

JAERI-M

8107

二次元軸対称問題における燃料ペレットと  
被覆管の間の接触圧力

1979年3月

原山 泰雄・泉 文男・山田 礼司・中島 鉄雄

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

二次元軸対称問題における燃料ペレットと被覆管の間の接触圧力

日本原子力研究所東海研究所安全工学部  
原山泰雄・泉 文男・山田礼司・中島鉄雄

(1979年1月29日 受理)

燃料棒のペレットと被覆管との間の接触圧力は、被覆管にかかる応力、および接触熱伝達の評価に必要である。一方、これらの評価は最近大部分計算機プログラムを利用して行なわれている。しかしながら、解析的に求めた接触圧力は、プログラムによって求めた数値解の検討に利用出来る。

二次元軸対称問題を燃料棒に適用した接触圧力が求められ、定式化された。

さらに、平面歪、平面応力およびLame の条件下での接触圧力は、Lame の条件に軸方向のすべりの条件を付加して描かれた図表上に表わすことができる。

JAERI-M 8107

Contact pressure between pellets and cladding tube  
in axi-symmetric two-dimensional problems

Yasuo HARAYAMA, Fumio IZUMI, Rayji YAMADA and Tetsuo NAKAJIMA  
Division of Reactor Safety, Tokai Research Establishment, JAERI  
(Received January 29, 1979)

The contact pressure between fuel pellets and cladding tube is necessary for estimation of the stress acting onto the tube and the gap heat transfer. Recently these estimations are made by use of computer programs. The contact pressures analytically obtained are usable in checking those obtained numerically by programs.

The contact pressures in axi-symmetric two-dimensional problems applied to the fuel rod were obtained and formulized. The contact pressures under plane strain, plane stress and Lamé's conditions can be plotted on the figure which is drawn by applying axial slip to Lamé's conditions.

Keyword: Pellet-Cladding Contact Pressure, Fuel Rod, Two-Dimensional Analysis, Plane Strain, Plane Stress, Lamé's Condition, Friction, Slip.

## 目 次

1. はじめに.....	1
2. 接触圧力.....	1
2.1 基礎方程式.....	1
2.2 平面歪の場合.....	3
2.3 平面応力の場合.....	4
2.4 Lamé の条件の場合.....	5
2.4.1 軸方向のすべりが無い場合.....	6
2.4.2 軸方向のすべりが起る場合.....	9
2.5 接触圧力計算式のまとめ.....	10
3. 計算例および検討.....	13
3.1 計算に使用する数値.....	13
3.2 平面歪および平面応力条件下の接触圧力.....	14
3.3 Lamé の条件下の接触圧力.....	15
3.3.1 すべりが無いとき.....	15
3.3.2 すべりがあるとき.....	16
3.4 数値計算結果の検討.....	16
4. むすび.....	21
謝 辞.....	21
参考文献.....	21

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Contact pressures .....	1
2.1 Fundamental equations .....	1
2.2 Plane strain condition .....	3
2.3 Plane stress condition .....	4
2.4 Lamé's condition .....	5
2.4.1 In case of no-slip .....	6
2.4.2 In case of axially slip .....	9
2.5 Rearrangement of contact pressure formulations .....	10
3. Numerical example and discussions .....	13
3.1 Used data in numerical calculation .....	13
3.2 Contact pressures under plane strain and plane stress conditions .....	14
3.3 Contact pressures under Lamé's condition .....	15
3.3.1 No slip .....	15
3.3.2 Axially slip .....	16
3.4 Discussions .....	16
4. Conclusion .....	21
Acknowledgements .....	21
References .....	21

## 1. はじめに

燃料棒の設計において、燃料ペレット外径と被覆管内径は、通常運転時接触力が発生しないような寸法にえられる。しかし、過出力時あるいは寸法の許容値内の変動によって、接触力が発生する場合がある。

この報告書では、これら接触問題のうち、燃料ペレットと被覆管間の接触について考察する。

燃料棒の設計あるいは照射挙動解析プログラムにおいて接触力は被覆管の強度に大きな影響をもつため、その評価が必要になる。

この燃料棒内の接触を評価する基本式は、円柱、円筒に関して弾性論よりえられる解析解である。これら解析解は、燃料挙動解析プログラムに使用されるばかりでなく、有限要素法を使用した構造解析プログラムの計算結果の妥当性の検討に使用できる。そのため、解析解を明確に定式化しておくことは重要な作業である。

しかるに、チモシェンコ等によるテキスト<sup>1)</sup>の円筒の焼ばめ理論によって求めた接触圧力(力)は、条件の設定が必ずしも明確でない。前提とする条件を誤ると、有限要素法プログラムで求めた接触圧力と一致しない。

接触問題の複雑さは、応力を求める計算式からえられるものでなく、接触する両物体の接触面における変位を考慮しなければならないことに原因がある。ただし、円柱および円筒に関して変位が簡単な式でえられるものは、二次元問題しかないので、この報告書では二次元問題に限定する。さらに二次元問題のうち、平面歪と平面応力およびLame'の条件下での接触力に限り、弾性論からえられる解析解の整理を行った。

## 2. 接触圧力

燃料棒内の燃料ペレットと被覆管の間の接触圧力を求める式の導出を行う。ただし、二次元軸対称問題として取扱うので、局所的な燃料ペレットのリッジ等による接触圧力を求めるのではない。また、使用する式は、弾性論に基づいており、塑性等は考慮していない。

得られた結果は、Table 2にまとめられている。

### 2.1 基礎方程式

円柱(solid cylinder)および円筒(hollow cylinder)の二次元軸対称問題における変位の弾性理論に基づく解はTable 1に示す通りである。<sup>2)</sup>

燃料棒内の燃料ペレットと被覆管の間の接触圧力を求める方法は次の通りである。燃料ペレットと被覆管の接触面で、接触圧力が作用せず自由に変位したと仮定したとき、半径方向に $\delta_r$ 、軸方向長さ $l$ について $\delta_a$ のくいちがいが起る状態があるとする。ここで $\delta_r$ は接触圧力が作用し

## 1. はじめに

燃料棒の設計において、燃料ペレット外径と被覆管内径は、通常運転時接触力が発生しないような寸法にえられる。しかし、過出力時あるいは寸法の許容値内の変動によって、接触力が発生する場合がある。

この報告書では、これら接触問題のうち、燃料ペレットと被覆管間の接触について考察する。

燃料棒の設計あるいは照射挙動解析プログラムにおいて接触力は被覆管の強度に大きな影響をもつため、その評価が必要になる。

この燃料棒内の接触を評価する基本式は、円柱、円筒に関して弾性論よりえられる解析解である。これら解析解は、燃料挙動解析プログラムに使用されるばかりでなく、有限要素法を使用した構造解析プログラムの計算結果の妥当性の検討に使用できる。そのため、解析解を明確に定式化しておくことは重要な作業である。

しかるに、チモシェンコ等によるテキスト<sup>1)</sup>の円筒の焼ばめ理論によって求めた接触圧力(力)は、条件の設定が必ずしも明確でない。前提とする条件を誤ると、有限要素法プログラムで求めた接触圧力と一致しない。

接触問題の複雑さは、応力を求める計算式からえられるものでなく、接触する両物体の接触面における変位を考慮しなければならないことに原因がある。ただし、円柱および円筒に関して変位が簡単な式でえられるものは、二次元問題しかないので、この報告書では二次元問題に限定する。さらに二次元問題のうち、平面歪と平面応力およびLame'の条件下での接触力に限り、弾性論からえられる解析解の整理を行った。

## 2. 接 触 圧 力

燃料棒内の燃料ペレットと被覆管の間の接触圧力を求める式の導出を行う。ただし、二次元軸対称問題として取扱うので、局所的な燃料ペレットのリッチング等による接触圧力を求めるのではない。また、使用する式は、弾性論に基づいており、塑性等は考慮していない。

得られた結果は、Table 2にまとめられている。

### 2.1 基礎方程式

円柱(solid cylinder)および円筒(hollow cylinder)の二次元軸対称問題における変位の弾性理論に基づく解はTable 1に示す通りである。<sup>2)</sup>

燃料棒内の燃料ペレットと被覆管の間の接触圧力を求める方法は次の通りである。燃料ペレットと被覆管の接触面で、接触圧力が作用せず自由に変位したと仮定したとき、半径方向に $\delta_r$ 、軸方向長さ $l$ について $\delta_a$ のくいちがいが起る状態があるとする。ここで $\delta_r$ は接触圧力が作用し



Table 1 Displacements and axial strains due to internal and external pressure

Condition	Solid Cylinder	Hollow Cylinder
pl. strain	$u_r = -(1+\nu)(1-2\nu)r \frac{P_o}{E}$	$u_r = (1+\nu) \frac{R_1^2 \{ R_o^2 + (1-2\nu)r^2 \} P_i}{r(R_o^2 - R_1^2)} - (1+\nu) \frac{R_o^2 \{ (1-2\nu)r^2 + R_1^2 \} P_o}{r(R_o^2 - R_1^2)} \cdot \frac{P_o}{E}$
pl. stress	$u_r = -(1-\nu)r \frac{P_o}{E}$ $\epsilon_a = 2\nu \frac{P_i}{E}$	$u_r = \frac{R_1^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_o^2 \} P_i}{r(R_o^2 - R_1^2)} \cdot \frac{P_i}{E} - \frac{R_o^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_1^2 \} P_o}{r(R_o^2 - R_1^2)} \cdot \frac{P_o}{E}$ $\epsilon_a = -2\nu \frac{R_1^2}{R_o^2 - R_1^2} \cdot \frac{P_i}{E} + 2\nu \frac{R_o^2}{R_o^2 - R_1^2} \cdot \frac{P_o}{E}$
Lame's condition	$u_r = (1-\nu)r \frac{P_o}{E} + \nu r \frac{P_f}{E}$ $\epsilon_a = 2\nu \frac{P_o}{E} - \frac{P_f}{E}$	$u_r = \frac{R_1^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_o^2 \} P_i}{r(R_o^2 - R_1^2)} \cdot \frac{P_i}{E} - \frac{R_o^2 \{ (1-\nu)r^2 + (1+\nu)R_1^2 \} P_o}{r(R_o^2 - R_1^2)} \cdot \frac{P_o}{E} + \nu r \frac{P_c}{E}$ $\epsilon_a = -2\nu \frac{R_1^2}{R_o^2 - R_1^2} \cdot \frac{P_i}{E} + 2\nu \frac{R_o^2}{R_o^2 - R_1^2} \cdot \frac{P_o}{E} - \frac{P_c}{E}$
Nomenclature	<p>E : Young's modulus, r : Arbitrary radius, <math>u_r</math> : Radial displacement, <math>\nu</math> : Poisson's ratio</p> <p><math>\epsilon_a</math> : Axial strain <span style="float: right;">R<sub>1</sub> : Inner radius</span></p> <p>P<sub>o</sub> : External pressure <span style="float: right;">P<sub>i</sub> : Internal pressure,</span></p> <p>P<sub>f</sub> : Pressure acting on end surface of solid cylinder <span style="float: right;">P<sub>c</sub> : External pressure,</span></p> <p><span style="float: right;">P<sub>c</sub> : Pressure acting on end surface of hollow cylinder.</span></p>	

ないとしたとき、くいちがい（clearance）を起す原因によって変化した燃料ペレット外半径（ $R_{o,f}$ ）と被覆管内半径（ $R_{i,c}$ ）の差（ $\delta_r = R_{o,f} - R_{i,c}$ ）と定義する。 $\delta_a$  は長さ  $l$  について、くいちがいを起す原因による燃料ペレットの軸方向の伸び（ $\Delta l_{a,f}$ ）と被覆管の伸び（ $\Delta l_{a,c}$ ）との差（ $\delta_a = \Delta l_{a,f} - \Delta l_{a,c}$ ）と定義する。以下、 $\delta_r$ 、 $\delta_a$  をこの報告書では“くいちがい代”と呼ぶことにする。「これらくいちがい代は、接触力（or 圧力）の発生によりある変位に拘束される。接触力により燃料ペレットの外径は半径方向に  $\delta_{r,f}$  の変位（減少）、長さ  $l$  について軸方向に  $\delta_{a,f}$  の変化（減少）が起り、被覆管の内径は半径方向に  $\delta_{r,c}$  の変位（増加）、長さ  $l$  について軸方向に  $\delta_{a,c}$  の変化（増加）が起って均合ったとしよう。このとき、

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= -\delta_{r,f} + \delta_{r,c} \\ \delta_a &= -\delta_{a,f} + \delta_{a,c} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

が成立する。

接触圧力は、この方程式を解くことによってえられる。すなわち、二次元問題の場合、接触圧力は上記の連立方程式から求めねばならない。

## 2.2 平面歪の場合

燃料ペレットが中心孔（半径  $R_{fi}$ ）をもち、被覆が円筒の場合、平面歪条件下の接触圧力を求める基礎方程式を求める。仮定は平面歪であるから、接触する両物体の軸方向の変位はない。したがって、半径方向の変位のみを考える。接触面の半径を  $R$ 、接触圧力を  $P_r$  とし、両物体が干渉しないとした場合のくいちがい代を  $\delta_r$  とするとき、成立すべき方程式は、Table 1 を参照して、次のように得られる。

$$\delta_r = (1 + \nu_f) \frac{R \{ (1 - 2\nu_f)R^2 + R_{fi}^2 \}}{R^2 - R_{fi}^2} \frac{P_r}{E_f} + (1 + \nu_c) \frac{R \{ R_{co}^2 + (1 - 2\nu_c)R^2 \}}{R_{co}^2 - R^2} \frac{P_r}{E_c} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 $E$  : Young's modulus ,

$R_{co}$  : 被覆管外半径,

$R_{fi}$  : ペレット内半径

$\nu$  : Poisson's ratio

であり、suffix  $f$  は燃料ペレットを、 $c$  は被覆管を示す。

(2)式の右辺第1項は、燃料ペレット外径が接触圧力によって減少する変位を表している。これは、Table 1 の pl. strain, Hollow cylinder の  $u_r$  で  $P_i = 0$ ,  $P_o = P_r$  と考え、 $r = R_o = R$ ,  $R_i = R_{fi}$ ,  $\nu = \nu_f$ ,  $E = E_f$  とすることにより、

$$\delta_{r,f} = -(1 + \nu_f) \frac{R^2 \{ (1 - 2\nu_f)R^2 + R_{fi}^2 \}}{R (R^2 - R_{fi}^2)} \frac{P_r}{E_f}$$

と求められる。

右辺第2項は、被覆管内径の増加する変位を表している。これは、Table-1 の pl. strain ,

Hollow cylinder の  $u_r$  で  $P_i = P_r$  ,  $P_o = 0$  と考え,  $r = R_i = R$  ,  $R_o = R_{co}$  ,  $\nu = \nu_c$  ,  $E = E_c$  とすることにより,

$$\delta_{r,c} = (1 + \nu_c) \frac{R^2 (R_{co}^2 + (1 - 2\nu_c) R^2)}{R (R_{co}^2 - R^2)} \frac{P_r}{E_c}$$

と求められる。

平面歪条件下の接触圧力  $P_r$  は, (2)式を解くことにより, 次のように求められる。

$$P_r = \frac{(\delta_r / R)}{\left[ \frac{(1 + \nu_f) \{ (1 - 2\nu_f) R^2 + R_{fi}^2 \}}{E_f (R^2 - R_{fi}^2)} + \frac{(1 + \nu_c) \{ R_{co}^2 + (1 - 2\nu_c) R^2 \}}{E_c (R_{co}^2 - R^2)} \right]} \quad \dots\dots\dots(3)$$

特に, 燃料ペレットの中心孔がない場合 ( $R_{fi} = 0$ ), あるいは中心孔を無視しうのような場合 ( $R_{fi} / R \simeq 0$ ) には, 接触圧力は(3)式より

$$P_r = \frac{(\delta_r / R)}{\left[ \frac{(1 + \nu_f) (1 - 2\nu_f)}{E_f} + \frac{(1 + \nu_c) \{ R_{co}^2 + (1 - 2\nu_c) R^2 \}}{E_c (R_{co}^2 - R^2)} \right]} \quad \dots\dots\dots(4)$$

で表わされる。

接触圧力の発生に伴い, 平面歪 ( $\epsilon_a = 0$ ) の条件を満たすため, 燃料ペレットおよび被覆管には軸方向の応力が生じる。その応力は, それぞれ

燃料ペレットについては圧縮応力となり,

$$\sigma_a = -2\nu_f \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} P_r \quad \dots\dots\dots(5)$$

であり, 被覆管については引張応力となり,

$$\sigma_a = 2\nu_c \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} P_r \quad \dots\dots\dots(6)$$

である。

### 2.3 平面応力の場合

平面応力条件下での燃料ペレットと被覆管の間に発生する接触圧力について考える。記号等は 2.2 に従うものとする。平面応力下の接触圧力を求める方程式は, 変位を定める Table-1 の式より,

$$\delta_r = \frac{R \{ (1 - \nu_f) R^2 + (1 + \nu_f) R_{fi}^2 \}}{R^2 - R_{fi}^2} \frac{P_r}{E_f} + \frac{R \{ (1 - \nu_c) R^2 + (1 + \nu_c) R_{co}^2 \}}{R_{co}^2 - R^2} \frac{P_r}{E_c} \quad \dots\dots\dots(7)$$

が成立する。第1項はペレット外径の減少、第2項は被覆管内径増加の変位である。導出は(3)式の場合と同様なので省略する。接触圧力は、

$$P_r = \frac{(\delta_r / R)}{\left[ \frac{(1-\nu_f)R^2 + (1+\nu_f)R_{fi}^2}{E_f(R^2 - R_{fi}^2)} + \frac{(1-\nu_c)R^2 + (1+\nu_c)R_{co}^2}{E_c(R_{co}^2 - R^2)} \right]} \dots\dots\dots(8)$$

と求められる。

特に、燃料ペレットの中心孔がないとか無視しうる場合には、接触圧力は、(8)式より

$$P_r = \frac{(\delta_r / R)}{\left[ \frac{(1-\nu_f)}{E_f} + \frac{(1-\nu_c)R^2 + (1+\nu_c)R_{co}^2}{E_c(R_{co}^2 - R^2)} \right]} \dots\dots\dots(9)$$

と表わされる。

(8)式で、 $E_f = E_c$ 、 $\nu_f = \nu_c$ とおけば、チモシェンコのテキスト<sup>1)</sup>の“焼ばめ圧力 (shrink-fit pressure)”に一致する。

平面応力条件のもとでは、接触に伴う軸方向の接触力あるいは応力を考えることはできない。しかし、半径方向の接触力に基く、軸方向の歪は計算できる。この歪は、燃料ペレットと被覆管においてその大きさが異なる。平面応力条件は、これらの歪あるいは変位を無視しうるものに適用されるべきであるが、参考のためそれぞれの軸方向歪を記すと次の通りである。

燃料ペレットについては、伸びで

$$\epsilon_a = 2\nu_f \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \cdot \frac{P_{cr}}{E_f} \dots\dots\dots(10)-a$$

である。

被覆管については、圧縮で

$$\epsilon_a = -2\nu_c \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \cdot \frac{P_{cr}}{E_c} \dots\dots\dots(10)-b$$

である。

これより、平面応力条件下の軸方向くいちがい代 $\delta_a$  (長さ $l$ について)は

$$\frac{\delta_a}{l} = -2\nu_f \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \frac{P_{cr}}{E_f} - 2\nu_c \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \frac{P_{cr}}{E_c} \dots\dots\dots(11)$$

と表される。

## 2.4 Lamé の条件の場合

Lamé の条件は、軸方向の歪が半径方向の位置にかかわらず一定とする仮定である。しかし、

接触する両物体の軸方向の歪が等しくなるという保証はない。したがって、両物体間の軸方向の歪を無視して接触力を論ずることはできない。

さらに、軸方向接触力は、摩擦条件によって決まる限界値を越えるとすべりを起すので、すべりが起る場合と起らない場合に分けて論ずる。

2.4.1 軸方向のすべりがない場合

接触する両物体は、接触面において軸方向のすべりが起らないと仮定する。

接触がないと仮定した場合の燃料ペレットと被覆管の接触面におけるくいちがい代のうち半径方向を $\delta_r$ 、軸方向については軸方向の長さ $\ell$ についてのくいちがい代を $\delta_a$ とする。接触による半径方向の圧力を $P_r$ 、接触によって引き起される軸方向接触力を軸方向の圧力に換算したとき燃料ペレットについて $P_{af}$ 、被覆管について $P_{ac}$ とする。

接触面（半径 $R$ ）における接触圧力 $P_r$ 、 $P_{af}$ 、 $P_{ac}$ による半径方向変位は、  
燃料ペレットについて、

$$\delta_{r,f} = -\frac{R\{(1-\nu_f)R^2 + (1+\nu_f)R_{fi}^2\}}{R^2 - R_{fi}^2} \frac{P_r}{E_f} + \nu_f R \frac{P_{af}}{E_f} \dots\dots\dots(12)$$

被覆管について

$$\delta_{r,c} = \frac{R\{(1-\nu_c)R^2 + (1+\nu_c)R_{co}^2\}}{R_{co}^2 - R^2} \frac{P_r}{E_c} - \nu_c R \frac{P_{ac}}{E_c} \dots\dots\dots(13)$$

となる。また、軸方向長さ $\ell$ 当りの伸びは

燃料ペレットについて

$$\delta_{a,f} = 2\nu_f \cdot \ell \cdot \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \frac{P_r}{E_f} - \ell \frac{P_{af}}{E_f} \dots\dots\dots(14)$$

被覆管について

$$\delta_{a,c} = -2\nu_c \ell \cdot \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \cdot \frac{P_r}{E_c} + \ell \cdot \frac{P_{ac}}{E_c} \dots\dots\dots(15)$$

である。ただし、 $P_{af}$ は圧縮の圧力、 $P_{ac}$ は引張の圧力として作用すると考えている。

(12)式の第1項は、接触圧力（半径方向）、 $P_r$ によるペレット外半径の減少量である。第2項は、接触によって発生した軸方向接触圧力、 $P_{af}$ による外半径の増加を表す。これらは、Table-1, Lamé's condition, Hollow cylinder の $u_r$ の項で、 $P_i = 0$ ,  $P_o = P_r$ ,  $P_c = P_{af}$ とすることより導かれる。

(13)式の第1項は、接触圧力（半径方向）、 $P_r$ による被覆管内半径の増加量である。第2項は、接触によって発生した軸方向接触圧力、 $P_{ac}$ による内半径の減少量を表している。ただし、軸方向接触力は、燃料ペレットについて圧縮する方向に作用していると仮定している。そのため作用と反作用の法則により被覆管の軸方向接触力は引張る方向に作用すると考えられる。その結果(13)

式の第2項の付号は負となる。

(14)式の第1項は、半径方向接触圧力、 $P_r$  によるペレット長さ $\ell$ についての伸びであり、第2項は軸方向接触圧力、 $P_{af}$  による縮みを表す ( $P_{af}$  は圧縮)。

(15)式の第1項は、半径方向接触圧力、 $P_{ar}$  による被覆管長さ $\ell$ についての縮みであり、第2項は軸方向接触圧力、 $P_{ac}$  による伸びである ( $P_{ac}$  は引張り)。

(12)~(15)式を(1)式に代入し

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= R \left\{ \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right\} \frac{P_{af}}{E_f} - \nu_f R \frac{P_{af}}{E_f} + R \left\{ \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right\} \frac{P_r}{E_c} - \nu_c R \frac{P_{ac}}{E_c} \\ \delta_a &= -2\ell \nu_f \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \frac{P_r}{E_f} + \ell \frac{P_{af}}{E_f} - 2 \cdot \ell \nu_c \frac{R}{R_{co}^2 - R^2} \frac{P_r}{E_c} + \ell \frac{P_{ac}}{E_c} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

が成立する。いま、接触面における接触力を半径方向 $F_r$ 、軸方向 $F_a$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} P_r &= F_r / 2\pi R \cdot \ell \\ P_{af} &= F_a / \pi (R^2 - R_{fi}^2) \\ P_{ac} &= F_a / \pi (R_{co}^2 - R^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

と表わされる。(17)式を(16)式に代入し、整理することにより、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_r}{R} &= \frac{F_r}{2\pi R \cdot \ell} \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \\ &\quad - \frac{F_a}{\pi} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} + \frac{\nu_c}{E_c} \cdot \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right\} \\ \frac{\delta_a}{\ell} &= -\frac{F_r}{\pi R \ell} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \cdot \left( \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{F_a}{\pi} \left\{ \frac{1}{E_f} \cdot \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{1}{E_c} \cdot \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

がえられる。この連立方程式を解いて、接触力 $F_r$ 、 $F_a$  が次のようにえられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_r}{\pi} &= D^{-1} \cdot \left[ \left\{ \frac{1}{E_f} \cdot \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) \right] \\ \frac{F_a}{\pi} &= D^{-1} \cdot \left[ \frac{1}{2R \ell} \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R \cdot \ell} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、Dは

$$D = \frac{1}{2R\ell} \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} - \frac{R}{\ell} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\}^2 \dots\dots\dots(20)$$

である。

この求められた接触力を(17式)を使用して、接触圧力に換算すると

$$P_r = \frac{\left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) + \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right)}{\left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} - 2R^2 \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\}^2} \dots\dots\dots(21)$$

$$P_a = \frac{\left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) + 2 \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right)}{\left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 - R_{fi}^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} - 2 \cdot \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2 - R_{fi}^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\}^2} \dots\dots\dots(22)$$

$$P_{ac} = \frac{\left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) + 2 \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right)}{\left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R_{co}^2 - R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{1}{E_c} \right\} - 2 \cdot \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{R_{co}^2 - R^2}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \right\}^2} \dots\dots\dots(23)$$

が求まる。

特に、2.2、2.3節と同様に燃料ペレットの中心孔がない場合 ( $R_{fi}=0$ )、あるいは中心孔を無視しうのような場合 ( $R_{fi} \ll R \approx 0$ ) には、接触力  $F_r$ 、 $F_a$  は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_r}{\pi} &= H^{-1} \left[ \left\{ \frac{1}{E_f R^2} + \frac{1}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) \right] \\ \frac{F_a}{\pi} &= H^{-1} \left[ \frac{1}{2R\ell} \left\{ \frac{1}{E_f} (1 - \nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) + \nu_c \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R \cdot \ell} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ただし、Hは

$$H = \frac{1}{2R\ell} \left\{ \frac{1}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2+R^2}{R_{co}^2-R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{1}{E_c} \cdot \left( \frac{1}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\} - \frac{R}{\ell} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_c}{E_c} \cdot \left( \frac{1}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\} \dots\dots\dots (25)$$

である。上記の接触力を接触圧力に換算すると、

$$P_r = \frac{\left\{ \frac{1}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{1}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) + \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_c}{E_c} \cdot \frac{1}{R_{co}^2-R^2} \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right)}{\left\{ \frac{1}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2+R^2}{R_{co}^2-R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{1}{E_c} \cdot \left( \frac{1}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\} - 2R^2 \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\}^2} \dots\dots\dots (26)$$

$$P_{af} = \frac{\left\{ \frac{1}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2+R^2}{R_{co}^2-R^2} + \nu_c \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) + 2 \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right)}{\left\{ \frac{1}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2+R^2}{R_{co}^2-R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{E_f} + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\} - 2 \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\}^2} \dots\dots\dots (27)$$

$$P_{ac} = \frac{\left\{ \frac{1}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2+R^2}{R_{co}^2-R^2} + \nu_c \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) + 2 \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2-R^2} \right) \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right)}{\left\{ \frac{1}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2+R^2}{R_{co}^2-R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{E_f} \cdot \frac{R_{co}^2-R^2}{R^2} + \frac{1}{E_c} \right\} - 2 \frac{R^2}{R_{co}^2-R^2} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \frac{R_{co}^2-R^2}{R^2} + \frac{\nu_c}{E_c} \right\}^2} \dots\dots\dots (28)$$

がえられる。

2.4.2 軸方向のすべりが起る場合

接触面において軸方向のすべりが起らない場合、前節の方法によって接触力を定めることができる。しかし、軸方向接触力が摩擦係数(μ)によって決まる限界値(μF<sub>r</sub> : F<sub>r</sub> = 半径方向接触力)をこえると、接触面ですべりがおこる。

この場合の接触力を求める基礎式は、(16)式の第1式と同じである。すなわち、

$$\delta_r = R \left\{ \frac{R^2+R_{fi}^2}{R^2-R_{fi}^2} - \nu_f \right\} \frac{P_r}{E_f} - \nu_f R \frac{P_{af}}{E_f} + R \left\{ \frac{R_{co}^2+R^2}{R_{co}^2-R^2} + \nu_c \right\} \frac{P_r}{E_c} - \nu_c R \frac{P_{ac}}{E_c} \dots\dots\dots (29)$$

である。また、接触圧力P<sub>r</sub>、P<sub>af</sub>、P<sub>ac</sub>と接触力F<sub>r</sub>、F<sub>a</sub>の間には(17)式と同様に次の関係式が成立している。

$$\left. \begin{aligned} P_r &= F_r / 2\pi R\ell \\ P_{af} &= F_a / \pi (R^2 - R_{fi}^2) \\ P_{ac} &= F_a / \pi (R_{co}^2 - R^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ただし、この場合すべりがおこるのであるから、F<sub>a</sub>とF<sub>r</sub>の間に次の関係がある。



$$F_a = \mu F_r \dots\dots\dots(31)$$

(30)式と(31)式を(29)式に代入し、 $F_r$  について整理すると、

$$\frac{\delta_r}{R} = \frac{F_r}{2\pi R \cdot \ell} \left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \\ - \mu \cdot \frac{F_r}{\pi} \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \cdot \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\}$$

がえられる。接触圧力 $P_r (= F_r / 2\pi R \cdot \ell)$ について解くと、

$$P_r = \frac{\delta_r / R}{\left\{ \frac{1}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{fi}^2}{R^2 - R_{fi}^2} - \nu_f \right) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} - 2R\ell\mu \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \left( \frac{1}{R^2 - R_{fi}^2} \right) + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\}} \dots\dots\dots(32)$$

がえられる。

特に、中実ペレット ( $R_{fi} = 0$ ) あるいは中心孔が無視しうる ( $R_{fi} / R \simeq 0$ ) 場合には接触圧力 $P_r$  は

$$P_r = \frac{\delta_r / R}{\left\{ \frac{1}{E_f} (1 - \nu_f) + \frac{1}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} - 2R\ell\mu \left\{ \frac{\nu_f}{E_f} \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_c}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\}} \dots\dots\dots(33)$$

である。なお、 $\mu = 0$ 、すなわち摩擦がなく軸方向の力が発生せず、完全にすべりが起る場合には、(32)、(33)式は平面応力状態で求めた接触圧力(8)および(9)式に一致する。

### 2.5 接触圧力計算式のまとめ

以上、2.2～2.4までに導いた各条件下の接触圧力の式を整理してTable-2に示す。

この整理に当り各変数は出来る限り無次元化するようにしたが、印刷上のことを考え半径に関する変数については、これを行っていない。

なお、軸方向接触力によって発生する軸方向接触圧力については被覆管を基準に整理した。

Table 2 Contact pressure in axi-symmetric two-dimensional problems

Condition	Contact pressure between pellet (hollow cylinder) and cladding tube	Contact pressure between pellet (solid cylinder) and cladding tube
Plane strain	$\left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left[ \frac{(1+\nu_f) \{ (1-2\nu_f)R^2 + R_{f1}^2 \}}{R^2 - R_{f1}^2} + \frac{E_f (1+\nu_c) \{ R_{co}^2 + (1-2\nu_c)R^2 \}}{R_{co}^2 - R^2} \right]^{-1}$	$\left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left[ (1+\nu_f)(1-2\nu_f) + \frac{E_f (1+\nu_c) \{ R_{co}^2 + (1-2\nu_c)R^2 \}}{R_{co}^2 - R^2} \right]^{-1}$
Plane stress	$\left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left[ \frac{(1-\nu_f)R^2 + (1+\nu_f)R_{f1}^2}{R^2 - R_{f1}^2} + \frac{E_f (1-\nu_c)R^2 + (1+\nu_c)R_{co}^2}{R_{co}^2 - R^2} \right]^{-1}$	$\left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left[ (1-\nu_f) + \frac{E_f (1-\nu_c)R^2 + (1+\nu_c)R_{co}^2}{R_{co}^2 - R^2} \right]^{-1}$
Lame's condition No slip	$\left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left\{ \frac{1}{R^2 - R_{f1}^2} + \frac{E_f}{E_c} \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right\} + \left(\frac{\delta_a}{\ell}\right) \left\{ \frac{\nu_f}{R^2 - R_{f1}^2} + \frac{E_f}{E_c} \frac{\nu_c}{R_{co}^2 - R^2} \right\} \times$ $\left[ \left\{ \frac{R^2 + R_{f1}^2}{R^2 - R_{f1}^2} - \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ \frac{1}{R^2 - R_{f1}^2} + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} - 2R^2 \left\{ \frac{\nu_f}{R^2 - R_{f1}^2} + \frac{E_f}{E_c} \frac{\nu_c}{R^2 - R_{f1}^2} \right\}^2 \right]^{-1}$	$\left[ \left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{E_f}{E_c} \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right\} + \left(\frac{\delta_a}{\ell}\right) \left\{ \frac{\nu_f}{R^2} + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{\nu_c}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \right] \times$ $\left[ (1-\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right] \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} - 2R^2 \left\{ \frac{\nu_f}{R^2} + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{\nu_c}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\}^2 \right]^{-1}$
	$\left(\frac{\delta_a}{\ell}\right) \left\{ \frac{E_c}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{f1}^2}{R^2 - R_{f1}^2} - \nu_f \right) + \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right\} + 2 \left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left\{ \frac{E_c}{E_f} \nu_f \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) + \nu_c \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \times$ $\left[ \left\{ \frac{E_c}{E_f} \left( \frac{R^2 + R_{f1}^2}{R^2 - R_{f1}^2} - \nu_f \right) + \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right\} \left\{ \frac{E_c}{E_f} \left( \frac{R^2 - R^2}{R^2 - R_{f1}^2} \right) + 1 \right\} - 2 \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \left\{ \frac{E_c}{E_f} \nu_f \left( \frac{R_{co}^2 - R^2}{R^2 - R_{f1}^2} \right) + \nu_c \right\}^2 \right]^{-1}$	$\left[ \left(\frac{\delta_a}{\ell}\right) \left\{ \frac{E_c}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right\} + 2 \left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left\{ \frac{E_c}{E_f} \nu_f + \nu_c \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \right] \times$ $\left[ \left\{ \frac{E_c}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right\} \left\{ \frac{E_c}{E_f} \frac{R_{co}^2 - R^2}{R^2} + 1 \right\} - 2 \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \left\{ \frac{E_c}{E_f} \nu_f \left( \frac{R_{co}^2 - R^2}{R^2} \right) + \nu_c \right\}^2 \right]^{-1}$
Slip	$\left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left[ \left\{ \frac{R^2 + R_{f1}^2}{R^2 - R_{f1}^2} - \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right\} - 2R\mu \left\{ \frac{\nu_f}{R^2 - R_{f1}^2} + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{1}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \right]^{-1}$	$\left(\frac{\delta_r}{R}\right) \left[ (1-\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{R_{co}^2 + R^2}{R_{co}^2 - R^2} + \nu_c \right) \right] - 2\mu \left( \frac{\ell}{R} \right) \left\{ \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{R^2}{R_{co}^2 - R^2} \right) \right\} \right]^{-1}$
	$2\mu \cdot \frac{R \cdot \ell}{R_{co}^2 - R^2} \frac{E_f P_r}{E_c E_f}$	$2\mu \cdot \frac{R \cdot \ell}{R_{co}^2 - R^2} \frac{E_f P_r}{E_c E_f}$

Nomenclature:

- E : Young's modulus
- $\nu$  : Poisson's ratio
- $\mu$  : Coefficient of friction at contact surface
- R : Radius of contact surface
- R<sub>f1</sub>: Pellet (hollow cylinder) inner radius
- R<sub>co</sub>: Cladding tube outer radius
- $\ell$  : Axial length taken into account
- P<sub>r</sub> : Contact pressure in radial direction
- P<sub>ac</sub>: Contact pressure in axial direction induced in cladding tube

suffix:

- c : Cladding tube
- f : Fuel pellet

$\delta_r$  : Interferential allowance in radial direction

$\delta_a$  : Interferential allowance in axial direction

$\delta_r = R_o, f - R_{i,c}$

$R_o, f$ : Expanded pellet outer radius

$R_{i,c}$ : Expanded cladding inner radius

$\delta_a = \Delta \lambda_{a,f} - \Delta \lambda_{a,c}$

$\Delta \lambda_{a,f}$ : Axial elongation of fuel pellet per length  $\ell$

$\Delta \lambda_{a,c}$ : Axial elongation of cladding tube per length  $\ell$

### 3. 計算例および検討

第2章で導出した接触圧力，接触力の式を使用して，計算を行うとともにその結果等を含め検討を行う。しかし，計算には，中実ペレットと被覆管内面間の接触問題として取扱う。

#### 3.1 計算に使用する数値

計算例として計算に使用した数値は次の通りである。

	燃料ペレット	被覆管
ヤング率, $E$ (kp/cm <sup>2</sup> )	$1.5 \times 10^6$	$0.805 \times 10^6$
ポアソン比, $\nu$	0.3	0.42
内径, (cm)	0.0	0.5415
外径, (cm)	0.5415	0.6115
軸方向長さ, $l$ (cm)	1.0	
熱膨張率, $\alpha$ (cm/cm/°C)	$10.52 \times 10^{-6}$	$6.7 \times 10^{-6}$

これらの数値は，主としてJPPR-II燃料の設計データから採用した。接触圧力を評価するため，燃料ペレット外径は被覆管内径に等しいとしている。ただし，計算では無次元化された比として使用されるので，その比（被覆管内外径比， $R/R_{c0} \approx 0.8855$ ，燃料と被覆管のヤング率比  $E_f/E_c \approx 1.863$ ）さえ一致すれば，計算結果は他の燃料棒でも使用できる。

接触圧力が生じる原因となる燃料ペレットと被覆管とのくいちがい代は次の通りとする。この計算例では，くいちがいを起す原因は熱膨張のみと考える。

先に記載したように燃料ペレットと被覆管とは接触はしているが未だ接触圧力はない状態から等温的に10°C温度が上昇( $\Delta t$ )したとする。そのとき半径方向に生じるくいちがい代は次のようになる。ただし，接触半径を $R$ ，熱膨張係数を $\alpha$ とし，添字 $f$ は燃料ペレット， $c$ は被覆管とする。

燃料ペレット外径は，熱膨張により

$$\alpha_f \cdot R \cdot \Delta t = 10.52 \times 10^{-6} \times 0.5415 \times 10$$

だけ膨張する。同じく，被覆管内径は，

$$\alpha_c \cdot R \cdot \Delta t = 6.7 \times 10^{-6} \times 0.5415 \times 10$$

だけ自由膨張する。これより，くいちがい代( $\delta_r$ )の接触半径に対する比として

$$\delta_r/R = (\alpha_f - \alpha_c) \Delta t = 3.82 \times 10^{-5}$$

がえられる。

同様に、軸方向のくいちがい代は、次の通りである。燃料ペレットは、その長さ、 $l$ について

$$\alpha_f \cdot l \cdot \Delta t = 10.52 \times 10^{-6} \times 10 \times l$$

だけ軸方向にのびる。同様に被覆管は

$$\alpha_c \cdot l \cdot \Delta t = 6.7 \times 10^{-6} \times 10 \times l$$

だけ軸方向にのびる。

結果として、軸方向に生じるくいちがい歪の差 ( $\delta_a/l$ ) は

$$\delta_a/l = (\alpha_f - \alpha_c) \cdot \Delta t = 3.82 \times 10^{-5}$$

である。

くいちがいの原因を熱膨張のみと考えているので、 $\delta_r/R$  と  $\delta_a/l$  は等しい。 $\delta_r/R$  および  $\delta_a/l$  は、この場合熱膨張による燃料ペレットと被覆管との歪の差を表している。

### 3.2 平面歪および平面応力条件下の接触圧力

平面歪条件下の中実ペレットと被覆管の間の接触圧力を求める。計算には、(4)式を使用する。ただし、(4)式を次のように変形する。

$$\frac{P_r}{E_f} = \frac{\delta_r/R}{(1+\nu_f)(1-2\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \cdot \frac{(1+\nu_c)\{1+(1-2\nu_c)(R/R_{co})^2\}}{1-(R/R_{co})^2}} \quad \dots\dots\dots(34)$$

3.1 節の数値を代入することにより

$$\frac{P_r}{E_f} = \frac{\delta_r/R}{14.3169} = 6.9848 \times 10^{-2} \cdot (\delta_r/R) \quad \dots\dots\dots(35)$$

がえられ、接触圧力として、

$$P_r = 4.01 \text{ kp/cm}^2$$

が求められる。

平面応力条件下の中実ペレットと被覆管間の接触圧力評価のため、(9)式を変形し、次式で考える。

$$\frac{P_r}{E_f} = \frac{\delta_r/R}{(1-\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \left\{ \frac{1+(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} + \nu_c \right\}} \quad \dots\dots\dots(36)$$

この式に、3.1 節の数値を代入することにより、

$$P_r/E_f = \frac{\delta_r/R}{16.885} = 5.9224 \times 10^{-2} \cdot (\delta_r/R) \quad \dots\dots\dots(37)$$

がえられ、接触圧力として

$$P = 3.394 \text{ kp/cm}^2$$

が求められる。

なお、平面応力条件の下で上記の半径方向接触圧力は軸方向の歪を誘発するので、接触後ペレットと被覆管が同一の長さを持つためには、接触前に(II)式で与えられる軸方向くいちがい代を持たねばならない。(III)式にこの章の数値を入れると、

$$\frac{\delta_a}{l} = -1.4222 \times 10^{-5}$$

が得られる。

### 3.3 Laméの条件下の接触圧力

軸方向のすべりを考えるときと、考えないときとで、計算方法が異なるので、区別して計算する。

#### 3.3.1 軸方向のすべりがない場合

Lamé の条件下での半径方向接触圧力を求める。計算式は、(26)式を使用するが、次のように変形する。

$$P_r = \frac{\left\{ 1 + \frac{E_f}{E_c} \cdot \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) + \left\{ \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \nu_c \cdot \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\} \left( \frac{\delta_a}{l} \right)}{E_f \left\{ (1-\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{1+(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{E_f}{E_c} \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\} - 2 \left\{ \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \nu_c \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\}^2} \quad \dots\dots\dots (38)$$

また軸方向接触力を燃料ペレットに関する圧力 ( $P_{af} = F_a / \pi R^2$ ) をペレットのヤング率 ( $E_f$ ) で割って表すと、

$$P_{af} = \frac{\left\{ (1-\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{1+(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} + \nu_c \right) \right\} \left( \frac{\delta_a}{l} \right) + 2 \left\{ \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \nu_c \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right)}{E_f \left\{ (1-\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{1+(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} + \nu_c \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{E_c}{E_f} \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\} - 2 \left\{ \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \nu_c \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\}^2} \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる。同様に被覆管で表示すると ( $P_{ac} = F_a / \pi (R_{co}^2 - R^2)$ )

$$P_{ac} = \frac{\left\{ \frac{E_c}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1+(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} + \nu_c \right\} \left( \frac{\delta_a}{l} \right) + 2 \left\{ \frac{E_c}{E_f} \nu_f + \nu_c \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\} \left( \frac{\delta_r}{R} \right)}{E_c \left\{ \frac{E_c}{E_f} (1-\nu_f) + \frac{1+(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} + \nu_c \right\} \left\{ \frac{1-(R/R_{co})^2 E_{c+1}}{(R/R_{co})^2 E_f} \right\} - 2 \cdot \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \left\{ \nu_f \cdot \frac{1-(R/R_{co})^2 E_c}{(R/R_{co})^2 E_f} + \nu_c \right\}^2} \quad \dots\dots\dots (40)$$

がえられる。

上記の式に 3.1 のデータを代入することにより、

$$\begin{aligned} \frac{P_r}{E_f} &= \left\{ 7.7696 \left( \frac{\delta_r}{R} \right) + 3.1432 \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) \right\} / 111.432 \\ &= 6.9725 \times 10^{-2} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) + 2.8208 \times 10^{-2} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

$$\frac{P_{af}}{E_f} = 1.5153 \times 10^{-1} \left( \frac{\delta_a}{\ell} \right) + 5.64155 \times 10^{-2} \left( \frac{\delta_r}{R} \right) \dots\dots\dots(42)$$

がえられる。さらに、 $\delta_a/R = \delta_r/R = 3.82 \times 10^{-5}$  とし、 $E_f = 15 \text{ kg/cm}^2$  とすれば、

$$P_r = 5.612 \text{ kp/cm}^2$$

$$P_{af} = 11.92 \text{ kp/cm}^2$$

となる。

### 3.3.2 軸方向のすべりが起る場合

すべりがある場合の接触圧力を求める。計算式は、(33)式を使用するが、(33)式を次のように変形する。

$$\frac{P_r}{E_f} = \frac{\delta_r/R}{\left\{ (1-\nu_f) + \frac{E_f}{E_c} \left( \frac{1+(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} + \nu_c \right) \right\} - 2 \left( \frac{\ell}{R} \right) \mu \left\{ \nu_f + \frac{E_f}{E_c} \nu_c \cdot \frac{(R/R_{co})^2}{1-(R/R_{co})^2} \right\}} \dots\dots\dots(43)$$

3.1 の数値を代入することにより

$$\frac{P_r}{E_f} = \frac{\delta_r/R}{16.885 - 6.2865 \cdot \mu \cdot (\ell/R)} \dots\dots\dots(44)$$

となる。ここで、 $\mu = 0$  すなわち、軸方向に何の抵抗もなく必ずすべりを起し、軸方向の拘束力が発生しないとき、2.4.2でも記述したように平面応力状態の接触圧力と一致する。

$\ell = 1 \text{ (cm)}$ 、 $R = 0.5415$  とすれば、 $\ell/R = 1.846722$  である。さらに、 $\mu = 0.3$ 、 $\delta_r/R = 3.82 \times 10^{-5}$  としたときの半径方向接触圧力は、

$$P = 4.275 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

となる。

### 3.4 数値計算結果の検討

(1) 前章および前節までに計算した計算式および数値計算の相互関係を調べるため、まず、Lame の条件下の接触圧力前節の(41)式を図として Fig. 1 に示す。Fig. 1 は  $\delta_r/R$  を横軸に、 $\delta_a/\ell$  を縦軸にし、半径方向接触圧力  $P_r$  をパラメータとし示されている。ここで、 $\delta_r/R < 0$  および  $P_r < 0$  は除いている。これは燃料棒内のペレットと被覆管が接着 (bonding) 状態にならない

との考えからである。

平面歪条件下の接触圧力は、この図の横軸すなわち  $\delta_a/\ell=0$  としたときにほとんど一致する。これは先の(35)式

$$\frac{P_r}{E_r} = 6.9848 \times 10^{-2} \cdot (\delta_r/R)$$

および(41)式で  $\delta_a/\ell=0$  とした

$$\frac{P_r}{E_r} = 6.9725 \times 10^{-2} (\delta_r/R)$$

がほぼ一致することからも分る。

全く同様の方法で、Lame の条件下の軸方向の接触力をペレットについて接触圧力  $P_{af}$  に換算した(42)式をFig. 2 に示す。

$\delta_r$ ,  $\delta_a$  の正負について説明を加える。 $\delta_r$ ,  $\delta_a$  の定義は、2.1 に述べた通りである。 $\delta_r < 0$  とはペレット外径と被覆管内径にギャップが生じることを意味する。接着を考えないとき、 $\delta_r < 0$  は存在しない。 $\delta_a < 0$  とは、2.1 で説明したのと逆で、接触力によってペレットが軸方向に伸び、被覆管が軸方向に縮む場合を意味する。 $F_a < 0$  も上記のように作用する荷重を意味している。これを分り易く示すとFig. 3 の如くなる。

(2) 軸方向にすべりが生じる場合の接触圧力を考える図表の例として3.3.2節の(44)式を使用する。いま、 $\ell/R=1.8467$ ,  $|\mu|=0.0, 0.1, \dots, 1.0$ , かつ  $P_r$  に一定の値を与え、このとき得られる  $\delta_r/R$  の値を、先に得られたFig. 1 上の  $P_r$  の線上にプロットするとFig. 4 が得られる。

Fig. 4 上において、 $\mu=0$  は2.4.2節でも記したように平面応力状態を表わしている。 $\mu=0$  の線は、Fig. 2 の  $P_{af}=0$  の線と一致する。 $\mu < 0$  においては軸方向の接触力の向きが反転する。事実この領域はFig. 2 上において  $P_{af}$  が負になる。

平面応力条件は軸方向の接触力が存在しない。したがってこれによる  $\delta_a$  もありえない。しかし、半径方向接触力の発生により、ペレットの外径は減少するが、ポアソン比に基づく軸方向歪の増加が起る。同様に被覆管は内径の増加により軸方向歪の減少が起る。2.1 で与えた定義によれば、これによるくいちがい代は負にならなければならない。 $\mu=0$  の線で与えられる  $\delta_a/\ell$  は2.3節の(11)式を表わしている。

Fig. 4 上に  $\delta_r/R=3.82 \times 10^{-4}$  の線と  $\delta_a/\ell=0$  および  $\mu=0$  の交点は4.2節で求めた平面歪と平面応力条件の接触圧力がえられる。ただし  $\delta_r/R$  は1桁大きいので接触圧力は1桁小さく読む必要がある。

(3) この章に与えた条件に従う燃料棒において、外部条件(内圧、外圧、熱膨張等)によって半径、軸方向のくいちがいがそれぞれ  $\delta_r/R=4.0 \times 10^{-4}$ ,  $\delta_a/\ell=4.4 \times 10^{-4}$  生じるとしよう。

Fig. 1 と Fig. 2 より、このときの半径方向の接触圧力は約  $60 \text{ kg/cm}^2$ , 軸方向の接触圧力(ペレットについて)は約  $135 \text{ kg/cm}^2$  であることが推定される。

一方、Fig. 4 を参照するとこの与えられた条件下で、軸方向接触圧力が維持されるためには、摩擦係数は  $\mu \approx 0.6$  でなければならないことが分る。もし、ペレットと被覆管との間の摩擦係数

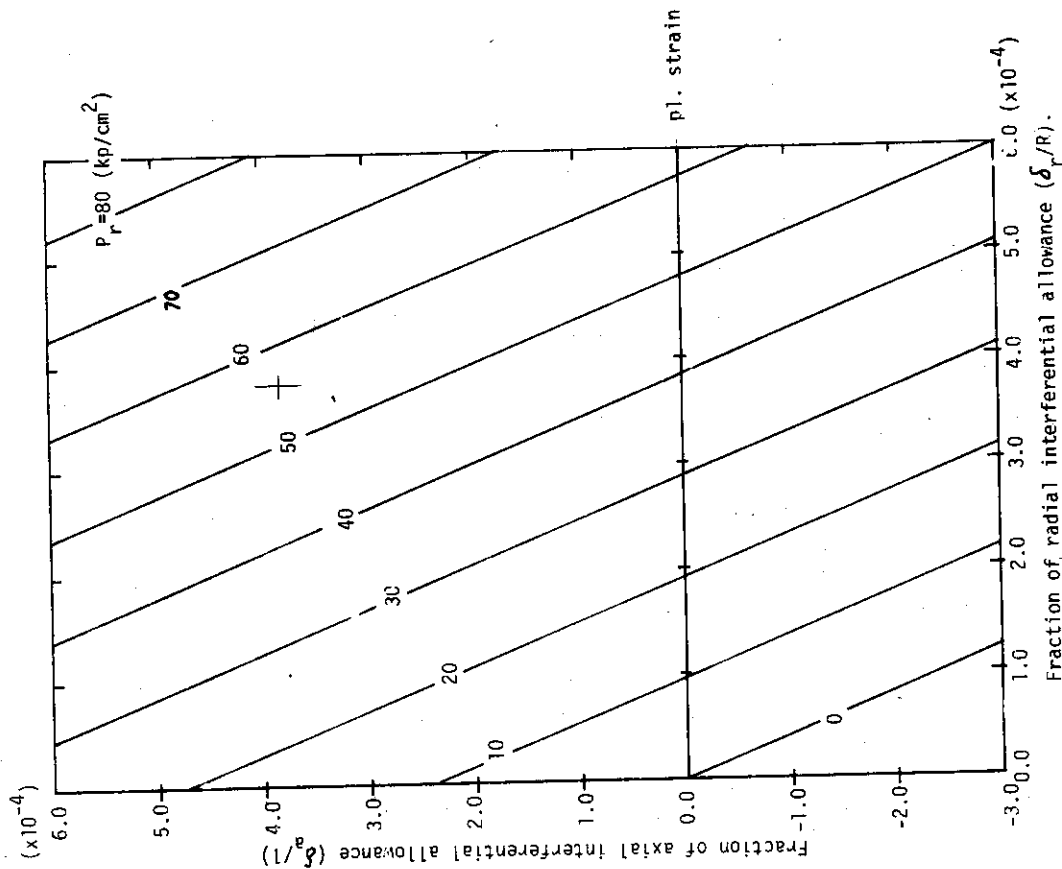


Fig. 1  
Contact pressure in radial direction ( $P_r$ ) under Lamé's condition. (Based on §3.1 data).

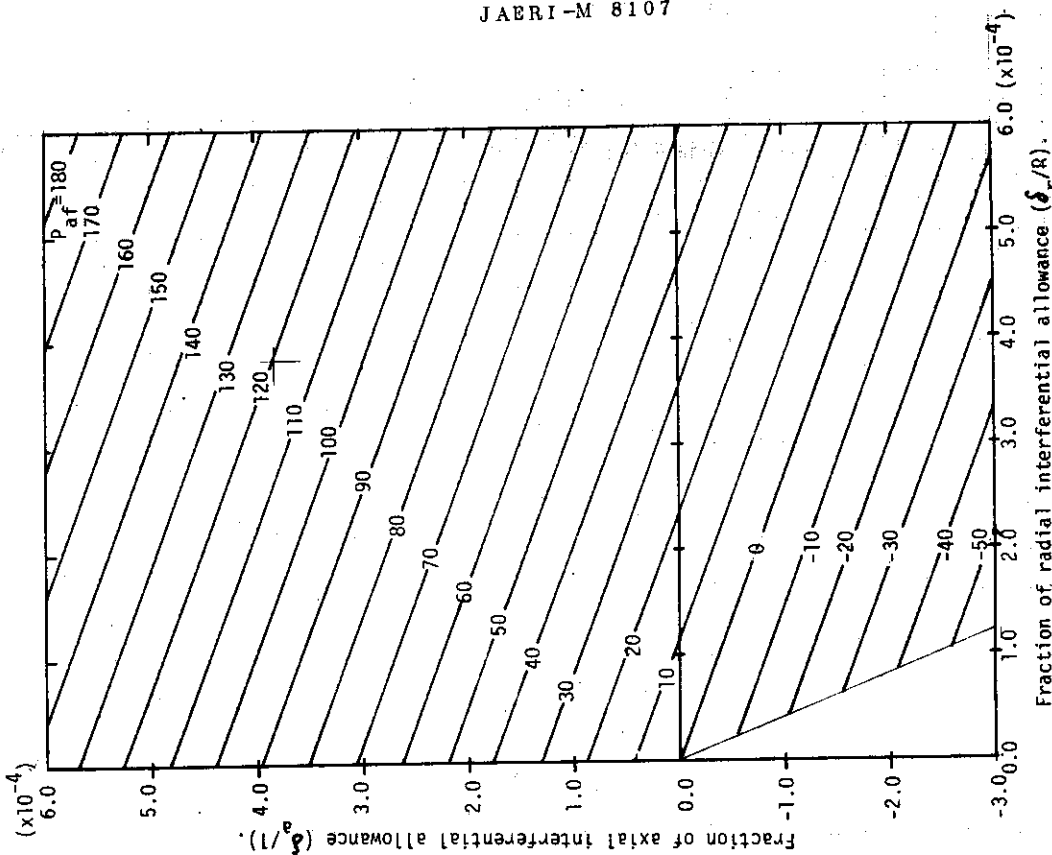


Fig. 2  
Contact pressure in axial direction ( $P_{af}$ ) induced in fuel pellet under Lamé's condition. (Based on §3.1 data).



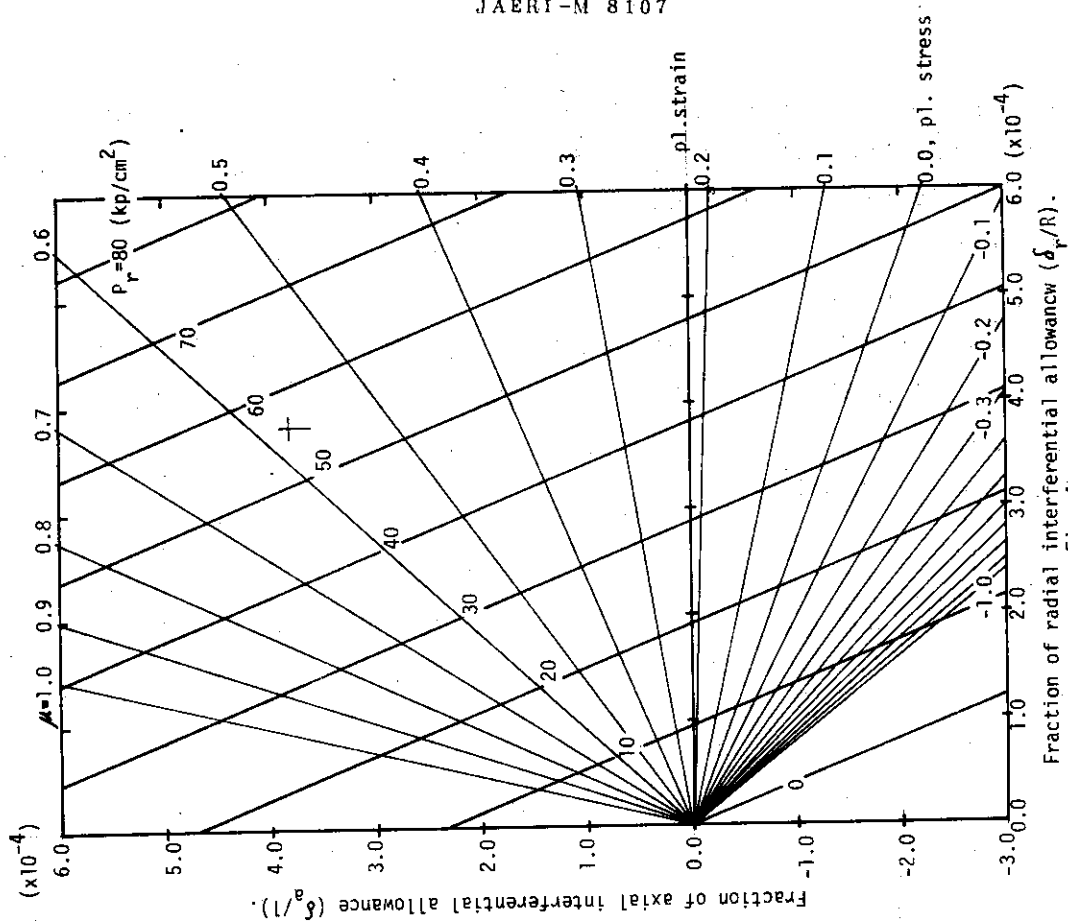


Fig. 4  
Contact pressure in radial direction ( $P_r$ ) under axial slip condition. (Based on §3.1 data).

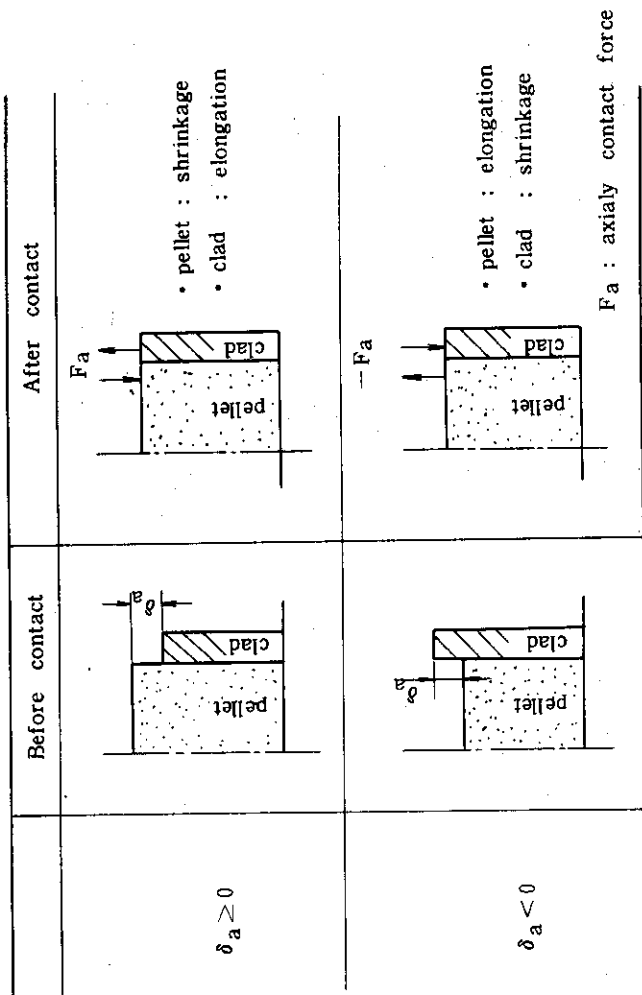


Fig. 3 Definition of axially interaction allowance ( $\delta_a$ )

が  $|\mu| \leq 0.3$  ならば、ここでえられたような接触圧力とはなりえない。このときは Fig. 5 に示すような状態になると考えられる。すなわち、軸方向のくいちがい代は  $\delta_a/l = 0.7 \times 10^{-4}$  の割合だけが軸方向接触力によって拘束され、残りの  $(4.4 - 0.7) \times 10^{-4}$  のくいちがい代の割合はすべりを起すと考えられる。この結果、接触圧力は、半径方向で約  $45 \text{ kg/cm}^2$ 、軸方向で約  $50 \text{ kg/cm}^2$  となるであろう。

Fig. 5 について説明すると、 $|\mu| \leq 0.3$  以内の領域ではペレットと被覆管は軸方向にすべらず、軸方向のくいちがい代はすべて拘束される。すなわち、この領域内では接触圧力はLameの条件で計算されねばならない。一方、この領域外では軸方向のすべりがおこり、接触圧力は半径方向のくいちがい代と摩擦係数によって決定される。

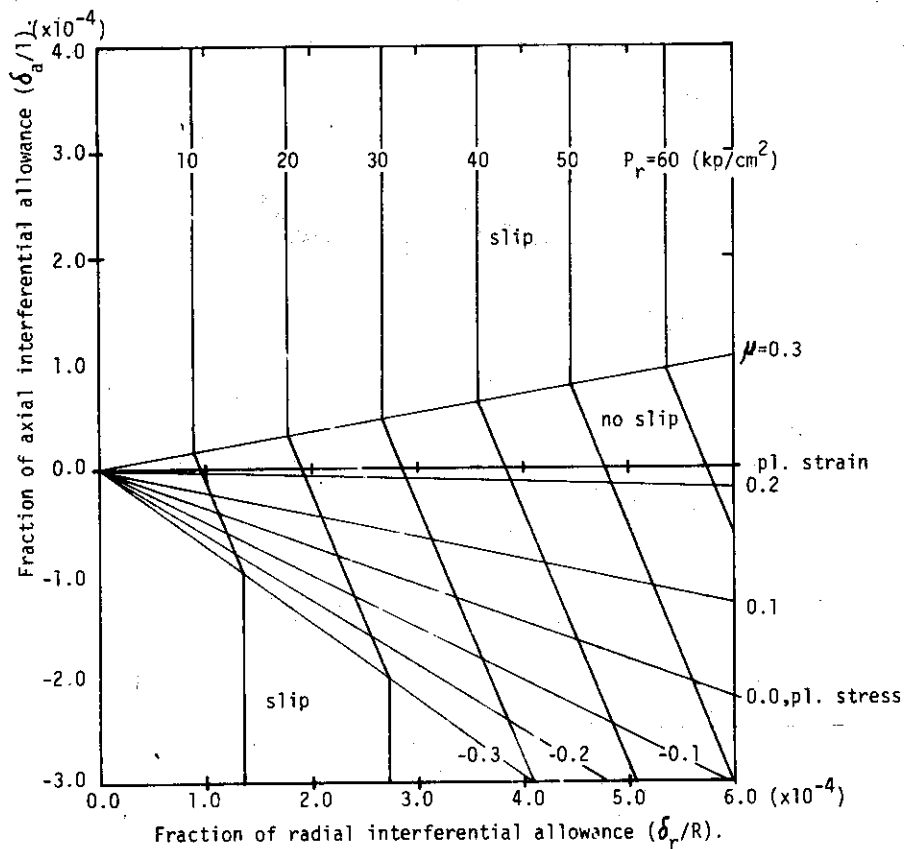


Fig. 5

An example of radial contact pressure ( $p_r$ ) in fuel rod.

## 4. む す び

二次元軸対称問題として取扱ったときの燃料ペレット被覆管の間の接触圧力について考察した。その結果次のような結論をえた。

(1) 二次元軸対称問題における代表的な条件（平面応力，平面歪，Lame の条件）下での弾性論による取扱いでえられる接触圧力が定式化された。その結果は Table 2 に示される。

(2) 二次元軸対称問題における接触問題においては，半径方向のくいちがい代とともに軸方向のくいちがい代をも考慮しなければ，接触圧力を正確に評価することはできない。

(3) 平面歪条件下の接触圧力は，Lame の条件下の軸方向のくいちがい代を 0 として求めた値と近似的に一致する。

(4) Lamé の条件にさらに軸方向のすべりを考慮したとき，摩擦係数を 0 とすると，平面応力条件の接触圧力が得られる。

## 謝 辞

燃料安全第 1 研究室の各位には，この報告書の結果の検討について多くの助言をえた。また，原稿の整理に関し金田京子嬢に手伝ってもらった。記して謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) S. Timosenko, "Strength of materials, Part II", 3rd edition, D. Van Nostrand Co., Inc., (1956)
- 2) 原山, 山田, 泉, "円柱および円筒における二次元問題の変位と応力, 歪", JAERI-M 6626, (1976)

## 4. む す び

二次元軸対称問題として取扱ったときの燃料ペレット被覆管の間の接触圧力について考察した。その結果次のような結論をえた。

(1) 二次元軸対称問題における代表的な条件（平面応力，平面歪，Lame の条件）下での弾性論による取扱いでえられる接触圧力が定式化された。その結果は Table 2 に示される。

(2) 二次元軸対称問題における接触問題においては，半径方向のくいちがい代とともに軸方向のくいちがい代をも考慮しなければ，接触圧力を正確に評価することはできない。

(3) 平面歪条件下の接触圧力は，Lame の条件下の軸方向のくいちがい代を 0 として求めた値と近似的に一致する。

(4) Lamé の条件にさらに軸方向のすべりを考慮したとき，摩擦係数を 0 とすると，平面応力条件の接触圧力が得られる。

## 謝 辞

燃料安全第 1 研究室の各位には，この報告書の結果の検討について多くの助言をえた。また，原稿の整理に関し金田京子嬢に手伝ってもらった。記して謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) S. Timosenko, "Strength of materials, Part II", 3rd edition, D. Van Nostrand Co., Inc., (1956)
- 2) 原山, 山田, 泉, "円柱および円筒における二次元問題の変位と応力, 歪", JAERI-M 6626, (1976)

## 4. む す び

二次元軸対称問題として取扱ったときの燃料ペレット被覆管の間の接触圧力について考察した。その結果次のような結論をえた。

(1) 二次元軸対称問題における代表的な条件（平面応力，平面歪，Lame の条件）下での弾性論による取扱いでえられる接触圧力が定式化された。その結果はTable 2 に示される。

(2) 二次元軸対称問題における接触問題においては，半径方向のくいちがい代とともに軸方向のくいちがい代をも考慮しなければ，接触圧力を正確に評価することはできない。

(3) 平面歪条件下の接触圧力は，Lame の条件下の軸方向のくいちがい代を0として求めた値と近似的に一致する。

(4) Lame の条件にさらに軸方向のすべりを考慮したとき，摩擦係数を0とすると，平面応力条件の接触圧力が得られる。

## 謝 辞

燃料安全第1研究室の各位には，この報告書の結果の検討について多くの助言をえた。また，原稿の整理に関し金田京子嬢に手伝ってもらった。記して謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) S. Timosenko, "Strength of materials, Part II", 3rd edition, D. Van Nostrand Co., Inc., (1956)
- 2) 原山, 山田, 泉, "円柱および円筒における二次元問題の変位と応力, 歪", JAERI-M 6626, (1976)