

JAERI - M
82-009

Burgのアルゴリズムに基づくARモデル
の同定とその原子炉異常診断への応用

1982年3月

林 光二・尾熊 律雄

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1982

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 いばらき印刷(株)

Burg のアルゴリズムに基づく AR モデルの同定と
その原子炉異常診断への応用

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

林 光二・尾熊 律雄

(1982 年 1 月 30 日 受理)

本研究は Burg のアルゴリズム、いわゆる最大エントロピー法に基づく AR モデリングの実験的評価と原子炉雑音解析への応用に関するものである。

短い原子炉データの解析を目的として、正弦波あるいは正弦波に白色雑音を付加した信号を用いたシミュレーション・データに対するモデル・フィッティングを通じて、Yule - Walker 法と比較することによって Burg のアルゴリズムの評価を行なった。この評価には、モデルの次数、サンプル・データの数、データの初期位相等の影響が考慮された。この結果、短いデータの解析を行なう場合にみられる、推定されたスペクトルのピーク的位置がずれる現象は、データの分散が正しく推定できない場合に起ることが示された。

この手法を高出力炉の中性子雑音データに適用した。長いデータを一定長の短いデータに分割し、それぞれに対しスペクトル解析を行なった。この結果、スペクトルのピーク的位置が時間依存の変動をする場合、これを検出できるという事が示された。

Identification of Autoregressive Model Based on Burg Algorithm
and Its Application to Diagnosis of Nuclear Reactor

Koji HAYASHI and Ritsuo OGUMA
Division of Reactor Engineering,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received January 30, 1982)

The present study is concerned with experimental evaluations of autoregressive modeling based on Burg algorithm, the so-called maximum entropy method, and its application to reactor noise analysis.

With a view to analyzing short data recordings, the Burg algorithm was evaluated by comparing with that based on Yule-Walker method, through model fitting to simulation data using sinusoidal signal with and without additive white noise. The influence of the model order, the number of sampled data and the initial phase of data are considered in these evaluations. The results show that the shift in the locations of estimated spectral peaks from true ones, which is sometimes observed when analyzing short data recordings, is due to incorrect estimate of the variance of the data.

This method was applied to the neutron noise data sampled from a power reactor. The spectral analysis was performed for individual short data recordings with equal length obtained by dividing an original long data recordings. The result suggested that present method is capable of detecting time dependent variation of the location of spectral peaks.

Keywords: Burg Algorithm, Autoregressive Model, Maximum Entropy Method, Reactor Noise Analysis, Diagnosis of Nuclear Reactor, Spectral Analysis, Comparative Evaluations

目 次

1. はじめに	1
2. 理論およびアルゴリズム	5
2.1 AR モデル	5
2.2 パワー・スペクトル密度関数の推定	5
2.3 Yule-Walker 法による AR モデルの同定	5
2.4 Burg 法による AR モデルの同定	6
3. シミュレーション・スタディと原子炉雑音データへの適用	9
3.1 シミュレーション・スタディ	9
3.2 ケース I (正弦波) の解析	9
3.2.1 Burg 法, Y-W 法の相関関数	9
3.2.2 Burg 法, Y-W 法の APSD	10
3.2.3 Burg 法, Y-W 法のモデル・パラメータ	10
3.2.4 Burg 法の反射係数と FPE	11
3.2.5 データ長のちがいによる Burg 法の相関関数の変化	11
3.2.6 データ長のちがいによる Burg 法の FPE の変化	12
3.2.7 データ長のちがいによる Burg 法の APSD の変化	12
3.2.8 データの位相条件のちがいによる Burg 法の APSD の変化	12
3.3 ケース II (正弦波+白色雑音; その 1) の解析	13
3.4 ケース III (正弦波+白色雑音; その 2) の解析	13
3.4.1 Burg 法, Y-W 法の APSD	14
3.4.2 モデル次数のちがいによる Burg 法の APSD の変化	14
3.4.3 Burg 法, Y-W 法のモデル・パラメータ	14
3.4.4 Burg 法, Y-W 法の反射係数と FPE	15
3.5 原子炉雑音データへの適用	15
3.5.1 3つの手法で推定された APSD の検討	16
3.5.2 ピーク周波数 f_{low} , f_{up} の時間依存変動推定における問題点	17
3.5.3 f_{low} , f_{up} の時間依存変動の推定結果	17
4. 結 論	41
謝 辞	42
参考文献	43

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Theory and algorithm	5
2.1 Autoregressive model	5
2.2 Estimation of power spectral density function	5
2.3 Identification of autoregressive model based on Yule-Walker method	5
2.4 Identification of autoregressive model based on Burg method	6
3. Simulation studies and application to nuclear reactor noise data	9
3.1 Simulation studies	9
3.2 Analysis of CASE-I (sinusoid)	9
3.2.1 Correlation functions of Burg method and Yule-Walker method	9
3.2.2 APSDs of Burg method and Yule-Walker method	10
3.2.3 Model parameters of Burg method and Yule-Walker method	10
3.2.4 Reflection coefficients and FPE of Burg method	11
3.2.5 Change of correlation function of Burg method for diferent lengths of a data set	11
3.2.6 Change of FPE of Burg method for diferent lengths of a data set	12
3.2.7 Change of APSD of Burg method for diferent lengths of a data set	12
3.2.8 Change of APSD of Burg method for diferent initial phases of a data set	12
3.3 Analysis of CASE-II (sinusoid + white noise ; part 1)	13
3.4 Analysis of CASE-III (sinusoid + white noise ; part 2)	13
3.4.1 APSDs of Burg method and Yule-Walker method	14
3.4.2 Change of APSD of Burg method for diferent model order	14
3.4.3 Model parameters of Burg method and Yule-Walker method	14
3.4.4 Reflection coefficients and FPE of Burg method and Yule-Walker method	15
3.5 Application to nuclear reactor noise data	15
3.5.1 Consideration of estimated APSDs using three diferent methods	16
3.5.2 Problems for evaluating the time dependence of peak f_{low} and f_{up}	17
3.5.3 Results of the time dependence evaluation for f_{low} and f_{up}	17
4. Conclusion	41
Acknowledgement	42
References	43

1. はじめに

原子炉雑音解析や異常診断に用いられる統計的解析手法は、種々の統計量や統計的関数の推定に際して常に時間平均あるいは集合平均等の平均操作を行なう必要がある。したがって、通常の統計的解析手法を用いて観測された時系列データからある程度の精度を持った推定値を得ようとするならば、解析に用いるデータの長さあるいはデータ・セットの数が大きくなければならない。

しかしながら、実際問題として、何らかの都合で観測時間やサンプル数が十分取れなかった、あるいは一連の観測データの一部に欠落が生じてしまったなどという事も良くあることである。

データ長が小さい場合、第一に問題となるのは統計的解析手法の中でも最も基本的な関数であるところの相関関数あるいはスペクトル密度関数がうまく推定できるかどうかである。いずれか一方の関数が推定できれば、通常の解析を進める事が可能である。

これらの関数を推定する方法は大別して2通りある。ひとつの方法はFFT（高速フーリエ変換）を用いる方法であり、もうひとつの方法は相関関数の定義式通りに計算する方法（直接法）である。FFT法の場合は、取り扱うデータが十分大きいときに良い精度の推定値を高速に計算できる利点を持っているが、逆にデータ長があまり大きくとれない場合は直接法の方が優れているとされている。

この直接法も幾つかの推定方法に分類できる。不規則な変動を示す定常な時系列 $x(t)$ を時間間隔 Δt でサンプリングした N 個のデータ

$$\{ x(s) ; s = 1, \dots, N \} \quad \dots (1.1)$$

が与えられているとき、時系列 $x(t)$ のもつ自己相関関数 $R(l)$ は以下の方法で推定される。

その1

$$\hat{R}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{s=1}^{N-l} x(s) x(s+l) \quad \dots (1.2)$$

$$l = 0, 1, \dots, L$$

この推定法では、データは式(1.1)の区間だけを用いて計算が行なわれる。

その2

$$\hat{R}(l) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N x(s) x(s+l) \quad \dots (1.3a)$$

$$\text{ただし } x(s) = 0 ; s = N+1, \dots, N+l$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-l} x(s) x(s+l) \quad \dots (1.3b)$$

$$l = 0, 1, \dots, L$$

この推定法では、データは式 (1.1) の区間を超えて観測されていない時刻のデータ { $x(N+1)$, \dots , $x(N+l)$ } の値も用いて計算が行なわれる。そこで、観測されていない区間については便宜的に 0 と置く必要がある。

いずれの推定法も、用いるデータが有限長であるために推定誤差が生ずる。この推定誤差は偏りおよび分散によって評価される。

$$b[\hat{R}(l)] = E[\hat{R}(l) - R(l)] \quad \dots\dots (1.4)$$

$$\text{Var}[\hat{R}(l)] = E\{(\hat{R}(l) - E[\hat{R}(l)])^2\} \quad \dots\dots (1.5)$$

ただし $R(l)$ は真の値

第1の推定法 (1.2式) は偏り誤差は生じないが、分散はラグ値の増大とともに増大する。すなわち、原点 ($l=0$) のときは N 回の平均操作を行なっているのに対し、 l が大きくなるに従い平均操作の数は $N-l$ 個と減少して行くからである。

第2の推定法 (1.3式) は推定値の持つ分散をラグ値 l の変化に対して見かけ上不変となる様に全てのラグ値において N 回の平均操作が行なわれる。このため、原点以外では偏り誤差を生じ、この誤差はラグ値の増大とともに増大する。

いずれの推定法もデータ長 N が十分大きく、最大ラグ値 L が $L \ll N$ の場合は問題ないが、 N が小さくなると上で述べた問題が顕著となってくる。しかも最大ラグ値 L は $0 < L < N$ の範囲である程度の大きさを必要とするから N はある程度以上小さくはできない。

最大ラグ値 L の大きさの選択問題は、周波数領域に置きかえて考えてみると、推定値の分解能を決定する重要な要素である事がわかる。一般に自己相関関数 $R(l)$ とパワー・スペクトル密度関数 $S(f)$ の関係は Wiener - Khintchine の公式で記述できるが、取り扱うデータ長が有限の場合、次式で近似される。

$$S\left(\frac{f}{2\Delta t F}\right) = \Delta t \sum_{l=-L}^L R(l) \cdot e^{-j \frac{\pi f l}{F}} \quad \dots\dots (1.6)$$

$$f = 0, 1, \dots, F$$

$$F = L$$

すなわち、最大ラグ値 L がある程度の大きさを持たないと上式を用いてスペクトル推定を行なう Blackman - Tukey 法では解析に要する十分な分解能が得られない事がわかる。

以上をまとめると、直接法によるアプローチでも推定誤差と推定値の分解能の問題から、解析に用いるデータの大きさはあまり小さくできない事がわかる。さらに、この手法の推定精度と分解能の関係をよく調べてみると、精度を上げると分解能は下がり、分解能を上げると精度は下がるという反比例関係にあたるために、両者を満足させようとすると解析に要するデータはあまり小さくできないのだという事がわかる。したがって、上記手法よりも分解能の優れた手法を用いれば、同定の精度を得るのに用するデータ長はさらに小さくなる可能性がある。

今、自己相関関数の推定値として { $R(l); l=0, 1, \dots, L$ } が得られているが、 L の大きさは十分大きくはないとする。このとき、 $l > L$ の相関関数が未知であるために分解能が上がらないでいるが、何らかの方法で十分大きな l まで相関関数の値を知ることができれば分解能を上げ

ることができる。ただし、先に述べた様に(1.2)(1.3)式を用いる事は適当でないとする。

このとき、未知の相関関数 $\{ R(L+1), R(L+2), \dots \}$ は最大エントロピー法 (MEM; Maximum Entropy Method)^[2~7] によって以下の様に推定することができる。

まず時系列データ $\{ x(s); s = 1, \dots, N \}$ はガウス過程に従うと仮定すると、このデータの持つ情報エントロピー H は下式で表わされる。

$$H = \frac{1}{2} \log \{ \det C_N \} \quad \dots (1.7)$$

ただし

$$C_N = \begin{pmatrix} \hat{R}(0) & \hat{R}(-1) & \dots & \hat{R}(-N) \\ \hat{R}(1) & \hat{R}(0) & \dots & \hat{R}(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}(N) & \hat{R}(N-1) & \dots & \hat{R}(0) \end{pmatrix}$$

$\{ R(l); -N \leq l \leq N \}$ は真の相関関数

したがって、相関関数の推定値 $\{ \hat{R}(l); l = 0, 1, \dots, L \}$ が与えられているときに、この相関関数の推定値で記述した時系列 $\{ x(s) \}$ の情報エントロピーの推定値 \hat{H} に注目して、この \hat{H} が最大となる様に未知の $R(l > L)$ を推定すれば良い。

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{R}(l)} = 0 \quad \dots (1.8)$$

$$l = L + 1, L + 2, \dots$$

すなわち、 $l = L + 1$ の場合

$$\det \hat{C}_{L+1} \rightarrow \text{maximum} \quad \dots (1.9)$$

以上から、 $\hat{R}(L+1)$ は下式を解く事により推定できる。

$$\det \begin{pmatrix} \hat{R}(1) & \hat{R}(0) & \dots & \hat{R}(L-1) \\ \hat{R}(2) & \hat{R}(1) & \dots & \hat{R}(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}(L+1) & \hat{R}(L) & \dots & \hat{R}(1) \end{pmatrix} = 0 \quad \dots (1.10)$$

この方法により、相関関数の未知部分の推定値 $\{ \hat{R}(L+1), \hat{R}(L+2), \dots \}$ を推定する事が可能である。

上記の様に情報エントロピー (すなわち、1つの観測されたデータ・セットに含まれる情報量の期待値) を評価関数として、未知部分の相関関数を推定すれば、この推定値は2乗平均誤差の意味で最良の推定値となるはずである。

ここで述べた最大エントロピー法による相関関数の推定問題は、次章で述べる自己回帰 (AR) モデルの同定問題と同一である。すなわち、観測された時系列データから AR 係数が同定されれば、Yule-Walker 方程式で関係づけられた未知の相関関数が推定できるし、逆に相関関数が既知であれば AR 係数を同定できる。

実際の解析では、(1.7) ~ (1.10)式を用いて未知の相関関数を推定しこの結果を用いて解析するというのは希である。というのも、一旦ARモデルが同定されれば、わざわざ未知の相関関数を推定しなくともAR係数自身にその情報が含まれているはずだからである。したがって、ARモデルから計算されるスペクトル密度関数の分解能は、Blackman - Tukey法で得たものに比べ非常に良いものが得られる。^[6]

以上の議論から、冒頭で述べた様な何らかの都合で観測時間やサンプル数が十分取れなかった場合でも、条件次第ではARモデルに基づく解析を適用する事により意味のある有役な情報を引き出せることがわかった。ところが、時系列データの場合、サンプル数を小さくして行くと極限においては2つのサンプル点を通るある周期をもつ1つの正弦波（確定信号）となってしまう。この事は白色雑音を駆動源と仮定したARモデルの場合、大問題である。すなわち、正弦波の様な確定信号をARモデルで記述しようとする、駆動源が無しという事を意味するからである。幸いな事に、サンプリング誤差、計算誤差等の微小な誤差が現実存在するので、実際の解析においては確定波の解析もある程度は可能である。

通常観測される原子炉雑音データは、先に述べた様な観測時間が十分でないケースはもちろんの事、種々の線スペクトルに近い成分が含まれているケースもある。原子炉で発生する異常現象の中には、これらのスペクトル・ピークの存在自体が異常の現われである場合もあるし、ピークの形や周波数が時刻とともに変化する事が異常を現わしている場合もある。

本報は、これらの視点から、正弦波の様な確定的周期関数を含むデータ処理が多く報告されているBurg法を、多変数ARモデル同定で一般的となっているYule - Walker法と比較検討しながら、そのアルゴリズムの特徴、性質等を調査し、合せて原子炉の異常診断への応用を検討するものである。

2. 理論およびアルゴリズム

2.1 ARモデル

平均値0の周りで不規則な変動を示す定常な時系列

$$\{ x(s), s = 1, 2, \dots, N \} \quad \dots (2.1)$$

が与えられたとき、時刻 s の値 $x(s)$ が下記の形式で表現できるとする。

$$x(s) = \sum_{m=1}^M a_M(m) x(s-m) + \epsilon(s) \quad \dots (2.2)$$

ここで、 $\{ a_M(m); m=1, \dots, M \}$ は係数

$\epsilon(s)$ は白色雑音

すなわち、時刻 s の x の値 $x(s)$ は、時刻 s 以前の過去の値と線形関係にある部分と、過去の値とは全く相関を持たない白色雑音の部分から構成されている。このモデルを AR (Autoregressive; 自己回帰) モデルと呼ぶ。

(2.1) 式のような有限長のデータが与えられているとき、このモデルを同定するには、何らかの方法で係数 $\{ a_M(m); m=1, \dots, M \}$ と残差系列 $\{ \epsilon(s) \}$ の共分散 σ_M^2 を決めてやれば良い。

2.2 パワー・スペクトル密度関数の推定

AR モデルが同定され、係数 $\{ a_M(m); m=1, \dots, M \}$ および残差系列の共分散 σ_M^2 が与えられているとき、時系列 $\{ x(s) \}$ のもつパワー・スペクトル密度関数 $S_{XX}(f)$ は、次式で推定できる。

$$S_{XX}(f) = \frac{\Delta t \cdot \sigma_M^2}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a_M(m) \cdot e^{-j \frac{\pi f m}{F}} \right|^2} \quad \dots (2.3)$$

($f = 0, 1, \dots, F$)

ここで、 Δt は時系列 $x(t)$ のサンプリング間隔

2.3 Yule-Walker 法による ARモデルの同定

時系列 $\{ x(s) \}$ のもつ相関関数 $\{ R(l); l=1, \dots, M \}$ と AR 係数 $\{ a_M(m); m=1, \dots, M \}$ 、残差系列の共分散 σ_M^2 の間には次の関係がある。(Yule-Walker 方程式)

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(-1) & \dots & R(-M) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(M) & R(M-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_M(1) \\ \vdots \\ -a_M(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_M^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (2.4)$$

Yule - Walker法とは、上式の左辺の相関行列の各項を与えて、Levinsonのくりかえし計算アルゴリズムを利用しながらこの方程式を解いて、AR係数と分散 σ_M^2 を形定する方法である^[1]整理すると、

既知パラメータ	未知パラメータ
{ R(0), ..., R(M) }	{ a _M (1), ..., a _M (M), σ _M ² }
M + 1 個	M + 1 個

すなわち、未知数と既知数は同数である。したがって、基本的には方程式を機械的に解いてやれば良い。ただし、モデルの次数 M がもう1つの未知数として存在する。これについては、最終予測誤差 FPE^[8]等の評価関数を用いる事により決定する事ができる。

この方法の成否を左右する最も重要な事は、既知パラメータとして与えるべき相関関数の推定値がうまく求まっていなければならないという事である。通常は、前章で述べた式 (1.3) の方法によって推定された値が用いられている。この方法は (1.2) 式に比較して2乗平均誤差 δ_R^2

$$\delta_R^2 = \text{Var} [\hat{R}(l)] + b^2 [\hat{R}(l)] \quad \dots (2.5)$$

の小さい推定値が得られ Yule - Walker 法には向いているとされている^[9]

ところで、Yule - Walker 方程式の相関行列 (Toeplitz 行列) は、時系列が (2.2) 式で表現できる定常過程であるならば、その行列式は常に正でなければならない^[12]したがって、上で述べた (1.3) 式による推定値が、

$$\det \begin{pmatrix} \hat{R}(0) & \hat{R}(-1) & \dots & \hat{R}(-M) \\ \hat{R}(1) & \hat{R}(0) & \dots & \hat{R}(-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}(M) & \hat{R}(M-1) & \dots & \hat{R}(0) \end{pmatrix} > 0 \quad \dots (2.6)$$

を満足するかどうか、Yule - Walker 法による同定結果を左右する要因となる。特に、データ中に強い周期成分を含む場合問題となる。

2.4 Burg 法による ARモデルの同定

Yule - Walker 法と同様に (2.4) 式を考える。Burg 法とは、(2.4) 式の相関行列の各項のうち、最終項 R(M) を除く他の項と ARの係数の最終項 a_M(M)を与えて、Levinsonのくりかえし計算アルゴリズムを利用しながらこの方程式を解いて、a_M(M)を除く他の AR係数と分散 σ_M^2 、相関項 R(M) を決定する方法である^[1]

整理すると、

既知パラメータ

未知パラメータ

$$\underbrace{\{ R(0), \dots, R(M-1) \}, a_M(M)}_{M+1 \text{ 個}}$$

$$\underbrace{\{ a_M(1), \dots, a_M(M-1) \}, R(M), \sigma_M^2}_{M+1 \text{ 個}}$$

未知数と既知数は同じであるから、方程式は解ける。ただし、AR 係数の最終項 $a_M(M)$ が既知数としてあるが、本来は未知数である。この項は Yule - Walker 方程式とは独立にあらかじめ決定される。(2.4) 式のような連立方程式を解くに当って、もしも既知数が 1 つ増えれば、他の既知数の 1 つを未知数と置くことができる。これは非常に重要である。というのは、相関関数の最終項 $R(M)$ をこれに選べば、くりかえし計算の原理によって、相関関数の初期値として $R(0)$ のみを与えれば、他の $\{ R(1), \dots, R(M) \}$ はモデル同定の際に決定する事ができるからである。当然この相関関数の推定結果は、1 章で述べた直接法 (1.2) (1.3) 式の結果と異なる。しかも、この推定値は AR 係数の側から逆算した形となっているので、(2.6) 式を満足する。これが、Yule - Walker 法と最も異なる点である。

AR 係数の最終項 $a_M(M)$ は次の仮定の基に計算される。

[仮定]

AR モデルを予測誤差フィルターとしてとらえたとき、フィルターに信号を前向き $\{ x(1), x(2), \dots, x(N) \}$ に通す場合と逆向き $\{ x(N), \dots, x(2), x(1) \}$ に通す場合の出力 $\varepsilon(s)$ の平均パワー (分散値) σ_M^2 は最小となる様に各 AR 係数が決定されること。

ところで、平均パワーの推定値は下式で与えられる。

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2(N-M)} \sum_{s=1}^{N-M} \left\{ \left(x(s) - \sum_{m=1}^M a_M(m) x(s-m) \right)^2 + \left(x(s-M) + \sum_{m=1}^M a_M(m) x(s-M+m) \right)^2 \right\} \dots (2.7)$$

上の仮定から、上式が最小となるときの各 AR 係数の関係式を導き出せば良い。すなわち、

$$\frac{\partial \sigma_M^2}{\partial a_M(M)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_M^2}{\partial a_M^2(M)} > 0 \dots (2.8)$$

Levinson の $a_M(M)$ に関する漸化式を用いると (2.7) 式は、

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2(N-M)} \sum_{s=1}^{N-M} \left\{ (f_M(s) - a_M(M) \cdot b_M(s))^2 + (b_M(s) - a_M(M) \cdot f_M(s))^2 \right\} \dots (2.9)$$

$$\text{ここに, } f_M(s) = f_{M-1}(s) - a_{M-1}(M-1) \cdot b_{M-1}(s)$$

$$b_M(s) = b_{M-1}(s-1) - a_{M-1}(M-1) \cdot f_{M-1}(s-1)$$

$$\text{ただし, } M=1 \text{ のとき } f_1(s) = x(s)$$

$$b_1(s) = x(s-1)$$

したがって、(2.8)式から、

$$a_M(M) = \frac{2 f_M(s) \cdot b_M(s)}{\sum_{s=1}^{N-M} (f_M^2(s) + b_M^2(s))} \quad \dots\dots (2.10)$$

このようにして、係数 $a_M(M)$ は推定することができる。この他に、Yule - Walker 法と同様に未数として、モデルの次数 M がある。この次数の決定法は Yule - Walker 法と全く同じである。

3. シミュレーション・スタディと原子炉雑音データへの適用

この章では、はじめにシミュレーション・データを用いて、Burg 法および Yule - Walker 法（以下 Y-W 法）の両アルゴリズムによる AR モデルの同定結果を対比させながら、Burg 法の持つ特徴や性質を明らかにする。最後に、実際の原子炉雑音データに対する Burg 法を用いた AR モデルによる解析例を示し、この手法が原子炉異常診断の分野に対してどのような応用が可能かを述べることにする。

3.1 シミュレーション・スタディ

今回取りあげた AR モデルの同定問題の様に、同一の目的で作られた非常に似かよった構造をもつ 2 つのアルゴリズムの比較検討を、実際のデータ解析を通じて行なおうとする場合は、解析に用いられる試験データの素性が良く知られており、これを解析した場合に得られる結果の真値がわかっているという事が大切である。

Burg 法、Y-W 法とも、通常に使用する場合は得られる結果もほとんど同じであるが、

(1) データ長（サンプル数）の小さい場合

(2) データ長は十分大きい、データ中に正弦波の様な線スペクトル成分を含む場合

では、かなり異なる結果が得られるとされている。したがって、シミュレーション・スタディでは調査の対象を上記の 2 点にしばって進める事とした。

試験データは Table 3.1, Fig. 3.1 に示した 3 つのケースを用意した。ケース I は正弦波だけから作られている。したがって、周波数領域では線スペクトル以外の成分はない。ケース II, III はケース I の正弦波に白色雑音を加えたものである。白色雑音の最大振幅は正弦波の振幅の 10% 前後となる様に設定されている。正弦波の周波数 f_0 は全て 1.5 Hz に設定されている。ケース I, II は正弦波の 1 周期が 12 点で表現できる様にサンプリング間隔 Δt が設定されている。また、ケース III では Δt をその $1/10$ に設定したため、1 周期は 111 点で表現されることとなる。

3.2 ケース I (正弦波) の解析

3.2.1 Burg 法, Y-W 法の相関関数

Fig. 3.2 にケース I のデータから推定された相関関数（最大ラグ値 $LAGH=10$ ）を示す。図中右側はデータ長を 12 点、左側は 200 点としたときの推定値である。実線で示したものが Burg 法によって推定されたもの、1 点鎖線で示したものが (1.3) 式で推定された平均の型が $1/N$ のもの、点線が (1.2) 式の $1/(N-l)$ 型のものである。

正弦波の相関関数は同じ周期を持つ余弦波となる事が知られている。その視点に立てば、データ長 12 の場合の $1/N$ 型のもを除けばその他の場合は大むね推定値は正しい結果を与えてい

ることがわかる。一方、精密にこの図を検討するならば、データ長のちがいによって相関関数の形状に若干の相異が生じているのがわかる。この場合、データ長の大きい 200 点の方がより正解に近い。

結論として、データ長 12 点の場合、 $1/N$ 型は平均操作の影響が強く現われ、ラグ値が大きくなると実際よりも小さな値が推定される事、その他の場合は 12 点でほぼ正しい結果の得られる事がわかった。

3.2.2 Burg 法, Y-W 法の APSD

Fig. 3.3 はケース I のデータに対して両アルゴリズムを用いて同定された AR モデルに基づいて推定されたパワー・スペクトル (以下 APSD) を示す。上図は Burg 法によるもの、下図は Y-W 法によるもので特に実線は $1/N$ 型の相関関数の推定値を、鎖線は $1/(N-l)$ 型のものを用いた場合のものを示す。図中の数字は同定に用いられたデータ長を表わす。

データ長を変化させたときの Burg 法に基づく APSD のパターン変化については後で述べる事とし、ここでは前節に関連してデータ長 12 および 200 点の場合について検討する。

まず上図の Burg 法による推定結果をみると、データ長 $N=12$ の場合は正弦波の周波数 $f_0 = 1.5$ Hz にほぼ近い位置に鋭いピークがあり、 $N=200$ では f_0 上にピークがある。すなわち、モデルはうまく同定されていると結論される。

一方下図の Y-W 法をみると、 $N=12, 200$ のいずれの場合も周波数 f_0 からはなれたところでピークを生じている。すなわち同定されたモデルが良くない事を示している。特に図中に Y-W 法の $1/(N-l)$ 型の $N=200$ の例が表示されていないのは、同定されたモデルが次数 $M=2$ 以降で不安定となって APSD が推定できなかったためである。

前節でみた様に、少なくとも $N=200$ のとき同じ様な相関関数が推定されていたはずなのに、APSD の推定結果がこの様に異なるのは何なる理由によるものなのだろうか？ この現象を説明する理由の一つとして、2章で述べた様に (2.6) 式が成立するか否かの問題が考えられる。

3.2.3 Burg 法, Y-W 法のモデル・パラメータ

今度はケース I のデータに対し、データ長 $N=200$ の場合に同定された AR モデルの各パラメータについてみる事とする。Fig. 3.4 は AR モデルの次数 M を 0 から 50 次まで変化させたときの残差項の分散 σ_M^2 (図の上段)、AR 係数の第 1 項 $a_M(1)$ (中段)、第 2 項 $a_M(2)$ (下段) の変化を示したものである。

最も大きな特徴は前節でも触れたけれどもモデルの次数 M を上げて行くと、Y-W 法では分散 σ_M^2 が負となる不安定性がみられるということである。ここでは、Y-W 法による同定に $1/(N-l)$ 型の相関関数を用いた場合は $M=2$ 以降、 $1/N$ の場合 $M=3$ 以降にその現象がみられる。 $1/(N-l)$ 型と $1/N$ 型の差異はあまり無い様にみれるが、他の解析結果からも両者を比較した場合に $1/(N-l)$ の方が $1/N$ 型よりも低い次数で不安定になってしまう事が結論される。

Y-W 法に比較して Burg 法のパラメータ変化は非常に安定している事がわかる。分散 σ_M^2 は $M=2$ 以降、AR 係数第 1 項は $M=3$ 以降、第 2 項は $M=4$ 以降に安定している。

最も注意すべき事は、Y-W 法の場合、 $1/N$ 型であろうと $1/(N-l)$ 型であろうと $M=1$

から2にかけて残差項の分散 σ_M^2 の値がほとんど減少しないという点である。これはAR係数を1項増しても予測誤差は減少しなかったことを意味する。このあたりにBurg法の特徴が現われている。何故Burg法はこの次数でうまく行ったのかというと、(2.8)式を適用することによって、 σ_M^2 を強制的に小さくなるようにAR係数第2項を決定してしまったからである。

両アルゴリズムともくりかえし計算法を用いているため、ある次数でパラメータがうまく同定できない場合にはその次数以降はすべてそのしわ寄せを受けてしまう。正弦波は本来、残差項を抜きにして考えると、AR係数が2個あれば完全に記述できるはずである。その意味からも次数 $M=2\sim 3$ でうまく同定できない場合には、それ以降の次数においても良い結果は期待できそうにない。Y-W法の場合がちょうどその例に当たると考えられる。

3.2.4 Burg法の反射係数とFPE

前節の各ARパラメータに関連して、次数 M の変化にもなうモデルの反射係数と評価関数FPEの変化をみてみよう。データ長 N は前節と同じである。Fig. 3.5にBurg法の場合を示す。Y-W法は非常に低い次数から不安定現象が起きたため図示できなかった。

まず上図は反射係数を、下図はFPEを示す。反射係数は10数次以降でほとんど変動が無くなくなってしまふのがわかる。一方、FPEは $M=0\sim 2$ の間は非常に大きな値をとるが $M=3$ 以降は小さくなり、 $M=15$ 以降ならかな傾斜を持って増加していく。注意すべき点として、FPEが最小を示す次数 $M=14$ 近辺において、反射係数もその変動は小さくなるという事である。反射係数の変動(振幅)が小さいという事はその次数 M のモデルの最終項の受け持つ役割り(すなわち情報量)が小さい事を意味する。この図の場合、50次のARモデルを同定したとしてもAR係数の14項以降は受け持つ役割りは非常に小さいという事になる。したがって、このケースの場合FPEの示す最適次数 $M=14$ は妥当な結果であるという事がいえる。

3.2.5 データ長のちがいによるBurg法の相関関数の変化

3.2.1において直接法(1.2)(1.3)式で推定されたものと対比させながらBurg法で推定された相関関数をみたが、ここでは特にBurg法の相関関数だけを取りあげ、データ長を変化させたときの推定結果の変化についてみることにする。

Fig. 3.6はデータ長 N を5点から200点にまで変化させたときの推定結果を示す。後に述べる様に、ARモデルを同定するに当り用いられるデータ長が非常に小さい場合には、データの最初の部分(計算開始点)の持つ位相条件(正弦波 $\sin\theta$ の場合の θ の値)の影響で同一のデータ長の場合でも同定結果が異なる現象がみられるが、ここでは同一の位相をもつ様に設定してある。

下段の図は最大ラグ値LAGH=10の場合、上段は100の場合を示す。各図の右側にはそれぞれの包絡線が示されている。左下図をみると、データ長 N が5の場合、正解である余弦波の形状からかなりずれており、周期も短くなっているのがわかる。 N を増加させていくと、周期は真値よりも一旦長くなった後に、ほとんど真値に近づく事がわかる。一方、余弦波の包絡線は一定(1.0)であるが、 $N=5$ の場合には減衰が最も大きい。左上図には $N=5, 200$ についてLAGH=100の場合のものが示されている。 $N=5$ は減衰振動となっている事がわかる。また右上図から、包絡線は N を大きくして行くと多少の変動はあるが、余弦波のそれに近づいて行

く事がわかる。

3.2.6 データ長のちがいによるBurg法のFPEの変化

前節に関連して、各相関関数を推定する際に同定されたARモデルのFPEをFig. 3.7に示す。この図では、モデルの次数Mを0から10まで変化させたときの各データ長（図中の数字）でのARモデルのFPEの変化が示されている。

FPEは残差項の分散 σ_M^2 の項とデータ長Nの項からできており、 $M=0\sim 2$ の急激な下降特性は σ_M^2 の特性によるもの、またデータ長Nの小さいケース程次数Mが増すと上昇して行く特性はFPEのNの項によるものである。

大部分のケースでは、最小FPEの次数（最適次数）は $M=2\sim 3$ となっていることがわかる。ただし、データ長 $N=200$ の場合は、Fig. 3.5に示した様に $M=14$ である。この事は、このデータは本来 $M=2\sim 3$ のモデルで表現できる構造を持っているが、データ長が大きくなると何らかの歪み（例えばサンプリング誤差、増幅器の歪による誤差等）の効果が無視できなくなるため、次数が上昇していくものと考えられる。

3.2.7 データ長のちがいによるBurg法のAPSDの変化

3.2.5、3.2.6で議論したデータ長Nを変化させた場合のARモデルを用いて、各APSDを推定したのが先に3.2.2で述べたFig. 3.3の上図であった。この図をみると、データ長 $N=5$ の場合に正弦波の持つ周波数 $f_0=1.5$ Hzよりかなり高い周波数にピークが現われている事、およびその形状はブロードである事がわかる。

このピーク周波数すなわち f_0 の推定値 f_0 はNを増加させて行くと一旦 f_0 よりも低い側にまで変化した後、 f_0 に近づいている様にみえる。この関係を表わしたのがFig. 3.8である。この図から、データ長が周期成分の周期（約12点）以下の場合には、ある1点を除き正しい f_0 の推定はできない事がわかる。一方、12点以降の場合ほぼ正しい推定値を得ている事ができる。ただし、12点～50点の間は測定点が少ないために上記の結果が偶然にうまく推定できる点を選んだのであって本来は振動をしながら収束して行くのか、それとも12点以降すぐに収束して行くのかはこの図では判断できない。Chenら^[5]の報告によると、この推定値 f_0 は減衰振動（振動周波数は f_0 ）をしながら収束するとしている。

3.2.8 データの位相条件のちがいによるBurg法のAPSDの変化

前節の問題とは別に、用いられるデータの長さが小さい場合に、データの最初の部分（計算開始点）の持つ位相条件（正弦波 $\sin \theta$ の θ の値）のちがいによって、Burg法で推定されたAPSDのピーク周波数が真値に対しずれを起すという問題が報告されている。^[4,5]

この問題を調べるために、まず1周期約12点からなるケースIのデータからデータ長 $N=5$ のデータ・セットをその開始点が1点づつずれる様に12ケース取り出して、Burg法によるAPSDの推定を行なった。

Fig. 3.9がその12ケースの各APSDの推定値である。データ長 $N=5$ の場合、Fig. 3.8でもみたように正しい周波数 f_0 を推定する事はできないが、位相条件のちがいによってか

なり f_0 が異なる。推定された f_0 が真値 1.5 Hz に近づく程、その形状は鋭くなる特徴がある。

このときの AR パラメータの変化を Fig. 3.10 に示す。図は上からデータ $x(t)$ (計算開始点は 1 ~ 12 まで)、推定された周波数 f_0 、データの持つ分散の推定値 σ_x^2 、残差項の分散 σ_M^2 、AR 係数第 1 項 ~ 3 項が示されている。モデルの次数 M は全て 3 である。

この図をみると、 f_0 の推定値はデータの振幅の 2 乗に比例した動きを示しているのがわかる。ただし 1 点分の時間遅れをともなっている。このデータの振幅の 2 乗値は、データ長を小さくしているため、データの持つ分散の推定値 σ_x^2 とも比例関係にある。しかも時間遅れの関係は f_0 の場合と同じである。この分散値 σ_x^2 の推定値の変動とともに、各 AR 係数も変動している事がわかる。

したがって、周波数 f_0 の推定値の変動は Burg 法の AR モデル同定計算に初期条件として与えられるデータの分散値 σ_x^2 の推定誤差によって引き起されるものであると考えられる。特にデータが正弦波の様な周期関数でデータ長の小さい場合はデータの分散 σ_x^2 の推定値は計算開始点の選び方によってかなり変動する事は予想できる事である。この様な視点で前節のデータ長のちがいによる推定された APSD のピーク周波数 f_0 がデータと全く同じ周期をもった減衰振動をしながら真値 f_0 に収束して行くという現象は説明できる事になる。

以上の事をさらに確認するものとして、 $N = 12$ (ちょうど 1 周期分に相等) の場合の結果を Fig. 3.11, 3.12 に示す。Fig. 3.11 には APSD を、Fig. 3.12 には上から Fig. 3.10 に対応する各パラメータが示されている。APSD のピーク周波数はほぼ一致している。ここでは 1 点おきに 6 ケースの結果が示されているが、第 1 番目の f_0 の推定値だけがわずかにずれといる。AR 係数をみるとそれぞれ安定した結果を示すが残差項の分散 σ_M^2 の結果が f_0 の推定値と対応した動きを示している。この事はデータの分散 σ_x^2 がこの区間でうまく推定できなかったと解釈すれば説明できる。

3.3 ケース II (正弦波 + 白色雑音; その 1) の解析

今度は、より現実に近いデータとして正弦波に白色雑音を重ねた場合について比較を行なう。Fig. 3.13 は Burg 法および Y-W 法 (1/N 型) で推定された APSD を示す。Burg 法はデータ長 12 点の場合、ピーク周波数 f_0 は低い側にずれているが、その他の場合は良好である。一方、Y-W 法の場合はデータ長を 4000 点としても正しい周波数の推定値は得られず、その形状もブロードである。

ここで用いた Burg 法のモデル次数は FPE に従っている ($M = 4 \sim 10$)。Y-W 法の場合は次数 4 以降で不安定性が現われている。全般的な特徴は全てケース I と同じと考えて良い。

3.4 ケース III (正弦波 + 白色雑音; その 2) の解析

このデータは Table. 3.1 に示す様にケース II と同じ構造を持つ信号をサンプリング間隔 Δt がケース II の $1/10$ となる様に設定してサンプルしたものである。したがって、正弦波の 1 周期はデータ長 111 点で表わされる事になる。

3.4.1 Burg 法, Y-W法の APSD

Fig. 3.14 の上図には次数 M を 50 としたときの Burg 法の APSD の推定結果が示されている。データ長 N は 60 および 120 の場合が示されている。一方、下図にはデータ長 N を 120 としたときの Y-W 法 (1/N 型) の APSD の推定結果で次数 M を 10, 50 としたときのものが示されている。

Burg 法の場合、データ長が約 1 周期分 ($N = 120$) のものはほぼ正解に近い f_0 が推定できているが、約半周期 ($N = 60$) のものは高い側にずれているという結果はケース I で述べた状況と全く同じである。ただし、モデルの次数が高いため高域側でスペクトルの激しい波打ちがみられる。

一方、Y-W 法の場合、ケース I で述べた様に次数を上げて行くと残差項の分散 σ_M^2 の値が負になるという不安定現象が $M = 10$ 以降でみられた。この範囲内で FPE 最小の次数 $M = 10$ の APSD には f_0 の部分には全くピークがみられない。同定精度上は大問題であるが、この不安定性を無視して機械的にくりかえし計算を続けると、 $M = 50$ でピークが現われ、しかもこのピーク周波数がほぼ正しい値を与えているのが見出だせる。高域側のスペクトルの激しい波打ちがみられるのは Burg 法の場合と同じである。

上記の奇妙な現象、すなわち一旦不安定性が現われてもさらに次数の高い側まで計算を進めると正しいピーク周波数が表現できるといった現象の解釈として、AR モデル同定計算での誤差の蓄積はスペクトル上では高域に現われ、低域には余り影響を及ぼさないという事が考えられる。

3.4.2 モデル次数のちがいによる Burg 法の APSD の変化

前節の Y-W 法の APSD に関連して、Burg 法のモデル次数を変化させた場合の APSD を Fig. 3.15 に示す。なお高域側は図を見やすくするために省略されている。

$M = 10$ では $f_0 = 1.5$ Hz 付近は多少もり上がっているけれども顕著なピークはみられない。 $M = 15$ にすると、明らかにピークとわかる形状となる。以下次数を増加していくとピークの鋭さは増していくことがわかる。ここで注意すべき事は、極く低い次数を除いて、ピーク周波数 (データの f_0 の推定値) はモデルの次数に不変であるという事である。

3.4.3 Burg 法, Y-W 法のモデル・パラメータ

3.2.3 でみたのと同様に、ケース III のデータに対し、データ長 $N = 120$ の場合に同定された AR モデルの各パラメータについてみる事とする。Fig. 3.16 は AR モデルの次数 M を 0 から 50 次まで変化させたときの残差項の分散 σ_M^2 (図の上段)、AR 係数の第 1 項 $a_M(1)$ (中段)、第 2 項 a_M (下段) の変化を示したものである。

ケース I の場合 (Fig. 3.4) に比べ、Y-W 法的不安定現象は比較的高い次数から現われることがわかる。これはケース I の場合に比べてサンプリング間隔 Δt が $1/10$ になった事により相対的に周期成分の周期が 10 倍に長くなった影響であろうと考えられる。

この影響は Burg 法の場合にもみられる。特に AR 係数第 1 項の変化をみると、ケース I では $M = 2 \sim 3$ で安定となるのに比べ、このケースでは $M = 10 \sim 20$ を過ぎてから安定していることがわかる。また残差項の分散 σ_M^2 はケース I の場合に比べて減少していく程度 (傾斜) が大

きくなっている。

3.4.4 Burg 法, Y-W 法の反射係数と FPE

前節に関連して、各手法の反射係数と FPE の変化をみることにする。Fig. 3.17 の上段はデータ長 $N = 120$ の場合の両アルゴリズムによる AR モデルの反射係数を、また中段、下段に FPE を示す。Burg 法の場合は $N = 60$ についても表示されている。

反射係数の変動はケース I (Fig. 3.5) に比べて大きいのが特徴である。反射係数の変動が大きいという事は同定されたモデルの精度が良く無いと考えるが良い。

Burg 法の場合、データ長の大きいものと小さいものを比較すると、小さい方が反射係数の変動は大きいことがわかる。したがって、このケースのデータについては、同定に用いるデータ長 N を 120 点よりもかなり大きくしないと良い精度のモデルは同定できないことがわかる。

一方、Y-W 法の場合 $M = 11$ 以降は不安定となるが、反射係数をみると、その近く $M = 10, 11$ で非常に大きな変動をしているのがみられる。したがって残差項 σ_M^2 が負になるよりも少し前の次数ですでに不安定現象の起っている事がわかる。

FPE の変化について見てみると Burg 法の場合、 $N = 120$ のときはケース I (Fig. 3.5) に比較して最小点 (最適次数) はかなり高い次数で 36 である。一方、 $N = 60$ のときは $M = 2$ を示している。Fig. 3.15 でみた様にモデルの次数が小さい場合にはデータ中に存在する 1.5 Hz の正弦波が表現できていない事、また Fig. 3.14 でみた様にモデル同定に用いたデータ長が十分でない場合には次数を上げて正しい周波数 f_0 は推定できない事を考慮すると、 $N = 60$ のときの最適次数 $M = 2$ という結果は妥当かもしれない。また、 $N = 120$ のときの最適次数 $M = 36$ という結果も Fig. 3.15 から妥当であると判断される。

Y-W 法の FPE 変化については、不安定現象が起るため最適次数を決定する事はできなかった。

3.5 原子炉雑音データへの適用

ここでは実際の原子炉で測定されたデータに対し Burg 法による AR モデリングを適用した例を示し、この手法の原子炉異常診断への応用の可能性について検討することとする。

ここで用いられたデータはノルウェーの Halden 炉 (出力 1.18 MWt 運転時) の中性子雑音をサンプリング間隔 $\Delta t = 0.2$ sec でサンプルした全長 3500 点から成るデータである。Fig. 3.18 にその全長の波形が示される。この図から、比較的ゆっくりとした周期の長い変動分と、非常に周期の短い変動分のある事がわかる。

Halden 炉の高出力時における中性子雑音の APSD は、0.04 Hz 付近および 0.8 Hz 付近においてピークを持ち、このうち 0.04 Hz 付近のピークは炉出力を上げて行くと周波数の高い方へずれて行く事が知られている。

0.04 Hz 付近の炉出力共鳴振動については、1 次系においては原子炉、2 次系においてはスチームドラムと並列結合している 2 つの熱交換器の間の動的な干渉効果にもとづくもの⁽¹³⁾ また 0.8 Hz 付近のピークは炉心内で沸騰が起っている場合に現われるもので、冷却材が炉心を通過

する際のチャンネル内での流動変動によって形成されているとされている。特に、0.04 Hz 付近のピーク周波数は炉出力に強く依存しており、炉出力の統計的変動によってその周波数も統計的に変動している事は十分考えられる。

3.5.1 3つの手法で推定された APSD の検討

Fig.3.19 は上から順に Blackman-Tukey 法, 次数 $M=10$ の場合の Burg 法, Y-W法, 次数 $M=50$ の場合の Burg 法, Y-W法によって推定された中性子雑音の APSD を示すものである。図はそれぞれ1デカードずつずらして表示されている。

Blackman-Tukey 法による APSD は 3500 点 (約 12 分) のデータ全部 (1 番目~3500 番目) を用いて推定した結果である。先に述べた様な 2 つのピークが, かなりはっきりと現われている。図中にある鎖線はそのピーク周波数を示している。低い側は 0.04 Hz, 高い側は 0.7 Hz と 0.8 Hz の間に位置することから, 今までに報告されている結果と良い一致を示していることがわかる。

図に示されたその他の APSD は全てデータの一部分 (1 番目~300 番目, 時間にして 1 分に相等) を用いて推定した結果である。はじめの 2 つは Burg 法, Y-W法を用いたモデル次数が 10 の場合のものである。ともに低い側の周期成分は表現できていない事がわかる。一方, 高い側のピークは Burg 法の場合 Blackman-Tukey 法とほぼ一致した周波数に現われるが, Y-W法では若干低い周波数に現われるのがわかる。

この高い側のピーク成分は, 仮に 0.8 Hz の振動周波数をもつ正弦波だとすれば, その 1 周期は 1.25 sec (サンプルデータで 6~7 点に相等) だから同定に用いられた 300 点の中には約 50 周期分の成分が含まれているはずである。したがって, 3.2.7, 3.2.8 で考察した様に正しい周波数を推定するには十分なデータ長を持っているといえる。また, Y-W法の場合はデータ長を十分に大きくとっても周期関数によってピークが形成されている様な場合は, そのピーク周波数は真の振動周波数と一致しないことを述べた。以上から, この $N=300$, $M=10$ における Burg 法と Y-W法の APSD に現われる 0.8 Hz 付近のピークは Burg 法の周波数が真値に近いと結論される。

図の下 2 つの APSD は次数 $M=50$ の場合のものである。低い側の周波数に両方ともピークが現われていること, 先の 0.8 Hz 付近のピークは両方とも 2 つのピークに割れてしまっている事がわかる。この様にモデルの次数を高くしすぎるとピークが割れてしまう現象は, ここで述べるテーマと直接関係がないので触れない事とする。(詳しくは文献 (5) を参照)

ここで問題となるのは低い側の周波数に生ずるピーク周波数である。すなわち, Burg 法, Y-W法ともに 0.3 Hz 付近にピークを持っており, Blackman-Tukey 法の結果より低い側にずれているという事である。

この低い側のピーク成分は, 仮に 0.04 Hz の振動周波数をもつ正弦波だとすれば, その 1 周期は 25 sec (125 点に相等) だから同定に用いられた 300 点の中には約 2.5 周期分の成分が含まれている事になる。(0.03 Hz とすれば約 1.8 周期分)。データ長が 2 周期程度ある場合には, Chen^[5]らの報告によれば, 例えデータの初期位相の条件が最も悪い条件であったとしても 25 % の周波数のずれは起こらない事がわかる。したがって, これらの推定値は妥当であり, 3500

点から成るデータのうち第1番目から第300番目までの区間（時間にして1分）は低い側のピーク周波数 f_{LOW} は 0.3 Hz 付近にあると結論される。

それでは一体、Blackman-Tukey 法で推定された $f_{LOW} = 0.4$ Hz とは何だったのだろうか？これは 3500 点全体を通じての f_{LOW} の平均値と解釈する事ができる。

3.5.2 ピーク周波数 f_{LOW} , f_{UP} の時間依存変動推定における問題点

前節でみた様に、1つの時系列信号において時刻とともにその構造を記述するパラメータの値が変動する、あるいは変動するのではないかと疑われる様なデータを解析しようとする場合、ひとつの方法として観測されたデータを小区間に分割し、各区間毎にBurg法を用いたARモデリングを行ない、得られた結果の時間的な遷移を解析するという方法が考えられる。

この場合、データの小区間の大きさは必要最小限に設定しなければならない。前節では $N = 300$ としたが、これは低い側のピーク周波数 f_{LOW} の推定精度に関連して周期の2倍程度の大きさを確保することを主眼として決定した値である。もしも高い側のピーク周波数 f_{UP} に焦点をさぼるならば $N = 13$ 程度となるであろう。

モデルの次数決定問題はデータにより事情が異なり、必ずしも評価関数 FPE 等が万能な訳ではない。Fig. 3.20 はデータ長 $N = 500$ (2001番目～2500番目) のときのモデル次数に対するBurg法のAPSDパターンの遷移を示したものであり、Fig. 3.21 はそのときのFPEの遷移および $N = 300$ の場合のものを示した図である。

まず高い側のピーク周波数 f_{UP} に注目してAPSDの遷移をみると、次数 $M = 3 \sim 5$ ではなめらかな曲線の状態から次第にピークが現われ、そのピーク形状も鋭さを増して行くが、ピーク周波数 f_{UP} も低い方にずれて行く事がわかる。 $M = 7 \sim 30$ の間では f_{UP} はほぼ一定の値を示すが、 $M = 50 \sim 75$ ではピーク割れが生じている。

一方、低い側のピーク周波数 f_{LOW} をみると、 $M = 30$ 前後にピークが現われ、 $M = 50 \sim 75$ で明確なピークとなることがわかる。

FPEの遷移に目を移すと、 $N = 500$ の場合最適次数として $M = 33$ が示されているのがわかる。この次数では、 f_{UP} のピークは割れはじめるところ、 f_{LOW} のピークは現われはじめるところに対応しており、両周波数域を同時に評価しようとする場合には都合が良いが、それぞれ個別に評価しようとする場合には中途半端な次数である事がわかる。したがって、この場合には f_{UP} をみるために $M = 10$ 、 f_{LOW} をみるためには $M = 50$ 前後が最適と判断される。

$N = 300$ の場合、FPEの示す最適次数は $M = 10$ と示されている。この次数を選べば f_{UP} を評価することはできるが、 f_{LOW} のピークは現われないことになる。FPEの遷移曲線は $N = 500$ のものに比べ若干の傾斜をもって次数 M とともに上昇して行くのがわかる。しかし前節で検討した様に f_{LOW} のピークを形成する周期成分はデータ中に2周期前後は存在する事、FPEの遷移自体がなだらかな事などから f_{LOW} のピークを評価するため次数を50前後に設定しても問題はないと考えられる。

3.5.3 f_{LOW} , f_{UP} の時間依存変動の推定結果

全長 3500 点の中性子雑音データからはじめの 3300 点を 11 分割し、データ長 300 点の各区

間毎に APSD を推定した結果を Fig. 3.22 に示す。上図は高い側のピーク f_{UP} に注目した次数 $M=10$ の推定結果であり、下図は低い側のピーク f_{LOW} に注目した $M=50$ の結果である。下図については必要と思われる周波数範囲だけを表示したものである。たて軸は対数目盛りで表示されている。

したがって 11 区間の推定された APSD の平均をとるとすると、この図中最も高い値を示す曲線の部分が強く浮き上がる形となるはずである。先に示した Fig. 3.19 の全データを用いた Blackman-Tukey 法の APSD とこの最も高い値を示す曲線を見ると、傾向として良く似たパターンの得られている事がわかる^[1]。特に f_{LOW} は 0.04 Hz, f_{UP} は 0.8 Hz より少し低い周波数になっており、両者とも良く一致していることがわかる。これらの事実と、シミュレーション・スタディで得た結果から、各区间毎の f_{LOW} , f_{UP} の推定値は妥当なものであると結論される。

各区间毎に推定した f_{LOW} , f_{UP} を時刻の経過を追って図示したのが Fig. 3.23 である。各区间は 300 点から成るから時間にして 1 分に相等する。この図によると、 f_{LOW} は 0.03 ~ 0.055 Hz, f_{UP} は 0.7 ~ 0.8 Hz の間で変動している事がわかる。

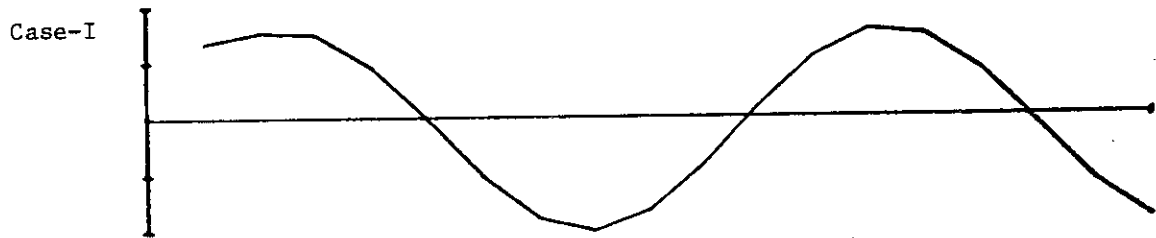
このうち、 f_{LOW} の場合は推定に用いるデータ長をほぼ限度いっぱい小さく制限し、いわば最高感度で変動をとらえていると考える事ができるが、データの全長がわずかに 3500 点と短いため 11 点の推定値を得るにとどまった。したがって、この変動自体システムティックに変動していくのか、ランダムに変動していくのかは、この結果からだけでは判断できない。

一方、 f_{UP} の場合は、その周期から判断して解析に用いたデータ長は必要最小限度（最高感度）の 25 ~ 50 倍であるため得られた変動結果はかなり平均化されたものである事がわかる。しかしながら、この変動を引き起す機構自体が炉出力の変動に依存していると予想される様な場合には、同じ様に炉出力の変動に依存して変動すると予想される f_{LOW} の推定値とともに解析を進める必要がある。したがって、ある程度の大きさをもつ区間内の平均値で変動をとらえる事はそれなりに意味のある事だと考えられる。

以上の様にして、中性子雑音の APSD 中に現われるピーク周波数 f_{LOW} , f_{UP} の時間的変動を、Burg 法を用いた AR モデリングによってとらえることができる事を示した。さらに、得られた変動の推定結果が十分な数だけ得られれば、これを時系列データとして再度 Burg 法を用いた AR モデル等の手法を適用する事によって、この変動機構の解析が可能と考えられる。

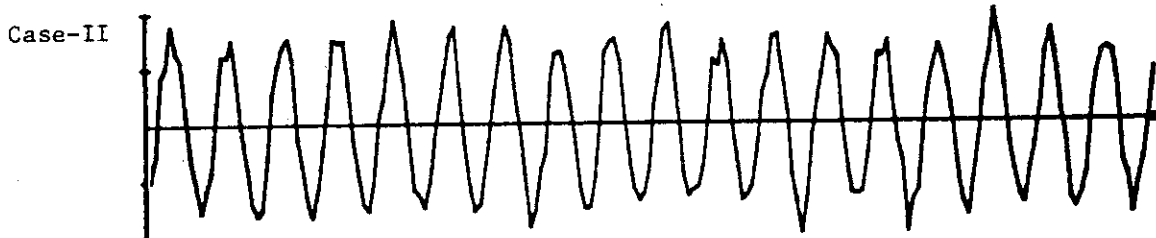
Table 3.1 Conditions of the simulation data set

	Function	Frequency f_0	Period T	Sampling Interval Δt	Number of Data Points in T
Case-I	$A\sin(2\pi f_0 t)$	1.5 Hz	0.666 sec	0.061 sec	≈ 12
Case-II	$A\sin(2\pi f_0 t) + w(t)$	"	"	"	"
Case-III	"	"	"	0.0061 sec	≈ 111



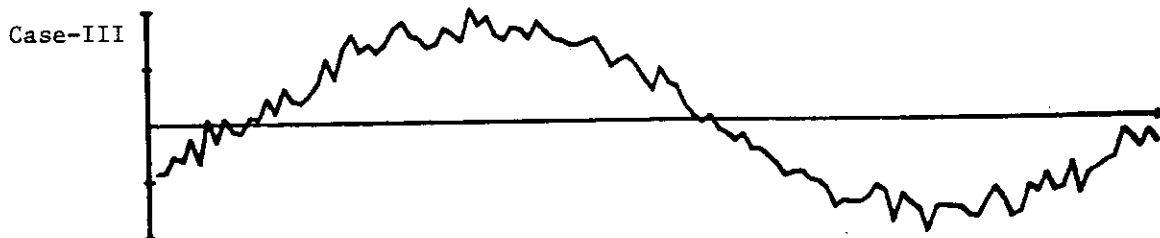
DATA; MEAN= .399E+00 SCALE= .280E+01 VARIANCE= .329E+01

PLOT FROM X(1) TO X(18)



DATA; MEAN= .119E+00 SCALE= .327E+01 VARIANCE= .324E+01

PLOT FROM X(1) TO X(200)



DATA; MEAN= .146E-01 SCALE= .304E+01 VARIANCE= .319E+01

PLOT FROM X(1) TO X(120)

Figure 3.1 Simulation data sets used for the AR model identification test

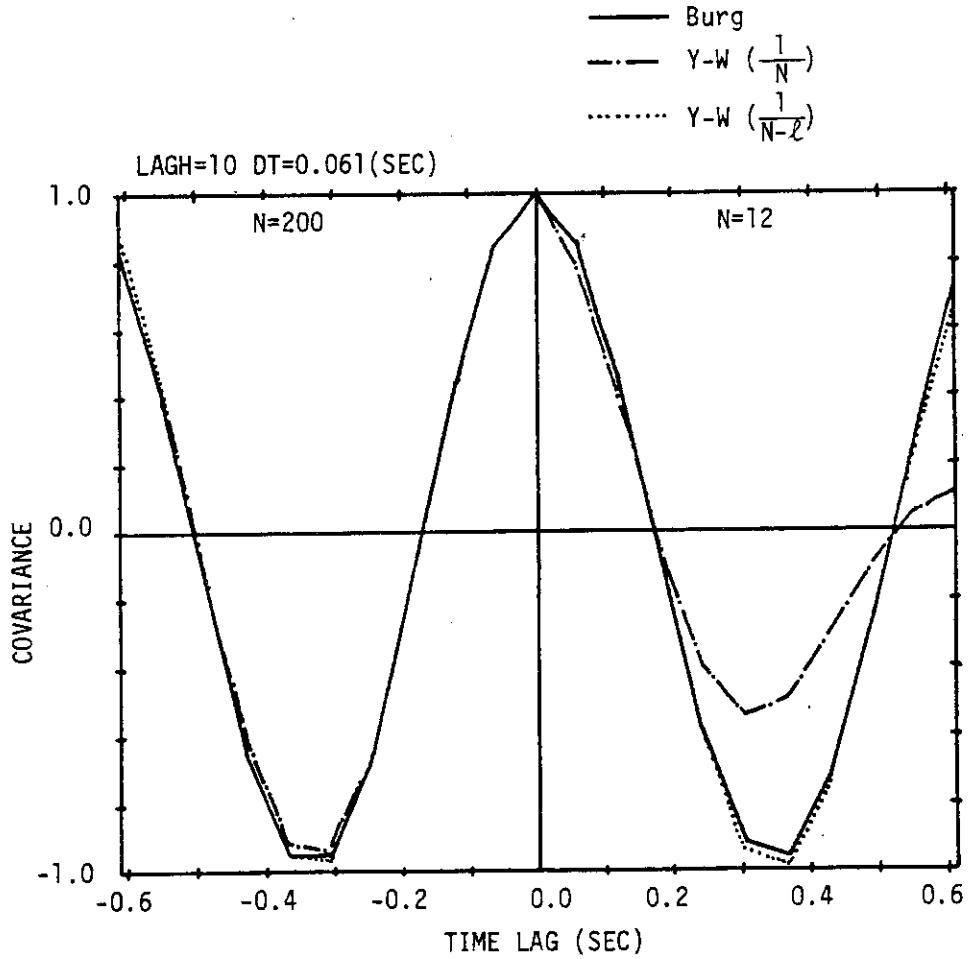


Figure 3.2 Comparison of the estimated autocorrelation function patterns between Burg method and the direct method ($1/N, 1/N-l$) for two different lengths of a data set sampled from the simulation data "CASE-I". Right figure shows the case of data length $N=12$ and left the case of $N=200$.

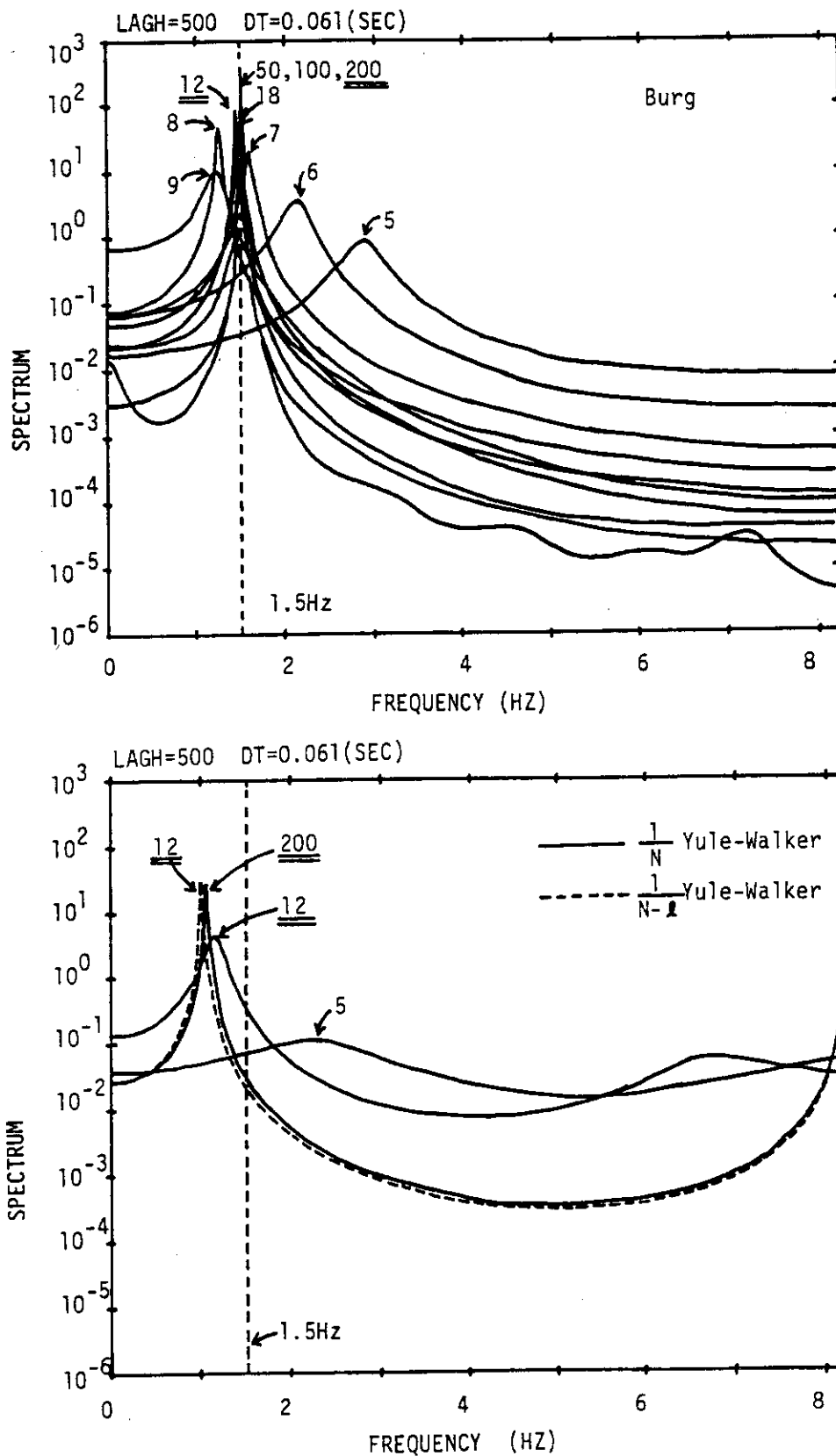


Figure 3.3 Comparison of the estimated APSD patterns between Burg method (upper) and Yule-Walker method (lower) for various lengths of data sets sampled from the simulation data "CASE-I". The numbers in above figures express the data length N.

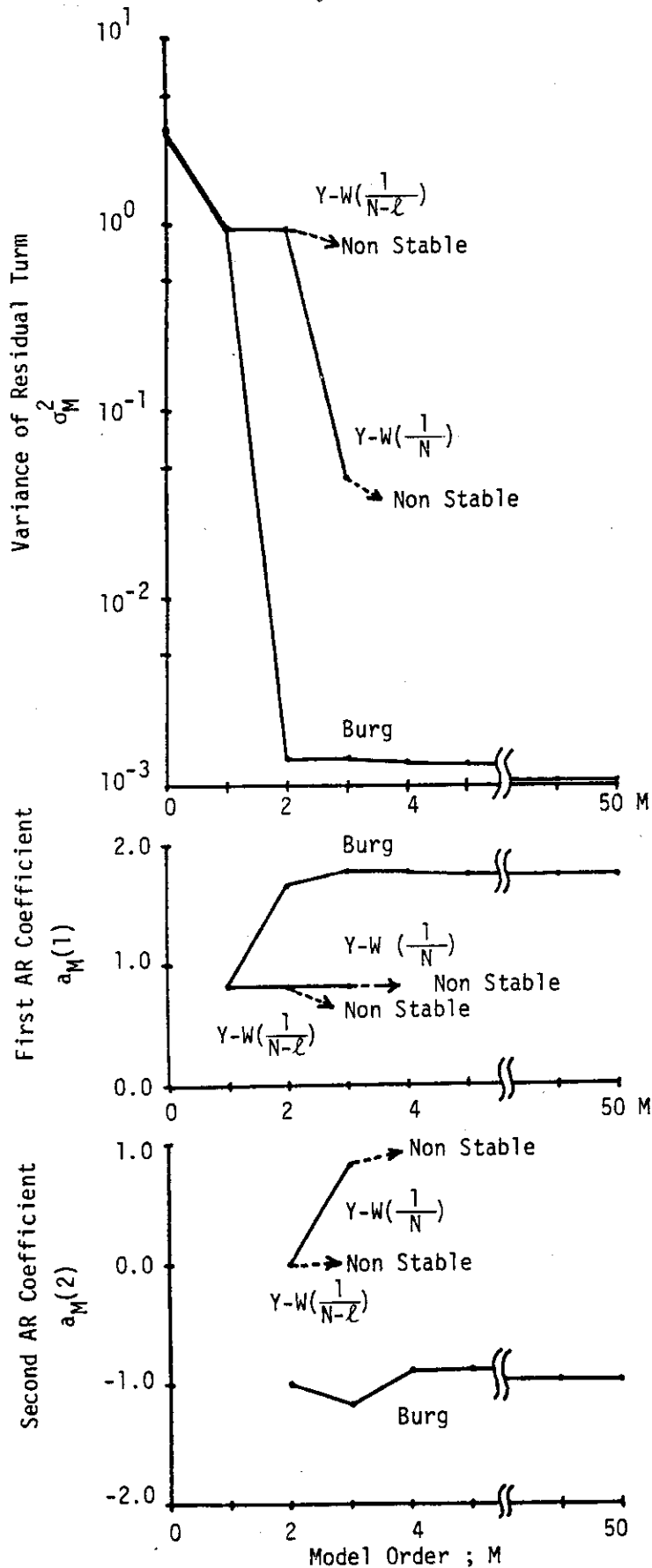


Figure 3.4 Comparison of the identified AR parameters between Burg method and Yule-Walker method for various model order M using a data set sampled from the simulation data "CASE-I". (N=200)

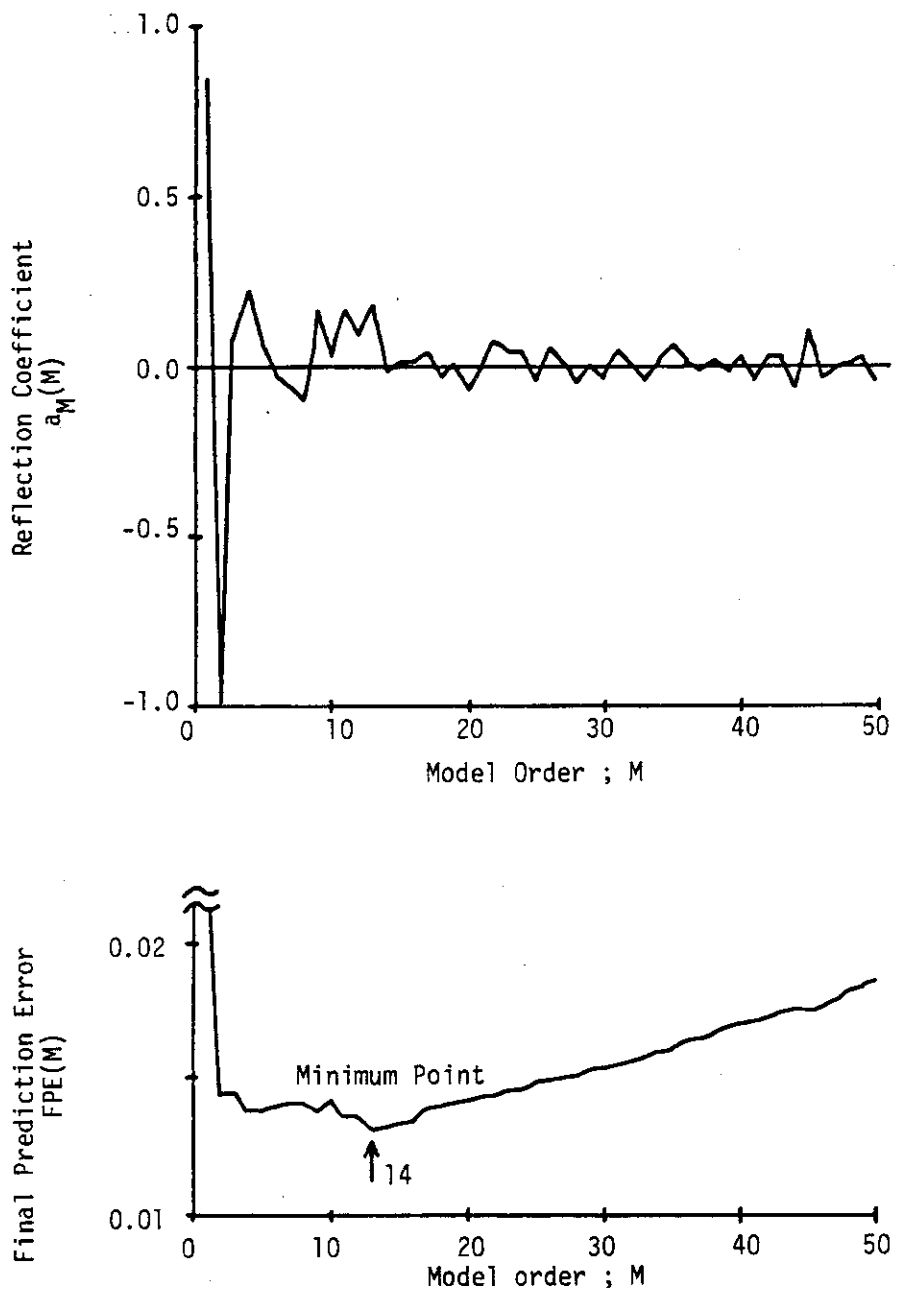


Figure 3.5 The behavior of FPE function and reflection coefficients of the identified AR model for a 200-point data set sampled from the simulation data "CASE-I". (Burg method)

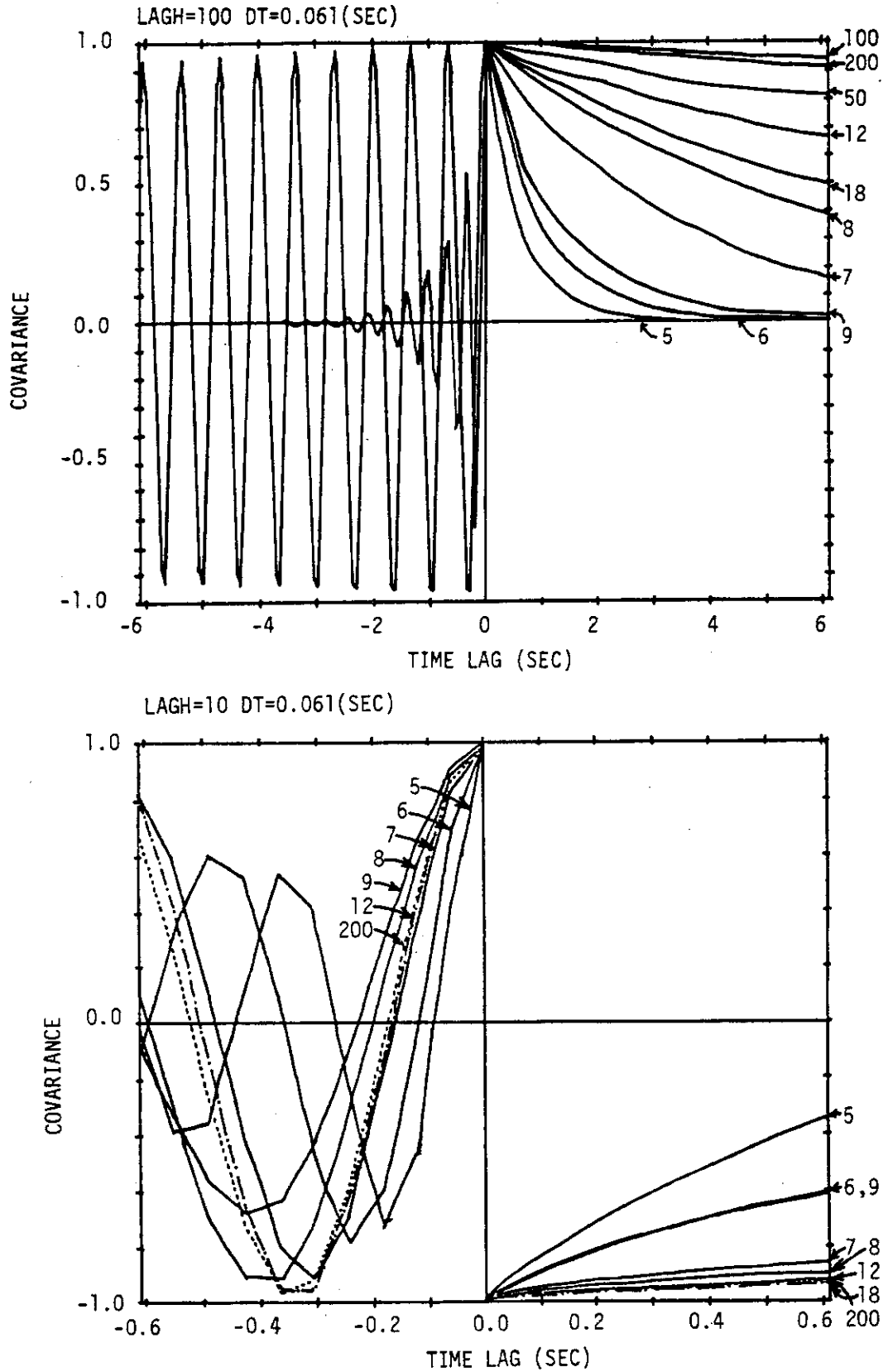


Figure 3.6 The estimated autocorrelation function patterns for various lengths of a data set sampled from the simulation data "CASE-I". The upper figure is the result for lag value = 100 and the lower one for lag value = 10. The right part of each figure shows the envelopes of each autocorrelation function.
 (Burg method)

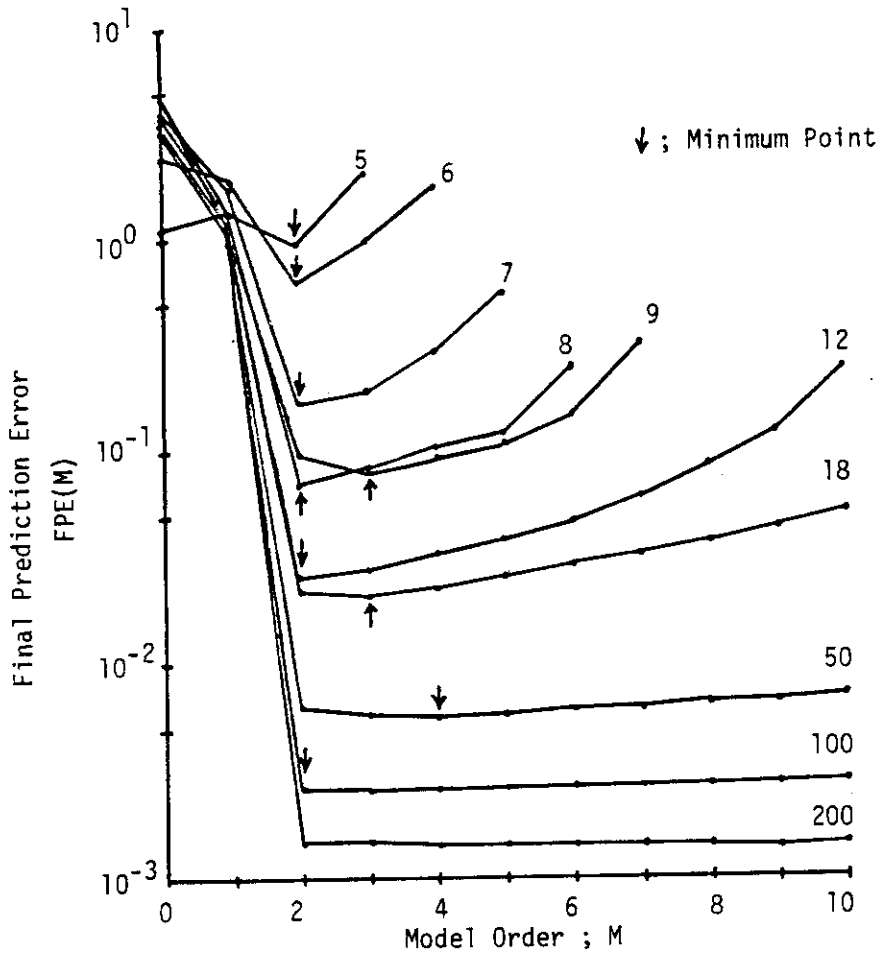


Figure 3.7 The behavior of FPE functions of the identified AR models for various lengths of a data set sampled from the simulation data "CASE-I". (Burg method)

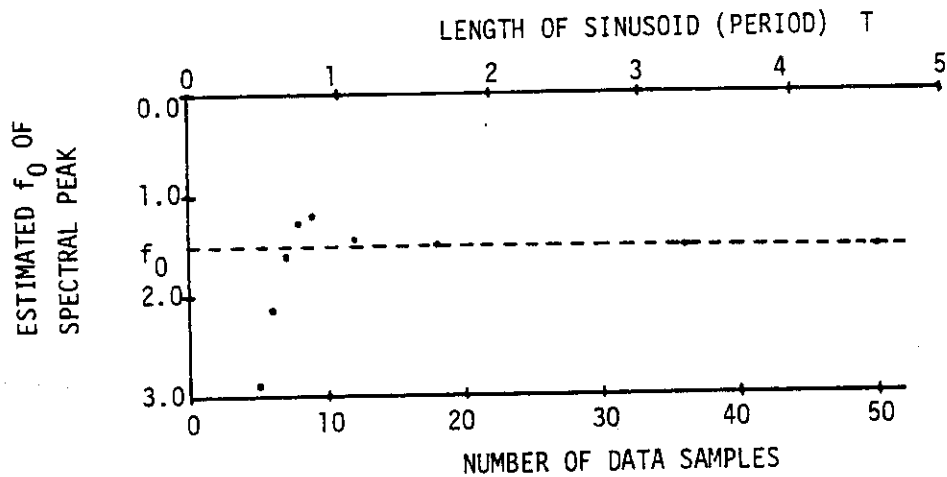


Figure 3.8 The estimated frequency f_0 of spectral peak for various lengths of the simulation data "CASE-I" (Burg method)

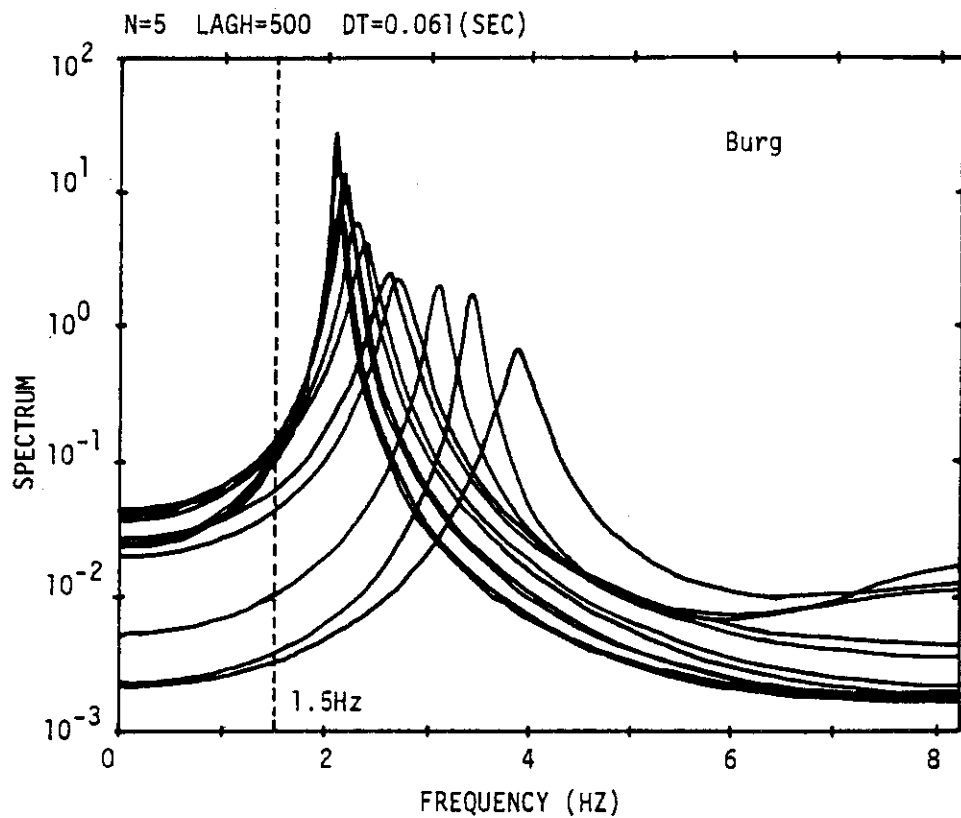


Figure 3.9 APSD patterns for various initial phases (start points) of a 5-point data set sampled from the simulation data "CASE-I". (Burg method)

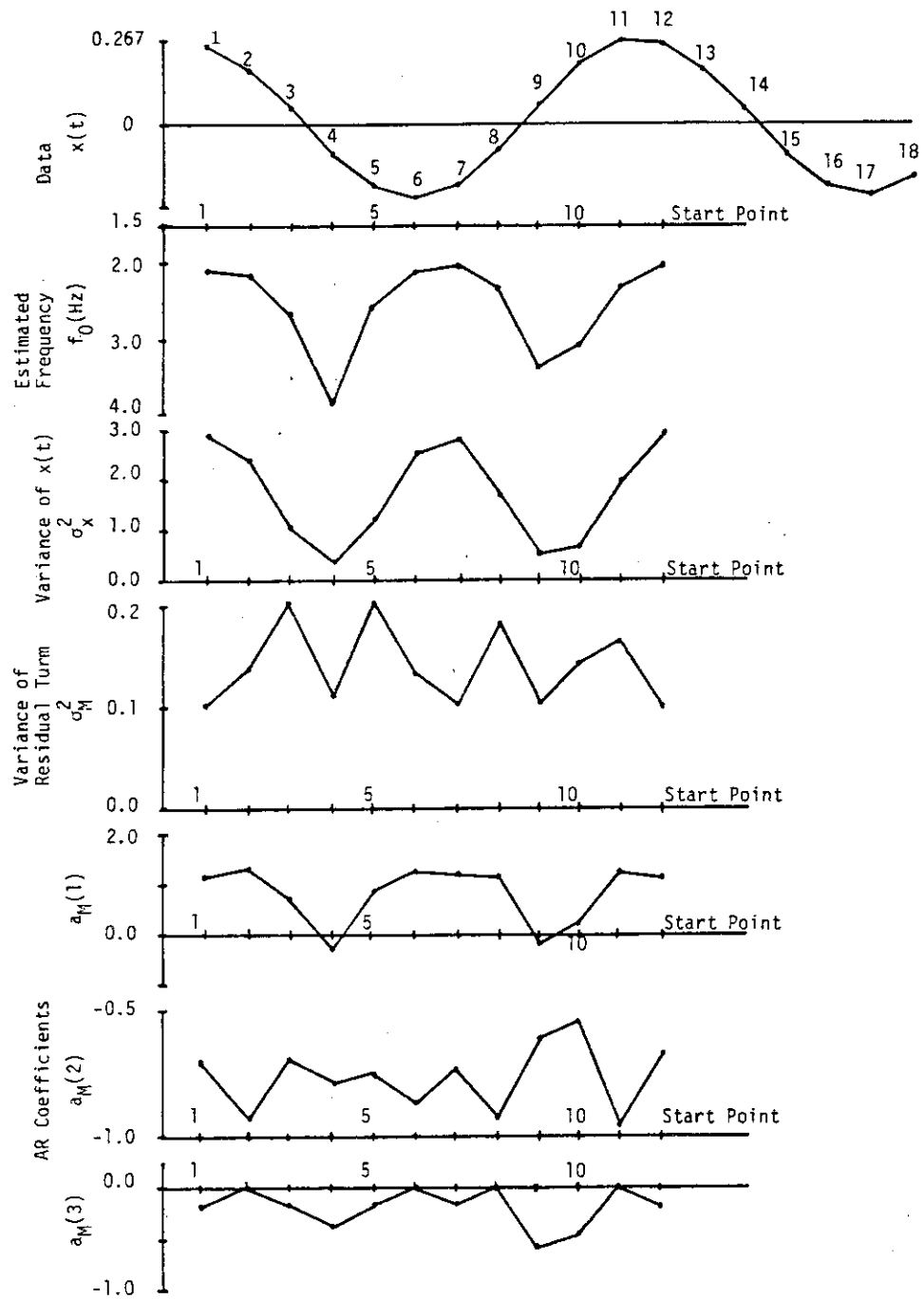


Figure 3.10 The behavior of the estimated frequency f_0 and the identified AR parameters for various initial phases (start points) of a 5-point data set sampled from the simulation data "CASE-I". Here AR model order $M=3$ was used. (Burg method)

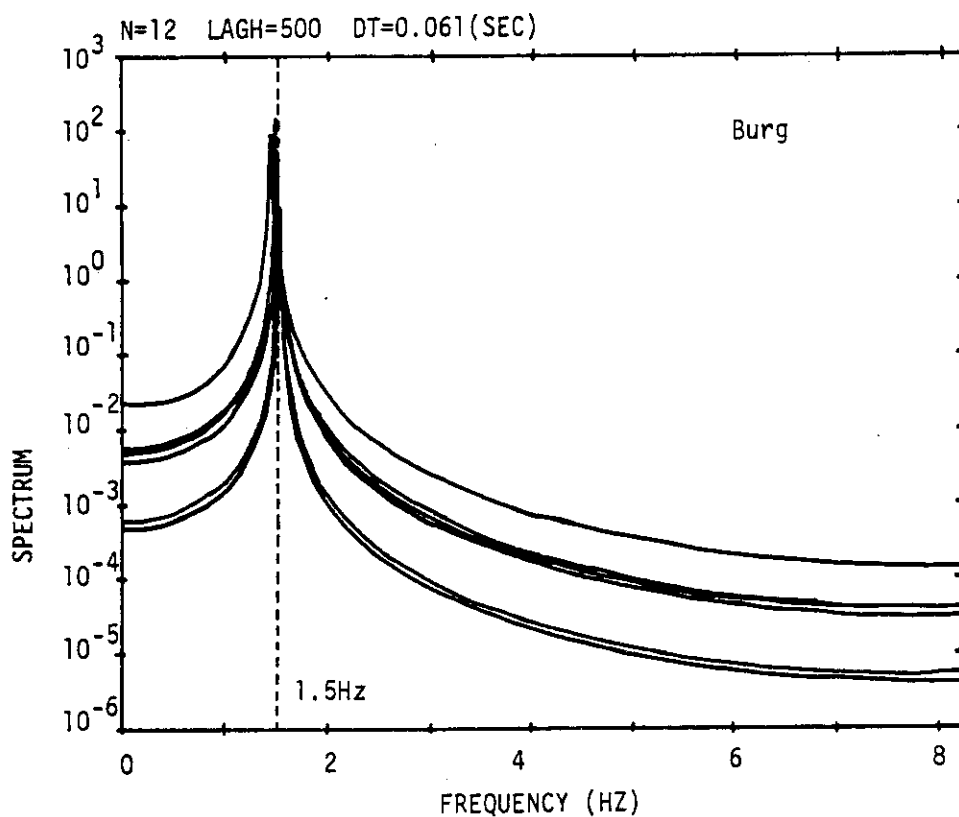


Figure 3.11 APSD patterns for six different initial phases (start points) of a 12-point data set sampled from the simulation data "CASE-I". The start points are selected as 1, 3, ..., 11. (Burg method)

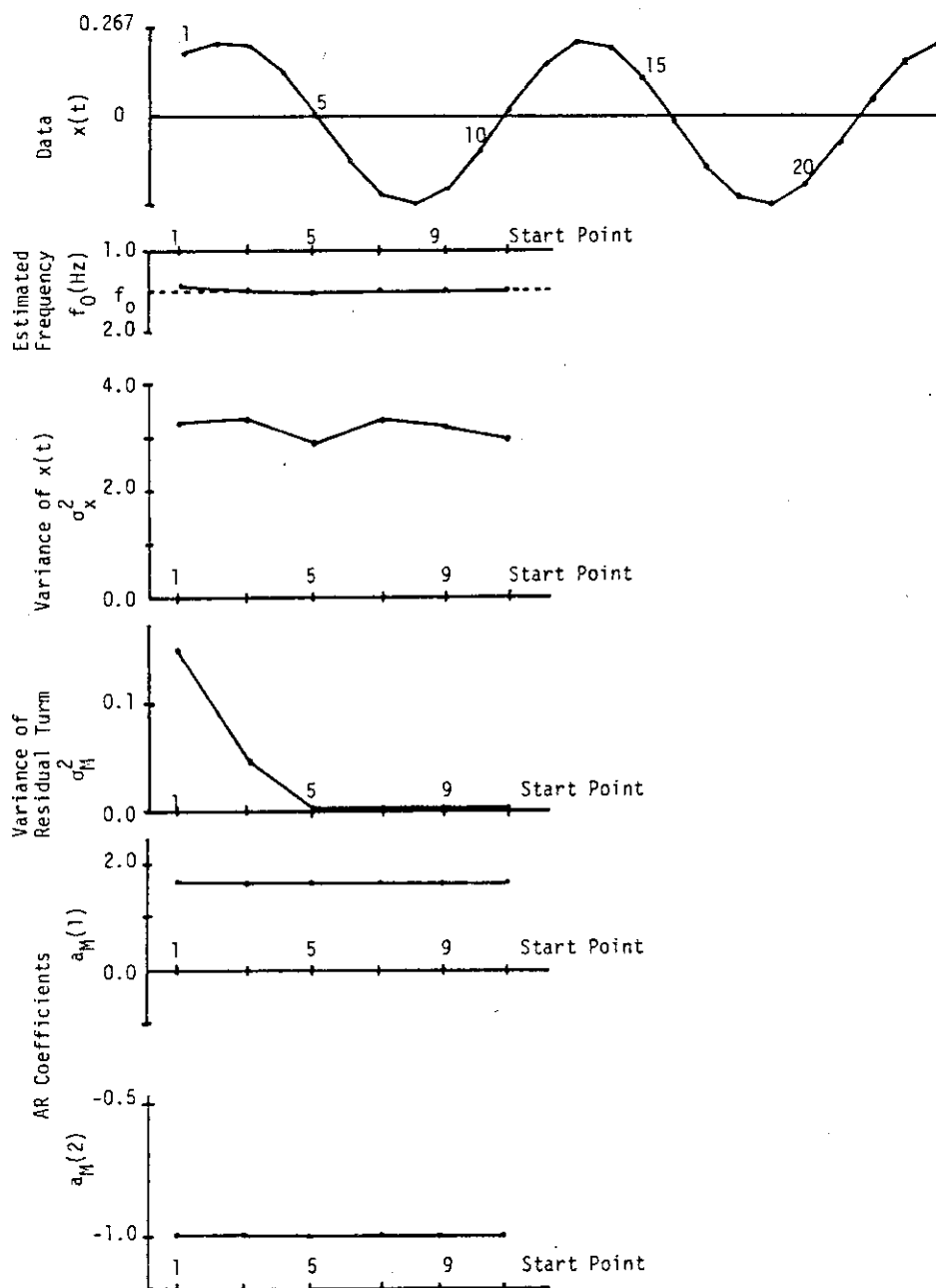


Figure 3.12 The behavior of the estimated frequency f_0 and the identified AR parameters for six different initial phases (start points) of a 12-point data set sampled from the simulation data "CASE-I". Here AR model order $M=2$ was used. (Burg method)

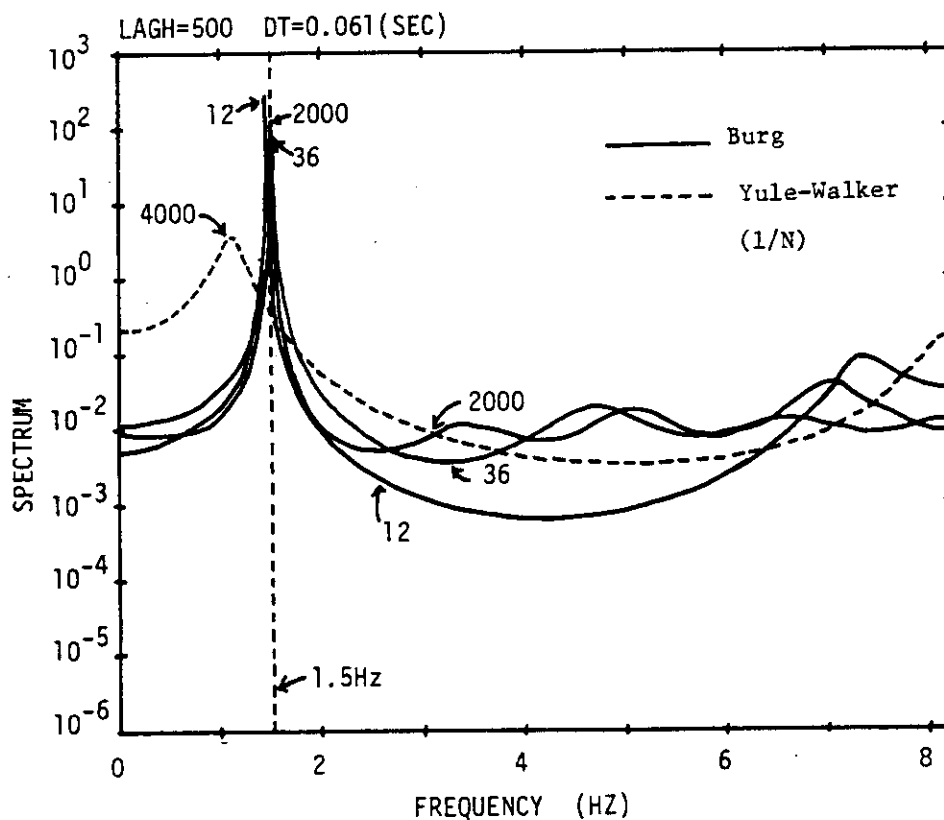


Figure 3.13 Comparison of the estimated APSD patterns between Burg method and Yule-Walker method for various lengths of a data set sampled from the simulation data "CASE-II". The numbers in above figure express the data length N.

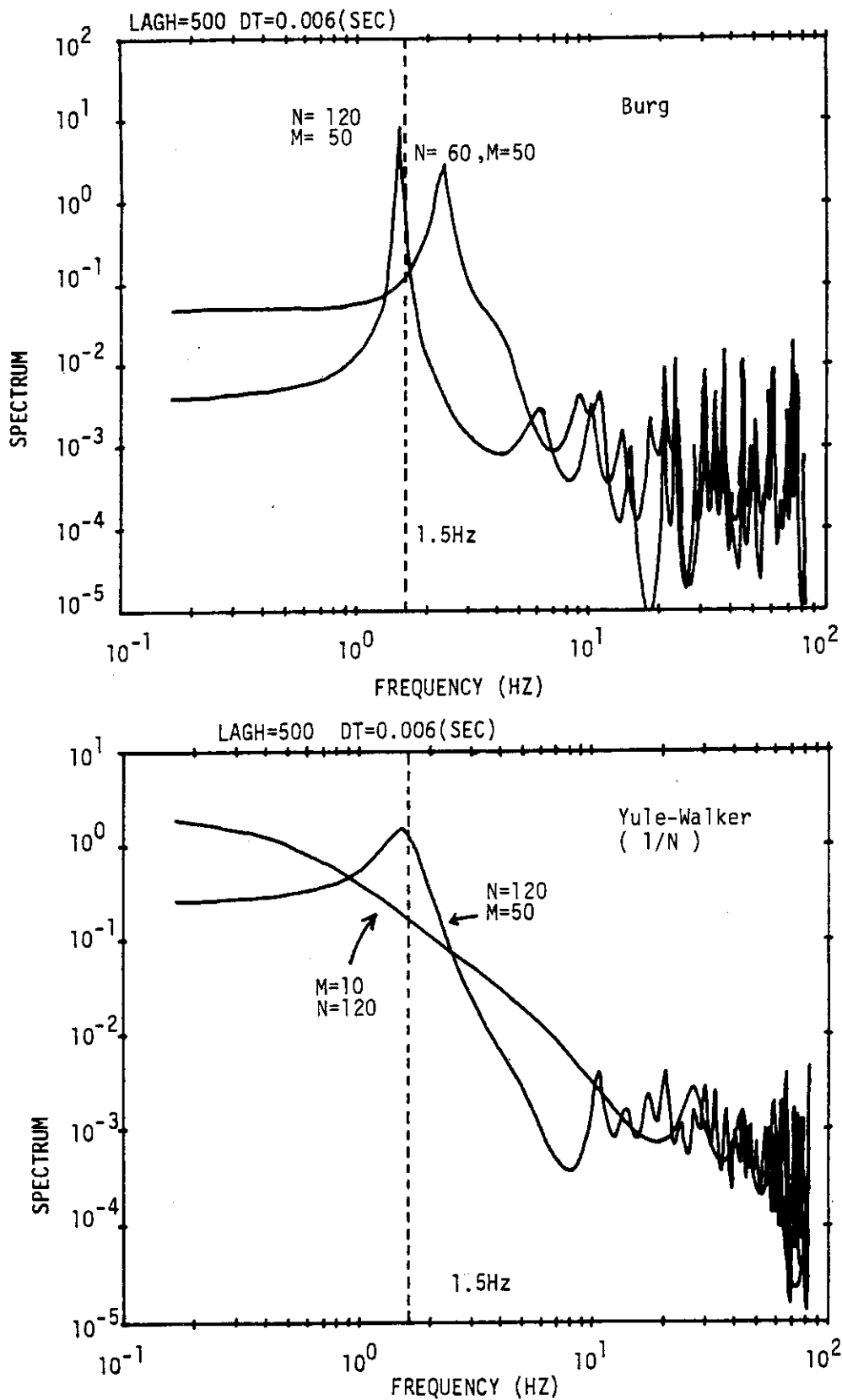


Figure 3.14 Comparison of the estimated APSD patterns between Burg method (upper) and Yule-Walker method (lower) using the simulation data "CASE-III". Upper figure is concerned with two different data lengths ($N=60, 120$). Lower figure is concerned with two different model orders ($M=10, 50$)

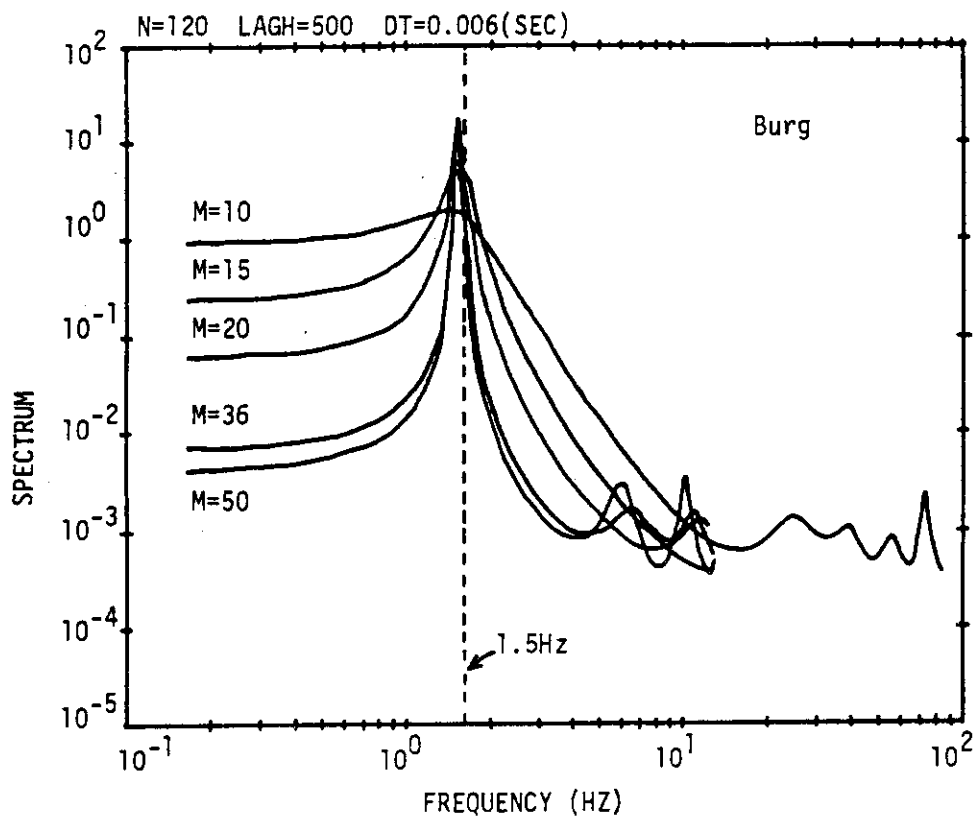


Figure 3.15 APSP patterns for various model order M using a 120-point data set sampled from the simulation data "CASE-III".
(Burg method)

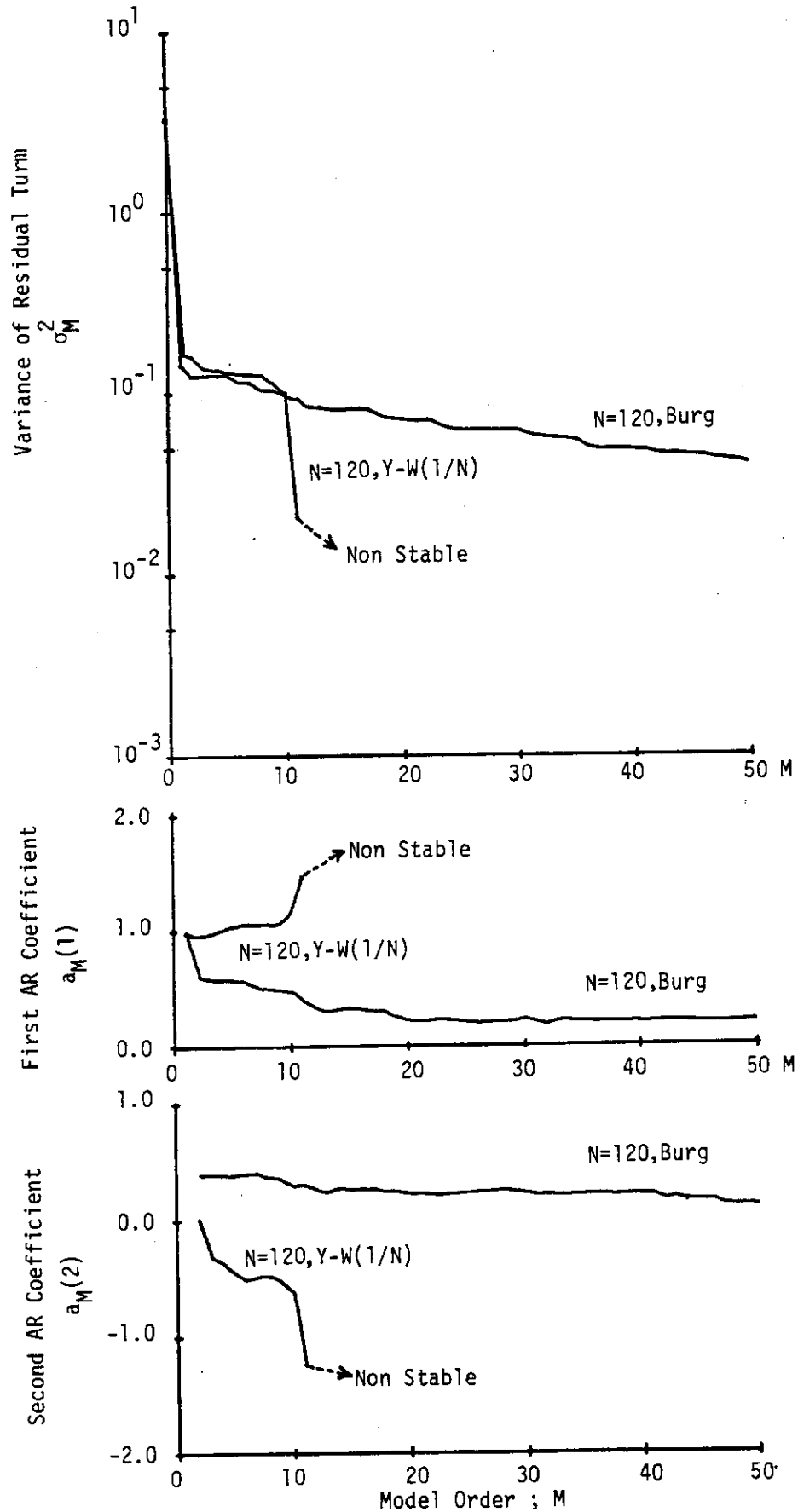


Figure 3.16 Comparison of the identified AR parameters between Burg method and Yule-Walker method for various model order M using a data set sampled from the simulation data "CASE-III".

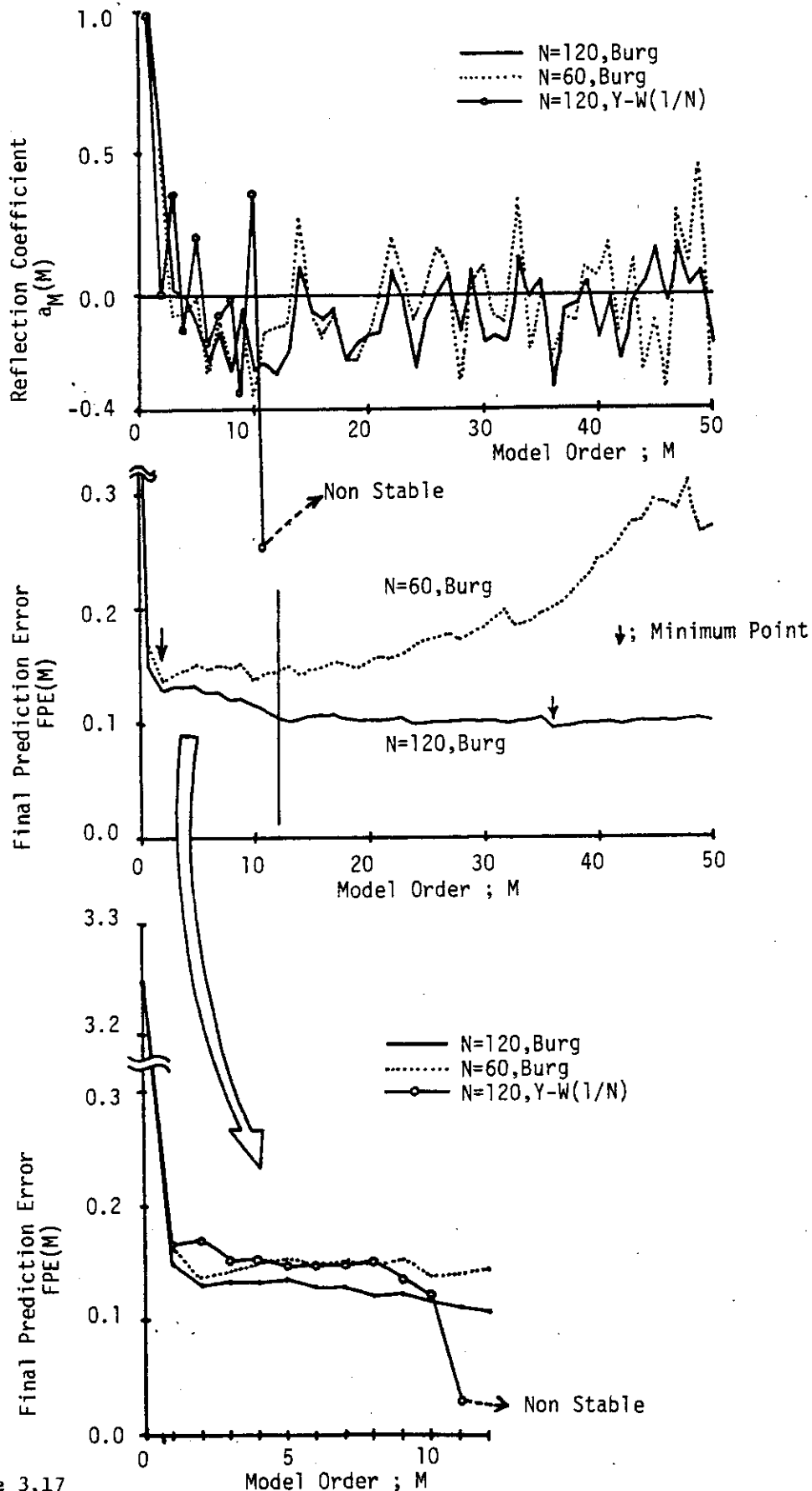
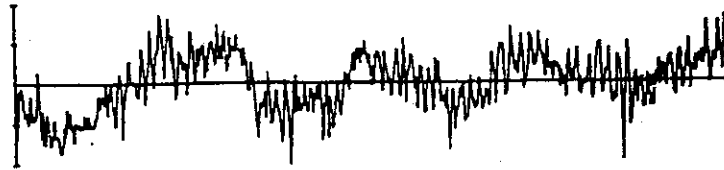
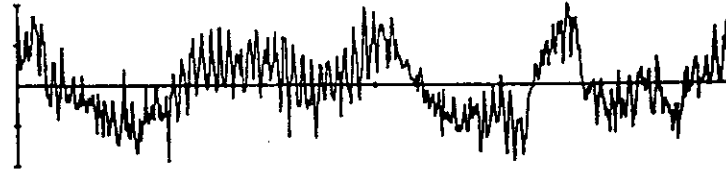


Figure 3.17

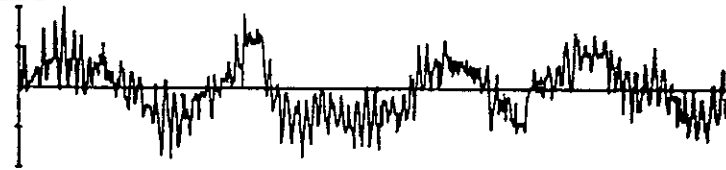
Comparison of FPE function and reflection coefficients of the identified AR models between Burg method and Yule-Walker method using the data set sampled from the simulation data "CASE-III".



DATA: MEAN=-.124E+04 SCALE=.722E+04 VARIANCE=.643E+07
PLOT FROM X(1) TO X(500)



DATA: MEAN=-.142E+04 SCALE=.757E+04 VARIANCE=.909E+07
PLOT FROM X(501) TO X(1000)



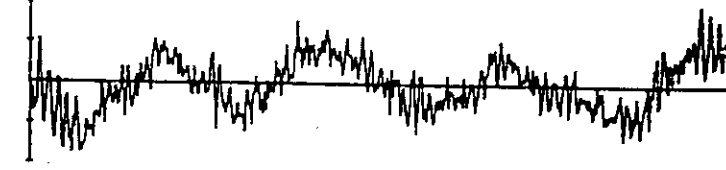
DATA: MEAN=-.145E+04 SCALE=.866E+04 VARIANCE=.877E+07
PLOT FROM X(1001) TO X(1500)



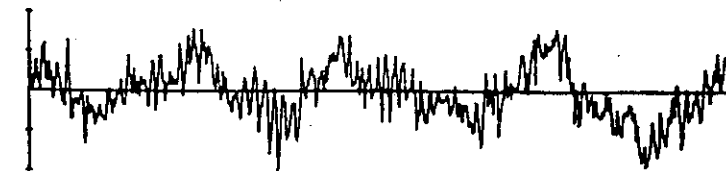
DATA: MEAN=-.590E+03 SCALE=.789E+04 VARIANCE=.590E+07
PLOT FROM X(1501) TO X(2000)



DATA: MEAN=-.148E+04 SCALE=.877E+04 VARIANCE=.972E+07
PLOT FROM X(2001) TO X(2500)



DATA: MEAN=-.166E+04 SCALE=.100E+05 VARIANCE=.105E+08
PLOT FROM X(2501) TO X(3000)



DATA: MEAN=-.202E+04 SCALE=.878E+04 VARIANCE=.962E+07
PLOT FROM X(3001) TO X(3500)

Figure 3.18 The neutron noise data sampled from Halden reactor

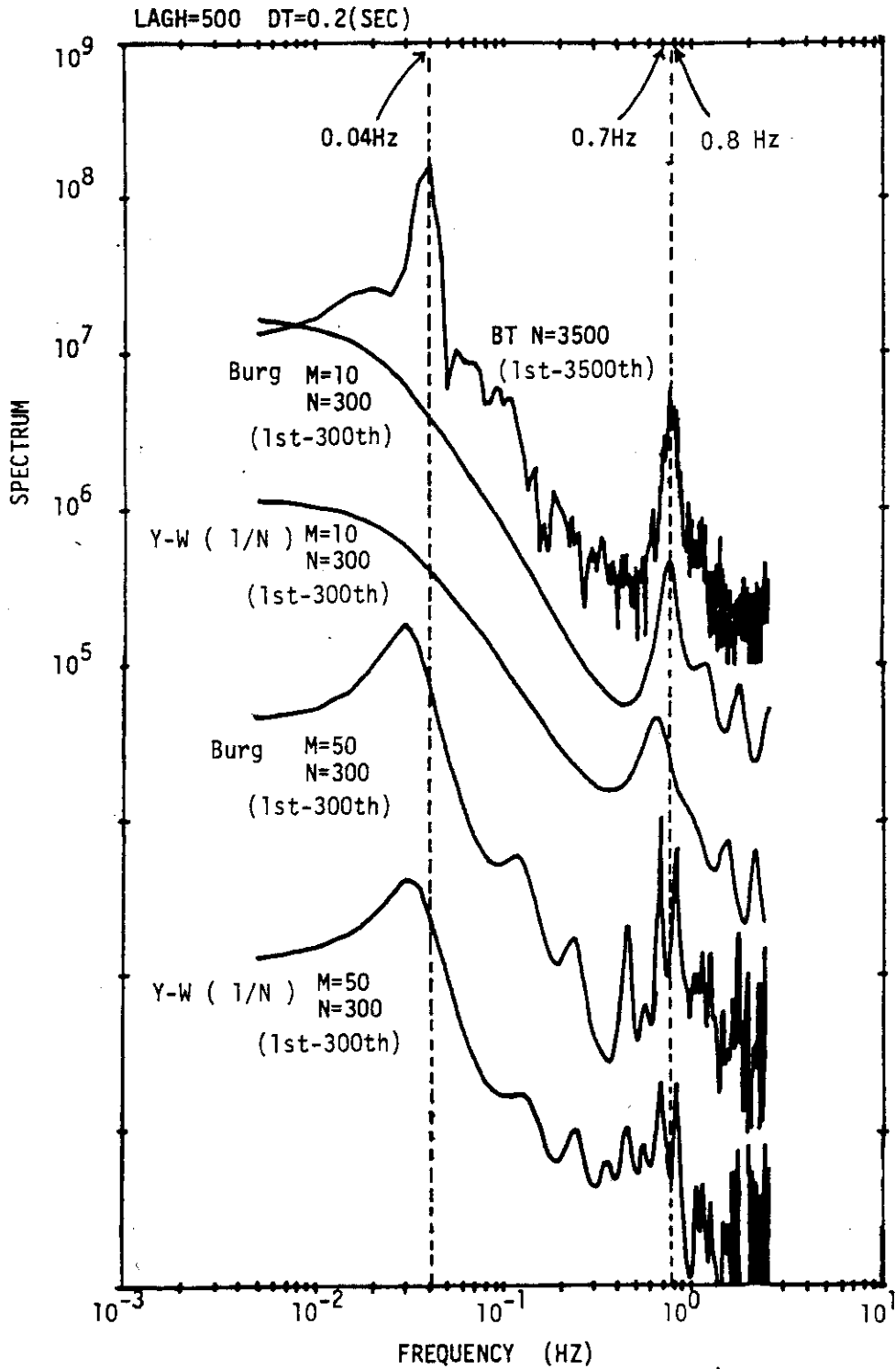


Figure 3.19 Comparison of the estimated APSD patterns of the neutron noise data sampled from Halden reactor among Blackman-Tukey, Burg and Yule-Walker method. Each APSD plotted is shifted by one decade to the adjacent ones.

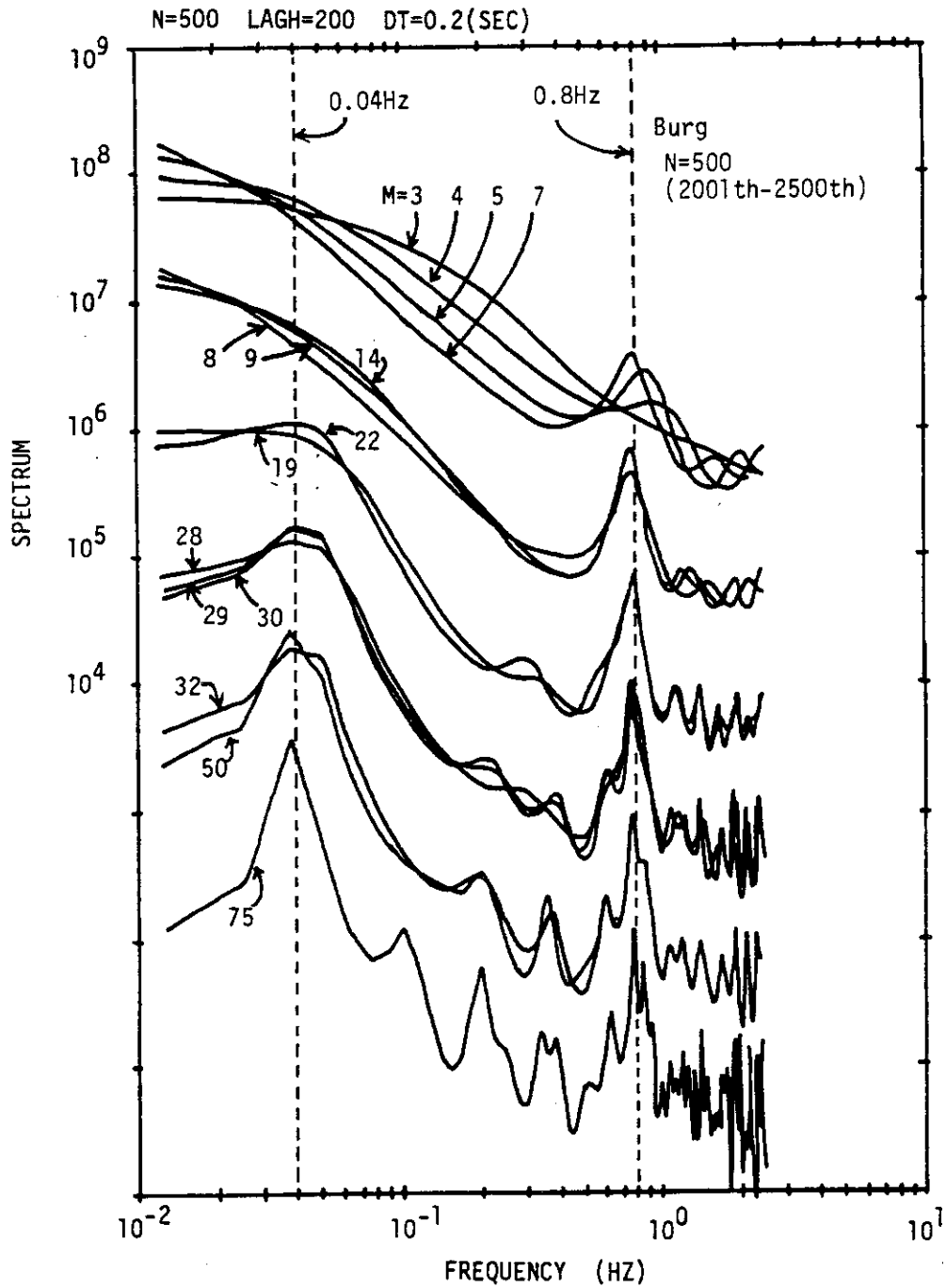


Figure 3.20 Comparison of various APSD patterns obtained by specifying different model order M in the AR modeling to neutron noise data of 500-points measured at Halden reactor. The model order when FPE became minimum was 33. (Burg method)
Each group of APSDs plotted are shifted by one decade to adjacent ones.

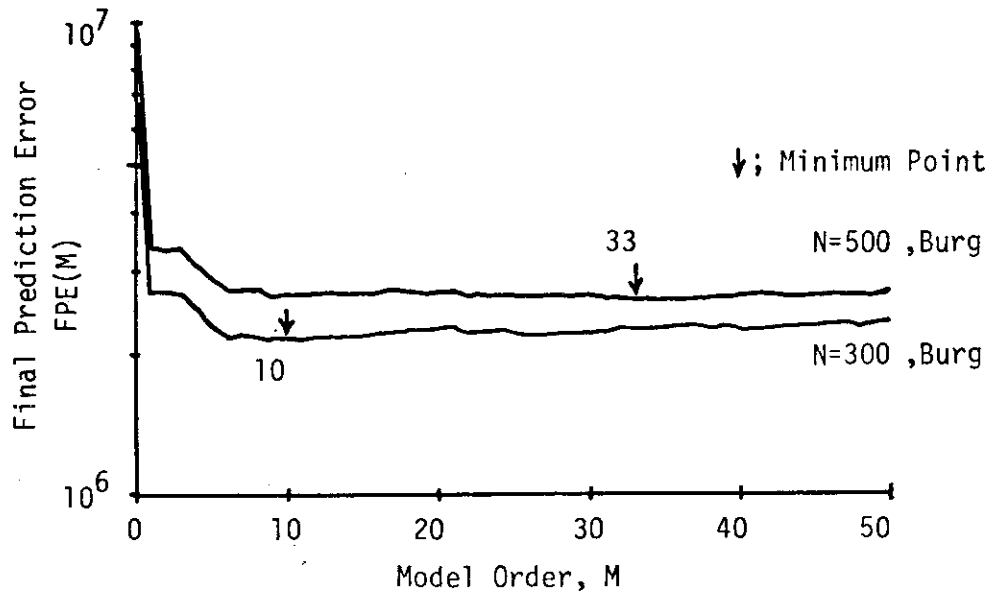


Figure 3.21 FPE functions of the identified AR models for two different data lengths (N=300, 500) of the neutron noise from Halden reactor.

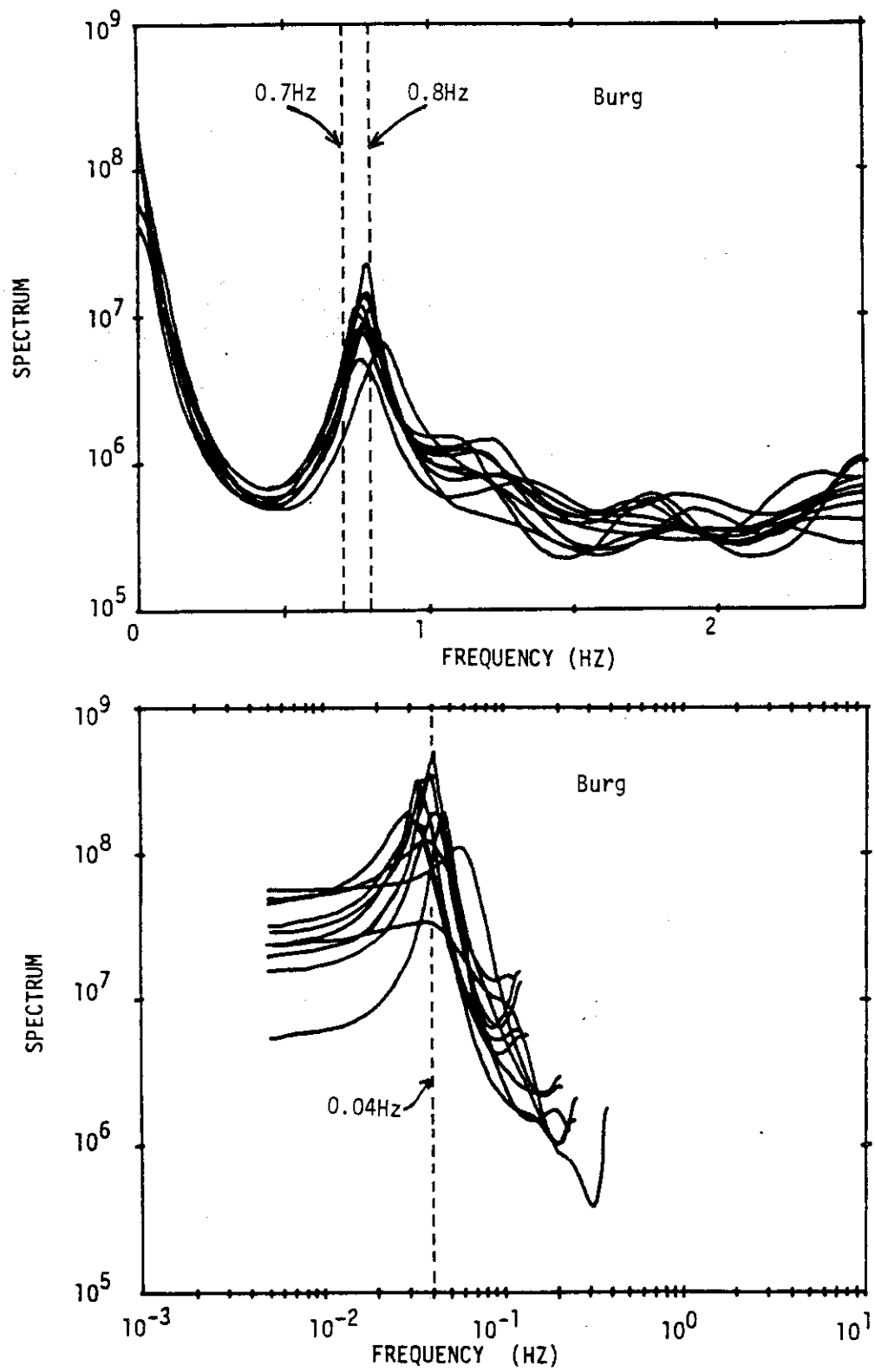


Figure 3.22 APSD patterns each estimated for a 300-point data set of the neutron noise from Halden reactor. Upper figure is for the model order $M=10$ and Lower is for $M=50$.

(Burg method)

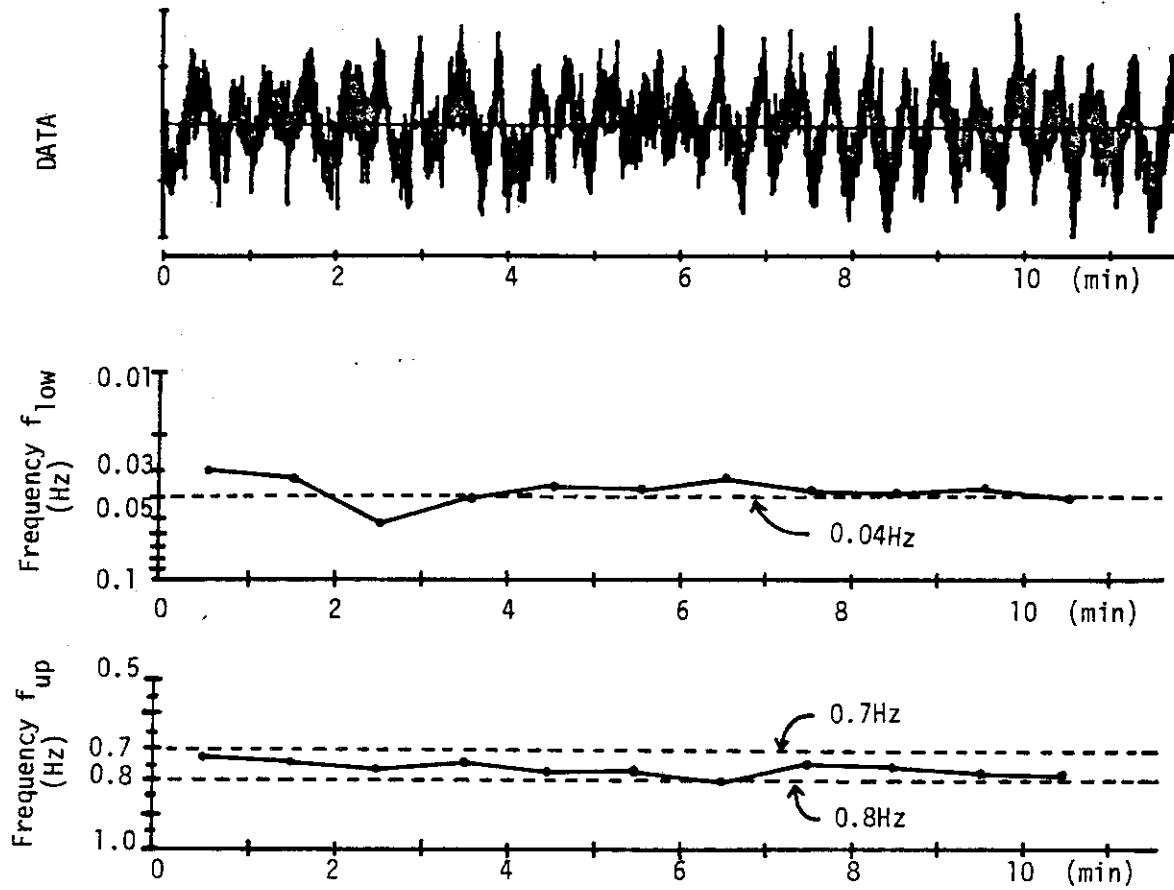


Figure 3.23 Time history of frequency point variation of two peaks f_{low} and f_{up} in APSD of the neutron noise.

Each APSD are estimated using a 300-point (1 min) data.

4. 結 論

原子炉雑音解析や異常診断に用いられる統計的解析手法は、平均操作の都合上ある程度の大きさ（サンプル数）を持ったデータが必要である。ところが、実際には十分な大きさの観測時間やサンプル数を得るのは物理的に不可能な場合や、一連の測定実験の時に検出器や記録器のトラブルにより観測データの一部に欠落が生じてしまった場合も起りうる。

さらには、観測された炉雑音データ中に種々の線スペクトルに近い成分が含まれている場合もある。原子炉内で発生する異常現象の中には、これらのスペクトル・ピークの存在自体が異常の現われであったり、このピークの形状や周波数の時間依存変動が異常の存在を示す場合もあり得る。

本報では、上記の問題に関連して、用いるデータのサンプル数が比較的少ない場合あるいは確定的周期関数を含む場合でも適用できるといわれるBurgのアルゴリズムに基づくARモデリングの手法（いわゆる最大エントロピー法；MEM）に焦点をあて、この手法の特徴、性質等をシミュレーション・スタディを通じて明らかにした。さらにこの結果に基づき、実際の原子炉雑音データに適用し解析を試みた後、原子炉異常診断への応用の可能性を考察した。

シミュレーション・スタディの結果、

- (1) Burg法の場合、データのサンプル数が少ない場合にそのサンプル数や計算開始点のデータの持つ初期位相等の条件によって、推定されたAPSDのピーク周波数がずれる問題が古くから指摘^[5]されていたが、この問題は同定計算の初期値として与えられる時系列データの分散 σ_x^2 の推定値が正しく求まらない事によるもので、これさえ正しく推定されるならばピーク周波数のずれの問題は生じない事が明らかとなった。
- (2) Burg法とYule-Walker法とを比較した場合、正弦波の様な周期関数を含むデータを取り扱うと、同定計算の中でのくりかえし計算の途中でYule-Walker法の場合は残差項の分散 σ_M^2 が負となる不安定性現象が見出だされ、これはアルゴリズムの基本となっているYule-Walker方程式を解く際に、あらかじめ予測誤差 σ_M^2 が最小となる様に反射係数 $a_M(M)$ を決めてしまう（Burg法）か否（Yule-Walker法）かによるものである事が図（Fig. 3.4）によって確かめられた。したがって、この点でもBurg法は優れている事がわかった。

また、この手法をノルウェーのHalden炉の中性子雑音データに適用し、小区間（1分）毎に分割したデータを解析する事により、従来から知られている中性子雑音のAPSD上にみられる2つのピーク^[13]の周波数が時間とともに変動しているのを取らえる事ができた。このことからさらにデータ長が大きければ、推定されたピーク周波数の時間依存変動の値を時系列データとしてBurg法に基づくAR解析を行なう事により周波数変調機構の解析が可能であると考えられる。

最後に、Burg法の場合は正しい時系列のもつ分散値 σ_x^2 の推定値を得るために、データ長の最小値が制限されているが、最近になって σ_x^2 を直接推定しなくても良い方法が提案^[11]されており、さらに結果を得るに必要なデータ長は小さくできる可能性が残されている。いずれにしても、結果を得るに必要なデータ長が小さくてすむならば、炉雑音解析や異常診断に新しい角度か

らの解析が可能となるであろう。

謝 辞

本研究の遂行および報告書の作成に当り、有益な助言を与えて下さった篠原慶邦原子炉制御研究室長に謝意を表します。

らの解析が可能となるであろう。

謝 辞

本研究の遂行および報告書の作成に当り、有益な助言を与えて下さった篠原慶邦原子炉制御研究室長に謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) 林 光二, 尾熊律雄, 渡辺光一; 統計的解析手法に基づく原子炉システムの動特性解析および異常診断用コード STAR, JAERI - M 9761 (1981)
- (2) J.P. Burg ; Maximum Entropy Spectral Analysis (1967), Modern Spectrum Analysis (edited by D.G. Childers) p.34, IEEE Press (1978)
- (3) J.P. Burg ; A New Analysis Technique for Time Series Data (1968),
ibid. p.42
- (4) T.J. Ulrych ; Maximum Entropy Power Spectrum of Truncated Sinusoids,
Journal of Geophysical Research, Vol.77 p.1396 (1972)
- (5) W.Y. Chen, G.R. Stegen ; Experiments with Maximum Entropy Spectra
of Sinusoids, ibid., Vol.79 p.3019, (1974)
- (6) H.R. Radoski, P.F. Fougere, E.J. Zawalick ; A Comparison of Power
Spectral Estimates and Applications of the Maximum Entropy Method,
ibid., Vol.80 p.619 (1975)
- (7) T.J. Ulrych, T.N. Bishop ; Maximum Entropy Spectral Analysis and
Autoregressive Decomposition (1975), Modern Spectrum Analysis p.54,
IEEE Press (1978)
- (8) 赤池弘次, 中川東一郎; ダイナミック・システムの統計的解析と制御, サイエンス社
(1972)
- (9) 日野幹雄; スペクトル解析, 朝倉書店 (1977)
- (10) 添田 喬, 中溝高好, 大松 繁; 信号処理の基礎と応用, 日新出版 (1979)
- (11) L. Marple ; A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm, IEEE
Vol.ASSP-28 p.441 (1980)
- (12) G.E.P. Box, G.M. Jenkins ; Time Series Analysis forecasting and
control, Holden-Day (1970)
- (13) R. Oguma ; Investigation of Resonant Power Oscillation in Halden
Boiling Water Reactor Based on Noise Analysis, Journal of Nuclear
Science and Technology, Vol.17 p.677 (1980)