JAERI-M
82-035

混成対数正規分布に関連した数値計算法

1982年4月

熊澤　蕃・島崎　潤也・沼宮内弼雄

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M レポートは，日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは，日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319—11 茨城県那珂郡東海村）あて，お申しこしください。なお，このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319—11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319—11, Japan.

編集兼発行　日本原子力研究所
印　　刷　日立高速印刷株式会社

JAERI－M 82－035

混成対数正規分布に関連した数値計算法

日本原子力研究所東海研究所保健物理部
熊澤　蕃・島崎　潤也[+]・沼宮内弼雄

（1982年3月23日受理）

職業被曝の解析法を確立する一環として，混成対数正規分布に関連した数値計算法と計算プログラムを開発した。このプログラムにより混成対数正規分布のパラメータの決定，分布関数，パーセント点，中央値，最頻値の計算，積率，平均値，分散，幾何平均値，幾何標準偏差の計算，さらに積率分布の分布関数，パーセント点，中央値，最頻値の計算ができる。計算プログラムはすべてサブルーチン形式であり，必要な補助プログラムも含めることにより混成対数正規分布に関して完備したプログラムパッケージになっている。これにより，実測データから混成対数正規分布の各パラメータを決定し，被曝線量分布や集団線量分布に対する各種の統計量の計算が簡単化された。

＋原子炉工学部

JAERI-M 82-035

Numerical Calculation Methods Relating to Hybrid Lognormal Distributions

Shigeru KUMAZAWA, Junya SHIMAZAKI[+] and Takao NUMAKUNAI
Division of Health Physics, Tokai Research Establishment, JAERI

(Received March 23, 1982)

This report presents numerical calculation methods and computer programs related to hybrid lognormal distributions, which are applied to occupational exposure analysis. These are (1) an estimation of three parameters of hybrid lognormal distributions, (2) calculations of distribution function, percentile, median and mode of the distribution, (3) calculations of moments, mean, variance, geometric mean and geometric standard deviation, and (4) calculations of distribution function, percentile, median and mode of the moment distributions.

All computer programs are in the form of subroutines or function subprograms and form a complete program package for hybrid lognormal distributions, including auxiliary programs required. The program package facilitates the estimation of parameters of hybrid lognormal distributions from the observations and calculations of various statistical characteristics to describe the individual dose distributions and collective dose distributions as a function of individual dose.

Keywords : Hybrid Lognormal, Occupational Exposure, Lognormal, Numerical Calculation, Estimation of Parameters, Distribution Function, Percentile, Median, Mode, Moment, Mean, Variance, Moment Distribution, Newton's Method, Gauss-Hermite Integral, Gauss-Legendre Integral

---

+ Division of Reactor Engineering, Tokai Research Establishment, JAERI

目　　次

Contents

1. はじめに

放射線による職業被曝の統計的特徴を記述するため，著者らは混成対数正規分布（Hybrid Lognormal Distribution）と名付けた確率分布モデルを提案した[1]。混成対数正規分布は低い線量領域において対数正規分布則性を示す一方，高い線量領域において正規分布則性を示すのが特徴である。これは高い値の発生を抑制した場合に生ずる，対数正規分布の歪んだ分布形の一つを示している。

本報では，混成対数正規分布の性質や適用例を簡単に示した後，この分布のパラメータ推定法，分布関数，パーセント点，最頻値，中央値，平均値，分散，幾何平均値，幾何標準偏差などの計算法とそれらの計算プログラムについて述べる。また，混成対数正規分布の原点のまわりの積率や積率分布（the moment distributions）[2] に関する計算法と計算プログラムも示す。この他，以上の計算プログラムを動かすのに必要な補助プログラムも示すことによって，本報が混成対数正規分布に関する計算プログラムパッケージとして完結するように配慮した。

本報は第2回応用統計シンポジウムの予稿[3] を改稿したものである。

2. 混成対数正規分布とその性質

2.1 混成対数正規分布の定義

正値の確率変数Xに対し，

$$Y = \ln \rho X + \rho X, \quad (\rho > 0) \tag{1}$$

と変数変換を行い，Yが平均値μ，分散σ^2 の正規分布に従うとき，この確率分布をXに関する混成対数正規分布（Hybrid Lognormal Distribution，略してHLN分布とも記すことにする）と定義する。この確率分布関数を$\Omega(x \mid \rho, \mu, \sigma^2)$と表わすと，これは次のようになる。

$$\Omega(x \mid \rho, \mu, \sigma^2) = \int_0^x \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(\frac{1}{\rho x}+1\right) e^{-\frac{(\ln \rho x + \rho x - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx, \tag{2}$$

$$(0 < x < \infty, \quad \rho > 0, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0)$$

式(2)の積分変数を$t = \rho x$ と置き換えると，

$$\Omega(x \mid \rho, \mu, \sigma^2) = \Omega(\rho x \mid \mu, \sigma^2) \tag{3}$$

が成立する。ここで，

$$\Omega(\rho x \mid \mu, \sigma^2) = \int_0^{\rho x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(\frac{1}{t}+1\right) e^{-\frac{(\ln t + t - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt. \tag{4}$$

1. はじめに

放射線による職業被曝の統計的特徴を記述するため，著者らは混成対数正規分布（Hybrid Lognormal Distribution）と名付けた確率分布モデルを提案した[1]。混成対数正規分布は低い線量領域において対数正規分布則性を示す一方，高い線量領域において正規分布則性を示すのが特徴である。これは高い値の発生を抑制した場合に生ずる，対数正規分布の歪んだ分布形の一つを示している。

本報では，混成対数正規分布の性質や適用例を簡単に示した後，この分布のパラメータ推定法，分布関数，パーセント点，最頻値，中央値，平均値，分散，幾何平均値，幾何標準偏差などの計算法とそれらの計算プログラムについて述べる。また，混成対数正規分布の原点のまわりの積率や積率分布（the moment distributions）[2] に関する計算法と計算プログラムも示す。この他，以上の計算プログラムを動かすのに必要な補助プログラムも示すことによって，本報が混成対数正規分布に関する計算プログラムパッケージとして完結するように配慮した。

本報は第2回応用統計シンポジウムの予稿[3] を改稿したものである。

2. 混成対数正規分布とその性質

2.1 混成対数正規分布の定義

正値の確率変数Xに対し，

$$Y=\ln \rho X+\rho X, \quad (\rho>0) \tag{1}$$

と変数変換を行い，Yが平均値μ，分散σ^2 の正規分布に従うとき，この確率分布をXに関する混成対数正規分布（Hybrid Lognormal Distribution，略してHLN分布とも記すことにする）と定義する。この確率分布関数を$\Omega(x|\rho,\mu,\sigma^2)$と表わすと，これは次のようになる。

$$\Omega(x|\rho,\mu,\sigma^2)=\int_0^x \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(\frac{1}{\rho x}+1\right)e^{-\frac{(\ln \rho x+\rho x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx, \tag{2}$$

$$(0<x<\infty,\ \rho>0,\ -\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0)$$

式(2)の積分変数を$t=\rho x$ と置き換えると，

$$\Omega(x|\rho,\mu,\sigma^2)=\Omega(\rho x|\mu,\sigma^2) \tag{3}$$

が成立する。ここで，

$$\Omega(\rho x|\mu,\sigma^2)=\int_0^{\rho x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(\frac{1}{t}+1\right)e^{-\frac{(\ln t+t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{4}$$

パラメータμ，σ^2 の正規分布，対数正規分布，混成対数正規分布を，それぞれ$N(\mu,\sigma^2)$，$\Lambda(\mu,\sigma^2)$，$\Omega(\mu,\sigma^2)$ と表わし，$\mu=0$，$\sigma^2=1$としたこれら3つの分布の密度関数の比較例をFig.1に示す。混成対数正規分布$\Omega(0,1)$は他の2つに比べ最頻値における頻度が大きい一方，値の大きい領域における頻度はいずれのグラフよりも早く減少する。また，混成対数正規分布は対数正規分布に比べ，最頻値，中央値，平均値が互いに接近している。

混成対数正規分布の適用例をFig.2に示す。これは米国原子力規制委員会報告による1974年度の職業被曝データ（85,097名）を混成対数正規確率紙にプロットしたものである。図からグラフの直線性がよいので，このデータは混成対数正規分布に適合すると見られる。これに対して，同じデータを正規分布および対数正規分布にあてはめた例をFig.3の黒丸および白丸で示す。図から，いずれもグラフの直線性が悪いので，このデータは正規分布にも対数正規分布にも適合しないといえる（詳細は文献 1)参照）。

2.2 積率，平均，分散，幾何平均・標準偏差

混成対数正規分布$\Omega(\rho,\mu,\sigma^2)$の原点のまわりのj次の積率$\mu'_j$ は，式(3)を用いて次のように表わされる。

$$\mu'_j=\rho^{-j}\phi_j(\mu,\sigma), \tag{5}$$

$$\phi_j(\mu,\sigma)=\int_0^\infty t^j\,d\Omega(t\mid\mu,\sigma^2), \tag{6}$$

$$d\Omega(t\mid\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(\frac{1}{t}+1\right)e^{-\frac{(\ln t+t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{7}$$

式(5)から，混成対数正規分布$\Omega(\rho,\mu,\sigma^2)$の平均値$\xi$，分散$\eta^2$ は次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\rho^{-1}\phi_1(\mu,\sigma)\\ \eta^2&=\rho^{-2}\{\phi_2(\mu,\sigma)-\phi_1^2(\mu,\sigma)\}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

混成対数正規分布$\Omega(\rho,\mu,\sigma^2)$の幾何平均値$\mu_g$，幾何標準偏差$\sigma_g$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\ln\rho\mu_g&=\int_0^\infty\ln t\,d\Omega(t\mid\mu,\sigma^2)\\ &=\int_0^\infty(\mu+\sigma z-t)\,d\Omega(t)\\ &=\mu-\phi_1\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(\ln\sigma_g)^2&=\int_0^\infty(\ln t-\ln\rho\mu_g)^2\,d\Omega(t)\\ &=\sigma^2+\phi_2-\phi_1^2-2\sigma\int_0^\infty tz\,d\Omega(t)\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，

$$z=(\ln t+t-\mu)/\sigma, \tag{11}$$

であり，また，ϕ_1，ϕ_2，$d\Omega(t)$はそれぞれ$\phi_1(\mu,\sigma)$，$\phi_2(\mu,\sigma)$，$d\Omega(t\mid\mu,\sigma^2)$の省略形である。これより，

$$\left.\begin{aligned}\mu_g &= \exp[\mu-\phi_1]/\rho,\\ \sigma_g &= \exp[\{\sigma^2+\phi_2-\phi_1^2-2\sigma\int_0^\infty t z\, d\Omega(t)\}^{\frac{1}{2}}].\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

2.3 中央値，パーセント点，最頻値

混成対数正規分布$\Omega(\rho,\mu,\sigma^2)$の中央値$\tilde{x}$は，式(11)で$z=0$と置いて求まる。すなわち，

$$\ln \rho\tilde{x}+\rho\tilde{x}=\mu \tag{13}$$

である。ここで，$y=\ln t+t$とするとき，この逆関数$hyb^{-1}(y)$を定義する。

$$\left.\begin{aligned}y &= \ln t+t\\ t &= hyb^{-1}(y)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

このとき，中央値$\tilde{x}$は次のように表わされる。

$$\tilde{x}=hyb^{-1}(\mu)/\rho \tag{15}$$

<u>パーセント点，t_p</u>

混成対数正規分布のパーセント点の計算式を示す。中央値$\tilde{x}$は50パーセント点に対応する。標準正規分布の分布関数を$\Phi(z)$，それに対応する100Pパーセント点をz_pとする。このとき

$$\Omega(t\mid\mu,\sigma^2)=\Phi\left(\frac{\ln t+t-\mu}{\sigma}\right) \tag{16}$$

が成立するので，混成対数正規分布の分布関数は$\Phi(z)$を用いて計算できる。また，この分布のパーセント点t_pはz_pから次のように決定される。

$$z_p=\frac{\ln t_p+t_p-\mu}{\sigma} \tag{17}$$

から，hyb^{-1}関数を用いて

$$t_p=hyb^{-1}(\mu+\sigma z_p) \tag{18}$$

<u>最頻値，x_m</u>

混成対数正規分布の最頻値$\tilde{x}_m$は，$t_m=\rho x_m$とすると，$\Omega''(t_m\mid\mu,\sigma^2)=0$から求められる。すなわち，

$$\frac{\ln t_m+t_m-\mu}{\sigma^2}=-\frac{1}{(1+t_m)^2} \tag{19}$$

ただし，式(19)を満足するt_mが2個以上存在するときは$\Omega'(t_m,\mid\mu,\sigma^2)$の最大値を与えるものを最頻値とする。

式(19)を満足するt_mの個数がパラメータμ，σ^2の条件によってどの様に変化するかを調べ，2個以上存在する条件式を求める。

式(19)において，tの定義域が$0<t<\infty$であることを考慮すると，最頻値t_mは次の条件を満す。

$$\left.\begin{array}{l}\mu-\sigma^2<\ln t_m+t_m<\mu \text{ すなわち} \\ hyb^{-1}(\mu-\sigma^2)<t_m<hyb^{-1}\mu\end{array}\right\} \tag{20}$$

式(19)を変形してパラメータμ，σ^2に対する解t_mを調べる。式(19)から

$$\sigma^2=-(1+t_m)^2(\ln t_m+t_m-\mu). \tag{21}$$

$\frac{d\sigma^2}{dt_m}=0$ の条件から

$$\mu=\ln t_m+t_m+\frac{(1+t_m)^2}{2t_m}. \tag{22}$$

さらに $\frac{d\mu}{dt_m}=0$ から

$$\frac{d\mu}{dt_m}=\frac{(3t_m-1)(t_m+1)}{2t_m^2}=0 \qquad t_m=\frac{1}{3}. \tag{23}$$

従って式(22)の曲線はFig. 5に示すように，$t_m=\frac{1}{3}$のとき最小値$\mu=3-\ln 3$をとる。

μが次の条件式

$$\mu\leq 3-\ln 3 \tag{24}$$

を満足するとき，式(22)から定まるt_mは1個か0個であり，式(21)右辺の曲線は∞から$-\infty$まで単調に変化して，式(21)を満足するt_mはσ^2のどのような値に対しても1個定まる。よって不等式(24)がσ^2のいかんにかかわらず混成対数正規分布の単峰性を示す条件式である。

式(24)を満足しないとき，式(22)を満足するt_mは2個存在し，それらをt_1，t_2とする（$t_1<t_2$）。このとき，式(21)を満足するt_m（分布の極値を与える点）の個数はσ^2の条件によって1～3個になる。3個存在するσ^2の条件式は次のように求められる。式(21)右辺で$t_m=t_1$，t_2と置いたときのσ^2の値をそれぞれσ_1^2，σ_2^2とすると，式(22)を用いて

$$\sigma_1^2=\frac{(1+t_1)^4}{2t_1}, \qquad \sigma_2^2=\frac{(1+t_2)^4}{2t_2}, \tag{25}$$

となる。これより，3個の極値が存在する条件はσ^2が開区間（σ_1^2，σ_2^2）に存在することである。

以上をまとめると，混成対数正規分布が多峰性（2つの山）を示すパラメータμ，σ^2の条件は

$$\left.\begin{array}{l}\mu>3-\ln 3, \text{ かつ} \\ \sigma_2^2>\sigma^2>\sigma_1^2,\end{array}\right\} \tag{26}$$

である。これ以外の場合は混成対数正規分布は単峰性を示す。多峰性を示す場合の最頻値t_mは式(21)で求めた3つの値t'_1，t'_2，t'_3（$t'_1<t'_2<t'_3$）のうち，$\Omega'(t\mid\mu,\sigma^2)$を最大にする$t'_1$または$t'_3$とする。

2.4 積率分布

確率変数Xは正値ゆえ，混成対数正規分布の原点のまわりのj次の積率μ'_jに対し，

$$\Omega_j(x \mid \rho, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\mu'_j}\int_0^x x_j \, d\Omega(x \mid \rho, \mu, \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{\phi_j}\int_0^{\rho x} t^j \, d\Omega(t \mid \mu, \sigma^2) \qquad (27)$$

という分布関数が定義できる。これを混成対数正規分布のj次の積率分布と呼ぶことにする。式(25)から，積率分布は次のようにも表わされる。

$$\Omega_j(x \mid \rho, \mu, \sigma^2) = \Omega_j(\rho x \mid \mu, \sigma^2) \qquad (28)$$

被曝線量の解析においては個人被曝線量区間ごとの集団線量の寄与割合を計算する上で，1次の積率分布が重要な意味を持つ。

2.5 積率分布の中央値，パーセント点，最頻値

積率分布$\Omega_j(\rho, \mu, \sigma^2)$の中央値$\tilde{x}_j$は$\Omega_j(x \mid \rho, \mu, \sigma^2) = 0.5$を満たすxについての解である。また，この100Pパーセント点x_{jp}，すなわちρt_{jp}は$\Omega_j(x \mid \rho, \mu, \sigma^2) = \Omega_j(\rho x \mid \mu, \sigma^2) = P$をxまたは$\rho x$について解いたものである。

積率分布の最頻値

確率分布関数の最頻値と同様にj次の積率分布関数に対しても最頻値が計算される。混成対数正規分布のj次の積率分布に対する最頻値x_{mj}は$t_{mj} = \rho x_{mj}$とすると，$\Omega''_j(t \mid \mu, \sigma^2) = 0$から求められる。すなわち，

$$j - 1 + j t_{mj} - \frac{\ln t_{mj} + t_{mj} - \mu}{\sigma^2}(1 + t_{mj})^2 = 0 . \qquad (29)$$

たたし，式(29)を満足するt_{mj}が2個以上存在するときは$\Omega'_j(t \mid \mu, \sigma^2)$の最大値を与えるものを最頻値とする。

式(29)を満足するt_{mj}の個数はパラメータμ，σ^2およびjによって変化する。式(29)を変形して

$$\frac{\ln t_{mj} + t_{mj} - \mu}{\sigma^2} = \frac{j - 1 + j t_{mj}}{(1 + t_{mj})^2} . \qquad (30)$$

式(30)の右辺をt_{mj}で微分して，$j \geq 2$の場合次の不等式が成立する。

$$\frac{2 - j - j t_{mj}}{(1 + t_{mj})^3} < 0, \quad (j \geq 2) \qquad (31)$$

すなわち，$j \geq 2$のとき，式(30)の右辺の関数は単調減少関数である。他方，式(30)の左辺の関数はt_{mj}について単調増加関数で$-\infty$から∞まで変化するゆえ，$j \geq 2$に対しては，式(30)を満足するt_{mj}はただ1個存在する。しかし，$j = 1$の場合，j次の積率分布関数はパラメータμ，σ^2の条件によって，多峰性を示す。従って，分布関数のときと同様な考察をして，多峰性を

示すパラメータ条件を求める。

式(30)で j = 1 と置き，次のように整理する。

$$\frac{\ln t_{m1} + t_{m1} - \mu}{\sigma^2} = \frac{t_{m1}}{(1+t_{m1})^2} \tag{32}$$

$0 < t < \infty$ を考慮すると，最頻値 t_{m1} は次の条件を満す。

$$\left.\begin{array}{l} \mu < \ln t_{m1} + t_{m1} < \mu + \frac{1}{4}\sigma^2 \quad \text{すなわち} \\ hyb^{-1}\mu < t_{m1} < hyb^{-1}(\mu + \frac{1}{4}\sigma^2) \end{array}\right\} \tag{33}$$

式(32)から，σ^2 について解いて

$$\sigma^2 = \frac{(1+t_{m1})^2}{t_{m1}}(\ln t_{m1} + t_{m1} - \mu) \tag{34}$$

$\frac{d\sigma^2}{dt_{m1}} = 0$ の条件から

$$\mu = -\frac{(1+t_{m1})^2}{(1-t_{m1})} + \ln t_{m1} + t_{m1} \quad . \tag{35}$$

さらに $\frac{d\mu}{dt_m} = 0$ から

$$\frac{d\mu}{dt_{m1}} = \frac{(1+t_{m1})(1-5t_{m1}+2t_{m1}^2)}{t_{m1}(1-t_{m1})^2} = 0$$

$$\therefore t_{m1} = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \tag{36}$$

従って，式(35)の曲線は $0 < t_{m1} < 1$ において上に凸の形であり，$t_{m1} = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ のとき最大値 $\mu = \ln\frac{5-\sqrt{17}}{4} + \frac{9-3\sqrt{17}}{2}$ をとる。（Fig.6 参照。$-\mu$ の表示に注意）

従って μ が次の条件式

$$\mu < \ln\frac{5-\sqrt{17}}{4} + \frac{9-3\sqrt{17}}{2} \tag{37}$$

を満すとき，式(35)を満足する t_{m1} は2個存在し（それらを t'_1，t'_2 とする $t'_1 < t'_2$），最終的に式(34)を満足する t_{m1} の個数は σ^2 の条件によって1～3個に変化する。式(35)右辺の t_{m1} を t'_1，t'_2 で評価した値をそれぞれ $\sigma_1^{2\prime}$，$\sigma_2^{2\prime}$ として

$$\sigma_1^{2\prime} = \frac{(1+t'_1)^4}{t'_1(1-t'_1)} \quad , \quad \sigma_2^{2\prime} = \frac{(1+t'_2)^4}{t'_2(1-t'_2)} \quad , \tag{38}$$

σ^2 が開区間（$\sigma_1^{2\prime}$，$\sigma_2^{2\prime}$）にあれば積率分布の極値の数は3個となり，分布は2つの山をもつ。

以上をまとめると j 次の積率分布が多峰性（2つの山）を示すパラメータ μ，σ^2 の条件は

j = 1　　かつ

$$\mu < \ln \frac{5-\sqrt{17}}{4} + \frac{9-3\sqrt{17}}{2} \quad \text{かつ} \tag{39}$$

$$\sigma_1^{2\prime} < \sigma^2 < \sigma_2^{2\prime}$$

である。これ以外のパラメータの条件下では積率分布は単峰性を示す。多峰性を示す場合の最頻値 t_{m1} は式(35)から求めた t_{m1} の値のうち，$\Omega'(t \mid \mu, \sigma^2)$ を最大にするものから決定する。

3. 数 値 計 算 法

3.1 パラメータの推定

値の小さい順に並べられたn個のデータ x_i，（$i=1,2,3,\cdots,n$）から，混成対数正規分布のパラメータ ρ，μ，σ^2 を推定するため，

$$z=\frac{\ln\ \rho x+\rho x-\mu}{\sigma}=\alpha\ln\ x+\beta x+\gamma \tag{40}$$

と置く。また，正規分布の累積確率を

$$P_i=\frac{i-0.375}{n+0.250}\ ^{4),5)} \tag{41}$$

から求め，この $100P_i$ パーセント点を z_i とするとき，n組のデータの対（x_i，z_i）が得られる。このデータ対から式(40)の関係式を用いて，最小2乗法により α，β，γ が求められる。これより，分布の3つのパラメータ ρ，μ，σ^2 は次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\frac{\beta}{\alpha}\\ \mu&=\ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}\\ \sigma^2&=\frac{1}{\alpha^2}\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

式(40)の代りに，

$$\ln\ \rho x+\rho x=\mu+\sigma z \tag{43}$$

という関係式に非線形最適化プログラム[6]を適用して，ρ，μ，σ^2 を推定することもできる。しかし，信頼区間を付けたパラメータの推定を行うには，別の方法を検討する必要がある[7]。本報では，計算法の簡便さの点からは式(40)の方が便利であるので，混成対数正規分布則性のよいデータに対しては，簡便法として式(40)を適用することにする。

3.2 ln t +t の逆関数

式(14)に示す $y=\ln\ t+t$ の逆関数 $hyb^{-1}y$ を hybrid inverseと呼ぶことにする。この関数は混成対数正規分布の中央値を式(15)のように求めたり，パーセント点 t_p を式(18)のように求めたりする上で便利な関数である。

$hyb^{-1}y$ は，Fig.4に示すように，$y\to-\infty$ のとき e^y に漸近する一方，$y\to+\infty$ のとき y と近似できる関数である。y の全領域において相対誤差を 10^{-12} 以下とする $hyb^{-1}y$ の計算法として，次の手順を示す。

(1) $y\leq-27.66$ のとき，$hyb^{-1}y\fallingdotseq e^y$ とする。

(2) $-27.66<y\leq-13.48$ のとき，$hyb^{-1}y\fallingdotseq e^y/(1+e^y)$。

(3) $y > 1.52 \times 10^{+13}$ のとき，$hyb^{-1}y \fallingdotseq y$ とする。

(4) $-13.48 < y \leq 1.52 \times 10^{+13}$ のとき，初期値 t_0 を下表のようにとり，Newtonの反復法，

$$\left.\begin{aligned} t_{k+1} &= t_k + \varepsilon_k \\ \varepsilon_k &= \frac{t_k}{1+t_k}(y - \ln t_k - t_k) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

により，$|\varepsilon_k| \leq 10^{-6}$ とする。

y	≤ -0.6	$-0.6 \sim 0.5$	$0.5 \sim 2$	$2 \sim 4$	$4 \sim 6$	$6 \sim 9$	$9 <$
初期値 t_0	e^y	0.56	1	2.2	3.6	5.8	$y - 2.08$

3.3 分布に関する計算

混成対数正規分布の分布関数，パーセント点，中央値および最頻値の計算法を示す。分布関数 $\Omega(t \mid \mu, \sigma^2)$ は式(16)から標準正規分布を用いて求める。パーセント点 t_p，中央値 $\tilde{t}$ は計算法が確定した前記の hyb^{-1} 関数によって，式(18)および式(15)から求める。最頻値 t_m の計算は式(19)を解くことであるが，この計算は以下のように工夫して処理した。

<u>最頻値 t_m の計算</u>

式(19)の t_m の代りに，変数

$$u_m = \frac{\ln t_m + t_m - \mu}{\sigma^2}, \quad (-1 < u_m < 0) \tag{45}$$

を導入し，次式を u_m について逐次近似で解く。

$$g(u_m) = 1 + u_m(1+t_m)^2 = 0 \tag{46}$$

式(45)において，

$$\frac{dt_m}{du_m} = \frac{\sigma^2 t_m}{1+t_m} > 0 \tag{47}$$

から，t_m は u_m の単調増加関数であり，かつ u_m の変域は次の有限区間に存在するので，u_m に対する逐次近似解法は有効である。

$$-1 < u_m < -\frac{1}{(1+hyb^{-1}\mu)^2} \tag{48}$$

式(46)にNewton法を用いて，u_m について収束解を求める。

$$u_{m,k+1} = u_{m,k} - g(u_{m,k}) / g'(u_{m,k}) \tag{49}$$

ここで

$$g'(u_{m,k}) = (1+t_{m,k})^2 + 2\sigma^2 u_{m,k} t_{m,k} \tag{50}$$

$$t_{m,k} = hyb^{-1}(\mu + u_{m,k}\sigma^2) \tag{51}$$

式(49)における初期値 $u_{m,0}$ は以下の考察に基づいて，パラメータ条件によって異なって与え，

収束回数を極力減らす。

(1) $\mu \leq -2.82$ *のとき，

式(48)から $-1 < u_m < -0.896$ となるので，σ^2 のいかんにかかわらず，$u_{m,0} = -1$ とする。

(2) $-2.82 < \mu < 3 - \ln 3$ のとき，

式(48)から $-1 < u_m < -0.16$ となるので，σ^2 の大きさによって $u_{m,0}$ を -1，$-1/(1+hyb^{-1}\mu)^2$ に取る。解 u_m がほぼ -1 の近傍（10%以下の誤差範囲として）に存在する時，$u_{m,0} = -1$ にとる。この時の条件式は式(45)，(46)から

$$t_m \fallingdotseq hyb^{-1}(\mu - \sigma^2) \leq 0.05$$

$$\mu - \sigma^2 \leq \ln 0.05 + 0.05 \fallingdotseq -2.946$$

によって，σ^2 の条件式を得る。

$$\sigma^2 \geq \mu + 2.946 \tag{52}$$

つぎに初期値を式(48)のもう1つの端点

$$u_{m,0} = -\frac{1}{(1+hyb^{-1}\mu)^2} \tag{53}$$

に取ることのできる条件式を考察する。

式(51)で σ^2 が小のとき，$|\Delta\mu| = |u_{m,k}\sigma^2| \ll \mu$ として，

$$hyb^{-1}(\mu + \Delta\mu) \fallingdotseq hyb^{-1}\mu + \frac{d}{d\mu} hyb^{-1}\mu \cdot \Delta\mu$$

$$= hyb^{-1}\mu + \frac{t'_m}{1+t'_m}\Delta\mu \tag{54}$$

を得る。ここで，$t'_m = hyb^{-1}\mu$ である。

式(54)右辺を $hyb^{-1}\mu$ で近似する条件として

$$\frac{t'_m}{1+t'_m}\Delta\mu < 0.1\, hyb^{-1}\mu. \tag{55}$$

一方式(49)から $u_{m,0}$ を式(53)にとったとき，$u_{m,k} \leq u_{m,0}$ となる。式(55)に $\Delta\mu = |u_{m,k} \cdot \sigma^2|$ を代入し，式(53)を考慮すると σ^2 に対する条件式が求まる。

$$\sigma^2 \leq 0.1(1+hyb^{-1}\mu)^2 \tag{56}$$

さらに μ が $-2.82 < \mu < 3 - \ln 3$ のとき，$0.1(1+hyb^{-1}\mu)^2 < \mu + 2.946$ であることに注意し，σ^2 が式(52)，(56)以外の条件にあるとき，$u_{m,0}$ の設定値の定め方を示す。

$$0.1 \cdot (1+hyb^{-1}\mu)^2 < \sigma^2 < \mu + 2.946 \tag{57}$$

のとき，$u_{m,0}$ は条件式(52)，(56)で与えたそれぞれの初期値 -1 と $-(1+hyb^{-1}\mu)^{-2}$ の幾何平均値を用いる。すなわち

$$u_{m,0} = -\frac{1}{(1+hyb^{-1}\mu)} \tag{58}$$

---

* この値は式（57）の成立条件から逆に定めた。

(3) $3-\ln 3<\mu$のとき

σ^2 が式(26)下段の範囲外である場合，初期値 $u_{m,0}$ は次のようにとる。（Fig. 7参照）

$\sigma^2 \geq \sigma_2^2$ ならば $u_{m,0}=-1$

$$\sigma^2 \leq \sigma_1^2 \text{ ならば } u_{m,0}=-\frac{1}{(1+hyb^{-1}\mu)} \tag{59}$$

σ^2 が式(26)を満す場合，式(45)，(46)の解は3つ存在し，その両端の値 t_a，t_b（$t_a<t_b$）は分布関数の極大点となる。従って，この場合は2つの初期値を与えて t_a と t_b のそれぞれに対応する極大値を先ず求める。式(21)と(23)から $t_a<1/3$ ゆえ，式(46)を用いると，t_a に対する初期値 $u_{m,0}$ は -1 にとることができる。同様に t_b に対しては $t_b>\frac{1}{3}$ が成立し，この時の初期値 $u_{m,0}$ は $-(1+hyb^{-1}\mu)^{-2}$ にとることができる。最終的な最頻値としては，分布の密度関数 $\Omega'(t\mid\mu,\sigma^2)$ の大きな極大値を選択する。すなわち，

$$t_m=\begin{cases} t_a, & \Omega'(t_a\mid\mu,\sigma^2)\geq\Omega'(t_b\mid\mu,\sigma^2) \\ t_b, & \Omega'(t_a\mid\mu,\sigma^2)<\Omega'(t_b\mid\mu,\sigma^2) \end{cases} \tag{60}$$

3.4 積率に関する計算

j次の積率の計算

混成対数正規分布のj次の積率 $\phi_j(\mu,\sigma)$ は式(6)を次のように変数変換し，数値積分により求める。すなわち，

$$u=(\ln t+t-\mu)/\sqrt{2}\,\sigma \tag{61}$$

と置き，

$$\phi_j(\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\,\sigma u)\}^j e^{-u^2}du \tag{62}$$

をGauss−Hermite積分法[8]により計算する。これより，j次の積率 μ'_j は式(5)で計算される。

平均値と分散

式(8)から，平均値 ξ および分散 η^2 は積率 $\phi_1(\mu,\sigma)$ と $\phi_2(\mu,\sigma)$ を求めることにより計算される。また，幾何平均値 μ_g は，式(9)から $\phi_1(\mu,\sigma)$ を求めれば計算できる。これに対して，幾何標準偏差 σ_g を求めるには式(10)から次の計算が必要である。

$$\int_0^{\infty} t\,z\,d\Omega(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\,\sigma u)\}u\,e^{-u^2}du \tag{63*}$$

この式をGauss−Hermite積分法により計算する。この結果を $\tau(\mu,\sigma)$ とする。このとき，σ_g は $\phi_1(\mu,\sigma)$，$\phi_2(\mu,\sigma)$，$\tau(\mu,\sigma)$ を求めることにより計算できる。

---

*式(63)は $\frac{\partial}{\partial\mu}\sigma\phi_1(\mu,\sigma)$ に等しい。

3.5 積率分布に関する計算

混成対数正規分布のj次の積率分布に対する分布関数とパーセント点，最頻値と中央値の計算法を示す。

分布関数の計算

式(26)から，$t=\rho x$ とし，さらに積分変数を式(61)のuに変換する。そして，次式をGauss－Legendre積分法[9]を用いて計算する。

$$\Omega_j(t) \doteqdot \frac{\int_{ULM}^{\frac{\ln t+t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \{hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\sigma u)\}^j e^{-u^2} du}{\int_{ULM}^{UUM} \{hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\sigma u)\}^j e^{-u^2} du} \tag{64}$$

ここで，数値積分範囲の下限ULMと上限UUMは式(64)の被積分関数$\Omega'_j(t)$がその最大値の10^{15}分の1になるuの値として求める。$u \leq ULM$ のとき，$\Omega_j(t) \doteqdot 0$，また，$u \geq UUM$ のとき，$\Omega_j(t) \doteqdot 1$ とする。

パーセント点の計算

j次の積率分布の100P%点は次の式をuについて解いて求める。

$$\left.\begin{aligned} g(u) &= \Omega_j(t) - P = 0 \\ t &= hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\sigma u) \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

uの初期値を後で述べるように取るとき，式(65)はNewton法を用いて，次のようにして求められる。

$$\left.\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k - \varepsilon_k \\ \varepsilon_k &= \{\Omega_j(t_k) - P\} / g'(u_k) \\ t_k &= hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\sigma u_k) \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

ここで，$|\varepsilon_k|$は10^{-10}以下にすれば十分である。

初期値u_0は次のようにとる。j次の積率分布を混成対数正規確率紙にプロットすると，Fig. 8に示すように，積率分布は折線で近似できることが確かめられる。混成対数正規確率紙の変数軸は図に示すようにuの値に比例した目盛を持つ。折線近似のためのuの区間の取り方は横軸に示す通りである。横軸のUPKは$g'(u)$が最大になるuの値である。ULM，UUMは積率分布の密度関数が$g'(u)=g'(UPK)/10^{15}$ となる分布の両裾に対する値をそれぞれ示す。ULHは(ULM+UPK)/2，またUUHは(UUM+UPK)/2である。ULNはULM*0.9+UPK*0.1，またUUNはUUM*0.9+UPK*0.1 である。

Fig. 8の縦軸に示す累積確率P_0，$P_{\pm1}$，$P_{\pm2}$，$P_{\pm3}$ はそれぞれに対応づけられたuの値における積率分布$\Omega_j(t)$から求める。ただし，ここで$t=hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\sigma u)$である。

先ず，100P%点としての初期値u_0を求めるには，Fig. 8に示す累積確率のどの区間にPが入るかを調べる。例えば，Pは区間〔P_1，P_2〕に入るとする。このとき，標準正規分布のP，P_1およびP_2におけるパーセント点をz，z_1，z_2として，100P%点u_pの初期値u_0は次のようにとる。

$$u_0=(u_2-u_1)\frac{(z-z_1)}{(z_2-z_1)}+u_1 \tag{67}$$

ここで，u_2はUUM，u_1はUUHである。他の例についても同様にして求められる。

Fig.9 の区間の取り方は任意次数の積率分布に適用できる。ULNおよびUUNの点は分布の端部で積率分布のグラフの直線性が悪くなるため，これを補正する目的で付け加えたものである。また，SLMおよびSUMの点は100P%点がそれぞれ区間〔ULM，ULN〕および区間〔UUN，UUM〕に入るとき，$P_{-3}=0$および$P_3=1$とならないようにするための積率分布計算上の上下限の変更点を示す。これは確率が0および1に対する標準正規分布のパーセント点が±∞となり，式(67)によるu_0の計算が不可能となるからである。または，SLMおよびSUMはそれぞれULM−(UPK−ULM)/10およびUUM−(UPK−UUM)/10とする。

被積分関数の最大点と積分区分

積率分布の分布関数およびパーセント点を計算するのに，積率分布をuで微分した関数g′(u)の最大点UPKおよびg′(UPK)の10^{15}分の1となる積分区間〔ULM，UUM〕の計算が必要である。

最大点UPKは式(64)の被積分関数に相当するg′(u)をuで微分し，g″(u)=0と置くことにより求められる。

$$\frac{u}{j\sigma/\sqrt{2}}=\frac{1}{1+t}\ ,\qquad (0<t<\infty) \tag{68}$$

これを解くため，さらに$u'=u/(j\sigma/\sqrt{2})$として，

$$f(u')=u'(1+t)-1=0\ ,\quad (0<u'<1) \tag{69}$$

にNewton法を適用する。

$$\left.\begin{aligned} u'_{k+1}&=u'_k-\frac{\{u'_k(1+t_k)-1\}(1+t_k)}{(1+t_k)^2+j\sigma^2u'_k t_k}\\ t_k&=hyb^{-1}(\mu+j\sigma^2u'_k)\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

uについての最終解は$u=j\sigma u'/\sqrt{2}$から計算される。

u'の$j\sigma^2$による関数形は，一定のμに対し，$\partial u'/\partial(j\sigma^2)=-u'^2t/\{(1+t)^2+j\sigma^2u't\}<0$から単調減少関数である。$j\sigma^2\to0$のとき，$j\sigma^2u'\to0$ゆえ，$t\to hyb^{-1}\mu$，従って式(69)から$u'\to(1+hyb^{-1}\mu)^{-1}$である。他方，$j\sigma^2\to\infty$のとき，$j\sigma^2=(1+t)(\ln t+t-\mu)\to\infty$ゆえ，$t\to\infty$，従って式(69)から$u'\to0$である。さらに，$j\sigma^2u'>j\sigma^2/(1+hyb^{-1}\mu)>0$および関数$hyb^{-1}$の性質から，

$$hyb^{-1}\left\{\mu+\frac{i\sigma^2}{1+hyb^{-1}\mu}\right\}<hyb^{-1}(\mu+j\sigma^2u')<\mu+j\sigma^2u'$$

ゆえ，初期値u'_0は，$j\sigma^2$の値によりt_0を上式の左端また右端にとり，式(69)を用いて求める。すなわち，

$$u'_0=[1+hyb^{-1}\{1+j\sigma^2/(1+hyb^{-1}\mu)\}]^{-1}\ ,\quad j\sigma^2\leq SLT \tag{71}$$

$$u'_0=\{-A+\sqrt{A^2+4j\sigma^2}\}/2j\sigma^2\ ,\quad j\sigma^2>SLT \tag{72}$$

ここで，$A=1+\mu$である。しかし，$hyb^{-1}\mu \gtrsim \mu-\mu\ln\mu/(1+\mu)$の近似誤差は$\mu>0.68$に対して約1%以下で，かつ，

$$hyb^{-1}(\mu+j\sigma^2u')<\mu-\mu\ln\mu/(1+\mu)+j\sigma^2u'<\mu+j\sigma^2u'$$

ゆえ，t_0を上式の中央にとり，式(69)からu'_0を求めると式(72)で$A=1+\mu-\mu\ln\mu/(1+\mu)$とした解が得られる。上の不等式から，$\mu>0.68$に対しては後者の方が近似のよい初期値となる。従って，式(72)のAは次のように定める。

$$A=\begin{cases}1+\mu & ,\ \mu\leq 0.68\\ 1+\mu-\mu\ln\mu/(1+\mu), & \mu>0.68\end{cases} \tag{73}$$

SLTはu'が$j\sigma^2$について単調減少関数であることから式(71)≧式(72)を満すように決める。ただし，式(72)のAは$\mu \gtrless 0.68$に依存するので，SLTも同様に分けて定める。また，直接，式(71)＝式(72)を満す$j\sigma^2$を解くと複雑となるので，$(1+hyb^{-1}\mu)^{-1}$＝式(72)を解く。この解は$|\mu|$が大きいとき問題はないが，$-3.5\leq\mu\leq 0.68$のとき1.5倍くらいに修正する必要がある。すなわち，

$$SLT=\begin{cases}(1+hyb^{-1}\mu)(hyb^{-1}\mu-\mu), & \mu<-3.5\\ 1.5(1+hyb^{-1}\mu)(hyb^{-1}\mu-\mu), & -3.5\leq\mu\leq 0.68\end{cases} \tag{74}$$

$\mu>0.68$に対しては，数値解析の結果，

$$SLT=1+hyb^{-1}\mu \tag{75}$$

と置けば十分であることが知られた。

次に，$g'(u)/g'(UPK)=10^{-15}$となる両裾点ULM，UUMの求め方を示す。これも，適当な初期値を与えると，Newton法で求めることができる。先ず，

$$f(u)=\ln\{g'(u)/g'(UPK)\}-\ln 10^{-15}=0 \tag{76}$$

と置く。このとき，uの解は次の漸化式から求められる。

$$\left.\begin{aligned}u_{k+1}&=u_k-\varepsilon_k\\ \varepsilon_k&=\frac{\ln\{g'(u_k)/g'(UPK)\}-\ln 10^{-15}}{\sqrt{2}j\sigma/(1+t_k)+2u_k}\\ t_k&=hyb^{-1}(\mu+\sqrt{2}\sigma u_k)\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

下側の裾点ULMを求める場合の初期値は，

$$u_0=UPK-7 \tag{78}$$

また，上側の裾点UUMを求める場合の初期値は，

$$u_0=UPK+(UPK-ULM) \tag{79}$$

とする。ここで，式(78)右辺の数字7は，j，μ，σ^2の種々の条件に対して，UPK−ULMの代表的な値として数値解析の結果選んだ。

最頻値の計算

積率分布の最頻値 t_{mj} は，初期値を適切に選ぶことにより，Newtonの反復法を適用して求められる。すなわち，式(27)において，

$$u_{mj}=\frac{\ln t_{mj}+t_{mj}-\mu}{j\sigma^2} \tag{80}$$

と置き，

$$f(u_{mj})=(1+t_{mj})\{1-u_{mj}(1+t_{mj})\}j-1=0 \tag{81}$$

を次のように u_{mj} について解く。

$$u_{mj,k+1}=u_{mj,k}-f(u_{mj,k})/f'(u_{mj,k}) \tag{82}$$

ここで，

$$f'(u_{mj,k})=j\sigma^2 t_{mj,k}/(1+t_{mj,k})-(1+t_{mj,k})^2-2(j\sigma^2)t_{mj,k}u_{mj,k}$$

$$t_{mj,k}=hyb^{-1}(\mu+j\sigma^2 u_{mj,k})$$

である。式(81)を u_{mj} について解くのは，

$$\frac{dt_{mj}}{du_{mj}}=\frac{j\sigma^2 t_{mj}}{1+t_{mj}}>0 \tag{83}$$

から，t_{mj} は u_{mj} の単調増加関数であり，かつ u_{mj} の変域が次の有限区間にあるからである。

$$\left.\begin{array}{l} j=1\text{ のとき，} \\ \qquad 0<u_{mj}\leq 0.25 \\ j\geq 2\text{ のとき，} \\ \qquad 0<u_{mj}<(j-1)/j \end{array}\right\} \tag{84}$$

初期値 $u_{mj,0}$ は $j=1$ および $j\geq 2$ について以下のようにとる。

$j=1$

(1) $\mu\geq 1$ のとき，σ^2 に対する u_{m1} のグラフは単調減少である。σ^2 が極めて小さいとき，

$$t_{m1}=hyb^{-1}(\mu+\sigma^2 u_{m1})\fallingdotseq hyb^{-1}\mu \tag{85}$$

から，

$$u_{m1}\fallingdotseq hyb^{-1}\mu/(1+hyb^{-1}\mu)^2 \tag{86}$$

と近似できる。他方，σ^2 が極めて大きいとき，

$$t_{m1}=hyb^{-1}(\mu+\sigma^2 u_{m1})\fallingdotseq\mu+\sigma^2 u_{m1} \tag{87}$$

と近似し，さらに $t_{m1}\gg 1$ を考慮し，

$$u_{m1}(1+t)=1/(1/t+1)\fallingdotseq 1,$$

と近似して，これに式(81)を代入すると，

$$u_{m1}=\{-(1+\mu)+\sqrt{(1+\mu)^2+4\sigma^2}\}/2\sigma^2 \tag{88}$$

が得られる。式(86)または式(88)を初期値として選ぶための σ^2 の条件を次に示す。

式(85)の近似が成立する目安を $\sigma^2 u_{m1}\leq\mu/10$ として，これから $\sigma^2\leq\mu/10A$ が得られる。ただし，$A=u_{m1}=hyb^{-1}\mu/(1+hyb^{-1}\mu)^2$ である。他方，式(86)≥式(88)から，

$\sigma^2 \geq \{1-(1+\mu)A\}/A^2$ が得られる。しかし，μ が大きくなると，$\{1-(1+\mu)A\}/A^2$ は負となるので，$\mu/10A \geq \{1-(1+\mu)A\}/A^2$ を満す最小の $\mu \fallingdotseq 3.75$ 以上では $\sigma^2 \leq \mu/10A$ の判定を用いる。以上から，$\mu \geq 1$ のとき，初期値を下記にとる。

$$\left.\begin{array}{ll} \mu \geq 3.75, & \sigma^2 > \mu/10A \text{ のとき，式(88)} \\ & \sigma^2 \leq \mu/10A \text{ のとき，式(86)} \\ \mu < 3.75, & \sigma^2 \geq \{1-(1+\mu)A\}/A^2 \text{ のとき，式(88)} \\ & \sigma^2 < \{1-(1+\mu)A\}/A^2 \text{ のとき，式(86)} \end{array}\right\} \quad (89)$$

(2) $-3.20232 \leq \mu < 1$ のとき，σ^2 に対する u_{m1} は，σ^2 が極めて小さいか大きい場合，それぞれ式(86)か式(88)で近似される一方，u_{m1} は $\sigma^2 = 4(1-\mu)$ において最大となり，$u_{m1} = 0.25$ に等しくなる。式(88)で近似する条件は $\sigma^2 > 4(3-\mu)$，式(86)で近似する条件は $\sigma^2 > 4(3-\mu)$，式(86)で近似する条件は $\sigma^2 \leq 0.4/A$ にとることができる。μ が -0.5 以下では，式(86)と式(88)の相違が大きくなるので，$0.4/A < \sigma^2 < -4\mu$ のときは式(86)と式(88)の幾何平均値 $0.5\sqrt{A}$ で近似する。これ以外は，初期値を 0.25 とする。これらの様子は Fig. 9 に示す通りである。

(3) $\mu < -3.20232$ のとき，σ^2 が式(37)の範囲外であるならば，初期値は次のように取る。すなわち，式(37)より，$\sigma^2 < (1+t_1)^4/t_1(1-t_1)$ ならば式(86)にとり，$\sigma^2 > (1+t_2)^4/t_2(1-t_2)$ ならば式(88)にとる。ただし，後者の場合，この値が 0.25 を超えるときは初期値を 0.25 とする。

$\mu < -3.20232$ で，かつ σ^2 が式(37)の条件を満すとき，2つの極大値 t_a および t_b $(t_a \leq t_b)$ が存在する。従って，この場合は2つの初期値を与える。式(35)から $t_a \leq (5-\sqrt{17})/4$ ゆえ，t_a に対する初期値は式(86)にとることができる。また，式(35)から $t_b \geq (5-\sqrt{17})/4$ ゆえ，t_b に対する初期値は式(88)にとることができる。この場合，最終的な最頻値としては，1次積率分布の密度関数 $\Omega_1'(t)$ を大きくする方の極大値を選択することにする。すなわち，

$$t_{mj} = \begin{array}{ll} t_a & \Omega_1'(t_a) \geq \Omega_1'(t_b) \\ t_b & \Omega_1'(t_a) < \Omega_1'(t_b) \end{array} \quad (90)$$

<u>$j \geq 2$</u>

(1) $\mu \leq -2.2$ のとき，$j\sigma^2$ が小さい場合，

$$t_{mj} = hyb^{-1}(\mu + j\sigma^2 u_{mj}) \fallingdotseq hyb^{-1}\mu \ll 1$$

ゆえ，式(81)から

$$u_{mj} \fallingdotseq (j-1)/j \quad (91)$$

と近似できる。また，$\mu \leq -2.2$ で，$j\sigma^2$ が大きい場合，

$$t_{mj} = hyb^{-1}(\mu + j\sigma^2 u_{mj}) \fallingdotseq \mu + j\sigma^2 u_{mj} \gg 1$$

とすると，式(81)から，

$$u_{mj}(1+t_{mj}) \fallingdotseq u_{mj}(1+\mu+j\sigma^2 u_{mj}) \fallingdotseq 1$$

を解いて，

$$u_{mj} = \frac{-(1+\mu)+\sqrt{(1+\mu)^2+4j\sigma^2}}{2j\sigma^2} \quad (92)$$

と近似できる。$\partial u_{mj}/\partial(j\sigma^2)<0$ ゆえ，式(91)≧式(92)でなければならない。これより，$A=(j-1)/j$ として，初期値を，

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^2 \leq 1/A^2-(1+\mu)/A \text{ のとき式(91)},\\ \sigma^2 > 1/A^2-(1+\mu)/A \text{ のとき式(92)},\end{array}\right\} \quad (93)$$

と近似する。

(2) $\mu>-2.2$ のとき，$j\sigma^2$ が小さい場合

$$t_{mj}=hyb^{-1}(\mu+j\sigma^2 u_{mj}) \fallingdotseq hyb^{-1}\mu$$

を近似し，式(81)から，

$$u_{mj}=(1+hyb^{-1}\mu-1/j)/(1+hyb^{-1}\mu)^2 \quad (94)$$

が得られる。また，$j\sigma^2$ が大きい場合，式(92)と近似できる。この場合も，$\partial u_{mj}/\partial(j\sigma^2)<0$ ゆえ，式(94)≧式(92)でなければならない。これより，A を式(94)の u_{mj} に等しいと置くとき

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^2 \leq 1/A^2-(1+\mu)/A \text{ のとき式(94)},\\ \sigma^2 > 1/A^2-(1+\mu)/A \text{ のとき式(92)},\end{array}\right\} \quad (95)$$

と近似する。

4. 計算プログラム

混成対数正規分布のパラメータの推定，およびそれに基づく各種の統計量を求める計算プログラムの構成および，使用方法を示す。

4.1 計算プログラムの構成

Fig.10に計算プログラムの構成を示す。実測データを用いた解析を行うには，最初に混成対数正規分布のパラメータρ，μ，σ^2を推定する必要がある。これはサブルーチンHLNPRMを呼び出して行う。パラメータが決った後，混成対数正規分布に関連した種々の統計計算は基本的に2パラメータの混成対数正規分布に対する統計計算プログラムを用いて実行できる。これらの計算プログラムは混成対数正規分布に関係するもの，積率の計算に関係するものおよび積率分布に関係するものに大別される。混成対数正規分布および積率分布に関係するサブルーチンは，いずれも分布関数とパーセント点，最頻値および中央値の計算に関するものである。積率の計算に関係するサブルーチンは積率，平均値および分散，幾何平均値および幾何標準偏差に関するものである。

以上の11個のサブルーチンを動かすのに必要なサブルーチンや関数副プログラムはFig.10の各サブルーチン名の次のコロンの後に示してある。この内，9個のサブルーチンは前述のサブルーチンに含まれていないので，これらをFig.10の下部に示す。＊，＊＊の付かないものはすべて新たに作成したものである。

これらの計算プログラムはすべてサブルーチン形式であるので，種々の混成対数正規分布に関連する統計計算に適用できる。各種の統計計算は基本的に2パラメータの混成対数正規分布に対するものであるが，サブルーチンHLNAURおよびHLNGEOだけは3パラメータの混成対数正規分布を想定している。これを2パラメータの混成対数正規分布として用いるには，$\rho=1$とすればよい。

4.2 各プログラムの説明

Fig.10に示したサブルーチンおよび関数副プログラムの機能と使用法を説明する。

4.2.1 パラメータの推定

混成対数正規分布$\Omega(\rho, \mu, \sigma^2)$の3つのパラメータを推定する。

HLNPRM

(1) 機　能

クラス分けした実測データの各クラスの上限値とそれぞれのクラスに入いるデータ数を与えて，最小2乗法によりパラメータρ，μ，σを推定する。この場合，異常値の混入を防ぐため，

値の大きい方のクラスのデータは最小2乗法の計算で除外することができる。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL HLNPRM(X,F,N,WK,NN,COF)

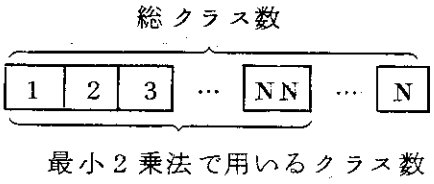
X：倍精度実数型の一次元配列で，各クラスのデータの上限値を格納する。

F：倍精度実数型の一次元配列で，各クラスに入いるデータ数または頻度数を格納する。

N：配列XおよびFに格納したデータのクラス数を指定する。

WK：倍精度実数型の一次元配列で，最小2乗法の計算を行うにあたり，累積確率などの計算値を格納するための作業領域。

NN：配列WKに格納する累積確率などを計算するときのクラス数を指定する。NN≦N。



COF：倍精度実数型の一次元配列で，推定したパラメータρ，μ，σをこの順序で格納する。従って，配列要素の大きさは3である。

(3) 補助サブルーチン名

NQ　：正規分布の上側確率。

NPNT：正規分布の上側確率に対するパーセント点。

DGELG：ガウスの消去法により連立一次方程式を解く。

4.2.2 混成対数正規分布に関するもの

2パラメータの混成対数正規分布$\Omega(\mu,\sigma^2)$に対する分布関数$\Omega(t\mid\mu,\sigma^2)$，パーセント点$\Omega^{-1}(P\mid\mu,\sigma^2)$，最頻値$t_m$および中央値$\tilde{t}$を求める。3パラメータの混成対数正規分分$\Omega(\rho,\mu,\sigma^2)$と対応付けるには，$t=\rho x$とする。

HLNP

(1) 機　能

混成対数正規分布の分布関数およびその逆関数であるパーセント点の計算を行う。ISN＝±1によりいずれの計算かを指定する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL HLNP(T,UM,SM,P,ISGN)

T：倍精度実数で，2パラメータ混成対数正規分布の変数。ISGN=1または－1で，それぞれ入力または出力となる。

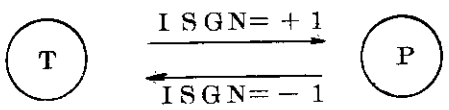
UM：倍精度実数で，混成対数正規分布のパラメータμを表わす。

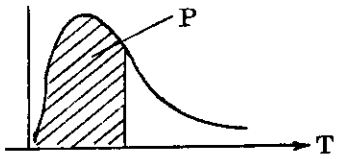
SM：倍精度実数で，混成対数正規分布のパラメータσを表わす。

P：倍精度実数で，混成対数正規分布の下側確率を表わす。ISGN=1または－1で，それぞれ出力または入力となる。

ISGN：分布関数を計算するにはISGN=+1，パーセント点を計算するにはISGN=－1

と指定する。





(3) 補助サブルーチン名

NQ　　：正規分布の上側確率。

NPNT　：正規分布の下側確率点。

INVHYB：lnt+tの逆関数。

(4) 使用上の注意

パーセント点の計算時，すなわち，ISGN=−1のとき，与える下側確率Pは10^{-14}以上で，かつ$1-10^{-14}$以下でなければならない。この条件が満されないとき，パーセント点は$hyb^{-1}\mu$と置かれる。

ISGN=±1 以外のとき，本サブルーチンは実行されず，“ISGN IS NOT −1 NOR +1 AT SUBROUTINE HLNP”というメッセージが印字される。

TMOD

(1) 機　能

混成対数正規分布の最頻値を計算する。2つ存在する場合は，密度関数の大きい順に出力する。単峰性の場合は，同じ値を2つ出力する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL TMOD(UM,SM,TMO,TM2)

UM：倍精度実数で，混成対数正規分布のパラメータμを表わす。

SM：倍精度実数で，混成対数正規分布のパラメータσを表わす。

TMO：倍精度実数で，混成対数正規分布の最頻値t_mを表わす。

TM2：倍精度実数で，混成対数正規分布の2番目の最頻値を格納する。この分布が単峰性の場合は，TM2=TMOとしてある。

(3) 補助サブルーチン名

TMYU　：混成対数正規分布の多峰性を判定するための条件である式(22)の逆関数。

INVHYB：lnt+tの逆関数。

INVHYB

(1) 機　能

混成対数正規分布の中央値$\tilde{t}$を計算する。他方，この関数は混成対数正規分布の種々の計算に広く用いられる基本関数であり，lnt+tの逆関数を計算する倍精度の関数副プログラムである。

(2) 呼び出し方と引数の説明

INVHYB(Y)

Y：倍精度実数で，y=lnt+t のyを表わす。

(3) 補助サブルーチン名

なし。

(4) 使用上の注意

INVHYBは倍精度宣言をしなければならない。

4.2.3 積率に関するもの

2パラメータの混成対数正規分布$\Omega(\mu, \sigma^2)$に対する原点のまわりのj次の積率$\phi_j(\mu, \sigma)$，および3パラメータの混成対数正規分布$\Omega(\rho, \mu, \sigma^2)$に対する平均値，分散，幾何平均値および幾何標準偏差を求める。

MYUJDA

(1) 機　能

混成対数正規分布$\Omega(\mu, \sigma^2)$の原点のまわりのj次積率を計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL MYUJDA(UM, SM, J, MUJ)

UM：倍精度実数で，混成対数正規分布のパラメータμを表わす。

SM：倍精度実数で，混成対数正規分布のパラメータσを表わす。

J：整定数で，積率の次数を表わす。$J \geq 0$。

MUJ：倍精度実数で，積率$\phi_j(\mu, \sigma)$を表わす。

(3) 補助サブルーチン名

INVHYB：lnt+tの逆関数。

HLNAVR

(1) 機　能

分布$\Omega(\rho, \mu, \sigma^2)$の平均値$\xi$，分散$\eta^2$を計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL HLNAVR(RO, UM, SM, AV, VR)

RO：倍精度実数で，HLN分布のパラメータρ。

UM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータμ。

SM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータσ。

AV：倍精度実数で，HLN分布の平均値ξ。

VR：倍精度実数で，HLN分布の分散η^2。

(3) 補助サブルーチン名

MYUJDA：j次の積率$\phi_j(\mu, \sigma)$の計算。

INVHYB：lnt+tの逆関数。

(4) 使用上の注意

分布$\Omega(\mu, \sigma^2)$に対する平均値および分散を計算するには，本サブルーチンにおいて，$\rho = 1$とすればよい。

HLNGEO

(1) 機　能

分布$\Omega(\rho, \mu, \sigma^2)$の幾何平均値$\mu_g$，幾何標準偏差$\sigma_g$を計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL HLNGEO(RO,UM,SM,GM,GS)

RO：倍精度実数で，HLN分布のパラメータ ρ。

UM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータ μ。

SM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータ σ。

GM：倍精度実数で，HLN分布の幾何平均値 μ_g。

GS：倍精度実数で，HLN分布の幾何標準偏差 σ_g。

(3) 補助サブルーチン名

MYUJDA：j次の積率 $\phi_j(\mu,\sigma)$ の計算。

INTOTZ：$\int_0^\infty t\cdot(\ln t+t-\mu)/\sigma d\Omega(t)$ の計算。

INVHYB：$\ln t+t$ の逆関数。

(4) 使用上の注意

分布 $\Omega(\mu,\sigma^2)$ に対する幾何平均値および幾何標準偏差を計算するには，本サブルーチンにおいて，$\rho=1$ とすればよい。

4.2.4 積率分布に関するもの

2パラメータのj次の積率分布 $\Omega_j(\mu,\sigma^2)$，パーセント点 $\Omega_j^{-1}(P|\mu,\sigma^2)$，最頻値 t_{mj} および中央値 $\tilde{t}_j$ を求める。3パラメータのj次積率分布 $\Omega_j(\rho,\mu,\sigma^2)$ と対応付けるには $t_j=\rho x_j$ とする。

HLNJP

(1) 機　能

j次の積率分布の分布関数およびその逆関数であるパーセント点の計算を行う。ISGN=±1によりいずれの計算かを指定する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL HLNPJ(TJ,UM,SM,JTH,PJ,ISGN)

TJ：倍精度実数で，積率分布関数 $\Omega_j(t_j|\mu,\sigma^2)$ の変数 t_j。ISGN=1または−1で，それぞれ入力または出力となる。

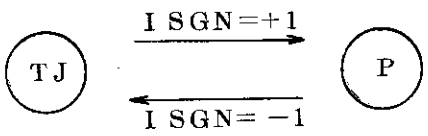
UM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータ μ。

SM：倍精度実数で，HLM分布のパラメータ σ。

JTH：整定数で，積率分布の次数j。

PJ：倍精度実数で，積率分布の下側確率で表わす。

ISGN：分布関数を計算するにはISGN=+1，パーセント点を計算するにはISGN=−1と指定する。



(3) 補助サブルーチン名

MYUJ：Gauss-Legendre積分法による積率分布計算上の被積分関数の最大点と両裾点の計算。

GAUSSA：Gauss-Legendre積分関数。

UHLNMM：Gauss-Legendre積分法による積率分布計算上の被積分関数。

INVHYB：$\ln t + t$の逆関数

(4) 使用上の注意

ISGN=−1のとき，与える下側確率PJは10^{-14}以上で，かつ$1-10^{-14}$以下でなければならない。この条件が満されないとき，積率分布のパーセント点は$hyb^{-1}\mu$と置かれる。また，積率が10^{-60}以下の場合も同様な措置が取られる。ISN=±1以外のとき，本サブルーチンは実行されず，“ISN IS NOT −1 NOR +1 AT SUBROUTINE HLNJP”というメッセージが印字される。

TMODJ

(1) 機　能

j次の積率分布の最頻値t_{mj}を計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL TMODJ(UM, SM, J, TMOJ, TM2)

UM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータμ。

SM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータσ。

J：整定数で，積率分布の次数j。

TMOJ：倍精度実数で，積率分布の最頻値t_{mj}。

TM2：倍精度実数で，j=0，1に起り得る第2の最頻値を格納する領域。j≧2のときは，TM2=TMOJ。

(3) 補助サブルーチン名

TMOD：HLN分布の最頻値の計算。

TMYU：HLN分布の多峰性判定条件である式(22)の逆関数。

TMO1：1次積率分布の最頻値の計算。

TMU1：1次積率分布の多峰性判定条件である式(35)の逆関数。

TNVHYB：$\ln t + t$の逆関数。

(4) 使用上の注意

次数j＝0および1とすると，それぞれ直接サブルーチンMODおよびTMO1を用いたのと同じ結果が得られる。

TMO1

(1) 機　能

1次積率分布の最頻値t_{m1}を計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL TMO1(UM, SM, TMO, TM2)

UM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータμ。

SM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータσ。

TMO： 倍精度実数で，1次積率分布の最頻値 t_{m1}。

TM2： 倍精度実数で，多峰性を示す1次積率分布の第2の最頻値。ただし，単峰性の場合は，TM_2 =TMO。

(3) 補助サブルーチン名

TMU1：1次積率分布の多峰性判定条件である式(35)の逆関数。

INVHYB： lnt＋tの逆関数。

(4) 使用上の注意

1次積率分布は多峰性（高々2個）を示すことがあり，その場合はTM2≠TMOである。TM2には2番目の最頻値が格納される。

OJMED

(1) 機　　能

j次の積率分布の中央値 $\tilde{t}_j$ を計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL OJMED(UM, SM, JTH, TMEJ)

UM： 倍精度実数で，HLN分布のパラメータ μ。

SM： 倍精度実数で，HLN分布のパラメータ σ。

JTH： 整定数で，積率分布の次数j。

TMEJ： 倍精度実数で，HLN分布の中央値 $\tilde{t}_j$。

(3) 補助サブルーチン名

MYUJ：Gauss-Legendre積分法による積率分布計算上の被積分関数の最大点と両裾点の計算。

GAUSSA： Gauss-Legendre積分関数。

UHLNMM： Gauss-Legendre積分法による積率分布計算上の被積分関数。

INVHYB： lnt＋tの逆関数。

4.2.5 補助副プログラムに関するもの

前述の11個の副プログラムを動かすのに必要な補助サブルーチンのうち，使用法を示していないものについて記す。これらは全部で9個あるが，この内の4個は他の文献から引用されたものである。

NQ[8)]

(1) 機　　能

標準正規分布の上側確率を計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL NQ(U, Q)

U：倍精度実数で，標準正規分布の変数。

Q：倍精度実数で，正規分布の上側確率。

(3) 補助サブルーチン名

なし。

NPNT[8)]

(1) 機　能

上側確率で与えて標準正規分布のパーセント点を求める。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL NPNT(Q,EPS,U)

Q：倍精度実数で，上側確率。

EPS：所要精度を与える。例えば10^{-6}。

U：上側確率に対するパーセント点。

(3) 補助サブルーチン名

NQ：標準正規分布の上側確率の計算。

(4) 使用上の注意

上側確率Qは10^{-14}以上で，かつ$1-10^{-14}$以下でなければならない。

DGELG[9)]

(1) 機　能

連立一次方程式AX＝Rを解く。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL DGELG(R,A,M,N,EPS,ILL)

R：倍精度実数型。一次元配列で定数を入力し，解Xを出力する。

A：倍精度実数型。二次元配列で係数を入れる。入出力。

M：整数型。行列Aの次数（M≧1），入力。

N：整数型。定数配列のデータ数（N≧1），入力。

EPS：倍精度実数型。行列式の0判定に使う。10^{-15}くらいにとる。入力。

ILL：整数型。解が求まったか否かを示す。出力。

＝−1……行列式の値が0となった。

≧1……解の精度が良くないことを示す。

＝0……解が正常に求まった。

(3) 補助サブルーチン名

なし。

TMYU

(1) 機　能

パラメータμを固定し，σ^2を変化させた場合，HLN分布が多峰性を示すときの，2つの最頻値の変域（t_1，t_2）を計算する。これは$\mu=\ln t+t+(1+t)^2/2t$の逆関数から求められる。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL TMYU(UM,T1,T2)

UM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータμ。

T1：倍精度実数で，パラメータσ^2により多峰性を示すHLN分布の最頻値の下限に相当する。

T2：倍精度実数で，パラメータσ^2により多峰性を示すHLN分布の最頻値の上限に相当する。

(3) 補助サブルーチン名

INVHYB：lnt＋tの逆関数。

INTOTZ

(1) 機　能

HLN分布の幾何標準偏差を計算するのに必要な積分$\int_0^\infty t\cdot(\ln t+t-\mu)/\sigma\, d\Omega(t)$を求める。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL INTOTZ(UM,SM,TZ)

UM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータμ。

SM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータσ。

TZ：倍精度実数で，積分結果が格納される。

(3) 補助サブルーチン名

INVHYB：lnt＋tの逆関数。

MYUJ

(1) 機　能

積率分布の分布関数やパーセント点または中央値をGauss Legendre積分法により計算する上で必要な，被積分関数の最大点UPKと両裾点ULM，UUMを計算する。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL MYUJ(UYM,SIG,J,UPK,ULM,UUM,ILL)

UYM：倍精度実数で，HLN分布のパラメータμ。

SIG：倍精度実数で，HLN分布のパラメータσ。

J：　積率分布の次数j。

UPK：倍精度実数で，被積分関数の最大点。

ULM：倍精度実数で，被積分関数の積分下限。

UUM：倍精度実数で，被積分関数の積分上限。

ILL：最大点や積分上下限をNewton法で求める場合の収束状態を示す。

＝0　正常。

＝10　最大点のみ収束せず。

＝100　積分上下限のみ収束せず。

＝110　すべて収束せず。

(3) 補助サブルーチン名

INVEXB：lnt＋tの逆関数。

(4) 使用上の注意

ILL≠0となることはほとんどない。

GAUSSA[9)]

(1) 機　能

Gauss-Legendre 積分。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL GAUSSA(FUNC,A,B,N,S)

FUNC: 倍精度実数で，被積分関数 $f(u)e^{-u^2}$ の $f(u)$ の値を与える外部関数副プログラムの名前。

A：積分の下限。

B：積分の上限。

N：Gauss-Legendre 積分の分点数で，N=24または48。

S：積分結果が格納される。

(3) 補助サブルーチン名

FUNC:外部関数副プログラムで，FUNC=UHLNMMとする。

(4) 使用上の注意

FUNC として指定するUHLNMMは倍精度実数型でさらに，GAUSSAを呼び出すプログラムでEXTERNAL 宣言をしなければならない。また，N=24か48たけ可能。

TMU1

(1) 機　能

パラメータ μ を固定して，σ^2 を変化させた場合，1次積率分布が多峰性を示すときの，2つの最頻値の変域（t_1，t_2）を計算する。これは $\mu=\ln t+t-(1+t)^2/(1-t)$ の逆関数から求められる。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL TMU1(UM,T1,T2)

UM: 倍精度実数で，H∠N分布のパラメータ μ。

T1: 倍精度実数で，パラメータ σ^2 により多峰性を示す1次積率分布の最頻値の下限に相当する。

T2: 倍精度実数で，パラメータ σ^2 により多峰性を示す1次積率分布の最頻値の上限に相当する。

(3) 補助サブルーチン名

INVHYB1 $\ln t+t$ の逆関数。

5. まとめ

職業被曝を解析する上で必要となる混成対数正規分布に関連した各種の計算法や計算プログラムを検討した。

混成対数正規分布 $\Omega(\rho,\mu,\sigma^2)$ に対する各種の統計量の計算は基本的にその2パラメータ分布 $\Omega(\mu,\sigma^2)$ について行えば十分であることを示し，(1) 混成対数正規分布 $\Omega(\mu,\sigma^2)$ に関するもの，(2) 積率 $\phi_j(\mu,\sigma)$ に関するもの，および(3) 積率分布 $\Omega_j(\mu,\sigma^2)$ に関するものに分類して行った。分布 $\Omega(\mu,\sigma^2)$ および $\Omega_j(\mu,\sigma^2)$ に関するものとして，いずれも分布関

Gauss-Legendre 積分。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL GAUSSA(FUNC,A,B,N,S)

FUNC: 倍精度実数で，被積分関数 $f(u)e^{-u^2}$ の $f(u)$ の値を与える外部関数副プログラムの名前。

A：積分の下限。

B：積分の上限。

N：Gauss-Legendre 積分の分点数で，N=24または48。

S：積分結果が格納される。

(3) 補助サブルーチン名

FUNC:外部関数副プログラムで，FUNC=UHLNMMとする。

(4) 使用上の注意

FUNC として指定するUHLNMMは倍精度実数型でさらに，GAUSSAを呼び出すプログラムでEXTERNAL 宣言をしなければならない。また，N=24か48たけ可能。

TMU1

(1) 機　能

パラメータ μ を固定して，σ^2 を変化させた場合，1次積率分布が多峰性を示すときの，2つの最頻値の変域（t_1，t_2）を計算する。これは $\mu=\ln t+t-(1+t)^2/(1-t)$ の逆関数から求められる。

(2) 呼び出し方と引数の説明

CALL TMU1(UM,T1,T2)

UM: 倍精度実数で，H∠N分布のパラメータ μ。

T1: 倍精度実数で，パラメータ σ^2 により多峰性を示す1次積率分布の最頻値の下限に相当する。

T2: 倍精度実数で，パラメータ σ^2 により多峰性を示す1次積率分布の最頻値の上限に相当する。

(3) 補助サブルーチン名

INVHYB1 $\ln t+t$ の逆関数。

5. まとめ

職業被曝を解析する上で必要となる混成対数正規分布に関連した各種の計算法や計算プログラムを検討した。

混成対数正規分布 $\Omega(\rho,\mu,\sigma^2)$ に対する各種の統計量の計算は基本的にその2パラメータ分布 $\Omega(\mu,\sigma^2)$ について行えば十分であることを示し，(1) 混成対数正規分布 $\Omega(\mu,\sigma^2)$ に関するもの，(2) 積率 $\phi_j(\mu,\sigma)$ に関するもの，および(3) 積率分布 $\Omega_j(\mu,\sigma^2)$ に関するものに分類して行った。分布 $\Omega(\mu,\sigma^2)$ および $\Omega_j(\mu,\sigma^2)$ に関するものとして，いずれも分布関

数，パーセント点，中央値，最頻値を含めた。積率に関するものとして，j次の積率，平均値，分散，幾何平均値，幾何標準偏差を含めた。

積率に関する計算はGauss－Hermite積分法，積率分布の分布関数はGauss－Legendre積分法によった。これ以外の数値計算に対しては，初期値を適切に選ぶ方法を十分に検討することにより，newtonの反復法が適用できるようにした。また，分布のパラメータ推定には計算の簡単な線形最小2乗法を適用した。

パラメータ推定や各種の統計量を計算するプログラムはすべてサブルーチンまたは関数副プログラム形式とした。これらのプログラムに必要な補助プログラムを追加することにより，本報が混成対数正規分布に関して完結したプログラムパッケージを与えるように配慮した。

この結果，実測データから混成対数正規分布の3つのパラメータを推定し，被曝線量分布や集団線量分布を求めるため各種の統計量の計算が簡略化された。

付録に各プログラムのリストを英文の注釈付きで載せることにより，プログラムの利用の便を図った。

参考文献

1) Kumazawa, S., Numakunai, T.: "A New Theoretical Analysis of Occupational Dose Distributions Indicating the Effect of Dose Limits", Health Pbysics, to be published in the September issue of 1981.

2) Aitchison, J., Brown, J.A.C.: The Lognormal Distribution, Cambridge University Press, Cambridge, (1957).

3) 熊沢 蕃, 島崎潤也, 沼宮内弼雄："混成対数正規分布の計算アルゴリズム", 第2回応用統計シンポジウム, 東京, 応用統計学会, 予稿集D3－1～D3－10頁（1980.10.25).

4) Kimball, B.F.: "On the Choice of Plotting Positions on Probability Paper", Am, Statist. Asoc., 55, 546(1960).

5) 熊沢 蕃, 松井 浩："放射線管理データの高い値の出現頻度推定法に関する考察", 保健物理, 15, 101(1980).

6) 堀上邦彦, 鈴木忠和, 藤村統一郎, 中原康明："非線形最適化プログラム・パッケージ使用説明書", JAERI－M 9154(1980).

7) 大橋靖雄：private communication.

8) 山内二郎：統計数値表, JSA－1972, 日本規格協会, 東京(1973).

9) 藤村統一郎, 西田雄彦, 浅井 清（編), JAERI－M 8479(1979).

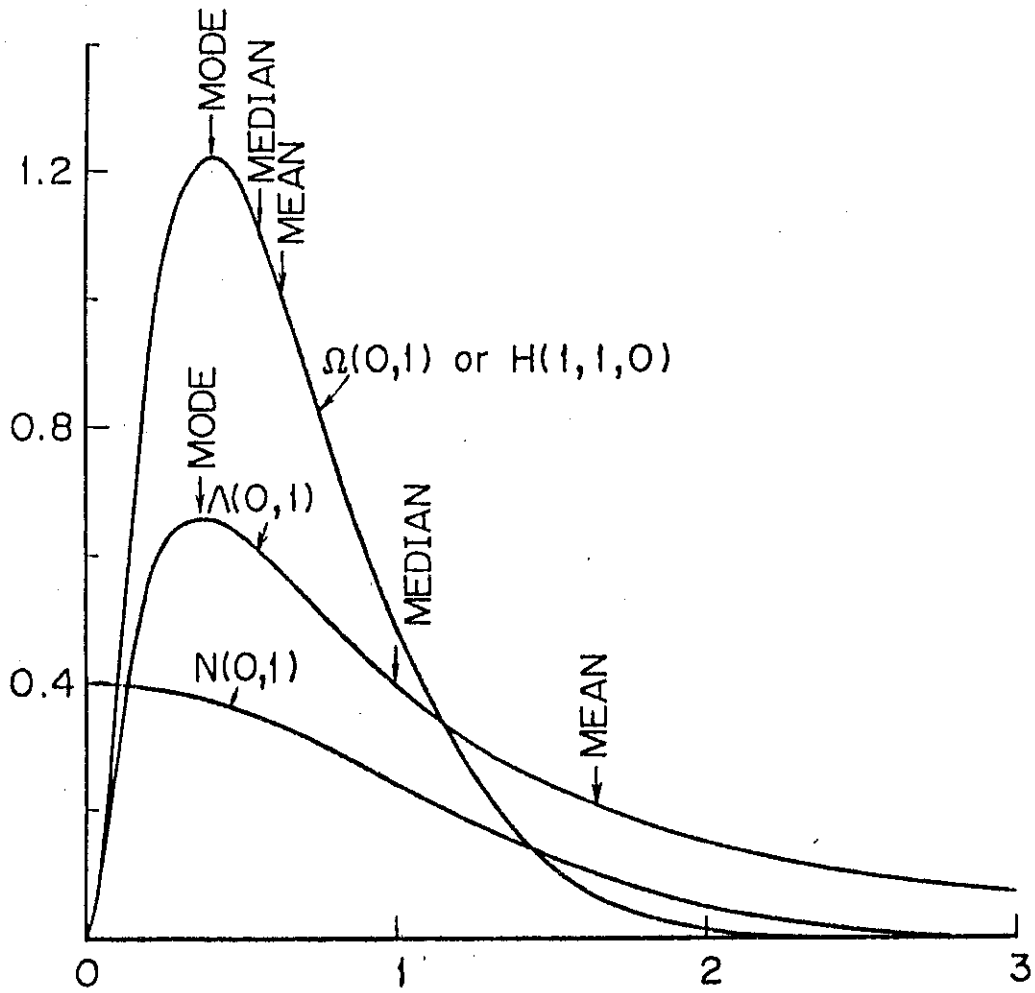


Fig.1 Frequency curves of normal, lognormal and hybrid lognormal distributions, which are N(0,1), Λ(0,1) and Ω(0,1), respectively[1].

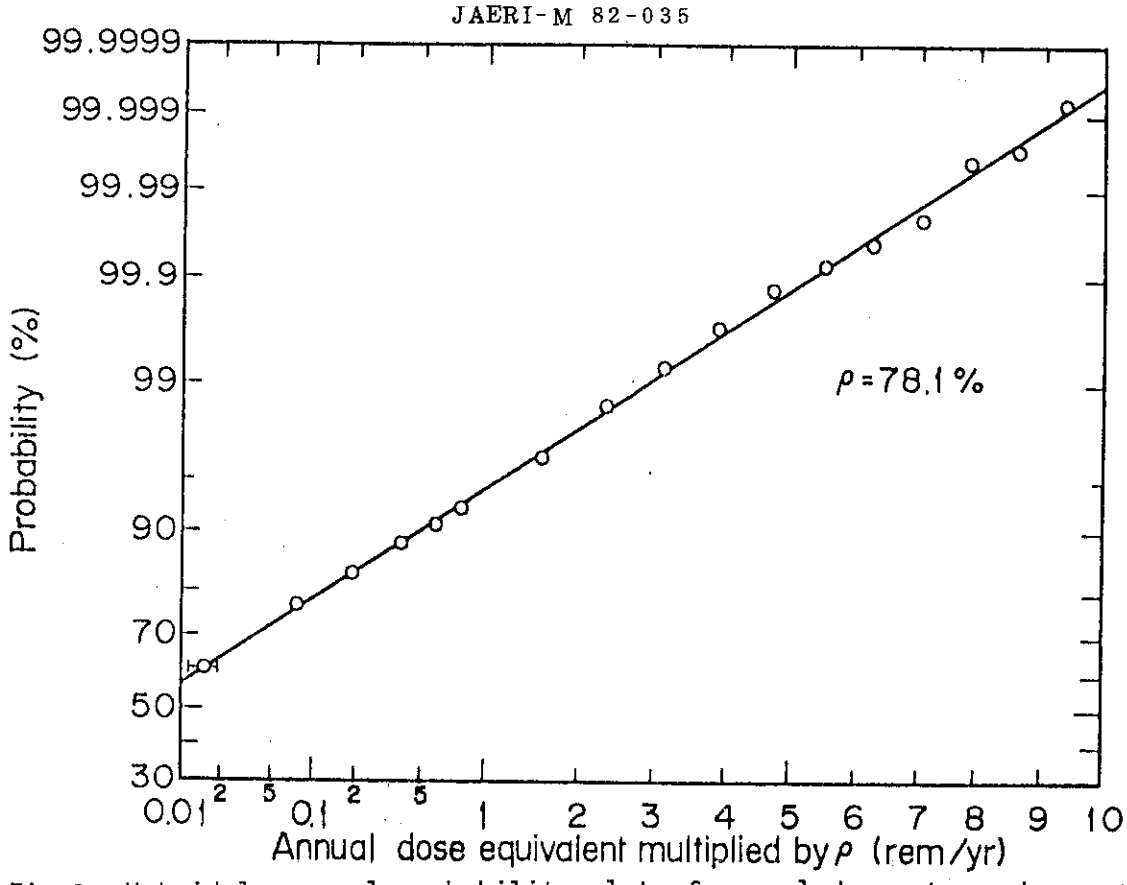


Fig.2 Hybrid lognormal probability plot of annual doses to workers at the U.S. NRC licensed facilities, 1974[1].

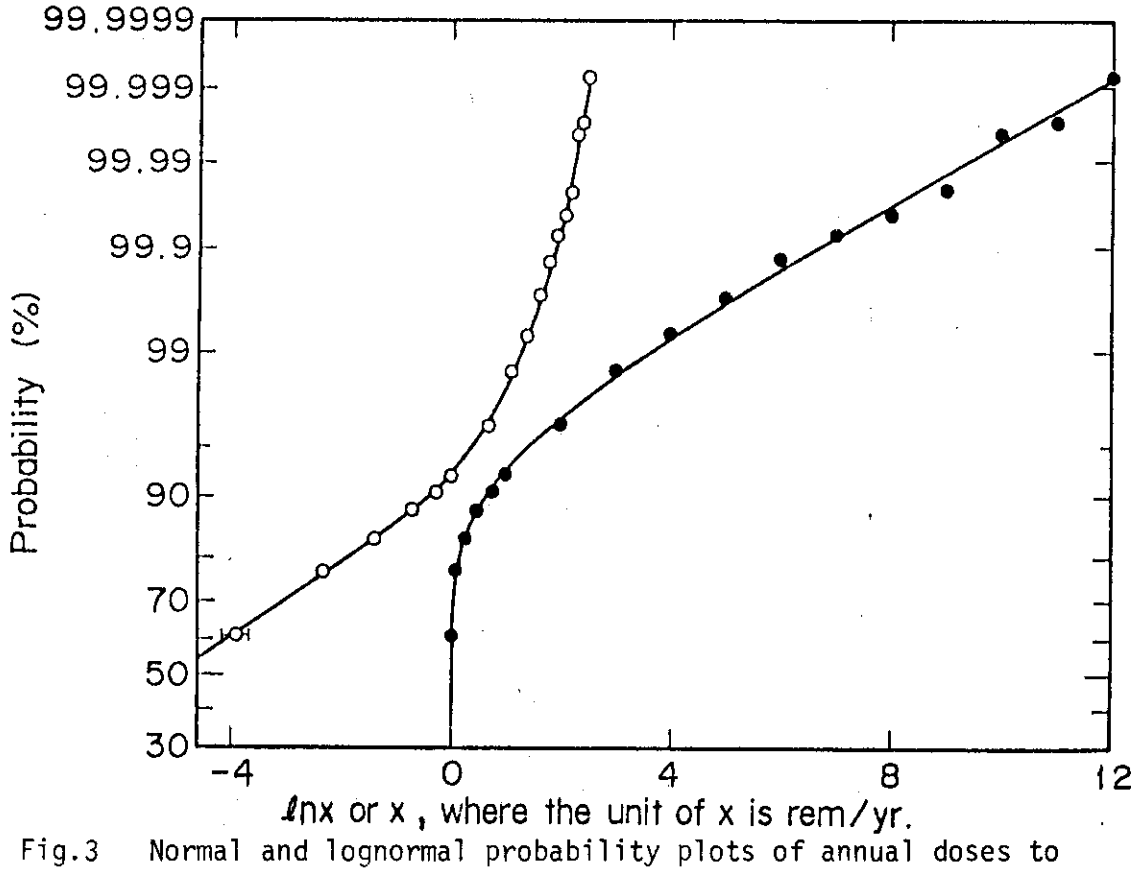


Fig.3 Normal and lognormal probability plots of annual doses to workers at the licensed facilities of NRC in the United States, 1974. The solid and open circles represent normal and lognormal plots, respectively [1].

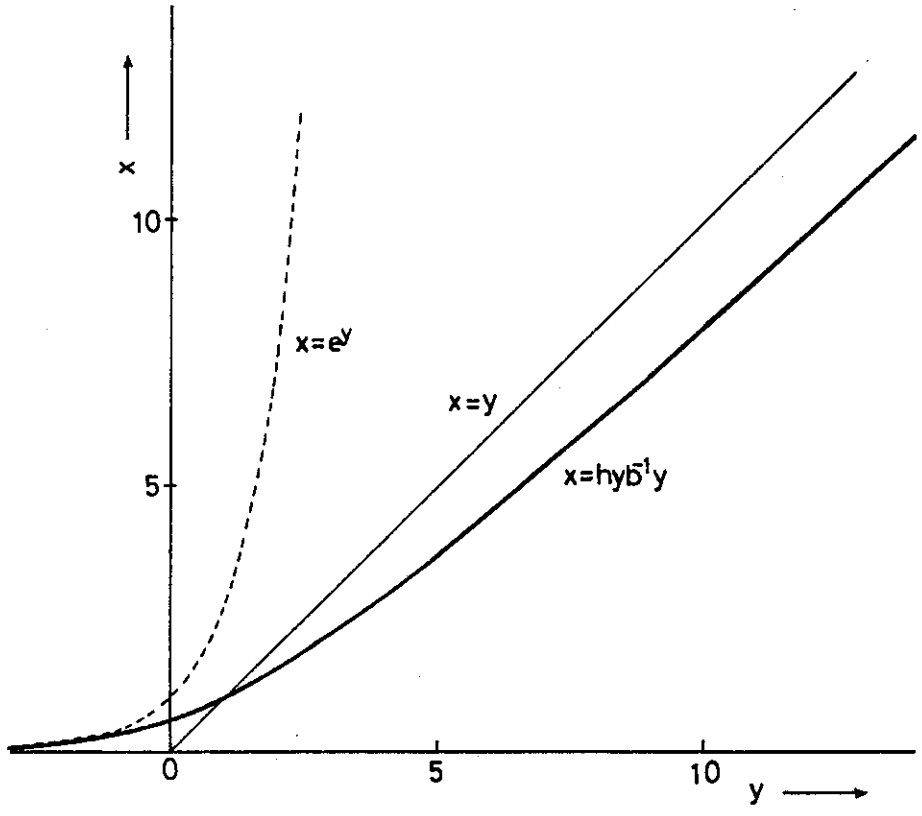


Fig.4 The inversed function of y=lnt+t which is a fundamental function related to hybrid lognormal distributions.

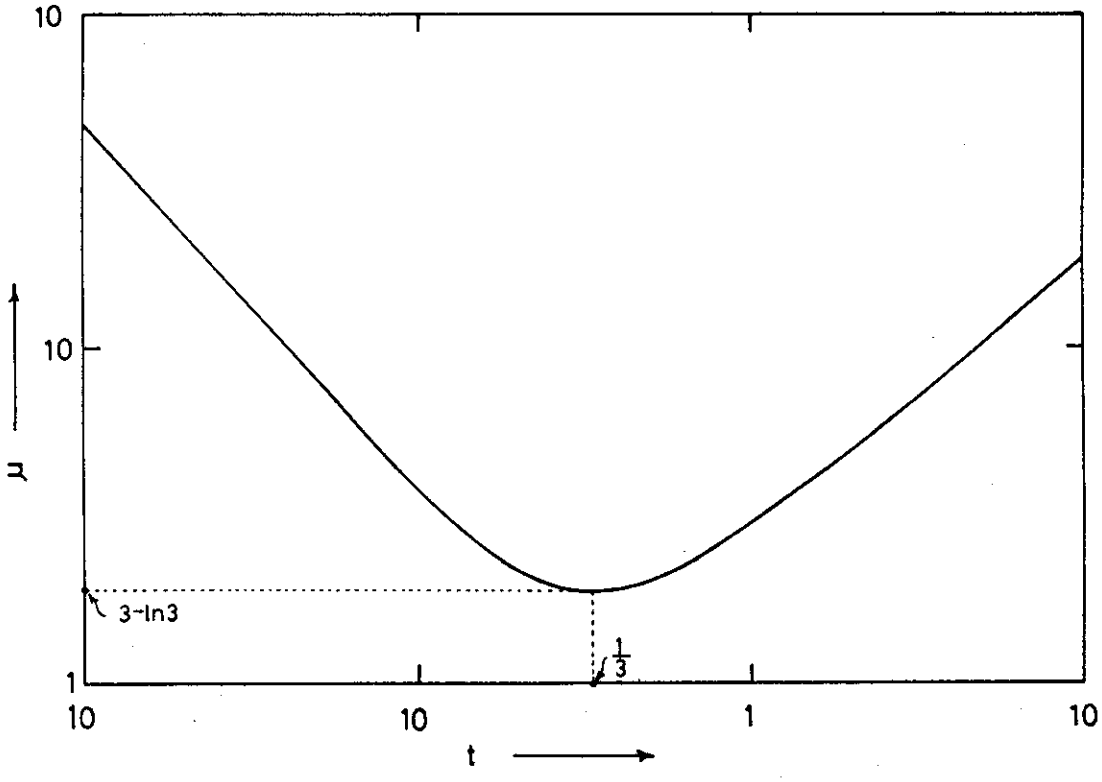


Fig.5 The inversed function of $\mu=\ln t+t+(1+t)^2/2t$ to obtain polymodal conditions of the hybrid lognormal distribution.

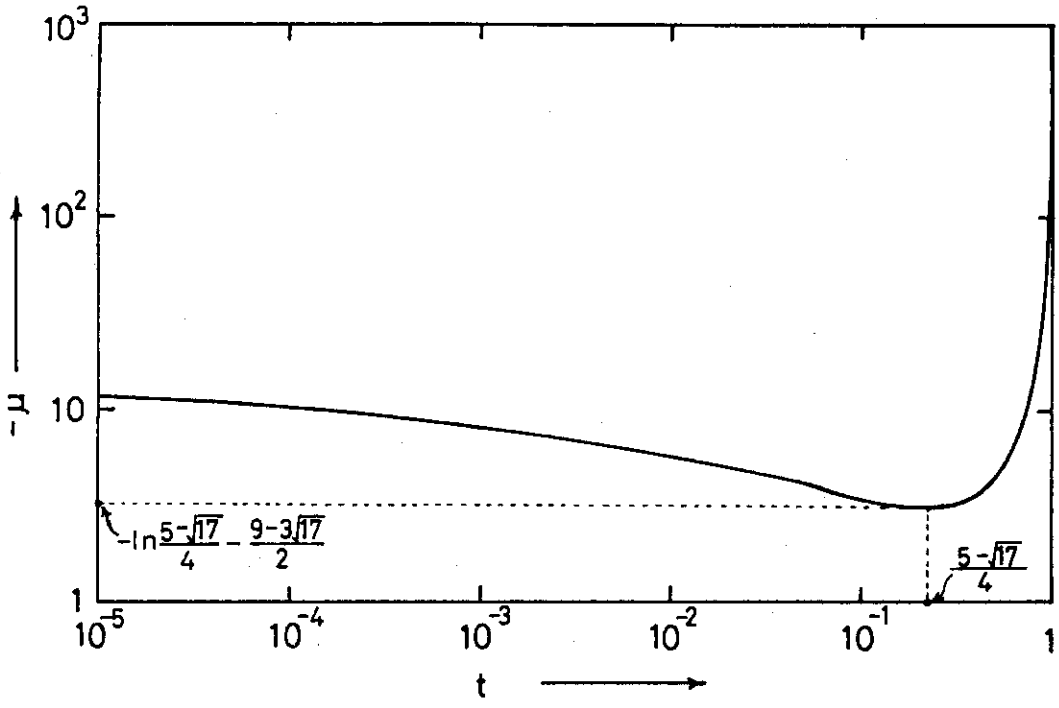


Fig.6 The inversed function of $\mu=\ln t+t-(1+t)^2/(1-t)$ to obtain polymodal conditions of the first moment distribution.

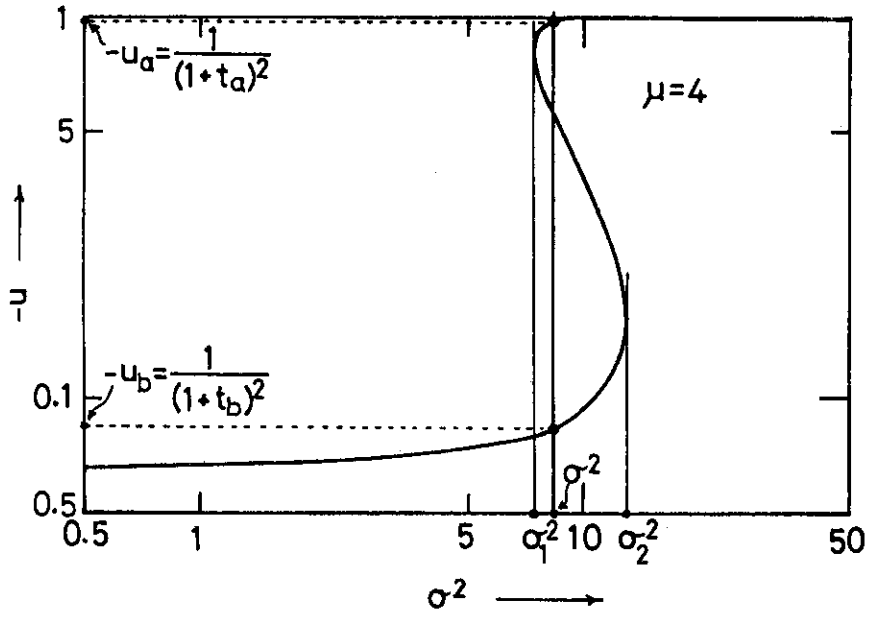


Fig.7 An example of mode of the polymodal hybrid lognormal distribution.

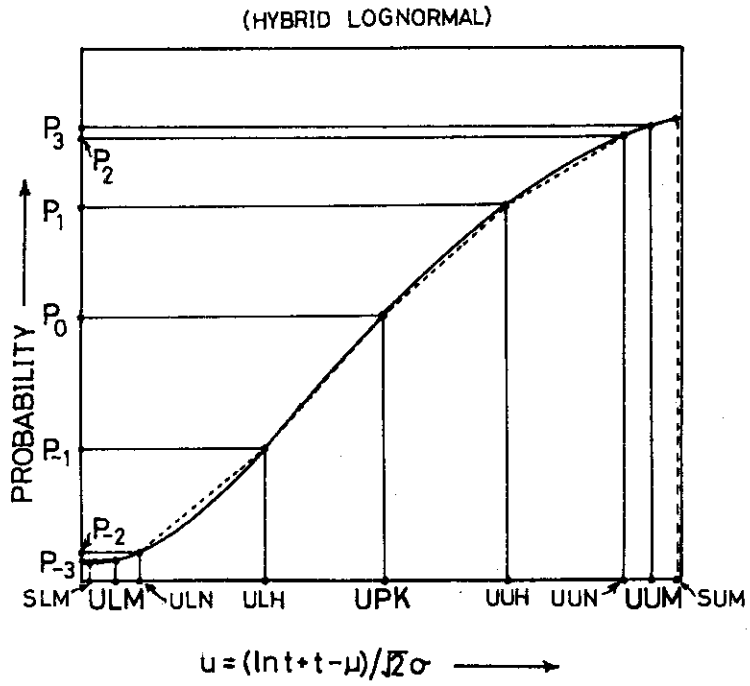


Fig.8 Polygon graph approximations of the moment distribution on hybrid lognormal probability paper.

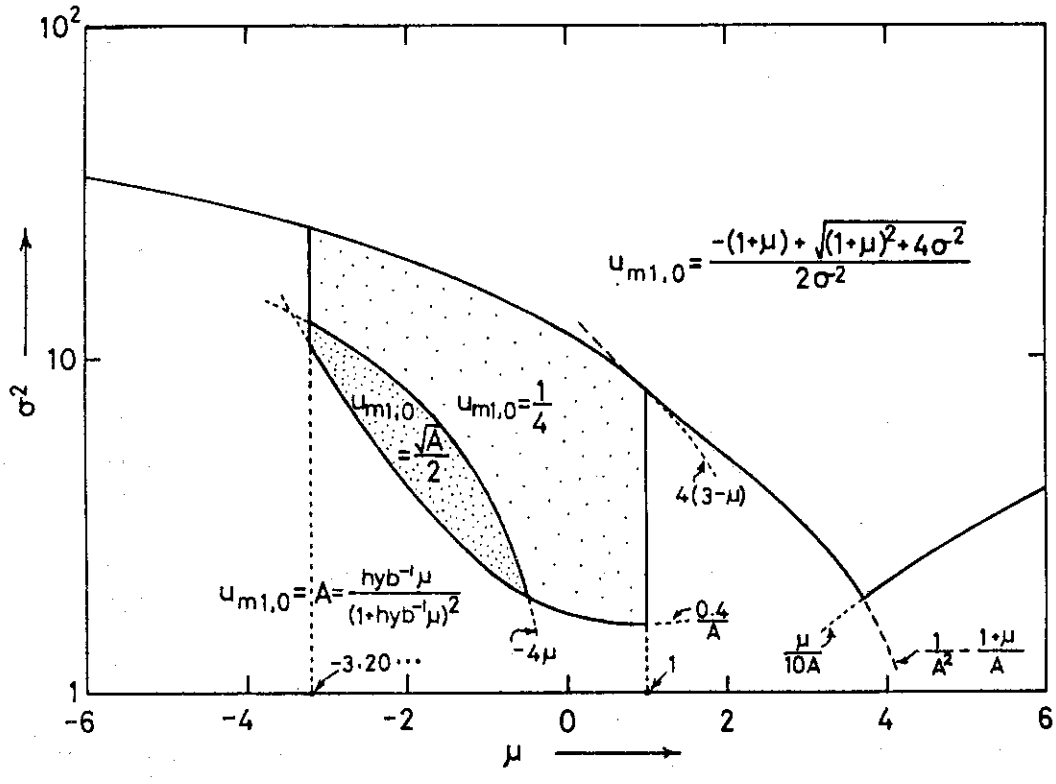
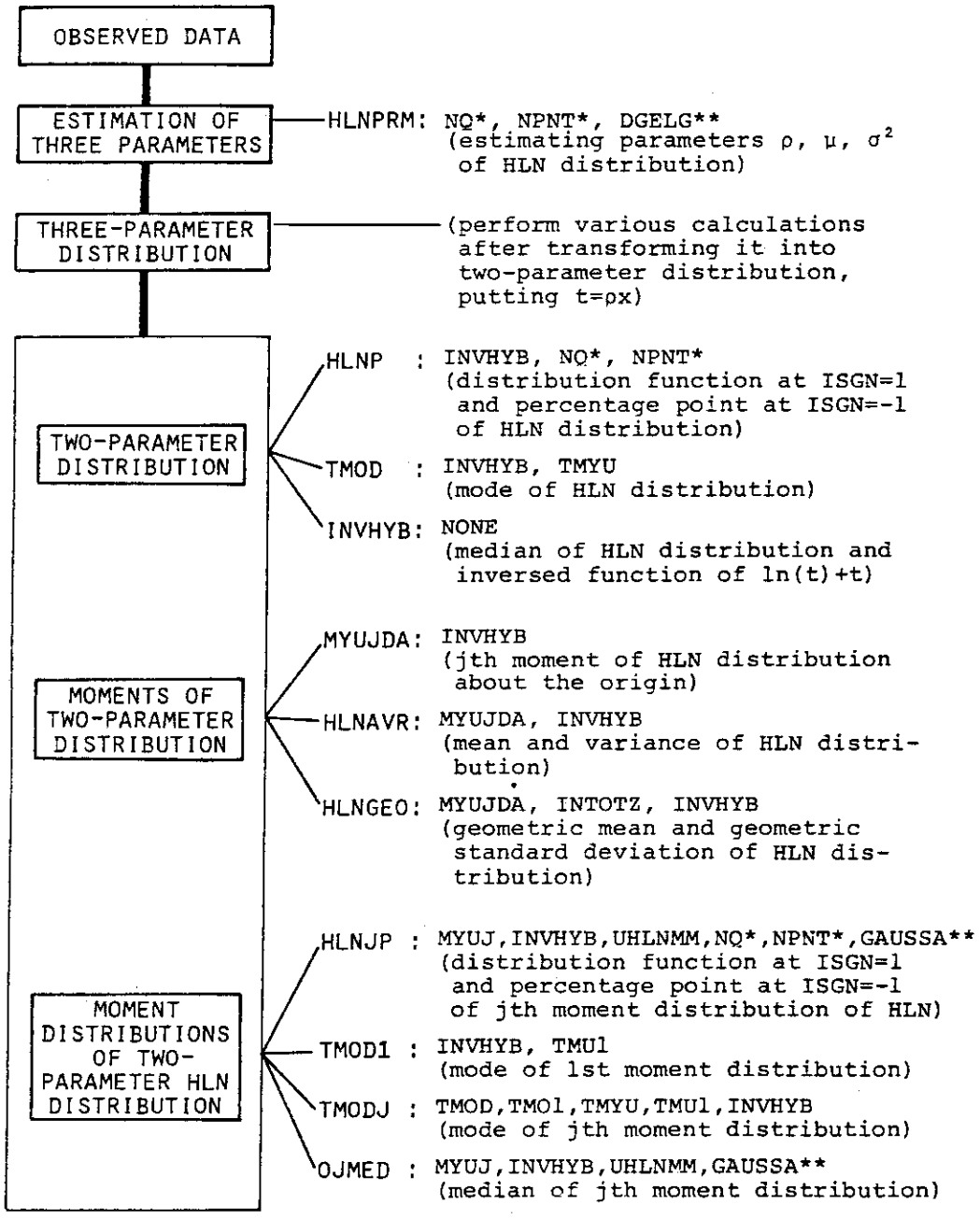


Fig.9 Initial values $u_{m1,0}$ of mode of the first moment distribution according to the parameters μ and σ^2.



AUXILIARY PROGRAMS

INTOTZ: INVHYB/ integral of $\int_{\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}tz\,e^{-\frac{z^2}{2}}dz$, where $t=hyb^{-1}(\mu+\sigma z)$.

MYUJ : INVHYB/ maximum point of modified integrand and integral interval of jth moment of HLN distribution by Gauss-Legendre integration.

UHLNMM: NONE / modified integrand of HLN moment distribution.

TMYU : INVHYB/ inversed function of $\mu=(1+t)^2/2t+\ln(t)+t$.

TMUI : INVHYB/ inversed function of $\mu=(1+t)^2/(t-1)+\ln(t)+t$.

NQ* : NONE / upper probability of normal distribution.

NPNT* : NQ* / percentage point of normal distribution.

DGELG**: NONE / solution of linear simultaneous equations.

GAUSSA**: NONE/ Gauss-Legendre integration of a given function.

Fig.10 Summary of subroutines and function subprograms relating to hybrid lognormal distributions, where function subprograms are INVHYB and UHLNMM. (*, **: see refs.8 and 9, respectively)

付録　混成対数正規分布に関連した計算プログラムリスト

プログラムの構成はFig.10に示されている。以下にプログラムリストの目次を示す。

1. パラメータρ，μ，σの推定
2. 分布関数$\Omega(t \mid \mu, \sigma^2)$とパーセント点$\Omega^{-1}(P \mid \mu, \sigma^2)$
3. HLN分布$\Omega(\mu, \sigma^2)$の最頻値
4. $\ln t + t$の逆関数hyb^{-1}／HLN分布$\Omega(\mu, \sigma^2)$の中央値$\tilde{t}$
5. j次の積率$\phi_j(\mu, \sigma)$
6. HLN分布$\Omega(\rho, \mu, \sigma^2)$の平均値と分散
7. HLN分布$\Omega(\rho, \mu, \sigma^2)$の幾何平均値と幾何標準偏差
8. 積率分布関数$\Omega_j(t \mid \mu, \sigma^2)$とパーセント点$\Omega_j^{-1}(P \mid \mu, \sigma^2)$
9. 1次積率分布$\Omega_1(\mu, \sigma^2)$の最頻値
10. j次積率分布$\Omega_j(\mu, \sigma^2)$の最頻値
11. j次積率分布$\Omega_j(\mu, \sigma^2)$の中央値

以下は補助プログラムである。

12. パラメータμによる$\sigma\phi_1(\mu, \sigma)$の微係数
13. 積率分布の被積分関数の最大点と両裾点
14. 積率分布の被積分関数に比例する関数
15. $\mu = (1+t)^2/2t + \ln t + t$の逆関数：分布$\Omega(\mu, \sigma^2)$の多峰性の条件
16. $\mu = (1+t)^2/(t-1) + \ln t + t$の逆関数：分布$\Omega_1(\mu, \sigma^2)$の多峰性の条件

上記以外は他の文献から引用した補助プログラムである。

17. 正規分布の上側確率[8)]
18. 正規分布の上側確率に対するパーセント点[8)]
19. 連立一次方程式の解法[9)]
20. ガウス・ルジャンドル積分[9)]

1. パラメータ ρ, μ, σ の推定

```
C     ..................................................................
C     .                                                                .
C     .              SUBROUTINE HLNPRM(X,F,WK,N,NN,COF)                .
C     .                                                                .
C     .  ** PURPOSE **                                                 .
C     .       ESTIMATION OF PARAMETERS RO,UM,SM OF HLN DISTRIBUTION    .
C     .                                                                .
C     .  ** PARAMETERS **                                              .
C     .       X   - ARRAY OF UPPER LIMITS OF INTERVALS OF DATA         .
C     .       F   - ARRAY OF FREQUENCIES OF DATA BELONGING TO DATA IN- .
C     .             TERVALS                                            .
C     .       WK  - ARRAY OF WORKING AREA                              .
C     .       N   - DIMENSION OF ARRAYS X, F AND WK                    .
C     .       NN  - THE NUMBER OF DATA INTERVALS FOR FITTING, NN<=N    .
C     .       COF - AREA FOR STORING RESULTANT PARAMETERS OF RO,UM & SM.
C     .                                                                .
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF Y=LN(T)+T                    .
C     .       DGELG- SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS         .
C     .                                                                .
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .
C     .       LEAST SQUARE METHOD                                      .
C     .                                                                .
C     ..................................................................
C
      SUBROUTINE HLNPRM(X,F,WK,N,NN,COF)
      REAL*8 X(N),F(N),WK(N),COF(3),A(3,3),R(3),AA,BB,DY,D,E
      AA=0.25D0
      BB=0.375D0
C
      WK(1)=F(1)
      DO  5 I=2,NN
    5 WK(I)=WK(I-1)+F(I)
C
      E=1.D0/(WK(NN)+AA)
      DO 10 I=1,NN
   10 WK(I)=(WK(I)-BB)*E
C
      I1=1
      I2=NN
      DO 25 I=1,NN
      IF(WK(I).GT.1.D-6) GO TO 15
      I1=I1+1
      WK(I)=0.D0
      GO TO 25
   15 E=1.D0-WK(I)
      IF(E.GT.1.D-6) GO TO 20
      I2=I2-1
      IF(I2.LT.I1) I2=I1
      WK(I)=1.D0
      GO TO 25
   20 CALL NPNT(E,1.D-6,D)
      WK(I)=D
   25 CONTINUE
C
      DO 30 J=1,3
      R(J)=0.D0
      DO 30 I=1,3
   30 A(I,J)=0.D0
      DO 35 I=I1,I2
      DY=DLOG(X(I))
      A(3,1)=A(3,1)+DY
      A(2,1)=A(2,1)+X(I)
      A(2,2)=A(2,2)+X(I)*X(I)
      A(3,2)=A(3,2)+X(I)*DY
      R(1)=R(1)+WK(I)
      R(2)=R(2)+WK(I)*X(I)
      R(3)=R(3)+WK(I)*DY
   35 A(3,3)=A(3,3)+DY*DY
      A(1,1)=I2-I1+1
      A(1,2)=A(2,1)
```

```
      A(1,3)=A(3,1)                                                     00007200
      A(2,3)=A(3,2)                                                     00007300
      CALL DGELG(R,A,3,1,1.D-14,ILL)                                    00007400
      IF(ILL.NE.0) WRITE(6,700) ILL                                     00007500
  700 FORMAT(5X'ERRORS OCCUR AT DGELG IN HLNPRM',5X'ILL=',I5)           00007600
      IF(R(2).GT.1.D-60) GO TO 45                                       00007700
      IF(R(3).GT.1.D-60) GO TO 45                                       00007800
      WRITE(6,750) (R(4-I), I=1,3)                                      00007900
  750 FORMAT(5X'FAILED TO GET THE PARAMETERS OF HLN DISTRIBUTION IN HLNP00008000
     *RM'/5X'A*LNX+B*X+C    ',1P3D12.5)                                 00008100
      COF(1)=1.D0                                                       00008200
      COF(2)=0.D0                                                       00008300
      COF(3)=1.D0                                                       00008400
      GO TO 50                                                          00008500
   45 COF(1)=R(2)/R(3)                                                  00008600
      COF(2)=DLOG(COF(1))-R(1)/R(3)                                     00008700
      COF(3)=1.D0/R(3)                                                  00008800
   50 RETURN                                                            00008900
      END                                                               00009000
```

2. 分布関数$\Omega(t \mid \mu, \sigma^2)$とパーセント点$\Omega^{-1}(P \mid \mu, \sigma^2)$

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE  HLNP(T,UM,SM,P,ISGN)                  .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .       COMPUTATION OF DISTRIBUTION FUNCTION OR PERCENTAGE POINTS.00000600
C     .       OF HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION, ACCORDING TO ISGN=1 OR .00000700
C     .       NOT, WHERE DISTRIBUTION FUNCTION IS INTGRL 0 TO T OF 1/( .00000800
C     .       SQRT(TWOPI)*SM)*(1/T+1)*EXP(-(LN(T)+T-UM)**2/(2*SM**2))DT.00000900
C     .       NOTICE: P OR 1-P MUST BE GREATER THAN 1.D-14 AT ISGN=-1. .00001000
C     .                                                                .00001100
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001200
C     .       T    - A POINT OF HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION          .00001300
C     .       UM   - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T    .00001400
C     .       SM   - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, S.D. OF LN(T)+T    .00001500
C     .       P    - DISTRIBUTION FUNCTION OF HYBRID LOGNORMAL         .00001600
C     .       ISGN- MODE OF CALCULATION                                .00001700
C     .            =+1: COMPUTING DISTRIBUTION FUNCTION P AT GIVEN T   .00001800
C     .            =-1: COMPUTING PERCENTAGE POINT T AT GIVEN P        .00001900
C     .                                                                .00002000
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00002100
C     .       NQ     -UPPER PROBABILITY INTEGRAL OF NORMAL DISTRIBUTION .00002200
C     .       NPNT   -A PERCENTAGE POINT OF NORMAL DISTRIBUTION        .00002300
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF Y=LN(T)+T                    .00002400
C     .                                                                .00002500
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002600
C     .                                                                .00002700
C     ..................................................................00002800
C                                                                       00002900
      SUBROUTINE HLNP(T,UM,SM,P,ISGN)                                   00003000
      DOUBLE PRECISION T,UM,SM,P,U,Q,INVHYB                             00003100
      IF(ISGN.NE.1) GO TO 10                                            00003200
      U=(DLOG(T)+T-UM)/SM                                               00003300
      CALL NQ(U,Q)                                                      00003400
      P=1.D0-Q                                                          00003500
      GO TO 30                                                          00003600
   10 IF(ISGN.NE.-1) GO TO 25                                           00003700
      Q=1.D0-P                                                          00003800
      U=0.D0                                                            00003900
      IF(P.LT.1.D-14.OR.Q.LT.1.D-14) GO TO 20                           00004000
      CALL NPNT(Q,1.D-6,U)                                              00004100
   20 T=INVHYB(UM+U*SM)                                                 00004200
      GO TO 30                                                          00004300
   25 WRITE(6,600)                                                      00004400
  600 FORMAT(5X'ISGN IS NOT -1 NOR +1 IN SUBROUTINE HLNP.')             00004500
   30 RETURN                                                            00004600
      END                                                               00004700
```

3. HLN分布Ω(μ, σ^2)の最頻値

```
C                                                                       .00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                 .00000300
C     .              SUBROUTINE TMOD(UM,SM,TMO,TM2)                     .00000400
C     .                                                                 .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                  .00000600
C     .       COMPUTATION OF MODE OF THE HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION  .00000700
C     .                                                                 .00000800
C     .  ** PARAMETERS **                                               .00000900
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T      .00001000
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, S.D. OF LN(T)+T      .00001100
C     .       TMO - MODE OF THE HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION           .00001200
C     .       TM2 - THE SECOND MODE OF THE POLYMODAL HLN DISTRIBUTION   .00001300
C     .                                                                 .00001400
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                     .00001500
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T                       .00001600
C     .       TMYU  -INVERSED FUNCTION OF UM=(1+T)**2/2/T+LN(T)+T       .00001700
C     .                                                                 .00001800
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                    .00001900
C     .       NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-.00002000
C     .       CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION METHOD                .00002100
C     .                                                                 .00002200
C     ..................................................................00002300
C                                                                        00002400
      SUBROUTINE TMOD(UM,SM,TMO,TM2)                                     00002500
      REAL*8 UM,SM,TMO,TM2,U,T,FF,SS,AA,T1,T2,SA,SB,UA,UB,TT,DEPS,INVHYB00002600
      REAL*8 U1,U2                                                       00002700
      DATA DEPS/1.D-6/                                                   00002800
      SS=SM*SM                                                           00002900
      AA=1.D0+INVHYB(UM)                                                 00003000
      IF(UM.LE.-2.82D0) GO TO 22                                         00003100
      IF(UM.GE.1.901387711D0) GO TO 26                                   00003200
      IF(1.D1*SS.LE.AA*AA) GO TO 24                                      00003300
      IF(SS.GE.UM+2.9457D0) GO TO 22                                     00003400
      U=-1.D0/AA                                                         00003500
      GO TO 36                                                           00003600
   22 U=-1.D0                                                            00003700
      GO TO 36                                                           00003800
   24 U=-1.D0/AA**2                                                      00003900
      GO TO 36                                                           00004000
   26 IF(UM.GT.2.D0) GO TO 27                                            00004100
      IF(SS.LE.4.740D0) GO TO 24                                         00004200
      IF(SS.GE.4.983D0) GO TO 22                                         00004300
      GO TO 29                                                           00004400
   27 TT=UM+2.D0+1.5D0/UM                                                00004500
      IF(SS.LE.TT) GO TO 24                                              00004600
      TT=INVHYB(UM-0.6055)/1.5                                           00004700
      TT=(1.+TT)**4/2./TT                                                00004800
      IF(SS.GE.TT) GO TO 22                                              00004900
   29 CALL TMYU(UM,T1,T2)                                                00005000
      SA=(1.D0+T1)**4/2.D0/T1                                            00005100
      SB=(1.D0+T2)**4/2.D0/T2                                            00005200
      IF(SS.LT.SA) GO TO 24                                              00005300
      IF(SS.GT.SB) GO TO 22                                              00005400
      UA=-1.D0/(1.D0+T1)**2                                              00005500
      UB=-1.D0/(1.D0+T2)**2                                              00005600
      U=-1.D0                                                            00005700
      T=INVHYB(UM+U*SS)                                                  00005800
   28 FF=(1.D0+U*(1.D0+T)**2)/((1.D0+T)**2+2.D0*SS*U*T)                  00005900
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 30                                      00006000
      U=U-FF                                                             00006100
      IF(U.GE.UA) U=UA*(1.D0+DEPS)                                       00006200
      T=INVHYB(UM+U*SS)                                                  00006300
      GO TO 28                                                           00006400
   30 T1=T                                                               00006500
      U1=U                                                               00006600
      U=-1.D0/AA**2                                                      00006700
      T=INVHYB(UM+U*SS)                                                  00006800
   32 FF=(1.D0+U*(1.D0+T)**2)/((1.D0+T)**2+2.D0*SS*U*T)                  00006900
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 34                                      00007000
      U=U-FF                                                             00007100
```

```
      IF(U.LE.UB) U=UB*(1.D0-DEPS)
      T=INVHYB(UM+U*SS)
      GO TO 32
   34 T2=T
      U2=U
      TM0=T1
      TM2=T2
      IF(T1.LT.1.D-60) GO TO 60
      TT=(U2**2-U1**2)*SS*0.5D0
      TT=(1./T1+1.)/(1./T2+1.)*DEXP(TT)
      IF(TT.LT.1.D0) TM0=T2
      IF(TT.LT.1.D0) TM2=T1
      GO TO 60
   36 T=INVHYB(UM+U*SS)
   38 FF=(1.D0+U*(1.D0+T)**2)/((1.D0+T)**2+2.D0*SS*U*T)
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 40
      U=U-FF
      T=INVHYB(UM+U*SS)
      GO TO 38
   40 TM0=T
      TM2=TM0
   60 RETURN
      END
```

4. lnt + t の逆関数 hyb^{-1} ／ＨＬＮ分布Ω(μ, σ^2)の中央値 $\tilde{t}$

```
C     ..............................................................
C     .
C     .              FUNCTION INVHYB(Y)
C     .
C     .   ** PURPOSE **
C     .        COMPUTATION OF INVERSED FUNCTION OF Y=LN(X)+X, OR MEDIAN
C     .        INVHYB(UM) OF THE HYBRID LOGNORMAL OMEGA(UM,SM)
C     .
C     .   ** PARAMETERS **
C     .        Y   - A POINT OF INVERSED FUNCTION OF Y=LN(X)+X
C     .
C     .   ** REQUIRED SUBROUTINES **
C     .        NONE
C     .
C     .   ** METHOD OF COMPUTATION **
C     .        NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-
C     .        CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION; DEXP(Y) FOR Y SMALL-
C     .        ER THAN OR EQUAL TO -0.8, AND POLYGON GRAPHS FOR Y GREAT-
C     .        ER THAN -0.8.
C     .
C     ..............................................................
C
      DOUBLE PRECISION FUNCTION INVHYB(Y)
      DOUBLE PRECISION Y,X,E,DEPS
      DATA DEPS/1.D-12/
      IF(Y.GT.-8.D-1) GO TO 2
      X=DEXP(Y)
      IF(Y.LE.-27.66D0) GO TO 15
      X=X/(1.D0+X)
      IF(Y+13.48D0) 15,15,10
    2 IF(Y.LE.2.D0) GO TO 6
      IF(Y.LE.9.D0) GO TO 3
      X=Y-2.08D0
      GO TO 9
    3 IF(Y.LE.6.D0) GO TO 4
      X=5.8D0/6.8D0*(Y-7.557857917552 4D0)+5.8D0
      GO TO 9
    4 IF(Y.LE.4.D0) GO TO 5
      X=3.6D0/4.6D0*(Y-4.8809338454621D0)+3.6D0
      GO TO 9
    5 X=2.2D0/3.2D0*(Y-2.988457360364 3D0)+2.2D0
      GO TO 9
    6 IF(Y.LE.5.D-1) GO TO 7
      X=0.5D0*(Y+1.D0)
      GO TO 9
    7 IF(DABS(Y).GE.5.D-5) GO TO 8
      X=5.67143290409783873D-1
      IF(DABS(Y).GT.DEPS) X=X/(1.D0+X)*(Y-DLOG(X)-X)+X
      GO TO 15
    8 X=0.56D0/1.56D0*(Y+1.9818495252942D-2)+5.6D-1
    9 X=X/(1.D0+X)*(Y-DLOG(X)-X)+X
   10 E=1.D0-(DLOG(X)+X)/Y
      IF(DABS(E).GT.DEPS) GO TO 9
   15 INVHYB=X
      RETURN
      END
```

5. j 次の積率 $\phi_j(\mu, \sigma)$

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE MYUJDA(UM,SM,J,MUJ)                    .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       COMPUTATION OF THE JTH MOMENT OF HYBRID LOGNORMAL DISTRI-.00000700
C     .       BUTION ABOUT THE ORIGIN, INTGRL -INF. TO +INF. OF 1/SQRT .00000800
C     .       (PAI)*INVHYB(UM+SQRT(2)*SM*U)**J*EXP(-U*U)*DU            .00000900
C     .                                                                .00001000
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001100
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (MEAN OF LN(T)+T)   .00001200
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (S.D. OF LN(T)+T)   .00001300
C     .       J   - THE DEGREE OF THE MOMENT                           .00001400
C     .       MUJ - THE JTH MOMENT OF HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION    .00001500
C     .                                                                .00001600
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001700
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF Y=LN(T)+T                    .00001800
C     .                                                                .00001900
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002000
C     .       GAUSS-HERMITE INTEGRATION METHOD IS USED.                .00002100
C     .                                                                .00002200
C     ..................................................................00002300
C                                                                       00002400
      SUBROUTINE MYUJDA(UM,SM,J,MUJ)                                    00002500
      DOUBLE PRECISION UM,SM,SIG,MUJ,W(20),U(20),INVHYB,T               00002600
      DATA W/              2.229393645534151D-13,4.399340992273181D-10,00002700
     *1.086069370769282D-07,7.802556478532064D-06,2.283386360163540D-04,00002800
     13.243773342237862D-03,2.481052088746361D-02,1.090172060200233D-01,00002900
     22.866755053628341D-01,4.622436696006101D-01,4.622436696006101D-01,00003000
     32.866755053628341D-01,1.090172060200233D-01,2.481052088746361D-02,00003100
     43.243773342237862D-03,2.283386360163540D-04,7.802556478532064D-06,00003200
     51.086069370769282D-07,4.399340992273181D-10,2.229393645534151D-13/00003300
      DATA U/             -5.387480890011233D+0,-4.603682449550744D+0,00003400
     *-3.944764040115625D+0,-3.347854567383216D+0,-2.788806058428130D+0,00003500
     1-2.254974002089276D+0,-1.738537712116586D+0,-1.234076215395323D+0,00003600
     2-7.374737285453944D-1,-2.453407083009012D-1, 2.453407083009012D-1,00003700
     3 7.374734285453944D-1, 1.234076215395323D+0, 1.738537712116586D+0,00003800
     4 2.254974002089276D+0, 2.788806058428130D+0, 3.347854567383216D+0,00003900
     5 3.944764041156 25D+0, 4.603682449550744D+0, 5.387480890011233D+0/ 00004000
      SIG=1.414213562373 1D0*SM                                         00004100
      MUJ=0.D0                                                          00004200
      DO 5 I=1,20                                                       00004300
      T=INVHYB(UM+SIG*U(I))                                             00004400
    5 MUJ=MUJ+W(I)*T**J                                                 00004500
      MUJ=MUJ*0.5641895835477560D0                                      00004600
      RETURN                                                            00004700
      END                                                               00004800
```

6. HLN分布Ω(ρ, μ, σ²)の平均値と分散

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE HLNAVR(RO,UM,SM,AV,VR)                 .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       COMPUTATION OF MEAN AND VARIANCE OF HYBRID LOGNORMAL     .00000700
C     .       DISTRIBUTION WITH PARAMETERS OF RO, UM AND SM            .00000800
C     .                                                                .00000900
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001000
C     .       RO  - A RECIPROCAL OF SCALE PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL.00001100
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (MEAN OF LN(T)+T)   .00001200
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (S.D. OF LN(T)+T)   .00001300
C     .       AV  - MEAN OF HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION WITH PARAMET-.00001400
C     .             ER RO, UM AND SM                                   .00001500
C     .       VR  - VARIANCE OF THE HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION      .00001600
C     .                                                                .00001700
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001800
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF Y=LN(T)+T                    .00001900
C     .       MYUJDA-THE JTH MOMENT DISTRIBUTION FUNCTION              .00002000
C     .                                                                .00002100
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002200
C     .       GAUSS-HERMITE INTEGRATION METHOD IS USED.                .00002300
C     .                                                                .00002400
C     ..................................................................00002500
C                                                                       00002600
      SUBROUTINE HLNAVR(RO,UM,SM,AV,VR)                                 00002700
      DOUBLE PRECISION RO,UM,SM,AV,VR                                   00002800
      CALL       MYUJDA(UM,SM,1,AV)                                     00002900
      CALL       MYUJDA(UM,SM,2,VR)                                     00003000
      VR=VR-AV*AV                                                       00003100
      AV=AV/RO                                                          00003200
      VR=VR/(RO*RO)                                                     00003300
      RETURN                                                            00003400
      END                                                               00003500
```

7. HLN分布Ω（ρ, μ, σ^2）の幾何平均値と幾何標準偏差

```
C                                                                       00000100
C     ......................................................................00000200
C     .                                                                 .00000300
C     .              SUBROUTINE HLNGEO(RO,UM,SM,GM,GS)                  00000400
C     .                                                                 .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                  .00000600
C     .       COMPUTATION OF GEOMETRIC MEAN AND GEOMETRIC STANDARD      .00000700
C     .       DEVIATION OF HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION WITH           .00000800
C     .       PARAMETERS OF RO,UM AND SM                                .00000900
C     .                                                                 .00001000
C     .  ** PARAMETERS **                                               .00001100
C     .       RO  - A RECIPROCAL OF SCALE PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL.00001200
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (MEAN OF LN(T)+T)    .00001300
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (S.D. OF LN(T)+T)    .00001400
C     .       GM  - GEOMETRIC MEAN OF HLN DISTRIBUTION WITH RO,UM,SM.   .00001500
C     .       GS  - GEOMETRIC STANDARD DEVIATION OF HLN DISTRIBUTION    .00001600
C     .                                                                 .00001700
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                     .00001800
C     .       MYUJDA-THE JTH MOMENT DISTRIBUTION FUNCTION               .00001900
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF Y=LN(T)+T                     .00002000
C     .       INTOTZ-INTEGRAL OF T*Z*EXP(-Z*Z/2)/SQRT(2*PAI)DZ OVER     .00002100
C     .              BOTH INFINITIVES, WHERE T=INVHYB(UM+SM*Z)          .00002200
C     .                                                                 .00002300
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                    .00002400
C     .       GAUSS-HERMITE INTEGRATION METHOD IS USED.                 .00002500
C     .                                                                 .00002600
C     ......................................................................00002700
C                                                                        00002800
      SUBROUTINE HLNGEO(RO,UM,SM,GM,GS)                                  00002900
      REAL*8 RO,UM,SM,GM,GS,AV,VR,TZ                                     00003000
      CALL MYUJDA(UM,SM,1,AV)                                            00003100
      CALL MYUJDA(UM,SM,2,VR)                                            00003200
      CALL INTOTZ(UM,SM,TZ)                                              00003300
      GM=DEXP(UM-AV)/RO                                                  00003400
      GS=DEXP(DSQRT(SM*SM+VR-AV*AV-2.D0*SM*TZ))                          00003500
      RETURN                                                             00003600
      END                                                                00003700
```

8. 積率分布関数$\Omega_j(t \mid \mu, \sigma^2)$とパーセント点$\Omega^{-1}(P \mid \mu, \sigma^2)$

```
C
C     ..................................................................
C     .
C     .              SUBROUTINE HLNJP(T,UM,SM,JTH,P,ISGN)
C     .
C     .   ** PURPOSE **
C     .        COMPUTATION OF DISTRIBUTION FUNCTION OR PERCENTAGE POINTS
C     .        OF THE JTH MOMENT DISTRIBUTION OF HYBRID LOGNORMAL,
C     .        ACCORDING TO ISGN=1 OR NOT.
C     .        NOTICE: P OR 1-P MUST BE GREATER THAN 1.D-14 AT ISGN=-1.
C     .        THE CALCULATED MOMENT MUST BE GREATER THAN 5.D-61.
C     .
C     .   ** PARAMETERS **
C     .        T   - A POINT OF THE JTH MOMENT DISTRIBUTION
C     .        UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T
C     .        SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, S.D. OF LN(T)+T
C     .        JTH - THE ORDER OF THE HLN MOMENT DISTRIBUTION
C     .        P   - THE JTH MOMENT DISTRIBUTION FUNCTION
C     .        ISGN- MODE OF CALCULATION
C     .             =+1: COMPUTING DISTRIBUTION FUNCTION P AT GIVEN T
C     .             =-1: COMPUTING PERCENTAGE POINT T AT GIVEN P
C     .
C     .   ** REQUIRED SUBROUTINES **
C     .        MYUJ  -MAXIMUM POINT AND BOTH TAILS OF MODIFIED INTEGRAND
C     .               OF HLN MOMENT DISTRIBUTION
C     .        GAUSSA-GAUSS LEGENDRE INTEGRATION
C     .        NQ    -UPPER PROBABILITY INTEGRAL OF NORMAL DISTRIBUTION
C     .        NPNT  -A PERCENTAGE POINT OF NORMAL DISTRIBUTION
C     .        UHLNMM-MODIFIED INTEGRAND OF HLN MOMENT DISTRIBUTION
C     .        INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T
C     .
C     .   ** METHOD OF COMPUTATION **
C     .        NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-
C     .        CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION METHOD OF POLYGON
C     .        GRAPH ON LOGNORMAL PROBABILITY PAPER.
C     .
C     ..................................................................
C
      SUBROUTINE HLNJP(T,UM,SM,JTH,P,ISGN)
      REAL*8 UYM,SIG,T,UM,SM,P,U,MUJ,UPK,ULM,UUM,FF,OJM,OJ,OMGJ,UHLNMM,
     *INVHYB,Z,Z1,Z2,U1,U2,PJ1,PP,UUU
      EXTERNAL UHLNMM
      COMMON/MMTOZJ/UYM,SIG,J
      OMGJ=0.D0
      UYM=UM
      SIG=SM*1.414213562373D0
      J=JTH
      CALL MYUJ(UYM,SIG,J,UPK,ULM,UUM,ILL)
      CALL GAUSSA(UHLNMM,ULM,UUM,48,MUJ)
      IF(ILL.NE.0) MUJ=1.D-61
      IF(ISGN.NE.1) GO TO 10
CCC      DISTRIBUTION FUNCTIONS
      IF(MUJ.LT.1.D-60) GO TO 8
      U=(DLOG(T)+T-UYM)/SIG
      IF(U-UPK) 1,1,5
    1 UUU=ULM
      FF=0.1D0*(UPK-ULM)
      IF(U-ULM.GE.FF) GO TO 3
      UUU=ULM-FF
      IF(UUU-U) 3,8,8
    3 CALL GAUSSA(UHLNMM,UUU,U,48,OJ)
      P=OJ/MUJ
      GO TO 90
    5 UUU=UUM
      FF=0.1D0*(UUM-UPK)
      IF(UUM-U.GE.FF) GO TO 7
      UUU=UUM+FF
      IF(U-UUU) 7,9,9
    7 CALL GAUSSA(UHLNMM,U,UUU,48,OJ)
      P=1.D0-OJ/MUJ
      GO TO 90
```

```
    8 P=0.D0
      GO TO 90
    9 P=1.D0
      GO TO 90
CCC      LOWER PERCENTAGE POINTS
   10 U=0.D0
      IF(ISGN.NE.-1) GO TO 80
      IF(MUJ.LT.1.D-60) GO TO 30
      IF(1.D0-P.LT.1.D-14.OR.P.LT.1.D-14) GO TO 30
      K=0
      U2=UPK
      CALL GAUSSA(UHLNMM,ULM,UPK ,48,OJM)
      OMGJ=OJM/MUJ
      IF(P-OMGJ) 11,29,12
   11 UUU=ULM
      PP=P
      L=-1
      GO TO 13
   12 UUU=UUM
      PP=1.D0-P
      L=+1
   13 U1=U2
      U2=(UPK+UUU)*0.5D0
      IF(L.EQ.-1) CALL GAUSSA(UHLNMM,UUU,U2,24,OJ)
      IF(L.EQ.+1) CALL GAUSSA(UHLNMM,U2,UUU,24,OJ)
      OMGJ=OJ/MUJ
      IF(PP-OMGJ) 14,29,16
   14 U1=U2
      U2=0.1D0*UPK+0.9D0*UUU
      IF(L.EQ.-1) CALL GAUSSA(UHLNMM,UUU,U2,24,OJ)
      IF(L.EQ.+1) CALL GAUSSA(UHLNMM,U2,UUU,24,OJ)
      OMGJ=OJ/MUJ
      IF(PP-OMGJ) 15,29,16
   15 U1=U2
      U2=U2+0.07D0*(UUU-UPK)
      UUU=UUU+0.1D0*(UUU-UPK)
      IF(L.EQ.-1) CALL GAUSSA(UHLNMM,UUU,ULM,24,OJ)
      IF(L.EQ.+1) CALL GAUSSA(UHLNMM,UUM,UUU,24,OJ)
      OMGJ=OJ/MUJ
      IF(OMGJ.LT.1.D-50) GO TO 29
      IF(PP-OMGJ) 29,29,16
   16 IF(L.EQ.-1) CALL GAUSSA(UHLNMM,UUU,U1,24,OJ)
      IF(L.EQ.+1) CALL GAUSSA(UHLNMM,U1,UUU,24,OJ)
      PJ1=OJ/MUJ
      CALL NPNT(PJ1,1.D-3,Z1)
      IF(L.EQ.-1) Z1=-Z1
      CALL NPNT(OMGJ,1.D-3,Z2)
      IF(L.EQ.-1) Z2=-Z2
      IF(DABS(Z2-Z1).LE.1.D-10) GO TO 29
      CALL NPNT(1.D0-P,1.D-3,Z)
   24 U=(U2-U1)*(Z-Z1)/(Z2-Z1)+U1
      PP=MUJ*PP
   25 IF(L.EQ.-1) CALL GAUSSA(UHLNMM,UUU,U,48,OJ)
      IF(L.EQ.+1) CALL GAUSSA(UHLNMM,U,UUU,48,OJ)
      OMGJ=OJ/MUJ
      FF=(OJ-PP)/UHLNMM(U)
      IF(L.EQ.+1) FF=-FF
      IF(DABS(FF).LT.1.D-10) GO TO 30
      U=U-FF
      K=K+1
      IF(K.LT.20) GO TO 25
   29 U=U2
   30 T=INVHYB(UYM+SIG*U)
      GO TO 90
   80 WRITE(6,600)
  600 FORMAT(5X'ISGN IS NOT -1 NOR +1 IN SUBROUTINE HLNJP.')
   90 RETURN
      END
```

9. 1次積率分布$\Omega_1(\mu, \sigma^2)$の最頻値

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE TMO1(UM,SM,TMO,TM2)                    .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       COMPUTATION OF MODE OF THE 1ST MOMENT DISTRIBUTION OF    .00000700
C     .       HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION                            .00000800
C     .                                                                .00000900
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001000
                                                                        00001100
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T     .00001200
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, S.D. OF LN(T)+T     .00001300
C     .       TMO - MODE OF THE FIRST MOMENT DISTRIBUTION              .00001400
C     .       TM2 - THE 2ND MODE OF THE POLYMODAL 1ST MOMENT DISTRIBUTI.00001500
C     .                                                                .00001600
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001700
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T                      .00001800
C     .       TMU1  -INVERSED FUNCTION OF UM=-(1+T)**2/(1-T)+LN(T)+T   .00001900
C     .                                                                .00002000
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002100
C     .       NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-.00002200
C     .       CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION METHOD               .00002300
C     .                                                                .00002400
C     ..................................................................00002500
C                                                                       00002600
      SUBROUTINE TMO1(UM,SM,TMO,TM2)                                    00002700
      REAL*8 UM,SM,TMO,TM2,U,T,FF,SS,AA,T1,T2,SA,SB,UA,UB,TT,DEPS,INVHYB00002800
      REAL*8 U1,U2,AU,SL                                                00002900
      DATA DEPS/1.D-6/                                                  00003000
      SS=SM*SM                                                          00003100
      AU=INVHYB(UM)                                                     00003200
      AA=AU/(1.D0+AU)**2                                                00003300
      IF(UM.LT.1.D0) GO TO 20                                           00003400
      SL=0.1D0*UM/AA                                                    00003500
      IF(UM.LT.3.75D0) SL=1.D0/AA**2-(1.D0+UM)/AA                       00003600
      IF(SS-SL) 15,10,10                                                00003700
   10 U=0.5D0*(-(1.D0+UM)+DSQRT((1.D0+UM)**2+4.D0*SS))/SS               00003800
      GO TO 65                                                          00003900
   15 T=INVHYB(UM+AA*SS)                                                00004000
      U=T/(1.D0+T)**2                                                   00004100
      GO TO 65                                                          00004200
   20 IF(UM.LT.-3.2023215 3D0) GO TO 40                                 00004300
   25 SL=4.D0*(3.D0-UM)                                                 00004400
      IF(SS.GT.SL) GO TO 10                                             00004500
      SL=0.4D0/AA                                                       00004600
      IF(SS.LE.SL) GO TO 15                                             00004700
   30 SL=-4.D0*UM                                                       00004800
      IF(SS.LT.SL) GO TO 35                                             00004900
      U=0.25D0                                                          00005000
      GO TO 65                                                          00005100
   35 U=0.5D0*DSQRT(AA)                                                 00005200
      T=INVHYB(UM+U*SS)                                                 00005300
      U=T/(1.D0+T)**2                                                   00005400
      GO TO 65                                                          00005500
   40 CALL TMU1(UM,T1,T2)                                               00005600
      SA=(1.D0+T2)**4/T2/(1.D0-T2)                                      00005700
      SB=(1.D0+T1)**4/T1/(1.D0-T1)                                      00005800
      IF(SS.LT.SA) GO TO 15                                             00005900
      IF(SS.GT.SB) GO TO 10                                             00006000
      UA=T1/(1.D0+T1)**2                                                00006100
      UB=T2/(1.D0+T2)**2                                                00006200
      T=INVHYB(UM+AA*SS)                                                00006300
      U=T/(1.D0+T)**2                                                   00006400
      T=INVHYB(UM+U*SS)                                                 00006500
   45 FF=1.D0+T                                                         00006600
      FF=(T-U*FF*FF)/(SS*T/FF-FF*FF-2.D0*SS*U*T)                        00006700
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 50                                     00006800
      U=U-FF                                                            00006900
      IF(U.GE.UA) U=UA*(1.D0-DEPS)                                      00007000
      T=INVHYB(UM+U*SS)                                                 00007100
```

```
      GO TO 45
   50 T1=T
      U1=U
      U=0.5D0*(-(1.D0+UM)+DSQRT((1.D0+UM)**2+4.D0*SS))/SS
      IF(U.GT.0.25D0) U=0.25D0
      T=INVHYB(UM+U*SS)
   55 FF=1.D0+T
      FF=(T-U*FF*FF)/(SS*T/FF-FF*FF-2.D0*SS*U*T)
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 60
      U=U-FF
      T=INVHYB(UM+U*SS)
      IF(T.GE.1.D0) GO TO 55
      IF(U.GT.UB) GO TO 55
      U=UB*(1.D0+DEPS)
      T=INVHYB(UM+U*SS)
      GO TO 55
   60 T2=T
      U2=U
      TM0=T1
      TM2=T2
      TT=(1.D0+T1)/(1.D0+T2)*DEXP(0.5D0*SS*(U2**2-U1**2))
      IF(TT.LT.1.D0) TM0=T2
      IF(TT.LT.1.D0) TM2=T1
      GO TO 80
   65 CONTINUE
      T=INVHYB(UM+U*SS)
   70 FF=1.D0+T
      FF=(T-U*FF*FF)/(SS*T/FF-FF*FF-2.D0*SS*U*T)
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 75
      U=U-FF
      T=INVHYB(UM+U*SS)
      GO TO 70
   75 TM0=T
      TM2=TM0
   80 RETURN
      END
```

10. j 次積率分布Ω_j (μ, σ^2) の最頻値

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE TMODJ(UM,SM,J,TMOJ,TM2)                .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       COMPUTATION OF MODE OF THE JTH MOMENT DISTRIBUTION OF    .00000700
C     .       HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION IN TERMS OF T              .00000800
C     .                                                                .00000900
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001000
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T     .00001100
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, S.D. OF LN(T)+T     .00001200
C     .       J   - THE ORDER OF THE HLN MOMENT DISTRIBUTION           .00001300
C     .       TMOJ- MODE OF THE JTH MOMENT DISTRIBUTION                .00001400
C     .       TM2 - THE SECOND MODE OF THE POLYMODAL MOMENT DISTRIBUTIO.00001500
C     .                                                                .00001600
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001700
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T                      .00001800
C     .       TMOD  -MODE OF THE HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION         .00001900
C     .       TMYU  -INVERSED FUNCTION OF UM=(1+T)**2/2/T+LN(T)+T      .00002000
C     .       TMO1  -MODE OF THE FIRST MOMENT DISTRIBUTION OF HLN DISTR.00002100
C     .       TMU1  -INVERSED FUNCTION OF UM=-(1+T)**2/(1-T)+LN(T)+T   .00002200
C     .                                                                .00002300
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002400
C     .       NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-.00002500
C     .       CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION METHOD               .00002600
C     .                                                                .00002700
C     ..................................................................00002800
C                                                                       00002900
      SUBROUTINE TMODJ(UM,SM,J,TMOJ,TM2)                                00003000
      REAL*8 UM,SM,TMOJ,TM2,U,T,SSJ,SLT,FF,INVHYB                       00003100
      IF(J-1) 5,10,15                                                   00003200
    5 CALL TMOD(UM,SM,TMOJ,TM2)                                         00003300
      J=0                                                               00003400
      GO TO 50                                                          00003500
   10 CALL TMO1(UM,SM,TMOJ,TM2)                                         00003600
      GO TO 50                                                          00003700
   15 SSJ=J*SM*SM                                                       00003800
      IF(UM+2.2D0) 20,20,25                                             00003900
   20 U=(J-1.D0)/J                                                      00004000
      GO TO 30                                                          00004100
   25 U=1.D0+INVHYB(UM)                                                 00004200
      U=(U-1.D0/J)/(U*U)                                                00004300
   30 SLT=1.D0/(U*U)-(1.D0+UM)/U                                        00004400
      IF(SSJ-SLT) 40,40,35                                              00004500
   35 U=1.D0+UM                                                         00004600
      U=0.5D0*(-U+DSQRT(U*U+4.D0*SSJ))/SSJ                              00004700
   40 T=INVHYB(UM+U*SSJ)                                                00004800
      FF=1.D0+T                                                         00004900
      FF=(FF*(1.D0-U*FF)-1.D0/J)/(SSJ*T/FF-FF*FF-2.D0*SSJ*T*U)          00005000
      IF(DABS(FF).LT.1.D-6) GO TO 45                                    00005100
      U=U-FF                                                            00005200
      GO TO 40                                                          00005300
   45 U=U*J*SM                                                          00005400
      TMOJ=T                                                            00005500
      TM2=T                                                             00005600
   50 RETURN                                                            00005700
      END                                                               00005800
```

11. j 次積率分布Ω_j（μ, σ^2）の中央値

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE OJMED(UM,SM,JTH,TMEJ)                   00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       COMPUTATION OF MEDIAN OF THE JTH MOMENT DISTRIBUTION OF  .00000700
C     .       HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION IN TERMS OF T              .00000800
C     .                                                                .00000900
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001000
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T     .00001100
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, S.D. OF LN(T)+T     .00001200
C     .       JTH - THE ORDER OF THE HLN MOMENT DISTRIBUTION           .00001300
C             TMEJ- MEDIAN OF THE JTH MOMENT DISTRIBUTION              .00001400
C     .                                                                .00001500
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001600
C     .       MYUJ  -MODE AND BOTH TAILS OF HYBRID LOGNORMAL           .00001700
C     .       GAUSSA-GAUSS LEGENDRE INTEGRATION                        .00001800
C     .       UHLNMM-INTEGRAND OF MOMENT DISTRIBUTION                  .00001900
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T                      .00002000
C     .                                                                .00002100
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002200
C     .       NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-.00002300
C     .       CULATED BY PUTTING U=UPK.                                .00002400
C     .                                                                .00002500
C     ..................................................................00002600
C                                                                       00002700
      SUBROUTINE OJMED(UM,SM,JTH,TMEJ)                                  00002800
      REAL*8 UYM,SIG,UM,SM,TMEJ,PP,U,MUJ,UPK,ULM,UUM,FF,OJ,UHLNMM,INVHYB00002900
      COMMON/MMTOZJ/UYM,SIG,J                                           00003000
      EXTERNAL UHLNMM                                                   00003100
      IF(J.GE.1) GO TO 1                                                00003200
      TMEJ=INVHYB(UM)                                                   00003300
      GO TO 20                                                          00003400
    1 UYM=UM                                                            00003500
      SIG=SM*1.4142135623734D0                                          00003600
      J=JTH                                                             00003700
      CALL MYUJ(UYM,SIG,J,UPK,ULM,UUM,ILL)                              00003800
      CALL GAUSSA(UHLNMM,ULM,UUM,48,MUJ)                                00003900
      U=UPK                                                             00004000
      PP=MUJ*0.5D0                                                      00004100
      K=0                                                               00004200
    5 CALL GAUSSA(UHLNMM,ULM,U,48,OJ)                                   00004300
      FF=(OJ-PP)/UHLNMM(U)                                              00004400
      IF(DABS(FF).LT.1.D-10) GO TO 10                                   00004500
      U=U-FF                                                            00004600
      K=K+1                                                             00004700
      IF(K.LT.20) GO TO 5                                               00004800
      U=0.D0                                                            00004900
   10 TMEJ=INVHYB(UYM+SIG*U)                                            00005000
   20 RETURN                                                            00005100
      END                                                               00005200
```

12. パラメータμによる$\sigma\phi_1(\mu,\sigma)$の微係数

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE INTOTZ(UM,SM,TZ)                       .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       INTEGRAL OF T*Z*EXP(-Z*Z/2)/SQRT(2*PAI)DZ OVER BOTH INFI-.00000700
C     .       NITIVES, WHERE T=INVHYB(UM+SM*Z). THIS IS USED TO OBTAIN .00000800
C     .       THE GEOMETRIC STANDARD DEVIATION OF THE HLN DISTRIBUTION .00000900
C     .                                                                .00001000
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001100
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (MEAN OF LN(T)+T)   .00001200
C     .       SM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (S.D. OF LN(T)+T)   .00001300
C     .       TZ  - RESULTANT INTEGRAL VALUE                           .00001400
C     .                                                                .00001500
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001600
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF Y=LN(T)+T                    .00001700
C     .                                                                .00001800
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00001900
C     .       GAUSS-HERMITE INTEGRATION METHOD IS USED.                .00002000
C     .                                                                .00002100
C     ..................................................................00002200
C                                                                       00002300
      SUBROUTINE INTOTZ(UM,SM,TZ)                                       00002400
      REAL*8 UM,SM,W(20),U(20),SIG,T,INVHYB                             00002500
      DATA W/                2.229393645534151D-13,4.399340992273181D-10,00002600
     *1.086069370769282D-07,7.802556478532064D-06,2.283386360163540D-04,00002700
     13.243773342237862D-03,2.481052088746361D-02,1.090172060200233D-01,00002800
     22.866755053628341D-01,4.622436696006101D-01,4.622436696006101D-01,00002900
     32.866755053628341D-01,1.090172060200233D-01,2.481052088746361D-02,00003000
     43.243773342237862D-03,2.283386360163540D-04,7.802556478532064D-06,00003100
     51.086069370769282D-07,4.399340992273181D-10,2.229393645534151D-13/00003200
      DATA U/               -5.387480890011233D+0,-4.603682449550744D+0,00003300
     *-3.944764040115625D+0,-3.347854567383216D+0,-2.788806058428130D+0,00003400
     1-2.254974002089276D+0,-1.738537712116586D+0,-1.234076215395323D+0,00003500
     2-7.374737285453944D-1,-2.453407083009012D-1, 2.453407083009012D-1,00003600
     3 7.374734285453944D-1, 1.234076215395323D+0, 1.738537712116586D+0,00003700
     4 2.254974002089276D+0, 2.788806058428130D+0, 3.347854567383216D+0,00003800
     5 3.944764041156 25D+0, 4.603682449550744D+0, 5.387480890011233D+0/ 00003900
      SIG=1.4142135623731D0*SM                                          00004000
      TZ=0.D0                                                           00004100
      DO 5 I=1,20                                                       00004200
      T=INVHYB(UM+SIG*U(I))                                             00004300
    5 TZ=TZ+W(I)*T*U(I)                                                 00004400
      TZ=TZ*0.7978845608028 65D0                                        00004500
      RETURN                                                            00004600
      END                                                               00004700
```

13. 積率分布の被積分関数の最大点と両裾点

```
C
C     ..................................................................
C     .
C     .              SUBROUTINE MYUJ(UYM,SIG,J,UPK,ULM,UUM,ILL)
C     .
C     .   ** PURPOSE **
C     .        COMPUTING MAXIMUM POINT OF MODIFIED INTEGRAND OF THE HLN
C     .        MOMENT DISTRIBUTION AND THE INTEGRAL INTERVAL FOR GAUSS-
C     .        LEGENDRE INTEGRATION OF THE MOMENT DISTRIBUTION
C     .
C     .   ** PARAMETERS **
C     .        UYM - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T
C     .        SIG - SQRT(2)*SGM, SGM IS STANDARD DEVIATION OF LN(T)+T
C     .        J   - THE ORDER OF THE HLN MOMENT DISTRIBUTION
C     .        UPK - MAXIMUM POINT OF THE MODIFIED INTEGRAND
C     .        ULM - LOWER TAIL OF THE MODIFIED INTEGRAND
C     .        UUM - UPPER TAIL OF THE MODIFIED INTEGRAND
C     .        ILL - CONDITIONS OF ERRORS
C     .              ILL=10: NOT CONVERGED AT CALCULATING MAXIMUM POINT
C     .              ILL=100: NOT CONVERGED AT CALCULATING INTEGRAL
C     .                       INTERVAL
C     .              ILL=110: NOT CONVERGED AT BOTH CALCULATIONS
C     .
C     .   ** REQUIRED SUBROUTINES **
C     .        INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T
C     .
C     .   ** METHOD OF COMPUTATION **
C     .        NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-
C     .        CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION METHOD .
C     .
C     ..................................................................
C
      SUBROUTINE MYUJ(UYM,SIG,J,UPK,ULM,UUM,ILL)
      DOUBLE PRECISION UYM,SIG,S,SS,SSJ,SLT,T,TT,U,EE,FF,DEPS,UPK,TPK,
     *ULM,UUM,INVHYB,DLU
      DATA EE,DEPS/-2.8952965460217D-2,1.D-3/
C     EE=-1.D0/15.D0/DLOG(10.D0)
      U=0.D0
      ILL=0
      T=INVHYB(UYM)
      IF(J.EQ.0) GO TO 5
      SS=J*SIG*0.5D0
      SSJ=SS*SIG
      SLT=1.D0+T
      IF(UYM.GT.0.68D0) GO TO 1
      DLU=0.D0
      SLT=SLT*(T-UYM)
      IF(UYM.LT.-3.5D0) GO TO 2
      SLT=SLT*1.5D0
      GO TO 2
    1 DLU=-UYM*DLOG(UYM)/(1.D0+UYM)
    2 K=0
      IF(SSJ.GT.SLT) GO TO 3
      U=1.D0+T
      U=1.D0/(1.D0+INVHYB(UYM+SSJ/U))
      GO TO 4
    3 S=(UYM+1.D0+DLU)/SSJ*0.5D0
      U=-S+DSQRT(S*S+1.D0/SSJ)
    4 T=INVHYB(UYM+SSJ*U)
      TT=T+1.D0
      FF=U*TT-1.D0
      NAME=4HUPK
      WRITE(6,640) NAME,K,U,T,FF,SLT
  640 FORMAT(6X'K,U,T,FF,SLT  ',A4,I2,1P4D12.5)
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 9
      U=U-FF/(TT+U*SSJ*T/TT)
      IF(K.EQ.0.AND.U.GT.20.D0) U=20.D0
      K=K+1
      IF(K.LT.20) GO TO 4
      ILL=10
    9 CONTINUE
```

```
      U=U*SS                                                            00007200
    5 UPK=U                                                             00007300
      TPK=INVHYB(UYM+SIG*UPK)                                           00007400
CCCCCC                                                                  00007500
      IF(J.NE.0) GO TO 7                                                00007600
      U=DSQRT(UPK*UPK-1.D0/EE)                                          00007700
      ULM=-U                                                            00007800
      UUM=U                                                             00007900
      GO TO 26                                                          00008000
    7 LMT=4HLOWR                                                        00008100
      SS=SS*2.D0                                                        00008200
      U=UPK-7.D0                                                        00008300
      GO TO 8                                                           00008400
    6 LMT=4HUPPR                                                        00008500
      U=UPK+UPK-ULM                                                     00008600
    8 K=0                                                               00008700
   10 T=INVHYB(UYM+SIG*U)                                               00008800
      FF=((UPK-U)*(UPK+U-SS)+J*(TPK-T))*EE-1.D0                         00008900
      IF(DABS(FF).LT.DEPS) GO TO 15                                     00009000
      TT=(SS/(1.D0+T)-2.D0*U)*EE                                        00009100
      U=U-FF/TT                                                         00009200
      K=K+1                                                             00009300
      IF(K.LT.20) GO TO 10                                              00009400
      ILL=ILL+100                                                       00009500
   15 IF(LMT.EQ.4HUPPR) GO TO 25                                        00009600
      ULM=U                                                             00009700
      GO TO 6                                                           00009800
   25 UUM=U                                                             00009900
   26 CONTINUE                                                          00010000
      RETURN                                                            00010100
      END                                                               00010200
```

14. 積率分布の被積分関数に比例する関数

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              FUNCTION UHLNMM(U)                                .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       COMPUTATION OF MODIFIED INTEGRAND OF THE HLN MOMEMT DIS- .00000700
C     .       TRIBUTION, T**J*EXP(-U*U), WHERE T=INVHYB(UYM+SIG*U)     .00000800
C     .       NOTICE: THE INTEGRAND IS DIVIDED BY SIG**J FOR SIG OVER  .00000900
C     .       1.5D3 BECAUSE OF AVOIDING OVERFLOW OF UHLNMM             .00001000
C     .                                                                .00001100
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001200
C     .       U   - A POINT OF HYBRID LOGNORMAL DISTRIBUTION           .00001300
C     .       UYM - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, (MEAN OF LN(T)+T)   .00001400
C     .       SIG - SQRT(2)*SGM, SGM IS STANDARD DEVIATION OF LN(T)+T  .00001500
C     .       J   - THE ORDER OF THE HLN MOMENT DISTRIBUTION            00001600
C     .                                                                .00001700
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001800
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T                      .00001900
C     .                                                                .00002000
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002100
C     .                                                                .00002200
C     ..................................................................00002300
C                                                                       00002400
      DOUBLE PRECISION FUNCTION UHLNMM(U)                               00002500
      DOUBLE PRECISION UYM,SIG,U,INVHYB,TJ                              00002600
      COMMON/MMTOZJ/UYM,SIG,J                                           00002700
      TJ=1.D0                                                           00002800
      IF(J) 1,5,1                                                       00002900
    1 TJ=INVHYB(UYM+SIG*U)                                              00003000
      IF(SIG.GT.1.5D3) TJ=TJ/SIG                                        00003100
      IF(DABS(TJ).NE.0.D0) TJ=TJ**J                                     00003200
    5 UHLNMM=TJ*DEXP(-U*U)                                              00003300
      RETURN                                                            00003400
      END                                                               00003500
```

15. $\mu = (1+t)^2/2t + \ln t + t$ の逆関数：分布 $\Omega(\mu, \sigma^2)$ の多峰性の条件

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .             SUBROUTINE TMYU(UM,T1,T2)                          .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       SOLVING UM=(1+T)**2/(2*T)+LN(T)+T WITH RESPECT TO T SO TO.00000700
C     .       GET LOWER AND UPPER LIMITS OF MODE OF THE HLN DISTRIBUTION00000800
C     .       CORRESPONDING TO CHANGING SM**2 FOR A CONSTANT VALUE OF UM00000900
C     .                                                                .00001000
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00001100
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T     .00001200
C     .       T1  - LOWER LIMIT OF MODE OF HLN DISTRIBUTION OVER SM**2 .00001300
C     .             FOR A CONSTANT VALUE OF UM                         .00001400
C     .       T2  - UPPER LIMIT OF MODE OF HLN DISTRIBUTION OVER SM**2 .00001500
C     .             FOR A CONSTANT VALUE OF UM                         .00001600
C     .                                                                .00001700
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001800
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T                      .00001900
C     .                                                                .00002000
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00002100
C     .       NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-.00002200
C     .       CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION METHOD               .00002300
C     .                                                                .00002400
C     ..................................................................00002500
C                                                                       00002600
      SUBROUTINE TMYU(UM,T1,T2)                                         00002700
      REAL*8 UM,T,T1,T2,FF,DEPS,INVHYB                                  00002800
      DATA DEPS/1.D-6/                                                  00002900
      IF(3.D0-DLOG(3.D0).LT.UM) GO TO 1                                 00003000
      T1=1.D0/3.D0                                                      00003100
      T2=T1                                                             00003200
      GO TO 60                                                          00003300
    1 T=0.5D0/UM                                                        00003400
    5 FF=(UM-0.5D0/T-1.5D0*T-1.D0-DLOG(T))/(1.D0/T+1.D0)/(0.5D0/T-1.5D0)00003500
      IF(DABS(FF).LT.DEPS*T) GO TO 20                                   00003600
      T=T-FF                                                            00003700
      GO TO 5                                                           00003800
   20 T1=T                                                              00003900
      T=INVHYB(UM-0.6055)*0.3333                                        00004000
      IF(UM.GT.2.4D0) T=T*2.D0                                          00004100
   15 FF=(UM-0.5D0/T-1.5D0*T-1.D0-DLOG(T))/(1.D0/T+1.D0)/(0.5D0/T-1.5D0)00004200
      IF(DABS(FF).LT.DEPS*T) GO TO 30                                   00004300
      T=T-FF                                                            00004400
      GO TO 15                                                          00004500
   30 T2=T                                                              00004600
   60 RETURN                                                            00004700
      END                                                               00004800
```

16. $\mu = (1+t)^2/(t-1) + \ln t + t$ の逆関数：分布$\Omega_1(\mu, \sigma^2)$の多峰性の条件

```
C
C     ..................................................................
C     .                                                                .
C     .              SUBROUTINE TMU1(UM,T1,T2)                         .
C     .                                                                .
C     .  ** PURPOSE **                                                 .
C     .       SOLVING UM=(1+T)**2/(T-1)+LN(T)+T WITH RESPECT TO T SO TO.
C     .       GET LOWER AND UPPER LIMITS OF MODE OF THE 1ST MOMENT DIST.
C     .       CORRESPONDING TO CHANGING SM**2 FOR A CONSTANT VALUE OF UM
C     .                                                                .
C     .  ** PARAMETERS **                                              .
C     .       UM  - PARAMETER OF HYBRID LOGNORMAL, MEAN OF LN(T)+T     .
C     .       T1  - LOWER LIMIT OF MODE OF FIRST MOMENT DISTRIBUTION OF.
C     .             HLN DISTRI. OVER SM**2 FOR A CONSTANT VALUE OF UM  .
C     .       T2  - UPPER LIMIT OF MODE OF FIRST MOMENT DISTRIBUTION OF.
C     .             HLN DISTRI. OVER SM**2 FOR A CONSTANT VALUE OF UM  .
C     .                                                                .
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .
C     .       INVHYB-INVERSED FUNCTION OF LN(T)+T                      .
C     .                                                                .
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .
C     .       NEWTON-S ITERATION METHOD IS USED. STARTING POINT IS CAL-.
C     .       CULATED BY KUMAZAWA-S APPROXIMATION METHOD               .
C     .                                                                .
C     ..................................................................
C
      SUBROUTINE TMU1(UM,T1,T2)
      REAL*8 UM,T,T1,T2,FF,DEPS
      DATA DEPS/1.D-6/
      IF(UM.LE.-3.20232153D0) GO TO 1
      T1=(5.D0-DSQRT(17.D0))/4.D0
      T2=T1
      GO TO 30
    1 CONTINUE
      IF(UM+3.66D0) 2,3,3
    2 T=DEXP(UM+1.D0)
      GO TO 5
    3 T=0.21922359359558 49D0-0.22D0*DSQRT(DABS(-UM-3.20232153311064 5D0))
    5 FF=UM-DLOG(T)-T+(1.D0+T)**2/(1.D0-T)
      FF=FF*T*(1.D0-T)**2/(1.D0+T)/(2.D0*T*T-5.D0*T+1.D0)
      IF(DABS(FF).LT.DEPS*T) GO TO 10
      T=T+FF
      GO TO 5
   10 T1=T
      IF(UM+5.8D0) 12,13,13
   12 T=UM*UM-10.D0*UM-7.D0
      T=(UM-1.D0+DSQRT(T))*0.25D0
      GO TO 15
   13 T=0.21922359359558 5D0+0.235D0*DSQRT(DABS(-UM-3.20232153311064 5D0))
   15 FF=UM-DLOG(T)-T+(1.D0+T)**2/(1.D0-T)
      FF=FF*T*(1.D0-T)**2/(1.D0+T)/(2.D0*T*T-5.D0*T+1.D0)
      IF(DABS(FF).LT.DEPS*T) GO TO 20
      T=T+FF
      GO TO 15
   20 T2=T
   30 RETURN
      END
```

17. 正規分布の上側確率[8)]

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE  NQ(U,Q)                               .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .   ** PURPOSE **                                                .00000600
C     .        COMPUTATION OF UPPER  PROBABILITY OF NORMAL DISTRIBUTION .00000700
C     .                                                                .00000800
C     .   ** PARAMETERS **                                             .00000900
C     .        U -NORMAL DEVIATE                                       .00001000
C     .        Q -RESULTANT UPPER PROBABILITY                          .00001100
C     .                                                                .00001200
C     .   ** REQUIRED SUBROUTINES **                                   .00001300
C     .        NONE                                                    .00001400
C     .                                                                .00001500
C     .   ** METHOD OF COMPUTATION **                                  .00001600
C     .        Q(U)=EXP(-U**2/2)/SQRT(2*PAI)*(1/U.+.1/U.+.2/U.+....    .00001700
C     .             .+.K/U.+....)                  (1)       A(2.4)    .00001800
C     .        Q(U)=0.5-EXP(-U**2/2)/SQRT(2*PAI)*(U/1.-.U**2/3.+.2*    .00001900
C     .             U**2/5.-.3*U**2/7.+....)       (2)       A(2.3)    .00002000
C     .        WHRE .+. AND .-. DENOTE CONTINUED FRACTION.             .00002100
C     .                                                                .00002200
C     .        (1) CONVERGES RAPIDLY FOR LARGE U AND (2) FOR SMALL U.  .00002300
C     .                                                                .00002400
C     ..................................................................00002500
C                                                                       00002600
C        ** PROGRAM **                                                  00002700
C                                                                       00002800
      SUBROUTINE NQ (U,Q)                                               00002900
      DOUBLE PRECISION Q,U,Y,Y2,Z,FJ,S,B                                00003000
      DATA K/28/, S/-1.0D0/, B/3.0D0/                                   00003100
      Y=DABS(U)                                                         00003200
      Y2=Y*Y                                                            00003300
      Z=DEXP(-0.5D+0*Y2)*0.39894228040143267 8D+0                       00003400
      Q=0.D+0                                                           00003500
      FJ=K                                                              00003600
      IF (Y-B) 3,3,1                                                    00003700
    1 DO 2 I=1,K                                                        00003800
      Q=FJ/(Y+Q)                                                        00003900
    2 FJ=FJ-1.D+0                                                       00004000
      Q=Z/(Y+Q)                                                         00004100
      GO TO 5                                                           00004200
    3 DO 4 I=1,K                                                        00004300
      Q=FJ*Y2/(2.D+0*FJ+1.D+0+S*Q)                                      00004400
      S=-S                                                              00004500
    4 FJ=FJ-1.D+0                                                       00004600
      Q=0.5D+0-Z*Y/(1.D+0-Q)                                            00004700
    5 IF (U) 6,7,7                                                      00004800
    6 Q=1.0D0-Q                                                         00004900
    7 RETURN                                                            00005000
      END                                                               00005100
```

18. 正規分布の上側確率に対するパーセント点[8)]

```
C                                                                       00000100
C     ..................................................................00000200
C     .                                                                .00000300
C     .              SUBROUTINE  NPNT(Q,EPS,U)                         .00000400
C     .                                                                .00000500
C     .  ** PURPOSE **                                                 .00000600
C     .       COMPUTATION OF A PERCENTAGE POIN OF NORMAL DISTRIBUTION  .00000700
C     .                                                                .00000800
C     .  ** PARAMETERS **                                              .00000900
C     .       Q    -UPPER PROBABILITY                                  .00001000
C     .       EPS  -REQUIRED PRECISION                                 .00001100
C     .       U    -RESULTANT PERCENTAGE POINT                         .00001200
C     .                                                                .00001300
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    .00001400
C     .       NQ -UPPER PROBABILITY INTEGRAL OF NORMAL DISTRIBUTION    .00001500
C     .                                                                .00001600
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   .00001700
C     .       HITOTUMATU-S ITERATION METHOD IS USED.                   .00001800
C     .       STATING POINT IS CALCULATED BY YAMAUTI-S FORMULA,A(4.3)  .00001900
C     .                                                                .00002000
C     ..................................................................00002100
C                                                                       00002200
C        ** PROGRAM **                                                  00002300
C                                                                       00002400
      SUBROUTINE NPNT (Q,EPS,U)                                         00002500
      DOUBLE PRECISION Q,U,EPS,R,P,QQ,ROOT,Y,DENS,DDENS                 00002600
      P=Q                                                               00002700
      IF (Q-0.5D+0) 2,7,1                                               00002800
    1 P=1.D+0-Q                                                         00002900
    2 Y=-DLOG(P*(1.D+0-P)*4.D+0)                                        00003000
      U=DSQRT(Y*(2.0611786D0-5.7262704D0/(Y+11.640595D0)))              00003100
      MN=0                                                              00003200
    3 DENS=DEXP(-0.5D0*U*U)*0.39894228040143267 8D0                     00003300
      DDENS=-U*DENS                                                     00003400
      CALL NQ(U,QQ)                                                     00003500
      ROOT=DENS**2-(P-QQ)*DDENS*2.0D0                                   00003600
      IF (ROOT) 4,4,5                                                   00003700
    4 R=-DENS/DDENS                                                     00003800
      GO TO 6                                                           00003900
    5 R=(P-QQ)*2.D+0/(-DENS-DSQRT(ROOT))                                00004000
    6 U=U+R                                                             00004100
      MN=MN+1                                                           00004200
      IF (MN.EQ.10) GO TO 8                                             00004300
      IF (DABS(R)-EPS) 8,8,3                                            00004400
    7 U=0.D0                                                            00004500
    8 IF (Q.GT.0.5D0) U=-U                                              00004600
      RETURN                                                            00004700
      END                                                               00004800
```

19. 連立一次方程式の解法[9)]

```
C     ..................................................................
C     .
C     .              SUBROUTINE DGELG(R,A,M,N,EPS,IER)
C     .
C     .
C     .   ** PURPOSE **
C     .       CALCULATION OF THE SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUAT-
C     .       IONS, AX=R
C     .
C     .   ** PARAMETERS **
C     .       R   - ARRAY OF CONSTANTS AT CALL AND ARRAY OF RESULTANT
C     .             SOLUTIONS AT RETURN
C     .       A   - MATRIX OF COEFFICIENTS
C     .       M   - NUMBER OF EQUATIONS
C     .       N   - NUMBER OF SETS OF CONSTANTS
C     .       EPS - PARAMETER OF DECIDING WHETHER DETERMINANT IS ZERO
C     .             EPS MAY BE 1.D-14
C     .       IER - ERROR CONDITION
C     .             =-1  DETERMINANT IS ZERO
C     .             >=1  ACCURACY IS NOT GOOD
C     .             =0   NO ERROR
C     .
C     .   ** REQUIRED SUBROUTINES **
C     .       NONE
C     .
C     .   ** METHOD OF COMPUTATION **
C     .       GAUSSIAN ELIMINATION METHOD /REF.:JAERI-M8479(NOV.1979)
C     .
C     ..................................................................
C
      SUBROUTINE DGELG (R,A,M,N,EPS,IER)
C     OPTION DOUBLE
      IMPLICIT  REAL*8 (A-H,O-Z)
      GENERIC
      DIMENSION A(1),R(1)
      IF(M) 23,23,1
C     SEARCH FOR GREATEST ELEMENT IN MATRIX A
    1 IER=0
      PIV=0.
      MM=M*M
      NM=N*M
      DO 3 L=1,MM
      TB=ABS(A(L))
      IF(TB-PIV) 3,3,2
    2 PIV=TB
      I=L
    3 CONTINUE
      TOL=EPS*PIV
C     A(I) IS PIVOT ELEMENT. PIV CONTAINS THE ABSOLUTE VALUE OF A(I).
C
C     START ELIMINATION LOOP
      LST=1
      DO 17 K=1,M
C     TEST ON SINGULARITY
      IF(PIV) 23,23,4
    4 IF(IER) 7,5,7
    5 IF(PIV-TOL) 6,6,7
    6 IER=K-1
    7 PIVI=1./A(I)
      J=(I-1)/M
      I=I-J*M-K
      J=J+1-K
C     I+K IS ROW-INDEX, J+K COLUMN-INDEX OF PIVOT ELEMENT
C     PIVOT ROW REDUCTION AND ROW INTERCHANGE IN RIGHT HAND SIDE R
      DO 8 L=K,NM,M
      LL=L+I
      TB=PIVI*R(LL)
      R(LL)=R(L)
    8 R(L)=TB
C     IS ELIMINATION TERMINATED
      IF(K-M) 9,18,18
```

```
C     COLUMN INTERCHANGE IN MATRIX A                                    00007200
    9 LEND=LST+M-K                                                      00007300
      IF(J) 12,12,10                                                    00007400
   10 II=J*M                                                            00007500
      DO 11 L=LST,LEND                                                  00007600
      TB=A(L)                                                           00007700
      LL=L+II                                                           00007800
      A(L)=A(LL)                                                        00007900
   11 A(LL)=TB                                                          00008000
C     ROW INTERCHANGE AND PIVOT ROW REDUCTION IN MATRIX A               00008100
   12 DO 13 L=LST,MM,M                                                  00008200
      LL=L+I                                                            00008300
      TB=PIVI*A(LL)                                                     00008400
      A(LL)=A(L)                                                        00008500
   13 A(L)=TB                                                           00008600
C     SAVE COLUMN INTERCHANGE INFORMATION                               00008700
      A(LST)=J                                                          00008800
C     ELEMENT REDUCTION AND NEXT PIVOT SEARCH                           00008900
      PIV=0.                                                            00009000
      LST=LST+1                                                         00009100
      J=0                                                               00009200
      DO 16 II=LST,LEND                                                 00009300
      PIVI=-A(II)                                                       00009400
      IST=II+M                                                          00009500
      J=J+1                                                             00009600
      DO 15 L=IST,MM,M                                                  00009700
      LL=L-J                                                            00009800
      A(L)=A(L)+PIVI*A(LL)                                              00009900
      TB=ABS(A(L))                                                      00010000
      IF (TB-PIV) 15,15,14                                              00010100
   14 PIV =TB                                                           00010200
      I=L                                                               00010300
   15 CONTINUE                                                          00010400
      DO 16 L=5,NM,M                                                    00010500
      LL=L+J                                                            00010600
   16 R(LL)=R(LL)+PIVI*R(L)                                             00010700
   17 LST=LST+M                                                         00010800
C     END OF ELIMINATION LOUP                                           00010900
C     BACK SUBSTITUTION AND BACK INTERCHANGE                            00011000
   18 IF(M-1) 23,22,19                                                  00011100
   19 IST=MM+M                                                          00011200
      LST=M+1                                                           00011300
      DO 21 I=2,M                                                       00011400
      II=LST-I                                                          00011500
      IST=IST-LST                                                       00011600
      L=IST-M                                                           00011700
      L=A(L)+.5                                                         00011800
      DO 21 J=II,NM,M                                                   00011900
      TB=R(J)                                                           00012000
      LL=J                                                              00012100
      DO 20 K=IST,MM,M                                                  00012200
      LL=LL+1                                                           00012300
   20 TB=TB-A(K)*R(LL)                                                  00012400
      K=J+L                                                             00012500
      R(J)=R(K)                                                         00012600
   21 R(K)=TB                                                           00012700
   22 RETURN                                                            00012800
C     ERROR RETURN                                                      00012900
   23 IER=-1                                                            00013000
      RETURN                                                            00013100
      END                                                               00013200
```

20. ガウス・ルジャンドル積分[9)]

```
C     ..................................................................
C     .                                                                
C     .              SUBROUTINE GAUSSA(FUNC,A,B,N,S)                   
C     .                                                                
C     .  ** PURPOSE **                                                 
C     .       INTEGRAL OF A FUNCTION FUNC IN A FINITE INTERVAL FROM A  
C     .       TO B BY GAUSS-LEGENDRE INTEGRATION METHOD                
C     .                                                                
C     .  ** PARAMETERS **                                              
C     .       FUNC- A FUNCTION TO BE INTEGRATED                        
C     .       A   - LOWER LIMIT OF INTEGRAL INTERVAL                   
C     .       B   - UPPER LIMIT OF INTEGRAL INTERVAL                   
C     .       N   - NUMBER OF NODE POINTS FOR GAUSS LEGENDRE INTEGRATION
C     .             N MUST BE 24 OR 48. ON THE CONTRARY N WILL BE 48.  
C     .       S   - RESULTANT INTEGRAL                                 
C     .                                                                
C     .  ** REQUIRED SUBROUTINES **                                    
C     .                                                                
C     .  ** METHOD OF COMPUTATION **                                   
C     .       GAUSS LEGENDRE INTEGRATION METHOD /REF.:JAERI-M8479(1979)
C     .                                                                
C     ..................................................................
      SUBROUTINE GAUSSA(FUNC,A,B,N,S)
C
      REAL*8 A,B,S,FUNC,Z24(24),W24(24),Z48(48),W48(48),Z(48),W(48)
      DATA Z24/
     1     12*0.0D0                        , 0.06405689286260562608 5D0 ,
     2        0.1911188674736163091 59D0 , 0.3150426796961633743 87D0 ,
     3        0.4337935076260451384 37D0 , 0.5454214713888395356 38D0 ,
     4        0.6480936519369755692 52D0 , 0.7401241915785543642 44D0 ,
     5        0.8200019859739029219 54D0 , 0.8864155270044010342 13D0 ,
     6        0.9382745520027327585 24D0 , 0.9747285559713094981 98D0 ,
     7        0.9951872199970213601 80D0 /
      DATA W24/
     1     12*0.0D0                        , 0.1279381953467521569 74D0 ,
     2        0.1258374563468282961 21D0 , 0.1216704729278033912 04D0 ,
     3        0.1155056680537256013 53D0 , 0.1074442701159656347 83D0 ,
     4        0.0976186521041138882 70D0 , 0.0861901615319532759 17D0 ,
     5        0.0733464814110803057 34D0 , 0.0592985849154367807 46D0 ,
     6        0.0442774388174198061 69D0 , 0.0285313886289336631 81D0 ,
     7        0.0123412297999871995 47D0 /
      DATA Z48/
     1     24*0.0D0                        , 0.0323801709628693620 33D0 ,
     2        0.0970046992094626989 30D0 , 0.1612223560688917180 56D0 ,
     3        0.2247637903946890612 25D0 , 0.2873624873554555767 36D0 ,
     4        0.3487558862921607381 60D0 , 0.4086864819907167299 16D0 ,
     5        0.4669029047509584054 5D0 , 0.5231609747222330336 78D0 ,
     6        0.5772247260839727038 18D0 , 0.6288673967765136299 5D0 ,
     7        0.6778723796326639052 10D0 , 0.7240341309238146567 4D0 ,
     8        0.7671590325157403392 54D0 , 0.8070662040294426270 83D0 ,
     9        0.8435882616243935307 11D0 , 0.8765720202742478859 06D0 ,
     A        0.9058791367155696728 22D0 , 0.9313866907065543331 14D0 ,
     B        0.9529877031604308607 23D0 , 0.9705915925462472504 61D0 ,
     C        0.9841245837228268577 45D0 , 0.9935301722663507575 48D0 ,
     D        0.9987710072524261186 01D0 /
      DATA W48/
     1     24*0.0D0                        , 0.0647376968126839225 03D0 ,
     2        0.0644661644359500822 07D0 , 0.0639242385846481866 24D0 ,
     3        0.0631141922862540256 57D0 , 0.0620394231598926639 04D0 ,
     4        0.0607044391658938800 53D0 , 0.0591148396983956357 46D0 ,
     5        0.0572772921004032157 05D0 , 0.0551995036999841628 68D0 ,
     6        0.0528901894851936670 96D0 , 0.0503590355538544749 58D0 ,
     7        0.0476166584924904748 26D0 , 0.0446745608566942804 19D0 ,
     8        0.0415450829434647492 14D0 , 0.0382413510658307063 17D0 ,
     9        0.0347772225647704388 93D0 , 0.0311672278327980889 02D0 ,
     A        0.0274265097083569482 00D0 , 0.0235707608393243791 41D0 ,
     B        0.0196161604573555278 14D0 , 0.0155793157229438487 28D0 ,
     C        0.0114772345792345394 90D0 , 0.0073275539012762621 02D0 ,
     D        0.0031533460523058386 33D0 /
      IF(N.NE.24) GO TO 10
      DO 5 I=13,24
```

```
      Z(I)=Z24(I)
    5 W(I)=W24(I)
      NN=12
      GO TO 20
   10 DO 15 I=25,48
      Z(I)=Z48(I)
   15 W(I)=W48(I)
      NN=24
   20 NNN=NN*2
      DO 25 I=1,NN
      II=NNN-I+1
      Z(I)=-Z(II)
   25 W(I)=+W(II)
C
      S=0.D0
      DO 30 I=1,NNN
   30 S=S+W(I)*FUNC((B-A)*Z(I)*0.5D0+(B+A)*0.5D0)
      S=S*(B-A)*0.5D0
      RETURN
      END
```