座標である。しかし、プラズマ電流密度の分布が必ずしも、一定とは限らない。即ち、

$$Y \equiv \frac{1}{J} \int_{\varphi} j_{\varphi} f_1 dS_{\varphi} = \frac{1}{\mu_0 J} \oint (f_1 B_r + X g_1 B_n) d\ell = 0 \quad (2.11)$$

を、満足する様に R を決める。プラズマの中心とは、電流分布によっても変化し、幾何学的中心位置が必ずしもプラズマ中心とは限らない事を示している。(2.11)の積分を行うにあたり、固定座標系を導入する。固定座標系の原点は、便宜上、真空容器の中心をとり、 $(R_0, 0)$ とする。 $(R_0, 0)$ と $(R, 0)$ とのずれを (Δ_H, Δ_V) で表わす。 $(R_0, 0)$ から測った座標を (ξ, η)

とする。(図 2.1 参照)

ここで、磁気プローブが、 $(R_0, 0)$ を中心にして、半径 a の円周上に、置かれているものとし、その円周上での磁場成分 B_τ, B_n を空間フーリエ分解した形、

$$\left. \begin{aligned} B_\tau &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \cos n\omega + \delta_n \sin n\omega) \right) \\ B_n &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n \sin n\omega + \kappa_n \cos n\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

で、書く。(ω は図 2.1 参照)

(2.10), (2.12) を (2.11) に代入し、実数部、虚数部よりそれぞれ、 Δ_H, Δ_V を求めると、

$$\Delta_H = \frac{\frac{a}{2} \left\{ (\lambda_1 + \mu_1) + \frac{a}{2R} \left[\left(1 + \frac{\lambda_2}{2} + \mu_2 \right) - (\delta_1 - \kappa_1) \kappa_1 \right] + \frac{a^2}{8R^2} \kappa_1 \kappa_2 \right\}}{1 + \frac{a}{2R} (\lambda_1 + \mu_1)} \quad (2.13)$$

$$\Delta_V = \frac{a}{2} \left\{ \delta_1 - \kappa_1 - \frac{a}{2R} \left[\frac{\kappa_2}{2} - \frac{2\Delta_H}{a} \kappa_1 \right] + \frac{a^2}{2R^2} \left[\frac{3}{4} \kappa_1 + \frac{1}{4} \kappa_3 \right] \right\}$$

を得る。この値は $(a/R)^2$ のオーダーまでの近似で求めた。 $a/R = 0$ の近似では、 Δ_H, Δ_V は、円筒近似より求めたものと一致する。(付録 2 参照) 又、 $\lambda_2 = \mu_2 = \kappa_1 = 0$ 、とすると、(2.13) より、 Δ_H は、

$$\Delta_H/a \sim \frac{\frac{1}{2} (\lambda_1 + \mu_1 + \frac{a}{2R})}{1 + \frac{a}{2R} (\lambda_1 + \mu_1)} \quad (2.14)$$

となり、 $\lambda_1 + \mu_1 = 0$ の時 $\Delta_H \sim a^2/4R$ となる。これは、円筒近似の場合と、異なる点であり、トロイダル効果によって現われる偏位である。(図 2.2 参照)

次に、 Y_2 を求める。

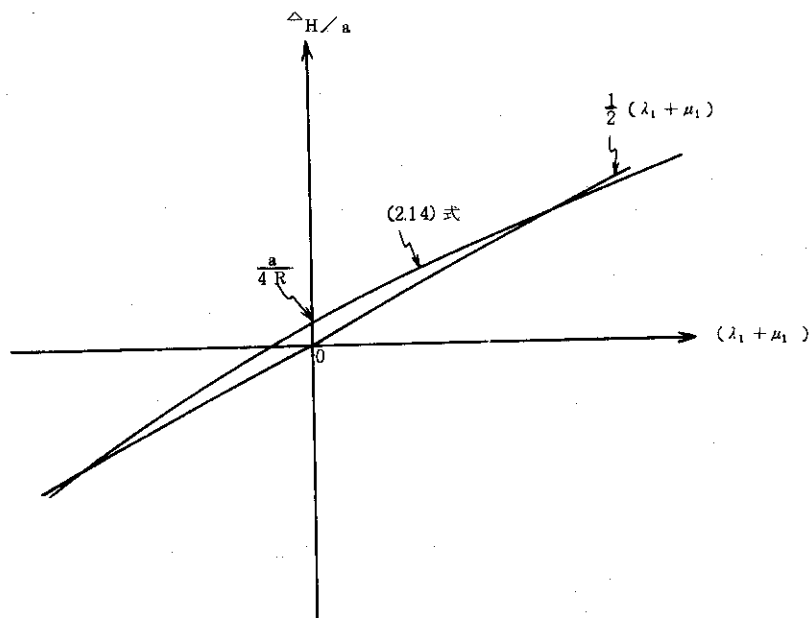


図 2.2 Δ_H/a の (2.14) 式と $(\lambda_1 + \mu_1)/2$ の依存性

$$Y_2 = \frac{1}{J} \int_{\varphi} j_{\varphi} f_2 dS_{\varphi} = \frac{1}{\mu_0 J} \oint (f_2 B_{\tau} + X g_2 B_n) d\ell \quad (2.15)$$

Y_2 は、X 軸、z 軸を 45 度回転した方向に関する楕円度を表わす。(付録 2 参照) Y_1 と同様に計算し、 $(a/R)^2$ の近似で、

$$Y_2 = a \left\{ -\frac{\kappa_1}{4} + \frac{a}{2R} (\delta_2 - \kappa_2) + \frac{a}{R} \left[-\frac{\Delta_V}{a} (\lambda_1 + \mu_1) - \frac{\Delta_H}{a} (\delta_1 - \kappa_1) \right] + \frac{a^2}{4R^2} \left(\frac{\delta_1 + \delta_3}{2} - \kappa_1 - \kappa_3 \right) \right\} \quad (2.16)$$

を得る。更に、 Y_3 を求める。これは、X 軸、z 軸方向に関する楕円度を表わす。(付録 3 参照)

$$Y_3 = a^2 \left\{ \frac{\lambda_2 + \mu_2}{2} - \frac{\Delta_H}{a} (\lambda_1 + \mu_1) + \frac{\Delta_V}{a} (\delta_1 - \kappa_1) + \frac{a}{8R} (\lambda_1 + \mu_1 + 3\lambda_3 + \frac{11}{3}\mu_3) + \frac{\Delta_H^2 - \Delta_V^2}{a^2} + \frac{\Delta_H}{R} \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\lambda_2 - \frac{3}{2}\mu_2 \right) + \frac{\Delta_V}{R} \left(\delta_2 - \frac{5}{4}\kappa_2 \right) + \frac{a^2}{8R^2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\mu_2}{3} + \frac{\lambda_4}{8} + \frac{5}{6}\mu_4 \right) \right\} \quad (2.17)$$

プラズマを円形に保つには、 $Y_2 = Y_3 = 0$ にする様に、制御用コイルの電流をフィードバック・コントロールすればよい。

上記の方法の利点は、外部磁場の影響を無視できる事である。それは、(2.4)、(2.5)の積分について、外部磁場は、 $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ という形でのみしか入ってこないからである。

(付録 1 に、ここで述べた多重極分解法とは別に、フラックス関数をもとにした変位の導出法を記してある。この方法では、垂直方向の非対称性はとり入れておらず、トロイダル効果も水平方向の変位に関して一次までしか考慮していない。)

3. 磁気プローブ測定における誤差の評価⁶⁾

本章の目的は、実際に磁気プローブを用いてプラズマの変位・変形を測定するさいの誤差を推定し、プローブの個数のえらび方、プローブの配置などの考察の材料とすることである。ここで用いる手法は、実験計画法⁷⁾の応用である。

本章では、ポロイダル磁場の成分を

$$B_x(\omega) = \frac{\alpha_{x0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{xn} \cos n\omega + \beta_{xn} \sin n\omega), \quad (3.1)$$

によってあらわす。添字 x は τ または ν により接線方向成分、法線方向成分をあらわす。前章の式 (2.12) におけるフーリエ係数とは、次式の対応がある。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{\tau 0}}{2} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a}, \\ \alpha_{\tau n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \lambda_n, & \beta_{\tau n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \delta_n, \\ \alpha_{\nu n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \mu_n, & \beta_{\nu n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \kappa_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$Y_2 = \frac{1}{J} \int_{\varphi} j_{\varphi} f_2 dS_{\varphi} = \frac{1}{\mu_0 J} \oint (f_2 B_{\tau} + X g_2 B_n) d\ell \quad (2.15)$$

Y_2 は、X 軸、z 軸を 45 度回転した方向に関する楕円度を表わす。(付録 2 参照) Y_1 と同様に計算し、 $(a/R)^2$ の近似で、

$$Y_2 = a \left\{ -\frac{\kappa_1}{4} + \frac{a}{2R} (\delta_2 - \kappa_2) + \frac{a}{R} \left[-\frac{\Delta_V}{a} (\lambda_1 + \mu_1) - \frac{\Delta_H}{a} (\delta_1 - \kappa_1) \right] + \frac{a^2}{4R^2} \left(\frac{\delta_1 + \delta_3}{2} - \kappa_1 - \kappa_3 \right) \right\} \quad (2.16)$$

を得る。更に、 Y_3 を求める。これは、X 軸、z 軸方向に関する楕円度を表わす。(付録 3 参照)

$$Y_3 = a^2 \left\{ \frac{\lambda_2 + \mu_2}{2} - \frac{\Delta_H}{a} (\lambda_1 + \mu_1) + \frac{\Delta_V}{a} (\delta_1 - \kappa_1) + \frac{a}{8R} (\lambda_1 + \mu_1 + 3\lambda_3 + \frac{11}{3}\mu_3) + \frac{\Delta_H^2 - \Delta_V^2}{a^2} + \frac{\Delta_H}{R} \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\lambda_2 - \frac{3}{2}\mu_2 \right) + \frac{\Delta_V}{R} \left(\delta_2 - \frac{5}{4}\kappa_2 \right) + \frac{a^2}{8R^2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\mu_2}{3} + \frac{\lambda_4}{8} + \frac{5}{6}\mu_4 \right) \right\} \quad (2.17)$$

プラズマを円形に保つには、 $Y_2 = Y_3 = 0$ にする様に、制御用コイルの電流をフィードバック・コントロールすればよい。

上記の方法の利点は、外部磁場の影響を無視できる事である。それは、(2.4)、(2.5)の積分について、外部磁場は、 $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ という形でのみしか入ってこないからである。

(付録 1 に、ここで述べた多重極分解法とは別に、フラックス関数をもとにした変位の導出法を記してある。この方法では、垂直方向の非対称性はとり入れておらず、トロイダル効果も水平方向の変位に関して一次までしか考慮していない。)

3. 磁気プローブ測定における誤差の評価⁶⁾

本章の目的は、実際に磁気プローブを用いてプラズマの変位・変形を測定するさいの誤差を推定し、プローブの個数のえらび方、プローブの配置などの考察の材料とすることである。ここで用いる手法は、実験計画法⁷⁾の応用である。

本章では、ポロイダル磁場の成分を

$$B_x(\omega) = \frac{\alpha_{x0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{xn} \cos n\omega + \beta_{xn} \sin n\omega), \quad (3.1)$$

によってあらわす。添字 x は τ または ν により接線方向成分、法線方向成分をあらわす。前章の式 (2.12) におけるフーリエ係数とは、次式の対応がある。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{\tau 0}}{2} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a}, \\ \alpha_{\tau n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \lambda_n, & \beta_{\tau n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \delta_n, \\ \alpha_{\nu n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \mu_n, & \beta_{\nu n} &= \frac{\mu_0 J}{2\pi a} \kappa_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

接線方向，法線方向の両成分に共通する表式においては添字 $x = \tau$ または ν を省略する。

まず， α_n ， β_n の推定にともなう誤差をみちびく。プラズマの位置，形状はフーリエ係数の関数であるから，位置形状の計算にともなう誤差は，フーリエ係数の誤差から導くことができる。

磁気プローブの個数 $N = 2p$ は有限であるから，式 (3.1) の係数のうちの N 個のみを決定することができる。したがって式 (3.1) は次式で代用される。

$$\hat{B}(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p-1} (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) + \frac{a_s}{M} \cos s\omega, \quad (3.3)$$

ここで $s = p$ のときは $M = 2$ ， $s < p$ のときは $M = 1$ である。

以下，ベクトル表記を導入する。すなわち

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{a} &= (a_0/\sqrt{2}, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s/\sqrt{M}), \\ {}^t\boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_0/\sqrt{2}, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_s/\sqrt{M}), \\ {}^t\mathbf{B} &= (B(\omega_1), B(\omega_2), \dots, B(\omega_N)), \\ \hat{\mathbf{B}} &= (\hat{B}(\omega_1), \hat{B}(\omega_2), \dots, \hat{B}(\omega_N)), \end{aligned}$$

なるベクトルを導入する。ただし“ t ”は転置をあらわすものとし，また ω_q は q ばんめのプローブが置かれた角度であるとする。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}, \cos \omega_1, \sin \omega_1, \cos 2\omega_1, \sin 2\omega_1, \dots, \cos s\omega_1/\sqrt{M} \\ 1/\sqrt{2}, \cos \omega_2, \sin \omega_2, \cos 2\omega_2, \sin 2\omega_2, \dots, \cos s\omega_2/\sqrt{M} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{2}, \cos \omega_N, \sin \omega_N, \cos 2\omega_N, \sin 2\omega_N, \dots, \cos s\omega_N/\sqrt{M} \end{pmatrix},$$

を用いれば，式 (3.3) は

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{X}\mathbf{a}, \quad (3.4)$$

と等価である。

\mathbf{a} として二乗誤差

$$S(\mathbf{a}) = {}^t(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}), \quad (3.5)$$

を最小にするものを採用しよう。

$$\begin{aligned} \delta S(\mathbf{a}) &= -{}^t\delta\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}) - {}^t(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})\delta\hat{\mathbf{B}} \\ &= -2{}^t(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})\mathbf{X}\delta\mathbf{a}. \end{aligned}$$

であるから， $\delta S(\mathbf{a}) = 0$ の条件より ${}^t(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})\mathbf{X} = 0$ ，または

$${}^t\mathbf{X}\mathbf{X}\mathbf{a} = {}^t\mathbf{X}\mathbf{B}, \quad (3.6)$$

を得る。上式はいわゆる正規方程式である。 ${}^t\mathbf{X}\mathbf{X}$ が正則であれば，これを解いて

$$\mathbf{a} = ({}^t\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}{}^t\mathbf{X}\mathbf{B}, \quad (3.7)$$

を得る。式 (3.1) を式 (3.7) に代入すると $\boldsymbol{\alpha}$ と \mathbf{a} の関係と， \mathbf{a} の $\boldsymbol{\alpha}$ からの分散 $\text{Var}[\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{a}]$ が導かれる。

$B(\omega)$ の測定値を $B'(\omega)$ とする。すなわち

$$\mathbf{B}' = (B'(\omega_1), B'(\omega_2), \dots, B'(\omega_N)),$$

とする。我々は \mathbf{a} の推定として

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= {}^t(a'_0/\sqrt{2}, a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_s/\sqrt{M}) \\ &= ({}^t\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}{}^t\mathbf{X}\mathbf{B}', \end{aligned} \quad (3.8)$$

を用いざるを得ない。ここで任意の2s次元のベクトル \boldsymbol{l} を導入し、 \boldsymbol{l} と \boldsymbol{a} の内積を c 、 \boldsymbol{l} と $\boldsymbol{\alpha}$ の内積を c' とすると、 c' の c からの分散は

$$\text{Var}\{c'/c\} = \{ {}^t \boldsymbol{l} ({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1} {}^t \boldsymbol{X} (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}') \}^2,$$

であるが、 $\{ B'(\omega_q) - B(\omega_q) \}^2 = \sigma^2$ 、すなわち B' の分散が q によらない場合は

$$\begin{aligned} \text{Var}\{c'/c\} &= ({}^t \boldsymbol{l} ({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1} {}^t \boldsymbol{X}) {}^t ({}^t \boldsymbol{l} ({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1} {}^t \boldsymbol{X}) \sigma^2 \\ &= {}^t \boldsymbol{l} ({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1} {}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X} {}^t ({}^t \boldsymbol{l} ({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1}) \sigma^2 \\ &= {}^t \boldsymbol{l} {}^t ({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{l} \sigma^2 \\ &= {}^t \boldsymbol{l} ({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{l} \sigma^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

である。 \boldsymbol{l} として2s次元ユークリッド空間の座標ベクトル

$${}^t \boldsymbol{l}_0 = (1, 0, 0, \dots),$$

$${}^t \boldsymbol{l}_1 = (0, 1, 0, \dots),$$

$${}^t \boldsymbol{l}_2 = (0, 0, 1, \dots),$$

をとれば、 $\text{Var}\{a'_0/a_0\}$ 、 $\text{Var}\{a'_1/a_1\}$ 、 $\text{Var}\{b'_1/b_1\}$ 、……が得られる。行列 $({}^t \boldsymbol{X} \boldsymbol{X})^{-1}$ の対角要素は \boldsymbol{a}' の母分散、非対角要素は共分散をあらわしているのである。

これまでの過程で我々は二回の推定を行った。 $\boldsymbol{\alpha}$ を \boldsymbol{a} で推定することと、 \boldsymbol{a} を \boldsymbol{a}' で推定することである。前者が系統誤差を導入するのに対し、後者は(どちらかといえば)偶然誤差を導入すると言ってよい。最終的には $\boldsymbol{\alpha}$ を \boldsymbol{a}' で推定するわけであるが、その際の分散は、共分散を無視すれば

$$\text{Var}\{\boldsymbol{a}'/\boldsymbol{\alpha}\} = \text{Var}\{\boldsymbol{a}'/\boldsymbol{a}\} + \text{Var}\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{\alpha}\}, \quad (3.10)$$

によって表わせる。

つぎに、位置計算においてこれらの分散がどのように影響するかを考察しよう。簡単のために、円筒近似の場合、すなわち

$$\begin{aligned} \Delta_H &= \frac{r}{2\alpha_{\tau_0}} (\alpha_{\tau_1} + \beta_{\nu_1}), \\ \Delta_V &= \frac{r}{2\alpha_{\tau_0}} (\beta_{\tau_1} - \alpha_{\nu_1}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

について考察する。ただし r は磁気プローブが置かれる円周の小半径である。トロイダル効果を考慮した場合も以下と類似の議論を行えばよい。式(3.11)において $\boldsymbol{\alpha}$ の推定値として \boldsymbol{a}' を用いれば

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\Delta_H\} &= \left(\frac{\partial \Delta_H}{\partial a'_{\tau_0}} \right)^2 \text{Var}\{a'_{\tau_0}/\alpha_{\tau_0}\} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \Delta_H}{\partial a'_{\tau_1}} \right)^2 \text{Var}\{a'_{\tau_1}/\alpha_{\tau_1}\} + \left(\frac{\partial \Delta_H}{\partial b'_{\nu_1}} \right)^2 \text{Var}\{b'_{\nu_1}/\beta_{\nu_1}\} \\ &= \frac{r^2 (a'_{\tau_1} + b'_{\nu_1})^2}{4a'^4_{\tau_0}} \text{Var}\{a'_{\tau_0}/\alpha_{\tau_0}\} \\ &\quad + \frac{r^2}{4a'^2_{\tau_0}} \{ \text{Var}\{a'_{\tau_1}/\alpha_{\tau_1}\} + \text{Var}\{b'_{\nu_1}/\beta_{\nu_1}\} \}, \end{aligned}$$

を得る。トカマクにおいては $a'_{\tau_0} \gg a'_{\tau_1} \sim b'_{\nu_1}$ であるから、右辺第一項は第二項に較べ無視しうる。したがって

$$\text{Var} \{ A_H \} = \frac{r^2}{4a'_{\tau_0}} \{ \text{Var} [a'_{\tau_1} / \alpha_{\tau_1}] + \text{Var} [b'_{\nu_1} / \beta_{\nu_1}] \}, \quad (3.12)$$

を得る。同様に

$$\text{Var} \{ A_V \} = \frac{r^2}{4a'_{\tau_0}} \{ \text{Var} [b'_{\tau_1} / \beta_{\tau_1}] + \text{Var} [a'_{\nu_1} / \alpha_{\nu_1}] \} \quad (3.13)$$

ここでは磁気プローブが $\omega_q = 2\pi q/N$ ($q = 1, 2, \dots, N$) なる角度に等間隔に配置されている場合を考えよう。このとき、 \mathbf{X} の各列は直交するので、 ${}^t\mathbf{X}\mathbf{X}$ および $({}^t\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}$ はスカラ行列になる。すなわち

$$({}^t\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 2/N & & 0 \\ & 2/N & \\ 0 & & 2/N \end{pmatrix}$$

これを式 (3.8) に代入すれば、次のよく知られた関係が得られる。

$$\begin{aligned} a'_0 &= \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N B'(\omega_q), \\ a'_n &= \frac{2}{N} \sum_{q=1}^N B'(\omega_q) \cos n\omega_q, \\ b'_n &= \frac{2}{N} \sum_{q=1}^N B'(\omega_q) \sin n\omega_q. \end{aligned} \quad (3.14)$$

また、式 (3.9) において、 \mathbf{l} として座標ベクトルをとれば、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \text{Var} [a'_0 / a_0] &= \sigma^2 / N, \\ \text{Var} [a'_n / a_n] &= \text{Var} [b'_n / b_n] = 2\sigma^2 / N. \end{aligned} \quad (3.15)$$

式 (3.1) を (3.7) に代入すれば次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{jN-n} + \alpha_{jN+n}), \\ b_n &= \beta_n - \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_{jN-n} - \beta_{jN+n}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

一般には $\omega = 0, \pi/2, \pi, 2\pi/2$ に置いた 4 個の磁気プローブで変位を求めることが行われているが、式 (3.16) に $N=4$ を代入すると、 $a_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots$, $b_1 = \beta_1 - \beta_3 + \dots$ が得られる。すなわち $n=3$ のモードの変形 (プラズマ断面の三角変形) と変位との区別が、4 個のプローブからはできないということになる。式 (3.16) を分散のかたちで書けば次式になる。

$$\text{Var} [a_n / \alpha_n] = \left[\sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{jN-n} + \alpha_{jN+n}) \right]^2, \quad (3.17)$$

$$\text{Var}(b_n/\beta_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\beta_{jN-n} - \beta_{jN+n}) \right)^2$$

トカマクにおいては、 $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $\beta_{i+1} > \beta_i$ なる関係が成り立つので、 N が十分大であれば（たとえば $N \geq 8$ であれば）、式(3.10)において第2項は第1項に比べ無視できる。すなわち $\text{Var}[\mathbf{a}'/\alpha] \sim \text{Var}[\mathbf{a}'/\mathbf{a}]$ としてよい。したがって N が十分大きければ式(3.12), (3.13)より

$$\text{Var}(\Delta_H) \sim \text{Var}(\Delta_V) \sim \frac{r^2}{2Na_0^2} (\sigma_\tau^2 + \sigma_\nu^2) \tag{3.18}$$

を得る。

ここまでの議論の応用として、プローブの設置誤差と、得られる測定精度との関係をしらべることにする。プローブの設定角度に第3.1図に示すような誤差があったとすると、

$$\begin{aligned} B'_\tau &= B_\tau \pm \Delta\theta B_\nu, \\ B'_\nu &= B_\nu \pm \Delta\varphi B_\tau, \end{aligned} \tag{3.19}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \sigma_\tau &= \Delta\theta B_\nu, \\ \sigma_\nu &= \Delta\varphi B_\tau, \end{aligned} \tag{3.20}$$

である。 $\Delta\theta \sim \Delta\varphi$ と仮定すれば、トカマクにおいては $B_\tau \gg B_\nu$ であるから $\sigma_\nu^2 \gg \sigma_\tau^2$ と考えてよい。式(3.18)において σ_τ^2 を σ_ν^2 に対して無視すれば

$$\text{Var}(\Delta_H) \sim \text{Var}(\Delta_V) \sim \frac{r^2(\Delta\varphi)^2}{2N} \tag{3.21}$$

の程度となる。たとえば $N=8$, $\Delta\varphi=0.1$ とすれば $\sqrt{\text{Var}(\Delta_H)}/r^2 = \sqrt{\text{Var}(\Delta_V)}/r^2 = 2.5\%$ を得る。もし1%の精度が必要であれば $N=50$ が必要である。

いままでの議論では、プローブは円周上に等間隔に配置されているものとした。これは、等間隔配置が最適配置であるという直感にもとづくものであるが、この直感の根拠について、以下数学的に検討することにする。ただし、何をもちいて最適配置とするかは、もちろん評価の方法によるのであって、以下に述べることからひとつの視点を示しているにすぎないことをあらかじめことわっておく。

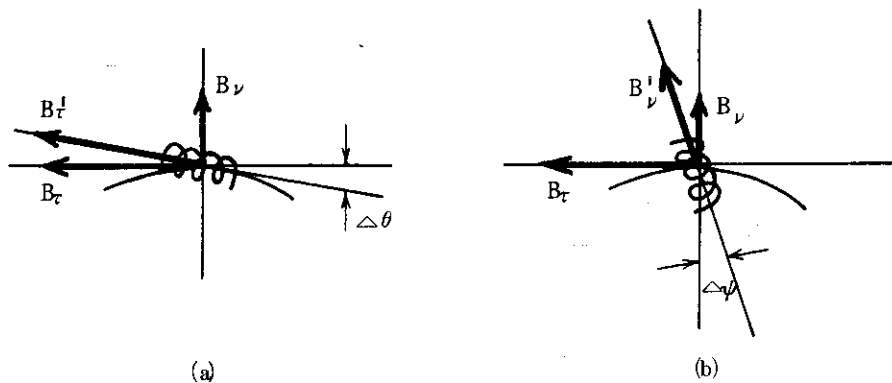


図 3.1 プローブの配置誤差

まず式(3.10)の第1項について検討する。これは行列 $(\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}$ の対角要素に依存することはすでに示した。 $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}$ によって \mathbf{S} を定義すれば、 \mathbf{S} は位数 N の正則な対称行列である。 N 次元空間の楕円面(いわゆる分散楕円面)

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = 1, \quad (3.22)$$

を考え、この体積を最小とするものを最適配置と定義することにする。この体積は

$$V = \pi^{N/2} / [\Gamma(N/2+1) 2^N (\det |\mathbf{S}|)^{1/2}], \quad (3.23)$$

によって与えられる⁷⁾から、 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ を \mathbf{S} の固有ベクトルとすれば、最適配置は $\det |\mathbf{S}| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N$ を最大とするものになる。あるいは、各分散の積を最小とするものである。ここで $\Gamma(x)$ はオイラーのガンマ関数である。まず、幾何平均は算術平均より大きくないことから

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i}{N} \right)^N = \left(\frac{\text{tr } \mathbf{S}}{N} \right)^N. \quad (3.24)$$

\mathbf{S} の要素を s_{ij} とあらわすとすると、

$$s_{22} = \sum_{q=1}^N \cos^2 \omega_q,$$

$$s_{33} = \sum_{q=1}^N \sin^2 \omega_q,$$

$$\therefore s_{22} + s_{33} = \sum_{q=1}^N (\cos^2 \omega_q + \sin^2 \omega_q) = N.$$

他の対角要素についても同様のことが成り立つので、 $\text{tr } \mathbf{S} = N^2/2$ 。したがって $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N$ の最大値は $(N/2)^N$ であって、これが成り立つのは $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = N/2$ のときである。これはプローブが等間隔に配置された場合であり、等間隔配置はこの評価方法では最適配置であると言える。

つぎに式(3.10)の第2項を考えよう。式(3.16)が示すように、等間隔配置の場合は a_n, b_n の決定に $m > N$ なる α_m, β_m はまったく影響を与えない。このことは、別の言い方をすれば、式(3.3)において $s (< p)$ まで係数を決めたととき、 $s+1$ まで決めたとときで、 s までの係数は同じであるということになる。このことは、不等間隔配置の場合には成立しない。式

(3.10)の第2項の大きさは、 α_n, β_n の大きさに依存するわけであるが、トカマクの場合には物理的に $\alpha_i > \alpha_{i+1} \dots, \beta_i > \beta_{i+1} > \dots$ が期待できるので、等間隔配置の場合のほうが不等間隔配置の場合よりも第2項は小さいと言ってよいであろう。

4. おわりに

ここで述べた方法は名大プラズマ研におけるJIPP T-II, そして我が研究所のJT-60におけるプラズマ変位測定に使われる事が予定されている。

有益なる議論, 助言をして下さった名大プラズマ研究所の松浦清剛教授, 宮本健郎教授, 藤原正己氏に感謝致します。最後に, 有益な議論をしていただいた吉川允二室長をはじめとするJT-60 開発室の各氏に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 鈴木康夫, 二宮博正, 亀有昭久; JAERI-M 6050 (1975)
- 2) 小方 厚, 二宮博正, 亀有昭久, 相川裕史, 野田信明, 鈴木康夫; JAERI-M 6323 (1975)
- 3) 鈴木康夫, 小方 厚, 二宮博正, 亀有昭久, 相川裕史, 野田信明; JAERI-M 6531 (1976)
- 4) L.E. Zakharov and V.D. Shafranov; Soviet Phys. Tech. Phys. **18** (1973) 151
- 5) H. Aikawa, A. Ogata, and Y. Suzuki; Jap. J. appl. Phys. **15** (1976) 2031
- 6) A. Ogata, H. Aikawa, and Y. Suzuki; Jap. J. appl. Phys. **16** (1977) 185
- 7) 増山元三郎「実験計画法, 第二版」(岩波書店, 1972)

付 録 1

変位の導出(2) (フラックス関数による方法)

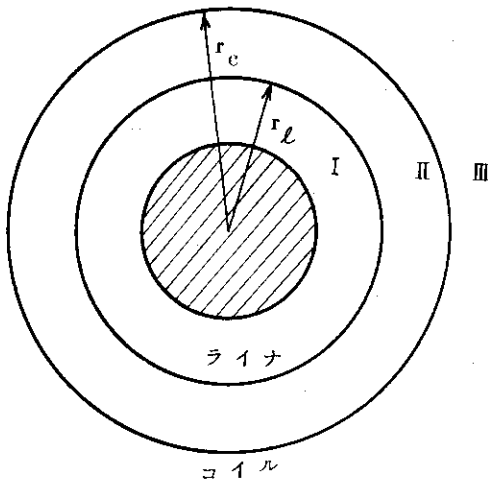
i) 水平位置 (1次のトロイダル効果)

プラズマは水平方向に Δ_H の変位をうけているとし、

$$r = a_p + \Delta_H \cos \omega$$

でプラズマ半径が表現できるものとする。また、領域を左図の如く、I, II, IIIと分け、フラッ

クス関数を



$$\psi = -\frac{4\pi R}{c} I_p \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) + \left[-\frac{2\pi I_p}{c} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) \rho + \frac{C_1}{\rho} + C_2 \rho \right] \cos \omega \dots \dots (2.18)$$

と仮定する。(2.18)に含まれる C_1, C_2 を次の様な境界条件のもとで、求める。(ライナー上に i_k , コイル上に i なる電流が流れているとする。)

境界条件

1) $\rho = a_p$ において, $H_\rho^I = -H_I \frac{\Delta_H}{a_p} \sin \omega$

$$H_\omega^I = H_I \left(1 + \frac{a_p}{R} A \cos \omega + \frac{\Delta_H}{a_p} \cos \omega \right)$$

2) $\rho = r_l$ において, $H_\rho^I = H_\rho^{II}, H_\omega^{II} - H_\omega^I = \frac{4\pi}{c} i_k \cos \omega$

3) $\rho = r_c$ において, $H_\rho^{II} = H_\rho^{III}, H_\omega^{III} - H_\omega^{II} = \frac{4\pi}{c} i \cos \omega$

$$\left(H_I = \frac{2I_p}{ca_p}, A = \frac{8\pi \langle p \rangle}{H_I^2} + 1_{i/2} - 1 \right)$$

係数 C_1, C_2 が各領域で次の様に決まる。

$$C_1^I = -\frac{2\pi I_p}{c} a_p^2 \left(\frac{2R \Delta_H}{a_p^2} + A + \frac{1}{2} \right) \dots \dots (2.19)$$

$$C_2^I = \frac{2\pi I_p}{c} \left(\ln \frac{8R}{a_p} + A - \frac{1}{2} \right) \dots \dots (2.20)$$

$$C_1^{II} = -\frac{2\pi I_p}{c} a_p^2 \left(\frac{2R \Delta_H}{a_p^2} + A + \frac{1}{2} \right) - \frac{4\pi^2 R i_k}{c} r_l^2 \dots \dots (2.21)$$

$$C_2^{II} = \frac{2\pi I_p}{c} \left(\ln \frac{8R}{a_p} + A - \frac{1}{2} \right) + \frac{4\pi^2 R}{c} i_k \dots \dots (2.22)$$

$$C_1^{\text{III}} = -\frac{2\pi I_p}{c} a_p^2 \left(\frac{2R \Delta_{H1}}{a_p^2} + A + \frac{1}{2} \right) - \frac{4\pi^2 R}{c} (i_k r_\ell^2 + i r_c^2) \quad (2.23)$$

$$C_2^{\text{III}} = \frac{2\pi I_p}{c} \left(\ln \frac{8R}{a_p} + A - \frac{1}{2} \right) + \frac{4\pi^2 R}{c} (i_k + i) \quad (2.24)$$

また、 $\rho \rightarrow \infty$ で $\Psi \rightarrow 0$ でなければならない。故に、

$$C_2^{\text{III}} = 0 \quad (2.25)$$

故に (2.24), (2.25) より

$$i_k + i = -\frac{I_p}{2\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a_p} + A - \frac{1}{2} \right) \quad (2.26)$$

また、(2.19), (2.20) より

$$H_\omega^{\text{I}} |_{\rho=a} = \frac{2I_p}{ca} + \left\{ \frac{I_p}{cR} \left[\ln \frac{a}{a_p} + \frac{2R \Delta_H}{a^2} - 1 + \left(A + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{a_p^2}{a^2} \right) \right] \right\} \cos \omega \quad (2.27)$$

$$H_\rho^{\text{I}} |_{\rho=a} = \left[\frac{I_p}{cR} \ln \frac{a}{a_p} + \frac{I_p}{cR} \left(A + \frac{1}{2} \right) - \frac{I_p}{cR} \frac{a_p^2}{a^2} \left(A + \frac{1}{2} \right) - \frac{I_p}{cR} \frac{2R \Delta_H}{a^2} \right] \sin \omega \quad (2.28)$$

を得る。

(2.27) より (ここで、 ρ の向きを内向きに変える。)

$$\lambda_1 = \frac{a}{2R} \left[\ln \frac{a}{a_p} + \frac{2R \Delta_H}{a^2} - 1 + \left(A + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{a_p^2}{a^2} \right) \right] \quad (2.29)$$

(2.28) より

$$\mu_1 = -\frac{a}{2R} \left[\ln \frac{a}{a_p} - \left(A + \frac{1}{2} \right) \frac{a_p^2}{a^2} + A + \frac{1}{2} - \frac{2R \Delta_H}{a^2} \right] \quad (2.30)$$

故に

$$\lambda_1 + \mu_1 = \frac{a}{2R} \left[\frac{4R \Delta_H}{a^2} + 2 \left(A + \frac{1}{2} \right) \frac{a_p^2}{a^2} - 1 \right] \quad (2.31)$$

$$\therefore \Delta_H = \frac{a}{2} \left\{ \lambda_1 + \mu_1 + \frac{a}{2R} - \frac{a_p^2}{aR} \left(A + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (2.32)$$

この結果は、(2.14) と比較すると興味深い。というのは、(2.14) を a/R の1次の項までとると、(2.32) と、 $a_p^2 \left(A + \frac{1}{2} \right) / aR$ の分だけ異なっている。これは、プラズマ中心をどの

様に定義するかという問題に関連している。即ち、プラズマ中心をトロイダル効果も含めて $\int j_{\varphi} f_1 dS = 0$ から定義するか、或いは、プラズマ断面のみを考えて、 $\int j_{\varphi} x dS = 0$ から定義するかである。又、(2.32)は、磁気面の中心をプラズマ中心と定義して、導いたものである。ここで、それぞれの比較を試みる。

まず、多重極モーメント法で

$$\textcircled{1} \int j_{\varphi} f_1 dS = 0 \rightarrow A_H = \frac{a}{2} \left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{a}{2R} \right)$$

$$\textcircled{2} \int j_{\varphi} x dS = 0 \rightarrow A_H = \frac{a}{2} \left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{a}{2R} \right) - \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2R} \int j_{\varphi} x^2 dS$$

を導いた。

次に、フラックス関数法で、

③ 磁気面の中心から

$$A_H = \frac{a}{2} \left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{a}{2R} \right) - \frac{a_p^2}{2R} \left(A + \frac{1}{2} \right)$$

を導いた。

これらの結果の違いは、すべて、プラズマ中心の定義の違いから生じたものである。①においては、従来と異なり、磁気プローブで、 B_r 、 B_n を共に測定するので β_p を測定する必要がなく、 A_H が計れる。②と③とは、 $\frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2R} \int j_{\varphi} x^2 dS$ の項と、 $\frac{a_p^2}{2R} \left(A + \frac{1}{2} \right)$ の項が必ずしも、一致しないが、電流分布と β_p が適当な値の時は、完全に一致する場合もある。 $(\beta_p = \frac{1}{2}$, flat分布の時は完全に一致する。) $\int j_{\varphi} f_1 dS = 0$ という定義は、トロイダル効果が入っているのでプラズマ全体を考えると、トーラスの内側の方が円周が短いので、その分だけ、プラズマの重心は、②の円筒近似の定義よりも外側に移っている。

ii) 垂直位置 (円筒近似)

プラズマ中を一樣電流密度 J_0 で、プラズマ電流が流れているものとする。故に Maxwell 方程

式より

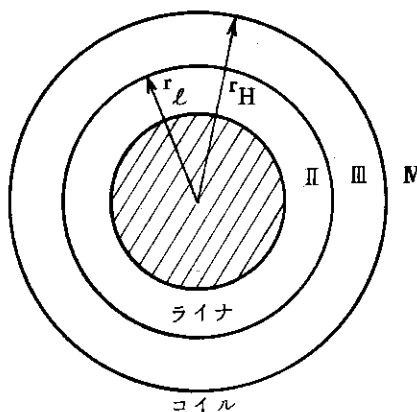
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \omega^2} = -\mu_0 J_0 \quad (\text{プラズマ中}) \quad \text{ii-1)}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \omega^2} = 0 \quad (\text{真空中}) \quad \text{ii-2)}$$

が成立する。ここで A_z はベクトル・ポテンシャルの z 方向成分。また、各領域で次の様に A_z を仮定する。

$$\text{I の領域} \quad A_z^{\text{I}} = -\frac{1}{4} \mu_0 J_0 r^2 + \left\{ A \left(\frac{r_p}{r} \right) + A' \left(\frac{r}{r_p} \right) \right\} \sin \omega \quad \text{ii-3)}$$

$$\text{II の領域} \quad A_z^{\text{II}} = A_0 + A_1 \ln (r/r_p) + \left\{ A_2 (r/r_p) + A_3 (r_p/r) \right\} \sin \omega \quad \text{ii-4)}$$



$$\text{IIIの領域 } A_z^{\text{III}} = A_0 + A_1 \ln(r/r_p) + \{A_4(r/r_\ell) + A_5(r_\ell/r)\} \sin \omega \quad \text{II-5)}$$

$$\text{IVの領域 } A_z^{\text{IV}} = A_0 + A_1 \ln(r/r_p) + \{A_6(r_H/r) + A_7(r/r_H)\} \sin \omega \quad \text{II-6)}$$

プラズマは、 $r = r_p + \Delta_V \sin \omega$ の垂直変位を起していると仮定する。即ち、 $r = r_p$ において

$$B_\omega = B_I \left(1 - \frac{\Delta_V}{r_p} \sin \omega\right) \quad (\text{Iの領域}) \dots\dots \quad \text{II-7)}$$

$$B_\omega = B_I \left(1 + \frac{\Delta_V}{r_p} \sin \omega\right) \quad (\text{IIの領域}) \dots\dots \quad \text{II-8)}$$

$$B_\rho = B_I \frac{\Delta_V}{r_p} \cos \omega \quad (\text{I, IIの領域}) \dots\dots \quad \text{II-9)}$$

$$(B_I = \frac{\mu_0 r_p}{2} J_0)$$

と仮定する。

また、

$r = r_\ell$ において

$$-\frac{\partial A_z^{\text{III}}}{\partial r} + \frac{\partial A_z^{\text{II}}}{\partial r} = \mu_0 i_k \sin \omega \quad \text{II-10)}$$

$$A_z^{\text{III}} = A_z^{\text{II}} \quad \text{II-11)}$$

$r = r_H$ において

$$-\frac{\partial A_z^{\text{IV}}}{\partial r} + \frac{\partial A_z^{\text{III}}}{\partial r} = \mu_0 i \sin \omega \quad \text{II-12)}$$

$$A_z^{\text{IV}} = A_z^{\text{III}} \quad \text{II-13)}$$

の境界条件を仮定する。但し、 i_k , i はそれぞれ、ライナ、コイルに流れる電流である。

すると、II-7) ~ II-13) より

$$A = 0 \quad \text{II-14)}$$

$$A' = \frac{\mu_0 J_0}{2} \Delta_V r_p \quad \text{II-15)}$$

$$A_1 = -\mu_0 J_0 r_p^2 / 2 \quad \text{II-16)}$$

$$A_2 = 0 \quad \text{II-17)}$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 J_0 \Delta_V r_p}{2} \quad \text{II-18)}$$

$$A_4 = -\frac{\mu_0 i_k r_\ell}{2} \quad \text{II-19)}$$

$$A_5 = \frac{r_p}{r_\ell} A_3 + \frac{\mu_0 i r_\ell}{2} \quad \text{II-20)}$$

$$A_6 = A_5 \frac{r_\ell}{r_H} + \frac{\mu_0 i r_H}{2} \quad \text{ii-21)}$$

$$A_7 = A_4 \frac{r_H}{r_\ell} - \frac{\mu_0 i r_H}{2} \quad \text{ii-22)}$$

また、 $r \rightarrow \infty$ で、 $B_{\omega, \rho}^{\text{IV}} \rightarrow 0$ より、 $A_7 = 0$ でなくてはならない。故に ii-22)より、

$$i_k + i = 0 \quad \text{ii-23)}$$

磁気プローブをIIの領域に挿入する。磁気プローブの半径位置を $r = a$ とおく。

$$\begin{aligned} B_{\omega}^{\text{II}} |_{r=a} &= - \frac{\partial A_z^{\text{II}}}{\partial r} |_{r=a} \\ &= \frac{\mu_0 J_0 r_p^2}{2a} + \frac{\mu_0 J_0 \Delta_V r_p^2}{2a^2} \sin \omega \end{aligned} \quad \text{ii-24)}$$

$$B_{\rho}^{\text{II}} |_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{\text{II}}}{\partial \omega} |_{r=a} = \frac{\mu_0 J_0 \Delta_V}{2} \frac{r_p^2}{a^2} \cos \omega \quad \text{ii-25)}$$

故に、 $\sin \omega$ 、 $\cos \omega$ の係数より、

$$\delta_1 = \frac{\Delta_V}{a}$$

$$\kappa_1 = - \frac{\Delta_V}{a}$$

$$\therefore \delta_1 - \kappa_1 = \frac{2 \Delta_V}{a} \quad \therefore \Delta_V = \frac{a}{2} (\delta_1 - \kappa_1) \quad \text{ii-26)}$$

iii) 断面形状変化 (円筒近似)

この場合は ii) 垂直位置の場合と同様にして求める事ができる。簡単に記す。

$$\text{I : } A_z^{\text{I}} = - \frac{1}{4} \mu_0 J_0 r^2 + \{ A (r/r_p)^2 + A' (r_p/r)^2 \} \cos 2\omega$$

$$\text{II : } A_z^{\text{II}} = A_0 + A_1 \ln (r/r_p) + \{ A_2 (r/r_p)^2 + A_3 (r_p/r)^2 \} \cos 2\omega$$

$$\text{III : } A_z^{\text{III}} = A_0 + A_1 \ln (r/r_p) + \{ A_4 (r/r_\ell)^2 + A_5 (r_\ell/r)^2 \} \cos 2\omega$$

$$\text{IV : } A_z^{\text{IV}} = A_0 + A_1 \ln (r/r_p) + \{ A_6 (r_q/r)^2 + A_7 (r/r_q)^2 \} \cos 2\omega$$

プラズマ変形 ; $r = r_p + \Delta_Q \cos 2\omega$

境界条件

$r = r_p$ において

$$B_{\omega} = B_I \left(1 - \frac{\Delta_Q}{r_p} \cos 2\omega \right) \quad \text{(Iの領域)}$$

$$B_{\omega} = B_I \left(1 + \frac{\Delta_Q}{r_p} \cos 2\omega \right) \quad \text{(IIの領域)}$$

$$B_{\rho} = - B_I \frac{\Delta_Q}{r_p} \sin 2\omega \quad \text{(I, IIの領域とも)}$$

$r = r_\ell$ において

$$A_z^{\text{II}} = A_z^{\text{III}}, \quad -\frac{\partial A_z^{\text{III}}}{\partial r} + \frac{\partial A_z^{\text{II}}}{\partial r} = \mu_0 i_k \cos 2\omega$$

$r = r_q$ において

$$A_z^{\text{III}} = A_z^{\text{IV}}, \quad -\frac{\partial A_z^{\text{IV}}}{\partial r} + \frac{\partial A_z^{\text{III}}}{\partial r} = \mu_0 i \cos 2\omega$$

より

$$A = \frac{\mu_0 J_0 r_p}{4}, \quad A' = 0, \quad A_1 = -r_p B_I, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{\mu_0 J_0 r_p \Delta Q}{4}$$

$$A_4 = -\frac{\mu_0 i_k r_\ell}{4}, \quad A_5 = A_3 \left(\frac{r_p}{r_\ell}\right)^2 + \frac{\mu_0 i_k r_\ell}{4}$$

$$A_6 = \frac{\mu_0 i r_q}{4} + A_5 (r_\ell/r_q)^2, \quad A_7 = A_4 (r_q/r_\ell)^2 - \frac{\mu_0 i r_q}{4}$$

また $r \rightarrow \infty$ において, $\frac{\partial A_z^{\text{IV}}}{\partial r} \rightarrow 0$ より $A_7 = 0$ でなければならない。故に

$$i + i_k \frac{r_q}{r_\ell} = 0$$

故に

$$\begin{aligned} B_\omega^{\text{II}}|_{r=a} &= -\frac{\partial A_z^{\text{II}}}{\partial r}|_{r=a} \\ &= \frac{r_p B_I}{a} + \frac{r_p^2 B_I \Delta Q}{a^3} \cos 2\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\rho^{\text{II}}|_{r=a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{\text{II}}}{\partial \omega}|_{r=a} \\ &= -2 \left(\frac{r_p^2}{a^3}\right) A_3 \sin 2\omega \end{aligned}$$

$$\text{故に } \lambda_2 = \frac{r_p^2 B_I \Delta Q / a^3}{r_p B_I / a} = \frac{r_p \Delta Q}{a^2}$$

$$\mu_2 = \frac{2 r_p^2 \mu_0 J_0 r_p \Delta Q / 4 a^3}{r_p B_I / a} = \frac{r_p \Delta Q}{a^2}$$

$$\text{故に } \lambda_2 + \mu_2 = \frac{2 r_p \Delta Q}{a^2} \quad \therefore \Delta Q = \frac{a^2}{2 r_p} (\lambda_2 + \mu_2)$$

付 録 2

円筒近似によるプラズマ変位

(2.8), (2.12) を (2.11) に代入。そして, $a/R \rightarrow 0$ の近似をする。実数部, 虚数部より, それぞれ,

$$\Delta_H = \frac{a}{2} (\lambda_1 + \mu_1)$$

$$\Delta_V = \frac{a}{2} (\delta_1 - \kappa_1)$$

を得る。

付 録 3

四重極モーメント

四重極モーメントが (x, z) の 2次元空間に存在すると, 密度分布が楕円度を持っている事になる。というのは

$$Y_3 = \iint f_3 dS$$

$$f_3 = x^2 - z^2$$

において, j 分布が面積 S 中で一定とすると, S が円であれば $Y_3 = 0$ となり, S が楕円であれば, $Y_3 \neq 0$ となる。

即ち

$$\begin{aligned} Y_3 &= j \iint (x^2 - z^2) dx dz = j \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} (x^2 - z^2) dz \\ &= j \frac{ab\pi}{4} (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

$$[x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1]$$

となる。

また,

$$f_2 = xz \text{ の時}$$

面積 S として図A-1の様な楕円を考えると, 座標系自体を $(x, z) \rightarrow (x', z')$ に移すと,

面積 S は Y_3 の計算と同じになり

$$x \rightarrow \frac{x' - z'}{\sqrt{2}}$$

$$z \rightarrow \frac{x' + z'}{\sqrt{2}}$$

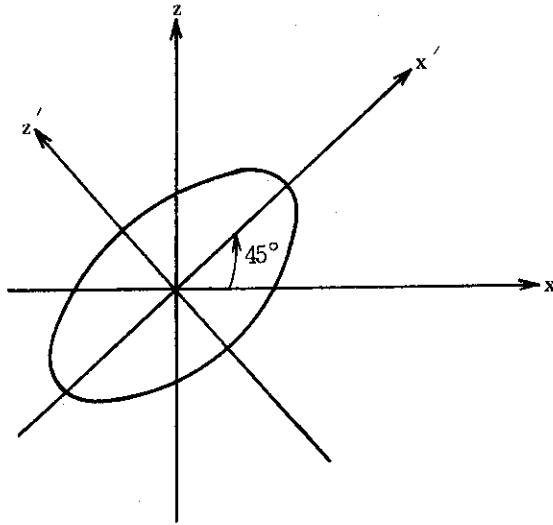
の如く座標変換すれば,

$$f_2 = xz = \frac{1}{2} (x'^2 - z'^2)$$

となり, Y_3 の計算と全く同様にして

$$Y_2 = j \frac{ab}{8} \pi (a^2 - b^2)$$

となる。即ち, Y_2 は, (x, z) に関して, 45° 方向の楕円度を表わすものである。



図A-1

なお, j に分布がある時は, これまで述べてきた様な簡単なモデルでは, あらわせられないが, j 分布に,

$$x^2/a^2 + z^2/b^2 = \alpha^2 \quad (\alpha^2 < 1)$$

の如く, 楕円度をもった等高分布を考慮に入れるだけでは, Y_2, Y_3 とも, $(b^2 - a^2)$ のみの関数になり, $a = b$ の時には, 0 となる。たとえば j 分布として,

$$j = j_0 (1 - \alpha^2) = j_0 (1 - x^2/a^2 - z^2/b^2)$$

を考えると,

$$Y_3 = j_0 \frac{1}{12} ab \pi (a^2 - b^2)$$

となる。