

JAERI-M

7120

有限要素回路法による渦電流解析

(臨界プラズマ試験装置設計報告・XXXVIII)

1977年6月

亀有昭久*・鈴木康夫

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

有限要素回路法による渦電流解析
(臨界プラズマ試験装置設計報告・XXXVIII)

日本原子力研究所東海研究所大型トカマク開発部
亀有昭久*・鈴木康夫

(1977年5月23日受理)

大型トカマク装置では、真空容器や架台等に流れる渦電流が問題となるため、この渦電流の解析をより一般的に取扱うことができるようにした。

薄板で近似できる導体曲面上の過渡的な渦電流を一般的に解く方法を述べた。導体曲面を有限要素法的に要素分割し、各メッシュ点における電流ポテンシャルの間の電磁的結合を、エネルギー積分によって求め、回路方程式を立てる。次に、固有値展開法により、渦電流を固有モードに分解し、それらの合成により、全体の渦電流を求める。

この方法は、任意の形状に対する適用が容易であり、特に、真空容器等のトーラス形状に適用した時、アスペクト比や、抵抗の不均一性によって制限を受けない。

真空容器や架台上の渦電流を、プラズマ電流励起時、プラズマ電流消滅時、プラズマのスパイク時に対して計算を行った。また、渦電流によって生ずる誤差磁場の評価を行った。

* 外来研究員，三菱原子力工業大宮研究所

Eddy Current Analysis by the Finite Element Circuit Method

Akihisa KAMEARI* and Yasuo SUZUKI

Division of Large Tokamak Development, Tokai, JAERI

(Received May 23, 1977)

Eddy currents induced in the vacuum vessel and supports are important in design study of large-scale tokamak devices. A new method of analyzing the eddy current in thin conductors, 'Finite Element Circuit Method', has been developed, which is applicable to such of any shape.

The thin conductor is divided into finite elements and the current potential on each element is defined. Electromagnetic coupling constants between current potentials at respective nodes are calculated by energy integral. The circuit equations governing time variation of the eddy current are formalized by means of the constants. The circuit equations are calculated by eigen value analysis.

The method is easily applicable to conductors of any shape, especially the vacuum vessel torus, with no limitation by the aspect ratio and the uniform resistance.

Eddy currents in the vacuum vessel and upper and lower supports are calculated in startup and shutdown phases and during the spike phenomenon of discharge. The magnetic fields by the eddy current are estimated in the domain occupied by the plasma.

* Mitsubishi Atomic Power Industries Inc., Omiya

目 次

1. はじめに	1
2. 定式化	2
2.1 一般的な曲面上の電流	2
2.2 三角形要素による方法	5
2.3 長方形要素による方法	9
2.4 境界条件と対称条件と周期性	13
2.5 長方形板の場合	15
2.6 軸対称曲面上の導体の場合	18
2.7 渦電流の作る磁場	21
2.8 固有モードとその外部磁場との結合	23
3. 検 討	26
3.1 正方形導体と扇形に変形した導体	26
3.2 抵抗性極限と誘導性極限	27
4. 上下架台上の渦電流	32
5. 真空容器上の渦電流	48
5.1 プラズマ励起時	49
5.2 プラズマ消滅時	51
5.3 スパイク時	51
6. まとめ	71
参考文献	72
Appendix I	73
Appendix II	75

1. はじめに

現在、日本原子力研究所において臨界プラズマ試験装置(JT-60)の設計が進められている。また、米国、ヨーロッパ連合、ソ連においても大型トカマク装置による核融合実験が予定されている。

このような大型の装置においては、真空容器、架台等に流れる渦電流は、構造強度上、およびプラズマ位置形状制御上無視できない大きさとなる。特に、プラズマ励起時における、真空容器や、トロイダルコイルを支える上下架台に流れる渦電流による誤差磁場が問題となった。また、真空容器にポロイダル方向に流れる、いわゆる鞍型電流は、トロイダル磁場により真空容器に大きな回転力を加え、その解析が重要となった。

本論文は、薄板で近似できる導体板に流れる渦電流を従来報告した方法を発展させ、より一般的に取扱うことができるよう新しい手法について述べたものである。文献1では円筒上の渦電流を考え、文献2では、それにトロイダル効果を導入した。また文献2では、エネルギー積分により、一般的に電流の間の結合を求める方法を述べた。本論文では、文献2の定式化を更に一般化し、

- (1) 有限要素法的に導体を要素分割し、任意の形状に対して計算できる様に定式化した。
- (2) 外部から加わる磁場も任意に与えることができる。
- (3) トーラス形状に適用し、任意のポロイダル断面に対して、任意の磁場が加った時の渦電流を計算することができる。この場合、アスペクト比(大半径/小半径)に束縛されない。
- (4) 導体板には任意の抵抗分布を与えることができ、またカットや穴を入れることができる。等の取扱いができるようにした。

本論文では、文献2に述べた、エネルギー積分によって電流間の結合を求め、固有値展開法を用いて、渦電流を求める方法をとった。その定式化については文献2を参照されたい。ここでは、有限要素法的に分割されたメッシュ上の電流間の結合を具体的に定式化し、個々の問題に直接適用できる形にした。

次章では、一般的な導体板に対し定式化し、平板や、軸対称形状導体板に対して適用した。3章でこの方法によって作ったコードを用いて、その適用性を検討した。4章では上下架台板、5章では真空容器の渦電流を問題となる場合に対して計算を行った。6章でまとめを行なう。

トーラス形状について計算を行う計算コードを開発したが、それについては別途報告する(文献3)。

2. 定式化

2.1節において、曲面上の電流を函数展開により、一般的に解く方法を述べ、2.2節で三角要素に、2.3節で長方形要素に曲面をメッシュ分割した場合の応用例を述べる。2.4節では、境界条件や対称、周期条件の導入の仕方を述べる。2.5節では長方形板、2.6節では軸対称性をもつ曲面に対する応用の仕方を述べる。2.7節では渦電流のつくる磁場について述べ、2.8節では、固有モードの外部磁場との結合について述べる。

2.1 一般的な曲面上の電流

文献2において、曲面上の電流や、コイル内の電流を適当な変数列で一次結合の形で表わし、変数間の電磁的結合を求め、回路方程式を解く方法を示した。ここでは、より具体的に曲面上の電流の展開について述べ、結合定数を、以後の有限要素法的な展開に便利な形に表現する。

まず、対象とする導体曲面が有限であり、二次元直交座標 (u, v) で曲面上の任意の点が一意的に表わされるとする(図1)。三次元直交座標 (x, y, z) に対して

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \quad (2.1-1)$$

の関係を持つとする。曲面上の線素辺 ds は

$$ds^2 = f^2 du^2 + g^2 dv^2 \quad (2.1-2)$$

と表わされる。ここで、

$$f^2(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$g^2(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \quad (2.1-3)$$

である。 u, v の直交性により、

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \quad (2.1-4)$$

が成り立つ。次に、 u, v 両方向への単位ベクトルを e_u, e_v とすると、それぞれ、

$$e_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{f \partial u} \\ \frac{\partial y}{f \partial u} \\ \frac{\partial z}{f \partial u} \end{pmatrix}, \quad e_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{g \partial v} \\ \frac{\partial y}{g \partial v} \\ \frac{\partial z}{g \partial v} \end{pmatrix} \quad (2.1-5)$$

の三次元成分を持ち、同じ位置の e_u, e_v に対して、

$$e_u(u, v) \cdot e_u(u, v) = e_v(u, v) \cdot e_v(u, v) = 1$$

$$e_u(u, v) \cdot e_v(u, v) = 0 \quad (2.1-6)$$

が成立する。

曲面上の電流密度は面の法線方向成分を持たず、

$$j(u, v) = j^u(u, v) e_u + j^v(u, v) e_v \quad (2.1-7)$$

と表わすことができる。電流の涌出しはなく、

$$\text{div } j = \frac{1}{f \cdot g} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (g j_u) + \frac{\partial}{\partial v} (f j_v) \right\} = 0 \quad (2.1-8)$$

より、

$$j^u = \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial v}, \quad j^v = -\frac{1}{f} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (2.1-9)$$

と表わすことができる。ここで $V(u, v)$ は曲面上で定義されるスカラー量で、電流ポテンシャルと呼ぶことにする。 V = 一定の線が電流の流れる方向となり、その勾配が電流密度を表わす。

次に電流ポテンシャル V を適当な函数系により、

$$V(u, v) = \sum_{n=1}^N a_n(u, v) V_n \quad (2.1-10)$$

の様に一次結合の形に展開できるとする。 a_n ($n=1, \dots, N$) は曲面の全領域で定義された、互いに独立な函数列である。一般に函数の個数 N は無限大であるが、数値計算においては有限個を取らざるを得ない。考える問題ごとにとるべき N の考察を必要とする。(2.1-10) 式を (2.1-9) 式に代入することにより、

$$j^u = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{g} \frac{\partial a_n}{\partial v} V_n \right), \quad j^v = \sum_{n=1}^N \left(-\frac{1}{f} \frac{\partial a_n}{\partial u} V_n \right) \quad (2.1-11)$$

となる。

曲面上における電流による、全磁気エネルギーは、

$$U = \frac{\mu_0}{8\pi} \iint \frac{j_1 \cdot j_2}{r_{12}} ds_1 ds_2 \quad (2.1-12)$$

によって計算できる。ここで μ_0 は真空の透磁率であり、 $j_1 = j(u_1, v_1)$, $j_2 = j(u_2, v_2)$ である。また r_{12} は (u_1, v_1) から、 (u_2, v_2) までの距離で、

$$r_{12}(u_1, v_1, u_2, v_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.1-13)$$

である。以後 1, 2 の添字はそれぞれ (u_1, v_1) , (u_2, v_2) における値を示す。 $ds_1 = f_1 g_1 du_1 dv_1$, $ds_2 = f_2 g_2 du_2 dv_2$ で、積分は (u_1, v_1) , (u_2, v_2) をそれぞれ全曲面上に対して行い、四重積分となる。(2.1-7) 式を (2.1-12) 式に代入し、(2.1-11) 式を用いて、

$$U = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N V_n V_{n'} \iiint \frac{1}{r_{12}} \left\{ f_1 f_2 \frac{\partial a_{n1}}{\partial v_1} \frac{\partial a_{n'2}}{\partial v_2} e_{u1} e_{v2} \right. \\ \left. - f_1 g_2 \frac{\partial a_{n1}}{\partial v_1} \frac{\partial a_{n'2}}{\partial u_2} e_{u1} e_{v2} \right. \\ \left. - g_1 f_2 \frac{\partial a_{n1}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{n'2}}{\partial v_2} e_{u1} e_{v2} \right.$$

$$+g_1 \cdot g_2 \left\{ \frac{\partial a_{n1}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{n2}}{\partial u_2} e_{v1} e_{v2} \right\} du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (2.1-14)$$

となる。

次に単位時間当りの全ジュール損失は、

$$W = \int \{ \eta^u (j^u)^2 + 2 \eta^{uv} j^u j^v + \eta^v (j^v)^2 \} ds \quad (2.1-15)$$

である。 $\eta^u(u, v)$, $\eta^{uv}(u, v)$, $\eta^v(u, v)$ は曲面の面電気抵抗率を表わし、もし面抵抗が等方であれば、 $\eta^u = \eta^v = \eta$, $\eta^{uv} = 0$ となる。行列 $\begin{pmatrix} \eta^u & \eta^{uv} \\ \eta^{uv} & \eta^v \end{pmatrix}$ は正値対称行列である。

$ds = fg du dv$ で (u, v) に対し全曲面上で積分を行う。(2.1-11) 式を代入すると、

$$W = \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N V_n V_{n'} \iint (\eta^u \frac{f}{g} \frac{\partial a_n}{\partial v} \frac{\partial a_{n'}}{\partial v} - 2 \eta^{uv} \frac{\partial a_n}{\partial v} \frac{\partial a_{n'}}{\partial u} + \eta^v \frac{g}{f} \frac{\partial a_n}{\partial u} \frac{\partial a_{n'}}{\partial u}) du dv \quad (2.1-16)$$

となる。

また、外部から磁場が加わり、それがベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(u, v)$ で表わさせると、曲面上の電流との相互磁気エネルギーは、

$$U_M = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} ds \quad (2.1-17)$$

である。(2.1-11) 式を代入すると、

$$U_M = \sum_{n=1}^N V_n \iint (f \frac{\partial a_n}{\partial v} A^u - g \frac{\partial a_n}{\partial u} A^v) du dv \quad (2.1-18)$$

となる。

文献2で述べた様に、

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N M_{nn'} V_n V_{n'} \quad (2.1-19)$$

$$W = \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N R_{nn'} V_n V_{n'} \quad (2.1-20)$$

$$U_M = \sum_{n=1}^N e_n V_n \quad (2.1-21)$$

と置くことにより、電磁的な結合定数を定義する。ここで行列 $M_{nn'}$ は V_n と $V_{n'}$ の間のインダクタンス、 $R_{nn'}$ は抵抗、 e_n は V_n に加わる外部起電力と解することができる。(2.1-19, 20, 21) を (2.1-14, 16, 18) に対応させることにより、

$$M_{n,n'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{r_{12}} \left\{ f_1 f_2 \frac{\partial a_{n1}}{\partial v_1} \frac{\partial a_{n'2}}{\partial v_2} e_{u1} e_{u2} - f_1 g_2 \frac{\partial a_{n1}}{\partial v_1} \frac{\partial a_{n'2}}{\partial u_2} e_{u1} e_{v2} \right. \\ \left. - g_1 f_2 \frac{\partial a_{n1}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{n'2}}{\partial v_2} e_{v1} e_{u2} + g_1 g_2 \frac{\partial a_{n1}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{n'2}}{\partial u_2} e_{v1} e_{v2} \right\} du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (2.1-22)$$

$$R_{n,n'} = \iint (\eta^u \frac{f}{g} \frac{\partial a_n}{\partial v} \frac{\partial a_{n'}}{\partial v} - 2\eta^{uv} \frac{\partial a_n}{\partial v} \frac{\partial a_{n'}}{\partial u} + \eta^v \frac{g}{f} \frac{\partial a_n}{\partial u} \frac{\partial a_{n'}}{\partial u}) dudv \quad (2.1-23)$$

$$e_n = \iint (f \frac{\partial a_n}{\partial v} A^u - g \frac{\partial a_n}{\partial u} A^v) dudv \quad (2.1-24)$$

となる。一般に $M_{n,n'}$, $R_{n,n'}$ は時間的に変化せず, e_n は時間の函数となる。

文献2においては, 対象が周期性を持つ円筒であったので, (2.1-10) 式の展開を三角函数によって行い, (2.1-22, 23, 24) 式を解析的に求めることができた。しかし一般に, 周期性のない場合や, トーラス状等の複雑な形状になっている場合には, 簡単な函数系で展開することができない。本論文では有限要素法的に曲面を分割し, 接点における値を変数として, (2.1-22, 23, 24) 式を数値積分によって求め, 一般の形状における渦電流問題を定式化する。

一旦 (2.1-22, 23, 24) 式の行列要素が求まれば, 文献2で述べた様に, 回路方程式を立て, 固有ベクトルによる展開により, 問題を解くことができる。

2.2 三角形要素による方法

曲面上の (u, v) 座標に対して, 全曲面を三角形要素に分割する (図2)。 (u_n, v_n) に頂点を有する三角形が I_n 個あるとし, 反時計回りに i 番目の三角形を $A_{n,i}$ で表わす。その三角形の他の二頂点の座標を反時計回りに $(u_{n,i,1}, v_{n,i,1})$, $(u_{n,i,2}, v_{n,i,2})$ とする。

$A_{n,i}$ 内の V の値は頂点の値で u, v に対し線形に表わされるとして,

$$V = \alpha_{n,i} + \beta_{n,i} u + \gamma_{n,i} v \quad (2.2-1)$$

とする。ここで,

$$\alpha_{n,i} = \frac{\begin{vmatrix} V_n & u_n & v_n \\ V_{n,i,1} & u_{n,i,1} & v_{n,i,1} \\ V_{n,i,2} & u_{n,i,2} & v_{n,i,2} \end{vmatrix}}{2\delta_{n,i}}$$

$$\beta_{n,i} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & V_n & v_n \\ 1 & V_{n,i,1} & v_{n,i,1} \\ 1 & V_{n,i,2} & v_{n,i,2} \end{vmatrix}}{2\delta_{n,i}}$$

$$\gamma_{n,i} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_n & V_n \\ 1 & u_{n,i,1} & V_{n,i,1} \\ 1 & u_{n,i,2} & V_{n,i,2} \end{vmatrix}}{2\delta_{n,i}}$$

$$2\delta_{n,i} = \begin{vmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 1 & u_{n,i,1} & v_{n,i,1} \\ 1 & u_{n,i,2} & v_{n,i,2} \end{vmatrix} \quad (2.2-2)$$

である。 $\delta_{n,i}$ は $A_{n,i}$ の面積を表わす。

(2.2-1)式において V_n の係数をとることにより、 $A_{n,i}$ において(2.1-10)式における a_n は、

$$a_n = a_{n,i}(u,v) = \lambda_{n,i} + \mu_{n,i}u + \nu_{n,i}v \quad (2.2-3)$$

で、ここで

$$\begin{aligned} \lambda_{n,i} &= \frac{1}{2\delta_{n,i}} (u_{n,i,1}v_{n,i,2} - v_{n,i,1}u_{n,i,2}) \\ \mu_{n,i} &= \frac{1}{2\delta_{n,i}} (v_{n,i,1} - v_{n,i,2}) \\ \nu_{n,i} &= \frac{1}{2\delta_{n,i}} (u_{n,i,2} - u_{n,i,1}) \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

である。 a_n は (u_n, v_n) に頂点を有する三角形 $A_{n,i}$ ($i=1, \dots, I_n$) 内で(2.2-3)式の函数形となり、他の領域では0となる。 $A_{n,i}$ において、

$$\frac{\partial a_n}{\partial u} = \mu_{n,i}, \quad \frac{\partial a_n}{\partial v} = \nu_{n,i} \quad (2.2-5)$$

となる。(2.1-22)式に代入することにより、

$$\begin{aligned} M_{n,\sigma'} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{i'=1}^{I_n} (\nu_{n,i} \nu_{n',i'} A_{n,i,\sigma',i'}^1 - \nu_{n,i} \mu_{n',i'} A_{n,i,\sigma',i'}^2 \\ &\quad - \mu_{n,i} \nu_{n',i'} A_{n,i,\sigma',i'}^3 + \mu_{n,i} \mu_{n',i'} A_{n,i,\sigma',i'}^4) \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} A_{n,i,\sigma',i'}^1 &= \int_{A_{n,i}} \int_{A_{n',i'}} \frac{f_1 f_2}{r_{12}} \mathbf{e}_{u1} \mathbf{e}_{u2} du_1 dv_1 du_2 dv_2 \\ A_{n,i,\sigma',i'}^2 &= \int_{A_{n,i}} \int_{A_{n',i'}} \frac{f_1 g_2}{r_{12}} \mathbf{e}_{u1} \mathbf{e}_{v2} du_1 dv_1 du_2 dv_2 \\ A_{n,i,\sigma',i'}^3 &= \int_{A_{n,i}} \int_{A_{n',i'}} \frac{g_1 f_2}{r_{12}} \mathbf{e}_{v1} \mathbf{e}_{u2} du_1 dv_1 du_2 dv_2 \\ A_{n,i,\sigma',i'}^4 &= \int_{A_{n,i}} \int_{A_{n',i'}} \frac{g_1 g_2}{r_{12}} \mathbf{e}_{v1} \mathbf{e}_{v2} du_1 dv_1 du_2 dv_2 \end{aligned} \quad (2.2-7)$$

である。積分は (u_1, v_1) に対し $A_{n,i}$ 内、 (u_2, v_2) に対し $A_{n',i'}$ 内において行う。

次に(2.1-23)式に代入することにより、

$$R_{n,\sigma'} = \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{i'=1}^{I_n} (\nu_{n,i} \nu_{n',i'} B_{n,i}^1 - 2\nu_{n,i} \mu_{n',i'} B_{n,i}^2 + \mu_{n,i} \mu_{n',i'} B_{n,i}^3) \quad (2.2-8)$$

$(A_{n,i} = A_{n',i'})$

となる。ここで和は (u_n, v_n) 、 $(u_{n'}, v_{n'})$ の両方に頂点を持つ三角形に対してのみ行う。また、

$$B_{n,i}^1 = \int_{\Delta_{n,i}} \eta^u \frac{f}{g} \, dudv$$

$$B_{n,i}^2 = \int_{\Delta_{n,i}} \eta^{uv} \, dudv$$

$$B_{n,i}^3 = \int_{\Delta_{n,i}} \eta^v \frac{f}{g} \, dudv \tag{2.2-9}$$

である。

同様に (2.1-24) 式に代入することにより、

$$e_n = \sum_{i=1}^{I_n} (\nu_{n,i} C_{n,i}^1 - \mu_{n,i} C_{n,i}^2) \tag{2.2-10}$$

となり、ここで

$$C_{n,i}^1 = \int_{\Delta_{n,i}} f A^u \, dudv$$

$$C_{n,i}^2 = \int_{\Delta_{n,i}} g A^v \, dudv \tag{2.2-11}$$

となる。

(2.2-7) (2.2-9) (2.2-11) 式を単純な数値積分で計算することは可能であるが、特に (2.2-7) 式は四重積分であり非常に計算回数が多くなる。そこで、これらの式をできるだけ簡単な形にしておく必要がある。もし分割が曲面の大きさや曲率に比べて十分小さいとすれば、 f , g , e_u , e_v の変化は三角形要素の中では小さく、積分の外に出すことができる。 $\Delta_{n,i}$ 内での平均的な量を $\bar{f}_{n,i}$, $\bar{g}_{n,i}$, $\bar{e}_{u,n,i}$, $\bar{e}_{v,n,i}$ で表わす。三頂点の値の平均をとるか、三角形の重心の値をとれば十分と思われる。すると (2.2-7) 式は、

$$\begin{aligned} A_{n,i,\alpha',i'}^1 &= \bar{f}_{n,i} \bar{f}_{n,i'} \bar{e}_{u,n,i} \bar{e}_{u,n,i'} S_{n,i,\alpha',i'} \\ A_{n,i,\alpha',i'}^2 &= \bar{f}_{n,i} \bar{g}_{n,i'} \bar{e}_{v,n,i} \bar{e}_{v,n,i'} S_{n,i,\alpha',i'} \\ A_{n,i,\alpha',i'}^3 &= \bar{g}_{n,i} \bar{f}_{n,i'} \bar{e}_{u,n,i} \bar{e}_{u,n,i'} S_{n,i,\alpha',i'} \\ A_{n,i,\alpha',i'}^4 &= \bar{g}_{n,i} \bar{g}_{n,i'} \bar{e}_{v,n,i} \bar{e}_{v,n,i'} S_{n,i,\alpha',i'} \end{aligned} \tag{2.2-12}$$

と変形でき、ここで

$$S_{n,i,\alpha',i'} = \int_{\Delta_{n,i}} \int_{\Delta_{n,i'}} \frac{1}{r_{12}} \, du_1 \, dv_1 \, du_2 \, dv_2 \tag{2.2-13}$$

である。

$S_{n,i,\alpha',i'}$ は $\Delta_{n,i}$ と $\Delta_{n,i'}$ が一致しない時には数値積分を行うことができる。 $\Delta_{n,i}$ と $\Delta_{n,i'}$ が十分離れている時には、 $r_{12} = \bar{r}_{n,i,\alpha',i'}$ (重心間の距離) として

$$S_{n,i,\alpha',i'} = \frac{1}{\bar{r}_{n,i,\alpha',i'}} \int_{\Delta_{n,i}} \int_{\Delta_{n,i'}} \, du_1 \, dv_1 \, du_2 \, dv_2 = \frac{1}{\bar{r}_{n,i,\alpha',i'}} \delta_{n,i} \delta_{n,i'} \tag{2.2-14}$$

と変形することができる。

$\Delta_{n,i}$ と $\Delta_{n,i'}$ が一致する時には $r_{12} = 0$ となる特異性を含み数値積分が困難となる。三角形要素が十分小さい時、

$$r_{12} = \sqrt{\bar{f}_{n,i}^2 (u_2 - u_1)^2 + \bar{g}_{n,i}^2 (v_2 - v_1)^2}$$

とおくことができ、

$$S_{n,i,n',i'} = \int_{A_{n,i}} \int_{A_{n',i'}} \frac{du_1 dv_1 du_2 dv_2}{\sqrt{f_{n,i}^2 (u_2 - u_1)^2 + g_{n,i}^2 (v_2 - v_1)^2}} \quad (2.2-15)$$

となる。また $\bar{e}_{u,n,i}, \bar{e}_{v,n,i} = 0$ と考えられ、(2.2-12) 式の第2,3式は0となる。 $x_1 = \bar{f}_{n,i} u_1, x_2 = \bar{f}_{n,i} u_2, y_1 = \bar{g}_{n,i} v_1, y_2 = \bar{g}_{n,i} v_2$ と変数変換することにより

$$S_{n,i,n',i'} = \frac{1}{\bar{f}_{n,i}^2 \bar{g}_{n,i}^2} \int_{A_{n,i}} \int_{A_{n',i'}} \frac{dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (2.2-16)$$

となる。ここで積分領域 $A_{n',i'}$ は $(\bar{f}_{n,i} u_n, \bar{g}_{n,i} v_n), (\bar{f}_{n,i} u_{n,i,1}, \bar{g}_{n,i} v_{n,i,1}), (\bar{f}_{n,i} u_{n,i,2}, \bar{g}_{n,i} v_{n,i,2})$ を頂点とする三角形である。右辺の積分は Appendix I の (AI-7) 式に示す。

次に (2.2-9) 式は f, g を積分の外に出して、

$$\begin{aligned} B_{n,i}^1 &= \frac{\bar{f}_{n,i}}{\bar{g}_{n,i}} \int_{A_{n,i}} \eta^u dudv \\ B_{n,i}^2 &= \int_{A_{n,i}} \eta^{uv} dudv \\ B_{n,i}^3 &= \frac{\bar{g}_{n,i}}{\bar{f}_{n,i}} \int_{A_{n,i}} \eta^v dudv \end{aligned} \quad (2.2-17)$$

となる。もし $\eta^u, \eta^{uv}, \eta^v$ が要素内で変化が十分小さい時には、 $\eta^u, \eta^{uv}, \eta^v$ も積分の外に出せて、

$$\begin{aligned} B_{n,i}^1 &= \frac{\bar{f}_{n,i}}{\bar{g}_{n,i}} \bar{\eta}_{n,i}^u \delta_{n,i} \\ B_{n,i}^2 &= \bar{\eta}_{n,i}^{uv} \delta_{n,i} \\ B_{n,i}^3 &= \frac{\bar{g}_{n,i}}{\bar{f}_{n,i}} \bar{\eta}_{n,i}^v \delta_{n,i} \end{aligned} \quad (2.2-18)$$

となる。

あるいは、要素内で変化するが、 u, v に対して線形に、(2.2-1) と同様に表わされるとすると、

$$\begin{aligned} B_{n,i}^1 &= \frac{\bar{f}_{n,i}}{\bar{g}_{n,i}} \cdot \frac{\eta_n^u + \eta_{n,i,1}^u + \eta_{n,i,2}^u}{3} \delta_{n,i} \\ B_{n,i}^2 &= \frac{\eta_n^{uv} + \eta_{n,i,1}^{uv} + \eta_{n,i,2}^{uv}}{3} \delta_{n,i} \\ B_{n,i}^3 &= \frac{\bar{f}_{n,i}}{\bar{g}_{n,i}} \frac{\eta_n^v + \eta_{n,i,1}^v + \eta_{n,i,2}^v}{3} \delta_{n,i} \end{aligned} \quad (2.2-19)$$

となる。 $\bar{\eta}_{n,i}^u, \bar{\eta}_{n,i}^{uv}, \bar{\eta}_{n,i}^v$ を三頂点の平均とすると, (2.2-18) 式と (2.2-19) 式は一致する。

全く同様に (2.2-11) 式は

$$\begin{aligned} C_{n,i}^d &= \bar{f}_{n,i} \bar{A}_{n,i}^u \delta_{n,i} \\ C_{n,i}^d &= \bar{g}_{n,i} \bar{A}_{n,i}^v \delta_{n,i} \end{aligned} \quad (2.2-20)$$

と表わすことができる。

2.3 長方形要素による方法

(u, v)面を u = 一定, v = 一定の線で長方形要素に分割する (図3)。図の様に (u_m, v_n) に頂点を持つ長方形に 1 から 4 の番号をつけ □_{m,n,i} (i=1, ..., 4 とする。また □_{m,n,i} の各頂点の座標を図の様に番号をつけ (u_{m,i,k}, v_{n,i,k}) (k=1, ..., 4) とする。また (u_m, v_n) における V の値を V_{m,n}, □_{m,n,i} の頂点での値を V_{m,n,i,k} とする。すると,

$$\begin{aligned} u_{m,i,1} &= u_{m,i,4} = u_m & u_{m,i,2} &= u_{m,i,3} = u_{m+1} \\ v_{n,i,1} &= v_{n,i,2} = v_n & v_{n,i,3} &= v_{n,i,4} = v_{n+1} \\ V_{m,n,i,1} &= V_{m,n}, & V_{m,n,i,2} &= V_{m+1,n}, & V_{m,n,i,3} &= V_{m+1,n+1}, \\ V_{m,n,i,4} &= V_{m,n+1} \end{aligned} \quad (2.3-1)$$

等の関係がある。また □_{m,n,i} の u, v 方向の辺の長さを Δu_{m,i}, Δv_{n,i} とすると,

$$\begin{aligned} \Delta u_{m,i} &= u_{m,i,2} - u_{m,i,1} = u_{m,i,3} - u_{m,i,4} \\ \Delta v_{n,i} &= v_{n,i,4} - v_{n,i,1} = v_{n,i,3} - v_{n,i,2} \end{aligned} \quad (2.3-2)$$

である。□_{m,n,i} の面積は Δu_{m,i} · Δv_{n,i} であり δ_{m,n,i} で表わす。

□_{m,n,i} における電流ポテンシャル V が, 頂点の値 V_{m,n,i,k} によって, u, v それぞれに対して一次的に

$$\begin{aligned} V &= \frac{(u_{m,i,3} - u)(v_{n,i,3} - v)}{\delta_{m,n,i}} V_{m,n,i,1} + \frac{(u - u_{m,i,1})(v_{n,i,3} - v)}{\delta_{m,n,i}} V_{m,n,i,2} \\ &+ \frac{(u - u_{m,i,1})(v - v_{n,i,1})}{\delta_{m,n,i}} V_{m,n,i,3} + \frac{(u_{m,i,3} - u)(v - v_{n,i,1})}{\delta_{m,n,i}} V_{m,n,i,4} \end{aligned} \quad (2.3-3)$$

と表わされるとする。

$$x_{m,i} = (u - u_{m,i,1}) / \Delta u_{m,i}, \quad y_{n,i} = (v - v_{n,i,1}) / \Delta v_{n,i} \quad (2.3-4)$$

と変換することにより, (2.3-3) 式は

$$V = \sum_{k=1}^4 P_k(x_{m,i}) Q_k(y_{n,i}) V_{m,n,i,k} \quad (2.3-5)$$

と表わすことができる。ここで、

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_4(x) = 1-x, & P_2(x) &= P_3(x) = x \\ Q_1(y) &= Q_2(y) = 1-y, & Q_3(y) &= Q_4(y) = y \end{aligned} \quad (2.3-6)$$

である。(2.1-10)式は今の場合、 m, n の二重和となりその係数 $a_{m,n}$ は $\square_{m,n,i}$ において、(2.3-5)式の $V_{m,n} = V_{m,n,i}$ の係数をとることにより、

$$a_{m,n,i} = P_i(x_{m,i}) Q_i(y_{n,i}) \quad (2.3-7)$$

となる。 $a_{m,n}$ は (u_m, v_n) に頂点をもつ長方形 $\square_{m,n,i}$ ($i=1, \dots, 4$)内で(2.3-7)式の函数形を持ち、他の領域では0となる。 $\square_{m,n,i}$ において u, v で微分することにより、

$$\frac{\partial a_{m,n,i}}{\partial u} = \epsilon_i^x Q_i(y_{n,i}) / \Delta u_{n,i}, \quad \frac{\partial a_{m,n,i}}{\partial v} = \epsilon_i^y P_i(x_{m,i}) / \Delta v_{n,i} \quad (2.3-8)$$

となる。ここで、

$$\epsilon_1^x = \epsilon_4^x = -1, \quad \epsilon_2^x = \epsilon_3^x = 1, \quad \epsilon_1^y = \epsilon_2^y = -1, \quad \epsilon_3^y = \epsilon_4^y = 1 \quad (2.3-9)$$

である。

(2.1-22)式に代入することにより、

$$\begin{aligned} K_{m,n,m',n'} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (\Delta u_{m,i} \Delta u_{m',j} \epsilon_i^y \epsilon_j^x A_{m,n,i,m',n',j}^1 \\ &\quad - \Delta u_{m,i} \Delta v_{n',j} \epsilon_i^y \epsilon_j^x A_{m,n,i,m',n',j}^2 - \Delta v_{n,i} \Delta u_{m',j} \epsilon_i^x \epsilon_j^y A_{m,n,i,m',n',j}^3 \\ &\quad + \Delta v_{n,i} \Delta v_{n',j} \epsilon_i^x \epsilon_j^y A_{m,n,i,m',n',j}^4) \end{aligned} \quad (2.3-10)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} A_{m,n,i,m',n',j}^1 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_1 f_2}{r_{12}} e_{u1} e_{u2} P_i(x_1) P_j(x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ A_{m,n,i,m',n',j}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_1 g_2}{r_{12}} e_{u1} e_{v2} P_i(x_1) Q_j(y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ A_{m,n,i,m',n',j}^3 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{g_1 f_2}{r_{12}} e_{v1} e_{u2} Q_i(y_1) P_j(x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ A_{m,n,i,m',n',j}^4 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{g_1 g_2}{r_{12}} e_{v1} e_{v2} Q_i(y_1) Q_j(y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned} \quad (2.3-11)$$

である。ここで、 $x_1 = x_{m,i}, y_1 = y_{n,i}, x_2 = x_{m',j}, y_2 = y_{n',j}$ であり、 f, g, e_u, e_v, r_{12} は(2.3-4)式を介して、 x_1, y_1, x_2, y_2 の函数となる。積分は $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に関して辺の長さが1の正方形内で行う。

(2.1-23)式に代入することにより、

$$\begin{aligned} R_{m,n,m',n'} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (\square_{m,n,i} = \square_{m',n',j}) \left(\frac{\Delta u_{m,i}}{\Delta v_{n,i}} \epsilon_i^y \epsilon_j^x B_{m,n,i,i'}^1 - 2 \epsilon_i^y \epsilon_j^x B_{m,n,i,i'}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta v_{n,i}}{\Delta u_{m,i}} \epsilon_i^x \epsilon_j^y B_{m,n,i,i'}^3 \right) \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

である。和は $(u_m, v_n), (u_{m'}, v_{n'})$ の両方に頂点をもつ長方形に対してのみ行う。ここで、

$$\begin{aligned} B_{m,n,i,i'}^1 &= \int_0^1 \int_0^1 \eta^u \frac{f}{g} P_i(x) P_{i'}(x) dx dy \\ B_{m,n,i,i'}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \eta^u \eta^v P_i(x) Q_{i'}(y) dx dy \\ B_{m,n,i,i'}^3 &= \int_0^1 \int_0^1 \eta^v \frac{g}{f} Q_i(y) Q_{i'}(y) dx dy \end{aligned} \quad (23-13)$$

である。

同様に (2.1-24) 式に代入することにより、

$$e_{m,n} = \sum_{i=1}^4 (\Delta u_{m,i} \epsilon_i^T C_{m,n,i}^1 - \Delta v_{m,i} \epsilon_i^T C_{m,n,i}^2) \quad (23-14)$$

で、ここで、

$$\begin{aligned} C_{m,n,i}^1 &= \int_0^1 \int_0^1 f A^u P_i(x) dx dy \\ C_{m,n,i}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 g A^v Q_i(y) dx dy \end{aligned} \quad (23-15)$$

である。

三角形要素の場合と同様に f, g, e_u, e_v を積分の外に出すと、(2.3-11) 式は、

$$\begin{aligned} A_{m,n,i,m',n',i'}^1 &= \bar{f}_{m,n,i} \bar{f}_{m',n',i'} \bar{e}_{u,m,n,i} \bar{e}_{u,m',n',i'} S_{m,n,i,m',n',i'}^1 \\ A_{m,n,i,m',n',i'}^2 &= \bar{f}_{m,n,i} \bar{g}_{m',n',i'} \bar{e}_{u,m,n,i} \bar{e}_{v,m',n',i'} S_{m,n,i,m',n',i'}^2 \\ A_{m,n,i,m',n',i'}^3 &= \bar{g}_{m,n,i} \bar{f}_{m',n',i'} \bar{e}_{v,m,n,i} \bar{e}_{u,m',n',i'} S_{m,n,i,m',n',i'}^3 \\ A_{m,n,i,m',n',i'}^4 &= \bar{g}_{m,n,i} \bar{g}_{m',n',i'} \bar{e}_{v,m,n,i} \bar{e}_{v,m',n',i'} S_{m,n,i,m',n',i'}^4 \end{aligned} \quad (23-16)$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} S_{m,n,i,m',n',i'}^1 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_i(x_1) P_{i'}(x_2)}{r_{12}} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ S_{m,n,i,m',n',i'}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_i(x_1) Q_{i'}(y_2)}{r_{12}} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ S_{m,n,i,m',n',i'}^3 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{Q_i(y_1) P_{i'}(x_2)}{r_{12}} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ S_{m,n,i,m',n',i'}^4 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{Q_i(y_1) Q_{i'}(y_2)}{r_{12}} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned} \quad (23-17)$$

である。

要素間の距離が十分大きく、 $r_{12} = \bar{r}_{m,n,i,m',n',i'}$ とおける時には、(2.3-17) 式は

$$\begin{aligned} S_{m,n,i,m',n',i'}^1 &= \frac{1}{r_{m,n,i,m',n',i'}} p_i p_{i'} \\ S_{m,n,i,m',n',i'}^2 &= \frac{1}{r_{m,n,i,m',n',i'}} p_i q_{i'} \end{aligned}$$

$$S_{m,n,i,m',n',i'}^3 = \frac{1}{r_{m,n,i,m',n',i'}} q_i p_{i'}$$

$$S_{m,n,i,m',n',i'}^4 = \frac{1}{r_{m,n,i,m',n',i'}} q_i q_{i'} \quad (2.3-18)$$

となる。ここで、

$$p_i = \int_0^1 P_i(x) dx, \quad q_i = \int_0^1 Q_i(y) dy \quad (2.3-19)$$

であり、(2.3-6)式を代入することにより、

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{1}{2} \quad (2.3-20)$$

であり、(2.3-18)式は、

$$S_{m,n,i,m',n',i'}^1 = S_{m,n,i,m',n',i'}^2 = S_{m,n,i,m',n',i'}^3 = S_{m,n,i,m',n',i'}^4 = \frac{1}{4 r_{m,n,i,m',n',i'}} \quad (2.3-21)$$

となる。

$\square_{m,n,i}$ と $\square_{m',n',i'}$ が一致する時には、 $\square_{m,n,i}$ が十分小さいとすると、(2.3-16)式において、

$$\bar{e}_{u,m,n,i} \cdot \bar{e}_{u,m',n',i'} = \bar{e}_{v,m,n,i} \cdot \bar{e}_{v,m',n',i'} = 1$$

$$\bar{e}_{u,m,n,i} \cdot \bar{e}_{v,m',n',i'} = 0 \quad (2.3-22)$$

とおいてよい。そのため(2.3-17)式の第23式は計算する必要がない。また、

$$r_{12} = \sqrt{f_{m,n,i}^2 (u_2 - u_1)^2 + g_{m,n,i}^2 (v_1 - v_2)^2}$$

とおき、(2.3-4)式を代入することにより、

$$r_{12} = \sqrt{f_{m,n,i}^2 \Delta u_{m,i}^2 (x_2 - x_1)^2 + g_{m,n,i}^2 \Delta v_{n,i}^2 (y_2 - y_1)^2} \quad (2.3-23)$$

とする。(2.3-17)式の積分は、 $X_1 = a x_1$, $X_2 = a x_2$, $Y_1 = b y_1$, $Y_2 = b y_2$ と変数変換することにより、

$$S_{m,n,i,m',n',i'}^1 = \frac{1}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \frac{P_i(\frac{X_1}{a}) P_{i'}(\frac{X_2}{a})}{r_{12}} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2$$

$$S_{m,n,i,m',n',i'}^4 = \frac{1}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \frac{Q_i(\frac{Y_1}{b}) Q_{i'}(\frac{Y_2}{b})}{r_{12}} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 \quad (2.3-24)$$

となる。積分は、 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ に対し、 a, b の辺の長さをもつ長方形の内部で行う。ここで、

$$a = \bar{f}_{m,n,i} \Delta u_{m,i}, \quad b = \bar{g}_{m,n,i} \Delta v_{n,i}$$

$$r_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (2.3-25)$$

である。この積分の値は Appendix I で示す。

次に、(2.3-13), (2.3-15) 式を簡略化する。 $\eta^u, \eta^{uv}, \eta^v, A^u, A^v$ が、 V と同様に (2.3-5) 式のように展開できるとする。(2.3-13) 式に $\eta^u, \eta^{uv}, \eta^v$ の展開式を代入し、 \bar{f}, \bar{g} を積分の外に出すと、

$$B_{m,n,i,i'}^1 = \frac{\bar{f}_{m,n,i}}{g_{m,n,i}} \sum_{k=1}^4 p_{i'k} q_k \eta_{m,n,i,k}^u$$

となり、(2.3-20) 式を用いて

$$B_{m,n,i,i'}^1 = \frac{\bar{f}_{m,n,i}}{2g_{m,n,i}} \sum_{k=1}^4 p_{i'k} \eta_{m,n,i,k}^u$$

となり、同様に

$$B_{m,n,i,i'}^2 = \sum_{k=1}^4 p_{ik} q_{i'k} \eta_{m,n,i,k}^{uv}$$

$$B_{m,n,i,i'}^3 = \frac{\bar{g}_{m,n,i}}{2f_{m,n,i}} \sum_{k=1}^4 q_{i'k} \eta_{m,n,i,k}^v \tag{2.3-26}$$

となる。ここで $\eta_{m,n,i,k}^u, \eta_{m,n,i,k}^{uv}, \eta_{m,n,i,k}^v$ は $(u_{m,i,k}, v_{n,i,k})$ におけるそれぞれの値である。また、

$$p_{ij} = \int_0^1 P_i(x) P_j(x) dx$$

$$q_{ij} = \int_0^1 Q_i(y) Q_j(y) dy \tag{2.3-27}$$

$$p_{ijk} = \int_0^1 P_i(x) P_j(x) P_k(x) dx$$

$$q_{ijk} = \int_0^1 Q_i(y) Q_j(y) Q_k(y) dy \tag{2.3-28}$$

である。これらの値については Appendix II で示す。

同様に (2.3-15) 式は

$$C_{m,n,i}^1 = \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{m,n,i}}{f_{m,n,i}} \sum_{k=1}^4 p_{ik} A_{m,n,i,k}$$

$$C_{m,n,i}^2 = \frac{1}{2} \frac{\bar{g}_{m,n,i}}{g_{m,n,i}} \sum_{k=1}^4 q_{ik} A_{m,n,i,k} \tag{2.3-29}$$

となる。

2.4 境界条件と対称性と周期性

図4に示す様な簡単な閉曲面を考える。電流ポテンシャル V は定数の任意性をもつため、曲面上の任意の一つの位置において、 $V=0$ とおくことができる。曲面の境界では電流が横切らないため、境界において V は一定となる。内部に穴やカットがある時にも、その境界で V は一

定となる。外側の境界において $V=0$ とおくと、曲面上の任意の点の V は、その点から境界までの間を横切る電流値となり、便利である。二つ以上の閉曲面で成り立っている時は、個々の曲面に対して、同様なことが言える。

次に図5の様な筒状をした曲面を考える。この場合には、一方の境界では $V=0$ とおくことができるが、図の φ 方向に電流が流れるために、他方の境界では、 $V=V^1$ =一定と置かなければならない。

次に図6の様なトーラス形状をした曲面を考える。図の様に、座標 (ϕ, φ) で曲面上の全ての点が表わされるとする。 $0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の領域をとるとする。 φ =一定における ϕ 方向の電流の積分量 V^1 は任意の φ に対して等しい。同様に φ 方向の電流の積分量を V^2 とする。一般に、 V^1, V^2 は0でないので、 V は $\phi=0, 2\pi, \varphi=0, 2\pi$ に対応する同じ点で二価の値をもつ。境界条件として $V(2\pi, \varphi) - V(0, \varphi) = V^1, V(\phi, 2\pi) - V(\phi, 0) = V^2$ なる条件が加わる。図の穴2の様に $\varphi=0$ にまたがっている場合には、Aの側の境界で $V=V^A$ =一定、Bの側の境界で $V=V^B$ =一定とし、 $V^B - V^A = V^1$ としなければならない。 $\phi=0$ にまたがっている時も同様である。 $\varphi=0, \phi=0$ を内部に含む穴3の様な場合には、境界を4つに分け、同様な条件を加えればよい。

曲面がある対称性や周期性をもち、また外部から加わる磁場が同じ対称性や周期性をもち、対応する曲面上の点で V が等しかったり、逆符号であることが分っている場合がある。その様な場合には、対称線の片側だけや、一つの周期だけの変数を用いて、問題を簡単化することができる。

今、導体の覆っている曲面をメッシュ分割し、曲面の全体を導体が覆っているとして行列要素を求めたとする。その場合には、実際には導体がない所にメッシュ点がある場合があり、そのメッシュ点での V を消去する必要がある。それには、メッシュ点が導体の外部にあれば、導体の境界に等しく、 $V=0$ とおけばよい。また内部の穴の内側にあるならば、穴の境界の V に導しいとおけばよい。

以上に述べた条件は、全て一次変換になおすことができる。今、曲面上のメッシュ点における $V_n (n=1, \dots, N)$ に対して、上記の諸条件を考慮しないで、(21-22, 23, 24) を計算し、それぞれの行列要素が求まったとする。条件を考慮して、新しい変数 $V'_m (m=1, \dots, N)$ を導入する。常に $M \leq N$ が成り立つ。 V_n は一般に、 V'_m によって

$$V = AV' \tag{24-1}$$

の様な一次的な関係をもつ。ここで V は V_n を、 V' は V'_m を要素にもつ列ベクトルである。A はM行N列の行列である。(21-19, 20, 21) 式を行列形式に書きなおし、(24-1) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} V' M V = \frac{1}{2} V' A' M A V' \\ W &= V' R V = V' A' R A V' \\ U_M &= e' V = e' A V' \end{aligned} \tag{24-2}$$

となる。ここで t は行列の反転を表わす。従って新しい変数 V'_m に対する行列、 M', R', e' は

$$\begin{aligned}
 M' &= A' M A \\
 R' &= A' R A \\
 e' &= A' e
 \end{aligned}
 \tag{2.4-3}$$

となる。(2.4-1)の変換は何回も必要に応じてくり返すことができる。

まず、 $V_k = 0$ の時を考える。 $V' = (V_1, \dots, V_{k-1}, V_k, V_{k+1}, \dots, V_N)$ に対して $V'' = (V_1, \dots, V_{k-1}, V_{k+1}, \dots, V_N)$ とすると、変換行列AはN行(N-1)列となり、 $A_{i,i} = 1 (i=1, \dots, k-1)$ 、 $A_{i+1,i} = 1, (i=k, \dots, N-1)$ 、他の成分は0となる。この行列により、(2.4-3)式を実行すると、M, Rはk行とk列をそれぞれ消去した、(N-1)行(N-1)列の行列となり、eはk行を消した(N-1)行の列ベクトルとなる。

次に、 $V_k = V_\ell$ の場合は、 $V' = (V_1, \dots, V_k, \dots, V_{\ell-1}, V_{\ell+1}, \dots, V_N)$ とする。変換行列Aは、 $A_{i,i} = 1, (i=1, \dots, \ell-1)$ 、 $A_{i+1,i} = 1, (i=\ell, \dots, N-1)$ 、 $A_{\ell,k} = 1$ 、他の成分は0のN行(N-1)列の行列となる。この行列により、(2.4-3)を実行すると、M, Rは、k行に ℓ 行を加え、 ℓ 行を消去し、できた(N-1) \times N行列のk列に ℓ 列を加え、 ℓ 列を消去した(N-1) \times (N-1)行列となる。またeはk行に ℓ 行を加え、 ℓ 行を消去した、(N-1)行のベクトルである。同様に、 $V_k = -V_\ell$ の場合は、 $A_{\ell,k} = -1$ となるだけで他は同じである。行と列をそれぞれ加え合わせる時に符号を変えて行う。

次に、 $V_\ell - V_k = V^0$ の場合は、 $V' = (V_1, \dots, V_k, \dots, V_{\ell-1}, V_{\ell+1}, \dots, V_N, V^0)$ とする。変換行列は、 $A_{i,i} = 1 (i=1, \dots, \ell-1)$ 、 $A_{i+1,i} = 1 (i=\ell, \dots, N-1)$ 、 $A_{\ell,k} = 1$ 、 $V_{\ell,N} = 1$ 、他の成分は0のN \times N行列である。この変換行列により、(2.4-3)式を実行すると、M, Rは、k行にk行と ℓ 行を加えたものを入れ、 ℓ 行をN行目にもって来て順序を変えたN \times N行列に対して、列に対して同じことをしたN \times N行列になる。eは行に対して上と同じことを行ったものとなる。

境界条件や対称条件、周期条件を考えて、以上の操作を必要なだけ行い、新しい変数列 $V'' = (V_1', \dots, V_M')$ に対する回路方程式を文献2の方法により解き、求った V' に対して、(2.4-1)式の変換を行うと、各メッシュ点における V_n を求めることができる。

2.5 長方形板の場合

一様で等方な抵抗を持つ長方形板に、外部から面に垂直に外部磁場が一様に加った場合を考える。長方形板の辺の長さを2A, 2Bとし、長方形の中心を座標原点とし図7の様にx, y軸をとる。変数(u, v)として(x, y)を用いる。メッシュはx, y両方向に等分し、それぞれA, BをM, N等分する。今の場合x軸, y軸に対し対称であり、x軸, y軸に対して折返しした点は同じ電流ポテンシャルVを持つ。境界におけるVを0とおく。

(2.1-1)式において

$$x = x, \quad y = y, \quad z = 0 \tag{2.5-1}$$

であり、(2.1-3)式に対し

$$f = g = 1 \tag{2.5-2}$$

とおける。また(2.1-5)式に対し、

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5-3)$$

となり、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ は定ベクトルとなり、(2.1-6)式は異なる点の積に対しても成立する。

(2.1-13)式に対しては

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.5-4)$$

とおける。今、長方形要素を用いているので、2.3節の方法を用いる。

メッシュ巾が等間隔なので、 $x = \frac{m}{M}A, y = \frac{n}{N}B$ に対する点に (m, n) の番号を対応させると、

$$\Delta x_{m,i} = \frac{A}{M} = \Delta x, \quad \Delta y_{n,i} = \frac{B}{N} = \Delta y$$

$$(m = -M, \dots, M, n = -N, \dots, N, i = 1, \dots, 4) \quad (2.5-5)$$

となる。(2.3-11)式において、第2, 3式は、 \mathbf{e}_x と \mathbf{e}_y の直交性により0となる。また第1, 4式は、

$$\begin{aligned} A_{m,n,i,m',n',i'}^1 &= S_{m,n,i,m',n',i'}^1 \\ A_{m,n,i,m',n',i'}^4 &= S_{m,n,i,m',n',i'}^4 \end{aligned} \quad (2.5-6)$$

が、平均化することなしに成立する。 x, y 方向への一様性のため、任意の k, ℓ に対して、

$$\begin{aligned} K_{m+k,n,i,m'+k,n',i'} &= K_{m,n,i,m',n',i'} \\ K_{m,n+1,i,m',n'+1,i'} &= K_{m,n,i,m',n',i'} \end{aligned} \quad (2.5-7)$$

が成立する。このため、 $K_{-M+1,-N+1,i,m',n',i'}$ ($m' = -M+1, \dots, M-1, n' = -N+1, \dots, N-1, i = 1, \dots, 4, i' = 1, \dots, 4$) を計算するだけで十分である。境界において $V = 0$ とおいているため、 $m = \pm M, n = \pm N$ に対して行列要素を求める必要はない。

抵抗が等方で一様なため、

$$\eta_{m,n}^u = \eta_{m,n}^v = \eta = \text{一定}, \quad \eta_{m,n}^{uv} = 0 \quad (2.5-8)$$

と置くことができ、(2.3-26)式において、第二式は0となり、

$$\begin{aligned} B_{m,n,i,i'}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 p_{i,i',k} \eta \\ B_{m,n,i,i'}^3 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 q_{i,i',k} \eta \end{aligned} \quad (2.5-9)$$

となる。これらは m, n に寄らない。

(AII-2, 3, 4)式を代入し、(2.3-12)式を計算すると、

$$\begin{aligned} R_{m,n,m,n} &= \frac{4\eta}{3} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \\ R_{m,n,m \pm 1,n} &= \frac{\eta}{3} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} - 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \\ R_{m,n,m,n \pm 1} &= \frac{\eta}{3} \left(-2 \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

$$R_{m,n,m\pm 1,n\pm 1} = -\frac{\eta}{6} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \quad (2.5-10)$$

となる。|m-m'| ≥ 2 か |n-n'| ≥ 2 に対しては 0 となる。

次に、外部からの磁場を B_z とすると、ベクトルポテンシャルにより、

$$A_x = -\frac{1}{2} B_z y, \quad A_y = \frac{1}{2} B_z x, \quad A_z = 0 \quad (2.5-11)$$

と表わすことができる。(2.3-29)式を用いて、

$$C_{m,n,i}^1 = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 p_{ik} y_{n,i,k} B_z$$

$$C_{m,n,i}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 q_{ik} x_{m,i,k} B_z$$

となり、(2.3-14)式に代入し、(AII-1)、(2.3-1)式を用い

$$e_{m,n} = \Delta x \cdot \Delta y B_z \quad (2.5-12)$$

となる。

境界条件は V_{M,n} = V_{-M,n} = V_{m,N} = V_{m,-N} = 0 (m = -M, ..., M, n = -N, ..., N) である。

また、x 軸、y 軸に対して対称のため、

$$V_{m,n} = V_{-m,n} = V_{m,-n} = V_{-m,-n} \quad (2.5-13)$$

となり、2.4節の操作を行う。最終的に V_{m,n} (m = 0, ..., M-1, n = 0, ..., N-1) に対する M × N の次元の方程式となる。

この操作を行うと、

$$K'_{m,n,m',n'} = \alpha_{m,n} (K_{m,n,m',n'} + \beta_{m',n'}^1 K_{m,n,-m',n'} + \beta_{m',n'}^2 K_{m,n,m',-n'} + \beta_{m',n'}^3 K_{m,n,-m',-n'}) \quad (2.5-14)$$

となる。ここで、

$$\alpha_{m,n} = 4 \quad (m=1, \dots, M-1, n=1, \dots, N-1)$$

$$\alpha_{0,m} = \alpha_{n,0} = 2 \quad (m=1, \dots, M-1, n=1, \dots, N-1)$$

$$\alpha_{0,0} = 1 \quad (2.5-15)$$

であり、β_{m',n'} に対しては、

$$\beta_{0,n'}^1 = 0, \quad \beta_{m',0}^2 = 0, \quad \beta_{0,0}^3 = 0 \quad (m'=1, \dots, M-1, n'=1, \dots, N-1) \quad (2.5-16)$$

で、他の m', n' に対しては 1 である。同様に R に対しても成立し、(2.5-10)式より、

$$R'_{m,n,m,n} = \alpha_{m,n} \cdot \frac{4\eta}{3} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$R'_{m,n,m+1,n} = 2(1 + \beta_{m,n}^2) \frac{\eta}{3} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} - 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$R'_{m,n,m,n+1} = 2(1 + \beta_{m,n}^1) \frac{\eta}{3} \left(-2 \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$R'_{m,n,m+1,n+1} = -\frac{2}{3} \eta \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \quad (2.5-17)$$

となる。また e に対して、

$$e'_{m,n} = \alpha_{m,n} \Delta x \Delta y B_z \quad (2.5-18)$$

となる。

2.6 軸対称曲面上の導体の場合

軸対称性をもつ曲面上の一部、あるいは全体を覆う導体に対して適用する(図8)。対称軸を z 軸とし (r, φ, z) 円筒座標をとる。曲面上の直交座標として、 (ℓ, φ) をとる。ここで ℓ は $\varphi = \text{一定}$ の断面(ポロイダル断面)において、中心軸から一番遠い点から、弧に沿って反時計回りにとった長さとする。断面の形状は、

$$r = r(\ell), \quad z = z(\ell) \quad (2.6-1)$$

で表わす。 ℓ は $\ell^- \leq \ell \leq \ell^+$ の領域をとるとする。もし断面が閉じている時は ℓ^- と ℓ^+ に相当する点は一致する。 $z(0) = 0$ とする。 φ は $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ の領域をとる。 $\varphi = -\pi, \pi$ に相当する点は一致する。

(2.1-1) 式に対し x 軸を $\varphi = 0$ の方向とすると、

$$x = r(\ell) \cos \varphi, \quad y = r(\ell) \sin \varphi, \quad z = z(\ell) \quad (2.6-2)$$

であり、(2.1-3) 式に対し、

$$f = r(\ell), \quad g = 1 \quad (2.6-3)$$

となる。また(2.1-5) 式に対し、

$$e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\ell = \begin{pmatrix} \frac{dr}{d\ell} \cos \varphi \\ \frac{dr}{d\ell} \sin \varphi \\ \frac{dz}{d\ell} \end{pmatrix} \quad (2.6-4)$$

である。これより、単位ベクトルの積は、

$$\begin{aligned} e_{\varphi_1} \cdot e_{\varphi_2} &= \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ e_{\ell_1} \cdot e_{\ell_2} &= \frac{dr_1}{d\ell_1} \frac{dr_2}{d\ell_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{dz_1}{d\ell_1} \frac{dz_2}{d\ell_2} \\ e_{\varphi_1} \cdot e_{\ell_2} &= \frac{dr_2}{d\ell_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.6-5)$$

となる。また(2.1-13) 式に対して、

$$r_{12} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.6-6)$$

となる。

境界条件は、導体が軸対称の曲面をいかに覆っているかによって2.4節で述べた図4, 5, 6のいずれかに分けられる。特にポロイダル断面が閉じている曲面上を全て覆っている時には、図6に対して述べた境界条件を、 $\ell = \ell^-, \ell^+$ と $\varphi = \pm\pi$ に対して適用しなければならない。

次に対称条件を考える。まずポロイダル断面が、 $Z = 0$ に関して上下対称であるとする。この時は $\ell^- = -\ell^+$ である。一般の電流ポテンシャル V を

$$\begin{aligned}
 V^+ &= \frac{1}{2} \{V(\varphi, \ell) + V(\varphi, -\ell)\} \\
 V^- &= \frac{1}{2} \{V(\varphi, \ell) - V(\varphi, -\ell)\} \quad (2.6-7)
 \end{aligned}$$

の様に、対称、反対称部分に分解する。それぞれに対応する電流密度を j^+ , j^- とすると、各成分に対して、

$$\begin{aligned}
 j_\varphi^+(\varphi, -\ell) &= -j_\varphi^+(\varphi, \ell), \quad j_\ell^+(\varphi, -\ell) = j_\ell^+(\varphi, \ell) \\
 j_\varphi^-(\varphi, -\ell) &= j_\varphi^-(\varphi, \ell), \quad j_\ell^-(\varphi, -\ell) = -j_\ell^-(\varphi, \ell) \quad (2.6-8)
 \end{aligned}$$

が成立する。 $j_1 = j^+$, $j_2 = j^-$ とおき、(2.1-12)式に代入すると(2.6-5)式より、 $e_{\varphi_1} \cdot e_{\varphi_2} \cdot e_{\ell_1} \cdot e_{\ell_2}$ が ℓ に関して対称で、 $e_{\varphi_1} \cdot e_{\ell_2}$ が反対称であることより、 $j^+(\varphi_1, -\ell_1) \cdot j^-(\varphi_2, -\ell_2) = -j^+(\varphi_1, \ell_1) \cdot j^-(\varphi_2, \ell_2)$ となるため、積分が0となり、 j^+ と j^- の間に磁気的な結合がないことが分る。また、(2.1-15)式に $j = j^+ + j^-$ とおいて代入すると、 η^φ, η^ℓ が ℓ に関して対称で、 η^ℓ が ℓ に関して反対称であれば、 j^+ と j^- の抵抗による結合項は0となる。同様に $\varphi = 0$ に対して対称であるとする、 φ に関して対称、反対称な V は磁気的な結合がなく、 η^φ, η^ℓ が φ に関して対称で $\eta^{\varphi\ell}$ が反対称であれば、抵抗による結合もなくなる。

(2.1-17)式と(2.6-8)式からわかるように、 A_φ の ℓ に関して対称部は V の反対称部、 A_φ の反対称部は V の対称部とのみ結合する。同様に A_ℓ の ℓ に関して対称部は V の対称部、 A_ℓ の反対称部は V の反対称部とのみ結合する。 φ に対する対称性の場合には、全く同様に、 A_φ の対称部は V の対称部、 A_φ の反対称部は V の反対称部、 A_ℓ の対称部は V の反対称部、 A_ℓ の反対称部は V の対称部とのみ結合する。この様に考えれば、外部からの磁場 \mathbf{A} を ℓ, φ に関して対称、反対称な部分に分解し、それぞれに対する曲面上の電流分布を求めればよいことになる。

以上のような対称性があると、トーラス形状に対する境界条件はより簡単なものになる。まず、上下対称の時は、対称部に対して $V(\varphi, \ell) = V(\varphi, \ell^+)$ となり、反対称部に対しては、 $V(\varphi, 0) = 0, -V(\varphi, \ell^-) = V(\varphi, \ell^+) = V^{\frac{1}{2}}$ とおけばよい。ここで $V^{\frac{1}{2}}$ は φ 方向(トロイダル方向)に流れる全電流の半分である。 $\varphi = 0$ に対する対称性の場合も全つく同様である。特に、上下対称でかつ $\varphi = 0$ に対しても対称な場合で、 ℓ, φ に対して両方向に反対称な V に対しては、 $V(\varphi, 0) = V(\varphi, \ell^+) = V(0, \ell) = V(\pi, \ell) = 0$ である。

さて、導体曲面が上下対称で、 $\varphi = \frac{\pi i}{N_\varphi}$ ($i=0, \dots, N_\varphi-1$) に対して φ に関して対称とする。そうすると φ 方向に $\frac{2\pi}{N_\varphi}$ の周期をもつ φ となる。 η^φ, η^ℓ もこの対称性をもち、 $\eta^{\varphi\ell} = 0$ とする。また外部にあるコイルは上下対称でかつ軸対称で上下同方向に電流が流れるとする(垂直磁場コイル, 四重極磁場コイル, 変流器コイル)。その場合にはコイルの作る磁場は $A_\ell = 0$ で、 A_φ は上下対称で、かつ φ 方向に一定である。この時には V は上下反対称、 $\varphi = \frac{\pi i}{N_\varphi}$ に対して対称な部分のみを考えればよい。すなわち

$$\begin{aligned}
 V(\varphi, -\ell) &= -V(\varphi, \ell) \\
 V(\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, \ell) &= V(-\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, \ell) = V(\varphi, \ell) \quad (i=0, \dots, N_\varphi-1) \quad (2.6-9)
 \end{aligned}$$

とおき、境界条件として

$$V(\varphi, 0) = 0, \quad -V(\varphi, l^-) = V(\varphi, l^+) = V^{\frac{1}{2}} \quad (2.6-10)$$

を課することができる。2.4節の操作により、 $0 \leq l \leq l^+, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{N_\varphi}$ に対する変数のみに変換することができる。

行列要素の計算は次の様に行う。まず、 $l = -l_N, \dots, -l_1, l_0, l_1, \dots, l_N, \varphi = \frac{\pi m}{MN_\varphi}$ ($m = -MN_\varphi, \dots, MN_\varphi$) で全体を長方形要素に分割する。ここで $l_M = l^+, l_0 = 0$ である。 φ 方向には等分割している。上下方向の対称性により、

$$K_{m,n,m',n'} = K_{m,-n,m',-n'} \quad (2.6-11)$$

が成立する。また軸対称性により、

$$K_{m+k,n,m'+k,n'} = K_{m,n,m',n'} \quad (2.6-12)$$

が成立する。 $\varphi = 0$ の対称性により、

$$K_{-m,n,-m',n'} = K_{m,n,m',n'} \quad (2.6-13)$$

が成立する。 m, n で示される点は $(\frac{\pi m}{MN}, l_n)$ に対する点である。(2.6-11, 12, 13) 式より、 K に対して、 $K_{0,n,m',n'}, K_{0,n,m',-n'}$ ($n=1, \dots, N, m'=0, \dots, MN_\varphi, n'=n, \dots, N$) を求めれば十分である。 $V_{m,0} = 0$ であるため、 $n=0$ あるいは $n'=0$ に対しては求める必要はない。 K の計算において $n=-N, N$ に対する接点に接する長方形は二つしかないことに注意しなければならない。(2.1-2.2) 式の積分において、 $K_{0,n,m',n'}$ は $K_{0,n,m',n'}$ に対して、積分の中で z_2 を $-z_2$ をおきかえ、 l_2 による微分の符号を変えて積分したものに等しい。対称性を考慮し、2.4節の操作を行うと、

$$K'_{m,n,m',n'} = \alpha_m \sum_{i=0}^{N-1} \{ K_{m,n,m'+2M_i,n'} - K_{m,n,m'+2M_i,-n'} + \beta_{m'} (K_{m,n,2M(i+1)-m',n'} - K_{m,n,2M(i+1)-m',-n'}) \} \quad (2.6-14)$$

となる。ここで $\alpha_m = 4N_\varphi$ ($m=2, \dots, M-1$), $\alpha_m = 2N_\varphi$ ($m=1, M$), $\beta_{m'} = 1$ ($m'=2, \dots, M-1$), $\beta_{m'} = 0$ ($m'=1, M$) である。和の中で三番目の添字 m'' が MN_φ を越える時には、 m'' を $m'' - 2MN_\varphi$ でおきかえる。

次に R に対しては、 V の上下反対称性のため、

$$R_{m,-n,m',-n'} = R_{m,n,m',n'} \quad (2.6-15)$$

である。 φ 方向の周期性のために、

$$R_{m+2M_i,n,m'+2M_i,n'} = R_{2M(i+1)-m,n,2M(i+1)-m',n'} = R_{m,n,m',n'} \quad (i=0, \dots, N_\varphi-1) \quad (2.6-16)$$

である。また、 $|m-m'| \geq 2$ か $|n-n'| \geq 2$ であれば、 $R_{m,n,m',n'}$ は 0 となる。従って、 R に対して、 $R_{m,n,m',n'}$ ($m=0, \dots, M, m'=m, m+1, n=1, \dots, N, n'=n, n+1$) を求めれば十分である。そこで (2.6-14) 式が同様に成り立ち、上の対称性を用いると、

$$R'_{m,n,m',n'} = \alpha_m (1 + \beta_{m'}) R_{m,n,m',n'} \quad (2.6-17)$$

となる。

外部磁界は、軸対称性のため、磁束関数 $\phi = r A_\varphi$ で表わすことができる。(2.3-15) 式の

第一式に代入すると、 $f = r$ であることより、

$$C_{m,n,i}^1 = \int_0^1 \int_0^1 \phi P_i(x) dx dy \quad (2.6-18)$$

となる。 ϕ は φ 方向に一定であるため、(2.6-18) 式は変数分離できて

$$C_{m,n,i}^1 = p_i \int_0^1 \phi dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \phi dy \quad (2.6-19)$$

となる。 ϕ がメッシュ間で ℓ に関して一次的に変化するとすると、(2.3-14) 式は、 $\Delta\varphi = \pi/MN_\varphi$ とすると、

$$e_{m,n} = -\frac{\Delta\varphi}{2} (\phi_{n+1} - \phi_{n-1}) \quad (n=1, \dots, N-1)$$

$$e_{m,N} = \frac{\Delta\varphi}{2} (\phi_N + \phi_{N-1}) \quad (2.6-20)$$

となる。 ϕ の上下対称性により、

$$e_{m,-n} = -e_{m,n} \quad (2.6-21)$$

が成り立ち、 φ 方向の一様性より、

$$e_{m',n} = e_{m,n} \quad (2.6-22)$$

が成り立つ。2.4 節の操作をすると、

$$e'_{m,n} = \alpha_m e_{m,n} \quad (2.6-23)$$

となる。

2.7 渦電流の作る磁場

回路方程式を解いた後、曲面上の電流より、それによる空間上の磁場を求める必要が生ずる。一般に空間の任意の点 (X, Y, Z) における磁場は、ビオ・サバル則により、

$$\mathbf{B}(X, Y, Z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \boldsymbol{\rho}_{12}}{R_{12}^3} ds \quad (2.7-1)$$

で表わされる。積分は曲面全体に渡って行い、 $\boldsymbol{\rho}_{12}$ は (X, Y, Z) より、曲面上の点 (x, y, z) までのベクトルで、

$$\rho_x = x - X, \quad \rho_y = y - Y, \quad \rho_z = z - Z \quad (2.7-2)$$

の成分を持つ。 ρ_{12} は $|\boldsymbol{\rho}_{12}|$ で、

$$\rho_{12} = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2} \quad (2.7-3)$$

である。(2.1-7, 11) 式を代入すると、

$$\mathbf{B} = \sum_{n=1}^N \mathbf{b}_n V_n \quad (2.7-4)$$

で表わされ、

$$\mathbf{b}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint (f \frac{\partial a_n}{\partial v} \frac{\mathbf{e}_u \times \boldsymbol{\rho}_{12}}{R_{12}^3} - g \frac{\partial a_n}{\partial u} \frac{\mathbf{e}_v \times \boldsymbol{\rho}_{12}}{R_{12}^3}) dudv \quad (2.7-5)$$

となる。

曲面を三角要素に分割した場合には、(2.2-5) 式を代入して、

$$\mathbf{b}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \{ \nu_{n,i} \iint \frac{\mathbf{e}_u \times \boldsymbol{\rho}_{12}}{R_{12}^3} dudv - \mu_{n,i} \iint \frac{\mathbf{e}_v \times \boldsymbol{\rho}_{12}}{R_{12}^3} dudv \} \quad (2.7-6)$$

となる。長方形要素に分割した時には、(2.3-8)式を代入して、

$$b_{m,n} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \left\{ \epsilon_i' \Delta u_{m,i} \int_0^1 \int_0^1 P_i(x) f \frac{e_u \times \rho_{12}}{\rho_{12}^3} dx dy \right. \\ \left. - \epsilon_i^x \Delta v_{n,i} \int_0^1 \int_0^1 Q_i(y) g \frac{e_v \times \rho_{12}}{\rho_{12}^3} dx dy \right\} \quad (2.7-7)$$

となる。(2.7-6)式か、あるいは(2.7-7)式を数値積分をするか、2.2, 2.3節で行った様な平均化によって求めればよい。

2.6節の軸対称な曲面に対して適用する。円筒座標で(R, φ , Z)における各方向の成分は、

$$b_{m,n}^R = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \left[\epsilon_i' \Delta \varphi \int_0^1 \int_0^1 P_i(x) \frac{(z-Z) r \cos(\varphi - \Psi)}{\rho_{12}^3} dx dy \right. \\ \left. - \epsilon_i^x \Delta \ell_{n,i} \int_0^1 \int_0^1 Q_i(y) \frac{(z-Z) \frac{dr}{d\ell} \sin(\varphi - \Psi) - r \frac{dz}{d\ell} \sin(\varphi - \Psi)}{\rho_{12}^3} dx dy \right] \\ b_{m,n}^\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \left[\epsilon_i' \Delta \varphi \int_0^1 \int_0^1 P_i(x) \frac{(z-Z) r \sin(\varphi - \Psi)}{\rho_{12}^3} dx dy \right. \\ \left. - \epsilon_i^x \Delta \ell_{n,i} \int_0^1 \int_0^1 Q_i(y) \frac{-(z-Z) \cos(\varphi - \Psi) + \{r - R \cos(\varphi - \Psi)\} \frac{dz}{d\ell}}{\rho_{12}^3} dx dy \right] \\ b_{m,n}^z = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \left[\epsilon_i' \Delta \varphi \int_0^1 \int_0^1 P_i(x) \frac{-r \{r - R \cos(\varphi - \Psi)\}}{\rho_{12}^3} dx dy \right. \\ \left. - \epsilon_i^x \Delta \ell_{n,i} \int_0^1 \int_0^1 Q_i(y) \frac{\frac{dr}{d\ell} R \sin(\varphi - \Psi)}{\rho_{12}^3} dx dy \right] \quad (2.7-8)$$

となる。ここで

$$r_{12} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \Psi) + (z-Z)^2} \quad (2.7-9)$$

と表わされる。

2.4節の操作を行った後の変数列 \mathbf{V}' に対する(2.7-4)式の係数 \mathbf{b}' は、e に対して(2.4-3)式で行ったと同様、に行うことができる。

軸対称形状の場合で、2.6節の様にVが上下反対称で、 $\varphi = \frac{\pi i}{N_\varphi}$ に対して対称の場合には、

$$b_{m,n}' = \sum_{i=0}^{N_\varphi-1} \{ b_{m+2M, n} - b_{m+2M, n-\pi} + \beta_m (b_{2M(i+1)-m, n} - b_{2M(i+1)-m, n-\pi}) \} \quad (2.7-10)$$

となる。この場合、 $b^{R'}$, $b^{\varphi'}$ は上下反対称、 $b^{z'}$ は上下対称となる。また φ の対称線に対して、 $b^{R'}$, $b^{z'}$ が対称、 $b^{\varphi'}$ が反対称となる。

2.8 固有モードとその外部磁場との結合

文献2に述べた様に、求った行列K, Rに対して

$$K E_i = \lambda_i R E_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (2.8-1)$$

を解く。そして

$$E_i^t R E_j = \delta_{ij} \quad (i, j=1, \dots, N) \quad (2.8-2)$$

の様に規格化する。ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。この様に規格化すると、

$$E_i^t K E_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i, j=1, \dots, N) \quad (2.8-3)$$

となる。 E_i は i 番目のモードの基底ベクトルで、その成分は接点 n でのモードの電流ポテンシャルを表わす。一般の電流ポテンシャル V は

$$V = \sum_{i=1}^N x_i E_i \quad (2.8-4)$$

と表わされる。変数 x_i に対する抵抗は1で、インダクタンスは λ_i であると解することができる。

基底ベクトルに対して E_i より、適当な定数を掛けて、

$$E_i' = \epsilon_i E_i \quad (2.8-5)$$

を取る方が便利な時がある。例えば、接点 n での V_n を知りたい時には、 $\epsilon_i = 1/E_{ni}$ として、 E_i' の n 成分が1となる様にする。ここで E_{ni} は E_i の第 n 成分である。すると、(2.8-4)式は、

$$V = \sum_{i=1}^N y_i E_i' \quad (2.8-6)$$

となる。

$$y_i = x_i / \epsilon_i \quad (2.8-7)$$

の関係がある。変数 y_i に対する抵抗は ϵ_i^2 、インダクタンスは $\lambda_i \epsilon_i^2$ と考えることができる。

(2.8-6)式は

$$V = A y \quad (2.8-8)$$

の様に書ける。行列 A の成分 A_{ij} は E_j' の i 成分である。(2.8-8)式は(2.4-1)式と同じ形の変換である。外部磁場と変数 y との結合は、

$$e' = A' e \quad (2.8-9)$$

となり、第 n モードとの結合は

$$e_n' = E_n'^t e = \epsilon_n E_n^t e \quad (2.8-10)$$

となる。

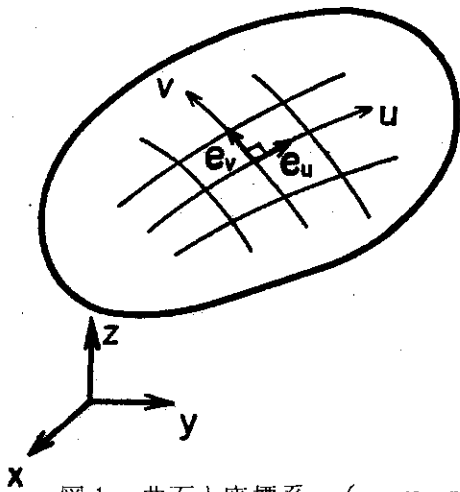


図1. 曲面と座標系。(x, y, z)は空間の三次元直交座標, (u, v)は曲面上の二次元直交座標。

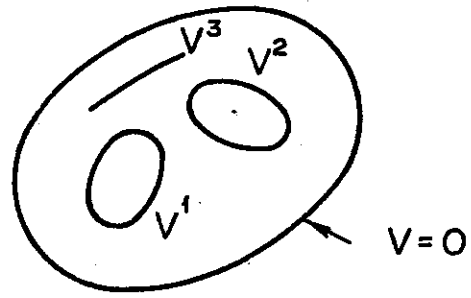


図4. 簡単な閉曲面に対する境界条件。

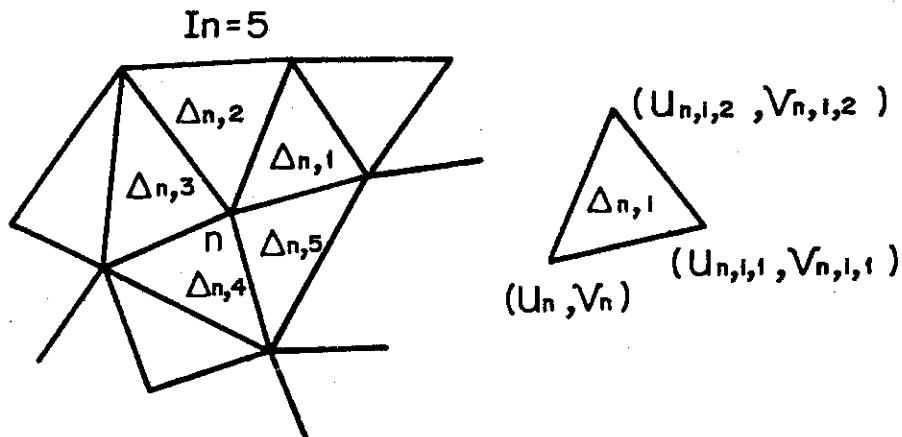


図2. 三角形要素による分割。

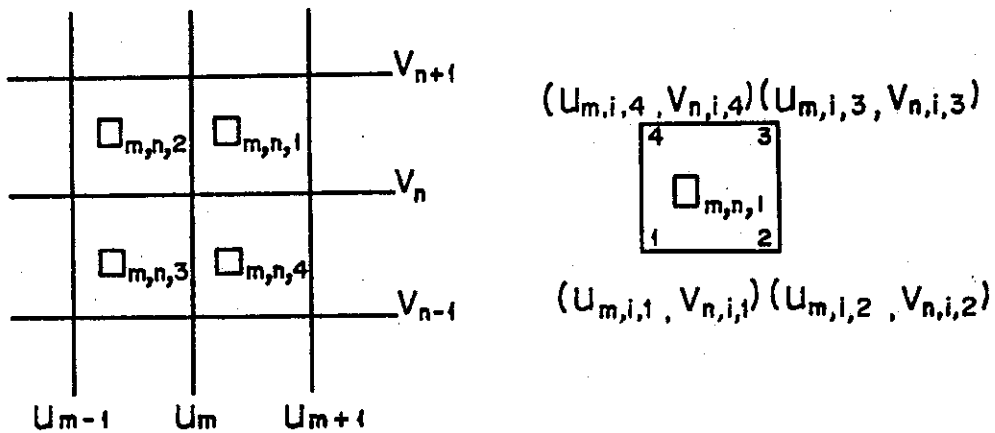


図3. 長方形要素による分割。

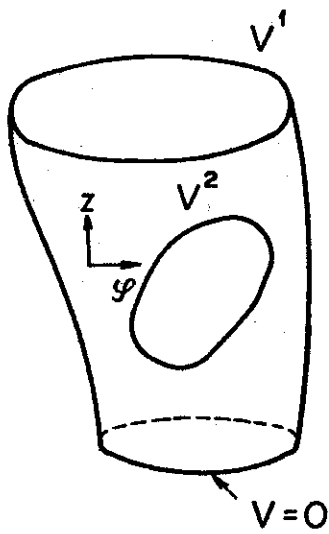


図5. 筒状をした曲面に対する境界条件。

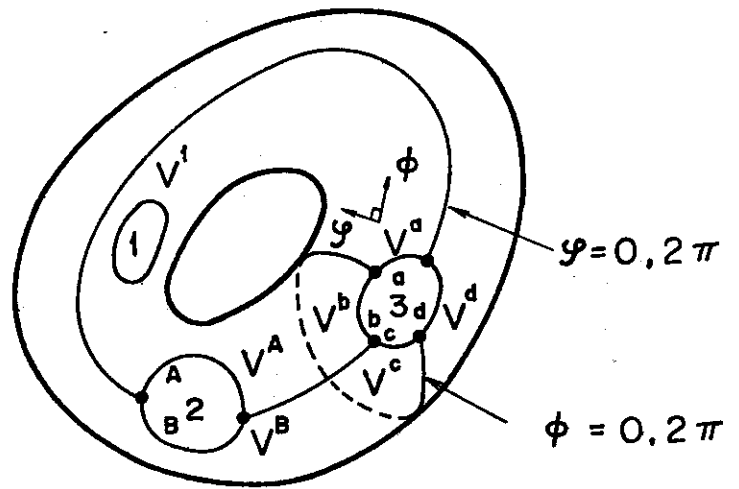


図6. トーラス状をした曲面に対する境界条件。

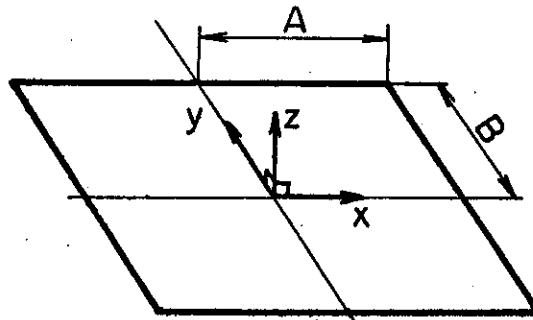


図7. 長方形平板と座標系。

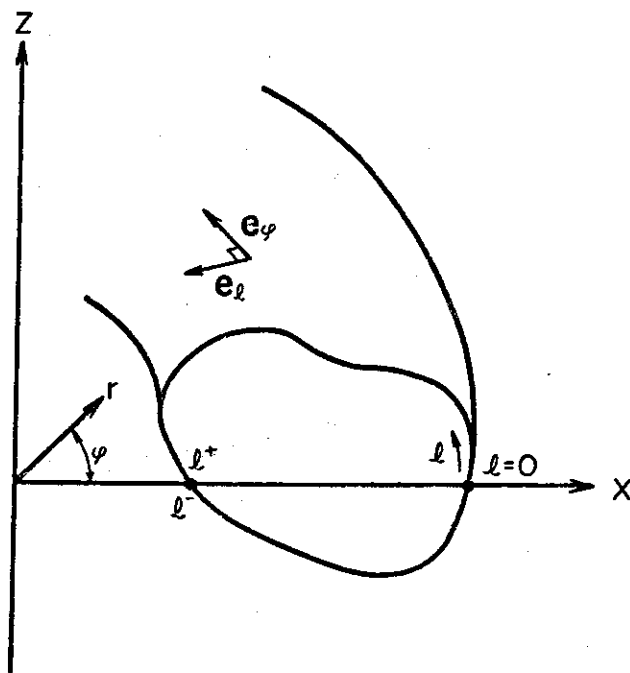


図8. トーラス曲面と座標系。

3. 検 討

2章の方法で、二つの渦電流計算コードを開発した。一つは、長方形板上に流れる渦電流計算コード(EDDYRECT)である。長方形板は一様で等方な抵抗をもつとし、外部磁場は一様に面に垂直に加わるとする。他は、軸対称なトーラス形状の導体に流れる渦電流計算コード(EDDYTORUS)である(文献3)。導体は $Z=0$ に関して上下対称で、トロイダル方向に周期的に変化する抵抗を持つとする。外部磁場は上下対称に配置された、軸対称コイルによって与えられる。両者とも長方形要素で計算を行った。3.1節でこの二つのコードの比較を行う。3.2節で軸対称で極限的な場合での数値計算と解析解との比較を行う。

3.1 正方形導体と扇形に変形した導体

EDDYRECTにより、正方形板の渦電流の計算を行う。一辺の長さを 3.927m とし、面抵抗率(体積抵抗率/厚さ)を $10^{-7}\Omega$ とする。図9に固有モード展開した時のモードの電流の流れ図を時定数の大きい順に示す。モードは単位時間(1 sec)のジュール損失が1ジュールとなる様に規格化されている。固有値はこの規格化された電流の磁気エネルギーであり、それはまた、このモードの減衰時定数を表わす。図の中で一つのレベルの間に流れる電流は($Z\text{-LEVEL}) \times (Z\text{-FACTOR})(\text{A})$ に等しい。

図10に 1Wb/m^2 の一様磁場を面に垂直に時間的にステップ状に加えた場合の渦電流の時間変化を示す。電流は、外部に寄った分布から、電流を減衰しながら、第1モードの分布に近づく。

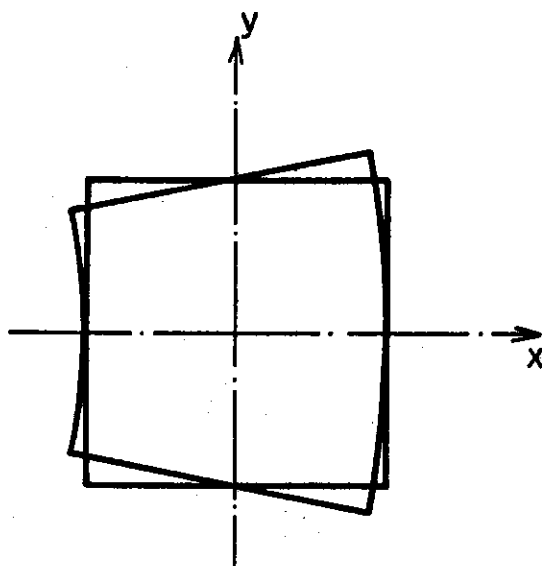


図11. 正方形板と扇形に変形した平板。扇形の角度は $\pi/16$ である。

図11の様に扇形に変形した時の渦電流をEDDYTORUSによって求める。扇形の角度は $\pi/16$ である。EDDYTORUSにおいては、一般に上下対称、周期的に導体があるとして計

算するのであるが、対称位置にある導体との結合を0とすることにより、上側で一つの周期だけの渦電流を計算することが可能である。図12にこの場合のモードの流れ図を示す。第1, 3, 4, 6モードは図9の正方形の第1, 2, 3, 4モードに対応する。扇形変形のためやや異った分布をする。時定数はほぼ一致する。第2, 5モードは正方形における対応がないが、これは正方形の場合には図11のy軸に関して対称を仮定しており、y軸に対しての反対称モードが現われないためである。図13に一樣磁場を加えた時の渦電流の流れ図を示す。ほぼ正方形の場合と一致する。

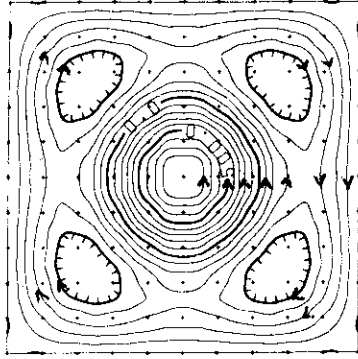
3.2 抵抗性極限と誘導性極限

まず、抵抗性極限として、時間的に一定電圧が加っている時を考える。導体として断面が円形で軸対称の円環を考え、抵抗はトロイダル方向に一樣で、中心軸からの距離に反比例する面抵抗率を持つとし、トロイダル方向の一周抵抗を断面の全ての点で等しくする。変流器コイルは内部に磁場を作らず、外部にのみ磁束を持つ様に配置されている。その位置とターン数を図15に示す。その様にするると、円環には、トロイダル方向に時間的に一定の電圧が加わる。この場合、トロイダル方向の電流密度は全ての点で等しくなる。解析的に 2.067×10^4 A/m の電流密度になる場合に対して、EDDYTORUS で計算したところ、 $2.069 \sim 2.072$ A/m と良い一致が得られた。

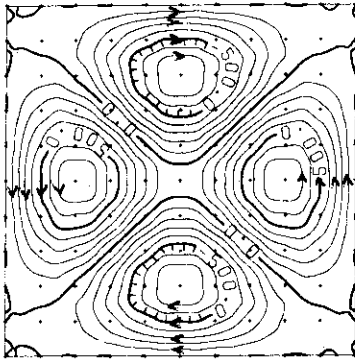
次に、誘導性極限の場合を考える。上に示した円環に対し、変流器電流を時間的にステップ状に変化させると、円環上には、変流器電流と逆方向に電流が流れ、また円環内部には磁場を作らない様に分布する。大半径3.03m、小半径1.035mの円環に、5.5MATの変流器磁場を加える。この場合に対して、EDDYTORUS を適用したところ、電流分布は文献4に示されている、内部に磁場をつくらない電流分布と良く一致し、3.25MATの電流がトロイダル方向に流れる。その電流分布に対し、内部の磁場を計算したところ $-20 \sim 20$ Gauss程度となった。この値は電流が非常に大きいのに比べて小さく、ほとんど内部に磁場を作っていないことがわかる。

上の二つの場合の、計算コードによるものと、解析解との良い一致から、この計算方法が、少なくとも、トロイダル方向に一樣な場合には、相互の抵抗とインダクタンスの効果が正しく入っていると思われる。

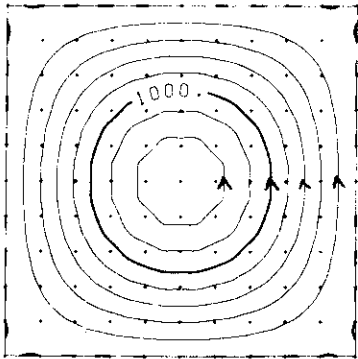
EIGEN MODE NO. 3
 EIGENVALUE 2.174951E+00
 Z-FACTOR 10.0**0
 Z-LEVEL 100.



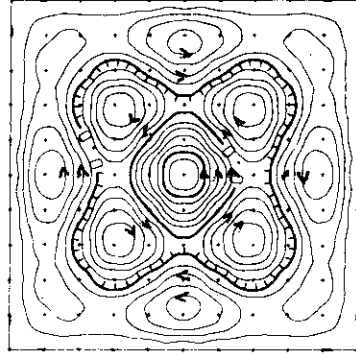
EIGEN MODE NO. 2
 EIGENVALUE 2.219771E+00
 Z-FACTOR 10.0**0
 Z-LEVEL 100.



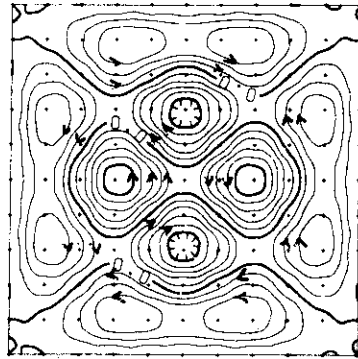
EIGEN MODE NO. 1
 EIGENVALUE 4.777923E+00
 Z-FACTOR 10.0**6
 Z-LEVEL 200.



EIGEN MODE NO. 6
 EIGENVALUE 1.267139E+00
 Z-FACTOR 10.0**0
 Z-LEVEL 100.



EIGEN MODE NO. 5
 EIGENVALUE 1.277428E+00
 Z-FACTOR 10.0**0
 Z-LEVEL 100.



EIGEN MODE NO. 4
 EIGENVALUE 1.673639E+00
 Z-FACTOR 10.0**0
 Z-LEVEL 100.

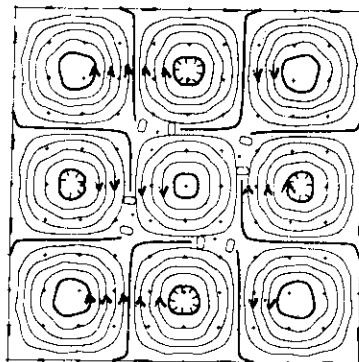
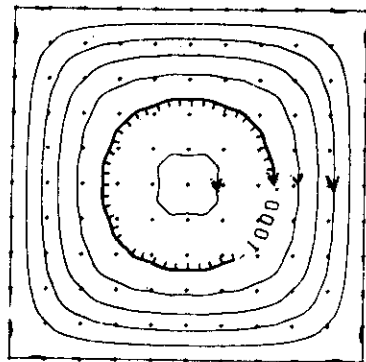
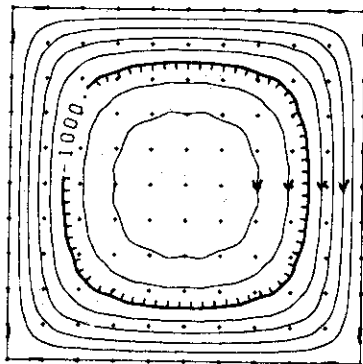


図9. 正方形板上の渦電流の固有モード図。

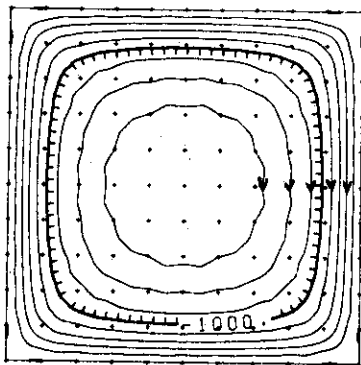
TIME STEP NO. 6
 TIME 3.162278E+00
 Z-FACTOR 10.0 3
 Z-LEVEL 200.



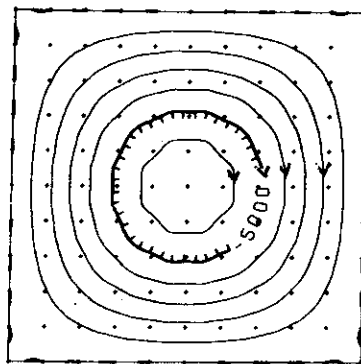
TIME STEP NO. 5
 TIME 1.778279E+00
 Z-FACTOR 10.0 3
 Z-LEVEL 200.



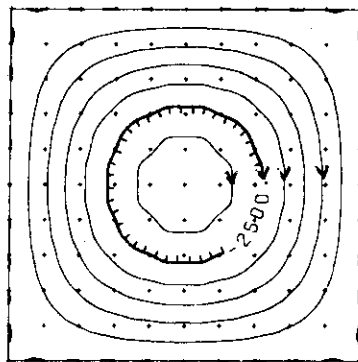
TIME STEP NO. 4
 TIME 1.000000E+00
 Z-FACTOR 10.0 3
 Z-LEVEL 200.



TIME STEP NO. 9
 TIME 1.778280E+01
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME STEP NO. 8
 TIME 1.000000E+01
 Z-FACTOR 10.0 2
 Z-LEVEL 500.



TIME STEP NO. 7
 TIME 5.623414E+00
 Z-FACTOR 10.0 2
 Z-LEVEL 1000.

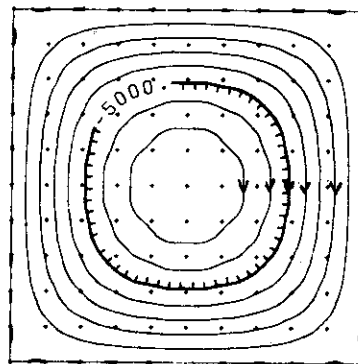
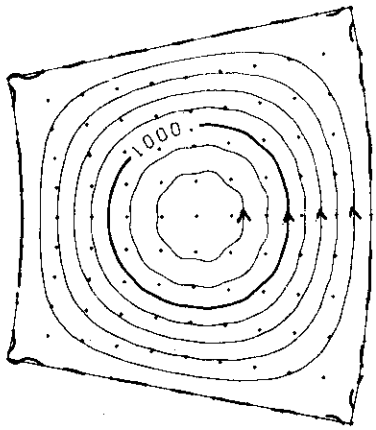
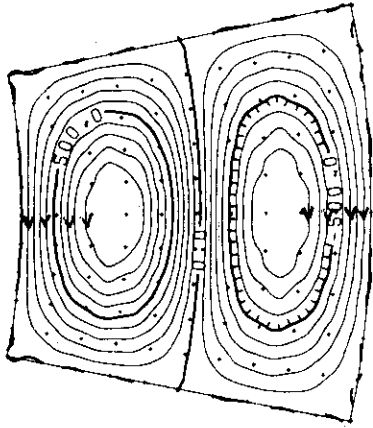


図 10. 正方形板に一樣な磁場 (1WB/m²) をステップ状に加えた時の渦電流。

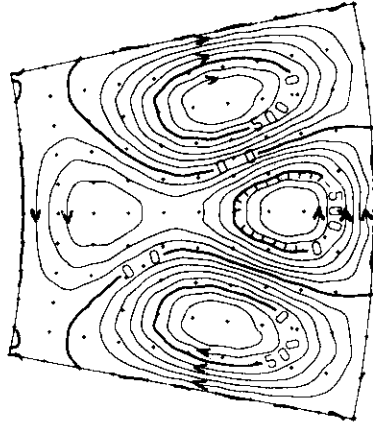
EIGEN MODE NO. 1
 EIGENVALUE 4.768144E+00
 Z-FACTOR 10.0 0
 Z-LEVEL 200.



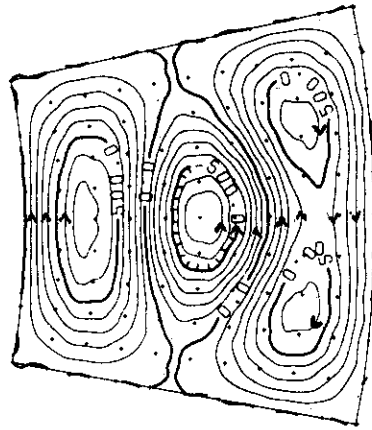
EIGEN MODE NO. 2
 EIGENVALUE 3.152900E+00
 Z-FACTOR 10.0 0
 Z-LEVEL 100.



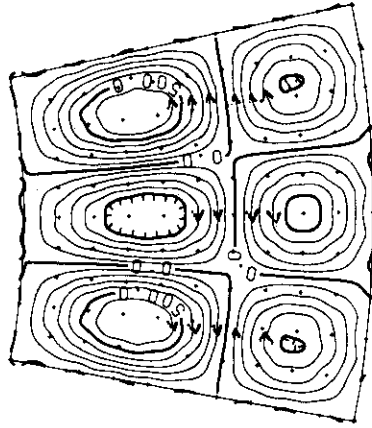
EIGEN MODE NO. 3
 EIGENVALUE 2.248767E+00
 Z-FACTOR 10.0 0
 Z-LEVEL 100.



EIGEN MODE NO. 4
 EIGENVALUE 2.185284E+00
 Z-FACTOR 10.0 0
 Z-LEVEL 100.



EIGEN MODE NO. 5
 EIGENVALUE 1.939050E+00
 Z-FACTOR 10.0 0
 Z-LEVEL 100.



EIGEN MODE NO. 6
 EIGENVALUE 1.652805E+00
 Z-FACTOR 10.0 0
 Z-LEVEL 100.

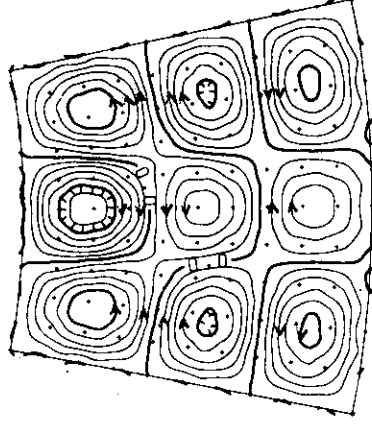
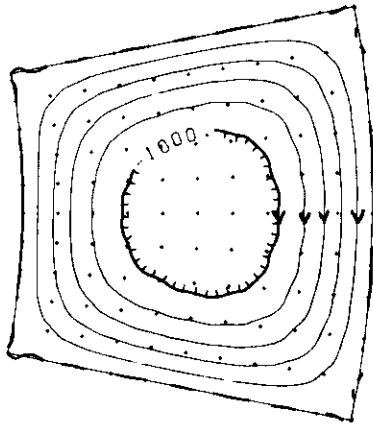
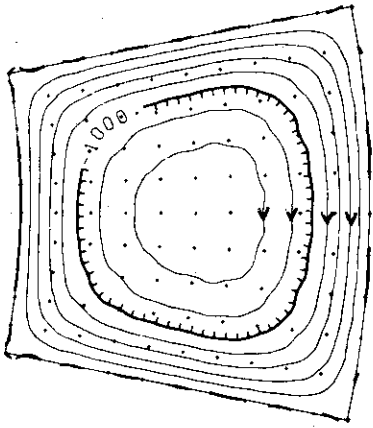


図 12. 扇形に変形した平板上の渦電流の固有モード図。

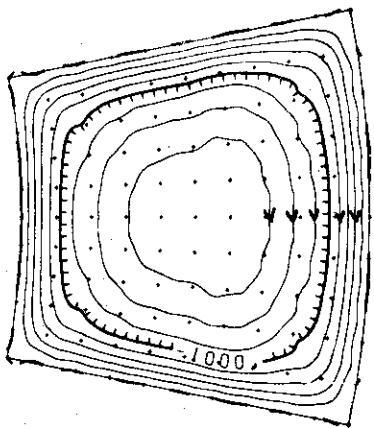
TIME STEP NO. 6
 TIME 3.162278E+00
 Z-FACTOR 10.0 3
 Z-LEVEL 200.



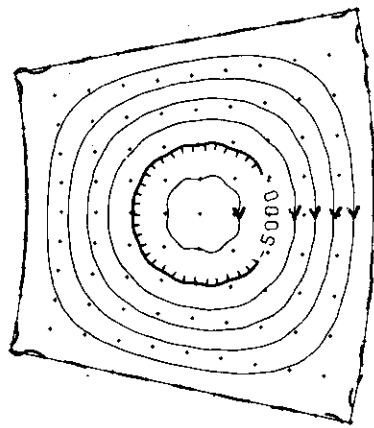
TIME STEP NO. 5
 TIME 1.778279E+00
 Z-FACTOR 10.0 3
 Z-LEVEL 200.



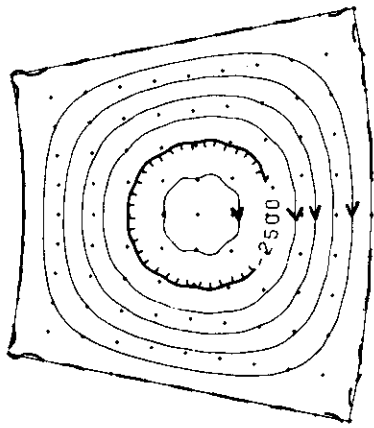
TIME STEP NO. 4
 TIME 1.000000E+00
 Z-FACTOR 10.0 3
 Z-LEVEL 200.



TIME STEP NO. 9
 TIME 1.778280E+01
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME STEP NO. 8
 TIME 1.000000E+01
 Z-FACTOR 10.0 2
 Z-LEVEL 500.



TIME STEP NO. 7
 TIME 5.623414E+00
 Z-FACTOR 10.0 2
 Z-LEVEL 1000.

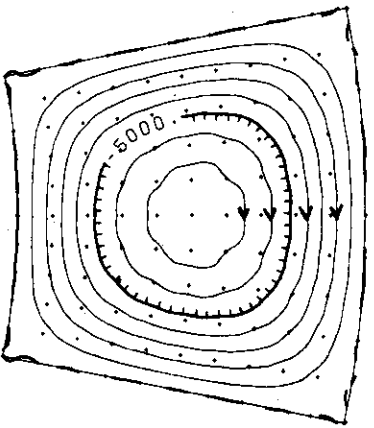


図 13. 扇形に変形した平板に一樣な磁場 (1WB/m²) をステップ状に加えた時の渦電流。

4. 上下架台上の渦電流

JT-60においては、トロイダルコイルを支持するために、上部と下部に非磁性導体板が設置される。ほぼ円形をした半径7.5mで厚さ±20cmの導体板が上下 $Z=\pm 3.2$ のところに置かれる。変流器コイルや垂直磁場コイルの電流変化により、この架台上に渦電流が生ずる。渦電流による誤差磁場が、特にプラズマ励起時に問題となる。EDDYTORUSによる計算結果を述べる。

図14に、架台の計算モデルの、ポロイダル断面を示す。導体は0.25mから7.5mまであり、厚み0.2mで、体積電気抵抗率を $\rho=6.9 \times 10^{-7} \Omega\text{m}$ (SUS304N)とする。径方向に全くカットのない時、 90° 、 45° 、 22.5° ごとに等間隔にカットの入った場合を考えた。要素分割は、 r 方向には10分割し、トロイダル方向には、一つのセクターのカットから対称の中心までを6等分割した。 r 方向には、図14の様に要素の縦横の比を一定にするため、等比数列的に要素の大きさを变化させた。

図15に変流器(OH)コイルと垂直磁場(B_v)コイルの位置とターン数を示した。OHコイルは全部で60ターン、 B_v コイルは片側32ターンである。プラズマは $R=3.03\text{m}$ 、 $Z=0.0\text{m}$ で線電流と仮定した。プラズマ励起時には、OHコイルの1ターンの電流は、

$$I_f = I_{f0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad I_{f0} = 90 \text{ kA}, \tau = 30 \text{ msec} \quad (4-1)$$

と変化するとした。 B_v コイルに対しては、

$$I_v = I_{v0} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad I_{v0} = 25 \text{ kA}, \tau = 30 \text{ msec} \quad (4-2)$$

で与えた。またプラズマ電流は、

$$I_p = I_{p0} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad I_{p0} = 1 \text{ MA}, \tau = 30 \text{ msec} \quad (4-3)$$

とした。 I_f 、 I_v 、 I_p の時間変化や比は精度の良いものではなく、概算的なもので、大体の傾向をつかむために決定した。 I_f 、 I_v 、 I_p に対する、渦電流の応答を個々に調べ、全体としてはそれぞれの寄与を加え合えばよい。もし電流の比が異った場合には、その比でそれぞれの寄与を加え合せる。

22.5° ごとにカットを入れた場合の、渦電流の流れ図を時間ごとに図16~19に示す。図16はOHコイルのみ、図17は B_v コイルのみ、図18はプラズマのみをそれぞれ考慮したものであり、図19はこれらを加え合せたものである。OHコイルによる寄与が最つとも大きい。 B_v コイルによるものは、OHコイルによるものよりも、やや外側に寄った分布をする。またプラズマによる分布は、ほぼOHコイルによるものと一致するが、逆方向で、値は小さい。全体を加え合せたものは、OHコイルのみによるものと大きくは違わない。図20~23にカットの入れ方を変えた時の、10msecにおける、セクター中心でのトロイダル方向電流分布を、OH、 B_v コイル、プラズマ、それらの和をそれぞれ示す。 360° のは全くカットが入らない時で、トロイダル方向に一様な場合である。カットを入れた時は、ある点で電流が反転するが、分布はカットのない時と相似な形となる。カットを多く入れるほど電流が小さくなることが分る。

図24に図の様に三つの穴を入れた場合の渦電流を示す。OH, B_v コイル, プラズマの寄与を加え合せたものである。図19と比較すると, 電流は穴の外側を迂回して通り, 全体として少ししか, 電流が小さくならない。かえって, 穴の周辺で電流密度が増す。より電流を小さくするためには, もっと効率よく, 電流の通路を切る様に穴やカットを入れる必要がある。

図25に 2.25° ごとにカットを入れた時のセクター中心でのトロイダル方向電流分布の時間変化を示す。OHコイルによるものである。図26に一つだけのセクターを取り出し, 上下対称, 周期条件を取り去った場合のものである。セクター間の磁気相互作用の大きい, 時間の小さい時には, 分布が異なるが, 時間がたつと, ほとんど一致する。これらの図においてRの小さい所で, 振動したり, 非常に急激に変化しているのは, この位置で電流分布の変化が大きいために起こる計算誤差と思われる。この領域は非常に小さく, 全体に対してほとんど影響を与えないことが, メッシュの切り方を変えることによって分った。図27, 28に $R=3.2\text{m}$ でのR方向への電流分布を示す。図27はセクター間の結合を考えた場合で, 図28は考えない場合である。電流は正の時がトラス内側向きである。トロイダル方向の角度は0がカットのところに相当し, $\pi/16$ がセクターの中心に相当する。図27において最初は非常にカットに寄った分布を示す。時間がたつにつれてなだらかになり, セクター間の結合を考える時と考えない時が一致してくる。

計算容量と時間の制限のために, あまり多くのメッシュをR方向に入れることができなかった。そのために, 一つの要素のR方向の長さが, トロイダル方向の長さよりも非常に大きくなった。図29, 30にR方向に10分割した場合と, 20分割した場合の電流分布を示す。セクター間の相互作用は考慮せず, OHコイルのみによるものである。両者は非常に良く一致し, 10分割でも十分であることがわかる。セクター間の相互作用を考えた時も同様であると思われる。

次に, 渦電流による誤差磁場の評価を行う。図31~34にOH, B_v コイル, プラズマ, それらの和によって誘起される渦電流の作る磁場を示す。磁場は $R=3.03\text{m}$, $Z=0$ (プラズマ中心)におけるZ方向の磁場での時間変化を示す。 90° ごとにカットを入れた場合にはカットの位置(破線)と, セクターの中心(実線)で少し値が異なり, トロイダル方向に磁場が変化する。より多くカットを入れると, ほとんど磁場の変化はみられない。図からわかる様に, OHコイルによる寄与が圧倒的に大きい。 2.25° にすると誤差磁場は全体で最大40 Gauss程度で, あまり, プラズマには影響がないと思われる。図34で 2.25° に対する破線は, 図24の三つの穴を入れた時のもので, 穴がない時より, やや小さくなる。

図35に磁場のR方向への差 ΔB_z を示す。 2.25° ごとにカットを入れた場合である。 $R=3.53\text{m}$ での磁場から $R=2.53\text{m}$ での磁場を差し引いたものである。破線は三つの穴を入れた場合である。 ΔB_z はあまり大きくなく, 磁場のn値 $n = -\frac{R}{B_z} \frac{dB_z}{dR}$ におよぼす影響は小さい。

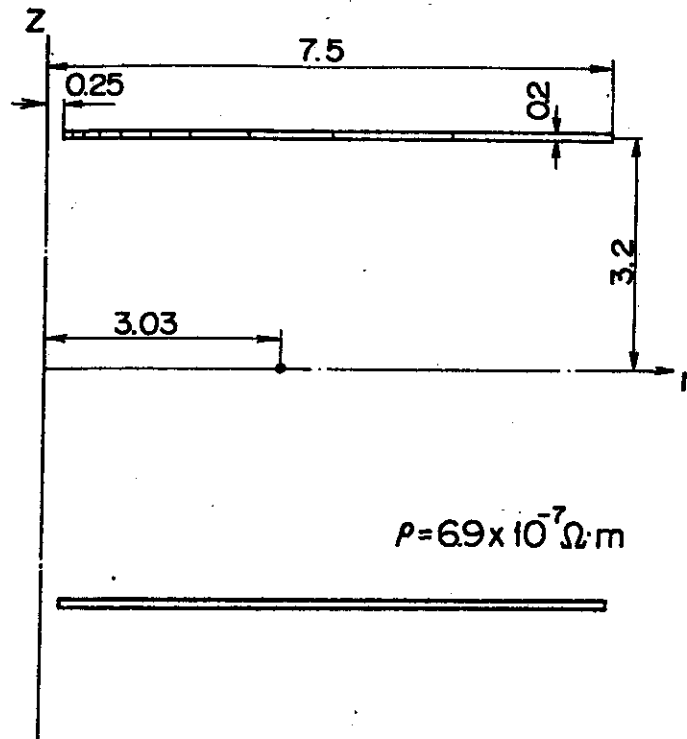


図 14. 上下架台のモデルのポロイダル断面

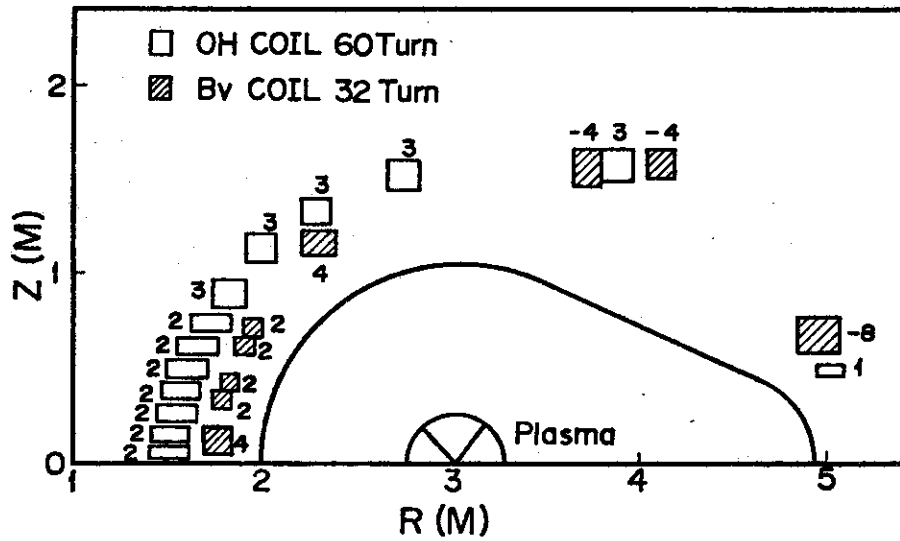


図 15. 変流器 (OH) コイルと垂直磁場 (B_v) コイルの位置とターン数。
プラズマの位置と、真空容器の断面も示した。

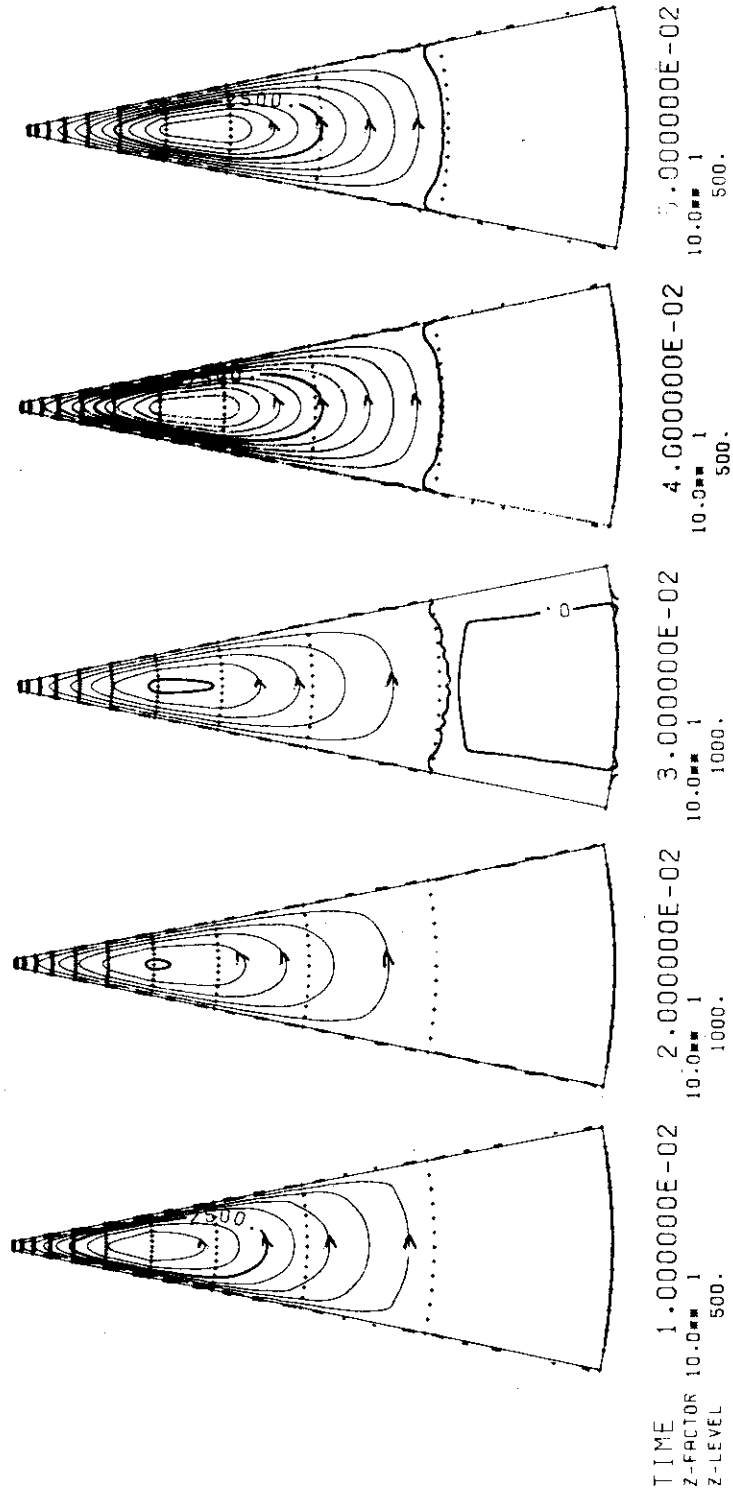


図 16. 上下架台 (22.5°) におけるプラズマ励起時の渦電流。OH コイルのみによって励起される渦電流。時刻は秒単位であり, 等高線の一つの間隔に流れる電流は (Z - FACTOR) × (Z - LEVEL) (A) に等しい。

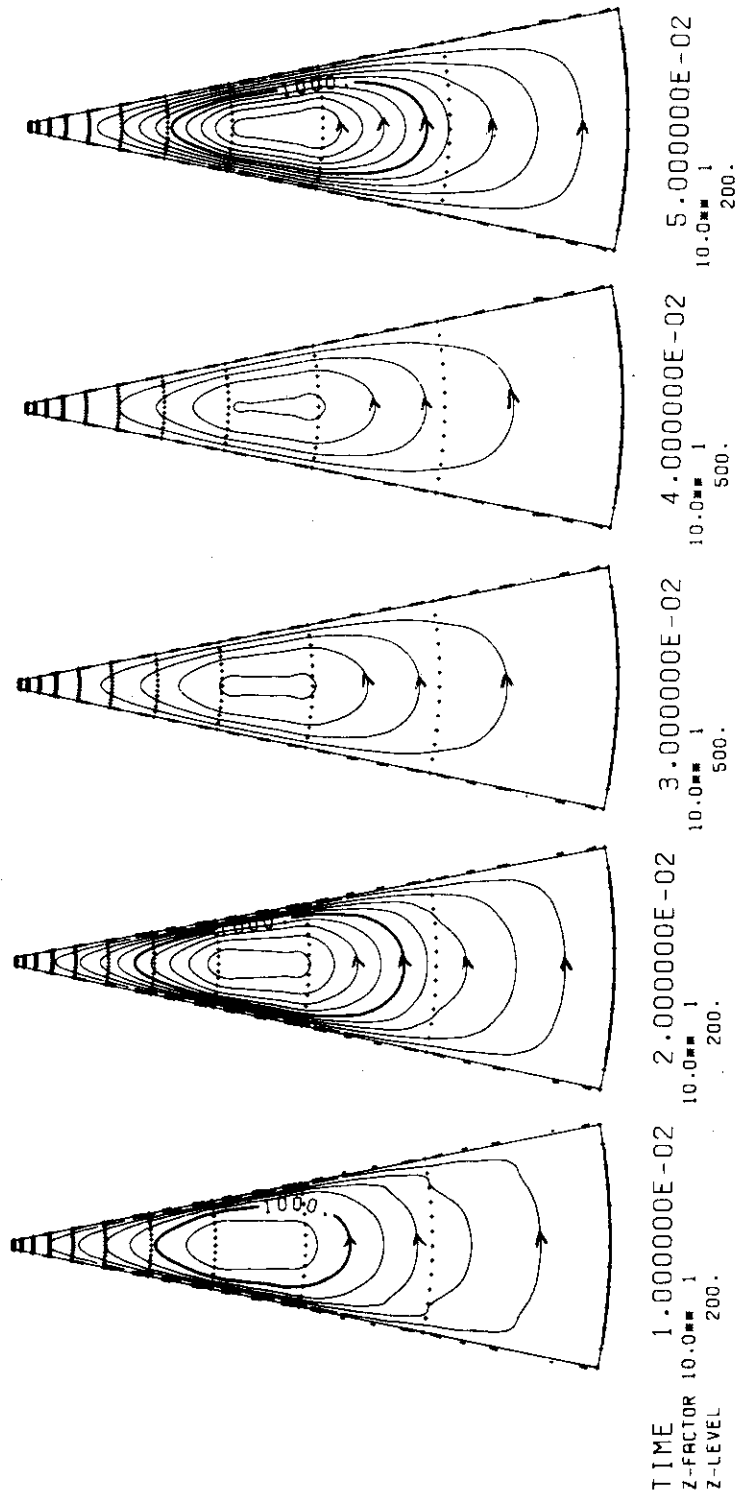


図17 上下架台 (22.5°) におけるプラズマ励起時の渦電流。B_vコイルのみによって励起されるもの。

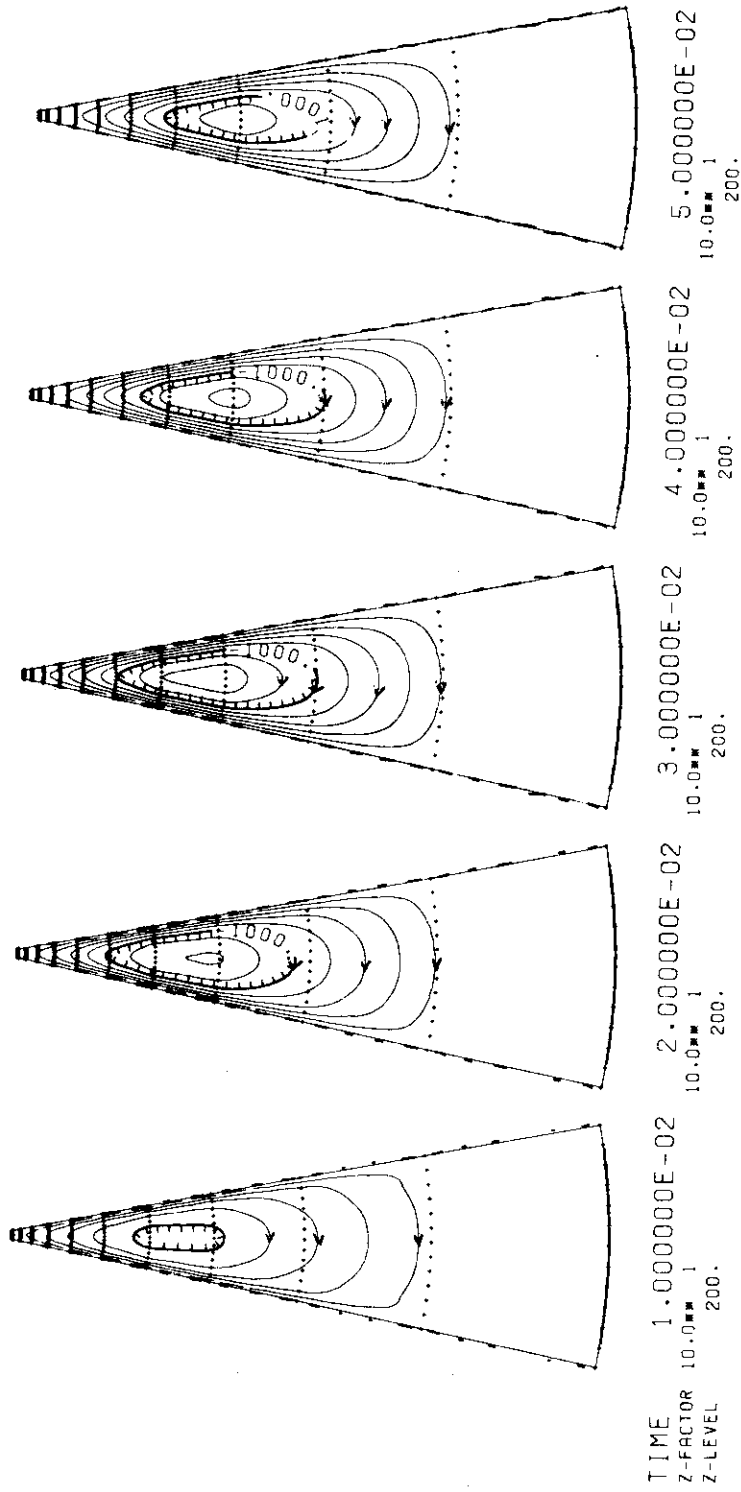


図 18. 上下架台 (22.5°) におけるプラズマ励起時の渦電流。プラズマ (線電流) のみによって励起されるもの。

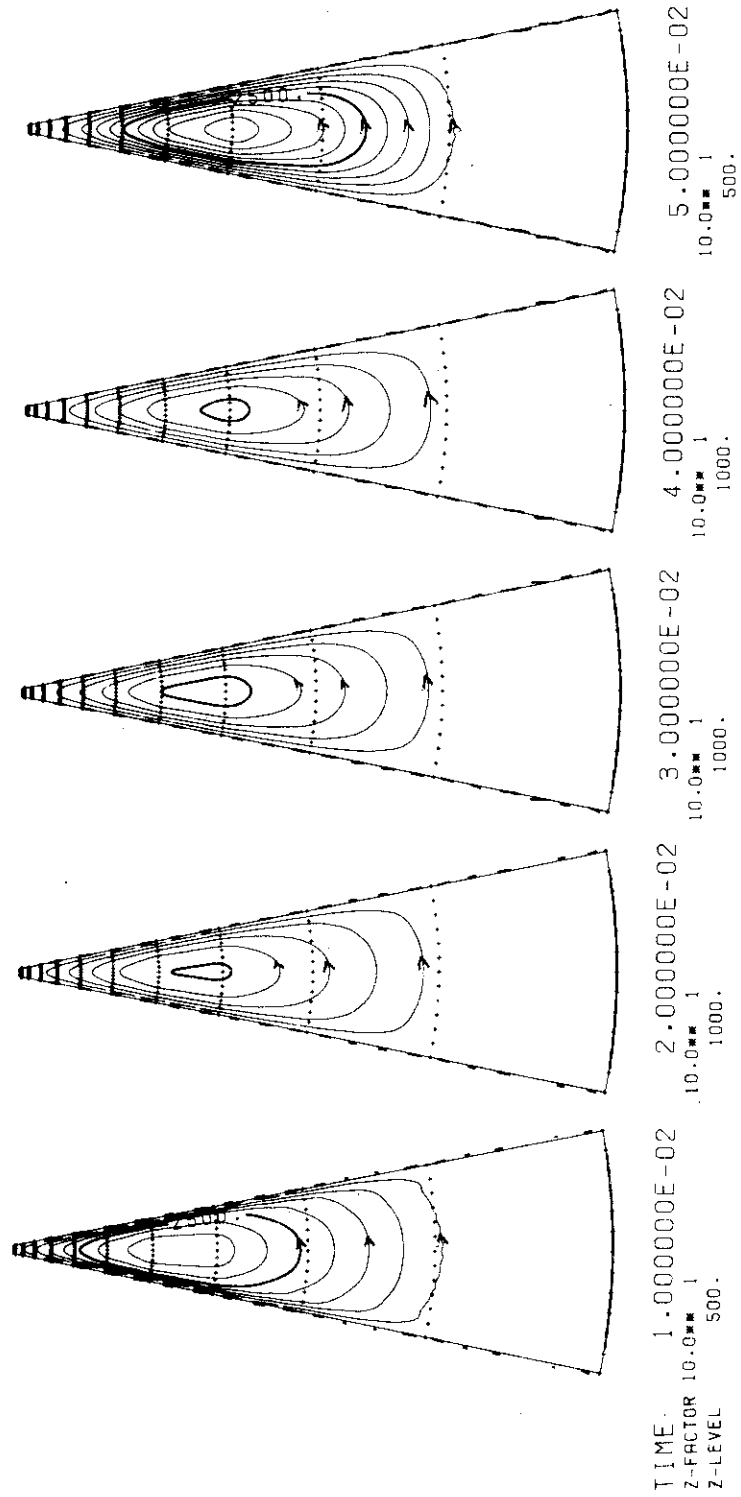


図19. 上下架台 (225°) におけるプラズマ励起時の渦電流。OHコイル,
B_yコイル, プラズマ (線電流) の合計によって励起されるもの。

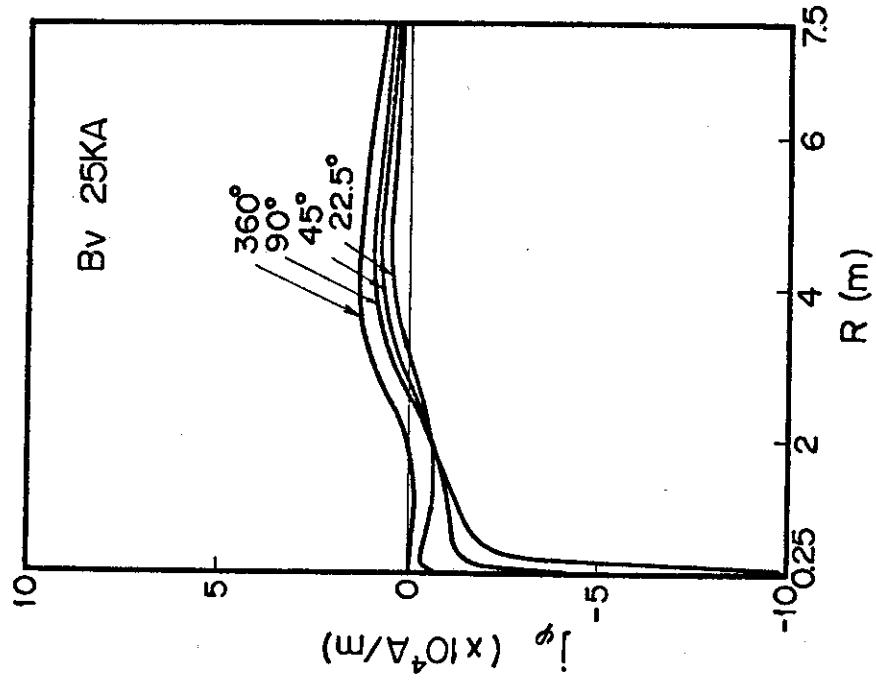


図 21. 上下架台におけるプラズマ励起時 (10 msec) のセクター中心でのトロイダル方向電流分布。By コイルのみによって励起されるもの。

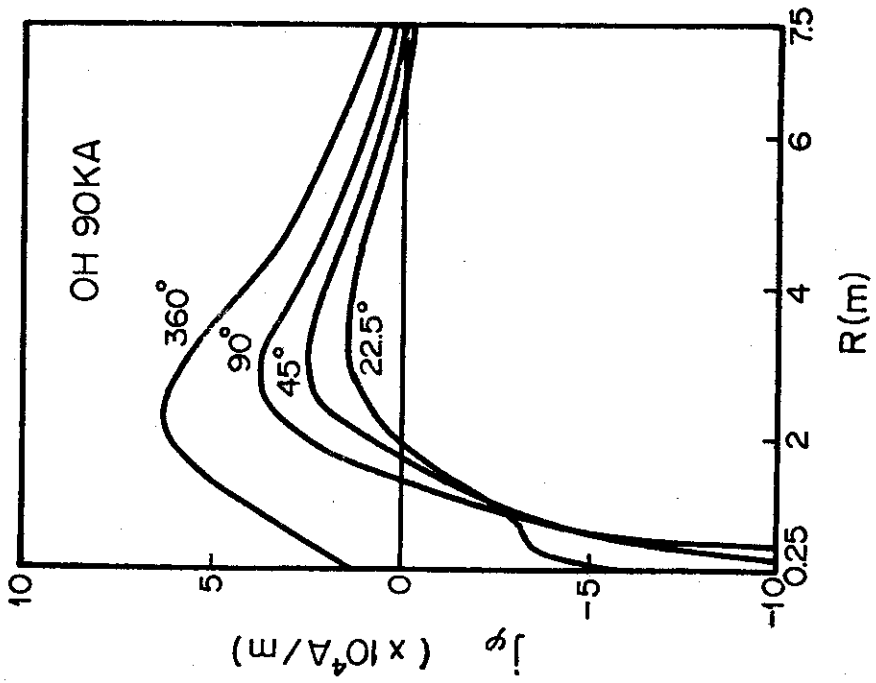


図 20. 上下架台におけるプラズマ励起時 (10 msec) のセクター中心でのトロイダル方向電流分布。OH コイルのみによって励起されるもの。

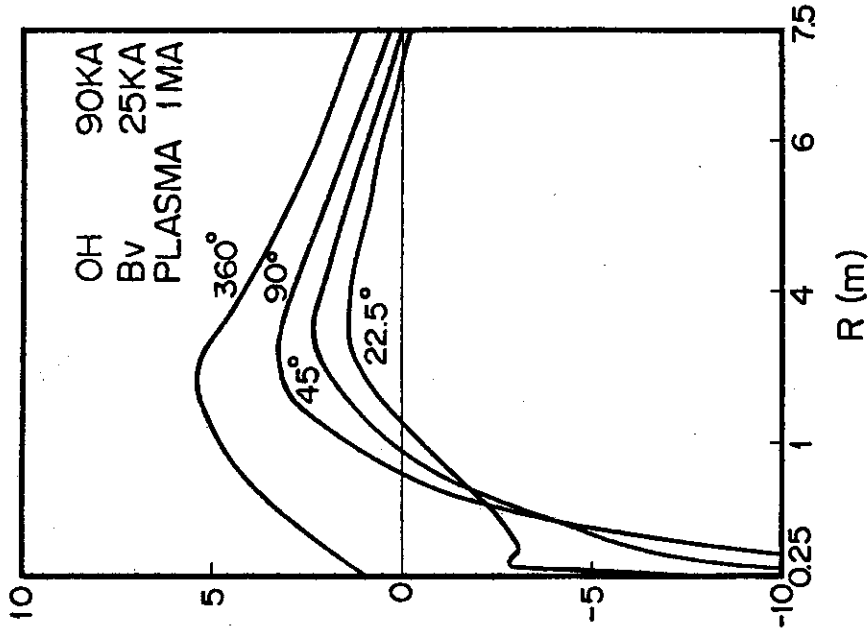


図 22. 上下架台におけるプラズマ励起時 (10 msec) のセクター中心でのトロイダル方向電流分布。プラズマ (線電流) により励起されるもの。

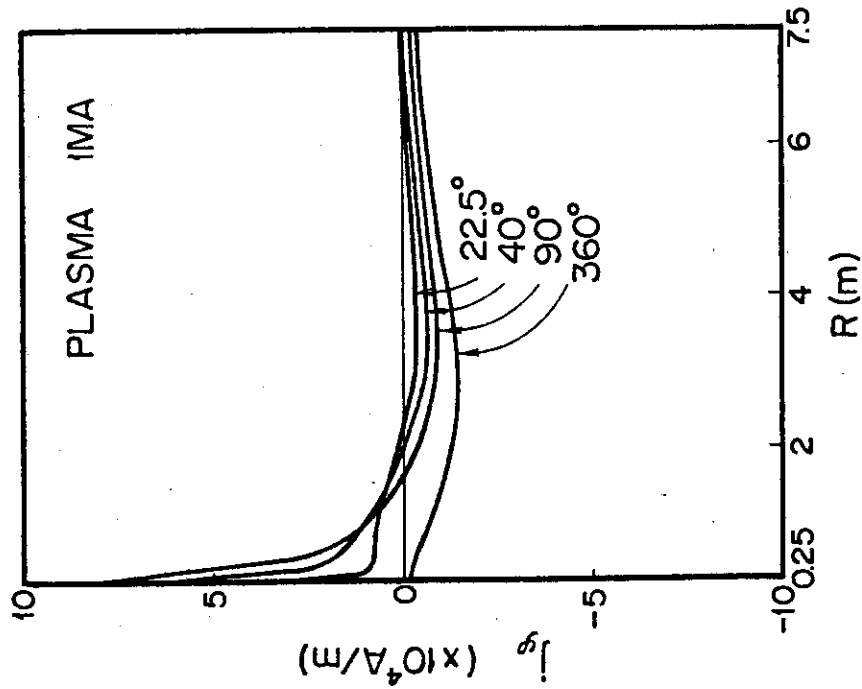


図 23. 上下架台におけるプラズマ励起時 (10 msec) のセクター中心でのトロイダル方向電流分布。OHコイル、BVコイル、プラズマ (線電流) の合計によって励起されるもの。

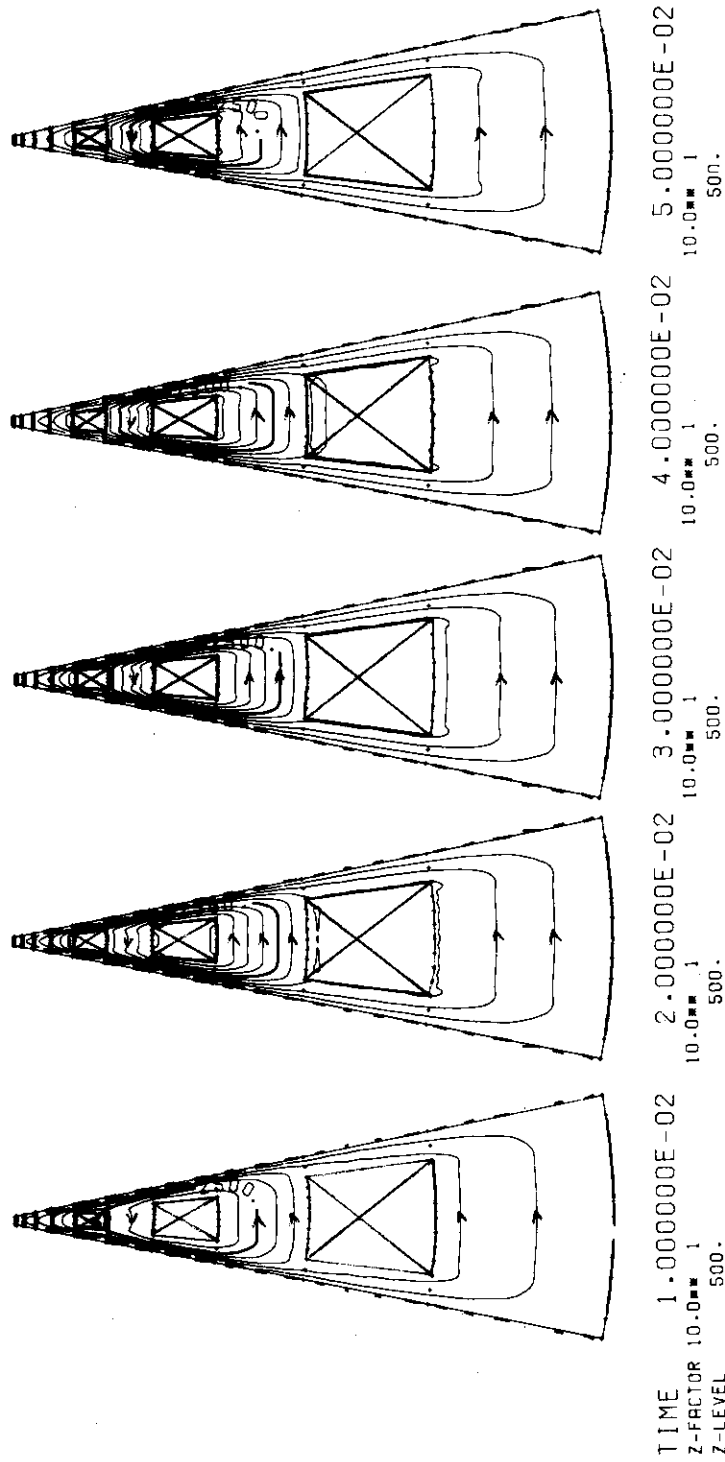


図 24. 上下架台で三個の穴を入れた時のプラズマ励起時の渦電流。OHコイル, B_V コイル, プラズマ (線電流) の合計によって励起されるもの。

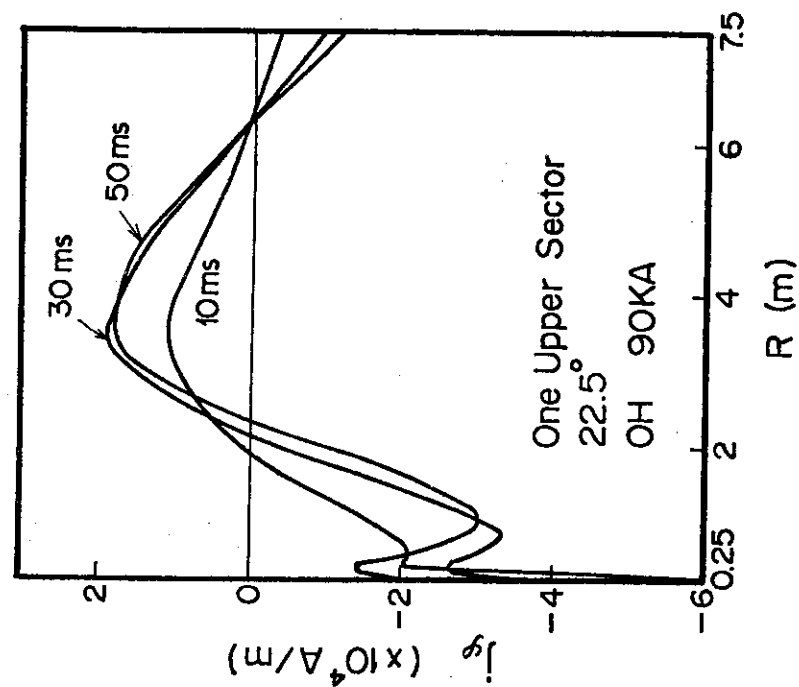


図 26. 一つのセクター (22.5°) に OH コイル磁場が加わった時の、セクター中心でのトロイダル方向電流分布。

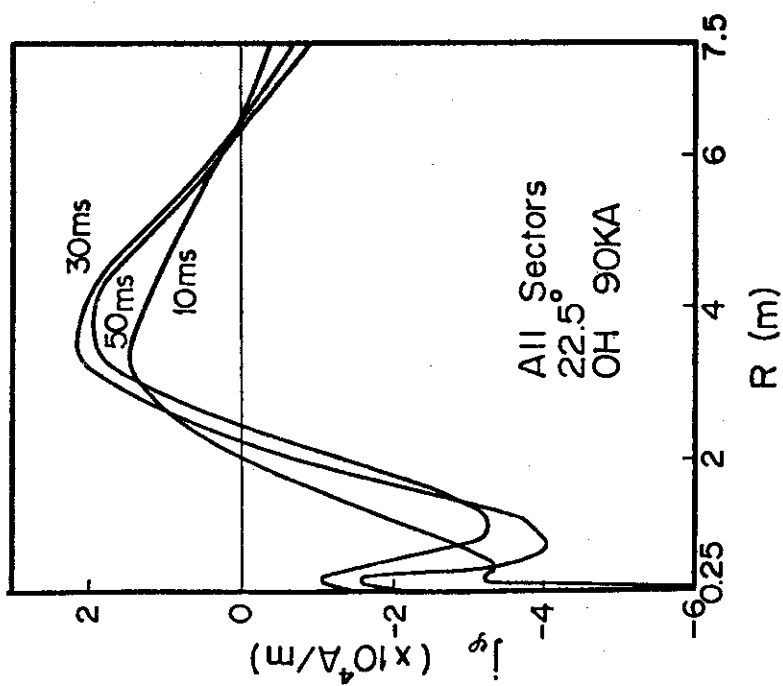


図 25. 上下架台 (22.5°) におけるプラズマ励起時のセクター中心でのトロイダル方向電流分布。OH コイルのみによるもの。

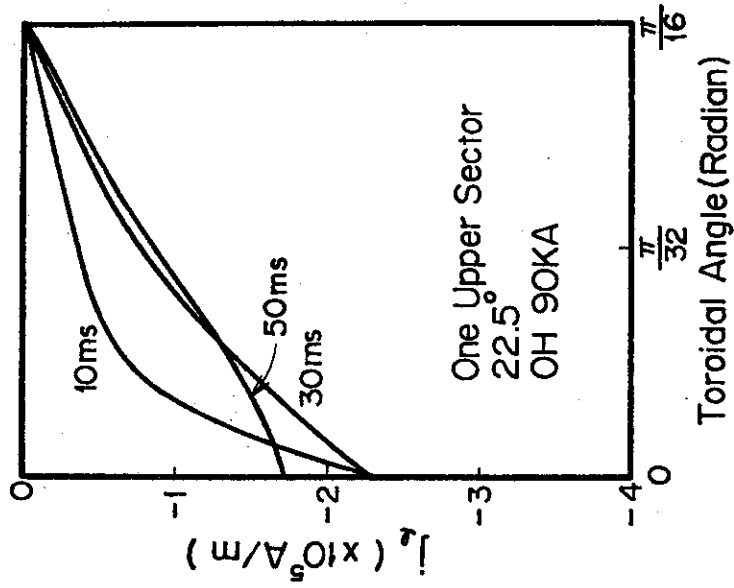


図 28. 一つのセクター (22.5°) に OH が加わった時の、 $R = 2.31 \text{ m}$ でのポロイダル方向電流分布。

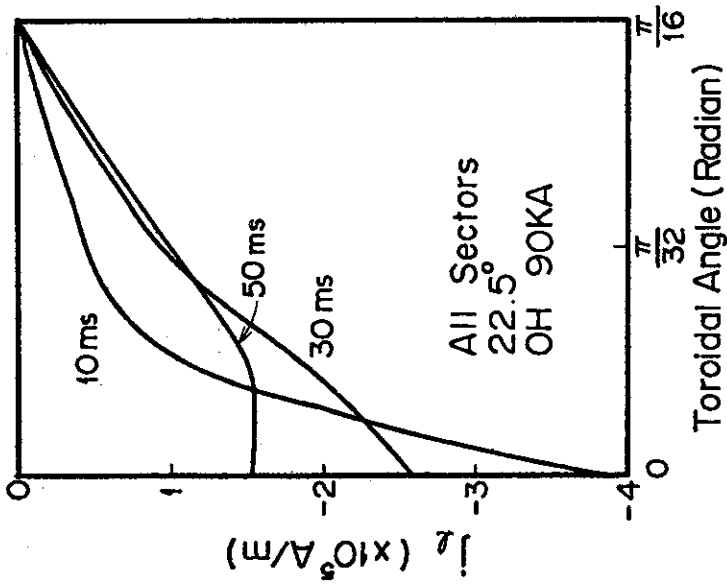


図 27. 上下架台 (22.5°) における、プラズマ励起時の $R = 2.31 \text{ m}$ でのポロイダル電流分布。OHコイルのみによるもの。

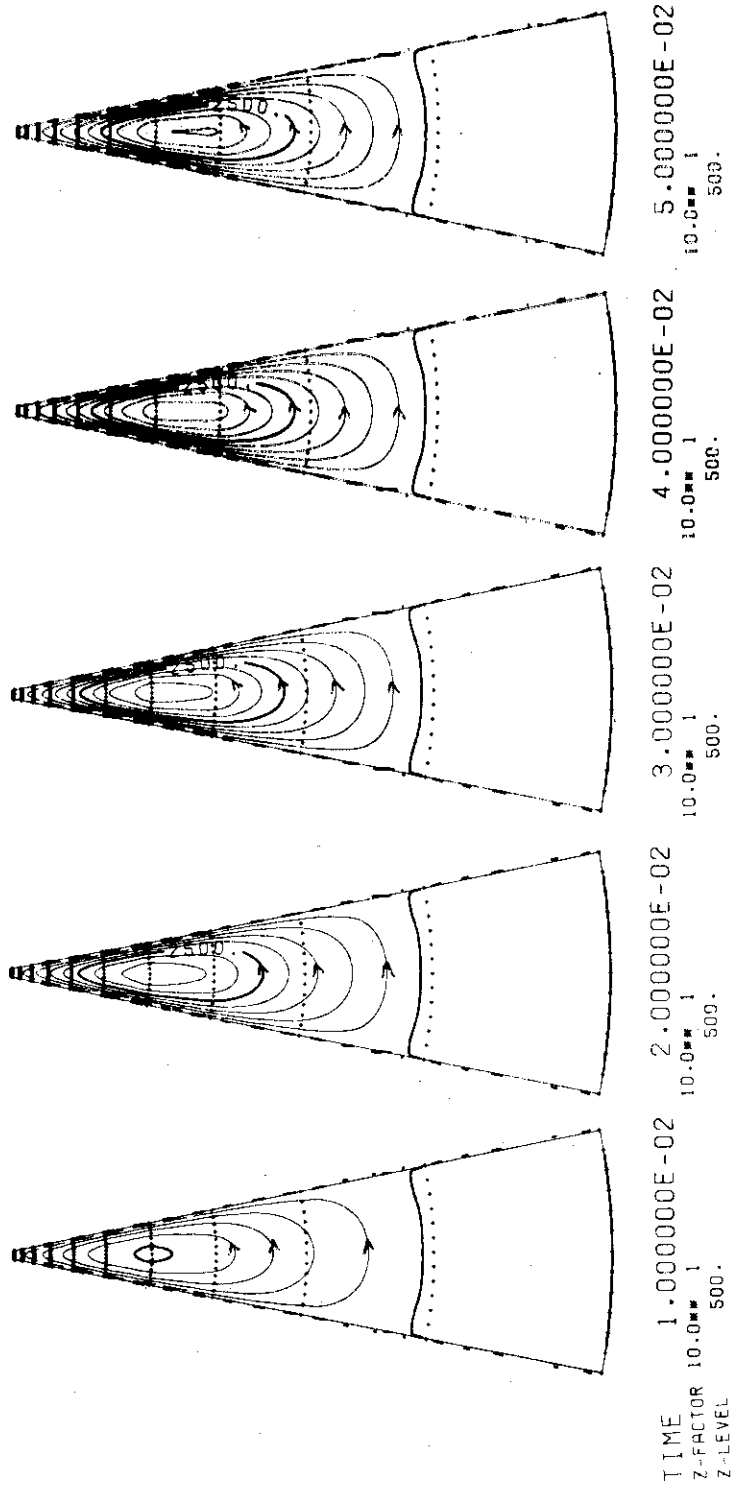


図29. 一つのセクター(22.5°)にOHコイル磁場が加わった時の渦電流。
R方向10分割して計算したものの。

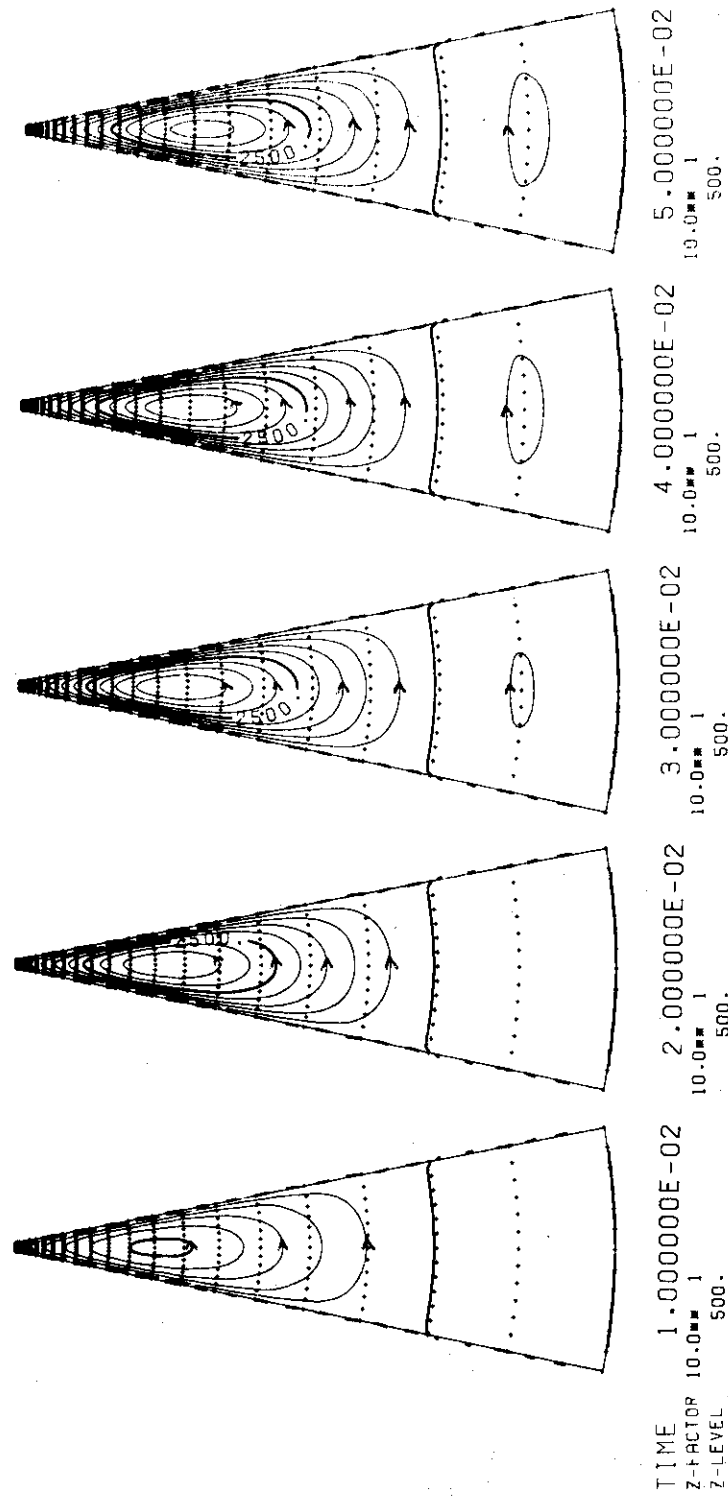


図 30. 一つのセクター (225°) にOHコイル磁場が加わった時の渦電流。
R 方向に 20 分割して計算したもの。

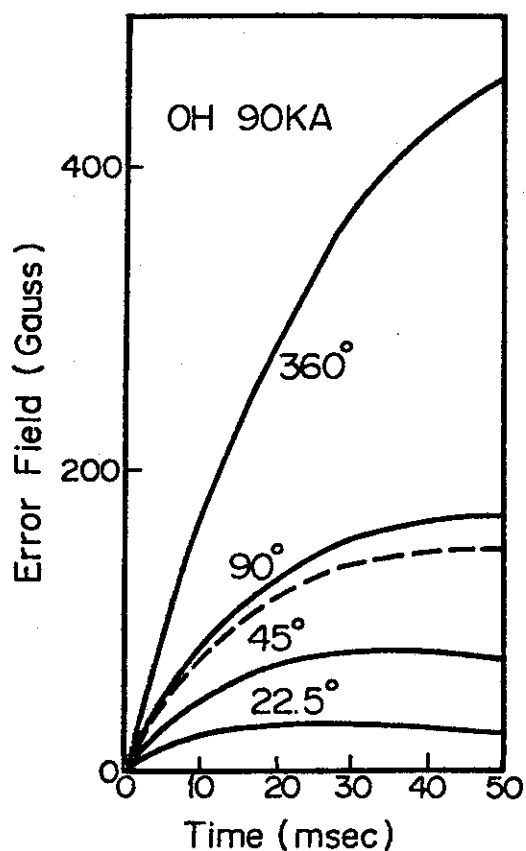


図 31. 上下架台上の渦電流によるプラズマ励起時での誤差磁場。OHコイルによって励起される渦電流によるもの。磁場は $R = 3.03\text{m}$ におけるZ方向磁場。90°に対する実線はセクター中心、破線はカットの位置における磁場。他の場合はほとんどロイダル方向の差はない。

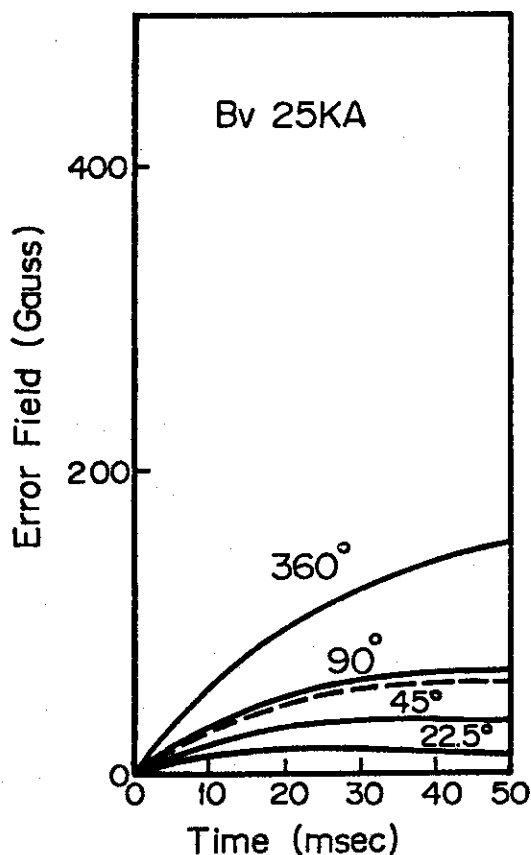


図 32. 上下架台上の渦電流によるプラズマ励起時での誤差磁場。B_Vコイルによって励起される渦電流によるもの。

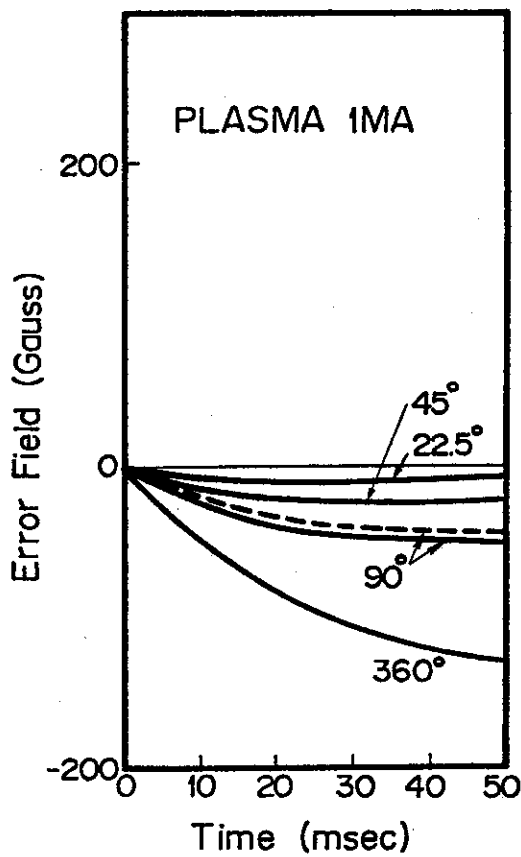


図 33. 上下架台上の渦電流によるプラズマ励起時での誤差磁場。プラズマ(線電流)によって励起される渦電流によるもの。

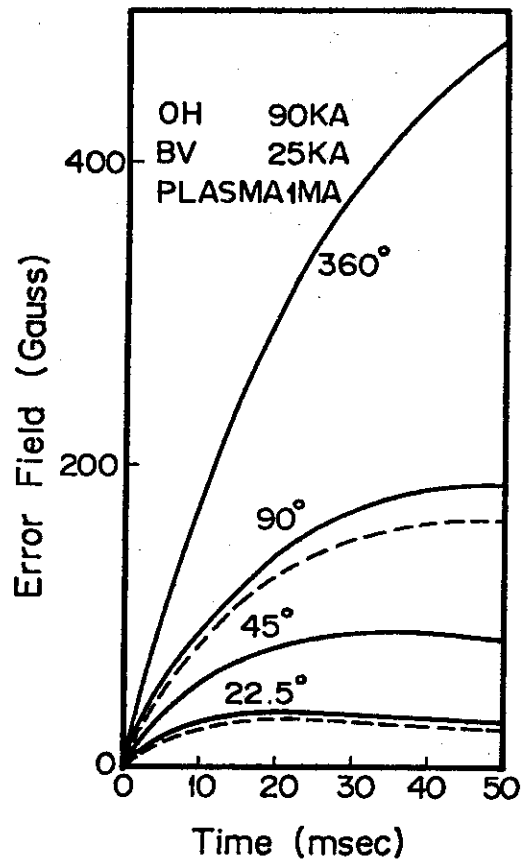


図 34. 上下架台上の渦電流によるプラズマ励起時での誤差磁場。OHコイル, B_V コイル, プラズマ(線電流)の合計によって励起される渦電流によるもの。22.5°に対する破線は、図 24 の穴を入れた時。

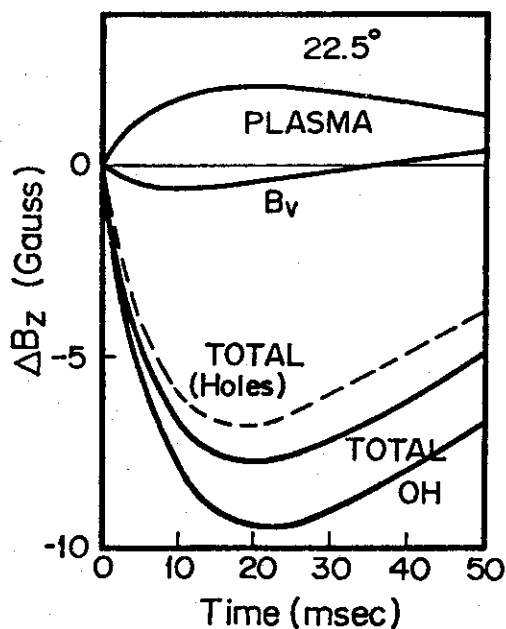


図 35. 上下架台(22.5°)上の電流による、プラズマ励起時での磁差磁場のR方向への変化。 $\Delta B_z = B_z(3.53\text{m}) - B_z(3.25\text{m})$ である。OHコイル, B_V コイル, プラズマによって個々に励起されるものと、その合計によって励起されるものを示している。合計で破線は、図 24 の三個の穴を入れた場合である。

5. 真空容器上の渦電流

トーラス状の真空容器がプラズマを保持する。JT-60においては、真空容器は大半径約3 m, 小半径約1 mで、厚肉部とベローズ部からなり、それらがほぼ周期的に配置される。材質は共にインコネル625などの非磁性導体である。ベローズはトーラス方向の一周抵抗を増すため、波状になっている。

この真空容器は、プラズマ電流、垂直磁場コイル電流、変流器コイル電流等による磁束変化をまともに受け、相互誘導により、様々の形の渦電流が誘起される。この電流は一方では、トロイダル磁場等との相互作用によって、真空容器に力を加え、他方では、プラズマ領域に磁場を作り、プラズマの平衡、制御に影響を与える。

特に、磁束変化の大きい、プラズマ励起時、プラズマ消滅時、プラズマが不安定でスパイクを生じた時に真空容器上の渦電流が大きな影響を持つようになる。EDDYTORUS をこれらの場合に適用した計算結果を個々に以下に述べる。

真空容器の計算モデルを図36に示す。図はトロイダル方向に半周期(ベローズ部中心から厚肉部中心まで)だけ示されている。ポロイダル断面は、磁気リミターコイルを入れるため、卵形に変形している。トロイダル方向には6周期あるとし、一周期は 60° である。厚肉部はトロイダル方向に 50° で、厚さ4 cm とする。図36の様にポート穴が入るとする。特に断らない限りポート穴はないものとする。ベローズ部は 10° で、厚さ3.54 mm (現設計は2.5 mmであるが、メッシュ分割の都合上、ベローズ部の長さが長くなったために補正を行った。)とする。ベローズは波状になり、実際にはトーラス内側と外側でトーラス方向の巾が等しい。その効果を入れるため、トロイダル、ポロイダル両方向の面導電率をそれぞれ、

$$\sigma_r = \frac{d R_0}{\rho f R} \quad (5-1)$$

$$\sigma_p = \frac{d f R}{\rho R_0}$$

とする。ここで、 d は厚さ、 ρ は体線抵抗率、 R はトーラス軸からの距離で、 $R_0=3.03$ mとした。 f はほぼ、ベローズの山の高さの、ピッチに対する比の2倍に等しく、7.0とした。体積電気抵抗率は、厚肉部、ベローズ部共に $1.3 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ とした。トーラス方向に一樣に流れる電流に対する抵抗は、 $1.33 \text{ m}\Omega$ となる。

計算のメッシュ分割は図36の様にポロイダル方向に15分割、トロイダル方向には、半周期を12分割した。

垂直磁場コイル、変流器コイルの位置、ターン数は、図15の通りである。また、プラズマは $R=3.03$ における、線電流か、小半径 $a=1$ m上に一樣に分布する表皮電流によって近似した。表皮電流は等間隔におかれた120本の線電流によって近似した。

図37に真空容器上の渦電流をモード展開をした場合の、電流の流れ図を、時定数の長い順に示す。電流はトーラス全体の1 sec当りのジュール損失が1 Jになる様に規格化されている。図はベローズ中心からの一周期を z 方向に射影したものを示している。第1モードは時定数14.7 msを持ち、厚肉部でループを描いている。ベローズ部は抵抗が大きく、そこを切る電流

は小さい。ベローズ部を切る電流はより時定数が小さいところで現われる。この計算では 183 個の固有モードが現われ、時定数の一番小さいものは、 $19.4 \mu \text{sec}$ であり、それ以上の時定数を持つ磁場変化に対して適用できると思われる。

5.1 プラズマ励起時

プラズマ励起時における、真空容器上の渦電流の検討を、上下架台に対して行ったと同様に行う。OHコイル、 B_v コイル、プラズマの電流変化は(4-1, 2, 3)式で表わされるとする。

図38にOHコイルのみを変化させた時の渦電流を示す。トロイダル方向に起電力を誘起し、ほぼ一様にトロイダル方向に電流が流れる。厚内部は時定数が長く、最初内部に磁場が入らない様に、トラス内側に寄った分布になる。時間が経過するにつれて、逆に外側に寄った分布に変わる。トロイダル方向への電流は10msecで最大27.0kAに達する。

図39に B_v コイルのみを変化させた時の渦電流を示す。 B_v コイルはほぼ一様な垂直磁場を真空容器に加え、トラスの内側と外側で起電力が逆向きになる。ベローズ部の抵抗が高いために、電流は厚内部でループを描く。

図40, 41にプラズマの電流のみを変化させた時の渦電流を示す。図40はプラズマを線電流で近似した場合であり、図41は表皮電流で近似した場合である。両者の差異はあまり大きくなく、プラズマの電流分布はあまり真空容器上の渦電流に影響を与えない。プラズマはトロイダル方向に一様な起電力と、垂直磁場と同様な起電力を同時に加える。その方向は共に、OHコイルと B_v コイルによるものに対して逆向きである。すなわち、プラズマは真空容器上の渦電流を小さくする働きを示す。

図42はOHコイル、 B_v コイル、プラズマ(線電流)の電流を同時に変化させた場合で、以上三つの場合の和である。最初はOHコイルによるトロイダル方向に一様な電流が大きく、時間が経過するにつれて、 B_v コイルによる厚肉でループを描く電流が大きくなる。

図43は、上の図42における電流のトロイダル方向成分、ポロイダル方向成分を示したものである。JPHI-Lの図はトロイダル方向電流分布の φ (トロイダル方向角度)＝一定の線での l (ポロイダル断面において、トラス最外端からとった周の長さ)に対する依存性である。JL-PHIの図はポロイダル方向電流分布(トラス内向が正)の l ＝一定の線での φ に対する依存性である。 φ , l の一定値に対する位置はそれぞれ、図36に示されている。JPHI-Lの図より分る様に、ベローズ部ではほぼ一様にトロイダル方向に電流が流れ、厚内部では、内部と外部で逆向きの電流が加わり、これが、厚内部でループを描く。真空容器が卵形に変形しているため、外側で特に電流が大きくなる。ポロイダル方向の電流分布は、ベローズ部で小さく、厚内部では最初厚肉の縁に大きい電流が流れ、後には、縁から厚肉中心にほぼ線形で落る分布となる。

図44にポート穴を入れた場合の電流分布を示す。OHコイル、 B_v コイル、プラズマ(線電流)を全て変化させた場合である。図42と比較して、分かる様に、全体としての電流分布は、この程度のポート穴ではほとんど影響を与えられない。ただ、ポート穴周辺で電流密度が

大きくなる。

図45にトロイダル方向に流れる電流のポロイダル断面での積分値 I_r を示す。それぞれ個々に変化させた場合と、それらの和を示す。明らかに、OHコイルによるものが最つとも大きく、プラズマによるものはその逆向きとなる。プラズマの電流分布による差はほとんどなく図示されていない。 B_v コイルによるものは小さい。全体としてはOHコイルによるものが大部分である。

図46に厚肉部でループを描く電流(鞍型電流)の大きさを示す。図は $R=3.011m$ でベローズ部中心から、厚肉中心までの線上を横切る電流を積分したものである。この場合は B_v コイルによるものが大きく、OHコイルによるものは逆向きで、急激に小さくなる。また、プラズマによるものは、 B_v コイルによるものの逆向きである。電流分布による差異はわずかである。

次に、これらの渦電流によって作られる磁場を考察する。図47~50にプラズマ中心($R=3.03m$)におけるZ方向磁場分布の時間変化を示す。 0° はベローズ部中心、 30° は厚肉部中心に相当する。図47はOHコイルによって誘起される渦電流によるものである。最初、厚肉部の磁場が、時定数が長いために小さくなる。時間と共に一様な磁場となる。図48は B_v コイルによるものである。外部から加わる垂直は負方向で、厚肉部でその磁場を大きく打消す。OHコイルによるものと、 B_v コイルによるものが、厚肉でループを描く電流が逆方向にもかかわらず、同じ方向であるのは、OHコイルによる一様電流が正の方向に磁場を作るためである。図49はプラズマ(線電流)によるものである。その大きさはあまり大きくない。図50は以上を加え合せたものである。最初OHコイルによるものと、 B_v コイルによるものが、うまく打消し合って、ほぼ一様な磁場となっている。後になると B_v コイルによるもののため、厚肉中心で大きくなる。その大きさは $10msec$ で $230Gauss$ 程度である。この時、 B_v コイルの作る磁場は $-420Gauss$ であり、渦電流の作る磁場はその半分以上であり、加え合せると $-190Gauss$ になってしまう。これから分る様に、プラズマ励起時にプラズマを平衡に保つ磁場として、真空容器上の渦電流によるものを無視することはできない。また今の場合うまくトロイダル方向へ磁場が一様になったが、実際の場合、OHコイル、 B_v コイル、プラズマの電流比は今仮定したものと異ってくるであろうから、やはり、トロイダル方向への非一様性も問題となるかもしれない。

次に、z方向の磁場のR方向への変化を見る。図51, 52, 53, 54に $\Delta B_z = B_z(3.53m) - B_z(2.53m)$ の値をOHコイル、 B_v コイル、プラズマ、それらの和をに対して示す。 0° (ベローズ部中心)と 30° (厚肉部中心)で大きな差が生ずる。 ΔB_z は真空容器上の渦電流の四重極成分によって決定され、真空容器のポロイダル断面の形状に大きく影響されるものと思われる。図54により $10msec$ において ΔB_z は 0° で $-30Gauss$, 30° で $15Gauss$ となる。この時 B_v コイルの磁場自体は $\Delta B_z = 30Gauss$ 程度であり、渦電流によるものと同程度である。このため、プラズマ励起時において、 n 値 ($=R/B_z \cdot dB_z/dR$) の値を安定領域におくために、四重極場コイルを加える必要が生ずるかもしれない。

最後に、OHコイル、 B_v コイルを変化させた時に、プラズマが励起されなかった時を考え

る。この場合、プラズマによる渦電流の減少効果がないために、渦電流が大きくなり、真空容器に過大な力が加わる恐れがある。図45、46において、OHコイルとB_vコイルによるもののみを加え合せると、トロイダル方向に流れる電流は10msecで最大300kA、ループを描く電流は30msecで最大40kA程度になる。

5.2 プラズマ消滅時

プラズマ電流が急激に減衰した時の真空容器上の渦電流を考察する。計算例として、プラズマ電流が、

$$I_p = I_{p0} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad I_{p0} = 3\text{MA}, \quad \tau = 50\text{msec} \quad (5.2-1)$$

で、減衰するとする。プラズマは線電流で近似し、変位は起こさないものとする。

図55に時間ごとの渦電流の流れ図を示し、図56に、トロイダル方向電流分布とポロイダル方向電流分布を示す。図から分かる様にトロイダル方向に一樣な電流と厚肉部でループを描く鞍型電流の合成から成り立っている。トロイダル方向の電流は、ベローズ部ではほぼ一樣で、厚肉部ではトラス内側ではほぼCOS的に変化する分布が加わる。断面が卵形に変形しているために、外側で電流が小さくなる。ポロイダル方向の電流は、厚肉部からベローズ部に向ってほぼ直線的に大きくなり、トラス内側と外側で電流の向きが反転する。トラス外側の電流は大きくはない。

図57にトロイダル方向に流れる全電流I₀の時間変化、図58に鞍型電流の時間変化を示す。トロイダル方向電流は10msecで最大180kA、鞍型電流は30msecで最大30kA程度となる。文献2で同様な計算を行っており、トロイダル方向電流は150kA、鞍型電流は50kA程度になっている。この差はトロイダル効果と、断面の変形によると思われる。文献2ではプラズマが変位減衰した時には鞍型電流は80kAとなり、その時、OHコイルと、B_vコイルが短絡状態にあると25kA程度になる。今の場合に、文献2と同程度の比例関係があるとすると、プラズマが変位減衰した時には鞍型電流は50kA程度となり、コイルが短絡されている時は15kA程度になるとと思われる。

5.3 スパイク時

プラズマ放電中に、何らかの不安定性で、ワンターン電圧に負の電圧を生ずるネガティブ・スパイク現象があることがよく知られている。この場合、プラズマ柱が急激に収縮したり、電流が落ちたりする。この場合、プラズマによる磁場が急激に変化し、真空容器に大きな電流が生ずることが考えられる。ここでは、プラズマ柱が急激に内側に収縮するとして、渦電流の評価を行う。

プラズマの変位を模擬するために、プラズマ表面に次の様な電流を分布させる。すなわち

$$j = \frac{I_p}{\pi a^2} \delta x \cos \omega \quad (5.3-1)$$

とする。ここで a はプラズマ小半径で、 δ_x は変位量、 ω はポロイダル方向の角度をトーラス外側からとったものである。

$a=1\text{m}$ とし、 $\delta_x = \delta_{x_0} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$ とし、 $\delta_{x_0} = -5\text{cm}$ 、 $\tau = 0.2\text{msec}$ とする。

この場合、真空容器上の渦電流はほぼ変位に同期して流れ、 0.1msec で最大となる。図 59 にこの時の電流の流れ図、図 60 にトロイダル、ポロイダル両方向の電流分布を示す。図から分る様に、ほぼトロイダル方向に一様に流れ、わずかにベローズ部によって電流が遮ぎられる。トーラス内側ではほぼ \cos 分布でトロイダル方向に電流が流れ、変形のため、外側で小さくなる。ポロイダル方向の電流は、ベローズ部と厚肉部の境界周辺で大きくなり、トーラス内側と外側で逆向きとなる。トロイダル方向電流に比べて、その大きさは小さい。その積分値は 3.9kA である。

以上で分る様に、磁場変化が速いために、ベローズ部と厚肉部の抵抗差はあまり関係なく、超電導シェルと同じ働きをするものと考えられる。この渦電流によって、最大約 200Gauss (10msec) の磁場が変位に同期して生じ、それはプラズマの変位を推やる方向に働き、プラズマ柱を押しもどす力となると考えられる。

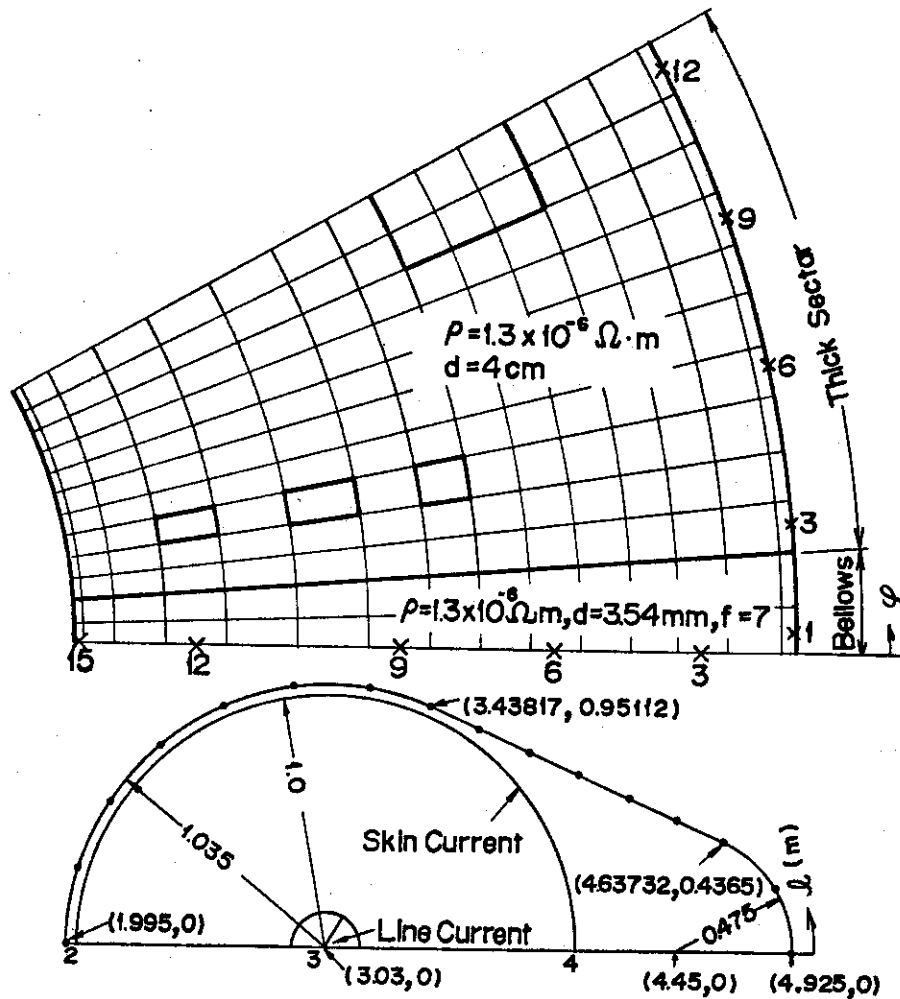
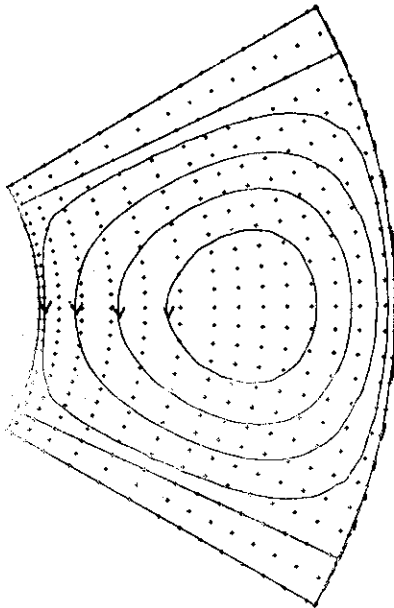
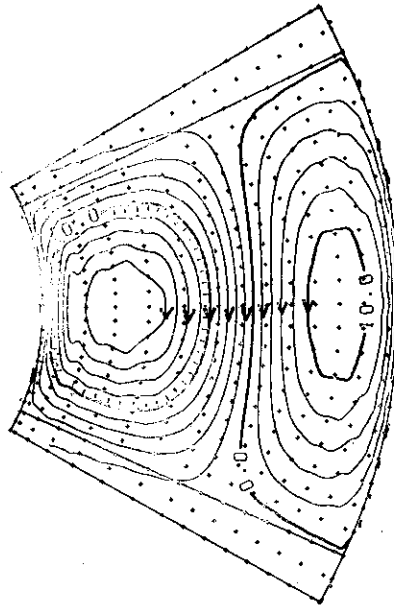


図 36. 真空容器の計算モデル。ポロイダル断面と、 z 方向の投影図。

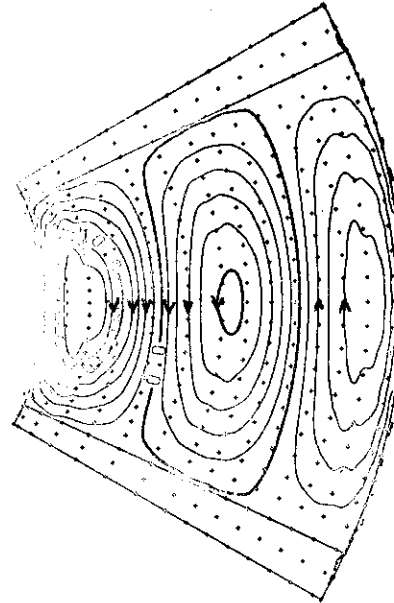
EIGEN MODE NO. 1
 EIGENVALUE 1.467731E-02
 Z-FACTOR 10.0** 0
 Z-LEVEL 5.



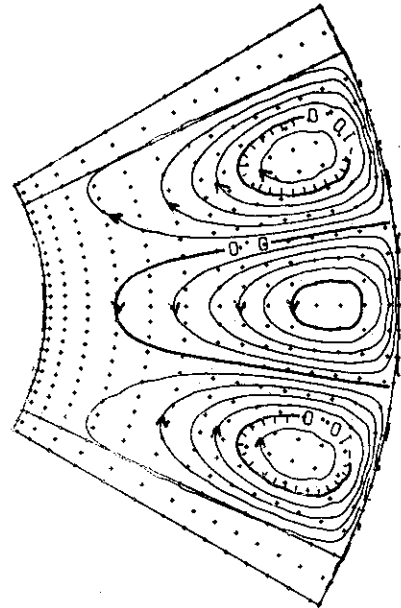
EIGEN MODE NO. 2
 EIGENVALUE 9.402032E-03
 Z-FACTOR 10.0** 0
 Z-LEVEL 2.



EIGEN MODE NO. 3
 EIGENVALUE 8.925577E-03
 Z-FACTOR 10.0** 0
 Z-LEVEL 2.



EIGEN MODE NO. 4
 EIGENVALUE 6.586247E-03
 Z-FACTOR 10.0** 0
 Z-LEVEL 2.



EIGEN MODE NO. 5
 EIGENVALUE 5.356078E-03
 Z-FACTOR 10.0** 0
 Z-LEVEL 2.

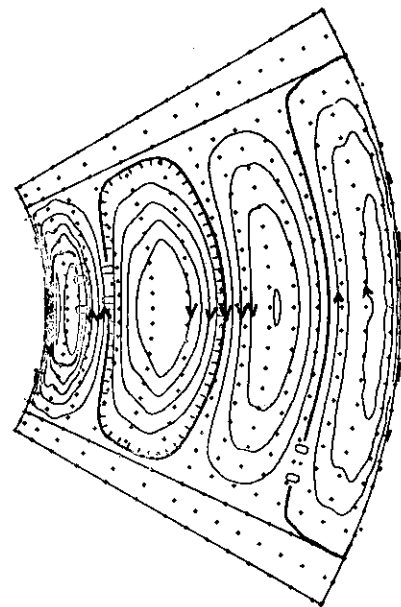
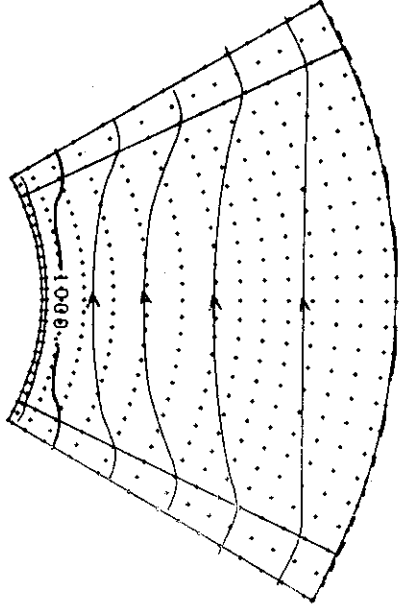
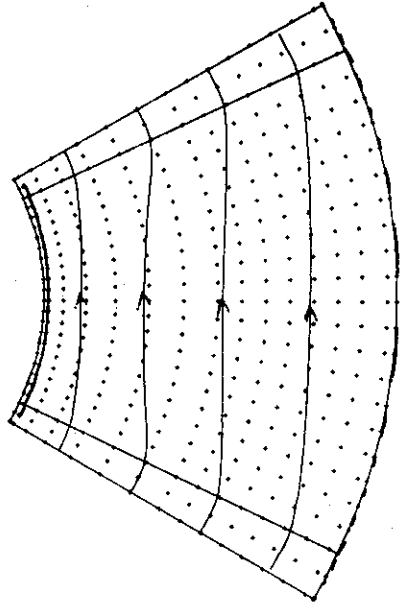


図 37. 真空容器上の渦電流の固有モード図。電流は1秒当りのジュール損失がトラス全体で1J になる様に規格化されている。固有値は減衰時定数に相当し、秒単位である。

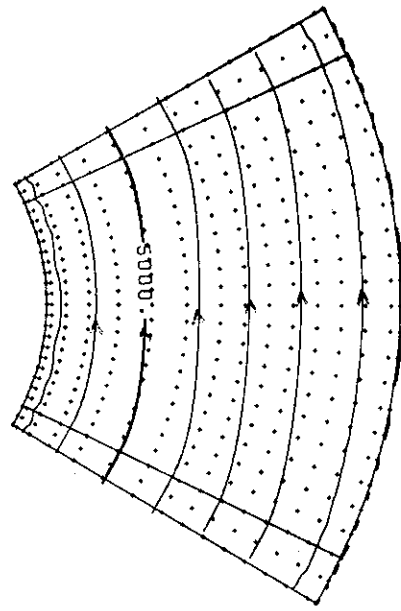
TIME 1.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 2
 Z-LEVEL 200.



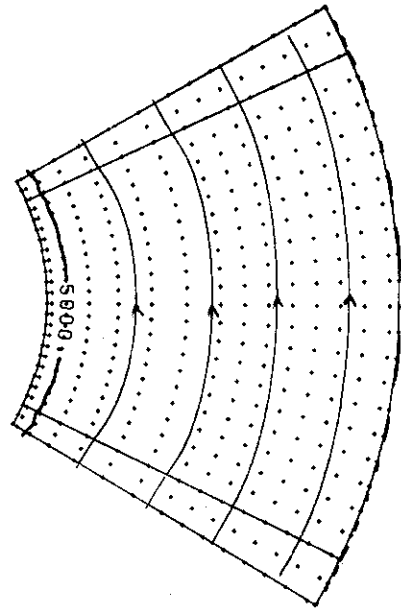
TIME 2.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 2
 Z-LEVEL 200.



TIME 3.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 4.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 5.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 500.

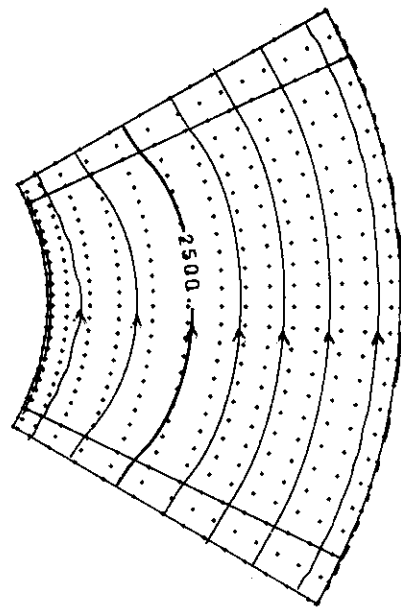
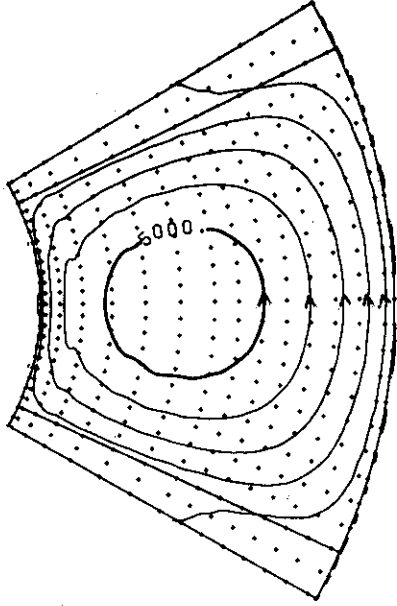
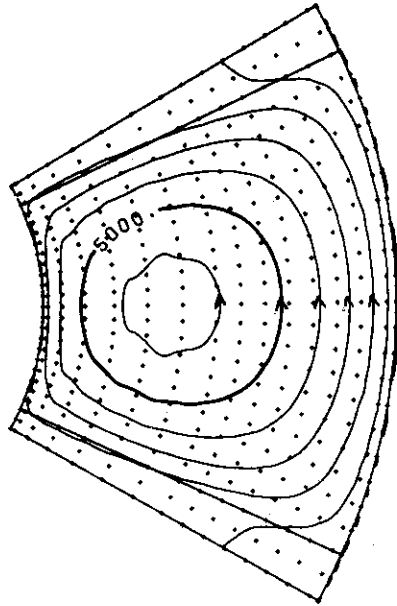


図 38. 真空容器上のプラズマ励起時の渦電流。OHコイルのみによって励起されるもの。

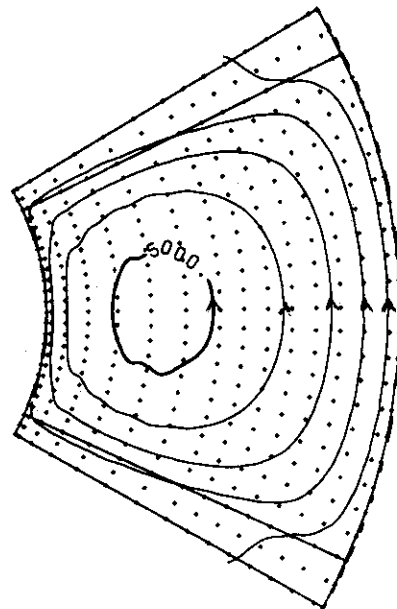
TIME 3.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 1000.



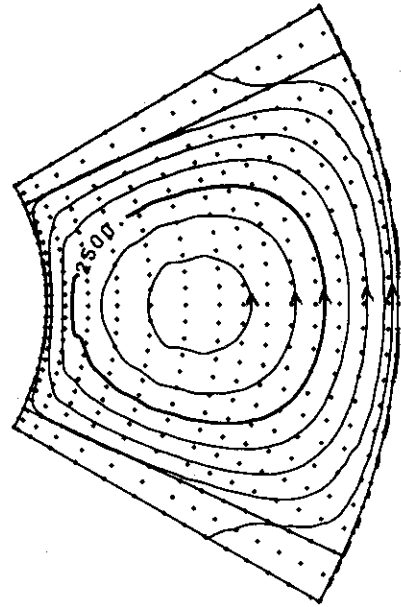
TIME 2.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 1.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 5.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 500.



TIME 4.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 500.

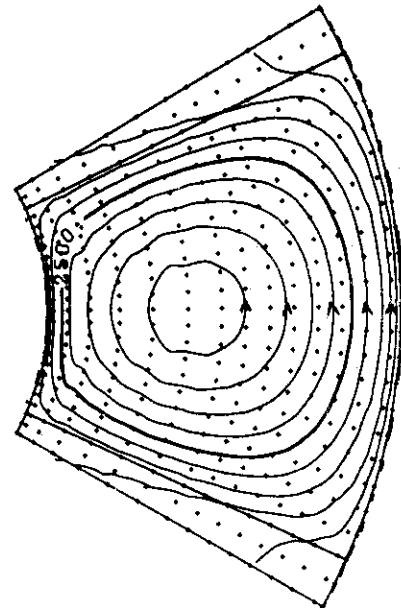
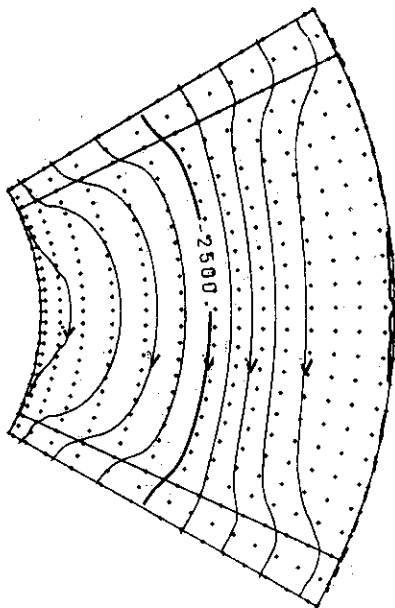
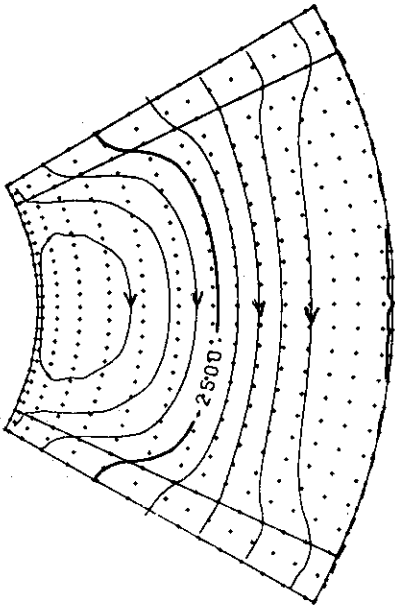


図 39. 真空容器上のプラズマ励起時の渦電流。By コイルのみによって励起されるもの。

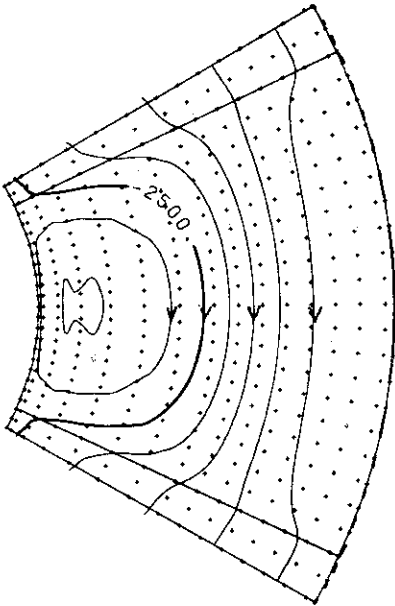
TIME 1.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 500.



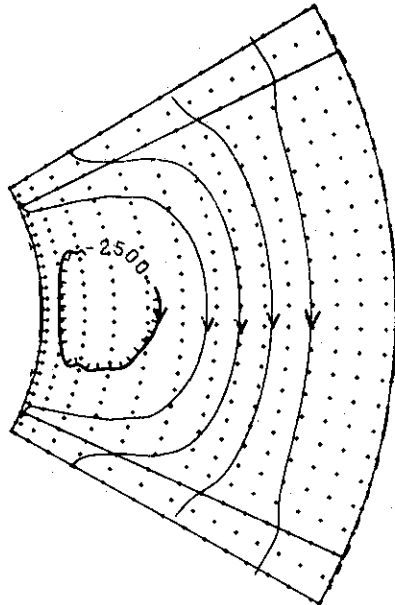
TIME 2.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 500.



TIME 3.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 500.



TIME 4.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 500.



TIME 5.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0mm 1
 Z-LEVEL 500.

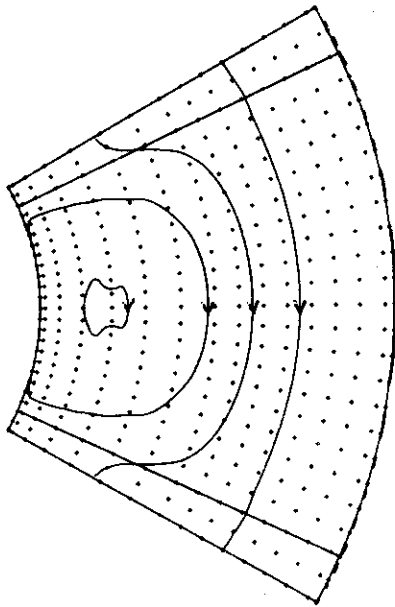
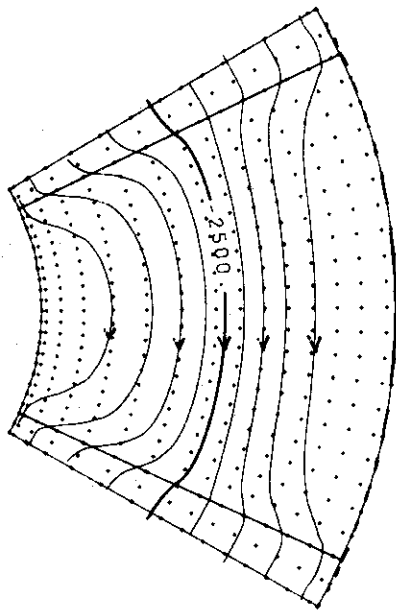
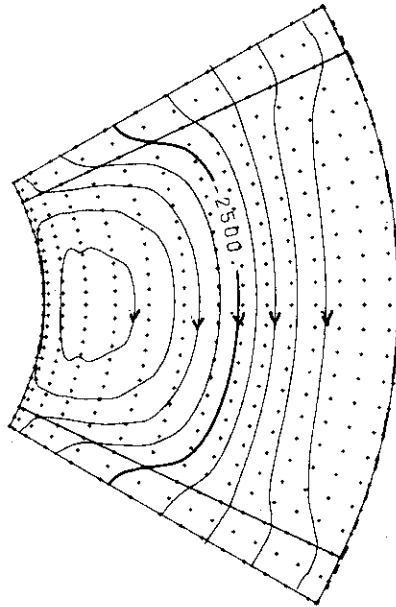


図40. 真空容器上のプラズマ励起時の渦電流。
 プラズマ(線電流)のみによって
 励起されるもの。

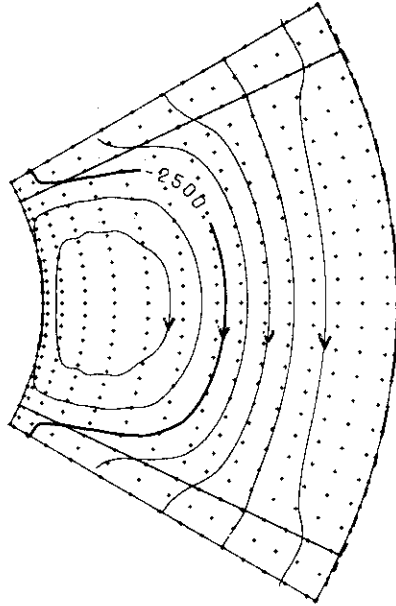
TIME 1.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 500.



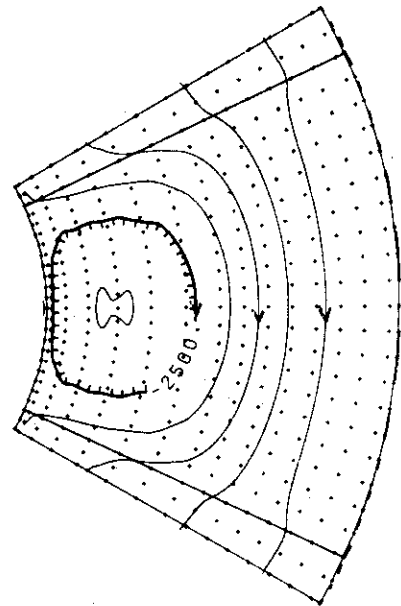
TIME 2.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 500.



TIME 3.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 500.



TIME 4.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 500.



TIME 5.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 500.

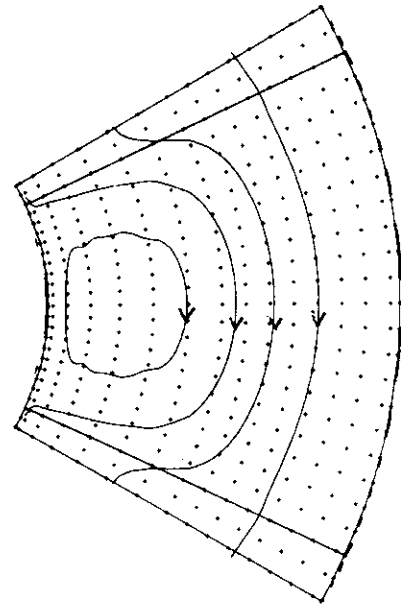
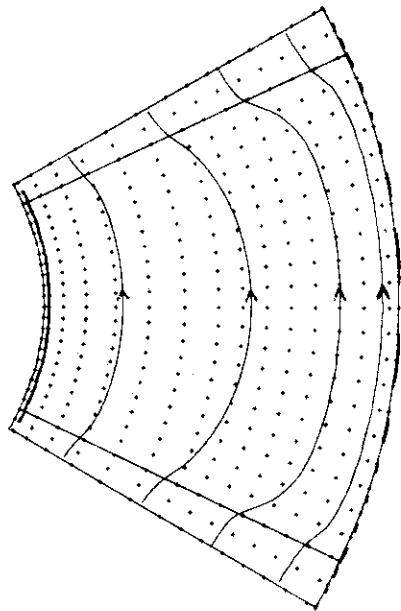
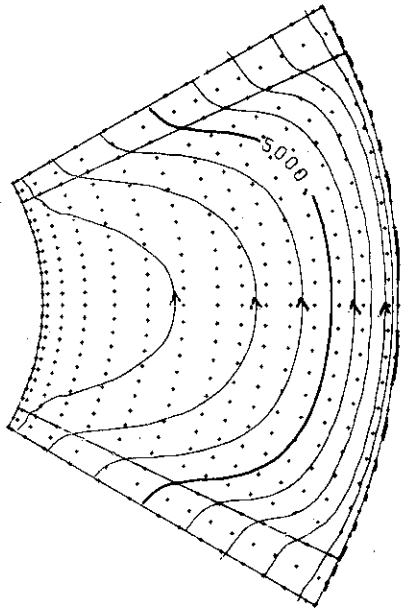


図41. 真空容器上のプラズマ励起時の渦電流。プラズマ（表皮電流）のみによって励起されるもの。

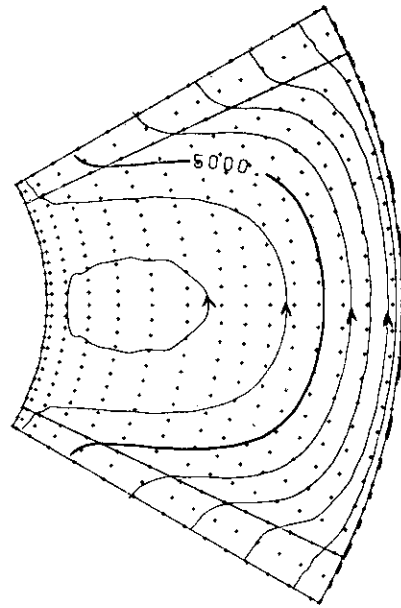
TIME 1.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0** 2
 Z-LEVEL 200.



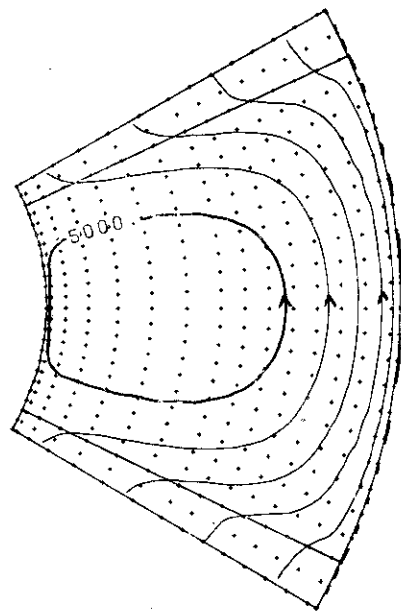
TIME 2.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0** 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 3.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0** 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 4.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0** 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 5.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0** 1
 Z-LEVEL 500.

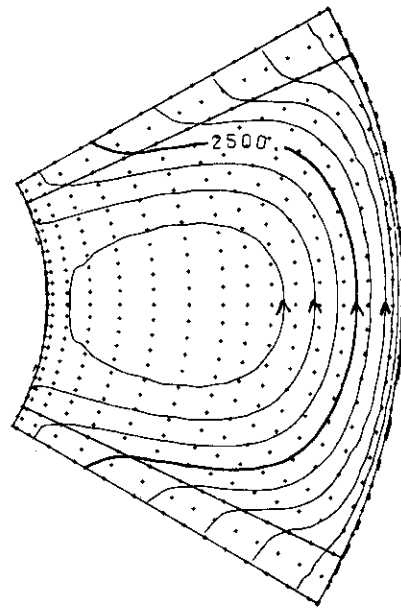


図 42. 真空容器上のプラズマ励起時の渦電流。OHコイル, B_yコイル, プラズマ(線電流)の合計によって励起されるもの。

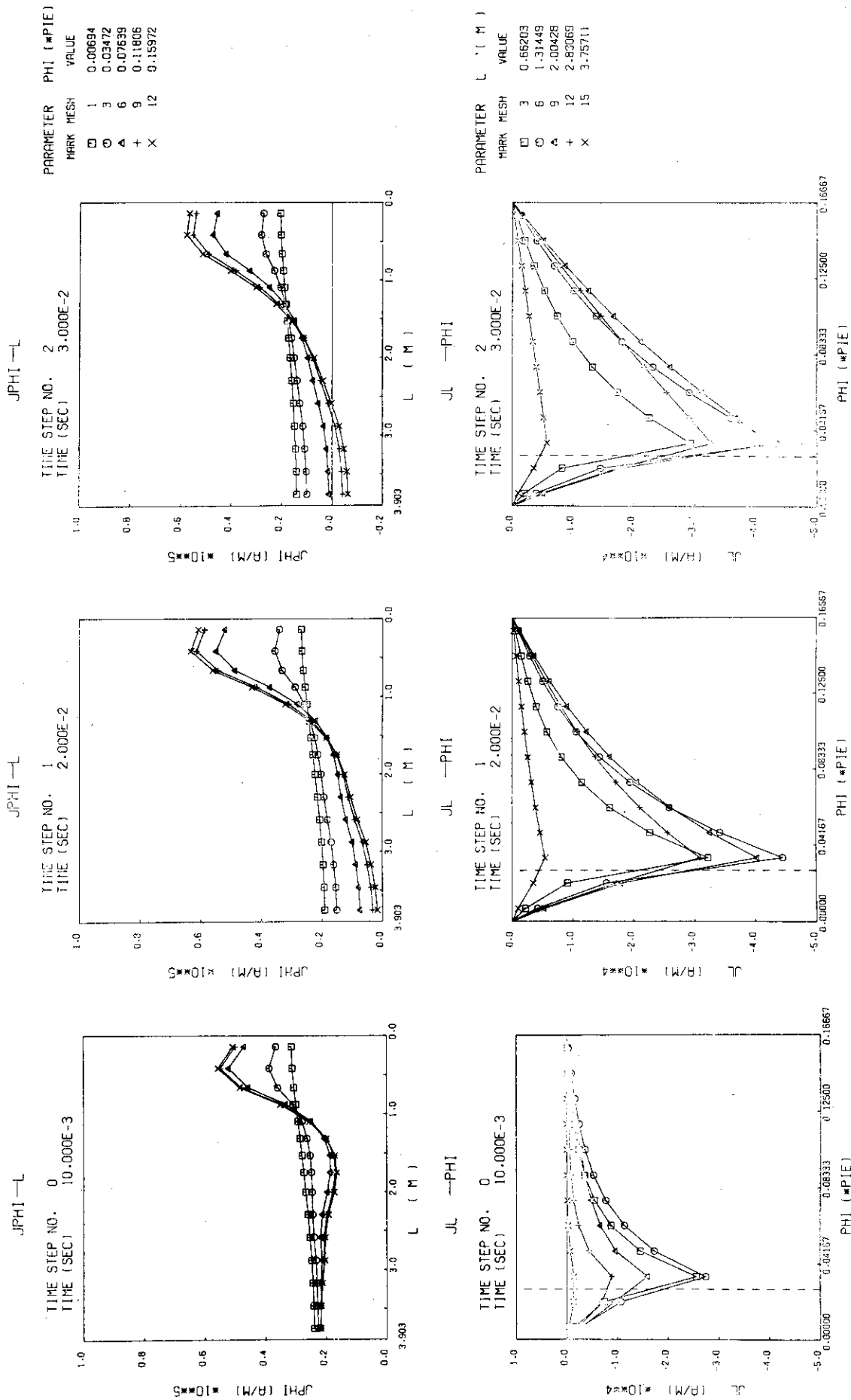
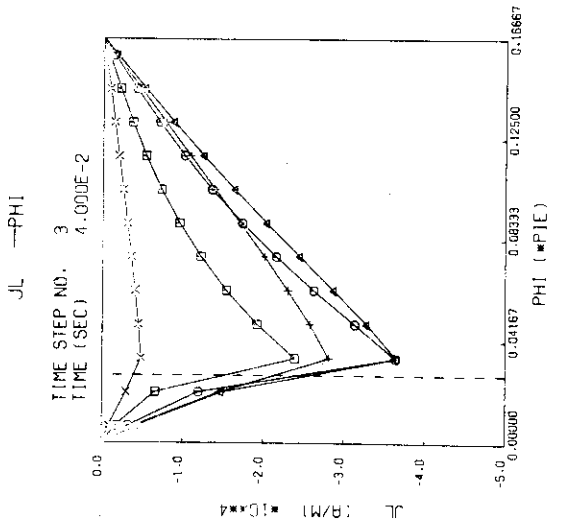
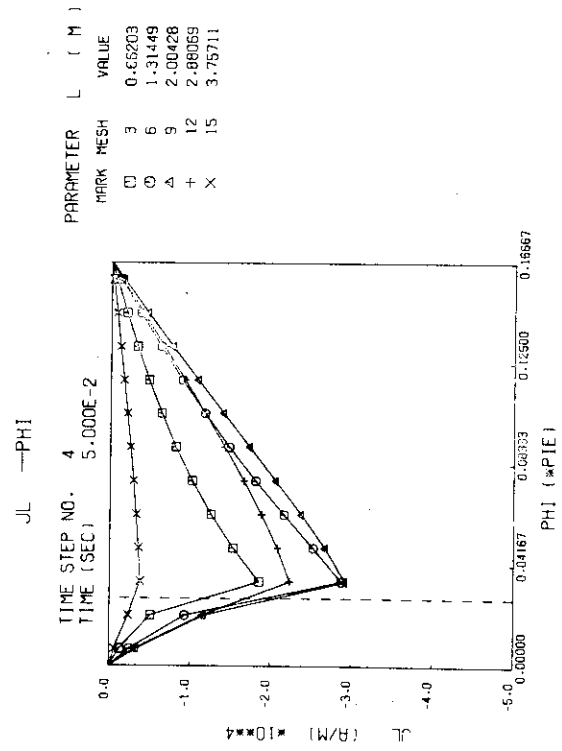
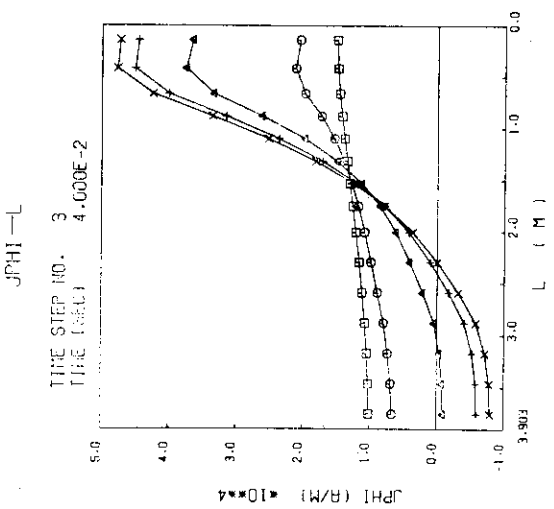
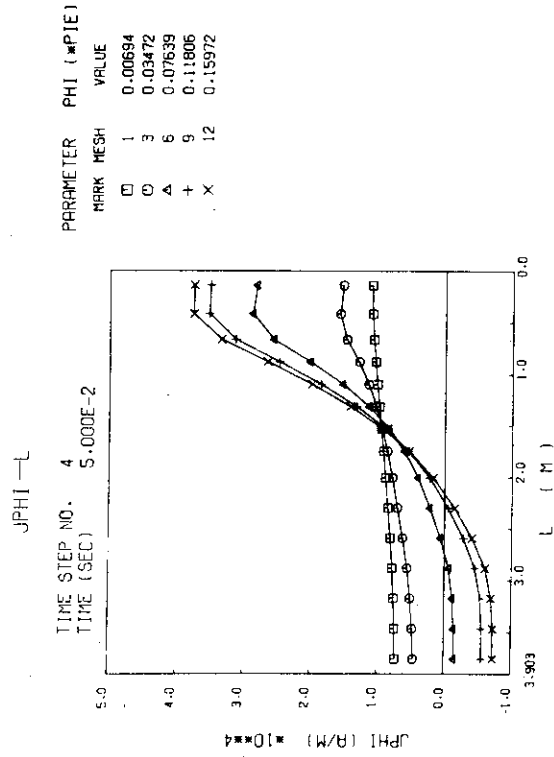
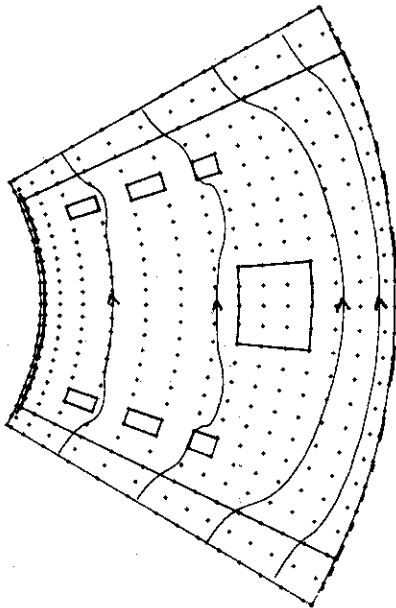


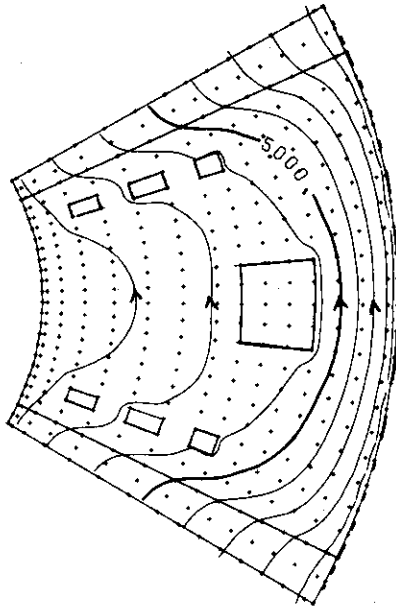
図 43. 真空器上のプラズマ励起時の渦電流のトロイダル方向電流分布 (JPHI-L) とポロイダル方向電流分布 (JL-PHI)。OHコイル, Bvコイル, プラズマ (線電流) の合計によって励起されるもの。PARAMETER PHI, L は図 36 において x 印で示した点に相当する。



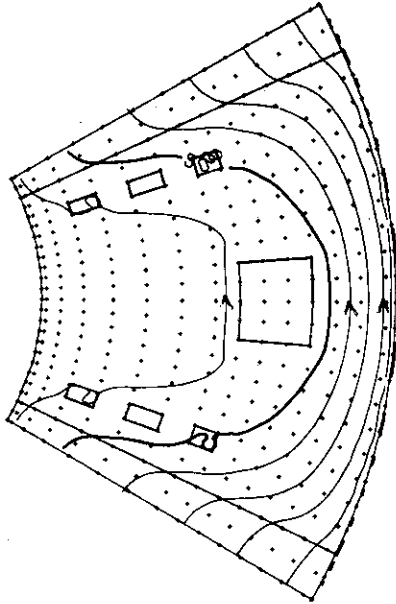
TIME 1.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 2
 Z-LEVEL 200.



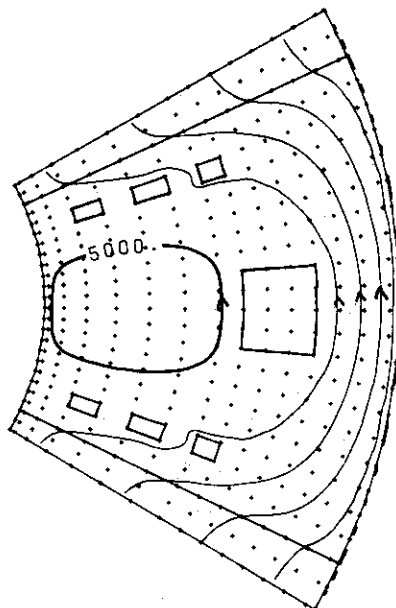
TIME 2.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 3.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 4.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 1000.



TIME 5.000000E-02
 Z-FACTOR 10.0 1
 Z-LEVEL 500.

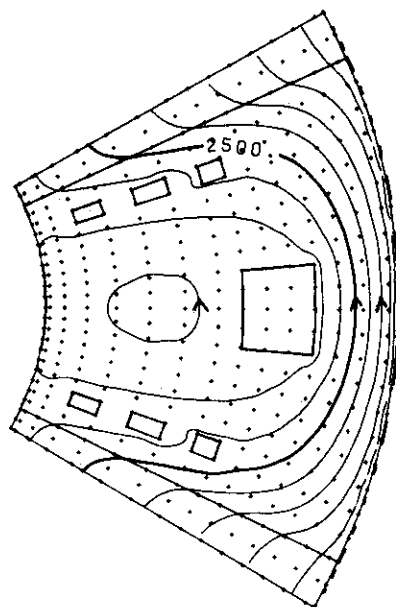


図 44. ポート穴のある真空容器上のプラズマ励起時の渦電流。OHコイル, B_yコイル, プラズマ (線電流) の合計によって励起されるもの。

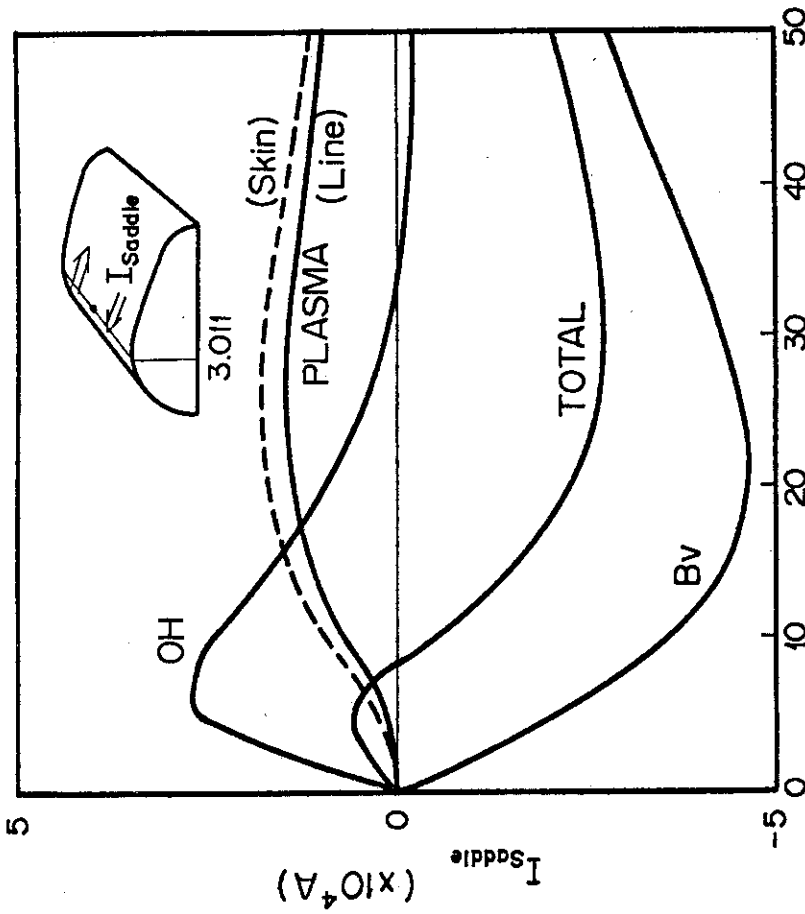
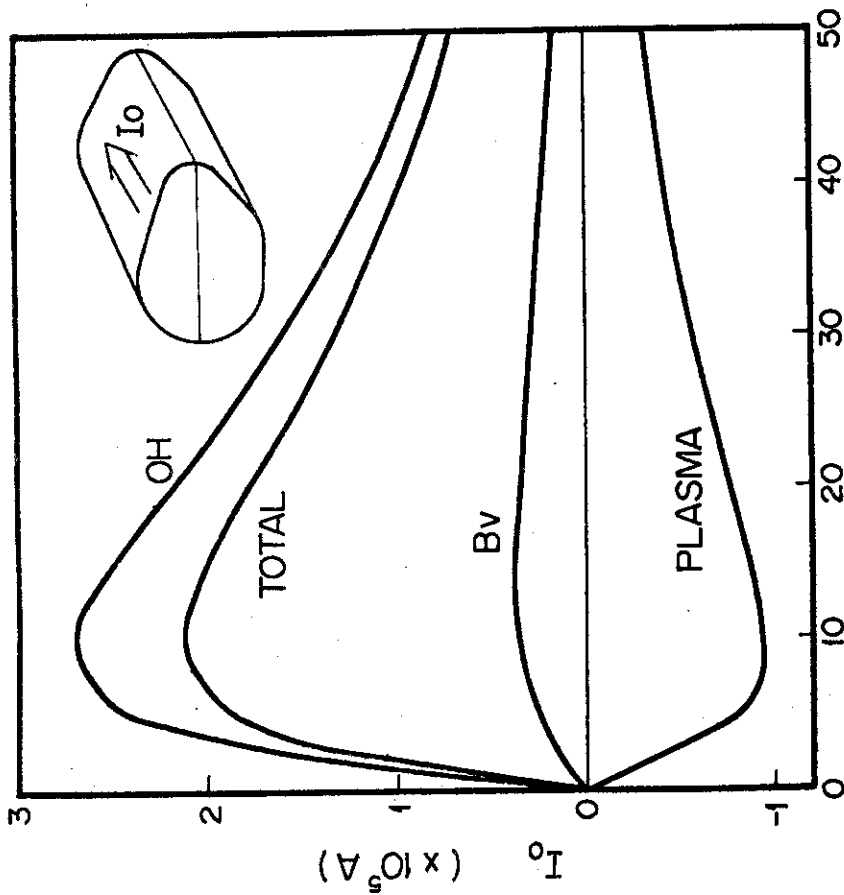


図 46. 真空容器上のプラズマ励起時

における鞍型電流の変化。電流は、 $R = 3.011\text{m}$ でペロー部中心から厚肉部中心の線を横切る全電流。OHコイル, BVコイル, プラズマ(線電流, 表皮電流)のそれぞれによるものと、それらの合計。合計において、プラズマは線電流の方を取っている。



Time (msec)

図 45. 真空容器上のプラズマ励起時

におけるトロイダル方向電流の積分値の時間変化。OHコイル, BVコイル, プラズマ(線電流, 表皮電流)のそれぞれによるものと、それらの合計。

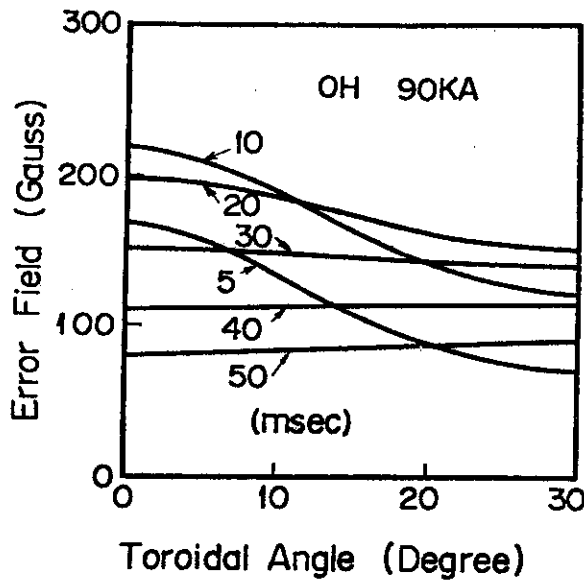


図 47. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずるプラズマ中心での誤差磁場。z 方向磁場のトロイダル方向分布の時間変化を示す。0°はベロー部中心、30°は厚肉部に相当する。OH コイルによって励起されるもの。

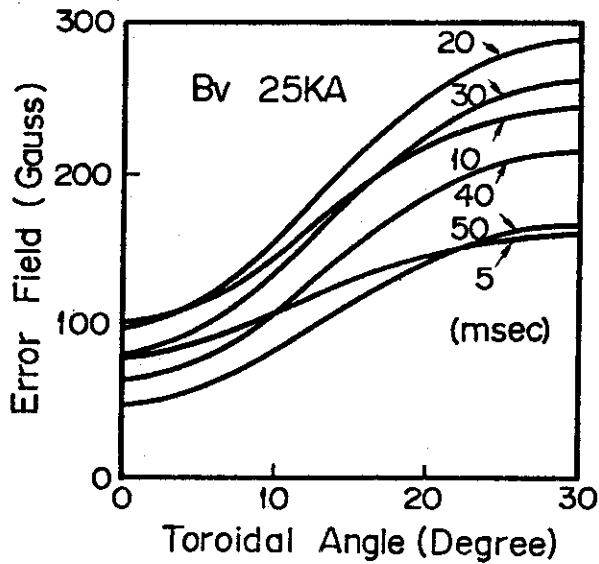


図 48. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずるプラズマ中心での誤差磁場。B_v コイルによって励起されるもの。

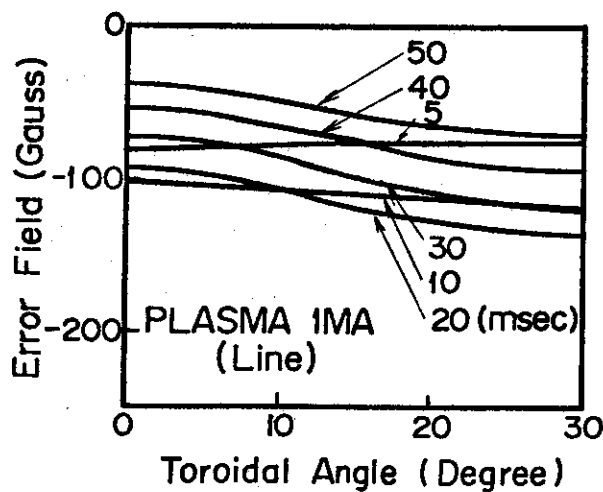


図 49. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずるプラズマ中心での誤差磁場。プラズマ (線電流) によって励起されるもの。

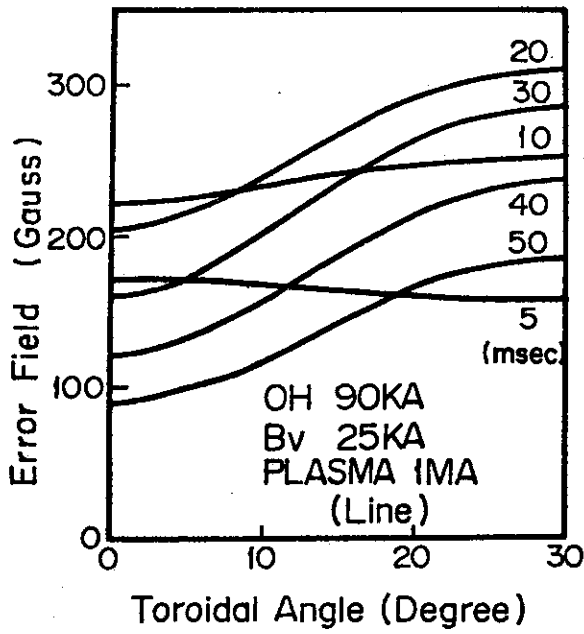


図 50. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずるプラズマ中心での誤差磁場。OHコイル, B_vコイル, プラズマ(線電流)の合計によって励起されるもの。

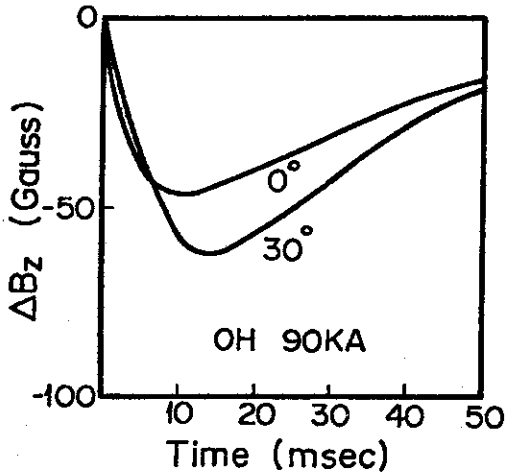


図 51. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずる誤差磁場のR方向変化の大きさ。
 $\Delta B_z = B_v(3.53m) - B_z(2.53m)$ であり, ベローズ部中心(0°)と厚肉部中心(30°)に対して, 時間変化を示している。OHコイルのみによって励起されるもの。

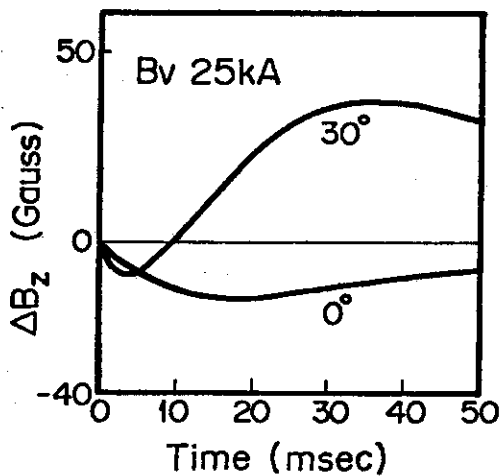


図 52. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずる誤差磁場のR方向変化の大きさ。B_vコイルのみによって励起されるもの。

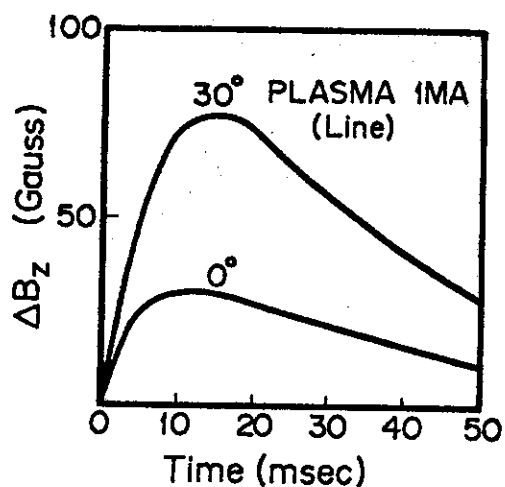


図 53. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずる誤差磁場R方向変化の大きさ。プラズマ（線電流）のみによって励起されるもの。

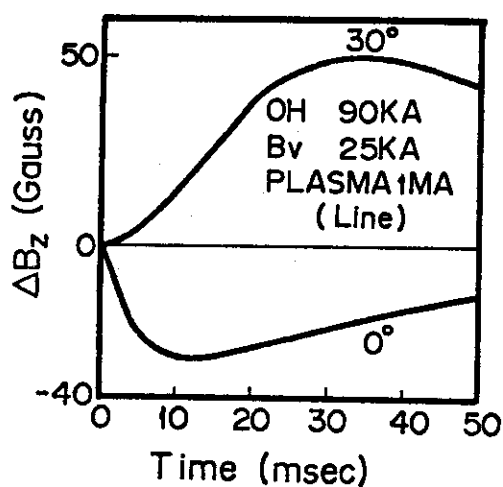


図 54. 真空容器上のプラズマ励起時における渦電流によって生ずる誤差磁場のR方向変化の大きさ。OHコイル, B_V コイル, プラズマ（線電流）のみによって励起されるもの。

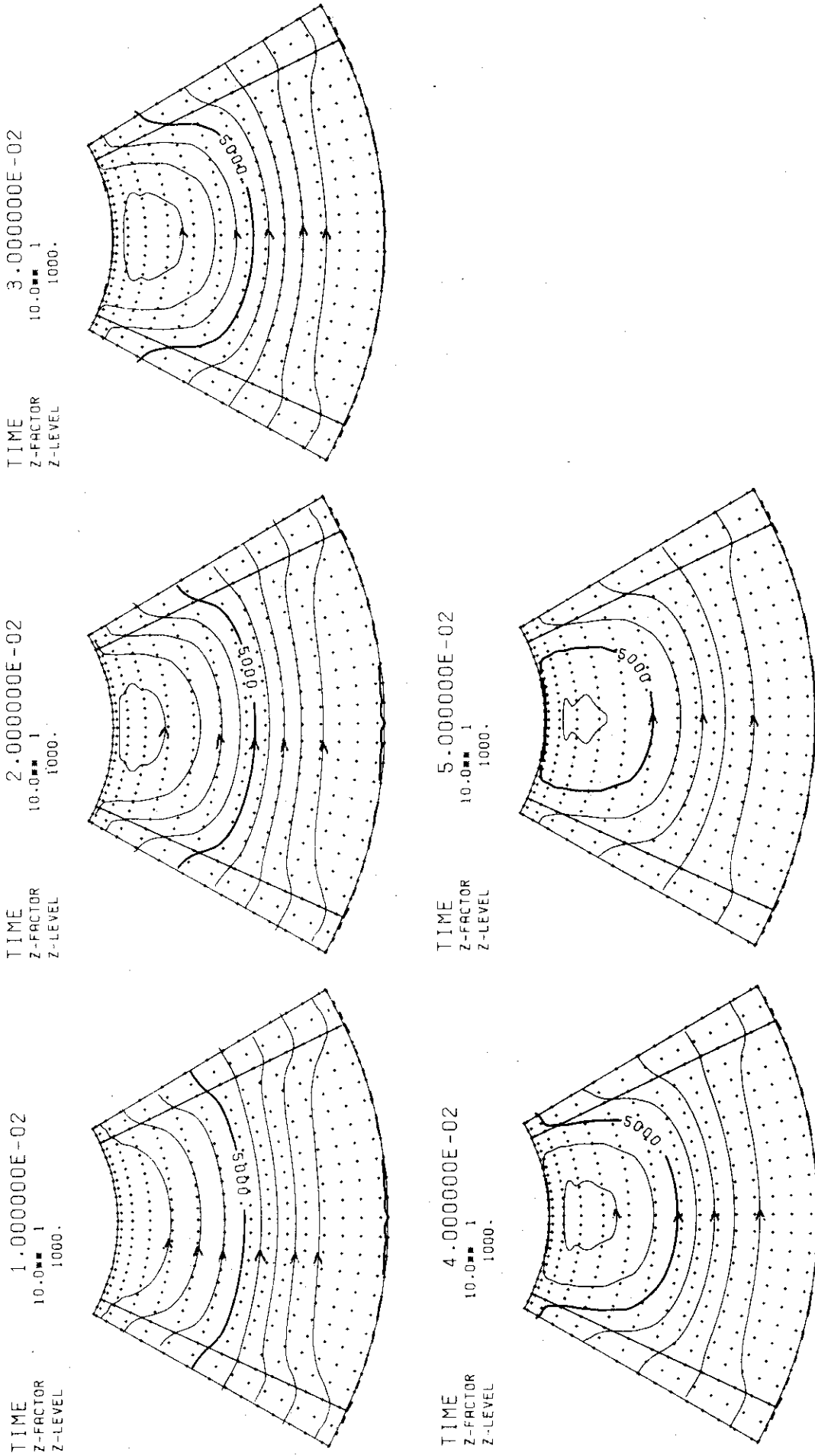


図 55. 真空容器上のプラズマ消滅時における渦電流。

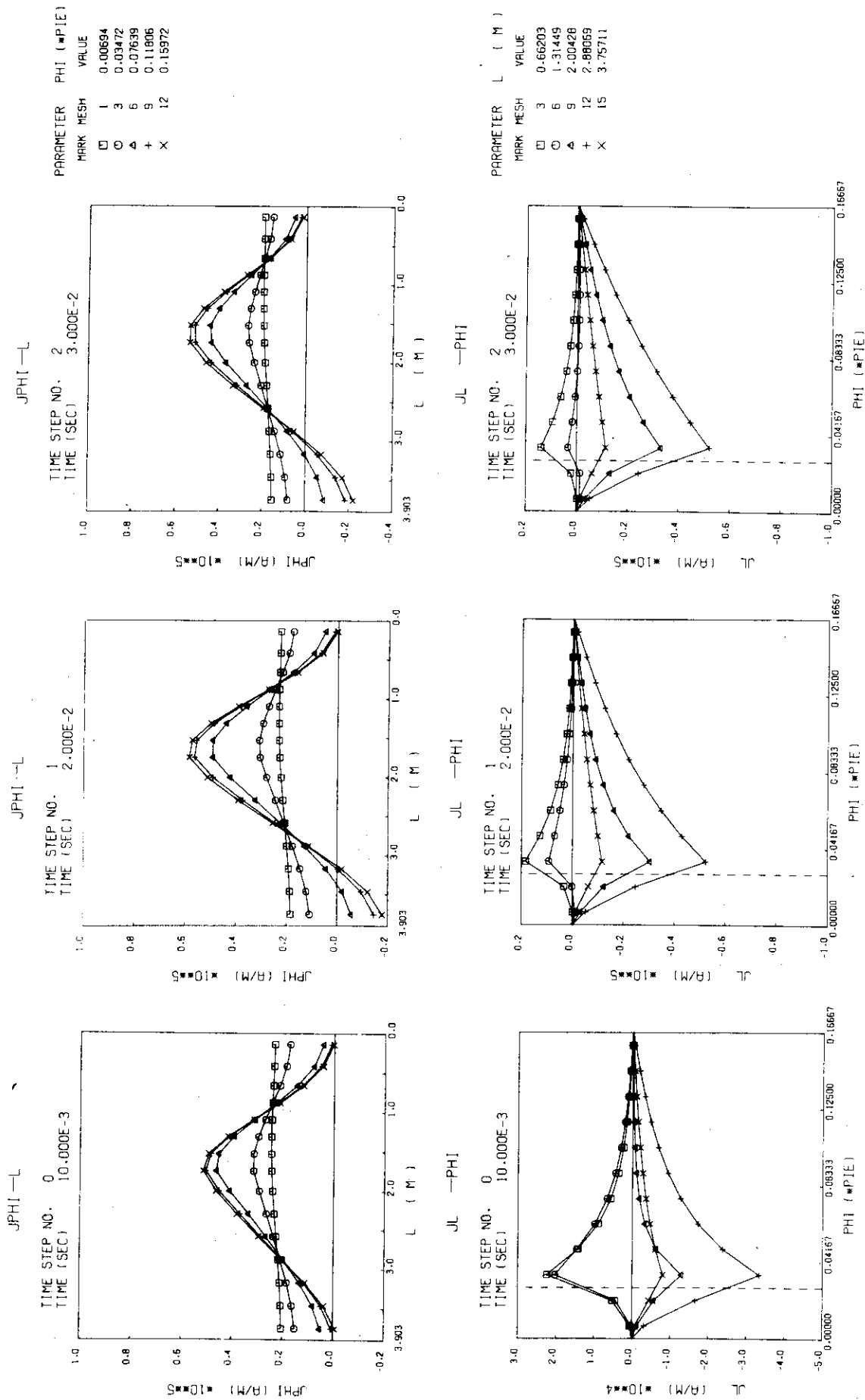
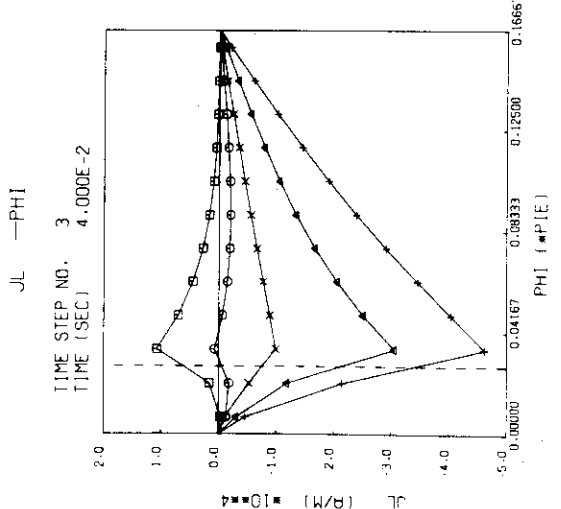
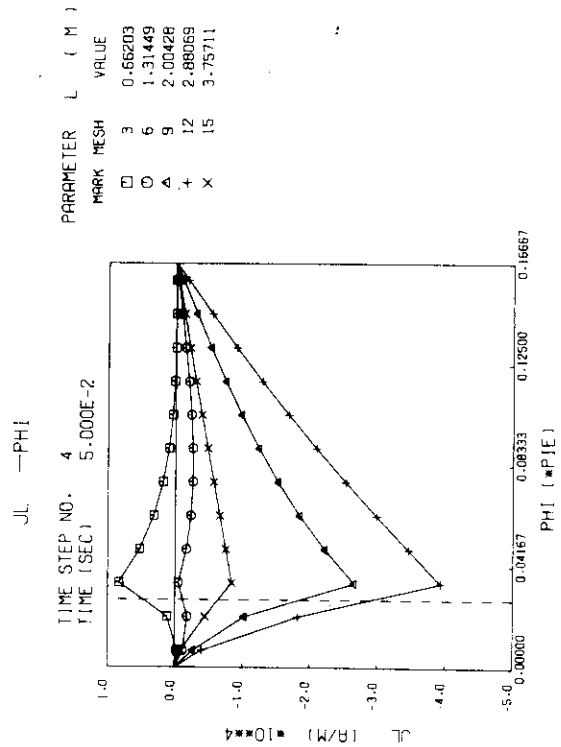
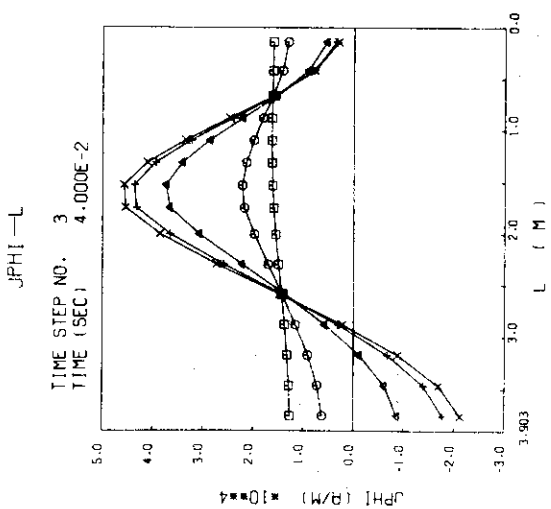
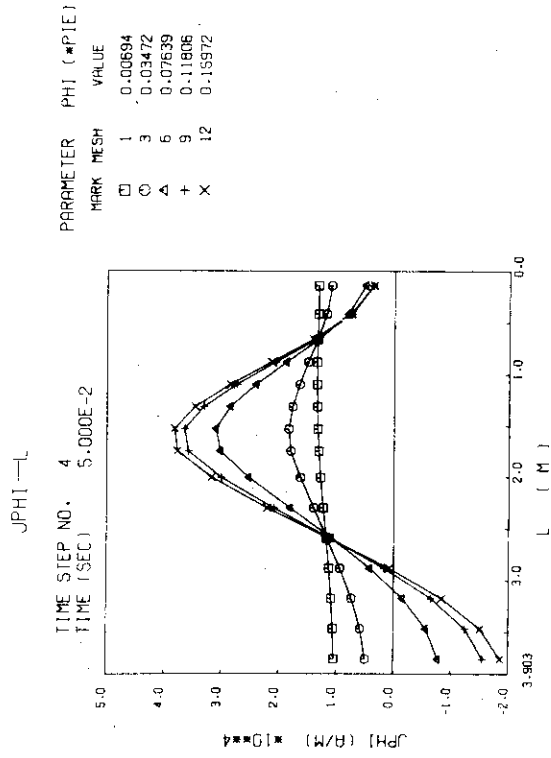


図 56. 真空容器上のプラズマ消滅時における渦電流のトロイダル方向電流分布 (JPHI-L) とポロイダル方向電流分布 (JL-PHI)。



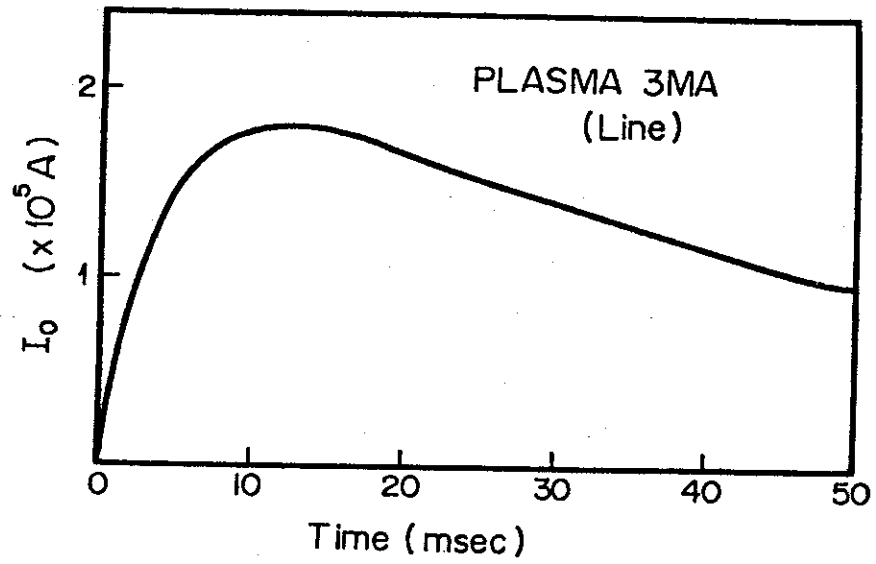


図 57. 真空容器上のプラズマ消滅時におけるトロイダル方向電流の積分値の時間変化。

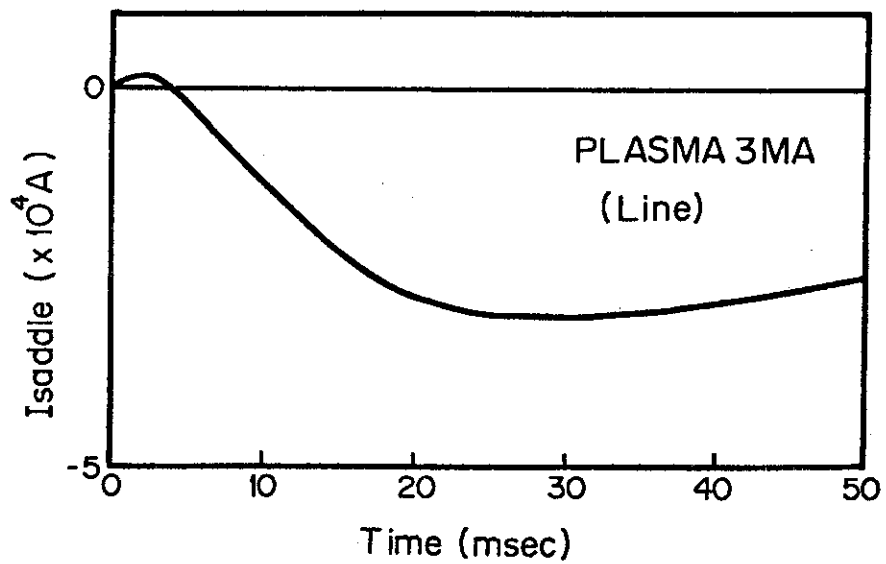
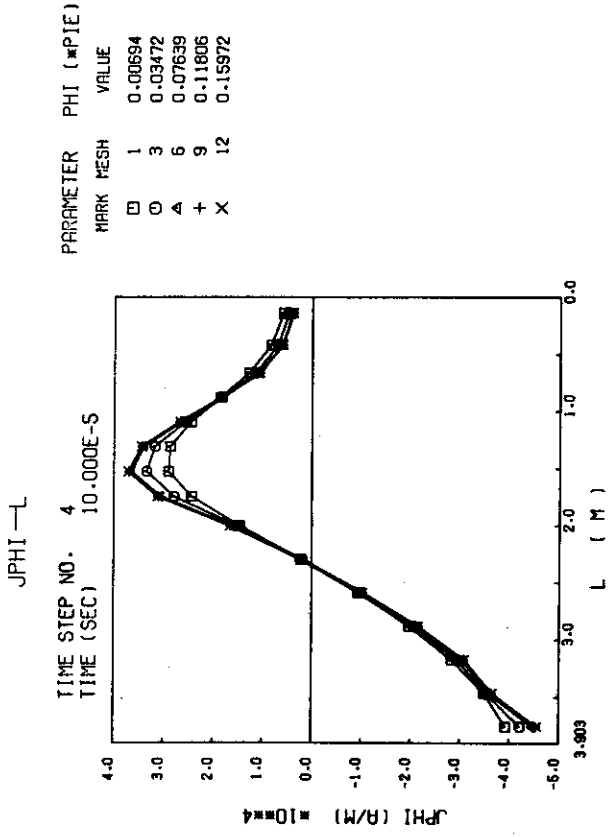


図 58. 真空容器上のプラズマ消滅時における鞍型電流の時間変化。



TIME 1.000000E-04
Z-FACTOR 10.0**1
Z-LEVEL 500.

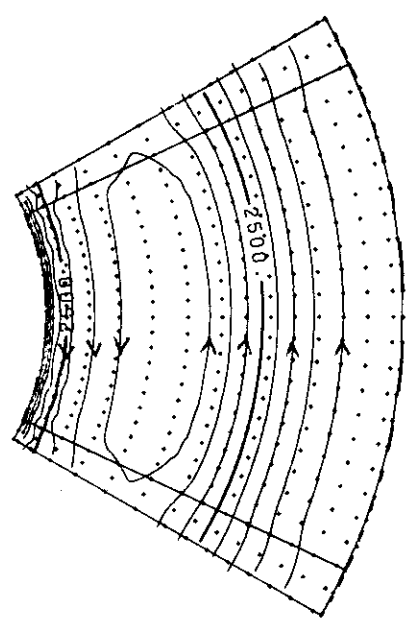


図 59. 真空容器上のプラズマのスパイク時の渦電流 (0.1msec)。

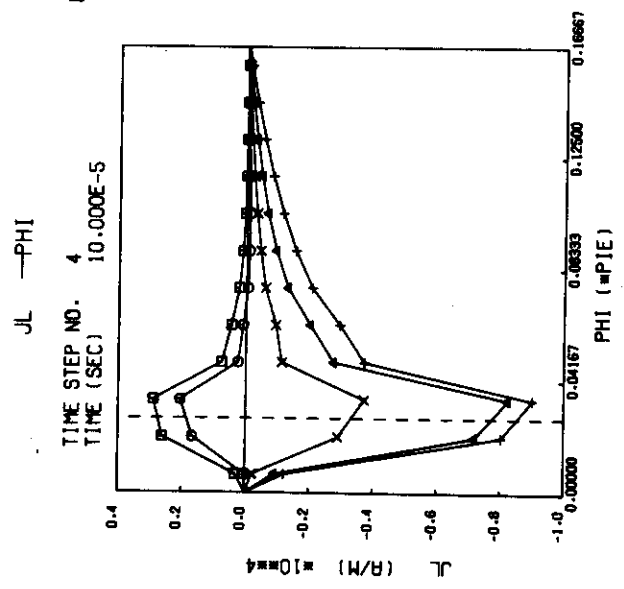


図 60. 真空容器上のプラズマのスパイク時の渦電流のトロイダル方向電流分布 (JPHI-L) とポロイダル方向電流分布 (JL-PHI)。時間は 0.1 msec である。

6. ま と め

上下架台と真空容器に対する計算結果を表にまとめる。表1は渦電流の作る誤差磁場で、 B_z はプラズマ中心 $R=3.03\text{m}$, $Z=0$ における Z 方向磁場でトロイダル方向に平均したものである。 ΔB_z (R方向) は $B_z(3.53\text{m}) - B_z(2.53\text{m})$ で、R方向への磁場の変化である。 ΔB_z (トロイダル方向) はトロイダル方向の変化の最大値と最小値の差である。いずれも、時間は励起を始めて 10msec 後のものである。

表1 プラズマ励起時における誤差磁場

	B_z	ΔB_z (R方向)	ΔB_z (トロイダル方向)
上下架台 (22.5°)	30 Gauss	7 Gauss	≈ 0
真空容器	230 Gauss	$-30\text{ Gauss} \begin{cases} 0^\circ \\ 15\text{ Gauss} \end{cases} \begin{cases} 0^\circ \\ 38^\circ \end{cases}$	30 Gauss

比較のために示すと、その時点における垂直磁場コイルによる磁場は、 $B_z = -420\text{ Gauss}$, ΔB_z (R方向) = 30 Gauss , ΔB_z (トロイダル方向) = 0 である。これから分かる様に、上下架台による誤差磁場は 22.5° ごとにカットを入れると十分小さいが、真空容器によるものは、垂直磁場コイルによるものと同程度であり、大きな影響をプラズマに与える。

表2に真空容器上の鞍型電流の大きさを、種々の場合に対して示す。

表2 真空容器上の鞍型電流

	型電流 (kA)
プラズマ励起時 (プラズマが励起した時)	2.7
(プラズマが励起しない時)	4.0
プラズマ消滅時 (コイルを短絡しない時)	5.0
(コイルを短絡した時)	1.5
スパイク時 (コイルを短絡しない時)	3.9

表から分る様に、スパイク時の鞍型電流はあまり大きくない。従来、ベローズ部に電流が全ったく流れないとして計算したもの(文献1)より格段に小さくなった。プラズマ励起時にプラズマが励起しなかった時や、プラズマ消滅時にコイルを短絡していない様な時には、鞍型電流が大きくなる。これは、プラズマや、コイルによる遮蔽効果がなくなるためで、その様な場合には、すぐに運転を中止したり、コイルを短絡したりする必要が生じるであろう。

以上の渦電流や誤差磁場の評価は、一つの計算例で、概その大きさを知るために行ったものであり、適用に注意を要する。すなわち、他の様々なプラズマやコイルの電流パターンに対して、それぞれ評価をする必要がある。

誤差磁場を作る構造物は、他にトロイダルコイルや、種々の支持台がある。また、変流器コイルや、垂直磁場コイル自体も表皮効果により、誤差磁場をつくる。これらは三次元的構造を

持ち、本論文で解析した様な薄板で近似することができない。本論文の方法を三次元的に拡張することは可能ではあるが、計算容量と、計算時間によって制限され、精度のよい結果を得ることは困難と思われる。

本論文では、外部コイルや、プラズマの電流変化は与えられたものとして計算を進めた。実際はこれらは相互作用を行ないながら変化してゆく。これを計算するためには、コイル等の電流も未知変数とし回路方程式を解く必要がある。またプラズマの位置は変化しないものとして計算を行ったが、位置の変化を導入するには、時間的に変化する結合定数を求める必要が生ずる。最終的には、プラズマの運動も考慮して、総合的に計算を行なう計算コードの開発が望まれる。

また、計算コードEDDYTORUS は磁場が上下対称の時のみ計算を行なえるが、縦長の非円形断面装置の様に、上下方向の運動が問題になる場合には、上下反対称な磁場に対して計算できる様に拡張する必要がある。

最後に、終始有益な議論と御指導をいただいた吉川允二JT-60開発室長をはじめとするグループ諸氏に感謝の意を表す。また、計算コードEDDYTORUSの開発に御尽力をいただいた熊倉利昌氏（富士通株式会社、原研計算センター外来研究員）に感謝の意を表します。

参 考 文 献

1. 亀有昭久，相川裕史，二宮博正，鈴木康夫：JAERI-M 6468
2. 亀有昭久，二宮博正，鈴木康夫：JAERI-M 6953
3. 熊倉利昌，亀有昭久：JAERI-M 刊行予定
4. R.J.Taylor : AERE-M563

持ち、本論文で解析した様な薄板で近似することができない。本論文の方法を三次元的に拡張することは可能ではあるが、計算容量と、計算時間によって制限され、精度のよい結果を得ることは困難と思われる。

本論文では、外部コイルや、プラズマの電流変化は与えられたものとして計算を進めた。実際はこれらは相互作用を行ないながら変化してゆく。これを計算するためには、コイル等の電流も未知変数とし回路方程式を解く必要がある。またプラズマの位置は変化しないものとして計算を行ったが、位置の変化を導入するには、時間的に変化する結合定数を求める必要が生ずる。最終的には、プラズマの運動も考慮して、総合的に計算を行なう計算コードの開発が望まれる。

また、計算コードEDDYTORUS は磁場が上下対称の時のみ計算を行なえるが、縦長の非円形断面装置の様に、上下方向の運動が問題になる場合には、上下反対称な磁場に対して計算できる様に拡張する必要がある。

最後に、終始有益な議論と御指導をいただいた吉川允二JT-60開発室長をはじめとするグループ諸氏に感謝の意を表す。また、計算コードEDDYTORUSの開発に御尽力をいただいた熊倉利昌氏（富士通株式会社、原研計算センター外来研究員）に感謝の意を表します。

参 考 文 献

1. 亀有昭久，相川裕史，二宮博正，鈴木康夫：JAERI-M 6468
2. 亀有昭久，二宮博正，鈴木康夫：JAERI-M 6953
3. 熊倉利昌，亀有昭久：JAERI-M 刊行予定
4. R.J.Taylor : AERE-M563

Appendix I 特異点を含む四重積分

(2.2-16), (2.3-24)式に現われる四重積分を解析的に求める。一般に

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_2} \quad (\text{AI-1})$$

と表わせば,

$$\int_{S_1} \int_{S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} f dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \oint_{S_1} \oint_{S_2} g dl_1 \cdot dl_2 \quad (\text{AI-2})$$

となる。ここで左辺は $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ がそれぞれ領域 S_1, S_2 の全体を動く二重面積積分で、右辺は S_1, S_2 の境界に沿っての二重線積分で $dl_1 dl_2 = dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2$ である。 S_1, S_2 が重なっていても問題はない。 f が複雑な形をしている場合、四重積分から二重積分に変換されるので積分が簡単になる。

(i) 三角要素における積分

(2.2-16)式の積分を実行する。三角形の辺を長さを a, b, c とし、対応する頂点の角度を A, B, C とする。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = - \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (\text{AI-3})$$

であり、(AI-2)より

$$S_D = \int_{S_1} \int_{S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = - \oint_{S_1} \oint_{S_2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dl_1 dl_2 \quad (\text{AI-4})$$

となり、

$$S_D = -T_1(a) - T_1(b) - T_1(c) + 2T_2(a, b, c) \cos C + 2T_2(b, c, a) \cos A + 2T_2(c, a, b) \cos B \quad (\text{AI-5})$$

で、ここで

$$\begin{aligned} T_1(a) &= \int_0^a \int_0^a |l_2 - l_1| dl_1 dl_2 = \frac{a^3}{3} \\ T_2(a, b, c) &= \int_0^a \int_0^b \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos C} dl_1 dl_2 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 2abc + (a^3 + b^3 - a^2c - b^2c) \cos C + a^3 \sin^2 C \ln \frac{s}{s-b} \right. \\ &\quad \left. + b^3 \sin^2 C \ln \frac{s}{s-a} \right\} \quad (\text{AI-6}) \end{aligned}$$

である。 $2s = a + b + c$ であり、 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $\sin^2(C/2) = (s-a)(s-b)/ab$, $\cos^2(C/2) = s(s-c)/ab$ を用いた。(AI-6)式を(AI-5)に代入することにより、

$$\begin{aligned}
 S_d = & -\frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) \\
 & + \frac{2}{3}abc(\sin^2 A \cos A + \sin^2 B \cos B + \sin^2 C \cos C) \\
 & + \frac{1}{3}\{(b^3 + c^3 - a^3)\cos^2 A + (c^3 + a^3 - b^3)\cos^2 B + (a^3 + b^3 - c^3)\cos^2 C\} \\
 & + \frac{1}{3}\{b^3 \ln \frac{s}{s-c} + c^3 \ln \frac{s}{s-b}\} \sin^2 A \cos A \\
 & + \{c^3 \ln \frac{s}{s-a} + a^3 \ln \frac{s}{s-c}\} \sin^2 B \cos B \\
 & + \{a^3 \ln \frac{s}{s-b} + b^3 \ln \frac{s}{s-a}\} \sin^2 C \cos C
 \end{aligned} \tag{AI-7}$$

となる。

(ii) 長方形要素における積分

(2.3-2.4)式において、

$$\begin{aligned}
 S_{i,i'}^1 &= \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \frac{P_i(\frac{X_1}{a}) P_{i'}(\frac{X_2}{a})}{r_{12}} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 \\
 S_{i,i'}^4 &= \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \frac{Q_i(\frac{Y_1}{b}) Q_{i'}(\frac{Y_2}{b})}{r_{12}} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2
 \end{aligned} \tag{AI-8}$$

とおく。そして、

$$\begin{aligned}
 S_1(a,b) &= \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \frac{X_1 X_2}{r_{12}} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 \\
 S_2(a,b) &= \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \frac{X_1(a-X_2)}{r_{12}} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2
 \end{aligned} \tag{AI-9}$$

とおくと、 P_i, Q_i の性質より、

$$\begin{aligned}
 S_{1,1}^1 &= S_{2,2}^1 = S_{3,3}^1 = S_{4,4}^1 = S_{1,4}^1 = S_{2,3}^1 = S_1(a,b)/a^2 \\
 S_{1,2}^1 &= S_{1,3}^1 = S_{2,3}^1 = S_{2,4}^1 = S_2(a,b)/a^2 \\
 S_{1,1}^4 &= S_{2,2}^4 = S_{3,3}^4 = S_{4,4}^4 = S_{1,2}^4 = S_{3,4}^4 = S_1(b,a)/b^2 \\
 S_{1,3}^4 &= S_{1,4}^4 = S_{2,3}^4 = S_{2,4}^4 = S_2(b,a)/b^2
 \end{aligned} \tag{AI-10}$$

となる。また i, i' の反転に対しては値は変わらない。

(AI-9)式の積分は直接計算できて、

$$\begin{aligned}
 S_1(a,b) &= \frac{2}{15}a^5 + \frac{1}{3}a^2b^3 + \frac{1}{45}b^5 \\
 &\quad - \left(\frac{2}{15}a^4 + \frac{29}{90}a^2b^2 + \frac{1}{45}b^4 \right) \sqrt{a^2+b^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2}a^4b \sinh^{-1} \frac{b}{a} + \frac{2}{3}a^3b^2 \sinh^{-1} \frac{a}{b} \\
 S_2(a,b) &= \frac{1}{5}a^5 - \frac{1}{45}b^5 - \left(\frac{1}{5}a^4 + \frac{8}{45}a^2b^2 - \frac{1}{45}b^4 \right) \sqrt{a^2+b^2} + \frac{1}{2}a^4b \sinh^{-1} \frac{b}{a} \\
 &\quad + \frac{1}{3}a^3b^2 \sinh^{-1} \frac{a}{b}
 \end{aligned} \tag{AI-11}$$

となる。

Appendix II P_i, Q_i の積の積分

(2.3-27), (2.3-28) 式の計算を行う。

p_{ij}, q_{ij} は i, j について対称であり,

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{44} = p_{14} = p_{23} = \frac{1}{3}$$

$$p_{12} = p_{13} = p_{24} = p_{34} = \frac{1}{6}$$

$$q_{11} = q_{22} = q_{33} = q_{44} = q_{12} = q_{34} = \frac{1}{3}$$

$$q_{13} = q_{14} = q_{23} = q_{24} = \frac{1}{6}$$

(AII-1)

となる。

また p_{ijk}, q_{ijk} は i, j, k に対して対称で,

$$p_{ij1} = p_{ij4}, p_{ij2} = p_{ij3}, p_{111} = p_{222}, p_{112} = p_{122}$$

$$q_{ij1} = q_{ij2}, q_{ij3} = q_{ij4}, q_{111} = q_{333}, q_{113} = q_{133}$$

(AII-2)

が成立ち, p, q の間で

$$p_{ij1} = q_{ij1}, p_{ij2} = q_{ij3}$$

(AII-3)

が成り立つ。

$$p_{111} = \frac{1}{4}, p_{112} = \frac{1}{12}$$

(AII-4)

となり, 全ての p_{ijk}, q_{ijk} が求まる。