

JAERI-M
83-111

非定常熱伝導逆問題における表面温度
および表面熱流束
(平板の場合)

1983年7月

黒柳 利之

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1983

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 日立高速印刷株式会社

非定常熱伝導逆問題における表面温度および表面熱流束
(平板の場合)

日本原子力研究所東海研究所安全工学部

黒柳利之

(1983年6月27日受理)

一次元固体内の温度や熱流束変化は、初期条件、および、両境界での2個の条件で定められる。逆に、同固体内の1点の温度と熱流束変化の知見は、同固体内の他のすべての点の温度、および、熱流束変化を規定しているものと考えられる。この観点から、一次元固体内の1点で与えられる温度と熱流束変化を用いて、同固体内の他の任意の1点の温度と熱流束変化を表わす式を導いた。そして、この式で他の1点を表面に選んだ場合の、表面温度、および、表面熱流束を記述する式を、平板の場合について示した。

固体の表面条件の変化は、固体内では減衰して現われるので、固体内の温度、および、熱流束変化を完全に知ることは出来ない。また、現実に生ずる表面条件の変化は多種多様である。これらの条件下で、未知の表面条件の変化が、前述の表面温度、表面熱流束を記述する式によって記述が可能であるか、否かを検討し、表面条件が不連続で変化する直後の短い時間巾以外では、前述の表面条件を記述する式は、よく、未知の表面条件の変化を記述しうることを示した。そして、表面条件の記述が不能な時間巾を数値計算例で示した。

本報の表面温度、および、熱流束を記述する式では、物体内部の1点での温度変化と熱流束変化の知見を必要とする。このうち、温度変化は、従来から、実験的に求められてきたものである。しかし、熱流束変化を実験的に求めることは、極めて困難であるので、表面条件を記述する式で必要とする固体内の1点での熱流束変化の評価方法について検討を行った。

Surface temperature and surface heat flux determination
of
the inverse heat conduction problem for a slab

Toshiyuki KUROYANAGI
Department of Nuclear Safety Research,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received June 27, 1983)

Based on an idea that surface conditions should be a reflection of interior temperature and interior heat flux variation as inverse as interior conditions has been determined completely by the surface temperature and/on surface heat flux as boundary conditions, a method is presented for determining the surface temperature and the surface heat flux of a solid when the temperature and heat flux at an interior point are a prescribed function of time.

The method is developed by the integration of Duhemels' integral which has unknown temperature or unknown heat flux in its integrand.

Specific forms of surface condition determination are developed for a sample inverse problem: slab.

Discussing the effect of a degree of available informations at an interior point due to damped system and the effect of variation of surface conditions on those formulations, it is shown that those formulations are capable of representing the unknown surface conditions except for small time interval followed by discontinuous change of surface conditions. The small un-resolved time interval is demonstrated by a numerical example.

An evaluation method of heat flux at an interior point, which is requested by those formulations, is discussed.

Keywords: Transient Heat Conduction, Inverse Problem, Duhemel's Integral
Surface Temperature, Surface Heat Flux

目 次

1. はしがき	1
2. 一次元固体内の1点で温度と熱流束の変化が与えられる時, 同固体内の他の 点の温度と熱流束の変化	3
3. 平板の場合の表面温度, および, 表面熱流束変化記述式	18
4. 平板における表面温度, および, 表面熱流束変化記述式の特性的検討	21
4.1 既知とした知見の程度(導関数の最高階数)が温度, および, 熱流束変 化記述に与える影響	25
4.2 表面条件の不連続変化様式が温度および, 熱流束変化記述に与える影響	30
4.3 Bi 数が温度, および, 熱流束記述に与える影響	34
4.4 表面温度, および, 表面熱流束記述式とその記述不能区間	36
5. 内部点における熱流束変化の評価方法	56
5.1 直問題の方法による内部点における熱流束変化の評価	56
5.2 固体内の2点の温度と熱流束変化の相互関係式の利用による熱流束変化 の評価	66
5.2.1 固体内の2点の温度変化を既知とする場合	68
5.2.2 固体内の1点の温度変化と同固体の一端でのBi 数とを既知とする 場合	73
6. むすび	77
謝 辞	79
参考文献	80
付録 A ステップ状単位表面条件変化時の内部温度応答関数	81
付録 B 2点間の温度, および, 熱流束関係式内の常数, (平板の場合)	88
付録 C 2点間の温度, および, 熱流束変化の関係を与えるBurggraf の式 と本報の式との関係	94
付録 D 内部温度応答関数の時間変化の例	100

Contents

1. Introduction	1
2. Mutual relation of temperature and heat flux at two interior point in one dimensional solid	3
3. Description of surface temperature and surface heat flux with interior temperature and interior heat flux for a slab	18
4. Characteristics of surface temperature and surface heat flux description for a slab	21
4.1 Effect of maximum derivatives of interior temperature or interior heat flux	25
4.2 Effect of mode of discontinuous change of surface conditions ..	30
4.3 Effect of Bi number	34
4.4 Un-resolved time interval	36
5. Evaluation methods of heat flux variation at an interior point ...	56
5.1 Evaluation by direct problem	56
5.2 Evaluation by mutual relations of temperature and heat flux at two interior point	66
5.2.1 When temperature at two interior point are given	68
5.2.2 When temperature at an interior point and Bi number at a boundary are given	73
6. Conclusion	77
Acknowledgment	79
References	80
Appendix A Temperature response for a unit step change of surface temperature or surface heat flux	81
Appendix B Calculus of constants in mutual relation of temperature and heat flux at two interior point for a slab	88
Appendix C Proof that Burrgraf's and present representation for mutual relation of temperature and heat flux at two interior point are equally statement	94
Appendix D A numerical examples of temperature response for a unit step rise of surface temperature	100

1. は し が き

物体内部の温度測定値より、同物体の表面温度、あるいは、表面での熱流束を求める一次元非定常熱伝導の逆問題の取扱いでは、従来、物体の内部温度を、微少時間毎に、デュハメル積分の微少時間巾の和として取扱い、デュハメル積分内に含まれる表面温度は、この微少時間毎に変化するものとして、逐次、求める方法を用いてきた。^{(1)~(8)}そして、微少時間が小さくなると、振動解が現われて、表面温度は求まらないものとされてきた。

しかし、著者は、前報⁽⁹⁾で、一次元非定常熱伝導の逆問題の取扱いについて、次の諸点を明かにした。

- (i) 従来のデュハメル積分の微少時間巾の取扱いでは、表面温度の連続性を考慮しなかった為に（微少時間毎の内部温度の差は、表面温度変化の結果であるとした為に）時間巾の減少で、デュハメル積分の被積分関数の値が一定値に漸近しない取扱いをしてきた（したがって、小さな時間巾の取扱いでは、振動解が現われる）。
- (ii) 表面温度の連続性を考慮したデュハメル積分の微少時間巾の取扱いでは（微少時間毎の内部温度の差は、表面温度の変化分のみ結果とする取扱い）、振動解は、現れない、しかし、極めて、緩やかな表面温度変化でなければ、取扱えない。
- (iii) 観測された内部温度測定値は、本来、連続的に変化している真の内部温度の表われである。この観測された内部温度測定値より、最少2乗法等により、 L 次式（または、 L 階までの導関数を持つもの）として、真の内部温度を推定する内部温度表示式を求めることが出来る。真の内部温度は、表面から離れるに従って、表面温度変化が減衰して現われる。したがって、内部温度表示式が L 次式（または L 階の導関数）までしか知りえないということは、 $L+1$ 次項以上（ $L+1$ 階以上の導関数）の変化についての表面温度変化の知見は期待しないとしたことに相当すると考える。
- (iv) 前項の L 階の導関数まで知られた内部温度表示式、および、 L 階の知見までしか期待しない表面温度を用いると、デュハメル積分は、その積分を実行出来て、表面温度は、その時刻の内部温度表示式およびその導関数で表示しうる。
- (v) 前項の表面温度表示が、真の表面温度を示すものであるか、どうかを試すために、中空円柱で、内径上で単位表面温度上昇があり、外径上では断熱条件である場合の外径上の温度応答を内部温度として前項の表面温度表示式に用いると、内径上で表面温度が不連続に変化した直後の小さな時間巾を除いては、真の表面温度を示す。
- (vi) 真の表面温度を示しえない時間巾は、内部温度表示式の持つ導関数の最高の次数 L で定まる。そして、逆問題で、減衰系を取扱っているということは、このような表面温度記述不能時間巾に表現されている。

このように、前報では、中空円柱で、最も減衰のはげしい断熱条件下の外径上の温度変化を用いて、内径上の表面温度変化を記述しうる可能性のあることを例証した。以下で、参考文献(9)を、前報と略称する。

一般に、内部温度測定点は、前報の例のような断熱条件であるとはかぎらない。通常、内部温度測定点では、温度と共に、熱流束も、また、変化している。これらの変化は、直問題で知られているように、固体の2個の表面での温度変化、および(または)、表面での熱流束変化に伴うものである。そして、2個の表面のこれらの変化は、同固体内のすべての点の温度、および、熱流束変化を規定している。

逆にいえば、物体内部の一点で得られる温度変化、および、熱流束変化の知見は、当該物体の他のすべての点の温度変化、および、熱流束変化を規定していると考えられる。他のすべての点には、当然、当該物体の2個の表面も含まれる。すなわち、物体内部の一点で、温度変化および、熱流束変化が、共に与えられるならば、2ヶの表面の温度変化、および、熱流束変化が求められるはずである。

この観点にもとづいて、本報では、一次元固体内部で、温度、および、熱流束変化が与えられる場合、これらを用いて同物体の表面温度、および、表面熱流束がどのように記述されるか、また、それらの記述式から、未知の表面条件を求めうる可能性、または、その限界についての検討を行う。

第2章では、任意形状の一次元物体内部の1点で、温度、熱流束変化が既知である場合、同物体の他の任意の1点の温度、および、熱流束変化を求める式を導く。この式は、未知の温度、または、未知の熱流束を被積分関数に含んだデュハメルの積分を、前報に示した考えに基づいて解くことによって導かれる。

このような物体内の1点の知見を用いて、同物体内の他の任意の1点の温度や熱流束変化を記述する式は、すでに、Carslaw と Jaeger⁽¹⁰⁾ (平板の場合)、および、Burggraf⁽¹²⁾ (平板、球、中空球、円柱、中空円柱の場合)により、与えられたものがある。これらの式は本報の導き方とは異った方法で導かれたものであるが、同一の記述式であることが示される。

第3章では、この式を、平板の場合に適用し、表面温度や表面熱流束の記述式を、具体的に示す。

物体の内部点で観測しうる温度変化、また、評価可能な熱流束変化は、表面での温度変化や熱流束変化が減衰して現われるものである。したがって、内部点で知りうる温度や熱流束変化についての知見は、完璧なものではなく、限られたものとなる。また、現実の表面温度や表面熱流束変化は、任意の変化様式が可能であるし、また、任意のBi数に支配されている。このような、得られる知見の限界や、表面条件の変化様式下で、第3章に述べる表面温度、および、表面熱流束記述式が、未知の表面条件を記述しうる可能性、および、その限界について、第4章で述べる。

本報で示す表面温度、および、表面熱流束記述式では、物体内部の1点での温度変化と熱流束変化との知見を必要とする。このうち、温度変化は、従来から、実験的に求められてきたものである。しかし、物体内部の熱流束変化を実験的に求めることは、極めて、困難であると考えられる。第5章では、逆問題で、表面条件変化を求めるのに必要な物体内部点の熱流束変化の評価方法についての検討を行う。

2. 一次元固体内の1点で温度と熱流束の変化が与えられる時，同固体内の他の点の温度と熱流束の変化

一次元物体は，表面 ξ_{s1} と，他の表面 ξ_{s2} に限られており，この物体内部の，次のような1点 ξ_m で，その点の温度変化 $\theta(\xi_m, \tau)$ ，および，熱流束変化 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ が与えられているものとする。

$$\xi_{s1} \leq \xi_m \leq \xi_{s2} \quad (1)$$

ここで， ξ は，無次元座標軸であり， ξ_{s1} ， ξ_{s2} として，たとえば，次の値を選ぶことが出来る。

$$\left. \begin{array}{l} \text{平板の場合} \quad \xi_{s1} = 0, \quad \xi_{s2} = 1 \\ \text{中空円柱の場合} \quad \xi_{s1} = 1, \quad \xi_{s2} = \delta = (\text{外径}) / (\text{内径}) \end{array} \right\} \quad (2)$$

なお，本報では，このような各無次元座標軸作成の基準長 R を用いて，次のような無次元時間を定義している（次章以降で用いる）。

$$\tau = \frac{\alpha}{R^2} t \quad (3)$$

このような点 ξ_m での $\theta(\xi_m, \tau)$ ， $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ と，同固体内の任意の他の1点 ξ_δ での未知の温度変化 $\theta(\xi_\delta, \tau)$ ，および，熱流束変化 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_\delta$ との関係を考える。

この場合，本章では， ξ_m と ξ_δ とで無次元化される仮りの座標系 ξ' ， τ' で考察することにする。この ξ' ， τ' 系で， ξ_m と ξ_δ は，夫々， ξ'_m ， ξ'_δ に対応するものとする。この仮りの ξ' ， τ' 系と，もとの ξ ， τ 系との関係の一例には，次のようなものがある。

平板の場合，

$$\xi' = \frac{\xi - \xi_\delta}{\xi_m - \xi_\delta}, \quad \xi_\delta < \xi_m$$

または，

$$\xi' = \frac{\xi - \xi_m}{\xi_\delta - \xi_m}, \quad \xi_\delta > \xi_m$$

$$\tau' = \frac{\tau}{(\xi_m - \xi_\delta)^2}$$

中空円柱の場合，

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi_m}, \quad \tau' = \frac{\tau}{(\xi_m)^2}$$

(4)

または、

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi_\delta}, \quad \tau' = \frac{\tau}{(\xi_\delta)^2}$$

この例では、平板の場合の ξ'_m と ξ'_δ の値は、 ξ_m と ξ_δ との位置関係によって、次の値である。

$$\left. \begin{aligned} \xi'_m &= 1, & \xi'_\delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)'$$

または、 $\xi'_m = 0, \quad \xi'_\delta = 1$

中空円柱の場合には、

$$\left. \begin{aligned} \xi_m \text{ 基準の場合} & \quad \xi'_\delta = \frac{\xi_\delta}{\xi_m}, & \xi'_m &= 1 \\ \xi_\delta \text{ 基準の場合} & \quad \xi'_\delta = 1, & \xi'_m &= \frac{\xi_m}{\xi_\delta} \end{aligned} \right\} \quad (4)''$$

である。このように、 (ξ', τ') 系の定め方によって ξ'_m, ξ'_δ は、同一の値を持つとはかぎらないので以下の取扱いの結果は、 ξ'_m, ξ'_δ に示される値による差がある。

以下では、温度変化と熱流束変化を既知とする点を ξ'_m とし、それらを未知とする他の点を ξ'_δ として取扱う。そして、最後に、 ξ'_m や ξ'_δ の値の違いは、ステップ状表面条件変化時の内部温度応答関数の定め方に関与することを述べる。そして、次章では、 ξ'_m と ξ'_δ の値に、さほど注意しなくてもよいことが、具体的に示される。

点 ξ_m における即知とした温度変化、および、熱流束変化は、 ξ', τ' 系で、 $\theta(\xi'_m, \tau')$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m$ と書き直すことが出来る。また、点 ξ_δ のそれらは、 $\theta(\xi'_\delta, \tau')$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ と表わすことにする。

これらの $\theta(\xi'_m, \tau')$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m$ 、 $\theta(\xi'_\delta, \tau')$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ は、 ξ', τ' 系における2ヶの温度分布、 $\theta_t(\xi', \tau')$ と $\theta_f(\xi', \tau')$ とによって、次のように、結びつけられている。

まづ、 $\theta_t(\xi', \tau')$ は、点 ξ'_δ で、 $\theta_t(\xi'_\delta, \tau')$ であり、かつ、点 ξ'_m で

$$\theta_t(\xi'_m, \tau') = \theta(\xi'_m, \tau'), \quad \frac{\partial \theta_t(\xi', \tau')}{\partial \xi'} \Big/ \xi'_m = 0 \quad (5)$$

であるとする。このような、 $\theta_t(\xi'_\delta, \tau')$ と $\theta(\xi'_m, \tau')$ との関係は、デュハメル積分により、次式で与えられる。

$$\theta(\xi'_m, \tau') = \int_{\tau'_0}^{\tau'} \theta_t(\xi'_\delta, \lambda) \frac{\partial U_t(\xi'_m, \tau' - \lambda)}{\partial \tau'} d\lambda \quad (6)$$

こゝで、 $U_i(\xi', \tau')$ は、点 ξ'_m で断熱で、点 ξ'_δ で、 $\tau' = 0$ 以降、ステップ状単位温度上昇がある場合の、 ξ', τ' における温度応答を示すものであり、付録A. 1 に例が示してある。

式(6)を満足するような $\theta_i(\xi'_\delta, \tau)$ が求められれば、 ξ'_m と ξ'_δ の間の任意の ξ' について、 $\theta_i(\xi', \tau')$ が求められたことになる。したがって、 $\theta_i(\xi', \tau')$ による点 ξ'_δ の熱流束 $\frac{\partial \theta_i}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ は、次のように求められる。

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \xi'} / \xi'_\delta = \frac{\partial \theta_i(\xi', \tau')}{\partial \xi'} / \xi'_\delta \quad (7)$$

また、 $\theta_f(\xi', \tau')$ は、点 ξ'_δ に、熱流束 $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ があり、かつ点 ξ'_m で、

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_m = \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m, \quad \theta_f(\xi'_m, \tau') = 0 \quad (8)$$

であるとする。このような、 $\theta_f(\xi'_\delta, \tau')$ と $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ 、および、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m$ と $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ との関係は、デュハメルの積分により、次式で与えられる。

$$\theta_f(\xi'_\delta, \tau') = \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{1}{u_f} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta \frac{\partial U_f(\xi'_\delta, \tau' - \lambda)}{\partial \tau'} d\lambda \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m = \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{1}{u_f} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta \frac{\partial^2 U_f(\xi'_m, \tau' - \lambda)}{\partial \tau' \partial \xi'} d\lambda \quad (10)$$

こゝで、 $U_f(\xi', \tau')$ は、点 ξ'_m で、温度零で、点 ξ'_δ に、 $\tau' = 0$ 以降、ステップ状に単位熱流束を与え続けた場合の ξ', τ' における温度応答を示すものであり、例が付録A. 2 に示してある。また、 u_f は、 $U_f(\xi', \tau')$ を記述する場合の単位熱流束値である。通常、単位熱流束値として、 -1 を用いるので、本報でも、付録A. 2 に示すように、

$$u_f = -1$$

としている。なお、 $u_f = 1$ とした $U_f(\xi', \tau')$ を用いても、以下に述べる方法は勿論、その結果も、 $u_f = -1$ の場合と、全く、同一である。

式(6)、(10) に示すように、既知とした $\theta(\xi'_m, \tau')$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m$ は、未知の温度 $\theta_i(\xi', \tau')$ 、 $\theta_f(\xi', \tau')$ の各境界での値と結びつけられている。したがって、これらの式内の被積分関数内に含まれる $\theta_i(\xi'_\delta, \tau')$ 、および、 $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ が求めることが出来れば、式(7)の $\frac{\partial \theta_i}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ 、および、式(9)より $\theta_f(\xi'_\delta, \tau')$ を求めることが出来る。したがって、点 ξ'_δ の温度、および、熱流束の各変量 $\theta(\xi'_\delta, \tau')$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ は、次式で与えられる。

$$\theta(\xi'_\delta, \tau') = \theta_i(\xi'_\delta, \tau') + \theta_f(\xi'_\delta, \tau') \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_\delta = \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi'} / \xi'_\delta + \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta \quad (12)$$

こゝまでは、直問題の教示するところを、単純に、なぞったにすぎない。逆問題の主題は、式(6)、および、式(10)に示されるデュハメル積分の被積分関数内に含まれる未知量、 $\theta_i(\xi'_0, \tau')$ および、 $\frac{\partial \theta_i}{\partial \xi'_0} / \xi'_0$ を求めることにある。

式(6)より、未知の $\theta_i(\xi'_0, \tau')$ を求める方法は、すでに前報に示した。前報では、

- (i) 従来の逆問題におけるデュハメル積分の取扱い方法との差を明にする。
- (ii) 内部温度測定値とデュハメル積分で用いる内部温度との関係を明かにする。
- (iii) 内部温度を表現した知見と、他の点(表面)の未知の温度(表面温度)について知りうる知見との関係を考察する。

等のため、任意の時間 τ'_{j-1} と τ'_j との間で、内部温度、および、当該区間での他の点(表面)の対応する未知の温度(表面温度)を定義することより出発した。そして、

- (i) 内部温度は、本来、連続的に変化しているものであり、時間区切り点 τ'_{j-1} あるいは τ'_j で見られる内部温度の不連続は、データ操作にもとづく、見掛けのものであり、無視されるべきものである。
- (ii) この内部温度に対応する同物体の他の点の未知の温度(表面温度)も、また、連続的に変化している。そして、この未知の温度の知見は、内部温度についての知見の程度(その最高導関数の階数)以上には、知りえないし、また、期待出来ない。
- (iii) 式(6)~(10)の積分の下限 τ'_0 は $\tau' - \tau'_0$ を充分、大きく選ぶことが出来るので、時刻 τ'_0 が、式(6)~(10)に与える影響は、無視出来る。

と考へて、次の結果をえた。

- (i) 内部温度変化を既知として、同物体の表面温度は、その内部温度、および、その微係数のみで記述される。
- (ii) 表面温度変化には、不連続変化がありうるから、前項の表面温度記述式の適用限界をチェックする必要がある。
- (iii) 逆問題であるため、表面温度が、何時、不連続に変化したかを知りえない。すなわち、得られた表面温度が前項の適用限界内か、適用限界外かを判定する方法が要請される。
- (iv) 中空円柱で、断熱条件下の外径上の温度を内部温度として、内径上の表面温度を求める数値計算例により、前項、i)~iii)の具体的な取扱いが可能であることを示した。

これら前報での考察から、式(6)の取扱いでは、既知の内部温度 $\theta(\xi'_m, \tau')$ が L_t 階の導関数まで知られているとすると、点 ξ'_0 の未知の温度 $\theta_i(\xi'_0, \tau')$ も、また、 L_t 階の導関数まで知りうるものとすればよいことになる。このような、 $\theta(\xi'_m, \tau')$ と $\theta_i(\xi'_0, \tau')$ との

関係は、前報のように、時間区切り点 τ'_{j-1} 、 τ'_j 等を用いるまでもなく、式(6)の L_t+1 回の部分積分より、次のように導くことが出来る。

$$\begin{aligned}
 \theta(\xi'_m, \tau') &= \int_{\tau'_0}^{\tau'} \theta_t(\xi'_\delta, \lambda) \frac{\partial U_t(\xi'_m, \tau' - \lambda)}{\partial \tau'} d\lambda \\
 &= \theta_t(\xi'_\delta, \tau') - \phi_t^0(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \theta_t(\xi'_\delta, \tau') - \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial \theta_t(\xi'_\delta, \lambda)}{\partial \lambda} \phi_t^0(\xi'_m, \tau' - \lambda) d\lambda \\
 &= \theta_t(\xi'_\delta, \tau') - \phi_t^1(\xi'_m, 0) \frac{\partial \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'} \\
 &\quad - \phi_t^0(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \theta_t(\xi'_\delta, \tau'_0) + \phi_t^1(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'} \Big/ \tau'_0 \\
 &\quad + \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^2 \theta_t(\xi'_\delta, \lambda)}{\partial \lambda^2} \phi_t^1(\xi'_m, \tau' - \lambda) d\lambda \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \sum_{k=0}^{L_t} (-1)^k \phi_t^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{L_t} (-1)^k \phi_t^k(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} \Big/ \tau'_0 \\
 &\quad + (-1)^{L_t+1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^{L_t+1} \theta_t(\xi'_\delta, \lambda)}{\partial \lambda^{L_t+1}} \phi_t^{L_t}(\xi'_m, \tau' - \lambda) d\lambda \tag{13}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\phi_t^k(\xi', \tau')$ は、付録A. 1に示した $U_t(\xi', \tau')$ の固有値、固有関数、および係数を用いて、次式で与えられる。

$$\phi_t^k(\xi', \tau') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P_n(\xi')}{a_n^{2k}} e^{-a_n^2 \tau'} \tag{14}$$

ただし、

$$\phi_t^0(\xi', 0) = 1$$

である。

式(13)の微分より、次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'} &= \sum_{k=0}^{L_t-1} (-1)^k \phi_t^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{k+1} \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^{k+1}} + (-1)^{L_t} \phi_t^{L_t}(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{L_t+1} \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^{L_t+1}} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{L_t+1} (-1)^{k+1} \phi_t^{k+1}(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} \Big/ \tau'_0 \\ &\quad + (-1)^{L_t+1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^{L_t+2} \theta_t(\xi'_\delta, \lambda)}{\partial \lambda^{L_t+2}} \phi_t^{L_t}(\xi'_m, \tau' - \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

同様にして、 $\theta(\xi'_m, \tau')$ の ℓ 回の導関数は、次の様に表わされる。

$$\frac{\partial^\ell \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'^\ell} = \sum_{k=0}^{L_t-\ell} (-1)^k \phi_t^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{k+\ell} \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^{k+\ell}} + R_t^\ell, \quad 0 \leq \ell \leq L_t \quad (15)$$

ただし、

$$\begin{aligned} R_t^\ell &= \sum_{L_t \geq k = L_t - \ell + 1}^{L_t} (-1)^k \phi_t^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{k+\ell} \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^{k+\ell}} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{L_t+\ell} (-1)^{k+\ell} \phi_t^{k-\ell}(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} \Big/ \tau'_0 \\ &\quad + (-1)^{L_t+1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^{L_t+\ell+1} \theta_t(\xi'_\delta, \lambda)}{\partial \lambda^{L_t+\ell+1}} \phi_t^{L_t}(\xi'_m, \tau' - \lambda) d\lambda \\ (-1)^{k+1} \phi_t^k(\xi', \tau') &= \frac{\partial^{|k|} U_t}{\partial \tau'^{|k|}}, \quad k < 0 \end{aligned}$$

この式 (15) で

- (i) 既知の $\theta(\xi'_m, \tau')$ は、時間について、 L_t 階の導関数まで、知られている。
- (ii) 未知の $\theta_t(\xi'_\delta, \tau')$ については、その L_t+1 階以上の導関数に関する知見は期待しない。
- (iii) 時刻 τ'_0 は、現時刻 τ' より、はるかに前の時刻であって、現時刻への各 $\frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} \Big/ \tau'_0$ の影響は無視しうる。

と考え、同式内の R_t^ℓ を、すべて無視したものが次式である。

$$\frac{\partial^\ell \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'^\ell} = \sum_{k=0}^{L_t-\ell} (-1)^k \phi_t^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{k+\ell} \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^{k+\ell}}, \quad 0 \leq \ell \leq L_t \quad (16)$$

そして、この L_t+1 ケの方程式群より、 $\theta_t(\xi'_\delta, \tau')$ は次のように求められる。

$$\theta_t(\xi'_\delta, \tau') = \sum_{\ell=0}^{L_t} C'_\ell \frac{\partial^\ell \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'^\ell} \quad (17)$$

たゞし、

$$C'_0 = 1$$

$$C'_\ell = \sum_{k=0}^{\ell-1} (-1)^k \phi_t^{k+1}(\xi'_m, 0) C'_{\ell-k-1} \quad (18)$$

平板の場合、付録Bに示すように、この C'_ℓ は、 ξ'_m と ξ'_δ との位置関係によらず、次の値を持つ。

$$C'_\ell = \frac{1}{(2\ell)!} \quad (19)$$

式(17)の、 $\theta_t(\xi'_\delta, \tau')$ で定まる温度場 $\theta_t(\xi', \tau')$ の点 ξ'_δ における熱流束式(7)は、次の様にして求められる。式(13)は、 ξ'_m のみならず、 ξ'_m と ξ'_δ との間のすべての点 ξ' についての温度 $\theta_t(\xi', \tau')$ を記述するものである(式(5)に示したように、 ξ'_m では、 $\theta_t(\xi'_m, \tau') = \theta(\xi'_m, \tau')$ である)。したがって、式(13)で、 ξ'_m 、 $\theta(\xi'_m, \tau')$ の代わりに、 ξ' 、 $\theta_t(\xi', \tau')$ と置き換え、その式を ξ' についての微分し、点 ξ'_δ の値を求めると、次式である。

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \xi' / \xi'_\delta} = \sum_{k=1}^{L_t} (-1)^k \psi_t^k(\xi'_\delta, 0) \frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} + R_t^f \quad (20)$$

たゞし

$$R_t^f = - \sum_{k=0}^{L_t} (-1)^k \psi_t^k(\xi'_\delta, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} / \tau'_0$$

$$+ (-1)^{L_t+1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^{L_t+1} \theta_t(\xi'_\delta, \lambda)}{\partial \lambda^{L_t+1}} \psi_t^{L_t}(\xi'_\delta, \tau' - \lambda) d\lambda$$

$$\psi_t^k(\xi', \tau'_f) = \frac{\partial \phi_t^k(\xi', \tau'_f)}{\partial \xi'}$$

この式で、前述の理由(A)に基き、 R_t^f を無視すると、次式である。

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \xi' / \xi'_\delta} = \sum_{k=1}^{L_t} (-1)^k \psi_t^k(\xi'_\delta, 0) \frac{\partial^k \theta_t(\xi'_\delta, \tau')}{\partial \tau'^k} \quad (21)$$

この式に、式(17)を代入すると、 $\theta_t(\xi', \tau')$ による点 ξ'_δ の熱流束は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \xi' / \xi'_\delta} = \sum_{\ell=1}^{L_t} V'_\ell \frac{\partial^\ell \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'^\ell} \quad (22)$$

たゞし、

$$V'_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \psi_i^k(\xi'_\delta, 0) C'_{\ell-k} \quad (23)$$

平板の場合、付録Bに示すように、この V'_ℓ は、 ξ_m と ξ_δ との位置関係によって、次の値を持つ。

$$V'_\ell = \pm \frac{1}{(2\ell-1)!}, \quad \xi'_\delta \geq \xi'_m \quad (\text{符号同順}) \quad (24)$$

式(22)の級数の初項は、 $\ell=1$ からである。これは、式(13)で、 $\phi_i^0(\xi', 0) = 1$ である為に、式(20)では、 $\theta_i(\xi'_\delta, \tau')$ の項を含まないからである。しかし、式(20)の右辺第2項の R_i^f 内には、 $\psi_i^0(\xi'_\delta, \tau' - \tau'_0)$ なる項が含まれている。 R_i^f は無視した項であるため、以下の取扱いには、 $\psi_i^0(\xi'_\delta, 0)$ なる項は、形式的にも現われてこない。なお、本報の取扱いでは、関数 $\phi_i^0(\xi', \tau')$ について、常に、次の関係を考慮している。

$$\lim_{\tau' \rightarrow 0} \phi_i^0(\xi', \tau') = \phi_i^0(\xi', 0) = 1$$

$$\lim_{\tau' \rightarrow 0} \psi_i^0(\xi', \tau') = \lim_{\tau' \rightarrow 0} \frac{\partial \phi_i^0(\xi', \tau')}{\partial \xi'} \neq 0$$

次に、式(10)の被積分関数内に含まれる $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ を求める。同式で、点 ξ'_m で既知とした熱流束変化 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m$ は、 L_f 階の導関数まで知られているとすると、このような熱流束変化の原因である点 ξ'_δ の熱流束変化 $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta$ は、少なくとも、 L_f 階の導関数まで知りうるであろうから、これらの関係を、式(10)の L_f+1 回の部分積分により、次のように導くことが出来る。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m = \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{1}{u_f} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta \frac{\partial^2 U_f(\xi', \tau' - \lambda)}{\partial \tau' \partial \xi'} / \xi'_m d\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{L_f} (-1)^k \psi_f^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^k}{\partial \tau'^k} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta - \sum_{k=0}^{L_f} (-1)^k \psi_f^k(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial^k}{\partial \tau'^k} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta, \tau'_0$$

$$+ (-1)^{L_f+1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^{L_f+1}}{\partial \lambda^{L_f+1}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'} / \xi'_\delta \psi_f^{L_f}(\xi'_m, \tau' - \lambda) d\lambda \quad (25)$$

ここで、 $\psi_f^k(\xi', \tau')$ は、付録A. 2に示した $U_f(\xi', \tau')$ の固有値、固有関数、および、係数を用いて、次式で与えられる。

$$\psi_f^k(\xi', \tau') = \frac{1}{u_f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \frac{\partial Q_n}{\partial \xi'}}{\beta_n^{2k}} e^{-\beta_n^2 \tau'} \quad (26)$$

ただし

$$\psi_f^0(\xi', 0) = \frac{1}{u_f} \frac{\partial U_f^\infty(\xi)}{\partial \xi}$$

である。

式(13)から式(15)を導いたと同様に、式(25)の ℓ 回の微分より、次式をうる。

$$\frac{\partial^\ell}{\partial \tau'^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi' / \xi'_m} = \sum_{k=0}^{L_f - \ell} (-1)^k \psi_f^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial \tau'^{k+\ell}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta} + R_f^\ell, \quad 0 \leq \ell \leq L_f \quad (27)$$

たゞし、

$$R_f^\ell = \sum_{L \geq k = L - \ell + 1}^{L_f} (-1)^k \psi_f^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial \tau'^{k+\ell}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta} - \sum_{k=0}^{L_f + \ell} (-1)^{k+\ell} \psi_f^{k-\ell}(\xi'_m, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial^k}{\partial \tau'^k} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta, \tau'_0} \\ + (-1)^{L_f + 1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^{L_f + \ell + 1}}{\partial \lambda^{L_f + \ell + 1}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta} \psi_f^{L_f}(\xi'_m, \tau' - \lambda) d\lambda$$

$$(-1)^{k+1} \psi_f^k(\xi', \tau') = \frac{1}{u_f} \frac{\partial^{|k|}}{\partial \tau'^{|k|}} \frac{\partial U_f}{\partial \xi'}, \quad k < 0$$

こゝで、

- (i) 既知の熱流束変化 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi' / \xi'_m}$ は、時間について、 L_f 階の導関数まで知られている。
- (ii) 未知の $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta}$ については、その $L_f + 1$ 階以上の導関数に関する知見は期待しない。
- (iii) 時刻 τ'_0 は、現時刻 τ' より、はるかに前の時刻であって、現時刻への各 $\frac{\partial^k}{\partial \tau'^k} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta, \tau'_0}$ の影響は無視出来る。

(B)

と考え、式(27)内の R_f^ℓ を、すべて、無視したものが次式であり、前報に示した取扱を、熱流束変化を既知とする場合に適用したものである。

$$\frac{\partial^\ell}{\partial \tau'^\ell} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi' / \xi'_m} \right) = \sum_{k=0}^{L_f - \ell} (-1)^k \psi_f^k(\xi'_m, 0) \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial \tau'^{k+\ell}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta} \quad 0 \leq \ell \leq L_f \quad (28)$$

この $L_f + 1$ 階の方程式群より、 $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta}$ は、次式で表わされる。

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi' / \xi'_\delta} = \sum_{\ell=0}^{L_f} W'_\ell \frac{\partial^\ell}{\partial \tau'^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi' / \xi'_m} \quad (29)$$

たゞし、

$$W'_0 = 1 / \psi_f^0(\xi'_m, 0)$$

$$W'_\ell = \frac{1}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \sum_{k=0}^{\ell-1} (-1)^k \psi_f^{k+1}(\xi'_m, 0) W_{\ell-k-1} \quad \left. \vphantom{W'_\ell} \right\} \quad (30)$$

平板の場合，付録Bに示すように，この W'_ℓ は， ξ_m と ξ_δ との位置関係によらず，次の値を持つ。

$$W'_\ell = \frac{1}{(2\ell)!} \quad (31)$$

式(29)に示した点 ξ'_δ の熱流束変化 $\frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'_f / \xi'_\delta}$ を含む積分式(9)は，今迄と同様に， L_f+1 回の部分積分により，次のように書き直すことが出来る。

$$\begin{aligned} \theta_f(\xi'_\delta, \tau') &= \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{1}{u_f} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'_f / \xi'_\delta} \frac{\partial U_f(\xi'_\delta, \tau' - \lambda)}{\partial \tau'} d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{L_f} (-1)^k \phi_f^k(\xi'_\delta, 0) \frac{\partial^k}{\partial \tau'^k} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'_f / \xi'_\delta} + R_f^1 \end{aligned} \quad (32)$$

ただし

$$\begin{aligned} R_f^1 &= - \sum_{k=0}^{L_f} (-1)^k \phi_f^k(\xi'_\delta, \tau' - \tau'_0) \frac{\partial^k}{\partial \tau'^k} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'_f / \xi'_\delta, \tau'_0} \\ &\quad + (-1)^{L_f+1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \frac{\partial^{L_f+1}}{\partial \lambda^{L_f+1}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'_f / \xi'_\delta} \phi_f^{L_f}(\xi'_\delta, \tau' - \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

また， $\phi_f^k(\xi', \tau')$ は，付録A. 2に示した $U_f(\xi', \tau')$ の固有値，固有関数，および，係数を用いて，次式で与えられる。

$$\phi_f^k(\xi', \tau') = \frac{1}{u_f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n Q_n(\xi')}{\beta_n^{2k}} e^{-\beta_n^2 \tau'} \quad (33)$$

ただし，

$$\phi_f^0(\xi', 0) = \frac{1}{u_f} U_f^\infty(\xi')$$

である。そして，この $\phi_f^k(\xi', \tau')$ と，式(26)の $\psi_f^k(\xi', \tau')$ とは，次の関係にある。

$$\psi_f^k(\xi', \tau) = \frac{\partial \phi_f^k(\xi', \tau')}{\partial \xi'} \quad (34)$$

式(32)で，前述の理由(B)により， R_f^1 を無視すると，次式である。

$$\theta_f(\xi'_\delta, \tau') = \sum_{k=0}^{L_f} (-1)^k \phi_f^k(\xi'_\delta, 0) \frac{\partial^k}{\partial \tau'^k} \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi'_f / \xi'_\delta} \quad (35)$$

この式に、式(29)を代入すると、 $\theta_f(\xi', \tau')$ の点 ξ'_δ での温度は、次式で与えられる。

$$\theta_f(\xi'_\delta, \tau') = \sum_{\ell=0}^{L_f} D'_\ell \frac{\partial^\ell}{\partial \tau'^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'/\xi'_m} \quad (36)$$

ただし、

$$D'_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \phi_f^k(\xi'_\delta, 0) W'_{\ell-k} \quad (37)$$

平板の場合、付録Bに示すように、この D'_ℓ は、 ξ_m と ξ_δ との位置関係によって、次の値を持つ。

$$D'_\ell = \pm \frac{1}{(2\ell+1)!}, \quad \xi_\delta \geq \xi_m \text{ (符号同順)} \quad (38)$$

これまで示した、式(17)、(22)、(29)、および、(36)を用いて、点 ξ'_m で既知とした温度変化 $\theta(\xi'_m, \tau')$ 、および、熱流束変化 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'/\xi'_m}$ と、点 ξ'_δ における未知の温度変化 $\theta(\xi'_\delta, \tau')$ 、および、熱流束変化 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'/\xi'_\delta}$ との関係は、式(11)、(12)により、次のように与えられる。

$$\theta(\xi'_\delta, \tau') = \sum_{\ell=0}^{L_1} C'_\ell \frac{\partial^\ell \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'^\ell} + \sum_{\ell=0}^{L_f} D'_\ell \frac{\partial^\ell}{\partial \tau'^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'/\xi'_m} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi'/\xi'_\delta} = \sum_{\ell=1}^{L_1} V'_\ell \frac{\partial^\ell \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'^\ell} + \sum_{\ell=0}^{L_f} W'_\ell \frac{\partial^\ell}{\partial \tau'^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'/\xi'_m} \quad (40)$$

これらの式(39)、(40)の導出過程に示されたように、式(4)の座標変換に関連して述べた点 ξ'_m と点 ξ'_δ とにおける値の差は、結局、ステップ状に単位温度上昇時の内部応答を記述する関数 $U_1(\xi', \tau')$ 、および、ステップ状に単位熱流束を与え続けるときの内部応答関数

$U_f(\xi', \tau')$ を通して、式(39)、(40)の各係数 C'_ℓ 、 D'_ℓ 、 V'_ℓ 、 W'_ℓ に表示される。すなわち、若し、 $\xi_1 < \xi_m$ の場合と、 $\xi_2 > \xi_m$ なる、点 ξ_1 と点 ξ_2 との両者についての温度変化、熱流束変化を求めたい場合には、夫々の点に対応する U_1 、 U_f を用いる為、式(39)、(40)と同形式の2対の式が必要である。そして、この $U_1(\xi', \tau')$ 、および、 $U_f(\xi', \tau')$ を通して、各各種の一次元幾何学形状が持ちこまれる。

また、式(39)、(40)は、点 ξ_m で与えられた温度変化、および、熱流束変化を用いて、点 ξ_δ の温度変化、および、熱流束変化を記述したものである。

全く同様にして、点 ξ_δ の温度変化、および、熱流束変化を用いて、点 ξ_m の温度変化、および、熱流束変化の式が、式(39)、(40)と同形式に導くことが出来る。この場合、 ξ_δ と ξ_m との役割の交換は、使用する $U_1(\xi', \tau')$ 、および、 $U_f(\xi', \tau')$ を通して現われる。

したがって、式(39)、および、(40)は、任意の幾何学形状を一次元として取扱う場合、同固体内の2点の温度変化、および、熱流束変化の相互関係を表わすものである、と言える。

式(39)、および、式(40)の導出に見られるように、これらは、式(15)、(20)、(27)、(32)で

$R_1^{\theta}, R_1^i, R_1^{\theta}, R_1^i$ を、夫々、無視して得られたものである。したがって、これらは無視しう
 るような条件、すなわち、表面での温度、または、熱流束が、たとえ、不連続に変化した場合
 でも、現時刻にその影響を及ぼさないような、はるか以前の時刻にそれらが生じたものである
 ならば、式(39)、および式(40)は、十分に、よく、 ξ_0 点の温度、および、熱流束の各変化を
 記述しうると期待できる。しかし、表面での温度や熱流束が不連続変化した直後には、 $R_1^{\theta},$
 $R_1^i, R_1^{\theta}, R_1^i$ を無視し難く、それらは無視した式(39)、式(40)、すなわち、点 ξ_m での温度、
 および、熱流束の各変化のみに基づいて、点 ξ_0 の温度、および、熱流束変化が、常に、記述
 可能であるとは限らないと言えよう。これらは、第4章で検討する。

2点間の温度変化、および、熱流束変化の相互関係を記述する式は、従来、全く知られてな
 いわけではない。

Carslaw と Jaeger⁽¹⁰⁾ は、その著書の冒頭部分で、平板の場合について、2点間の温度
 変化(したがって、熱流束変化)を記述する式を示している。その式は、非定常熱伝導方程式
 を満たすものであることのみ述べていて、導出過程は、明かではない。その式と、式(39)の平
 板の場合とは、全く、同一である。

また、Burggraf⁽¹²⁾ は、デュハメル積分に基づかず、以下に述べるような、本報とは別
 個の方法で、平板、球、円柱、中空球、および、中空円柱での2点間の温度、および、熱流束
 各変化の相互関係を導いた。

Burggraf の取扱は、点 ξ' の未知の温度、 $\theta(\xi', \tau')$ は、点 ξ'_m の既知の温度 $\theta(\xi'_m, \tau')$ および、熱流束 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m$ で、次のように記述出来ると仮定することから始まっている。

$$\theta(\xi', \tau') = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi') \frac{\partial^n \theta(\xi'_m, \tau')}{\partial \tau'^n} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\xi') \frac{\partial^n}{\partial \tau'^n} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} / \xi'_m \quad (41)$$

すなわち、Burggraf は、時間変化と場所変化は分離出来るという仮定を行ったことに対応
 している。式(41)と、デュハメル積分より求めた本報の式(39)とを比較してみると、級数の
 和の上限が、無限大か、有限かを除いて、このBurggraf の仮定は、形式的には、本報の結果
 と一致している。

Burggraf は、式(41)は、非定常の熱伝導方程式に従うはずであるとしたので、 $f_n(\xi')$
 $g_n(\xi')$ について、次の関係式を導くことが出来た。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 f_0(\xi') &= 0 \\ \nabla^2 f_n(\xi') &= f_{n-1}(\xi'), \quad n \geq 1 \\ \nabla^2 g_0(\xi') &= 0 \\ \nabla^2 g_n(\xi') &= g_{n-1}(\xi'), \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

そして、Burggraf は、これらの $f_n(\xi')$ 、 $g_n(\xi')$ は、次式の境界条件を満足すべきものとし
 た。

$$\left. \begin{aligned}
 f_0(\xi'_m) &= 1, \\
 f_n(\xi'_m) &= 0, \quad n \geq 1 \\
 g_n(\xi'_m) &= 0, \quad n \geq 0 \\
 \frac{\partial f_n}{\partial \xi' / \xi'_m} &= 0, \quad n \geq 0 \\
 \frac{\partial g_0}{\partial \xi' / \xi'_m} &= 1, \\
 \frac{\partial g_n}{\partial \xi' / \xi'_m} &= 0, \quad n \geq 1
 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

この境界条件は、式(41)の $\theta(\xi', \tau')$ 、および、式(41)より導かれる $\frac{\partial \theta(\xi', \tau')}{\partial \xi'}$ は、共に、 ξ' が、 ξ'_m であっても成立するための条件であると見なすことが出来る。このように、式(43)の境界条件は、単純、かつ、自明のことであるとした為か、Burggraf は、これらの境界条件を用いた理由については言及していない。

式(41)と、式(39)の比較から、式(41)の $f_n(\xi')$ 、 $g_n(\xi')$ は、夫々、式(39)の C'_ℓ, D'_ℓ に対応するものである。この C'_ℓ, D'_ℓ について、式(43)の関係が成立しているか、どうか、を調べてみる。

本報の式(39)、(40)を導出した過程で、式(42)に対比すべき微分方程式は、式(16)で $\ell = 0$ の場合と、式(35)とから得られる。それらの式が、夫々、非定常熱伝導方程式を満足すべきものとして、次の関係が導かれる。

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \phi_t^0(\xi', 0) &= 0, \\
 \nabla^2 \phi_t^n(\xi', 0) &= -\phi_t^{n-1}(\xi', 0) \\
 \nabla^2 \phi_f^0(\xi', 0) &= 0, \\
 \nabla^2 \phi_f^n(\xi', 0) &= -\phi_f^{n-1}(\xi', 0)
 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

これらの $\phi_t^n(\xi', 0)$ 、 $\phi_f^n(\xi', 0)$ についての境界条件は、付録A-1、A-2に示されるように、次のようなものである。

$$\begin{aligned}
 \phi_t^0(\xi', 0) &= 1, \\
 \phi_t^n(\xi'_\partial, 0) &= 0, \quad n \geq 1
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_t^n}{\partial \xi' / \xi'_m} &= 0, & n \geq 0 \\
 \phi_t^n(\xi'_m, 0) &= 0, & n \geq 0 \\
 \frac{\partial \phi_f^0}{\partial \xi' / \xi'_\delta} &= 1, \\
 \frac{\partial \phi_f^n}{\partial \xi' / \xi'_\delta} &= 0, & n \geq 1
 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

したがって、式(18)、(30)、(37)に示されるように、 C'_ℓ 、 D'_ℓ は、

$$\phi_t^k(\xi'_m, 0) ; \phi_f^k(\xi'_\delta, 0), \psi_f^k(\xi'_m, 0)$$

の値で構成されており、

$$C'_\ell(\xi'_m) \cong 0, \quad D'_\ell(\xi'_m) \cong 0$$

といえる。これは、対応する $f_n(\xi'_m)$ についての条件、式(43)とは異っている。このように、式(39)と式(41)とは、同一形式ながら、それらの係数に課された条件は、異ったものである。

Burggraf は、式(42)、(43)より各形状について、 $f_n(\xi')$ 、 $g_n(\xi')$ を求めた。たとえば、平板の場合、

$$\begin{aligned}
 \xi' &= \xi'_\delta = 1 \\
 \xi'_m &= 0
 \end{aligned}$$

とすると、簡単に、

$$f_n(\xi'_\delta) = \frac{1}{(2n)!}, \quad g_n(\xi'_\delta) = \frac{1}{(2n+1)!}$$

と求めることが出来る。これらの値は、本報の式(39)を平板に適用した場合の C'_n 、 D'_n の値に等しい。

このように、Burrgraf の f_n 、 g_n は、本報の C'_n 、 D'_n とは、全く異った条件で求められるが、平板の場合の結果は、同一の値を与える。付録Cには、任意の一次元幾何学形状で、このようなBurrgraf の f_n 、 g_n と、本報の C'_n 、 D'_n は、同一の値であることを示してある。

一次元固体内の2点における温度、および、熱流束の各変化の相互関係を記述するBurrgraf の方式、および、本報の方法の特質は、次のように、まとめることが出来る。

- (i) Burggraf は、式 (41) を仮定したのに対し、本数では、デュハメル積分より出発している。
- (ii) Burggraf の式 (41) , および、本報の式 (39) (40) の各係数を導くに用いた条件は、同一ではない。
- (iii) しかし、式 (41) , および、式 (39) , (40) の各係数は、同一である。
- (iv) 本報の方式では、式 (39) , (40) の各係数と、従来から非定常熱伝導での基本的関数とされる $U_t(\xi', \tau')$, $U_f(\xi', \tau')$ との関係を明示できる。
- (v) Burggraf の式 (41) と、本報の式 (39) , (40) との重要な差は、両式の級数の和の上限が、Burggraf の場合には無限大であり、本報では有限値と異なることである。
Burggraf は、おそらく、式 (41) と仮定した為、級数展開の和の上限は、無限大と考えざるを得なかったものと思われる。一方、本報では、逆問題は、本来、減衰系を取扱っていることから、有限の知見に基づいたデュハメル積分の取扱いをした為に、級数の和の上限は有限である。なお、Carslaw と Jaeger の記述では、級数和の上限は明示していない。
- (vi) 前項(v)と関連すると思われるが、Carslaw と Jaeger , および、Burggraf は、彼等の得た式について、それらの式の特質、使用限界、そして、逆問題での利用方法等、次章以降に述べる事項について、全く述べていない(したがって、Burggraf の方法を用いて得られたとする実験の解析結果⁽¹³⁾の評価は、再検討する必要がある)。

なお、式 (39) , (40) 内の各係数 $C'_\ell, V'_\ell, W'_\ell, D'_\ell$ は、夫々、式 (18) , (23) , (30) , (37) より求められるが、それらの式に必要な、 $\phi_f^k(\xi'_m, 0)$, $\psi_f^k(\xi'_0, 0)$, $\psi_f^k(\xi'_m, 0)$ は、式 (44) と (45) の関係から、容易に求めることが出来る。式 (44) , (45) から求めた、これらの値と、それらを式 (14) , (26) 等の、 $U_t(\xi', \tau')$, $U_f(\xi', \tau')$ との関係式から求めた値とは、勿論、同一である。また、付録C に示すように、これらの $C'_\ell, D'_\ell, V'_\ell, W'_\ell$ は、式 (42) , (43) から求めたものと、また、同一である。

3. 平板の場合の表面温度、および、表面熱流束変化記述式

前章では、一次元固体内部の点 ξ_m で、内部温度、および、その点の熱流束が与えられたものとして、同固体内の他の点 ξ_δ の温度、および、同点の熱流束を記述する式 (39)、および、式 (40) を、座標系 (ξ', τ') で導いた。考察している固体の座標系 (ξ, τ) と仮りの座標系 (ξ', τ') との関係は、式 (4) に示してあるから、式 (39)、および式 (40) は、次のように、 (ξ, τ) 系で記述することが出来る。

$$\theta(\xi_\delta, \tau) = \sum_{\ell=0}^L C'_\ell z^{2\ell} \frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} + \sum_{\ell=0}^L D'_\ell z^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta} = \sum_{\ell=1}^L V'_\ell z^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} + \sum_{\ell=0}^L W'_\ell z^{2\ell} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (47)$$

ここで、 z は、固体の幾何学的形状によって、式 (4) より、

$$\frac{\partial}{\partial \xi'} = z \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau'} = z^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (48)$$

として定まる量であり、たとえば、次のようなものである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{平板の場合} \quad z = \begin{cases} \xi_m - \xi_\delta, & \xi_m > \xi_\delta \\ \xi_\delta - \xi_m, & \xi_m < \xi_\delta \end{cases} \\ \text{中空円柱の場合} \quad z = \xi_\delta, \text{ または, } \xi_m \end{array} \right\} \quad (49)$$

また、 $C'_\ell, D'_\ell, V'_\ell, W'_\ell$ は、すでに前章に示したように、 ξ_m, ξ_δ で定まっている常数である。

前章では、点 ξ_m で温度変化 $\theta(\xi_m, \tau)$ 、および、熱流束変化 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ は、夫々、独立に与える取扱いであった。しかし、この式 (46)、(47) では、 $\theta(\xi_m, \tau)$ と $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ とは、点 ξ_m が、2ヶの表面 ξ_{s1} と ξ_{s2} との間にはさまれた点であるため、 ξ_{s1} 、および、 ξ_{s2} での、未知の境界条件に従って変化する $\theta(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ であることを意味している。

また、前章の取扱いでは、 $\theta(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ が独立に与えるものであるし、また、式の透導過程を明示するために、 $\theta(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ は、夫々、 L_1 階、および、 L_1 階の導関数まで知られているとした。しかし、平板の場合であれば、

$$\theta(\xi_m, \tau), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2 / \xi_m} = \frac{\partial \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^3 \theta}{\partial \xi^3 / \xi_m} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}, \quad \dots$$

と、 $\theta(\xi_m, \tau)$ の空間、および、時間について変化は、逐次、知られるものであるから、式(46)、(47)、および、以下、本報では、

$$L = L_t = L_f$$

として取扱う。

したがって、平板の場合には、式(49)の z の値、および、式(19)、(24)、(31)、(38) に示した C'_ℓ 、 V'_ℓ 、 W'_ℓ 、 D'_ℓ の値を考慮すると、 $\theta(\xi_\delta, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta}$ は、 ξ_m と ξ_δ との位置関係によらず、次式で与えられる。

$$\theta(\xi_\delta, \tau) = \sum_{\ell=0}^L C_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} + \sum_{\ell=0}^L D_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (50)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta} = \sum_{\ell=1}^L V_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} + \sum_{\ell=0}^L W_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (51)$$

ただし、 C_ℓ 、 D_ℓ 、 V_ℓ 、 W_ℓ は、次の値である。

$$C_\ell = \frac{1}{(2\ell)!}, \quad D_\ell = \frac{1}{(2\ell+1)!}, \quad V_\ell = \frac{1}{(2\ell-1)!}, \quad W_\ell = \frac{1}{(2\ell)!} \quad (52)$$

この式で、 $\xi_m = \xi_\delta$ の場合には、

$$\theta(\xi_\delta, \tau) = \theta(\xi_m, \tau), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$$

であり、正しい記述を示す。

また、各係数、 C_ℓ 、 D_ℓ 、 V_ℓ 、 W_ℓ は、前章に示したように、夫々、異った定義より求められたものである。しかし、式(50)を、 ξ_δ について微分したものは、式(51)であることが、視察によって確かめられる。

内部点 ξ_m に対して、最も関心のあるのは表面である。平板の場合に、表面は、夫々、 $\xi_\delta = 0$ または、 $\xi_\delta = 1$ である。それらの点の表面温度を $G(0, \tau)$ 、 $G(1, \tau)$ 、また夫々の表面熱流束を $\frac{\partial G}{\partial \xi} / 0$ 、 $\frac{\partial G}{\partial \xi} / 1$ とすると、これらは、式(50)、(51)より、次の様に書き表わすことが出来る。

$$G(0, \tau) = \sum_{\ell=0}^L C_\ell \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} - \sum_{\ell=0}^L D_\ell \xi_m^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (53)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} / 0 = - \sum_{\ell=1}^L V_\ell \xi_m^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} + \sum_{\ell=0}^L W_\ell \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (54)$$

$$G(1, \tau) = \sum_{\ell=0}^L C_{\ell} (1 - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^{\ell} \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^{\ell}} + \sum_{\ell=0}^L D_{\ell} (1 - \xi_m)^{2\ell+1} \frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (55)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi / 1} = \sum_{\ell=1}^L V_{\ell} (1 - \xi_m)^{2\ell-1} \frac{\partial^{\ell} \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^{\ell}} + \sum_{\ell=0}^L W_{\ell} (1 - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} \quad (56)$$

4. 平板における表面温度, および, 表面熱流束変化 記述式の特性の検討

第2章で, 式(39), (40) について述べたように, 前章で得られた各式は, 第2章の式(15), (20), (27), および, (32)で, 夫々, R_1^{θ} , R_1^t , R_1^{θ} , および, R_1^t を無視して導かれたものである。したがって, 前章に示した各式は, 希望する点 ξ_{δ} , あるいは, 表面の温度や熱流束変化を記述できると期待しうる場合と期待しがたい場合とがある。

このことは, 平板の場合の式(50), (51) について, 次のように見ることが出来る(式(53)~(56) の場合も, 全く, 同様である)。

平板の場合

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau^{\theta}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2 \theta}$$

であるから, 式(50)は, 次のように, 並べかえて, 再配列することが出来る。

$$\begin{aligned} \theta(\xi_{\delta}, \tau) &= C_0 \theta(\xi_m, \tau) + D_0 (\xi_{\delta} - \xi_m) \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} + C_1 (\xi_{\delta} - \xi_m)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2 / \xi_m} \\ &+ D_1 (\xi_{\delta} - \xi_m)^3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial \xi^3 / \xi_m} + C_2 (\xi_{\delta} - \xi_m)^4 \frac{\partial^4 \theta}{\partial \xi^4 / \xi_m} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{2L+1} \frac{(\xi_{\delta} - \xi_m)^k}{k!} \frac{\partial^k \theta}{\partial \xi^k / \xi_m} \end{aligned} \quad (57)$$

同様に, 式(51)は, 次式で表わされる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_{\delta}} = \sum_{k=0}^{2L} \frac{(\xi_{\delta} - \xi_m)^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \theta}{\partial \xi^{k+1} / \xi_m} \quad (58)$$

この式(57), (58) の表示は, $\theta(\xi_{\delta}, \tau)$, および, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_{\delta}}$ が, 点 ξ_m の値を用いて, Taylor 展開されたこと, を示している。

或る関数を Taylor 展開する場合, 常に, その Taylor 展開で表示されるとは限らないことは, 良く, 知られている。⁽¹⁵⁾ すなわち, 式(50)~(56) のような表示が可能であるか, どうか, が, まづ, 検証されを必要がある(4.1節)。そして, 式(50)~(56) の表示が可能であっても, それらの和の上限, L で, 十分な精度で表記しているか, どうかを検討する必要がある(4.4節)。

これらの検証, または, 検討には, 一次元固体内で起りうる。任意の温度変化について行えば, 充分である。一次元固体内で起りうる温度変化は, 次の $\theta_{bt}^n(\xi, \tau)$, および $\theta_{bf}^n(\xi, \tau)$ で代表される。

$\theta_{bt}^n(\xi, \tau)$ は, $\xi = 0$, および 1 の両表面で, 次の条件を満たす場合である。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{bt}^n(0, \tau) &= G_{Dbt}^n = \begin{cases} 0 & , \tau \leq \tau_n, n \geq 0 \\ (\tau - \tau_n)^n & , \tau > \tau_n \end{cases} \\ -\frac{\partial \theta_{bt}^n(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/ 1 &= Bi \theta_{bt}^n(1, \tau) \\ \theta_{bt}^n(\xi, \tau) &= 0, \quad \tau \leq \tau_n \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

すなわち, $\theta_{bt}^n(\xi, \tau)$ は, $\xi = 0$ の表面で, 表面温度が n 次式で変化する場合の, ξ, τ における内部温度応答である。

また, $\theta_{bf}^n(\xi, \tau)$ は, $\xi = 0, 1$ の両表面で, 次の条件を満たす場合である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_{bf}^n(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/ 0 &\equiv G_{Dbf}^n = \begin{cases} 0 & , \tau \leq \tau_n, n \geq 0 \\ -(\tau - \tau_n)^n & , \tau > \tau_n \end{cases} \\ -\frac{\partial \theta_{bf}^n(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/ 1 &= Bi \theta_{bf}^n(1, \tau) \\ \theta_{bf}^n(\xi, \tau) &= 0, \quad \tau \leq \tau_n \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

すなわち, $\theta_{bf}^n(\xi, \tau)$ は, $\xi = 0$ の表面で, 表面熱流束が, n 次式で変化する場合の, 内部温度応答である。

これらの境界条件, 初期条件を持つ $\theta_{bt}^n(\xi, \tau)$, $\theta_{bf}^n(\xi, \tau)$, および, それらの熱流束を求めることは, 従来から, 直問題として知られているものであり, それらは, 次式で与えられる。

$$\theta_i^n(\xi, \tau) = u_i \sum_{k=0}^n (-1)^k \phi_i^k(\xi, 0) \frac{\partial^k G_{Di}^n}{\partial \tau^k} - (-1)^n n! \phi_i^n(\xi, \tau - \tau_n) \quad (61)$$

$$\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} = u_i \sum_{k=0}^n (-1)^k \psi_i^k(\xi, 0) \frac{\partial^k G_{Di}^n}{\partial \tau^k} - (-1)^n n! \psi_i^n(\xi, \tau - \tau_n) \quad (62)$$

ただし,

$$i = bt, \text{ または, } bf$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^0(\xi, 0) &= U_i^\infty(\xi), \quad \phi_i^k(\xi, \tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s H_s(\xi)}{r_s^{2k}} e^{-r_s^2 \tau}, \\ \psi_i^0(\xi, 0) &= \frac{\partial U_i^\infty}{\partial \xi}, \quad \psi_i^k(\xi, \tau) = \frac{\partial \phi_i^k(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \\ u_{bt} &= 1, \quad u_{bf} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

こゝで、 U_i^∞ 、 r_s 、 H_s 、 h_s は、境界条件が、式(59)、(60)で、 $n=0$ の場合、すなわち、ステップ状に単位だけ表面条件が変化する場合の内部温度応答関数に関するもので、夫々、時刻が無限大時の応答、固有値、固有関数、および、係数である。これらは、 G_{Di}^n を表面温度変化を示す $G_{D_{bt}}^n$ とするとき、付録A. 3に示す $U_{bt}(\xi, \tau)$ についての式(A-15)、(A-16)を用いるし、また、 G_{Di}^n を表面熱流束変化を示す $G_{D_{bf}}^n$ とするとき、付録A. 4に示す $U_{bf}(\xi, \tau)$ についての式(A-18)、(A-19)を用いることを示す。

付録A. 3、A. 4に示したそれらの式から、表面条件が変化するとしている $\xi=0$ で、 $\phi_i^k(0, \tau)$ 、 $\psi_i^k(0, \tau)$ は、次の値を持つ。

表面温度変化の場合

$$\phi_{bt}^0(0, 0) = 1, \quad \phi_{bt}^k(0, \tau) = 0, \quad \psi_{bt}^0(\xi, 0) = -\frac{Bi}{Bi+1} \quad (63)'$$

表面熱流束変化の場合

$$\phi_{bf}^0(0, 0) = \frac{1+Bi}{Bi}, \quad \psi_{bf}^0(\xi, 0) = -1, \quad \psi_{bf}^k(0, \tau) = 0 \quad (63)''$$

なお、 u_i は、ステップ状単位表面条件変化の単位の値である。

なお、式(63)~(63)'' で、

$$U_i^\infty(\xi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \phi_i^0(\xi, \tau)$$

であるが、式(A-15)、(A-16)の場合には、

$$\psi_{bt}^0(\xi, 0) = \frac{\partial U_{bt}^\infty}{\partial \xi} \neq \lim_{\tau \rightarrow 0} \psi_{bt}^0(\xi, \tau) \quad (64)$$

である。したがって、 $\frac{\partial U_i^\infty}{\partial \xi} = \psi_i^0(\xi, 0)$ とした $\psi_i^0(\xi, 0)$ と、 $\psi_i^0(\xi, \tau)$ とは、本来、別系列の文字で定義すべきものであるが、以下、本報で、この点を峻別しなければならぬことはないので、式(63)の定義を用いることにする。

この式(64)の事情は、第2章でも同様である。しかし、第2章の式(20)、および、その説明で述べたように、第2章の取扱いでは、 $\psi_{b_i}^0(\xi, 0)$ に相当する項は、式内に現われないし、また、 $\psi_{b_i}^0(\xi, \tau)$ に相当する項は、無視した項、式(20)の R_i^f 内に現われるだけである。

前報で述べたように、内部温度は、内部温度測定値より、通常の最少二乗法の手法により、 L 次の多項式表示で得られる。この L は、前章に示した各式内の各級数の和の上限 L 、そのものである(こゝでは、内部熱流束変化も、同様な多項式表示が可能としている。第5章参照)。したがって、式(61)、(62)を用いることは、この L 次多項式の各項毎に、前章の各式の特性を検討することにする。

式(61)、(62)で、それらの式の右辺第1項は、 n 次項までを含むのみで、 $n+1$ 次以上の項は、それらの式の第2項から現われる。したがって、最少二乗法の手法により得られた L 次多項式では、

$$L \geq n$$

であるから、以下では、このような L について検討する。

式(61)、(62)で、 $\tau - \tau_n$ が大きく、

$$\phi_i^n(\xi, \tau - \tau_n) \sim 0, \psi_i^n(\xi, \tau - \tau_n) \sim 0$$

の場合には、式(61)、(62)の最少二乗法で得られる多項式では、 $L = n$ である。したがって、 $L > n$ の場合は、 $G_{D_i}^n$ が不連続変化直後で $\tau - \tau_n$ が小さく、 $\phi_i^n(\xi, \tau - \tau_n)$ 、 $\psi_i^n(\xi, \tau - \tau_n)$ が無視しえない場合である。この場合、 $\phi_i^n(\xi, \tau - \tau_n)$ 、 $\psi_i^n(\xi, \tau - \tau_n)$ は、無限回の導関数を持っている。にも拘らず、それらの L 階の導関数までしか知りえない場合、当然、 L 階までの導関数を用いた前章の各式による結果は、真の値と異なるはずである。

このことにより、 $G_{D_i}^n$ が不連続に変化直後で、 $\tau - \tau_n$ の小さい場合が、以下の検討の主たる対象となる。

以下、本章では、平板の場合について、式(61)、(62)で与えられる $\theta_i^n(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_m$ を、式(50)~(56)の $\theta(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ として用いた場合、式(50)~(56)の特性について検討を行う。

第4.1~4.3節では、点 ξ_m の温度、および、熱流束変化を用いて、同固体内の任意の点 ξ_s の温度、熱流束を記述する式(50)、(51)について以下の事項の検討を行う。なお、この ξ_s は、任意の点であるから、これら各節の検討内容は、当然、 $\xi_s = 0$ 、または、1である両表面についての記述式(53)~(56)にも適用される。

第4.1節では、式(61)、(62)で与えられる $\theta_i^n(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_m$ を、式(50)、(51)の $\theta(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ として用いた場合、式(50)、(51)で、 L が無限大の場合の $\theta(\xi_s, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_s$ は式(61)、(62)で与えられる $\theta_i^n(\xi_s, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_s$ そのものであることを証明する。

第4.2節では、式(59)、(60)に示した $\xi = 0$ での表面条件 G_{Di}^n が n 次式で変化する場合、 n の大小による式(50)、(51)の記述に与える影響を検討する。

第4.3節では、式(59)、(60)に示した $\xi = 1$ での境界条件に含まれる Bi 数の値が、式(50)、(51)の記述に与える影響を検討する。

これらの検討に基づいて、第4.4節では、式(61)、(62)で与えられる $\theta_i^n(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_m$ を、表面温度、および、表面熱流束を記述する式(52)~(56)の $\theta(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ として用いた場合、内部温度、または、内部熱流束の知見の程度、すなわち、それらの最高導関数、 L の影響、内部点 ξ_m の影響等を、数値計算例で示す。

なお、逆問題である為、表面条件が、何時、不連続に変化したかを知りえない。したがって、表面条件が不連続に変化したであろう時刻の判定が必要である。この判定方法は、すでに前報に示したので、こゝでは触れない。

4.1 既知とした知見の程度(導関数の最高階数)が温度、および、熱流束変化記述に与える影響

本節では、固体内で起りうる温度、熱流束変化を与える式(61)、(62)の $\theta_i^n(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_m$ を、式(50)、(51)の $\theta(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ として用いた場合、同式の級数の和の上限、 L が無限大であれば、式(50)、(51)より得られる $\theta(\xi_\delta, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_\delta$ は、式(61)、(62)で知られる $\theta_i^n(\xi_\delta, \tau)$, $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_\delta$ と、全く同一であることを示す。

式(61)、(62)の、点 ξ_m における値、 $\theta_i^n(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_m$ を式(50)、(51)の $\theta(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \theta(\xi_\delta, \tau) = & u_i \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \left[\sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \{ C_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k} \phi_i^{\ell-k}(\xi_m, 0) + \right. \\ & \left. + D_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k+1} \psi_i^{\ell-k}(\xi_m, 0) \right] \frac{\partial^\ell G_{Di}^n}{\partial \tau^\ell} \\ & - (-1)^n n! \sum_{\ell=0}^L \{ C_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \phi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} \\ & + D_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell \psi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} \} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta} &= W_0 \psi_i^0(\xi_m, 0) G_{Di}^n u_i \\
 &+ u_i \sum_{\ell=1}^n (-1)^\ell \left[\sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k V_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k-1} \phi_i^{\ell-k}(\xi_m, 0) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k W_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k} \psi_i^{\ell-k}(\xi_m, 0) \right] \frac{\partial^\ell G_{Di}^n}{\partial \tau^\ell} \\
 &- (-1)^n n! \left[\sum_{\ell=1}^L V_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell \phi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\ell=0}^L W_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \psi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} \right] \quad (66)
 \end{aligned}$$

式(65)の右辺第1項の大かっこ内で、 ξ_m を ξ と置き換えたものを $A\ell$ とすると、次式である。

$$A\ell = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \{ C_k (\xi_\delta - \xi)^{2k} \phi_i^{\ell-k}(\xi, 0) + D_k (\xi_\delta - \xi)^{2k+1} \psi_i^{\ell-k}(\xi, 0) \} \quad (67)$$

この $A\ell$ の ξ についての微分より次式をうる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A\ell}{\partial \xi} &= - \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k 2k (\xi_\delta - \xi)^{2k-1} C_k \phi_i^{\ell-k}(\xi, 0) + \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k (\xi_\delta - \xi)^{2k} C_k \frac{\partial \phi_i^{\ell-k}(\xi, 0)}{\partial \xi} \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k (2k+1) (\xi_\delta - \xi)^{2k} D_k \psi_i^{\ell-k}(\xi, 0) + \sum_{k=0}^{\ell-1} (-1)^k (\xi_\delta - \xi)^{2k+1} D_k \frac{\partial \psi_i^{\ell-k}(\xi, 0)}{\partial \xi} \quad (68)
 \end{aligned}$$

こゝで、式(63)~(63)'より、

$$\frac{\partial \psi_i^0(\xi, 0)}{\partial \xi} = 0$$

$$\psi_i^k(\xi, 0) = \frac{\partial \phi_i^k(\xi, 0)}{\partial \xi}$$

であり、かつ、第2章の式(44)に示したように、 $\phi_i^k(\xi, 0)$ には、次の関係がある。

$$\nabla^2 \phi_i^k(\xi, 0) = -\phi_i^{k-1}(\xi, 0)$$

これらの関係を用いると、式(68)の右辺第1項と第4項、および、第2項と第3項は等しい。

したがって、

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial \xi} = 0$$

である。すなわち、 A_θ は、 ξ によらないことを示している。したがって、式 (67) で、 $\xi = \xi_\delta$ とすると、

$$A_\theta = \phi_i^\theta(\xi_\delta, 0) \tag{69}$$

である。

全く同様な手続により、

$$\text{式 (66) の右辺第 2 項の大かっこ内} = \psi_i^\theta(\xi_\delta, 0) \tag{70}$$

である。また、式 (66) の右辺第 1 項内の $\psi_i^0(\xi_m, 0)$ は、式 (63) ~ (63)" より、 $\psi_i^0(\xi_\delta, 0)$ である。

式 (69), (70) を用いると、式 (65), (66) は、次式である。

$$\begin{aligned} \theta(\xi_\delta, \tau) = & u_i \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \phi_i^\ell(\xi_\delta, 0) \frac{\partial^\ell G_{Di}^n}{\partial \tau^\ell} \\ & - (-1)^n n! \sum_{\ell=0}^L \{ C_\ell(\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \phi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} + D_\ell(\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell \psi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} \} \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta} = & u_i \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \psi_i^\ell(\xi_\delta, 0) \frac{\partial^\ell G_{Di}^n}{\partial \tau^\ell} \\ & - (-1)^n n! \left\{ \sum_{\ell=1}^L V_\ell(\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell \phi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} + \sum_{\ell=0}^L W_\ell(\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \psi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} \right\} \end{aligned} \tag{72}$$

これらの式の右辺第 1 項は、夫々、式 (61), (62) で ξ を ξ_δ としたときの右辺第 1 項と同一である。すなわち、 $\tau - \tau_n$ が充分大きく、式 (71), (72), および式 (61), (62) の右辺第 2 項が無視しうる場合には、式 (71), (72) の $\theta(\xi_\delta, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta}$ は、式 (61), (62) の $\theta_i^n(\xi_\delta, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi / \xi_\delta}$ と全く同一である。

式 (71) の右辺第 2 項を N_n^L とし、それを、式 (63) を用いて書き直すと、次式を得る。

$$\begin{aligned} N_n^L & \equiv -(-1)^n n! \sum_{\ell=0}^L \left\{ C_\ell(\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \phi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} + D_\ell(\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell \psi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^\ell} \right\} \\ & = -(-1)^n n! \sum_{S=1}^{\infty} \frac{h_S}{\gamma_S^{2n}} \left\{ \sum_{\ell=0}^L (-1)^\ell C_\ell(\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \gamma_S^{2\ell} \right\} H_S(\xi_m) \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \sum_{\ell=0}^L (-1)^\ell D_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell+1} \gamma_S^{2\ell+1} \right\} H'_S(\xi_m) \Big] e^{-r_S^2 (\tau - \tau_0)} \quad (73)$$

たゞし、
$$H'_S(\xi_m) = \frac{1}{r_S} \frac{\partial H_S}{\partial \xi / \xi_m}$$

こゝで

$$M_S^L \equiv \left\{ \sum_{\ell=0}^L (-1)^\ell C_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \gamma_S^{2\ell} \right\} H_S(\xi_m) + \left\{ \sum_{\ell=0}^L (-1)^\ell D_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell+1} \gamma_S^{2\ell+1} \right\} H'_S(\xi_m) \quad (74)$$

とすると、 N_n^L は、次式である。

$$N_n^L = -(-1)^n n! \sum_{S=1}^{\infty} \frac{h_S M_S^L}{r_S^{2n}} e^{-r_S^2 (\tau - \tau_0)} \quad (75)$$

式(74)の右辺の各中かっこ内の各級数は、夫々、

$$\cos r_S (\xi_\delta - \xi_m), \quad \sin r_S (\xi_\delta - \xi_m)$$

を、第L項まで巾級数展開したものにはかならない。したがって、Lが無限大の場合、式(74)は、次式で与えられる。

$$M_S^\infty = \cos r_S (\xi_\delta - \xi_m) H_S(\xi_m) + \sin r_S (\xi_\delta - \xi_m) H'_S(\xi_m)$$

$H_S(\xi_m)$ は、式(63)を通して、付録A-3, A-4に示されるように、 $\sin r_S \xi_m$ 、または、 $\cos r_S \xi_m$ である。いずれの場合にも、

$$M_S^\infty = H_S(\xi_\delta)$$

である。したがって、Lが無限大の場合、式(75)は、次式となる。

$$\begin{aligned} N_n^\infty &= -(-1)^n n! \sum_{S=1}^{\infty} \frac{h_S H_S(\xi_\delta)}{r_S^{2n}} e^{-r_S^2 (\tau - \tau_0)} \\ &= -(-1)^n n! \phi_i^n (\xi_\delta, \tau - \tau_0) \end{aligned} \quad (76)$$

全く同様にして、式(72)の右辺第2項で、その中の級数の和の上限が無限大の場合、次式が得られる。

$$\text{式(72)の右辺第2項}(L = \infty) = -(-1)^n n! \psi_i^n (\xi_\delta, \tau - \tau_0) \quad (77)$$

式(71), (72)で、級数の和の上限Lが無限大の場合、式(76), (77)を用いると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \theta(\xi_\delta, \tau) &= u_i \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \phi_i^\ell(\xi_\delta, 0) \frac{\partial^\ell G_D^n}{\partial \tau^\ell} - (-1)^n n! \phi_i^n(\xi_\delta, \tau - \tau_n) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta} &= u_i \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \psi_i^\ell(\xi_\delta, 0) \frac{\partial^\ell G_D^n}{\partial \tau^\ell} - (-1)^n n! \psi_i^n(\xi_\delta, \tau - \tau_n) \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

この式と、式(61), (62) で ξ を ξ_δ としたものを比較してみると、 $\theta(\xi_\delta, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_\delta}$ と、 $\theta_i^n(\xi_\delta, \tau)$, $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi / \xi_\delta}$ とは、全く、同一であることがわかる。

このことから、式(50), (51) ひいては、式(53)~(56)について、次のことが言える。

- (i) これらの式は、点 ξ_m での温度、および、熱流束変化についての知見が、それらの無限回の導関数まで与えられるならば、同固体内の他の点 ξ_δ (表面である $\xi_\delta=0$, 1 も含めて) の温度、および、熱流束変化を完全に記述出来る。
- (ii) また、式(50)~(56)は、式(57), (58) に示した様な意味の Taylor 級数に展開されたものであるといえる(かつ、Taylor 級数展開に伴う剰余項は、その項数が無限大で、零である)。
- (iii) したがって、式(50)~(56)内の級数の和の上限 L が有限の場合、それら級数の和は、それらの式の左辺の値、すなわち、点 ξ_δ の温度、熱流束変化の近似値を与える。
- (iv) この近似値は、 L の増加によって真値に漸近する。
- (v) この近似値が真値に近いかどうか、は、前述の L のほか、式(71), (72) から、 ξ_m と ξ_δ との間隔 $\xi_\delta - \xi_m$ 、表面条件の変化様式 G_{Di}^n 、と Bi 数の影響をうける(第4.2節、および第4.3節参照)。
- (vi) しかし、この近似値が、真値と一致するかどうかは問題となるのは、表面条件が不連続に変化した直後のみである。
- (vii) したがって、表面条件が不連続に変化した直後に、どの程度の時間巾で、どの程度、近似値と真値が一致しないかを検討する必要がある(第4.4節参照)。
- (viii) 以上の点を考慮すれば、式(50)~(56)より、点 ξ_δ や表面の温度や熱流束変化を求めることが出来る。

なお、式(71), (72) で、 $n=0$ 、かつ、 L が無限大の場合より、非定常熱伝導における基本的な関数である $U_i(\xi, \tau)$ (付録A. 3, A. 4 に示した、 $U_{bi}(\xi, \tau)$ 、また、 $U_{bf}(\xi, \tau)$) について、次の関係が得られる。

$$U_i(\xi_\delta, \tau) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ C_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell U_i(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} + D_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi / \xi_m} \right\} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/_{\xi_\delta} = & + \sum_{\ell=1}^{\infty} V_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell U_i(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} \\ & + \sum_{\ell=0}^{\infty} W_\ell (\xi_\delta - \xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m} \end{aligned} \quad (80)$$

式(79)で、 U_i として U_{bt} を用い、かつ、 $\xi_\delta=0$ とすると、次式である。

$$1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ C_\ell \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^\ell U_{bt}(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} - D_\ell \xi_m^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial U_{bt}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m} \right\} \quad (81)$$

また、式(80)で、 U_i として、 U_{bf} を用い、かつ、 $\xi_\delta=0$ とすると、次式である。

$$1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} V_\ell \xi_m^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell U_{bf}(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell} - \sum_{\ell=0}^{\infty} W_\ell \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial U_{bf}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m} \quad (82)$$

4.2 表面条件の不連続変化様式が温度、および熱流束変化記述に与える影響

式(50)~(56)に含まれる点 ξ_m の内部温度、および、熱流束変化について、L 階の導関数まで知られているとする場合、この内部温度、および、熱流束変化は、

$$0 < \dots n_1 < n_2 < n_3 < \dots \leq L$$

なる各種の表面条件の不連続変化様式 $G_{D_i}^n$ の重ね合せと見なせる場合がある。

前節で述べたように、点 ξ_m の $\theta(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m}$ が L 階の導関数まで知られており、かつ、表面条件が n_1 次式で変化する場合、適当に大きな $\tau - \tau_{n_1}$ では、必ず、式(50)~(56)は、点 ξ_δ の温度、および、熱流束変化が記述出来る。では、この時刻 $\tau - \tau_{n_1}$ で、 n_{i-1} , n_{i-2} , \dots 、あるいは、 n_{i+1} , n_{i+2} , \dots の表面条件の不連続変化は、式(50)~(56)で記述されているか、どうか、が問われる。換言すれば、内部での温度、および熱流束変化が L 階の導関数まで知られている場合、式(50)~(56)で得られた結果は、 $n \leq L$ なる、すべての n について表面条件の不連続変化を必ず、記述しているか、どうか、である。

本節では、内部温度、および、熱流束変化が L 階まで既知とする場合、表面条件の不連続変化が、 $G_{D_i}^0$ すなわち、 $n = 0$ で、ステップ状に変化した場合を、式(50)~(56)が記述可能であれば、 $0 < n \leq L$ なるすべての表面条件の不連続変化も、式(50)~(56)で記述されていることを示す。

不連続変化の影響は、すでに前節で述べたように、(式(50)で、 $\theta(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m}$ として、式(61), (62)で与えられる $\theta_1^n(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta_1^n}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m}$ を用いて導かれた)式(71)の右辺第2項に現われる。したがって、式(71)と、式(61)の $\theta_1^n(\xi_\delta, \tau)$ とで得られる次式が不連続変化の影響を示す

ものである。

$$\theta(\xi_\delta, \tau) - \theta_i^n(\xi_\delta, \tau) = N_n^L - N_n^\infty \quad (83)$$

こゝで、 N_n^∞ 自体は、 n の増加で、急速に小さくなるであろうことは、次のようにして、確かめられる。或る時刻で、式(76)に示される N_n^∞ に、大きく寄与する項は第 S 項であるとする。と、 N_n^∞ と N_{n+1}^∞ との比は、式(76)より、大凡、次の値であることがわかる。

$$\frac{N_n^\infty}{N_{n+1}^\infty} \sim \frac{\gamma_s^2}{2n+1}$$

こゝで式(50)～(56)を検討している場合の温度変化では、次節に示すように、 $\gamma_1 = \pi/2$ であるから、 $N_n^\infty/N_{n+1}^\infty$ の値は、 n の増加で小さくなる。また前節に示したように、 L が大では、 N_n^L は、 N_n^∞ に漸近するから、 N_n^L も、また、 n の増加で、減少するものと考えられる。したがって、式(83)の値は、同一の L について、 n の増加で減少するものと考えられる。

しかし、 $\theta_i^n(\xi_\delta, \tau)$ および、 $\theta(\xi_\delta, \tau)$ 自体は、式(61)、および、(71)に示されるように、それらの式の右辺第1項、すなわち、 $\xi = 0$ の表面条件の変化に基づいて、変化している。したがって、式(83)が全温度変化に対する寄与、すなわち、次式を検討する必要がある。

$$\frac{\theta(\xi_\delta, \tau) - \theta_i^n(\xi_\delta, \tau)}{u_i G_{Di}^n} = \frac{N_n^L - N_n^\infty}{(\tau - \tau_n)^n} \quad (84)$$

この式で、 $i = bt$ 、 $\xi_\delta = 0$ とすると、式(59)、(63')、(76)より、

$$\theta_{bt}^n(0, \tau) = G_{D_{bt}}^n$$

$$N_n^\infty = 0$$

であり、次式である。

$$\frac{\theta(0, \tau)}{G_{D_{bt}}^n} - 1 = \frac{N_n^L}{(\tau - \tau_n)^n} \quad (85)$$

すでに前報で、中空円柱の場合の断熱端の温度変化を用いて、或る L で、 $n = 0$ の場合に、

$$\theta(0, \tau) \simeq G_{D_{bt}}^0 = 1$$

である時刻 $\tau - \tau_0$ では、同一の L で、 $n \geq 1$ の場合にも、式(85)の値は小さく、

$$\theta(0, \tau) \simeq G_{D_{bt}}^n$$

であることを、計算例で示した。しかも、この場合、

$$\tau - \tau_0 \ll 1$$

であった。以下では、断熱端とは限らず、かつ式(84)の場合にも、同様のことが成り立つことを示す。

こゝで、比較するものは、式(84)の

$$\frac{|N_n^L - N_n^\infty|}{(\tau - \tau_n)^n} \quad \text{と} \quad |N_0^L - N_0^\infty|$$

とである。こゝで、 $\tau - \tau_0$ で $|N_0^L - N_0^\infty|$ は充分小さいとする。そして、この小さな値は、式(75)に示した $|N_0^L - N_0^\infty|$ の級数の第S項によるものとする(このようなSの値は、小さな値 $S = 1$ と考えられる)。このような $|N_0^L - N_0^\infty|$ の第S項と、 $\tau - \tau_0$ と同一の時間中 $\tau - \tau_n$ における $|N_n^L - N_n^\infty| / (\tau - \tau_n)^n$ の第S項とを比較すると次式である。

$$\frac{1}{(\tau - \tau_n)^n} \frac{|N_n^L - N_n^\infty| \text{第S項}}{|N_0^L - N_0^\infty| \text{第S項}} = \frac{n!}{r_s^{2n} (\tau - \tau_n)^n} \quad (86)$$

充分小さいとした $|N_0^L - N_0^\infty|$ の第S項の値を ϵ とすると、式(75)より

$$|h_s(M_s^\infty - M_s^L)| e^{-r_s^2(\tau - \tau_0)} = \epsilon$$

である。したがって、

$$r_s^2(\tau - \tau_0) = \ln |h_s(M_s^\infty - M_s^L)| - \ln \epsilon$$

である。これは、式(86)の分母に含まれる量である。したがって、式(86)の値の評価には、この $r_s^2(\tau - \tau_0)$ の最少の場合を考えればよい。すなわち、 $r_s^2(\tau - \tau_0) > 0$ であり、 $\tau - \tau_0$ が最少の場合は、 $|h_s(M_s^\infty - M_s^L)| = 1$ の場合であるから、

$$r_s^2(\tau - \tau_0) = -\ln \epsilon$$

である。この値を式(86)に用いると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\tau - \tau_n)^n} \frac{|N_n^L - N_n^\infty| \text{第S項}}{|N_0^L - N_0^\infty| \text{第S項}} &= \frac{n!}{(-\ln \epsilon)^n} \\ &\simeq \sqrt{2\pi} \left(\frac{n^{1+\frac{1}{2n}}}{-e \ln \epsilon} \right) \end{aligned} \quad (87)$$

である(Stirlingの公式による)。 $\epsilon = 0.001$ の場合、この値は、次の通りである。

n	$\frac{n!}{(-\ln \epsilon)^n}$
1	0.145
2	0.042
3	0.018
4	0.011
6	0.007
8	0.008
10	0.015
12	0.041
14	0.155
16	0.778
18	4.992
20	39.754

このように、式(87)の値は、nの増加で、まず、減少し、更に、nが増大すると、大きな値となる。しかし、逆問題で、実際に取扱われるであろうnの値(データを最少2乗法で処理するときの次数)、高々、10程度では、式(87)の値は、大きく見積っても、1より、小さい。したがって、

$$\frac{|N_n^L - N_n^\infty| \text{第S項}}{(\tau - \tau_n)^n} < |N_0^L - N_0^\infty| \text{第S項}, \quad n \leq 16$$

である。第S+1項は、式(75)に示されるように、 $e^{-r_{S+1}^2(\tau - \tau_0)}$ と、更に、小さくなる。したがって、或るLで、 $|N_0^L - N_0^\infty|$ が、無視しうる程、小さい時刻 $\tau - \tau_0$ では、同一のL、および、 $\tau - \tau_0 = \tau - \tau_n$ において、

$$\frac{|N_n^L - N_n^\infty|}{(\tau - \tau_n)^n} < |N_0^L - N_0^\infty|, \quad n \leq 16$$

であるといえる。

したがって、式(50)~(56)で、 $\theta(\xi_m, \tau)$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ が、それらのL階の導関数(または、L次多項式)まで知られている場合、それらの式が、n=0なる表面条件のステップ状変化を記述しうる場合には、それらの式(50)~(56)で得られた結果では、 $n \leq L \leq 16$ のnなる表面条件の不連続変化は、必ず、記述しているといえる。

したがって、式(50)~(56)の、不連続変化直後の記述が、正確か、どうかの検討は、 $G_{D_i}^0 = u_i$ の場合を中心として行えばよいことになる(第4.4節)。

4.3 Bi 数が温度、および、熱流束変化記述に与える影響

前節までに示したように、表面条件の不連続変化の影響は、式(71)、(72)の右辺第2項に現われる。そして、この右辺第2項の代表、式(75)の N_n^L で、Bi 数の影響は、式(75)に示されるように、 r_s, h_s, M_s^L に含まれている。

表面条件変化 G_{Di}^n を、表面温度変化とするとき、付録の式(A-16)より、Bi 数にかかわらず、

$$h_s M_s^L \approx \text{最大 } 1$$

であるから、 N_n^L は、

$$N_n^L \approx \sum_{S=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_s^2 (r - r_n)}}{\mu_s^{2n}}$$

である。この式で、同一時刻であれば、 N_n^L は μ_s の大きい程、小さな値であり、 μ_s の小さい程、 N_n^L の値は大きい。すなわち、Bi 数による N_n^L の評価には、 μ_s の最も小さい値で、 N_n^L の値が、充分正しい値であれば、その時刻で、 μ_s の大きい場合は、当然 N_n^L の値も、また、正しい値を持つといえる。

表面温度が変化するとする場合の μ_s の値は、付録の式(A-16)に示すように、次式で与えられる。

$$\mu_s \cot \mu_s + Bi = 0$$

付録A. 3に述べたように、この μ_s の値は、

$$Bi = 0 \sim \infty \text{ で } \mu_s = \frac{\pi}{2}(2S-1) \sim \pi S$$

と変化する。したがって、 μ_s の最も小さい場合、すなわち、

$$Bi = 0, \quad \mu_s = \frac{\pi}{2}(2S-1)$$

で、 N_n^L が精度よく表現されていれば、

$$Bi > 0, \quad \mu_s > \frac{\pi}{2}(2S-1)$$

の場合も、当然、 N_n^L は、それ以上の精度で表現されているといえる。

表面熱流束が変化するとする場合も、同様に、 r_s のこの場合の値 ν_s に注目すればよい。 ν_s の値は、付録の式(A-19)に示すように、

$$\nu_s \tan \nu_s = Bi$$

である。付録A. 4に示したように、この ν_s の値は、

$$Bi = 0 \sim \infty, \quad \nu_1 = 0 \sim \frac{\pi}{2}$$

$$\nu_s = (S-1)\pi \sim \frac{\pi}{2}(2S-1), \quad S \geq 2$$

と変化する。

この場合、 $Bi < \infty$ の場合の内部応答関数 $U_{bf}(\xi, \tau)$ は、次の2つの温度分布 U_1 と U_2 の和とみなすことが出来る。

- (i) $\xi = 0$ にステップ状単位熱流束が与え続けられ、 $U_1(1, \tau) = 0$ ($Bi = \infty$) の温度分布 $U_1(\xi, \tau)$,
- (ii) $\xi = 0$ では、 $\frac{\partial U_2}{\partial \xi} \Big|_0 = 0$ で、 $\xi = 1$ では、 $U_{bf}(1, \tau)$ である $U_2(\xi, \tau)$

この $U_2(\xi, \tau)$ は、すでに述べた、片端で Bi が零で、かつ、もう一端の表面温度が、

$$U_{bf}(1, \tau) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g_{bf}^n (\tau - \tau_n)^n$$

の形式で変化する場合に相当する。内部温度変化が、この $U_2(\xi, \tau)$ の場合の式(50)~(56)による記述に及ぼす、 n や Bi 数の影響は、すでに、述べたものである。したがって、表面熱流束が変化する場合には、 $U_1(\xi, \tau)$ の記述の模様、すなわち、

$$Bi = \infty, \quad \nu_s = \frac{\pi}{2}(2S-1)$$

の場合が、検討の主たる対象となる。

したがって、前節、および、本節に述べたことから、式(50)~(56)で、式(61)、(62)の次の場合を主として、比較、検討すればよいことになる。

$$1 \text{ 端でステップ状単位表面温度変化で他端で } Bi = 0 \tag{88-1}$$

$$1 \text{ 端でステップ状単位表面熱流束変化で他端で } Bi = \infty \tag{88-2}$$

すなわち、条件式(88-i) ($i = 1$ または 2) の場合に、式(50)~(56)が正しい記述を与える時刻(または、ステップ状表面条件変化後の時間巾)で、条件式(88-3-i)の場合にも、必ず、式(50)~(56)が正しい記述を与えているものであれば、条件式(88-i)の場合が記述可能な時刻では、表面条件変化様式や Bi 数のいかに拘らず、他のすべての場合を、式(50)~(56)が正しい記述を与えるであろうことが期待できる。

4.4 表面温度, および, 表面熱流束記述式とその記述不能区間

逆問題で得られる内部温度, および, 内部熱流束変化は, 表面条件変化が減衰した内部点で得られるものであるから, 内部点で得られる知見には, 限界がある。すなわち, 真実は, 無限階数の導関数(または, 無限次項の多項式)を含むものであっても, 有限, L 階の導関数(または, L 次項の多項式)までの知見しか知りえない。このことによる表面温度, および, 表面熱流束記述式の適用の制約は, 表面条件が不連続に変化した直後にのみ現われること, そして, L が大なれば大なる程, この制約は小さくなることを, 第 4.1 節で述べた。

すでに, 前報で, 中空円柱で, 断熱面の温度を内部温度として, 表面温度を評価する場合, 表面温度が不連続変化直後に, 表面温度記述式は表面温度を記述出来ない時間巾のあることを示した。そして, この記述不能時間巾 $\Delta\tau_L (= \alpha\Delta t / (\text{内径})^2)$ は, 知見の程度 L によって, 次の様な値であった。

$L \setminus \delta$	1.2	1.4
4	0.01 (0.25)	0.04 (0.25)
6	0.006 (0.15)	0.02 (0.125)
8	0.003 (0.075)	0.013 (0.081)

ここで, δ は, (外径)/(内径)であり, また, かつこ内の数値は, $\Delta\tau_L / (\delta - 1)^2$ の値を示す。すなわち, 厚さを基準とした場合の, 記述不能時間巾である。

この $\Delta\tau_L$ を除いた時間帯では, 前報で, また, 第 4.2 節に述べたように, L 次式以下で変化する表面温度は, 確実に記述することが出来るような, $\Delta\tau_L$ である。

このような $\Delta\tau_L$ は, 前報の例で示したように, 幾何学形状, および, 知見の程度, L のほかに, 内部点の位置 ξ_m も, また, 関与することが, 式 (50)~(56) からわかる。したがって, この無次元量 $\Delta\tau_L$ は,

$$\Delta\tau_L = \text{function} (\text{幾何学形状}, \xi_m, L)$$

で表わされ, 逆問題における重要な量であると考えられる。

すなわち, 或る幾何学的形状で, 測定点 ξ_m より得られた温度履歴より, 温度と熱流束変化について, L 階の導関数まで知りうる (L 次の多項式表示が可能な) 場合 (ξ_m における熱流束変化の評価方法は第 5 章参照), この $\Delta\tau_L$ の値によって, 表面条件の知りうる程度が判定出来るからである。

また, 或る表面変化の現象を, $\Delta\tau$ 間隔で知りたいとする場合,

$$\Delta\tau \gg \Delta\tau_L$$

であるように、幾何学形状、 ξ_m の位置、また、測定の時間々隔や測定値の精度等の実験条件を与えるものだからである。

以下、本節では、平板の場合の記述不能時間中

$$\Delta\tau_L = \alpha\Delta t / (\text{平板の厚さ})^2$$

を調べることとする。

式(71),(72)で、 G_{Di}^n が $\xi = 0$ での表面温度変化である場合 ($i = bt$)、同式で $\xi_b = 0$ の表面温度、および、表面熱流束を、 $G_{bt}^n(0, \tau)$ 、 $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0$ と記すことにし、式(63')を利用すると、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} G_{bt}^n(0, \tau) &= (\tau - \tau_n)^n - (-1)^n n! \sum_{\ell=0}^L \left\{ C_{\ell} \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^{\ell} \phi_{bt}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} \right. \\ &\quad \left. - D_{\ell} \xi_m^{2\ell+1} \frac{\partial^{\ell} \psi_{bt}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} \right\} \\ \frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0 &= - \sum_{\ell=0}^n (-1)^{\ell} \psi_{bt}^{\ell}(0, 0) \frac{\partial^{\ell} G_{D_{bt}}^n}{\partial \tau^{\ell}} \\ &\quad - (-1)^n n! \left[- \sum_{\ell=1}^L V_{\ell} \xi_m^{2\ell-1} \frac{\partial^{\ell} \phi_{bt}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} + \sum_{\ell=0}^L W_{\ell} \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^{\ell} \psi_{bt}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} \right] \end{aligned} \right\} (89)$$

また、式(71),(72)で、 G_{Di}^n が $\xi = 0$ での表面熱流束変化である場合 ($i = bf$)、同式で、 $\xi_b = 0$ の表面温度、および表面熱流束を $G_{bf}^n(0, \tau)$ 、 $\frac{\partial G_{bf}^n}{\partial \xi} / 0$ と記すことにし、式(63'')を考慮すると、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} G_{bf}^n(0, \tau) &= - \sum_{\ell=0}^L (-1)^{\ell} \phi_{bf}^{\ell}(0, 0) \frac{\partial^{\ell} G_{bf}^n}{\partial \tau^{\ell}} \\ &\quad - (-1)^n n! \sum_{\ell=0}^L \left\{ C_{\ell} \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^{\ell} \phi_{bf}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} - D_{\ell} \xi_m^{2\ell+1} \frac{\partial^{\ell} \psi_{bf}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} \right\} \\ \frac{\partial G_{bf}^n}{\partial \xi} / 0 &= - (\tau - \tau_n)^n - (-1)^n n! \left[- \sum_{\ell=1}^L V_{\ell} \xi_m^{2\ell-1} \frac{\partial^{\ell} \phi_{bf}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=0}^L W_{\ell} \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^{\ell} \psi_{bf}^n(\xi_m, \tau - \tau_n)}{\partial \tau^{\ell}} \right] \end{aligned} \right\} (90)$$

式(71),(72)で、 $\xi_b = 1$ の表面温度、表面熱流束、 $G_i^n(1, \tau)$ 、 $\frac{\partial G_i^n}{\partial \xi} / 1$ は、 G_{Di}^n が表面温度変化の場合 ($i = bt$) も、表面熱流束変化の場合 ($i = bf$) も、次式で、まとめて、表わす。

$$\left. \begin{aligned}
 G_i^n(1, \tau) &= u_i \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \phi_i^\ell(1, 0) \frac{\partial^\ell G_{Di}^n}{\partial \tau^\ell} \\
 &\quad - (-1)^n n! \sum_{\ell=0}^L \left\{ C_\ell (1-\xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \phi_i^n(\xi_m, \tau-\tau_n)}{\partial \tau^\ell} + D_\ell (1-\xi_m)^{2\ell+1} \frac{\partial^\ell \psi_i^n(\xi_m, \tau-\tau_n)}{\partial \tau^\ell} \right\} \\
 \frac{\partial G_i^n}{\partial \xi} / 1 &= u_i \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \psi_i^\ell(1, 0) \frac{\partial^\ell G_{Di}^n}{\partial \tau^\ell} \\
 &\quad - (-1)^n n! \left[\sum_{\ell=1}^L V_\ell (1-\xi_m)^{2\ell-1} \frac{\partial^\ell \phi_i^n(\xi_m, \tau-\tau_n)}{\partial \tau^\ell} + \sum_{\ell=0}^L W_\ell (1-\xi_m)^{2\ell} \frac{\partial^\ell \psi_i^n(\xi_m, \tau-\tau_n)}{\partial \tau^\ell} \right]
 \end{aligned} \right\} (91)$$

ただし、 $i = bt$, または、 bf

これらの表面条件を記述する式 (89)~(91) は、式 (50), (51) に式 (61), (62) を用いて得られた式 (71), (72) で、 $\xi_\delta = 0$, または、 1 として導かれた。しかし、すでに示した表面条件を記述する式 (53)~(56) の $\theta(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ に、式 (61), (62) で与えられる $\theta_i^n(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi} / \xi_m$ を代入して得られる式と、式 (89)~(91) とは、全く、同一である。

これらの式 (89)~(91) のうち、式 (89) の $G_{bt}^n(0, \tau)$, および、式 (90) の $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0$ には、点 ξ_m で得られる温度や熱流束変化の知見の程を示す L の影響が、明瞭に示されている。

すなわち、式 (89) の $G_{bt}^n(0, \tau)$ の右辺第 1 項は、課した条件、式 (59) の $(\tau-\tau_n)^n$ そのものである。そして、 $G_{bt}^n(0, \tau)$ は、右辺第 1 項の課された条件のほか、第 2 項の級数を含んでいる。この第 2 項は、式 (75) の $N_n^L(\xi_\delta=0)$ であり、そして、この N_n^L の級数の和の上限 L が無限大であれば、この第 2 項は、式 (76), (63) , および、付録の式 (A-16) より、次のように、零である。

$$\begin{aligned}
 N_n^\infty(\xi_\delta=0) &= -(-1)^n n! \phi_{bt}^n(0, \tau-\tau_n) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

同様に、式 (90) の $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0$ の右辺第 1 項は課された条件であり、その右辺第 2 項は、その級数の和の上限 L が無限大であれば、式 (77), (63), および、式 (A-19) より、また、零である。

このように、 $G_{bt}^n(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0$ は、 ξ_m での知見が完全であれば (L が無限大であれば), 課された条件と同一の値を示す。しかし、減衰系での観測である為、 L が有限であることにより、 $G_{bt}^n(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0$ の右辺第 2 項は零とはならず、その分だけ、課された条件とは異った $G_{bt}^n(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0$ を与えることになる。

しかし、それらの右辺第 2 項は、 $\tau-\tau_n$ が大きければ、小さな量となるから、大きな $\tau-\tau_n$

では、 $G_{bt}^n(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi}/0$ は、課された条件を記述している。しかし、小さな $\tau - \tau_n$ では、それらの右辺第2項が無視しうるとは限らず、したがって、 $G_{bt}^n(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi}/0$ の記述には、課された条件を記述しえない適用限界のあることを示している。

式(89)~(91)の $G_{bt}^n(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi}/0$ 以外の各式にも、このような適用限界のあることは、 $G_{bt}^n(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi}/0$ の場合と、全く、同様である。すなわち、それら各式の右辺第2項は、若し、 L が無限大なら、式(76), または、式(77)により、夫々、式(61), (62) の右辺第2項の $\xi = 0$, または、 $\xi = 1$ での値となり、課された条件、そのものとなっている。したがって、式(89)~(91)の各式は、 L が有限であることによって、課された条件を記述しえない適用限界があることを示している。

この適用限界、すなわち、表面条件記述不能時間中は、式(89)~(91)の表記に示されるように、 L , n のほか、内部点 ξ_m , および、 $\phi_i^n(\xi_m, \tau - \tau_n)$ の規定のされ方、すなわち、 Bi 数の影響を受ける。これらの影響は、すでに、前節までで一般的に検討したものである。以下では、これらが、表面条件記述不能時間中に与える影響を、式(89)~(91)に基づいて、数値計算例で、具体的に調べることにする。

Fig. 1, および, Fig. 2 には、 $\xi = 0$ で、ステップ状単位表面温度変化があり ($n = 0$) $\xi = 1$ では、 $Bi = 0$ のときの各内部点での温度、および、熱流束変化を式(89), および、式(91) ($i = bt$) で用いた場合の計算結果を示してある。これらの図で、 $G_{bt}^0(0, \tau)$ と $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi}/1$ は、それら自身の値を示したが(それらの真値は、1, および0), 他は、式(61), (62) で与えられる真値との差として示してある。

Fig. 3, および Fig. 4 には、 $\xi = 0$ でステップ状単位表面熱流束変化があり ($n = 0$), $\xi = 1$ では、 $Bi = \infty$ のときの各内部点での温度、および、熱流束変化を式(90), および、式(91) ($i = bf$) で用いた場合の計算結果を示してある。これらの図で、 $\frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi}/0$ と $G_{bf}^0(1, \tau)$ は、それら自身の値で示してあるが(それらの真値は、-1, および, 0), 他は、式(61), (62) で与えられる真値との差として示してある。

Fig. 1 ~ 4 の各図に示されるように、 $\tau - \tau_0$ が大きければ、いずれも真値を示している。しかし、 $\tau - \tau_0$ が小さくなると、 L の小さい順番に(または $\frac{\partial^2 \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} / \xi_m$ の l の順番に) 真値を与えないことが示されている。逆にいえば、 L が大きい程、真値を示さない時間中、 $\tau - \tau_0$, すなわち、表面条件記述不能時間中の小さいことを示している。

また、それら各図では、上段より下段へと、内部点 ξ_m が、表面 $\xi = 0$, または、1 に近くなるように並べてある。各図の上段から下段へと、内部点 ξ_m が表面に近い程、時間軸 $\tau - \tau_0$ の単位は小さくなっている。すなわち、内部点 ξ_m が表面条件を求める表面に近ければ、近い程、表面条件記述不能時間中の小さいことが示されている。なお、Fig. 2, および、Fig. 4 の最下段に示される最も表面に近い場合には、これらの計算を行った $\tau - \tau_0$ の最少値、0.002

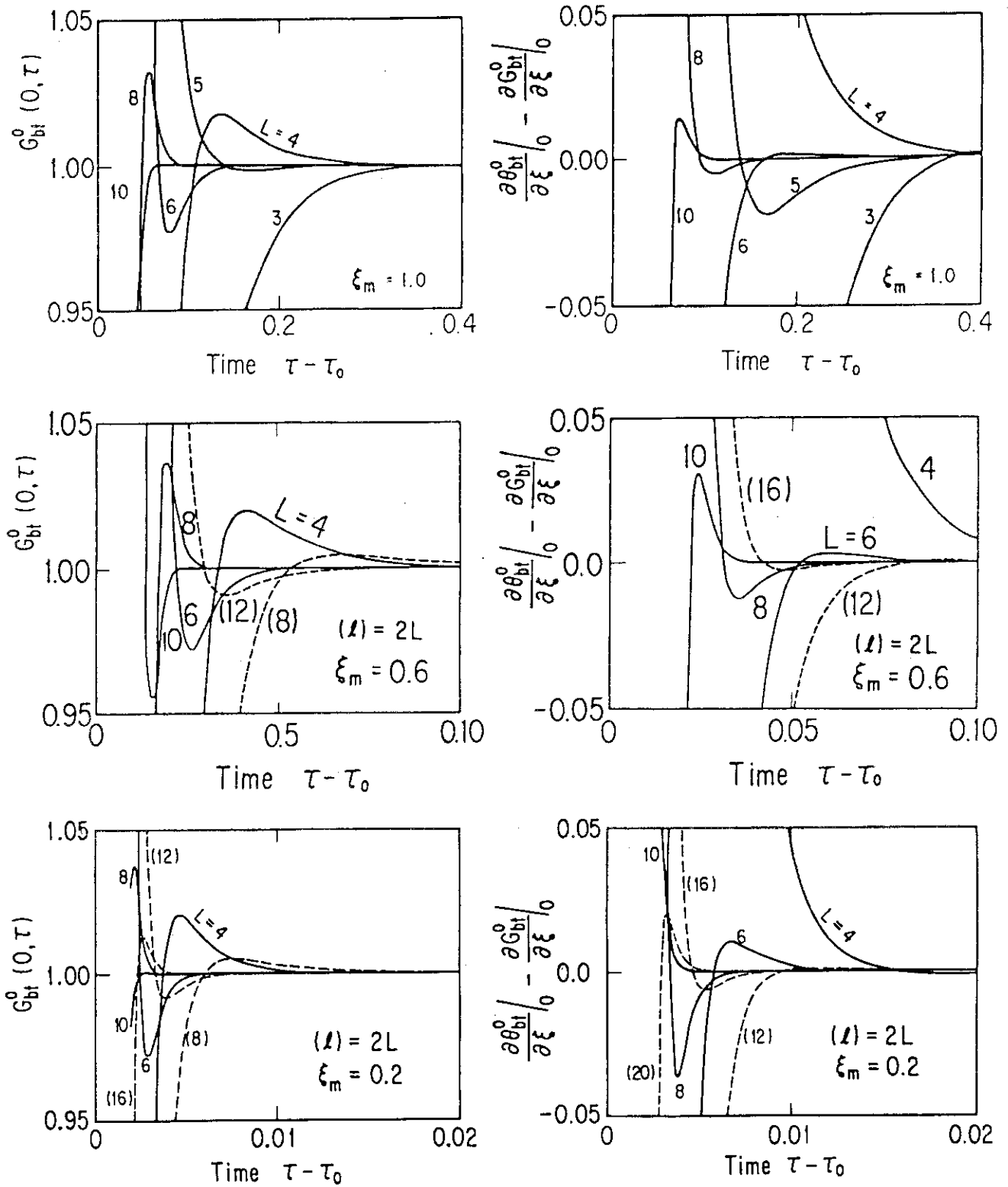


Fig.1 Numerical examples of $G_{bt}^0(0, \tau)$ and $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi} /_0$ in Equation (89) with $n=0$ and $Bi=0$

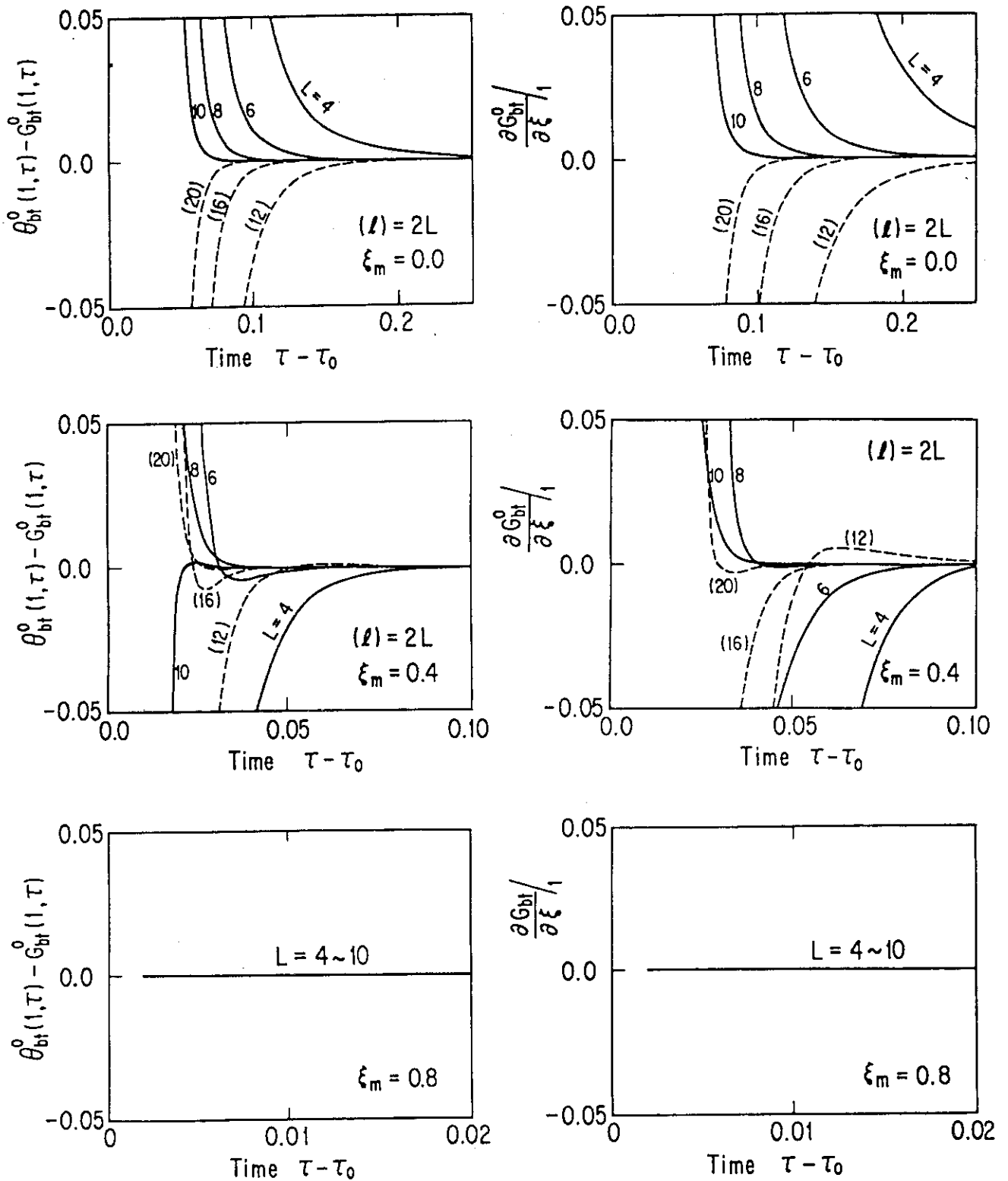


Fig.2 Numerical examples of $G_{bt}^0(1, \tau)$ and $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi_1}$ in Equation(91) with $n=0$ and $Bi=0$

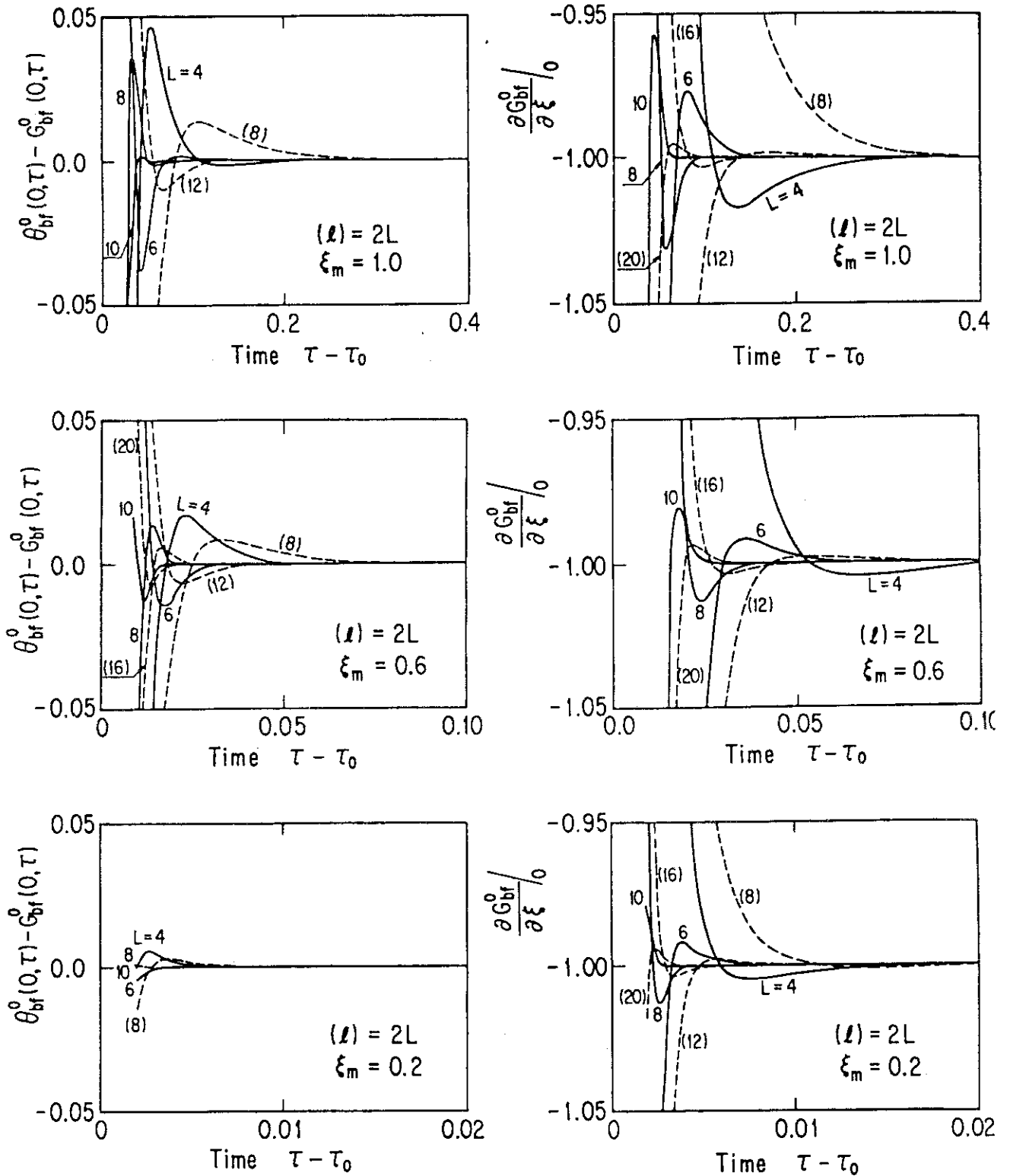


Fig. 3 Numerical examples of $G_{bf}^0(0, \tau)$ and $\frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi_0} / 0$ in Equation (90) with $n=0$ and $Bi = \infty$

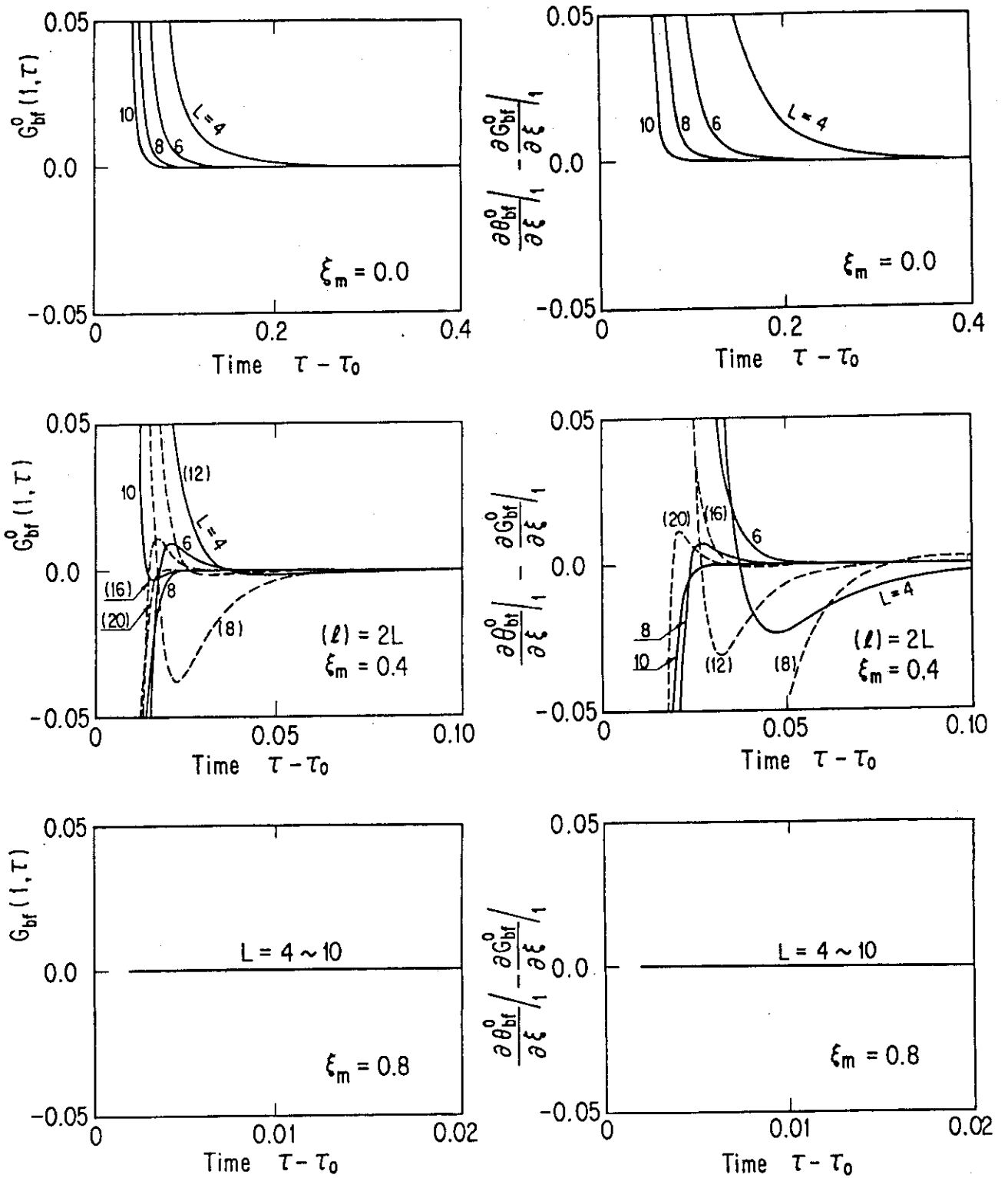


Fig. 4 Numerical examples of $G_{bf}^0(1, \tau)$ and $\frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi_1}$ in Equation (91) with $n=0$ and $Bi = \infty$

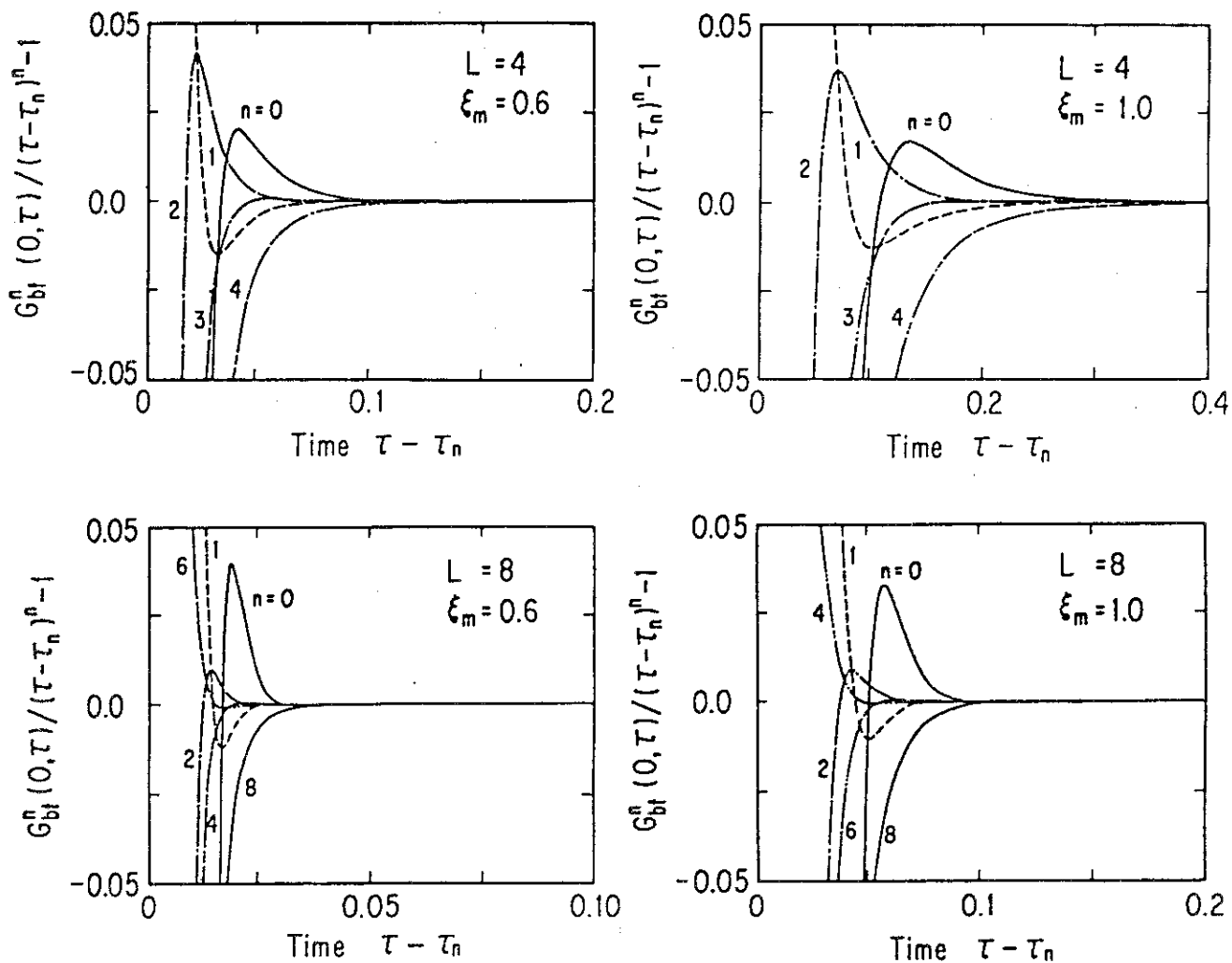


Fig. 5 Effect of surface temperature variation on $G_{bt}^n(0, \tau)$ in Equation (89) with $Bi = 0$

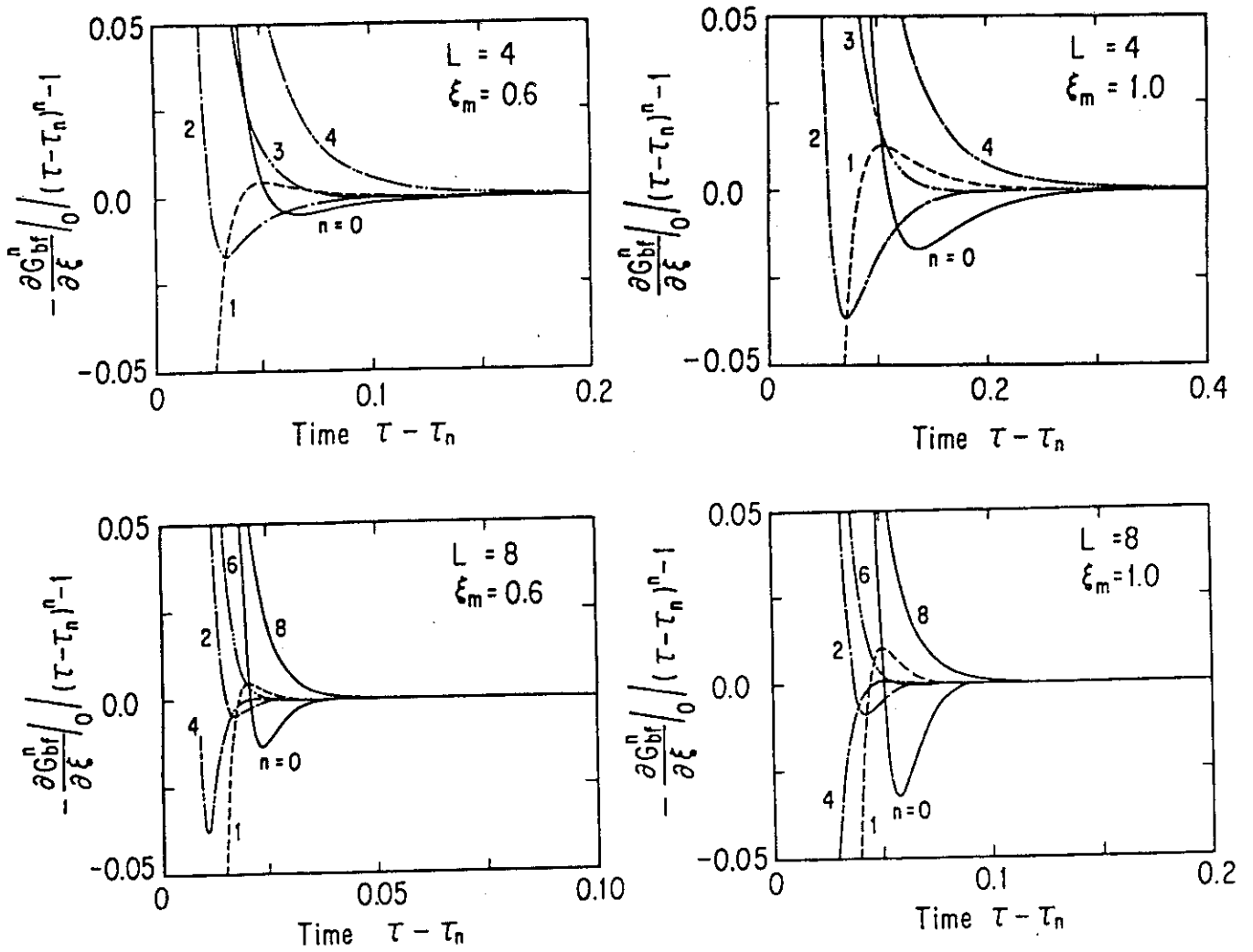


Fig. 6 Effect of surface heat flux variation on $\frac{\partial G_{bf}^n}{\partial \xi} /_0$ in Equation (90) with $Bi = \infty$

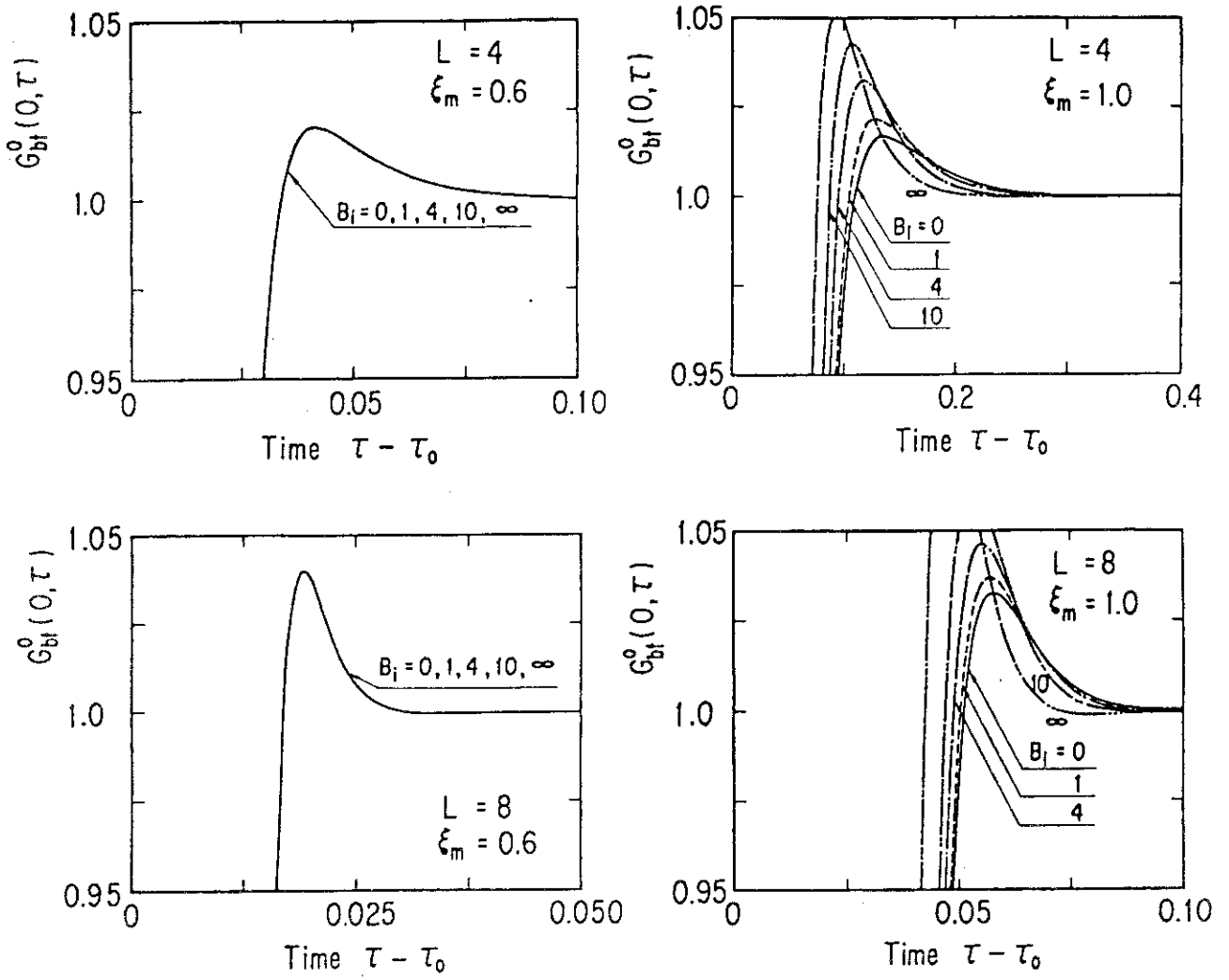


Fig.7 Effect of Bi number $G_{b1}^0(0, \tau)$ in Equation(89) with $n = 0$

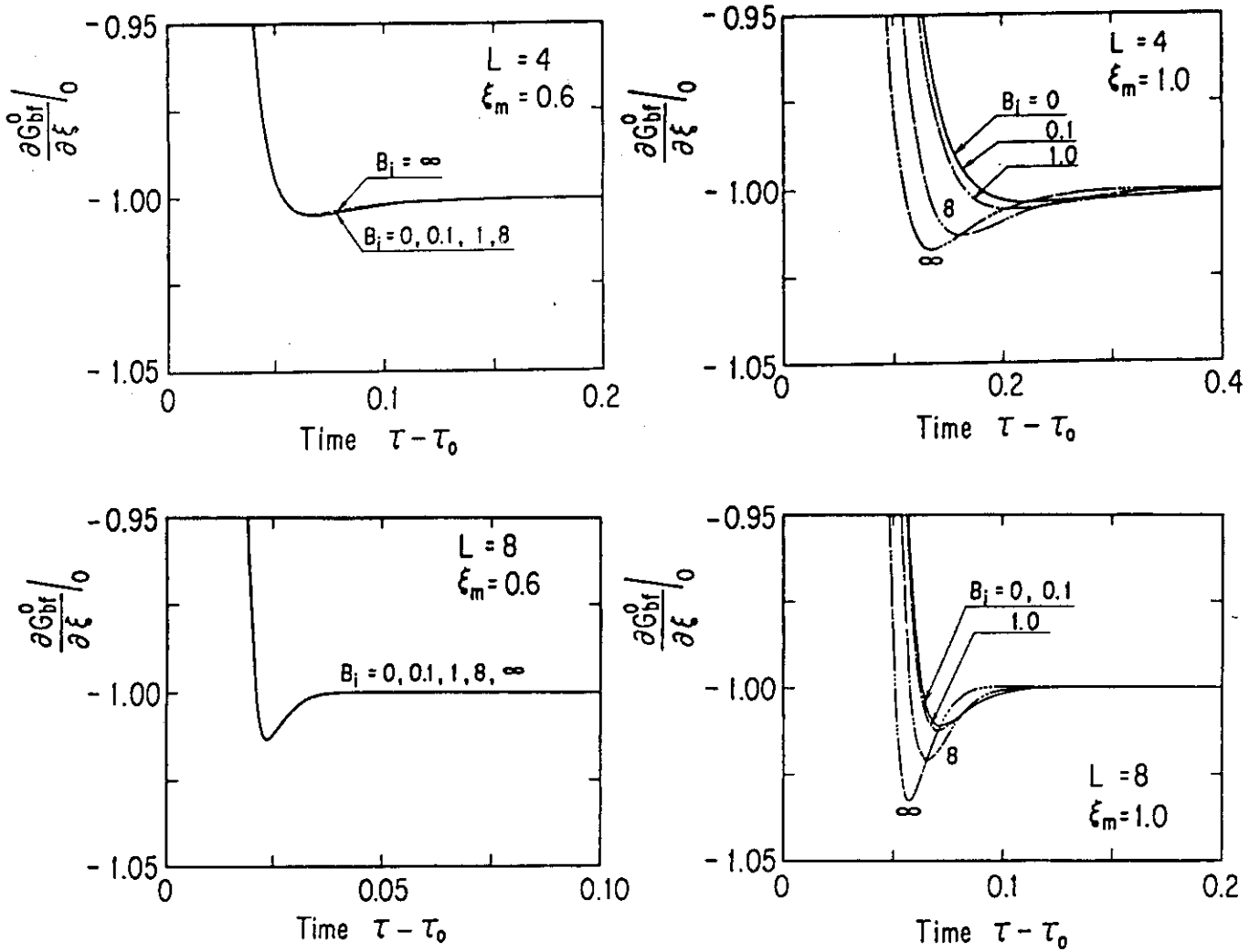


Fig. 8 Effect of Bi number on $\frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi_0}$ in Equation (90) with $n=0$

でも、 $L = 4 \sim 10$ では、真値を示している。

Fig. 1 ~ Fig. 4 の各図で、同一 ξ_m について左右を較べてみると、表面温度記述の場合と表面熱流束記述の場合とでは、同一の L についての表面条件記述不能時間中は、表面熱流束記述の場合に、やゝ、大きいことが認められる。

Fig. 5 には、 $\xi = 0$ で表面温度が $(\tau - \tau_n)^n$ で変化し、 $\xi = 1$ では $Bi = 0$ のときの温度および、熱流束変化を式 (89) で用いた場合の表面温度 $G_{bt}^n(0, \tau)$ の値が n によっていかに変化するかを、 $\xi_m = 0.6, 1.0$; $L = 4, 8$ の場合について示してある。

また、Fig. 6 には、 $\xi = 0$ で表面熱流束が $-(\tau - \tau_n)^n$ で変化し、 $\xi = 1$ では $Bi = \infty$ のときの温度、および、熱流束変化を式 (90) で用いた場合の表面熱流束 $\frac{\partial G_{bt}^n}{\partial \xi} / 0$ の値が、 n によって、いかに変化するかを、 $\xi_m = 0.6, 1.0$; $L = 4, 8$ の場合について示してある。

Fig. 5, Fig. 6 の各図では、 $n = 0$ 、すなわち、ステップ状表面条件変化が記述されているような時刻 $\tau - \tau_0$ では $L \geq n \geq 1$ の表面条件変化も、また、記述されていることを示している。これは、前報で中空円柱の場合に示したのと同じであり、また、第 4.2 節で検討し、期待した通りである。

Fig. 7, および、Fig. 8 には、 $\xi = 0$ で、夫々、ステップ状に単位表面温度、または、単位表面熱流束が変化し、他端 $\xi = 1$ での Bi 数が各種の値である場合の温度、および、熱流束変化を、式 (89), (90) で用いた場合の表面温度、 $G_{bt}^0(0, \tau)$ 、および、表面熱流束 $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ の値が、 Bi 数によって、いかに影響をうけるかを、 $\xi_m = 0.6, 1.0$; $L = 4, 8$ の場合について示したものである。

これらの図に示されるように、 $\xi_m = 0.6$ では、 Bi 数の影響は、ほとんど認められない。こゝに示していないが、 $\xi_m = 0.8$ で、わづかに、 Bi 数の影響が認められ始め、図に示すように、 $\xi_m = 1.0$ では、 Bi 数の影響が顕著となる。この場合、Fig. 7 で、 $Bi = 0$ で、 $G_{bt}^0(0, \tau)$ が表面温度を正しく記述している時刻 $\tau - \tau_0$ では、 $Bi > 0$ の場合も、また、表面温度を記述していることが示されている。Fig. 8 でも、同様に、 $Bi = \infty$ で $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ が記述されている時刻では、 $Bi < \infty$ の場合も、また、ほとんど、表面熱流束を記述していることが示されている。これらは、第 4.3 節で、 Bi 数の影響の検討で期待した通りである。

逆問題で表面条件を記述する式 (53) ~ (56) には、Fig. 1 ~ Fig. 8 に示されるような、表面条件記述不能時間中がある。すなわち、この記述不能時間中は、内部点の位置、その内部点で得られる温度、および、熱流束変化についての知見の程度（それらの導関数の最高階数 L ）、および、表面条件の変化の度合（表面温度、または、表面熱流束の変化の仕方、または、 Bi 数）の影響をうける。

Fig. 1 ~ Fig. 8 は、式 (61), (62) と与えられた既知の温度、熱流束変化を利用して、式 (53) ~ (56) の適用範囲を検討したものであった。しかし、実際には、未知の表面条件変化を求める為に、式 (53) ~ (56) を用いるのであるから、式 (53) ~ (56) の適用しえない範囲、すなわち、式 (53) ~ (56) の最大の記述不能時間中値を知っていれば、その記述不能時間中以外では、確実に、式 (53) ~ (56) の記述は、正しく表面条件変化を表わしているといえる。

内部点 ξ_m で、同一の L について、最大の記述不能時間巾を示すのは、第 4.2 節に述べた表面条件変化様式の影響、および、第 4.3 節に述べた Bi 数の影響、および、それらについて示した Fig. 5 ~ 8 の例から、

- 一端でステップ状表面温度変化があり、他端で $Bi = 0$ の場合、と
 - 一端でステップ状表面熱流束変化があり、他端で $Bi = \infty$ の場合
- とである。すなわち、Fig. 1 ~ 4 に示した場合である。

記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ を求める為の判定基準として、Fig. 1 ~ 4 各図の縦軸に示した真値と計算値の差が、次式であるか、どうかを用いる。

$$| \text{真値} - \text{式 (53)~(56) による計算値} | > 0.001 \quad (92)$$

この条件を満たす最大の $\tau - \tau_0$ を、 $\Delta\tau_L$ とする。これは、真値の最大値が、夫々、次の値であるからである。

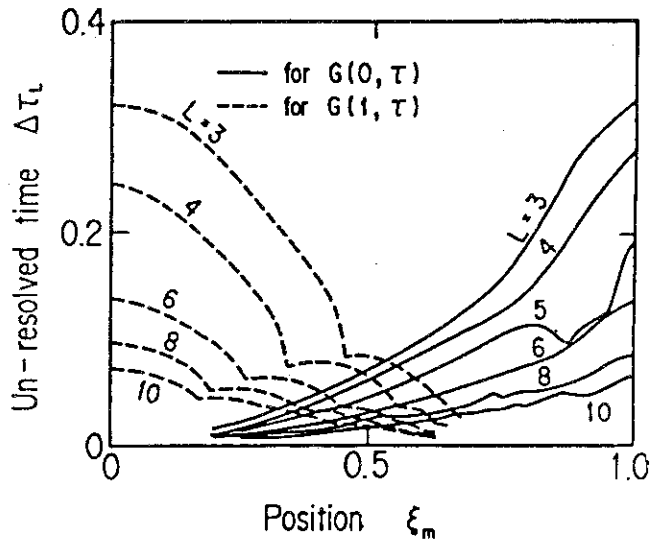
$$\begin{aligned} \theta_{bt}^0(0, \tau) &= 1 \\ \frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / 0 &= \begin{cases} -\infty & \tau = 0 \\ 0 & \tau = \infty \end{cases} \\ \theta_{bf}^0(0, \infty) &= 1 \\ \frac{\partial \theta_{bf}^0}{\partial \xi} / 0 &= -1 \quad \tau = \infty \end{aligned}$$

すなわち、 $\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ 以外では、真値と計算値との差が当該表面条件の最大値の 0.1% 以上異なった、最大の $\tau - \tau_0$ を記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ としている。 $\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ の場合は、上式に示すように一定値は無いが、前述の判定基準を用いる。しかし、後に示すように、 $\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ の $\Delta\tau_L$ を前述の判定基準で求めた場合、その $\Delta\tau_L$ における $\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ の値は、 -1 前後にある (Fig. 13 参照)。したがって、やはり、 $\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ の値の約 0.1% 程度の精度で、 $\Delta\tau_L$ を判定していることに相当している。

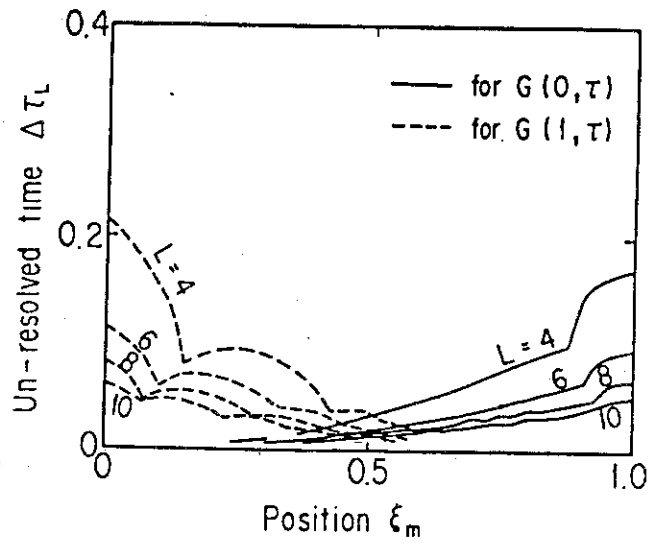
このような判定基準で求められる記述不能時間巾は、Fig. 1~4 に見られるように、内部点 ξ_m と、知見の程度を示す L について、異った値を持っている。

Fig. 9 には、表面温度、表面熱流束を記述する式 (53)~(56) で、点 ξ_m の内部温度、内部熱流束変化として、 $\xi = 0$ の表面温度変化がステップ状で、かつ、 $\xi = 1$ で $Bi = 0$ の内部応答を用いた場合 (計算式は式 (89), (91)) の各表面温度、および、各表面熱流束の前述のような表面条件記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ が、 ξ_m 、および、 L について示してある。

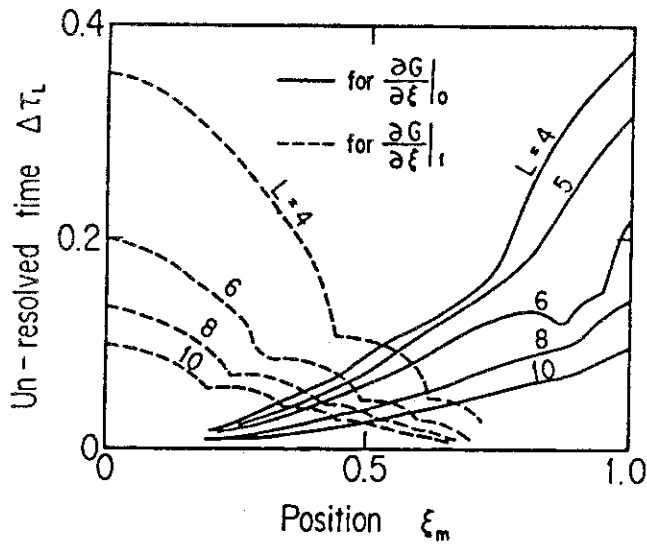
また、Fig. 10 には、点 ξ_m の内部温度、内部熱流束変化が、 $\xi = 0$ に単位表面熱流束変化があり、 $\xi = 1$ で $Bi = \infty$ のときの内部応答である場合の表面条件記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ を



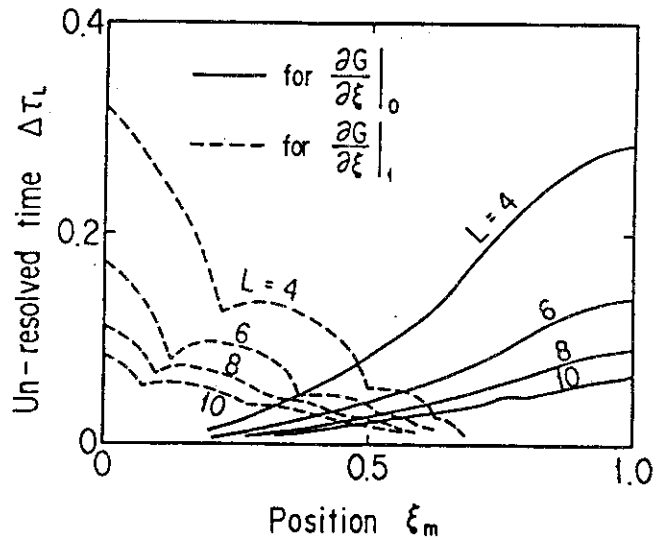
(a) For surface temperature



(a) For surface temperature



(b) For surface heat flux



(b) For surface heat flux

Fig.9 Un-resolved time interval $\Delta\tau_L$ based on a interior temperature of a step temperature change ($\xi=0$) and $Bi=0$ ($\xi=1$)

Fig.10 Un-resolved time interval $\Delta\tau_L$ based on a interior temperature of a step flux change ($\xi=0$) and $Bi=\infty$ ($\xi=1$)

示してある。なお、Fig. 9, 10 で、 $\xi = 0, 1$ は、夫々、 $\xi_m = 0, 1$ と同一である。

Fig. 9, 10 で、実線は、点 ξ_m において、ステップ状に表面条件が変化している表面 ($\xi = 0$) の表面条件を求める場合の記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ を示す。また、点線は、 ξ_m において、他の一端 ($\xi = 1$) の表面条件を求める場合の記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ を示す。

Fig. 9, Fig. 10 各図に示されるように、内部点 ξ_m が、表面に近い程、また、 ξ_m で得られる知見の程度、 L が大きい程、表面条件記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ は、小さい。また、同一 ξ_m 、同一 L でも、表面熱流束を求める場合の $\Delta\tau_L$ は、表面温度を求める場合の $\Delta\tau_L$ より、やゝ、大きい。

Fig. 9 と Fig. 10 とを較べてみると、表面温度評価時の $\Delta\tau_L$ も、また、表面熱流束評価時の $\Delta\tau_L$ も、共に、Fig. 9 の場合の方が、やゝ、大きいことが示されている。

したがって、式 (53)~(56) を用いて、表面温度、および、表面熱流束を求める場合には、内部点 ξ_m 、および、 ξ_m で得られる知見の程度、 L に対応して、Fig. 9(a) に示すような表面温度記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ 、および、Fig. 9(b) に示すような表面熱流束記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ がある。逆に言えば、Fig. 9 に示される $\Delta\tau_L$ 以外の時刻では、式 (53)~(56) は、表面条件の変化を、点 ξ_m 、および、知見の程度、 L に応じて、正しく記述しうるといえる。

なお、Fig. 9, 10 で、 $\Delta\tau_L$ を示す各線は、必ずしも、滑らかな曲線ではない。これは、 $\Delta\tau_L$ の判定条件の式 (92) で、左辺の関数の値が、 $\tau - \tau_0$ によって変化する様相と、 $\Delta\tau_L$ の判定との関係で生じたもので、一例を、Fig. 11 に示す。

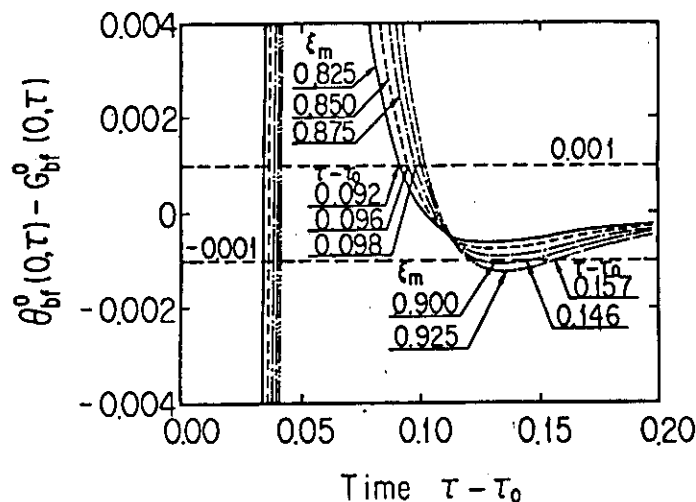


Fig. 11 Detail of surface temperature variation of Equation (90) with $n=0, Bi = \infty$

Fig. 11 は, Fig. 10(a) で, $L = 4$ の場合, ξ_m が $0.825 \sim 0.925$ で $\Delta\tau_4$ が滑かに変化していない場合について, 真値と計算値との差, すなわち, $\theta_{bf}^0(0, \tau) - G_{bf}^0(0, \tau)$ の $\tau - \tau_0$ による変化の詳細を示したものである。同図に示されるように,

ξ_m	$\tau - \tau_0 = \Delta\tau_4$	$\theta_{bf}^0(0, \tau) - G_{bf}^0(0, \tau)$
0.850	0.096	+0.001
0.875	0.098	+0.001
0.900	0.146	-0.001
0.925	0.157	-0.001

と, $|\theta_{bf}^0(0, \tau) - G_{bf}^0(0, \tau)|$ の値が, 0.001 以下か, 以上かで, $\Delta\tau_L$ を判定しているために, $\Delta\tau_L$ の値は, $\xi_m = 0.875$ と, $\xi_m = 0.900$ とでは, 飛躍している。したがって, Fig. 10(a) の $L = 4$ の場合, ξ_m が $0.85 \sim 0.95$ の近傍で, $\Delta\tau_L$ の曲線は滑ではないように見える。Fig. 9, および Fig. 10 で, 各 $\Delta\tau_L$ の曲線が滑かに変化していないのは, この Fig. 11 の例に示したような事情によるものである。

Fig. 9(a), および, Fig. 10(b) に, 実線で示した $\Delta\tau_L$ は, 式(89)の $G_{bt}^0(0, \tau)$, および, 式(90)の $\frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi} / 0$ より求めたものであるがそれらの式は, 次の様に書き直すことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} G_{bt}^0(0, \tau) &= \sum_{\ell=0}^L C_{\ell} \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^{\ell} U_{bt}(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^{\ell}} - \sum_{\ell=0}^L D_{\ell} \xi_m^{2\ell+1} \frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial U_{bt}}{\partial \xi} / \xi_m \\ \frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi} / 0 &= - \sum_{\ell=1}^L V_{\ell} \xi_m^{2\ell-1} \frac{\partial^{\ell} U_{bf}(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^{\ell}} + \sum_{\ell=0}^L W_{\ell} \xi_m^{2\ell} \frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial U_{bf}}{\partial \xi} / \xi_m \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

これらの式は, 式(53), (54) で, $\theta(\xi_m, \tau)$ として, 付録式(A-15), (A-16), (A-18), (A-19)に示す $U_{bt}(\xi_m, \tau)$ ($Bi=0$), および, $U_{bf}(\xi_m, \tau)$ ($Bi=\infty$) を用いた場合に外ならない。

すなわち, Fig. 9(a), および, Fig. 10(b) の実線で示した $\Delta\tau_L$ は, ステップ状単位表面条件変化直後の式(93)が真値を示さない時間巾を示したものである。

しかし, 第4.1節に述べたように, また, 本節の各図に示したように, 式(93)で, L が大きくなれば, 各 ξ_m , および, 任意の時刻で, その右辺の値は, $G_{bt}^0(0, \tau)$, $\frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi} / 0$ の真値, 1, -1 に漸近する。

したがって, 式(93)で, L が大で,

$$G_{bt}^0(0, \tau) \simeq 1, \quad \frac{\partial G_{bf}^0}{\partial \xi} / 0 \simeq -1$$

の値が得られるとき, 式(93)の右辺第1項(点 ξ_m の温度変化による項), および, 右辺第2項(点 ξ_m の熱流束変化による項)が, 真値に, どの程度つつ, 寄与しているかを調べておく

ことは、式 (53)～(56) 各式を使用する場合の参考になるものと思われる。

Fig. 12 には、各内部点 ξ_m 、および、各時刻毎に、式 (93) の右辺第 2 項が L 大で収束したときの値を示してある。したがって、同図で、 $1 -$ (実線上の値)、または、 $-1 -$ (実線上の値) が、その ξ_m 、および、 $\tau - \tau_0$ における式 (93) の右辺第 1 項の $G_{bt}^0(0, \tau)$ 、および、 $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi} / 0$ への寄与を示している。

同図に示されるように、 $\tau - \tau_0$ が小では、表面条件を記述する為に、式 (93) の右辺第 2 項、すなわち、熱流束変化による項が、大きく寄与していることが示されている。

従来、逆問題を取扱った論文は数多く見られるが、式 (53)～(56) に示されるように、表面条件評価のためには内部温度変化のみならず、内部点の熱流束変化の知見も必要であることを、implicit とはいえ指摘したのは、Carslaw and Jaeger⁽¹⁰⁾ と Burggraf⁽¹²⁾ のみである。したがって、熱流束変化項の影響を考慮していない従来の逆問題の取扱いは、熱流束変化項を無視しうる場合に限られるといえる。

Fig. 9、および、Fig. 10 は、ステップ状に単位表面温度変化時 (かつ、 $Bi = 0$)、および、単位熱流束変化時 (かつ、 $Bi = \infty$) に、点 ξ_m で、表面条件変化直後の時間巾 $\Delta\tau_L$ 以降では、表面条件が記述可能な時間巾を示すものである。

このような表面条件変化直後に表面条件が記述可能になる時刻で、各点 ξ_m での温度、および、熱流束は、どのような値を示しているかを調べておくことは、実験データの解析、あるいは、実験計画にとって、参考になるとと思われる。

Fig. 13～Fig. 14 は、Fig. 9、Fig. 10 に示される各 $\Delta\tau_L$ 、すなわち、ステップ状表面条件変化後の $\Delta\tau_L$ での各 L で、各内部点 ξ での内部温度、および、内部熱流束を示したものである。これらの各図で、実線は、各内部点 ξ の時間経過に伴う、内部温度、または、内部熱流束の変化を示している。そして、点線は、Fig. 9、または、Fig. 10 に示した、各 L 毎の $\Delta\tau_L$ の値を示している。したがって、実線と点線の交点が、表面条件変化後 $\Delta\tau_L$ における、点 ξ の内部温度、および、内部熱流束を示している。

たとえば、Fig. 13(a) の上段図で、 $\xi = 1.0$ で、内部温度が、約 0.025 上昇し、かつ、その変化を $L = 8$ で評価できれば、 $\xi = 0$ の表面温度を知りうることがわかる。また、Fig. 14(a) の下段図で、 $\xi = 1.0$ での熱流束が、 -0.08 程度で、かつ、その変化を $L = 8$ で評価出来れば、 $\xi = 0$ の表面熱流束を知りうることがわかる。

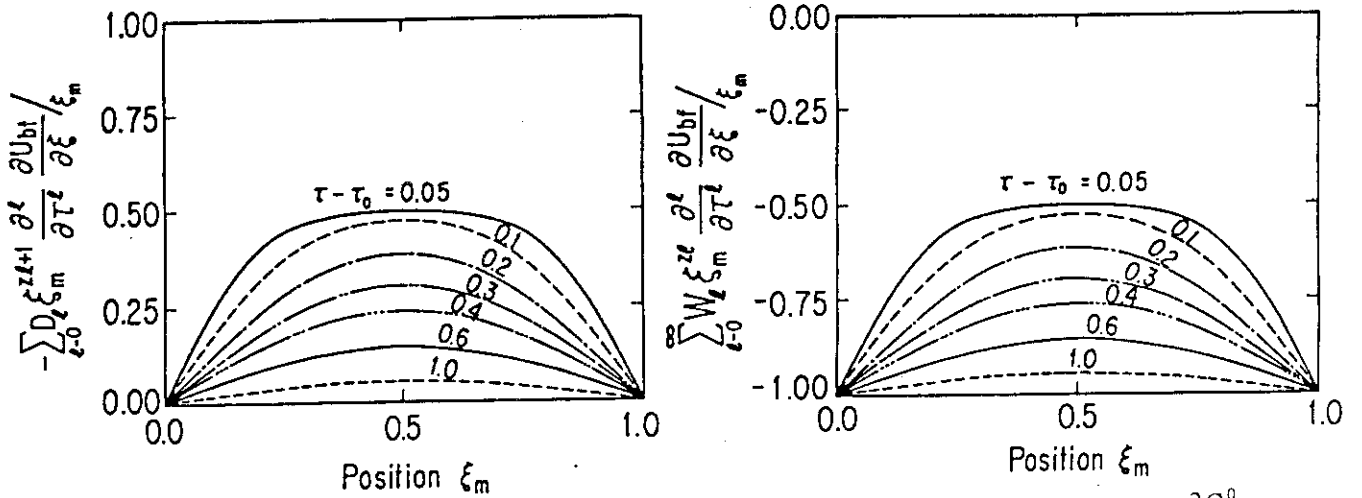
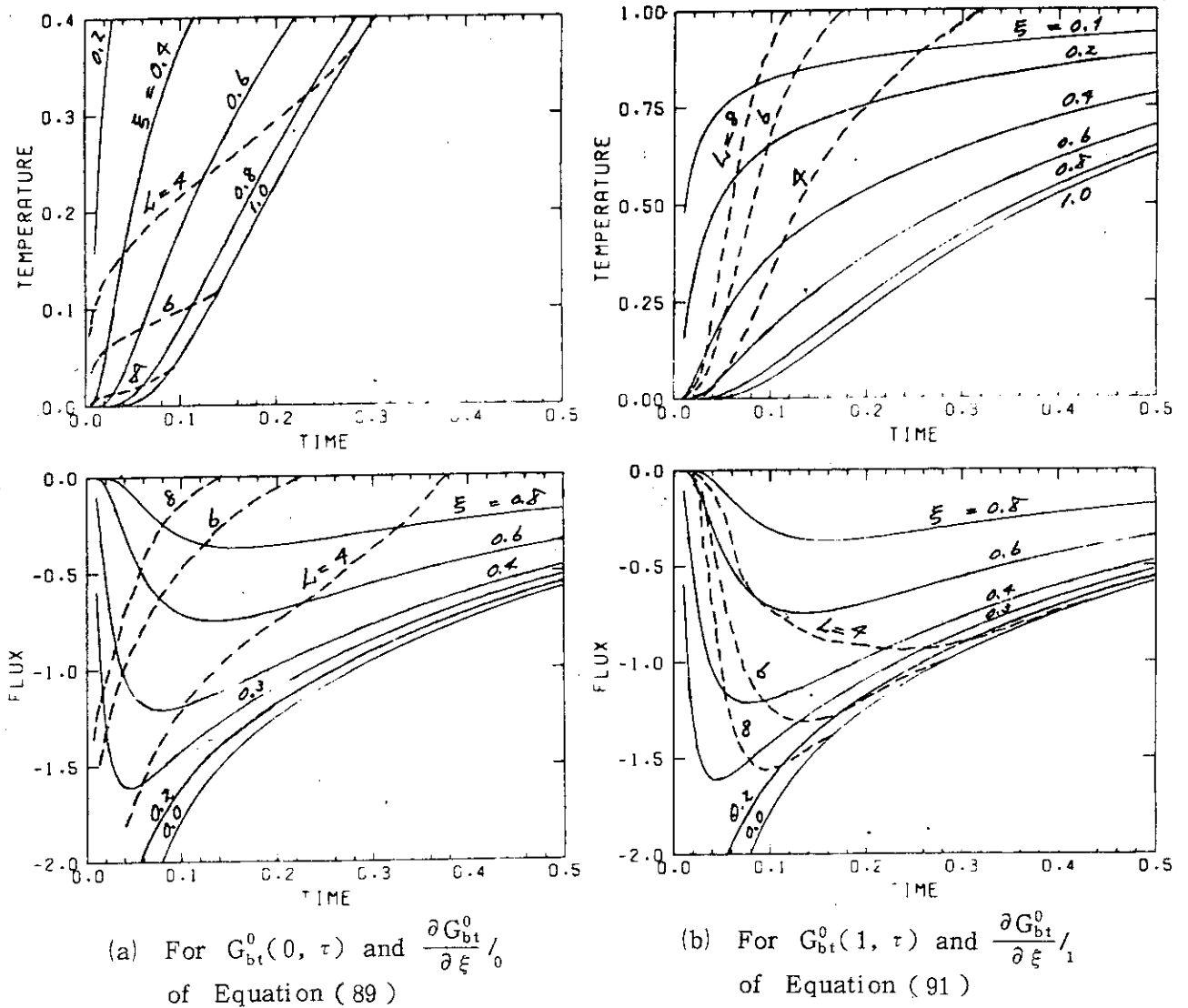


Fig.12 A contribution of second terms of Equation (93) to $G_{bt}^0(0, \tau)$ or $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi} /_0$ for large L



(a) For $G_{bt}^0(0, \tau)$ and $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi} /_0$ of Equation (89)

(b) For $G_{bt}^0(1, \tau)$ and $\frac{\partial G_{bt}^0}{\partial \xi} /_1$ of Equation (91)

Fig.13 Interior temperature and interior heat flux of unit temperature change on $\xi=0$ ($Bi=0$ on $\xi=1$) at $\Delta\tau_L$ shown in Fig. 9

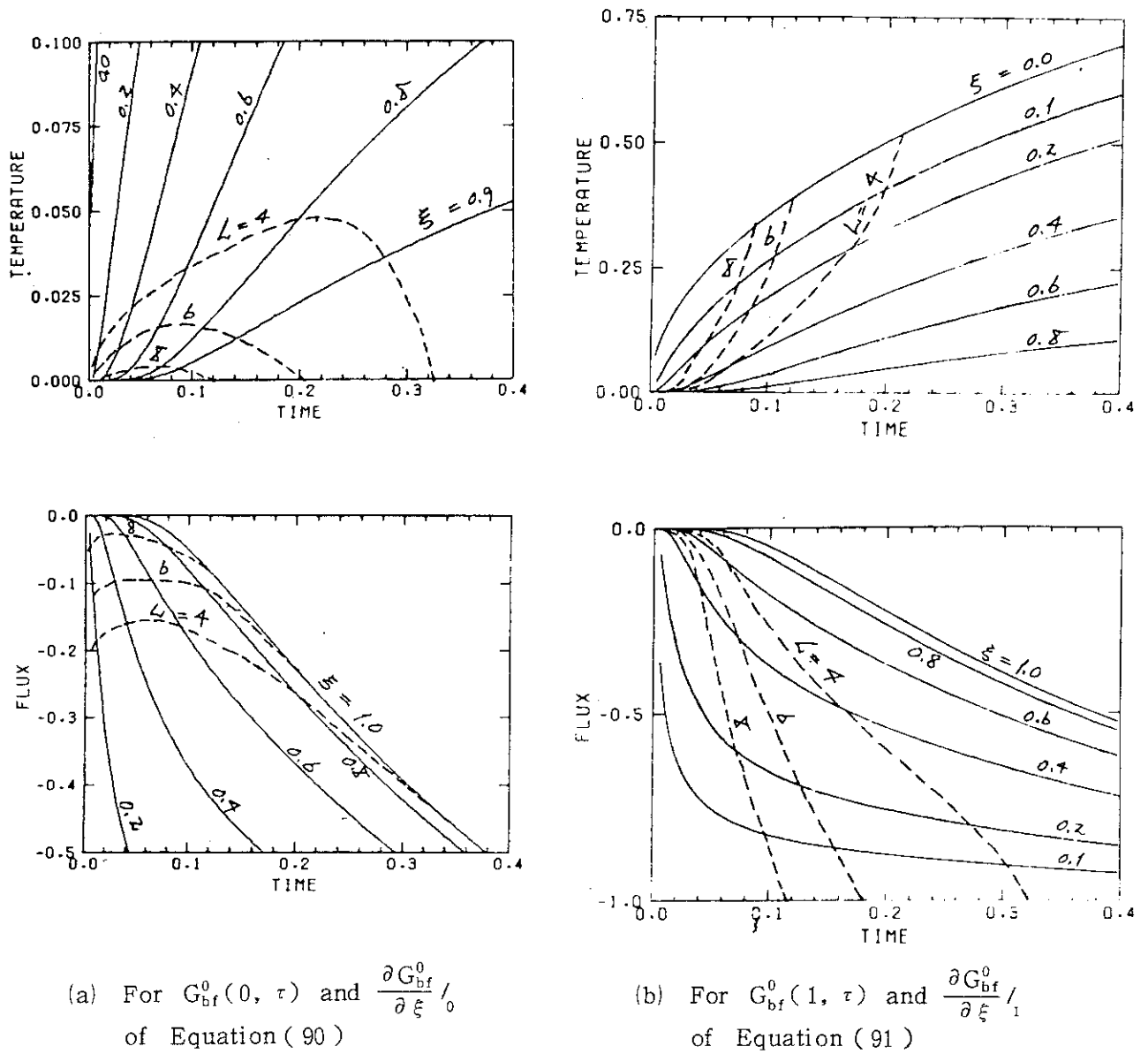


Fig.14 Interior temperature and interior heat flux of unit heat flux change on $\xi=0$ ($Bi=\infty$ on $\xi=1$) at $\Delta\tau_L$ shown in Fig.10

5. 内部点における熱流束変化の評価方法

前章まで、一次元固体の表面温度、および、表面熱流束は、同固体内部点の温度変化、および、同点の熱流束変化を用いて、大部分の時刻で、記述可能であることを示した。すなわち、表面条件の記述には、固体内の1点での温度変化、および、熱流束変化の知見を必要とする。固体内の1点での温度変化の知見は、従来から、熱電対等を用いて得られる温度履歴より求められてきた。しかし、固体内の1点での熱流束変化の知見は、今迄のところ、簡単に、直接、測定しえているとは言い難く、実験的に求めることは、極めて、困難であろうと考えられる。したがって、温度変化を測定している固体内の1点の熱流束変化を、何らかの方法によって、評価する必要がある。

温度変化を測定している点 ξ_m の熱流束を評価する方法としては、従来の非定常熱伝導の取扱いに基づいて、いくつかの方法がある。例えば、次のような条件の組合せによる方法が考えられる。

- (i) 点 ξ_m の温度変化と他の1点 ξ_s ($\neq \xi_m$)の温度変化の組合せ。
当該固体が充分厚く、 ξ_m と ξ_s とで温度履歴を求めることが出来る場合である。
- (ii) 点 ξ_m の温度変化と一端の境界条件の組合せ。
表面条件を求めたい表面に対する他の一方の表面で、Bi数が既知としうる場合である。

このような知見の組合せの場合は、夫々の領域(ξ_m と ξ_s の間、または、 ξ_m と境界条件を与えた一端との間)内の温度変化は、従来の直問題の知見に基づいて求めることが出来る。したがって、点 ξ_m の熱流束変化も、また、求めることが出来るはずである。

以下、前記(i), (ii)の場合について、第5.1節では、逆問題で必要とする熱流束変化を、直問題の手法で求める場合の特質を検討し、その求め方を簡略に述べる。同節に示すように、従来の直問題の手続きに従う方法は、必ずしも、簡単であるとは言い難いので、第5.2節では、平板の場合の前記(i), (ii)について、第3章の式(50), (51)を利用する方法、および、その可能性について検討する。

5.1 直問題の方法による内部点における熱流束変化の評価

固体内の2点 ξ_m と ξ_s で、夫々、温度変化 $\theta(\xi_m, \tau)$, $\theta(\xi_s, \tau)$ が既知である場合、この2点間の温度 $\theta_{m_s}(\xi, \tau)$ の時間変化は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial^{\ell} \theta_{m_s}(\xi, \tau)}{\partial \tau^{\ell}} = z^{2\ell} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1} U_{\tau'_m}(\xi', \tau'-\lambda)}{\partial \tau'^{\ell+1}} d\lambda + z^{2\ell} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \theta(\xi_s, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1} U_{\tau'_s}(\xi', \tau'-\lambda)}{\partial \tau'^{\ell+1}} d\lambda \quad (94)$$

こゝで、 ξ' , τ' , z は、 ξ_m, ξ_δ について無次元化した座標系、および、その変換に伴う常数であり、たとえば、平板の場合は、次のように、選ぶことが出来る。

$$\xi' = \frac{\xi - \xi_\delta}{(\xi_m - \xi_\delta)}, \quad \tau' = \frac{\tau}{(\xi_m - \xi_\delta)^2}, \quad z = \frac{1}{(\xi_m - \xi_\delta)^2} \quad (95)$$

また、 $U_{tm}(\xi', \tau')$, $U_{t\delta}(\xi', \tau')$ は、夫々、 $\xi' = \xi'_m$ または、 ξ'_δ にステップ状単位表面温度変化があり、 $\xi' = \xi'_\delta$ または、 ξ'_m で温度が零の場合の、 ξ' , τ' における温度応答である (ξ'_m, ξ'_δ は、夫々、 ξ_m, ξ_δ に対応する点)。このような $U_{tm}(\xi', \tau')$, $U_{t\delta}(\xi', \tau')$ は、各種一次元形状で求めることが出来る。平板の場合のこれらの例が、付録A-3に示してある。

式(94)で、 $\frac{\partial \theta_{m\delta}(\xi, \tau)}{\partial \tau \ell}$ が求まれば、式(53)~(56)で必要とする $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ は、次式で与えられる(次に述べる式(98)についての説明参照)。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta_{m\delta}}{\partial \xi / \xi_m} \quad (96)$$

同様に、点 ξ_m での温度変化 $\theta(\xi_m, \tau)$ を既知とし、かつ、境界 ξ_s で Bi 数を既知とする場合、この ξ_m と ξ_s との間の温度 $\theta_b(\xi, \tau)$ の時間変化は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau} = Z^{2\ell} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{b+1} U_{bt}(\xi', \tau' - \lambda)}{\partial \tau'^{b+1}} d\lambda \quad (97)$$

こゝで、 ξ' , τ' , z は、 ξ_m, ξ_s について無次元化した座標系、および、その変換に伴う常数であり、たとえば、平板の場合は、式(95)と同形式に選ぶことが出来る。また、 $U_{bt}(\xi', \tau')$ は、次のような、初期条件、および、境界条件を満たす、 ξ' , τ' における温度応答である。

$$U_{bt}(\xi', 0) = 0 \quad \tau' \leq 0$$

$$U_{bt}(\xi'_m, \tau') = \begin{cases} 0, & \tau' \leq 0 \\ 1, & \tau' > 0 \end{cases}$$

$$-\frac{\partial U_{bt}}{\partial \xi' / \xi'_s} = Bi U_{bt}(\xi'_s, \tau')$$

こゝで、 ξ'_m, ξ'_s は、夫々、 ξ_m, ξ_s に対応する (ξ', τ') 系での点である。このような $U_{bt}(\xi', \tau')$ は、各種一次元形状で求めることが出来る。平板の場合の例が、付録A-3に示してある。

このような $\frac{\partial \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau \ell}$ が求まれば、式(53)~(56)で必要とする $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} = \frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta_b}{\partial \xi / \xi_m} \quad (98)$$

こゝで、式(98)は、形式的には、次のように書くことが出来る。

$$\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} = z^{2\ell+1} \int_{\tau'_0}^{\tau'} \theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1}}{\partial \tau'^{\ell+1}} \frac{\partial U(\xi', \tau' - \lambda)}{\partial \xi'} / \xi_m d\lambda$$

しかし、この式では $\xi_m = 0$, $\theta(0, \tau) = 1$ ($\tau > 0$) の場合、正しい $\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / 0}$ が求められないことが、すぐ確められる。また、この式で、数値積分を行うとき必要な、次の値は、無限大であり、この形式の表記は、正しい $\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ を示すものではないことがわかる。

$$\left(\theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1}}{\partial \tau'^{\ell+1}} \frac{\partial U(\xi', \tau' - \lambda)}{\partial \xi'} / \xi_m \right)_{\lambda=\tau'}$$

したがって、このような $\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ の表記方法は、形式的にはありえても、誤解を生じやすいので、 $\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ の表記には、まず、式(97)で、 $\frac{\partial^{\ell} \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^{\ell}}$ を求め、その、 ξ についての導関数を式(98)で求める、という表わし方をしている。式(96)の場合も同様である。

なお、この事は、式(20)、および、式(64)について述べた事と同一である。

$\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ を求める式(94)、(96)、および、(97)、(98)を較べてみると、全く同一の計算を行うことになっている。したがって、以下では、これらの代表として、式(97)、(98)の場合について検討することにする。

この式(97)、(98)に示される $\frac{\partial^{\ell} \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^{\ell}}$ 、または、 $\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ を求めることは、それらが、 ξ_m と ξ_s との両境界の境界条件が与えられる場合の式である為に、今迄、直問題と言われてきた問題であり、したがって、今迄の直問題の取扱いで知られてきた手法により、求められるはずのものである。しかし、 $\frac{\partial^{\ell} \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^{\ell}}$ または、 $\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ を求めることは、逆問題に現われた問題であるため、直問題とはいへながら、以下に述べるような特質を持ち、かつ、取扱上の注意が必要である。

従来、直問題と逆問題とを対比されるとき、直問題は、各種設計の評価に用いられ、逆問題は、実験データの解析に用いられる、とされている。この各種設計の段階で用いられる直問題とは、次の様なものである。

(i) 境界条件が完全に与えられる。

たとえば、表面温度、または、表面熱流束が、時間について、n次式で変化する式(59)や式(60)のような境界条件、または、それらの重ね合せの場合でも、それらの各式

内の各 n , 各 τ_n は勿論, 重ね合せに必要な諸常数は完全に与えられる。

(ii) 評価するのは, 温度と熱流束である。

したがって, 従来の直問題では, 式 (59), (60), または, それらの重ね合せの境界条件で, 式 (60), または, それに相当する式の積分が実行出来て, 式 (61), (62) に示すような $\theta_i^n(\xi, \tau)$, $\frac{\partial \theta_i^n}{\partial \xi}$, または, それらの重ね合せとして, 解析的に, 温度や熱流束が求められ, それらの数値的評価を行うことが出来た。

このような従来の直問題といわれるものに対し, 本節の, 内部点の熱流束変化を求める直問題, すなわち, 逆問題で必要とする直問題は, 次のような特徴を持っている。

(i) 境界条件は完全に与えられない。

内部点 ξ_m で得られた温度変化 $\theta(\xi_m, \tau)$ は, 式 (94), (97) に示されるように, 当該区間の境界条件である。この $\theta(\xi_m, \tau)$ は, 式 (61), または, その重ね合せに違いないが, それらに含まれる重ね合せの常数を全く知らない。また, 時刻 τ が表面条件が不連続変化直後であれば, その時の温度変化は無限階数の導関数を含むものであるが, $\theta(\xi_m, \tau)$ では, 減衰系で得られた知見であるため, その知見は, 有限の L 階の導関数に限られている。

(ii) 評価すべきものは, 各 $\frac{\partial^{\ell}}{\partial \tau^{\ell}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$, $\ell=0, 1, \dots, L$ である。

式 (53) ~ (56) の右辺第 2 項に示されるように, 熱流束 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ のみならず, その時間変化を求める必要がある。

(iii) しかし, これらは, 前章に示した記述不能時間巾以外で, 式 (53) ~ (56) の右辺第 2 項で必要とする精度で求めればよい。

この(i), (ii)より式 (97)の積分は, 解析的に取扱えず, 数値積分によりその値を求めざるをえない。なお, 温度履歴より, $\theta(\xi_m, \tau)$ を L 次の多項式として表現すれば, 式 (97)は解析的に取扱える。しかし, この L 次式は, 誤差を含むものであり, また, 問題とする時間巾が, 未知の表面条件不連続変化直後を含むものであれば, この変化は, 相当の高次式でも, 正しく表現し難いものであることは, 前報に示した通りである。

式 (97)の数値積分で, 積分の下限 τ'_0 は,

$$\theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1} U_{bt}(\xi', \tau' - \lambda)}{\partial \tau'^{\ell+1}} \Bigg|_{\lambda=\tau'_0}$$

の値が, $\frac{\partial^{\ell} \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^{\ell}}$ への寄与が, 充分, 小さいように選ばねばならぬことは言うまでもない。また, 式 (97)の $\frac{\partial^{\ell+1} U_{bt}(\xi', \tau' - \lambda)}{\partial \tau'^{\ell+1}}$ の値は, 付録Dに示すように, λ が τ' に近い場合, その値は, 極めて, 大きな値から, $\lambda = \tau'$ での零の値へと急変する。したがって, 式 (97)では, λ が τ' に近いところで, 充分, 精度のよい数値積分を行う必要がある。このため, 式 (97)では, 次のように異った区間では, 異ったステップ数で数値積分を実行することが考えられる。

$$\frac{\partial^{\ell} \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^{\ell}} \equiv \sum_{j=1}^J I_j^{\ell}$$

$$I_j^\ell = \frac{1}{(1-\xi_m)^2} \int_{\tau' - \Delta\tau'_j}^{\tau' - \Delta\tau'_{j-1}} \theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1} U_{bt}(\xi', \tau' - \lambda)}{\partial \tau'^{\ell+1}} d\lambda \quad (99)$$

ただし, $\Delta\tau'_0 = 0$, $\Delta\tau'_j = \tau' - \tau'_0$

Table 1 A failed example of calculation of temperature variation $\frac{\partial^\ell \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ by numerical integration of Equation (99).

ℓ	I_1^ℓ	I_2^ℓ	I_3^ℓ	$\sum_{j=1}^3 I_j^\ell$	$\frac{\partial^\ell \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell} / \text{exact}$
0	0.28844Q+00	0.52426Q-01	0.67751Q-02	0.34764Q+00	0.34765Q+00
1	-0.56562Q+02	-0.57918Q+02	-0.10818Q+01	-0.11556Q+03	0.96422Q+01
2	-0.95257Q+08	0.13753Q+06	0.30932Q+03	-0.95119Q+08	-0.40844Q+03
3	0.75513Q+15	-0.52693Q+09	-0.13099Q+06	0.75513Q+15	0.26836Q+05
4	-0.16451Q+22	0.28121Q+13	0.74448Q+08	-0.16451Q+22	-0.21629Q+07
5	0.49099Q+28	-0.19269Q+17	-0.53427Q+11	0.49099Q+28	0.15989Q+09
6	-0.23312Q+35	0.16128Q+21	0.46453Q+14	-0.23312Q+35	0.43553Q+10
7	0.10240Q+42	-0.15948Q+25	-0.47512Q+17	0.10240Q+42	-0.89618Q+13
8	-0.39051Q+48	0.18192Q+29	0.55921Q+20	-0.39051Q+48	0.44095Q+16

この式 (99) の数値積分の 1 例を Table 1 に示す。この計算例では、

$$\theta(\xi_m, \tau) = U_t(\xi_m, \tau), \quad \xi_m = 0.2$$

と、付録 A. 1, 式 (A-3), (A-4) で与えられる平板の場合の内部温度応答を用いて ($Bi = 0$), 式 (99) より、

$$\frac{\partial^\ell \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell} \Bigg|_{\substack{\tau=0.025 \\ \xi=0.21}}$$

を求めた場合である。この真値は、 $\frac{\partial^\ell U_t(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell} \Bigg|_{\substack{\tau=0.025 \\ \xi=0.21}}$ と知られている場合である。

こゝでは、積分の上下区間を指定する $\Delta\tau'_j$ として、次の値を用いている。

$$\Delta\tau'_1 = 0.001, \quad \Delta\tau'_2 = 0.01, \quad \tau' - \Delta\tau'_3 = 0$$

そして、各区間の分割数を次の値として、Simpson の公式を用いて、数値積分を行っている。

$$250 (j = 1), \quad 100 (j = 2), \quad 50 (j = 3)$$

Table 1 には、求める時刻 $\tau (= (1-\xi_m)^2 \tau')$ に最も近い部分、すなわち、 I_1^ℓ が、最も $\sum_{j=1}^3 I_j^\ell$ に寄与していることが示されている。そして、真値 $\frac{\partial^\ell \theta_{bt}(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell} \Bigg|_{\substack{\tau=0.025 \\ \xi=0.21}}$ と、式

(99)による $\sum_{j=1}^3 I_j^\ell$ とを較べてみると、 $\ell = 0$ の場合は、かろうじて、真値に近い値を示しているものの、 $\ell \geq 1$ の場合の値は、order も一致しないことが示されている。これは、付録Dに示したように $\frac{\partial^{\ell+1} U_{bt}(\xi, \tau)}{\partial \tau^{\ell+1}}$ の値が τ の小さい場合、極めて激しく変化する為である。したがって、単純に、式(99)の数値積分を行うのでは、 $\frac{\partial^\ell \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ は、求められず、ひいては、式(98)の $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ も、得られ難い。

式(99)の数値積分における、このような難点は、 $\frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ の知見を τ 近傍でのみ利用することによって、次のように、除くことが出来る。すなわち、点 ξ_m での知見より表面条件を、式(53)~(56)より求める場合、それらの式の右辺第1項に含まれる、各 $\frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ は、 $\ell = 0$ より $\ell = L$ まで、既知であるとしている

この既知である $\frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ を用いると、 τ に極めて近い時刻 λ の内部温度 $\theta(\xi_m, \lambda)$ は、次のようにTaylor 展開で表わすことが出来る。

$$\theta(\xi_m, \lambda) = \sum_{S=0}^L \frac{(\lambda - \tau)^S}{S!} \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^S}$$

これを、式(99)の I_j^ℓ のうち、最も τ に近い部分の積分 I_1^ℓ に用いると、この I_1^ℓ の積分は実行できて、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} (1 - \xi_m)^{2\ell} I_1^\ell &= \int_{\tau' - \Delta\tau_1}^{\tau'} \theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1} U_{bt}(\xi', \tau' - \lambda')}{\partial \tau'^{\ell+1}} d\lambda \\ &= \sum_{S=0}^{L-\ell} (-1)^S \{ \phi_{bt}^S(\xi', 0) - \phi_{bt}^S(\xi', \Delta\tau_1) \} \frac{\partial^{\ell+S} \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^{\ell+S}} \\ &\quad + \sum_{S=0}^{\ell-1} \left(\sum_{p=0}^S (-1)^p \frac{\Delta\tau_1^p}{p!} \frac{\partial^{\ell-S+p} U_{bt}(\xi', \tau')}{\partial \tau'^{\ell-S+p}} \Big/ \Delta\tau_1 \right) \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S} \\ &\quad + \sum_{S=\ell}^L \left(\sum_{p=S-\ell+1}^S (-1)^p \frac{\Delta\tau_1^p}{p!} \frac{\partial^{\ell-S+p} U_{bt}(\xi', \tau')}{\partial \tau'^{\ell-S+p}} \Big/ \Delta\tau_1 \right) \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S} \\ &\quad - (-1)^\ell \sum_{S=\ell}^L (-1)^S \left\{ \sum_{p=1}^{S-\ell} \frac{\Delta\tau_1^p}{p!} \phi_{bt}^{S-p-\ell}(\xi', \Delta\tau_1) \right\} \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S} \quad (100) \end{aligned}$$

ここで、 $\phi_{bt}^S(\xi', \tau')$ は、付録の式(A-15)に示す $U_{bt}(\xi', \tau')$ と、次のように関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{bt}^S(\xi', \tau') &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n R_n(\xi')}{\mu_n^{2S}} e^{-\mu_n^2 \tau'} \\ \phi_{bt}^0(\xi', 0) &= U_{bt}^\infty(\xi') \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

また、 $\frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S}$ は、次のように、 $\frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^S}$ と関係づけられている

$$\frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S} = z^{2S} \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^S} \quad (102)$$

式(100)に示されるように、 I_1^ℓ は、既知とした点 ξ_m における時刻 τ の温度変化 $\frac{\partial^\ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ と、体系を記述する関数、 $U_{bt}(\xi', \tau')$ で表わすことが出来る。なお、この式(100)で、

$$\left. \begin{aligned} \theta(\xi_m = 1, \tau) &= \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 1 & \tau > 0, \end{cases} \\ \Delta \tau'_1 &= \tau' \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

とすると、

$$I_1^\ell = \frac{\partial^\ell U_{bt}(\xi', \tau')}{\partial \tau'^\ell}$$

となり、式(99)の $\frac{\partial^\ell \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ は、正しい値、 $\frac{\partial^\ell U_{bt}(\xi', \tau')}{\partial \tau'^\ell}$ であることが、すぐ、確かめられる(この場合、 $I_j^\ell, j \geq 2$ はすべて零である)。

Table 1 の場合と同一の平板の場合、すなわち、

$$\theta(\xi_m, \tau) = U_{bt}(0.2, \tau)$$

と知られている場合について、 I_1^ℓ は、式(100)を用い、 I_2^ℓ は式(97)を用いて、

$$\frac{\partial^\ell \theta_b(0.21, \tau)}{\partial \tau^\ell} \Big/_{\tau=0.025}$$

を計算した結果を、Table 2 に示す。

この場合、積分区間を指定する $\Delta \tau'_j$ は、次の値を用いている。

$$\Delta \tau'_1 = 0.01, \quad \tau' - \Delta \tau'_2 = 0$$

Table 2 には、式(100)内の級数の和を示す各S項毎の I_1^ℓ の値が示してある。この I_1^ℓ の値は、Sの増加で、急速に一定値に漸近していることが示されている。

また、 I_2^ℓ は、200ケの分割で、Simpsonの公式を用いて数値積分を行ったものである。

同表から、 $I_1^\ell + I_2^\ell$ の値は、Sの増加によって、真値 $\frac{\partial^\ell U_{bt}(\xi, \xi)}{\partial \tau^\ell} \Big/_{\substack{\xi=0.21 \\ \tau=0.025}}$ と、良く一致することがわかる。

この式(100)に示された I_1^ℓ を利用すると、逆問題で必要とする $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m} = \sum_{j=1}^J \frac{\partial I_j^\ell}{\partial \xi / \xi_m} \quad (104)$$

こゝで、 $\frac{\partial I_1^\ell}{\partial \xi / \xi_m}$ 、 $\frac{\partial I_j^\ell}{\partial \xi / \xi_m}$ 、 $j \geq 2$ は、夫々、式(100)、および、式(99)の微分により、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^{2\ell+1}} \frac{\partial I_1^\ell}{\partial \xi / \xi_m} &= \sum_{S=0}^{L-\ell} (-1)^S \{ \psi_{bt}^S(0,0) - \psi_{bt}^S(0, \Delta\tau'_1) \} \frac{\partial^{\ell+S} \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^{\ell+S}} \\ &+ \sum_{S=0}^{\ell-1} \left(\sum_{p=0}^{S-\ell+1} (-1)^p \frac{\Delta\tau'_1{}^p}{p!} \frac{\partial^{\ell-S+p}}{\partial \tau'^{\ell-S+p}} \frac{\partial U_{bt}(\xi', \tau')}{\partial \xi'} \right) \bigg|_{\substack{\xi'=0 \\ \tau'=\Delta\tau'_1}} \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S} \\ &+ \sum_{S=\ell}^L \left(\sum_{p=S-\ell+1}^S (-1)^p \frac{\Delta\tau'_1{}^p}{p!} \frac{\partial^{\ell-S+p}}{\partial \tau'^{\ell-S+p}} \frac{\partial U_{bt}(\xi', \tau')}{\partial \xi'} \right) \bigg|_{\substack{\xi'=0 \\ \tau'=\Delta\tau'_1}} \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S} \\ &- (-1)^\ell \sum_{S=\ell}^L (-1)^S \left\{ \sum_{p=1}^{S-\ell} \frac{\Delta\tau'_1{}^p}{p!} \phi_{bt}^{S-\ell-p}(0, \Delta\tau'_1) \right\} \frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S} \end{aligned} \quad (105)$$

$$\frac{\partial I_j^\ell}{\partial \xi / \xi_m} = z^{2\ell+1} \int_{\tau'-\Delta\tau'_j}^{\tau'-\Delta\tau'_{j-1}} \theta(\xi_m, \lambda) \frac{\partial^{\ell+1}}{\partial \tau'^{\ell+1}} \frac{\partial U_{bt}(\xi', \tau'-\lambda)}{\partial \xi'} \bigg|_{\xi'=0} d\lambda, j \geq 2 \quad (106)$$

こゝで、

$$\begin{aligned} \psi_{bt}^0(0,0) &= \frac{\partial U_{bt}^\infty(\xi')}{\partial \xi'} \\ \psi_{bt}^S(0, \tau') &= \frac{\partial \phi_{bt}^S(\xi', \tau')}{\partial \xi'} \bigg|_0 \\ \Delta\tau'_0 &= 0 \\ \Delta\tau'_j &= \tau' - \tau'_0 \end{aligned}$$

である。また、式(105)内の $\frac{\partial^S \theta(\xi_m, \tau')}{\partial \tau'^S}$ は、式(102)に与えられている。

式(105)で、 $\theta(\xi_m, \tau)$ 、 $\Delta\tau'_1$ を、式(103)に示された値とすると、式(104)の $\frac{\partial \ell}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / 0}$ の値は、正しく、 $\frac{\partial \ell}{\partial \tau} \frac{\partial U_{bt}}{\partial \xi}$ であることが、すぐ確かめられる。

この式(104)~(106)は、求める時刻 τ' ($= z^2 \tau$) のごく近傍、 $\tau' - \Delta\tau'_1$ では、既知として いる $\frac{\partial \ell \theta(\xi_m, \tau)}{\partial \tau}$ と、体系を記述する既知の関数 $\psi_{bt}^S(0,0)$ 、 $\psi_{bt}^S(0, \tau')$ とを用いて $\frac{\partial I_1^\ell}{\partial \xi / \xi_m}$ を求め、 τ' より離れた部分については、原データ $\theta(\xi_m, \tau)$ を用いた数値積分により $\frac{\partial I_j^\ell}{\partial \xi / \xi_m}$ を求めるものである。

Table 2 An example of calculation of temperature variation $\frac{\partial^l \theta_b(\xi, \tau)}{\partial \tau^l}$ by numerical integration of Equation (99) with Equation (100)

S \ l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
I ₁ ^l	0	0.3449570+00								
	1	0.3411000+00	0.1059420+02							
	2	0.3408990+00	0.1071660+02	-0.7104990+03						
	3	0.3408810+00	0.1072350+02	-0.7173600+03	0.1572270+06					
	4	0.3408800+00	0.1072410+02	-0.7177410+03	0.1577950+06	-0.7656080+08				
	5	0.3408790+00	0.1072410+02	-0.7177690+03	0.1578200+06	-0.7660400+08	0.5357630+11			
	6	0.3408790+00	0.1072410+02	-0.7177700+03	0.1578210+06	-0.7660510+08	0.5357870+11	-0.4643740+14		
	7	0.3408790+00	0.1072410+02	-0.7177700+03	0.1578210+06	-0.7660500+08	0.5357860+11	-0.4643680+14	0.4748360+17	
8	0.3408790+00	0.1072410+02	-0.7177700+03	0.1578210+06	-0.7660490+08	0.5357830+11	-0.4643670+14	0.4748320+17	-0.5588120+20	
I ₂ ^l	0	0.6775090-02	-0.1081840+01	0.3093220+03	-0.1309850+06	0.7444190+08	-0.5341840+11	0.4644100+14	-0.4749210+17	0.5588530+20
	1	0.3517320+00								
	2	0.3478750+00	0.9512350+01	-0.4011770+03						
	3	0.3476740+00	0.9634740+01	-0.4080380+03	0.2629170+05					
	4	0.3476560+00	0.9641650+01	-0.4084190+03	0.2681030+05	-0.2118920+07				
	5	0.3476550+00	0.9642240+01	-0.4084470+03	0.2683540+05	-0.2162110+07	0.1578940+09			
	6	0.3476540+00	0.9642300+01	-0.4084480+03	0.2683640+05	-0.2163240+07	0.1602290+09	0.3610060+10		
	7	0.3476540+00	0.9642300+01	-0.4084480+03	0.2683620+05	-0.2163060+07	0.1599780+09	0.4215060+10	-0.8557050+13	
8	0.3476540+00	0.9642300+01	-0.4084480+03	0.2683620+05	-0.2162980+07	0.1598870+09	0.4365740+10	-0.8970020+13	0.4341000+16	
Exact	0.3476540+00	0.9642300+01	-0.4084480+03	0.2683610+05	-0.2162980+07	0.1598920+09	0.4355360+10	-0.8901390+13	0.4409560+16	

Table 3 An example of calculation of heat flux variation $\frac{\partial \ell}{\partial \tau \ell} \frac{\partial \theta}{\partial \xi \xi_m}$ by numerical integration of Equation (104) with Equation (105), (106)

S \ l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\frac{\partial I_1^l}{\partial \xi}$	0	-0.261709Q+01								
	1	-0.304892Q+01	0.103250Q+03							
	2	-0.306918Q+01	0.117500Q+03	-0.291754Q+05						
	3	-0.307099Q+01	0.118204Q+03	-0.300020Q+05	0.129289Q+08					
	4	-0.307117Q+01	0.118264Q+03	-0.300392Q+05	0.129930Q+08	-0.748627Q+10				
	5	-0.307119Q+01	0.118269Q+03	-0.300421Q+05	0.129956Q+08	-0.749174Q+10	0.541131Q+13			
	6	-0.307119Q+01	0.118270Q+03	-0.300422Q+05	0.129957Q+08	-0.749186Q+10	0.541162Q+13	-0.472250Q+16		
	7	-0.307119Q+01	0.118270Q+03	-0.300422Q+05	0.129957Q+08	-0.749184Q+10	0.541159Q+13	-0.472242Q+16	0.486339Q+19	
8	-0.307119Q+01	0.118270Q+03	-0.300422Q+05	0.129957Q+08	-0.749183Q+10	0.541158Q+13	-0.472241Q+16	0.484334Q+19		
$\frac{\partial I_2^l}{\partial \xi}$	0	0.679319Q+00	-0.108702Q+03	0.311520Q+05	-0.132236Q+08	0.753413Q+10	-0.542018Q+13	0.472436Q+16	-0.484383Q+19	0.571474Q+22
	1	-0.193777Q+01								
	2	-0.236960Q+01	-0.545211Q+01							
	3	-0.238987Q+01	0.879827Q+01	0.197663Q+04						
	4	-0.239167Q+01	0.950209Q+01	0.115183Q+04	-0.294700Q+06					
	5	-0.239185Q+01	0.956210Q+01	0.111276Q+04	-0.230601Q+06	0.478611Q+08				
	6	-0.239187Q+01	0.956730Q+01	0.110992Q+04	-0.228007Q+06	0.423895Q+08	-0.886648Q+10			
	7	-0.239187Q+01	0.956756Q+01	0.110978Q+04	-0.227907Q+06	0.422721Q+08	-0.856378Q+10	0.185627Q+13		
8	-0.239187Q+01	0.956751Q+01	0.110981Q+04	-0.227926Q+06	0.422905Q+08	-0.859008Q+10	0.193639Q+13	-0.435208Q+15		
Exact	0	-0.239187Q+01	0.956749Q+01	0.110982Q+04	-0.227934Q+06	0.422983Q+08	-0.859946Q+10	0.195227Q+13	-0.491013Q+15	0.120883Q+18
	1	-0.239187Q+01	0.956747Q+01	0.110983Q+04	-0.227935Q+06	0.422983Q+08	-0.859891Q+10	0.195122Q+13	-0.490367Q+15	0.134518Q+18

Table 3 には、式 (104)~(106) を利用して、 $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ を求めた計算例を示す。この例では、

$$\theta(\xi_m, \tau) = U_{bt}(0.2, \tau)$$

と、付録A. 1, 式 (A-3), (A-4) で与えられる平板の場合の内部温度応答 ($Bi = 0$) を用いて、

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta_b}{\partial \xi} \Bigg|_{\substack{\xi_m=0.2 \\ \tau=0.025}}$$

を求めた場合で、この真値は、 $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial U_{bt}}{\partial \xi} \Bigg|_{\substack{\xi_m=0.2 \\ \tau=0.025}}$ と知られている場合である。この場合、

積分区間の指定には、次の値を用いている。

$$\Delta \tau'_1 = 0.01, \quad \tau'_1 - \Delta \tau'_2 = 0$$

Table 3 には、式 (105) 内の級数の和、第S 項までで得られる $\frac{\partial I_1 \theta}{\partial \xi}$ の値が示してある。この $\frac{\partial I_1 \theta}{\partial \xi}$ の値は、S の増加で、急速に一定値に漸近していることが示されている。

また、 $\frac{\partial I_2 \theta}{\partial \xi}$ は、式 (106) を用いて、200ケの分割で、Simpson の公式を用いて数値積分を行ったものである。そして、第S 項までの和で得られる $\frac{\partial I_1}{\partial \xi} + \frac{\partial I_2}{\partial \xi}$ の値は、S の増加で、急速に真値と一致することが示されている。

この例のように、表面条件を求める為に必要な固体内部点の熱流束変化は、式 (104)~(106) を用いて、求めることが出来る。

5.2 固体内の2点の温度と熱流束変化の相互関係式の利用による熱流束変化の評価

表面条件を記述する式 (53)~(56) の各右辺第2 項に含まれる、内部点の熱流束変化を求める方法として、前節で、従来の直問題による方法を述べた。そして、その方法で、注意した取扱を行えば、内部点の熱流束変化を求めうることを示した。しかし、その為には、体系を記述する関数、 $U_{bt}(\xi, \tau)$, $\phi_{bt}^k(\xi, \tau)$ 等、の準備が必要であり、さらに、その上に、デュハメル積分の数値積分を行う必要があった。これらは、必ずしも、簡単とは、言えないし、しかも、表面条件を求める各時刻毎に、これらを繰返すことは、相当、計算時間を必要とすると思われる。

一方、すでに、式 (50), (51) に、固体内の2点における温度、および、熱流束変化の相互関係式が求められている。これらの式を利用して、それらの点の熱流束を簡単に、評価しうのではないかと考えられる。以下、本節では、この方法の検討を試みる。

式 (50), (51) で、 $\theta(\xi_\delta, \tau)$, $\theta(\xi_m, \tau)$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_\delta$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ を、 θ_δ , θ_m , $\frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ と略記

することにして、式(50), (51) を、形式的に書けば、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \theta_\delta &= f_0 \left(\theta_m, \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \tau^2}, \dots, \frac{\partial^L \theta_m}{\partial \tau^L}, \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial^L}{\partial \tau^L} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi} &= g_0 \left(\theta_m, \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \tau^2}, \dots, \frac{\partial^L \theta_m}{\partial \tau^L}, \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial^L}{\partial \tau^L} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \right\} (107)$$

式(50), (51) の時間についての ℓ 階の導関数は、やはり、形式的に、次の様に書ける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell} &= f_\ell \left(\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^{\ell+1} \theta_m}{\partial \tau^{\ell+1}}, \dots, \frac{\partial^L \theta_m}{\partial \tau^L}, \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \frac{\partial^{\ell+1}}{\partial \tau^{\ell+1}} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial^L}{\partial \tau^L} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi} &= g_\ell \left(\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^{\ell+1} \theta_m}{\partial \tau^{\ell+1}}, \dots, \frac{\partial^L \theta_m}{\partial \tau^L}, \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \frac{\partial^{\ell+1}}{\partial \tau^{\ell+1}} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial^L}{\partial \tau^L} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \right\} (108)$$

点 ξ_m と点 ξ_δ での各, $\frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell}$, および, $\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}$ ($0 \leq \ell \leq L$) が既知である場合には、式(107), (108) の $2L + 2$ 本の方程式群で、未知数は、 $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ ($0 \leq \ell \leq L$) の $2L + 2$ 本と見なすことが出来る。したがって、各, $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$, および, $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ は、 $\frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell}$, $\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}$ のみで表記出来て、次式のように、表わすことが出来るはずである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} &= F_m^\ell \left(\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^{\ell+1} \theta_m}{\partial \tau^{\ell+1}}, \dots, \frac{\partial^L \theta_m}{\partial \tau^L}, \frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^{\ell+1} \theta_\delta}{\partial \tau^{\ell+1}}, \dots, \frac{\partial^L \theta_\delta}{\partial \tau^L} \right) \\ \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi} &= F_\delta^\ell \left(\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^{\ell+1} \theta_m}{\partial \tau^{\ell+1}}, \dots, \frac{\partial^L \theta_m}{\partial \tau^L}, \frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^{\ell+1} \theta_\delta}{\partial \tau^{\ell+1}}, \dots, \frac{\partial^L \theta_\delta}{\partial \tau^L} \right) \end{aligned} \right\} (109)$$

また、 ξ_{S1} の表面条件を求める場合に、他の表面 ξ_{S2} の境界での Bi 数が既知としうる場合がある。この場合、点 ξ_m で、温度変化は既知である(測定している)とすると、式(107), (108) で、 $\xi_\delta = \xi_{S2}$ では、

$$-\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi} / \xi_{S2} = Bi \frac{\partial^\ell \theta_\delta(\xi_{S2}, \tau)}{\partial \tau^\ell}$$

なる関係を与えたことに相当する。すなわち、式(107), (108) は、

$$Bi f_\ell = -g_\ell \tag{110}$$

と $L + 1$ 本の方程式群となり、その中に含まれる $L + 1$ 本の $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ は、既知としている各 $\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}$ で表記できて、次式のように表わされるはずである。

$$\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} = F^\ell \left(\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^{\ell+1} \theta_m}{\partial \tau^{\ell+1}}, \dots, \frac{\partial^L \theta_m}{\partial \tau^L} \right) \quad (111)$$

このように、各点の熱流束変化は、温度変化のみで記述することが出来る。そして、この場合、式(107), (108) に含まれる諸係数は、式(50), (51) から明かなように、すでに求められている、 $C_\ell, D_\ell, V_\ell, W_\ell$ と $\xi_\delta - \xi_m$ のみである。したがって、各点の熱流束変化が、式(109) または、(111) のように、温度変化のみで記述出来れば、前節に述べた、直問題を用いて熱流束を評価する方法に較べて、極めて簡単に、熱流束変化が評価出来、したがって、表面条件を求めることが出来ると言えよう。

ところで、式(109), および、(111) は、次に述べる事情によって、常に、熱流束変化を、温度変化のみで記述しうるとは限らない。これらの式を導いた、元の式(107), (108) のうち、式(107) は、前章に述べたような、表面条件記述不能時間巾 $\Delta \tau_L$ 以外で適用可能なものである。しかし、式(108) は、この $\Delta \tau_L$ 以外で、常に適用可能であるとはいへない。これは、式(107) の $\theta_\delta, \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$ が、 $\theta_m, \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ の L 階の導関数を用いて記述しているのに対し、式(108) の $\frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$ は、同式にみるように、 $\frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}, \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ の $L - \ell$ 階の導関数までしか用いていないからである。

第4章1節に示した $\theta_\delta, \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$ の記述式の記述可能性の検討は、そのまゝ、式(108) の $\frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell}$ や $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$ の記述可能性の検討に適用出来るので、式(108) のそれらは、同式に示される L より更に大きな L' 、すなわち、更に高階の導関数 $\frac{\partial^{L'} \theta_m}{\partial \tau^{L'}}, \frac{\partial^{L'}}{\partial \tau^{L'}} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ を用いれば、式(107) の場合と同一の $\Delta \tau_L$ 以外では、常に、式(108) も、また、用いることが期待出来る。

しかし、今、 $\theta_m, \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi}$ は、 L 階の導関数まで知られているとしているので、常に、式(108) が、正しく、 $\frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell}$ や $\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \xi}$ を記述しているとは言い難い、したがって、このような、式(107), (108) から導かれる式(109), (111) によって、熱流束変化を温度変化のみで表示する方法は、常に、よく熱流束変化を記述しうるとは限らない。

以下で、これらの方法、および、その適用限界、または、精度について具体的に検討を行う。

5.2.1 固体内の2点の温度変化を既知とする場合

式(107)~(109) に示したように、式(50), (51) より、点 ξ_m の熱流束変化を、点 ξ_m と点 ξ_δ との温度変化 θ_m と θ_δ とのみで表示する式を平板の場合について求めると、次式の様に表わされる。なお、 θ_m 、および、 θ_δ は、共に、 L 階の導関数まで既知とする。

$$\frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial^\ell \theta_\delta}{\partial \tau^\ell} - \frac{\partial^\ell \theta_m}{\partial \tau^\ell}}{\xi_\delta - \xi_m} + \sum_{k=1}^{L-\ell} (\xi_\delta - \xi_m)^{2k-1} \left\{ (-1)^k X_k \left(\frac{\partial^{k+\ell} \theta_m}{\partial \tau^{k+\ell}} - \frac{\partial^{k+\ell} \theta_\delta}{\partial \tau^{k+\ell}} \right) - Y_k \frac{\partial^{k+\ell} \theta_\delta}{\partial \tau^{k+\ell}} \right\} \quad (112)$$

たゞし、

$$X_0 = - \frac{W_0}{D_0} = - 1$$

$$X_k = \sum_{S=0}^{k-1} (-1)^S \frac{D_{S+1}}{D_0} X_{k-S-1} - (-1)^k \frac{W_k}{D_0}, \quad k \geq 1$$

$$Y_k = V_k + \sum_{S=0}^{k-1} (-1)^S X_S C_{k-S}$$

この式 (112) の右辺で、添字 m を δ 、 δ を m とした式は、 $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ を与える。

この式 (112) は、式 (53)~(56) の右辺第 2 項で用いられるものであるから、式 (112) の有効性の検証には、式 (53)~(56) の右辺第 2 項について、以下に述べるような比較を行えば充分である。

式 (53)~(56) の右辺第 2 項を次のように表わすことにする。

$$G_S^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}, L \right) \equiv \text{式 (53), (55) の右辺第 2 項} \tag{113}$$

$$\frac{\partial G_S^2}{\partial \xi / S} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}, L \right) \equiv \text{式 (54), (56) の右辺第 2 項}$$

ここで、S は 0 か 1 で、夫々、 $\xi = 0$ 、または、1 の表面を表わす。そして、かっこ内は、式 (53)~(56) の右辺第 2 項が、L 階の $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ の時間変化までを用いて得られたものであることを示している。そして、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ としては、表面 $\xi = 0$ で、ステップ状に単位表面温度変化があり、他の表面 $\xi = 1$ では、Bi = 0 の場合の内部応答、すなわち、式 (62) で与えられる $\frac{\partial \theta_0}{\partial \xi / \xi_m}$ を用いればよいことは、前章に述べた通りである。

そして、この場合、前章、Fig. 12 に示したように、式 (113) で、L を無限大とすれば、

$$G_0^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}, \infty \right) = \text{一定値}, \quad \frac{\partial G_0^2}{\partial \xi / 0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}, \infty \right) = \text{一定値} \tag{114}$$

である。

式 (53)~(56) の右辺第 2 項内の各 $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ を、式 (112) より求めた値を用いた、式 (53)~(56) の右辺第 2 項は、同様に、次のように、表わすことにする。

$$G_S^2 (\theta_m, \theta_\delta, L) \equiv \text{式 (53), (55) の右辺第 2 項} \tag{115}$$

$$\frac{\partial G_S^2}{\partial \xi / S} (\theta_m, \theta_\delta, L) \equiv \text{式 (54), (56) の右辺第 2 項}$$

これは、式(53)~(56)の右辺第2項が、式(112)で、 θ_m, θ_δ がL階の導関数まで既知であるとして得られた式の $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ を用いて求められたことを示す。なお、Sは、式(113)の場合と同一の意味である。

式(112)内の θ_m, θ_δ として、前述の $\theta_{bt}^0(\xi_m, \tau), \theta_{bt}^0(\xi_\delta, \tau)$ を用いた場合の、式(115)の値と真値である式(114)の値とを比較したものを、Fig. 15に示す。同図は、 $\xi_m = 0.4$ で、かつ、 $\xi_\delta - \xi_m$ が、0.1と0.4の場合を示してある。同図に示されるように、 $\tau - \tau_0$ が大きければ、式(112)を利用した値は、真値と一致している。しかし、 $\tau - \tau_0$ が小さくなると、真値とは一致しない。そして、右下図を除いては、Lの増加で、真値と一致しない時間巾は小さくなっている。右下図は、L = 4では、 $\tau - \tau_0$ が0.05で、ほとんど、真値と一致しているが、L = 6以上では、真値と一致していないことを示している。

これは、本節の始めに述べたように、L = 4では、 $\tau - \tau_0$ が、0.05では、L = 4では、式(107)、(108)の記述が正しい値を示すが、そのとき、L = 6以上では、式(108)の記述が正しい記述を示さないことによるものである。

式(112)を用いた $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}$ によって、式(53)~(56)の右辺第2項を評価した場合、その値が、真値と一致するかどうかのほかに、更に、真値と一致する為の時間巾を検討する必要がある。すなわち、式(112)を用いることによって、Fig. 9に示される程度と同程度の記述不能時間巾が得られるか、どうかを調べる必要がある。

この為、前章と同様に、真値と計算値との差が、次式のような場合の最大の $\tau - \tau_0$ を $\Delta \tau_L^2$ とする。

$$\left. \begin{aligned} \left| G_S^2 \left(\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi / \xi_m}, \infty \right) - G_S^2 \left(\theta_{bt,m}^0, \theta_{bt,\delta}^0, L \right) \right| < 0.001 \\ \left| \frac{\partial G^2}{\partial \xi / S} \left(\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi / \xi_m}, \infty \right) - \frac{\partial G^2}{\partial \xi / S} \left(\theta_{bt,m}^0, \theta_{bt,\delta}^0, L \right) \right| < 0.001 \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Fig. 16には、 $\xi_m = 0.2$ 、および、 $\xi_m = 0.6$ の場合について、各種の ξ_δ 、および、Lについて $\Delta \tau_L^2$ の値を示してある。そして、同図には、点線で、Fig. 9に示した $\Delta \tau_L$ が記入してある。

Fig. 16の各図に示されるように、 ξ_δ が、 $\xi_\delta - \xi_m \leq 0.2$ の場合には、 $\xi_m = 0.2, \xi_m = 0.6$ での $\Delta \tau_L^2$ は、 $\Delta \tau_L$ と、ほぼ、同一の値であることが示されている。 $\xi_\delta - \xi_m > 0.2$ では、 $\xi_m = 0.2$ 、および、0.6の $\Delta \tau_L$ より大きな $\Delta \tau_L^2$ であること、そして、Fig. 15の右下図に明かに示されるように、Lの増加で、 $\Delta \tau_L^2$ が大きくなることが示されている。これは、式(112)に見られるように、 $\xi_\delta - \xi_m$ の項が大きいことによって顕著に現われる。

式(113)、(115)の比較のため、同式内の $\frac{\partial \theta}{\partial \xi / \xi_m}, \theta_m, \theta_\delta$ として、表面 $\xi = 0$ で、ステップ状単位熱流束変化があり、他の表面 $\xi = 1$ では $Bi = \infty$ の場合の内部応答を用いても、同様な結

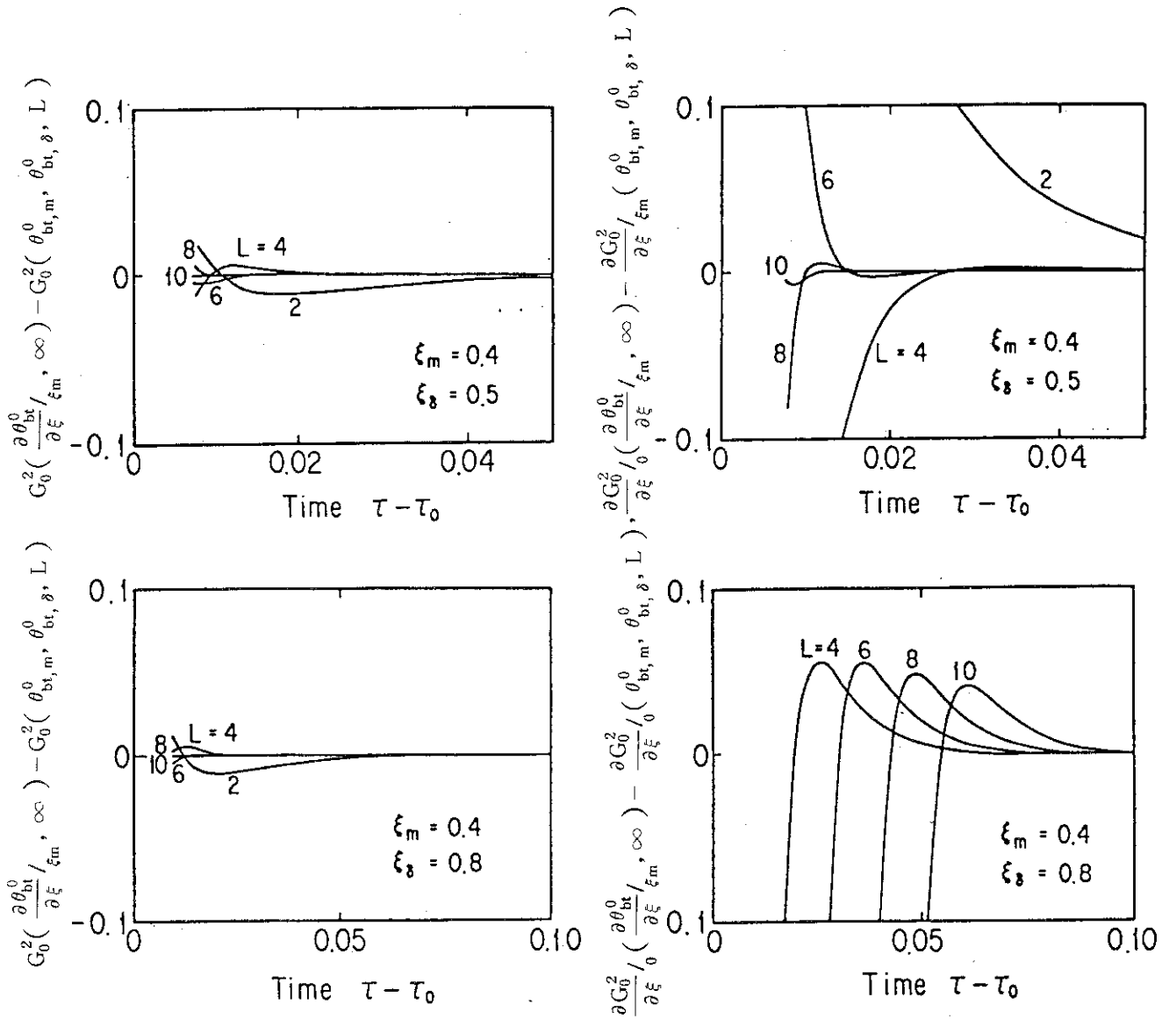
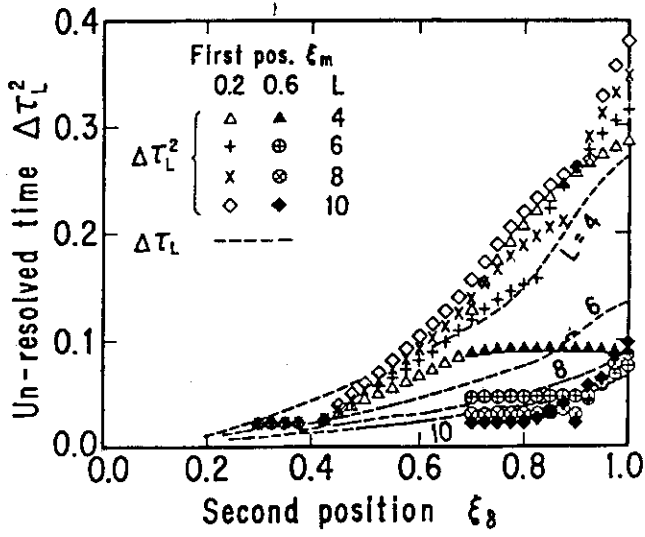
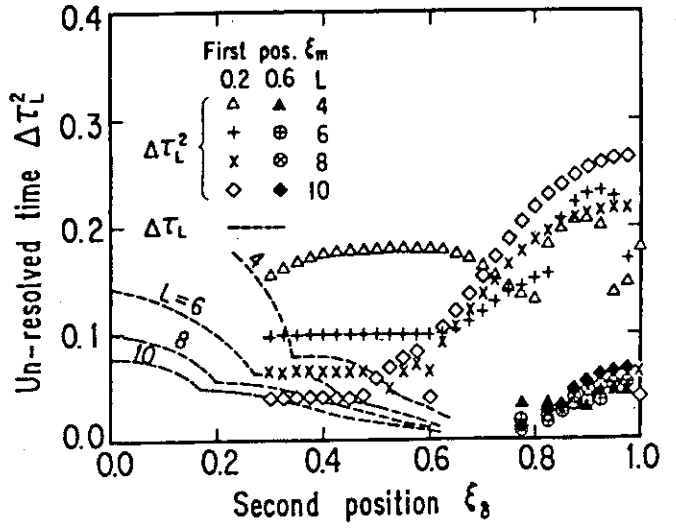


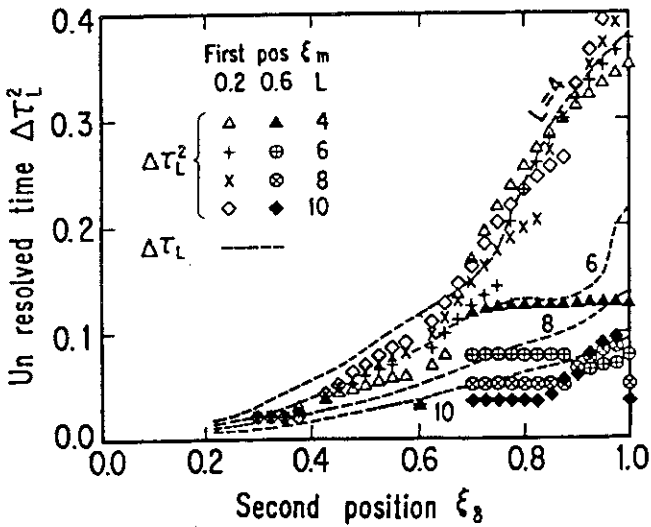
Fig.15 Comparison of 2nd term of Equation (53) and (54) with exact $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ and with Equation (112)



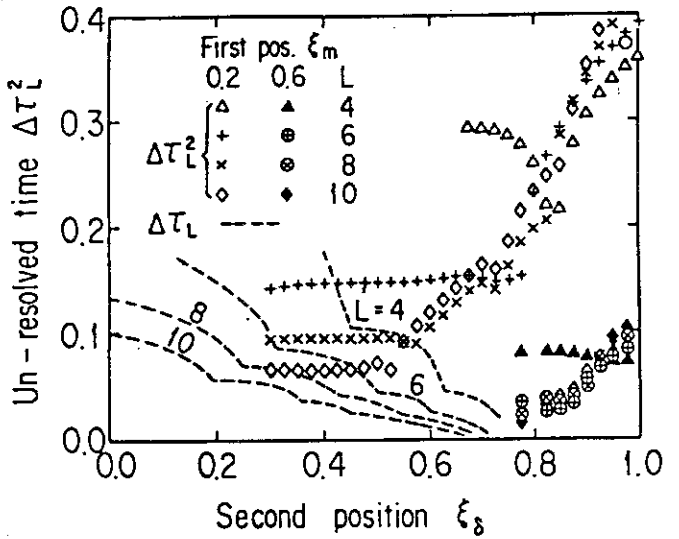
(a) For $G_0^2(\theta_{bt,m}^0, \theta_{bt,\delta}^0, L)$



(c) For $G_1^2(\theta_{bt,m}^0, \theta_{bt,\delta}^0, L)$



(b) For $\frac{\partial G^2}{\partial \xi_0}(\theta_{bt,m}^0, \theta_{bt,\delta}^0, L)$



(d) For $\frac{\partial G^2}{\partial \xi_1}(\theta_{bt,m}^0, \theta_{bt,\delta}^0, L)$

Fig.16 Un-resolved time interval $\Delta\tau_L^2$ for evaluation of second term of Equation (53)~(56) utilizing Equation (112)

果が得られた。

したがって、内部温度を既知とする2点の間隔が平板の厚さの0.2倍以内である場合には、式(112)を用いて評価した熱流束変化を式(53)~(56)で使用する場合、Fig. 9に示した程度の記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ で、表面条件変化を知ることが出来る。

また、内部温度を既知とする2点の間隔が、平板の厚さの0.2倍以上で、かつ、Fig. 16に示す程度の記述不能時間巾 $\Delta\tau_L^2$ で充分である場合には、式(112)を用いて熱流束変化を評価出来るし、したがって、この $\Delta\tau_L^2$ 程度の記述不能時間巾で、表面条件を求めることが出来る。

しかし、2点間の距離が、平板の厚さの0.2倍以上で、かつ、Fig. 9に示した程度の記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ で表面条件を求めたい場合には、この2点で得られた温度変化を用いて、第5.1節に述べた直問題の手法を用いて、熱流束変化を評価せざるをえない。

5.2.2 固体内の1点の温度変化と、同固体の一端の境界のBi数とを既知とする場合

式(110), (111)に示したように、式(50), (51)より、点 ξ_m の熱流束変化を、点 ξ_m の温度変化 θ_m と境界 ξ_δ のBi数とを用いて表示する式を、平板の場合について求めると、次式の様に表わされる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} = \sum_{k=0}^{L-\theta} (-1)^k Z_k \frac{\partial^{\theta+k} \theta_m}{\partial \tau^{k+\theta}} \quad (117)$$

ただし、

$$\begin{aligned} Z_0 &= \Lambda_0 / \Gamma_0 \\ Z_k &= \sum_{S=0}^{k-1} (-1)^S \frac{\Gamma_{S+1}}{\Gamma_0} \sum_{k-S-1} + (-1)^k \frac{\Lambda_k}{\Gamma_0} \\ \Gamma_k &= C_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k} + Bi D_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k+1} \\ \Lambda_k &= -V_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k-1} - Bi W_k (\xi_\delta - \xi_m)^{2k} \\ V_0 &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 ξ_δ は、0か1であり、Biは、 ξ_δ が0の場合は境界 $\xi=0$ におけるBi数、 ξ_δ が1の場合は、境界 $\xi=1$ におけるBi数を意味している。

この式(117)の有効性の評価は、前項と同じように、式(53)~(56)の右辺第2項の比較を行えば充分である。

ここで、式(53)~(56)の右辺第2項内の各 $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ を、式(117)より求めた値を用いた、式(53)~(56)の右辺第2項を、次のように表わすことにする。

$$G_s^2(\theta_m, Bi, L) \equiv \text{式(53), (55)の右辺第2項}$$

$$\frac{\partial G^2}{\partial \xi / S} (\theta_m, Bi, L) \equiv \text{式 (54), (56) の右辺第 2 項} \quad (118)$$

これは、式 (53)～(56) の右辺第 2 項が、式 (117) で、 θ_m が L 階の導関数まで既知であり、かつ、Bi 数も与えられるものとして得られた式 (117) に示される $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ を用いて求められたことを示す。なお、S は、式 (113) の場合と同一の意味である。

前項、5.2.1 と同様に、式 (114) に示される真値と、式 (118) との比較を行う。この場合、 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ 、 θ_m として、 $\xi = 0$ にステップ状単位表面温度変化があり、 $\xi = 1$ では Bi 数が与えられる場合の内部応答 $\theta_{bt}^0(\xi_m, \tau)$ を用いる。そして、次式の場合の最大の $\tau - \tau_0$ を $\Delta \tau_L^1$ とする。

$$\left. \begin{aligned} & \left| G_s^2 \left(\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / \xi_m, \infty \right) - G_s^2 (\theta_{bt, m}^0, Bi, L) \right| < 0.001 \\ & \left| \frac{\partial G^2}{\partial \xi / S} \left(\frac{\partial \theta_{bt}^0}{\partial \xi} / \xi_m, \infty \right) - \frac{\partial G^2}{\partial \xi / S} (\theta_{bt, m}^0, Bi, L) \right| < 0.001 \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

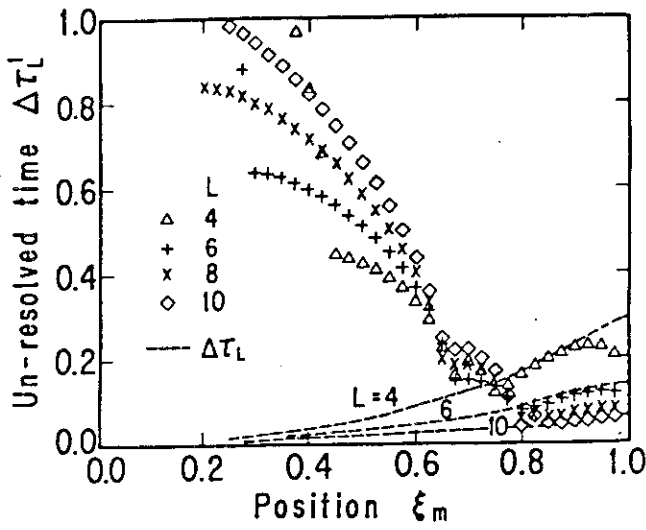
Fig. 17 には、 $Bi = 0$ の場合の $\Delta \tau_L^1$ が示してある。同図には、点線で、Fig. 9 に示した $\Delta \tau_L$ が記入してある。

同図に示されるように、 ξ_m が、Bi 数の指定された表面 ($\xi = 1$) に近い、 $\xi_m \geq 0.8$ では、 $\Delta \tau_L^1$ は $\Delta \tau_L$ と、ほぼ、同一である。しかし、 $\xi_m < 0.8$ では、 $\Delta \tau_L^1$ は $\Delta \tau_L$ より大きく、また、L の増加で、 $\Delta \tau_L^1$ の値が、大きいことが示されている。これは、前項の場合と同様に、式 (108) の記述が、正しい記述を与えないこと、そして、それが、式 (117) に見られるように、 $1 - \xi_m$ の項で ξ_m の小さい程、顕著に現われる為である。

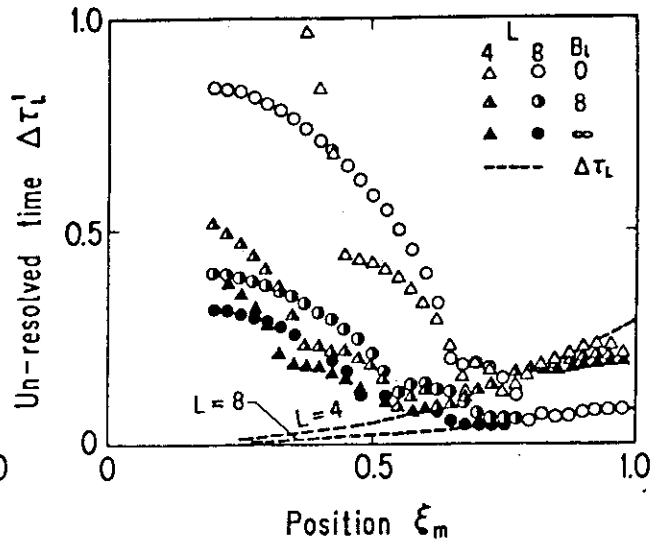
Fig. 18 には、式 (119) より $\Delta \tau_L^1$ を求める為に、 $\xi = 0$ でステップ状単位表面温度変化があり、 $\xi = 1$ での Bi 数が、0, 8, ∞ の場合の内部応答を用いた場合の $\Delta \tau_4^1$ 、および、 $\Delta \tau_8^1$ が示してある。そして、点線は、Fig. 9 に示した $\Delta \tau_L$ である。

この場合も、Fig. 17 の場合と同様に、 ξ_m が Bi 数の指定される表面 ($\xi = 1$) に近い $\xi_m \geq 0.8$ では、 $\Delta \tau_L^1$ は、 $\Delta \tau_L$ と、ほぼ、同程度であることが示されている。また、この範囲では、Bi 数の影響は、Fig. 7 に示した場合と同様に、Bi 数の増加で、 $\Delta \tau_L^1$ が減少するが、その傾向は、特に顕著ではない。

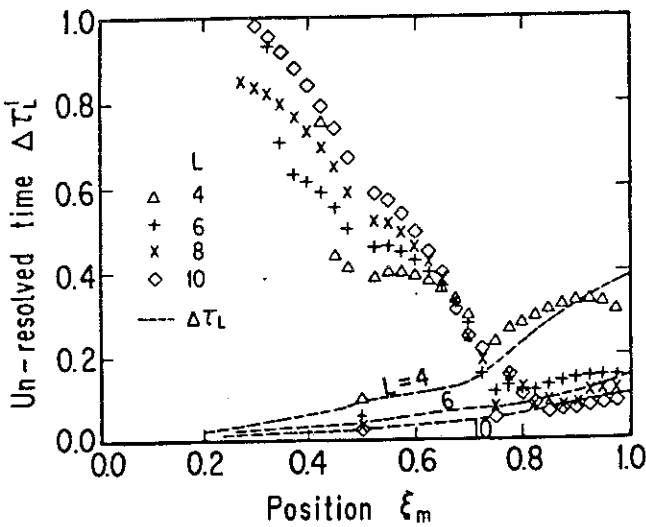
式 (119) より $\Delta \tau_L^1$ を求める為に、同式内の $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \xi_m$ 、 θ_m として、表面 $\xi = 0$ で、ステップ状単位熱流束変化があり、他の表面 $\xi = 1$ では、 $Bi = \infty$ の場合の内部応答を用いても、同様の結果が得られた。



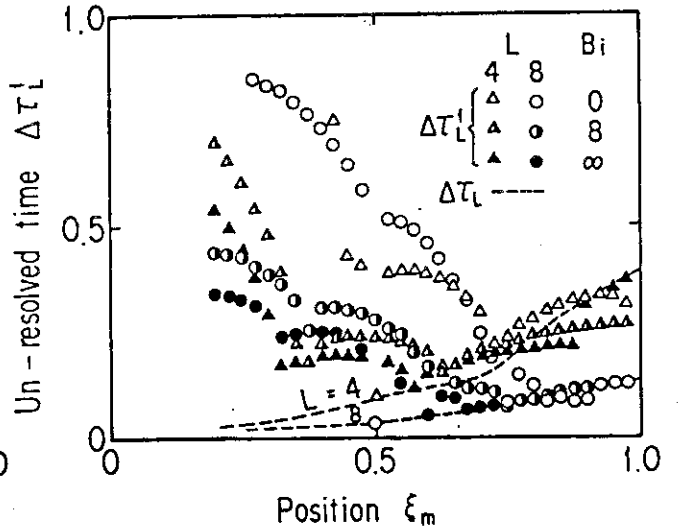
(a) For $G_0^2(\theta_{bt,m}^0, Bi, L)$



(a) For $G_0^2(\theta_{bt,m}^0, Bi, L)$



(b) For $\frac{\partial G^2}{\partial \xi_0}(\theta_{bt,m}^0, Bi, L)$



(b) For $\frac{\partial G^2}{\partial \xi_0}(\theta_{bt,m}^0, Bi, L)$

Fig.17 Un-resolved time interval $\Delta\tau_L^1$ for evaluation of second term of Equation(53) ~ (56) utilizing Equation (117) with $Bi = 0$

Fig.18 Effect of Bi number on un-resolved time interval $\Delta\tau_L^1$

したがって、平板の1端で Bi 数を与えることが出来、かつ、その端の近傍（厚さの 0.2 倍程度以内）で、内部温度を既知としうる場合には、式 (117) を用いて評価した熱流束変化を、式 (53)～(56) で使用する場合には、Fig. 9 に示した程度の記述不能時間巾 $\Delta\tau_L$ で、表面条件変化を知ることが出来る。

また、Bi 数の指定される端より離れた点で、内部温度が既知の場合には、記述不能時間巾を $\Delta\tau_L^1$ 程度で充分とするか、または、 $\Delta\tau_L$ 程度必要とするか、によって、式 (117) を用いるか、または、第 5.1 節に述べた直問題の方法を用いて、熱流束変化を評価すればよい。

6. む す び

従来の非定常熱伝導の取扱いでは、一次元固体の初期条件、および、両境界での2ヶの条件（夫々の境界での温度または、熱流束）が与えられるならば、同固体内の各点、各時刻の温度、および、熱流束は、完全に求められてきた。すなわち、固体内の温度、熱流束変化は、全く任意のものではなく、非定常熱伝導方程式、初期条件、および、2ヶの境界条件によって定まっている。

このことより、逆に、一次元固体内の1点の温度、および、熱流束変化という2ヶの知見は、同点の過去のそれらの知見と共に（初期条件にかわるものとして）、同固体の他のすべての点の温度、および、熱流束変化の指標と考えられる。すなわち、固体内の1点で得られるこれらの知見より、同固体の他の点の温度、および、熱流束変化を記述しうるのではないかと考えられる。

この観点から、本報では、まづ、次に述べるように、固体内の1点で与えられる温度と熱流束変化を用いて、同固体内の他の任意の1点の温度と熱流束を記述する式を任意の一次元形状について導き、ついで、同式で、任意の1点を表面とした場合の表面温度、および、表面熱流束記述式を具体的に示した。

- (i) 表面条件の変化は、固体内部に減衰して現れる為、固体内の1点で得られる温度、および、同点の熱流束変化の知見は、時間についての、それらのL階の導関数までに限られるとする。
- (ii) このような固体内の1点で与えられる温度、および、熱流束変化と、同固体内の任意の他の1点（表面も含む）の温度、および、熱流束変化との関係は、デュハメルの積分を用いて、関係づけられる。このデュハメルの積分の被積分関数には、未知の温度、または、未知の熱流束を含んでいる。
- (iii) このデュハメルの積分のL+1回の部分積分、そして、この結果の ℓ 回（ $0 \leq \ell \leq L$ ）の微分より得られるL+1ヶの方程式群より、デュハメルの積分の被積分関数に含まれる未知の温度、または、未知の熱流束が求められる。そして、結局、固体内の任意の1点の未知の温度、および、未知の熱流束変化は、同固体内の他の1点で与えられる温度、および、同点で与えられる熱流束変化を用いて記述される。
- (iv) なお、この記述式の導出過程で、Bernoulli数についての漸化式を導いた（式(B-10)）。
- (v) このような記述形式を与えるものとして、従来、Burggrafの式が知られている。この式は、本報とは、全く異った仮定から出発したものである。しかし、両者の記述は、内部点で得られる知見の程度を示すLを、無限大とするか、有限とするかを除く

て、同一の結果を与えることを証明した。

- (vi) iii) 項で述べた記述式より、平板の場合の表面温度、および、表面熱流束記述式を導いた。

この記述式について、特に、表面条件が不連続に変化した直後に注目した検討を行い、次の結果を得た。

- (vii) 表面条件が不連続に変化した直後でも、固体の内部点で与えられる温度、および、熱流束変化の知見が完全なら (L が無限大なら)、この記述式は、正しい表面条件の知見を与えることが出来る。
- (viii) 固体内部点で得られる知見が限られた場合でも (L が有限)、表面条件が不連続変化時より、充分、後の時刻では、この記述式は、正確な表面条件の知見を示す。
- (ix) 固体の内部点で与えられる温度、および、熱流束変化の知見が限られたもの (L が有限) であるため、この記述式は、表面条件が不連続に変化した直後に、正しい表面条件を示しえない記述不能時間巾がある。この記述不能時間巾は、内部点と表面との相対位置、与えられる温度、および、熱流束変化の知見の程度 L 、および、表面条件の変化様式によって、次のような、影響をうける。
- 相対位置が小さければ、小さい程、また、 L が大きければ、大きい程、記述不能時間巾は小さい。
 - 与えられた内部点、および、 L では、次のいずれかの場合に、最大の記述不能時間巾がある。
 - ・ 1 端の表面で、表面温度がステップ状に変化し、他の表面では、 Bi 数が零の場合
 - ・ 1 端の表面で、表面熱流束がステップ状に変化し、他の表面では、 Bi 数が無限大の場合

平板の場合の表面温度、および、表面熱流束記述式について、知られている固体内の温度応答関数を利用して数値計算を行い、次の結果をえた。

- (x) 記述式の適用条件、または、記述不能時間巾についての前項 (vii) ~ (ix) の諸検討の正しいことを示した。
- (xi) 内部点の位置、および、内部点で与えられる温度、および、熱流束の知見の程度、 L について、最大の表面条件記述不能時間巾が求められた (Fig. 9)。すなわち、たとえ、表面条件が不連続に変化直後でも、この記述不能時間巾以外では、表面条件が n ($\leq L$) 次式で変化しようとも、また、 Bi 数の値に拘らず、表面条件記述式は、正しい表面条件変化を示す。
- (xii) 表面条件記述不能時間巾の最大の値は、表面条件を求める表面から最も離れた点、すなわち、もう 1 側の表面を内部点とする場合にあり、知見の程度を示す L が、4、

または、8で、夫々、無次元表示 ($\alpha t / d^2$) で、0.38, 0.13 である。この値を、厚さ、1 mm のステンレス鋼板の場合に換算すると、夫々、約、0.086 秒、0.029 秒である。内部点を表面に近づければ、これらの値は減少する。

このように、一次元固体内の1点の温度、および同点の熱流束変化の知見を用いて、僅かの表面条件記述不能時間巾を除いて、表面温度、表面熱流束を求めうる事を示した。

表面条件を求める為に必要な知見のうち、温度変化は、従来から、直接、測定によって求められてきた。しかし、内部点の熱流束変化を実験的に求めることは、極めて、困難であると思われる。したがって、温度変化を測定している点の熱流束変化を何らかの方法で評価する必要がある。

本報では、

- (a) 固体内の異った2点で、温度変化が既知の場合
- (b) 固体内の1点で温度変化が既知であり、かつ、1ヶの表面の Bi 数が既知である場合の熱流束変化の評価法について、以下の検討を行い、次の結果を得た。

(XIII) 従来の直問題の方法で、注意した取扱いによって熱流束変化を求めることが出来る。

(XIV) 前項の直問題の方法は、必ずしも、簡単であると言い難いので、前記(i)~(iii)に述べた固体内2点の温度、熱流束変化の相互関係式を利用して、熱流束変化を、温度変化のみで評価する式を導いた。そして、次の場合には、この評価式で、(X)に述べた表面条件記述不能時間巾に必要な精度で、熱流束変化を求めうることを示した。

- (a)の場合には、温度変化を既知とする2点の距離が、厚さの約0.2倍以内の場合。
- (b)の場合には、温度変化を既知とする点が、 Bi 数を既知とする表面に近い場合。

本報では、内部温度変化を用いて、表面温度、および、表面熱流束を記述しうる可能性についての検討を、いわゆる、error-less データを利用して行った。しかし、現実には得られる内部温度変化についてのデータは、各種の誤差を含むものと考えられる。このような場合の、知りうる表面温度についての知見の限界や、その精度の検討は、今後の課題である。

謝 辞

本研究の遂行にあたって、終始、激励いたゞいた安全工学部次長、平野見明氏、安全工学部安全工学第2研究室長 村尾 良夫 氏に感謝いたします。

または、8で、夫々、無次元表示 ($\alpha t / d^2$) で、0.38, 0.13 である。この値を、厚さ、1 mm のステンレス鋼板の場合に換算すると、夫々、約、0.086 秒、0.029 秒である。内部点を表面に近づければ、これらの値は減少する。

このように、一次元固体内の1点の温度、および同点の熱流束変化の知見を用いて、僅かの表面条件記述不能時間巾を除いて、表面温度、表面熱流束を求めうる事を示した。

表面条件を求める為に必要な知見のうち、温度変化は、従来から、直接、測定によって求められてきた。しかし、内部点の熱流束変化を実験的に求めることは、極めて、困難であると思われる。したがって、温度変化を測定している点の熱流束変化を何らかの方法で評価する必要がある。

本報では、

(a) 固体内の異った2点で、温度変化が既知の場合

(b) 固体内の1点で温度変化が既知であり、かつ、1ヶの表面の Bi 数が既知である場合の熱流束変化の評価法について、以下の検討を行い、次の結果を得た。

(XIII) 従来の直問題の方法で、注意した取扱いによって熱流束変化を求めることが出来る。

(XIV) 前項の直問題の方法は、必ずしも、簡単であると言い難いので、前記(i)~(iii)に述べた固体内2点の温度、熱流束変化の相互関係式を利用して、熱流束変化を、温度変化のみで評価する式を導いた。そして、次の場合には、この評価式で、(X)に述べた表面条件記述不能時間巾に必要な精度で、熱流束変化を求めうることを示した。

- (a)の場合には、温度変化を既知とする2点の距離が、厚さの約0.2倍以内の場合。
- (b)の場合には、温度変化を既知とする点が、 Bi 数を既知とする表面に近い場合。

本報では、内部温度変化を用いて、表面温度、および、表面熱流束を記述しうる可能性についての検討を、いわゆる、error-less データを利用して行った。しかし、現実には得られる内部温度変化についてのデータは、各種の誤差を含むものと考えられる。このような場合の、知りうる表面温度についての知見の限界や、その精度の検討は、今後の課題である。

謝 辞

本研究の遂行にあたって、終始、激励いたゞいた安全工学部次長、平野見明氏、安全工学部安全工学第2研究室長 村尾 良夫 氏に感謝いたします。

参考文献

- (1) G. Stolz, Jr., Numerical solution to an inverse problem of heat conduction for simple shapes, J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C. 82, 20-26 (1960).
- (2) E. M. Sparrow, A. Haji -Sheikh, and, T. S. Lundgren, The inverse problem in transient heat conduction, J. Appl. Mech. 86E (1964) 369-375.
- (3) J. V. Beck, Surface heat flux determination using an integral method, Nucl. Eng. Design 7 (1968) 170.
- (4) J. V. Beck, Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem, Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 703-716.
- (5) A. Ya. Kolp and V. V. Lebedev, Comparison of the solutions found for the inverse transient heat conduction problem by the method of successive intervals and the method of Sparrow, Haji -Sheikh and Lundgren, High Temp., 10 (1972) 739.
- (6) 庄司正弘, 非定常熱伝導の逆問題に関する研究, 機論集 44巻381号(昭53-5) 1633p.
- (7) J. V. Beck, Criteria for comparison of methods of solution of the inverse heat conduction problem, Nucl. Eng. Design, 53 (1979) 11-22.
- (8) R. G. Hills and G. P. Mulholland, The accuracy and resolving power of one dimensional transient inverse heat conduction theory as applied to discrete and inaccurate measurements, Int. J. Heat Mass Transfer, 22 (1979) 1221-1229.
- (9) 黒柳, 非定常熱伝導での逆問題に用いる方程式群とその解, 日本機械学会, 第918回熱工学講演論文集 No 820-17 (昭57) 132
- (10) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, (2nd ed.), Oxford, 1959, pp. 52.
- (11) *ibid.*, pp. 491-492.
- (12) O. R. Burggraf, An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications, J. Heat Transfer 86 C, 373-382 (1964).
- (13) Iloeje, O. C. ら, An investigation of the collapse and surface rewet in film boiling in forced vertical flow, J. Heat Transfer, 97 (1975) 165.
- (14) 森口ら, 数学公式 II, 岩波全書 (1957), 39-41p. および, 137-139p..
- (15) 同上, 124p.

付録 A. ステップ状単位表面条件変化時の内部温度応答関数

一次元物体で、一端 ξ_f を単位温度だけ、または、単位熱流束だけ、ステップ状に変化した場合、他の一端 ξ_m の境界条件は、次の3種の場合で、ほとんど代表できる（解析的な取扱い可能な条件、すなわち、リニアな条件としては、次の3種である）。次の U_i は、夫々の場合の内部温度応答関数である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m} &= 0, \\ U_f(\xi_m, \tau) &= 0, \\ -\frac{\partial U_b(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m} &= Bi U_b(\xi_m, \tau) \end{aligned}$$

たゞし、

$$Bi = \frac{h \times (\text{基準長さ})}{k}$$

これらの、夫々の境界条件に対応する内部温度分布関数、 U_f, U_t, U_b は、すべて、次の非定常熱伝導方程式を満たすものである。

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = V^2 U_i, \quad i = f, t, \text{ または } b \quad (A-1)$$

このような、 U_f, U_t, U_b の二三の例を以下に示す。

A. 1 一端 ξ_m が断熱、他の一端 ξ_f でステップ状単位温度上昇時の内部温度応答関数

$$U_t(\xi, \tau)$$

初期条件、および、境界条件が、

$$\left. \begin{aligned} U_t(\xi, 0) &= 0, & \tau \leq 0 \\ \frac{\partial U_t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big/_{\xi_m} &= 0 \\ U_t(\xi_f, \tau) &= \begin{cases} 0, & \tau \leq 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (A-2)$$

である場合の内部温度応答関数 $U_t(\xi, \tau)$ は、次のように表わされる。

$$U_t(\xi, \tau) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\xi) e^{-a_n^2 \tau} \quad (\text{A-3})$$

ここで、 α_n , $P_n(\xi)$, a_n は、幾何学的形状により異なり、次のように与えられる。

A.1.1 平板の場合

(i) $\xi_\delta = 0$, $\xi_m = 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\pi}{2} (2n - 1) \\ P_n(\xi) &= \sin \alpha_n \xi \\ a_n &= 2 / \alpha_n \end{aligned} \right\} (\text{A-4})$$

(ii) $\xi_m = 0$, $\xi_\delta = 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\pi}{2} (2n - 1) \\ P_n(\xi) &= \cos \alpha_n \xi \\ a_n &= 2 (-1)^{n+1} / \alpha_n \end{aligned} \right\} (\text{A-5})$$

A.1.2 中空円柱の場合

以下で、 δ は、(外径)/(内径)である。

(i) $\xi_\delta = 1$, $\xi_m = \delta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} J_0(\alpha_n) Y_1(\alpha_n \delta) - Y_0(\alpha_n) J_1(\alpha_n \delta) &= 0 \\ P_n(\xi) &= J_0(\alpha_n \xi) - \frac{J_0(\alpha_n)}{Y_0(\alpha_n)} Y_0(\alpha_n \xi) \\ a_n &= \frac{\pi Y_0(\alpha_n)}{1 - \frac{J_0^2(\alpha_n)}{J_1^2(\alpha_n \delta)}} \end{aligned} \right\} (\text{A-6})$$

(ii) $\xi_m = 1$, $\xi_\delta = \delta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} J_0(\alpha_n \delta) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \delta) &= 0 \\ P_n(\xi) &= J_0(\alpha_n \xi) - \frac{J_0(\alpha_n \delta)}{Y_0(\alpha_n \delta)} Y_0(\alpha_n \xi) \end{aligned} \right\} (\text{A-7})$$

$$a_n = \frac{\pi Y_0(\alpha_n \delta)}{1 - \frac{J_0^2(\alpha_n \delta)}{J_1^2(\alpha_n)}}$$

A.2 一端 ξ_m の温度が零で、他の一端 ξ_δ にステップ状に単位熱流束を与え続けるときの内部温度応答関数 $U_f(\xi, \tau)$

初期条件、および、境界条件は、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} U_f(\xi, 0) &= 0, & \tau \leq 0 \\ U_f(\xi_m, 0) &= 0 \\ \frac{\partial U_f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_\delta} &= \begin{cases} 0 & \tau \leq 0 \\ -1 & \tau > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (A-8)$$

この場合の解は、次の様に表わされる。

$$U_f(\xi, \tau) = U_f^\infty(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q_n(\xi) e^{-\beta_n^2 \tau} \quad (A-9)$$

ここで、 $U_f^\infty(\xi)$, β_n , $Q_n(\xi)$, b_n は、幾何学的形状により異なり、次のように与えられる。

A.2.1 平板の場合

(i) $\xi_\delta = 0$, $\xi_m = 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} U_f^\infty(\xi) &= 1 - \xi \\ \beta_n &= \frac{\pi}{2} (2n - 1) \\ Q_n(\xi) &= \cos \beta_n \xi \\ b_n &= 2 / \beta_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (A-10)$$

(ii) $\xi_m = 0$, $\xi_\delta = 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} U_f^\infty(\xi) &= -\xi \\ \beta_n &= \frac{\pi}{2} (2n - 1) \\ Q_n(\xi) &= \sin \beta_n \xi \\ b_n &= 2(-1)^n / \beta_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (A-11)$$

A.2.2 中空円柱の場合

以下で、 δ は、(外径)/(内径)である。

(i) $\xi_\delta = 1, \xi_m = \delta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} U_t^\infty(\xi) &= \ell_n(\delta/\xi) \\ J_1(\beta_n) Y_0(\beta_n \delta) - J_0(\beta_n \delta) Y_1(\beta_n) &= 0 \\ Q_n(\xi) &= J_0(\beta_n \xi) - \frac{J_1(\beta_n)}{Y_1(\beta_n)} Y_0(\beta_n \xi) \\ b_n &= \frac{\pi Y_1(\beta_n)}{\beta_n \left(1 - \frac{J_0^2(\beta_n)}{J_0^2(\beta_n \delta)} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (A-12)$$

(ii) $\xi_m = 1, \xi_\delta = \delta$ の場合

$$\left. \begin{aligned} U_t^\infty(\xi) &= \delta \ell_n \xi \\ J_1(\beta_n \delta) Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_1(\beta_n \delta) &= 0 \\ Q_n(\xi) &= J_0(\beta_n \xi) - \frac{J_1(\beta_n \delta)}{Y_1(\beta_n \delta)} Y_0(\beta_n \xi) \\ b_n &= \frac{\pi Y_1(\beta_n \delta)}{\beta_n \left(\frac{J_1^2(\beta_n \delta)}{J_0^2(\beta_n)} - 1 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (A-13)$$

A.3 平板の一端で熱伝達率が与えられ他の一端をステップ状に単位温度上昇時の内部温度分布関数 $U_{bt}(\xi, \tau)$

初期条件、および、境界条件が、

$$\left. \begin{aligned} U_{bt}(\xi, 0) &= 0 \\ -\frac{\partial U_{bt}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_1 &= Bi U_{bt}(1, \tau) \\ U_{bt}(0, \tau) &= \begin{cases} 0 & \tau \leq 0 \\ 1 & \tau > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (A-14)$$

の場合の解は、次のように表わされる。

$$U_{bt}(\xi, \tau) = U_{bt}^\infty(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(\xi) e^{-\mu_n^2 \tau} \quad (A-15)$$

こゝで、 $U_{bt}^{\infty}(\xi)$, $\mu_n R_n(\xi)$, c_n は、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_{bt}^{\infty}(\xi) &= 1 - \frac{Bi}{Bi + 1} \xi \\ \mu_n \cot \mu_n + Bi &= 0 \\ R_n(\xi) &= \sin \mu_n \xi \\ c_n &= \frac{2}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} \end{aligned} \right\} \quad (A-16)$$

Bi の値が 0, または、無限大と両極端の場合の μ_n の値は、この式 (A-16) の第 2 式より、次の値であることが、すぐ、わかる。

$$Bi = 0 \quad \text{のとき,} \quad \mu_n = \frac{\pi}{2} (2n - 1)$$

$$Bi = \infty \quad \text{のとき,} \quad \mu_n = \pi n$$

Bi が零の場合、すなわち、 $\xi = 1$ で断熱である場合、式 (A-16) は、すでに示した式 (A-4) と同一であることが、すぐ、確められる。

代表的な Bi の値についての μ_n の値は、すでに、知られており、⁽¹¹⁾ 二三の例を次に示す。

Bi	μ_1	μ_2
0	$\pi/2$	$3\pi/2$
0.1	1.6320	4.7335
1.0	2.0288	4.9132
10.0	2.8628	5.7606
100.0	3.1105	6.2211
∞	π	2π

この表から、 μ_1 は、Bi が零の時の $\pi/2$ の値から、Bi の増加と共に増大して、Bi が無限大で、 μ_1 の値が π になることがわかる。すなわち、式 (A-15) の非定常性を示す、第 2 項の和内の $n = 1$ で示される項は、Bi が小さい程、減衰しがたく、定常値に達するのに長い時間を要することがわかる。

A.4 平板の一端で熱伝達率が与えられ、他の一端で、ステップ状に単位熱流束を与え続ける
ときの内部温度分布関数 $U_{bf}(\xi, \tau)$

初期条件、および、境界条件が、

$$\left. \begin{aligned} U_{bf}(\xi, 0) &= 0, \\ \frac{\partial U_{bf}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_0 &= \begin{cases} 0 & \tau \leq 0 \\ -1 & \tau > 0 \end{cases} \\ -\frac{\partial U_{bf}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_1 &= Bi U_{bf}(1, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (A-17)$$

の場合の解は、次のように表わされる。

$$U_{bf}(\xi, \tau) = U_{bf}^{\infty}(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} d_n S_n(\xi) e^{-\nu_n^2 \tau} \quad (A-18)$$

ここで、 $U_{bf}^{\infty}(\xi)$ 、 ν_n 、 $S_n(\xi)$ 、 d_n は、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_{bf}^{\infty}(\xi) &= \frac{1 + Bi}{Bi} - \xi \\ \nu_n \tan \nu_n &= Bi \\ S_n(\xi) &= \cos \nu_n \xi \\ d_n &= \frac{2}{\nu_n (\nu_n + \sin \nu_n \cos \nu_n)} \end{aligned} \right\} \quad (A-19)$$

Bi の値が、0、または、無限大と、極端な場合の ν_n の値は、この式(A-19)の第2式より、次の値であることがわかる。

$$\begin{aligned} Bi = 0 \text{ のとき, } \quad \nu_1 &= 0, \\ \nu_n &= (n-1)\pi, \quad n \geq 2 \\ Bi = \infty \text{ のとき, } \quad \nu_n &= \frac{\pi}{2} (n-1), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Bi が無限大の場合、すなわち、 $\xi = 1$ の温度が、常に、零に保持される場合、式(A-18)は、すでに示した式(A-10)と同一であることが、すぐ、確かめられる。

代表的な Bi の値についての ν_n の値は、すでに、知られており、⁽¹¹⁾ 二三の例を次に示す。

Bi	ν_1	ν_2
0	0	π
0.001	0.0316	3.1419
0.01	0.0998	3.1448
0.1	0.3111	3.1731
1.0	0.8603	3.4256
10.0	1.4289	4.3058
100.0	1.5552	4.6658
∞	$\pi/2$	$3\pi/2$

この表から、 ν_1 は、Bi が無限大の時の $\pi/2$ の値から、Bi の減少と共に、減少し、Bi が零では、 ν_1 の値も、また、零であることがわかる。すなわち、式(A-18)の非定常性を示す第2項の和内の $n = 1$ に示される項は、Bi が小さくなると共に、減衰しがたく、長時間にわたって影響すること、を示している。

以下に、Bi が小さい場合、特に、Bi が零の場合の $U_{bf}(\xi, \tau)$ の変化の様態を示す。 $U_{bf}(\xi, \tau)$ は、式(A-19)を用いて、次のように表わされる。

$$U_{bf}(\xi, \tau) = U_{bf}^{\infty}(\xi) - \frac{2 \cos \nu_1 \xi e^{-\nu_1^2 \tau}}{\nu_1 (\nu_1 + \sin \nu_1 \cos \nu_1)} - \sum_{n=2}^{\infty} d_n S_n(\xi) e^{-\nu_n^2 \tau}$$

今、 ν_1 は小さいとしているので、この式の右辺第2項に含まれる三角関数、および、指数関数を、すべて、巾級数に展開して、整理すると、次式である。

$$U_b^f(\xi, \tau) = 1 - \xi + \left(1 - \frac{\nu_1^2}{3}\right) \left(\tau - \frac{2}{3} + \frac{\xi^2}{2}\right) + O(\nu_1^4) - \sum_{n=2}^{\infty} d_n S_n(\xi) e^{-\nu_n^2 \tau} \quad (A-20)$$

この式に示されるように、Bi の小さい、すなわち、 ν_1 の小さい場合は、少なくとも、単位熱流束が $\xi = 0$ に加えられ始めた直後は、 $U_b^f(\xi, \tau)$ は、時間に比例して増加する傾向に、 ν_2 で漸近している。そして、断熱条件では、すなわち、 $\nu_1 = 0$ では、最終の直線的温度上昇

$$\frac{1}{3} - \xi + \frac{\xi^2}{2} + \tau$$

の状態に、 $\nu_2 = \pi$ で、漸近している。

付録B. 2点間の温度, および, 熱流束関係式内の常数,
(平板の場合)

表面温度, および, 熱流束を記述する式(39), (40) 内に現われる比例常数 $C'_\ell, D'_\ell, V'_\ell, W'_\ell$ は, 幾何学的形状のみで定まる量である。これらは, 第2章1節に示したように, 付録Aに述べた, 表面がステップ状に単位温度上昇時の内部温度応答を示す関数, $U_t(\xi, \tau)$, または, 表面に, ステップ状単位熱流束が与えられた時の内部温度応答関数 $U_t(\xi, \tau)$ に関係づけられている。以下に, 平板の場合について, これら, $C'_\ell, D'_\ell, V'_\ell, W'_\ell$ の値を示す。そして, 平板の場合のこれらの値は, 内部温度, 熱流束変化を既知とする点と, 平板内の他の点との位置関係によって, 異なる値を持つことを示す。

B.1 平板における C'_ℓ の値

C'_ℓ は次のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} C'_0 &= 1 \\ C'_\ell &= \sum_{k=0}^{\ell-1} (-1)^k \phi_t^{k+1}(\xi'_m, 0) C'_{\ell-k-1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで, $\phi_t^k(\xi'_m, 0)$ は, 次式である。

$$\phi_t^k(\xi'_m, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P_n(\xi'_m)}{\alpha_n^{2k}} \quad (14)$$

この式の右辺は, 式(A-1), および, (A-2)で, 式(A-3)と定められる関数 $U_t(\xi', \tau')$ に関するもので, 点 ξ'_m は断熱条件にあり, 他端 ξ'_δ は, ステップ状単位温度上昇の条件の下にある。

平板で, $\xi'_\delta = 0, \xi'_m = 1$ の場合には, 式(A-4)を用いて, 式(14)は次のように書ける。

$$\phi_t^k(\xi'_m, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\left\{ \frac{\pi}{2} (2n-1) \right\}^{2k+1}} \quad (B-1)$$

$\xi'_m = 0, \xi'_\delta = 1$ の場合も, 式(A-5)より, 式(14) は, 式(B-1)であることが, すぐ, 確かめられる。すなわち, この場合, $\phi_t^k(\xi'_m, 0)$ は, したがって, C'_ℓ は, 平板内の2点間の位置関係によらず, 同一の値を持つ。

式(B-1)の右辺は, Euler数, E_k を用いて,⁽¹⁴⁾ 次の様に, 表わされる。

$$\phi_f^k(\xi'_m, 0) = \frac{E_k}{(2k)!} \quad (B-2)$$

これを式(18)に用いると,

$$C'_1 = \frac{1}{(2 \times 1)!}, \quad C'_2 = \frac{1}{(2 \times 2)!}, \quad C'_3 = \frac{1}{(2 \times 3)!}$$

であることが、すぐ確かめられる。すなわち、 $\ell = 2$ 以降、 ℓ の増加ごとに、順次、次の関係がある。

$$C'_\ell = - \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} \sum_{k=0}^{\ell-1} (-1)^k \binom{2\ell}{2k} E_{\ell-k}$$

ここで、Euler 数については、次の漸化式が知られている。⁽¹⁴⁾

$$(-1)^{\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell-1} (-1)^k \binom{2\ell}{2k} E_{\ell-k} = 1 \quad (B-3)$$

したがって、

$$C'_\ell = \frac{1}{(2\ell)!} \quad (B-4)$$

である。

B.2 平板における V'_ℓ の値

V'_ℓ は、次のように定義されている。

$$V'_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \psi_t^k(\xi'_\delta, 0) C'_{\ell-k} \quad (23)$$

C'_i は、式(18)に示され、平板の C'_i の値は、すでに、前節で求められている。そして、 $\psi_t^k(\xi'_\delta, 0)$ は、次式である。

$$\psi_t^k(\xi'_\delta, 0) = \frac{\partial \phi_t^k(\xi', 0)}{\partial \xi'} \Big/_{\xi'_\delta} \quad (20)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial P_n(\xi')}{a_n \partial \xi'} \Big/_{\xi'_\delta}}{\alpha_n^{2k}} \quad (B-5)$$

すなわち、 $\psi_t^k(\xi'_\delta, 0)$ は、前節に用いた $U_i(\xi', \tau')$ に関連するものである。

前節と同様に、 $\xi'_\delta = 0$ 、 $\xi'_m = 1$ の場合、および、 $\xi'_\delta = 1$ 、 $\xi'_m = 0$ の場合に、夫々、式(A-4)、または、式(A-5)を用いると、式(B-5)は次式である。

$$\psi_i^k(\xi'_\delta, 0) = \pm 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\{ \frac{\pi}{2} (2n-1) \right\}^{2k}}, \quad \xi'_\delta \leq \xi'_m \text{ (符号同順)} \quad (B-6)$$

式(B-6)は、Bernoulli数 B_k 、および、Euler数 $E_k^{(14)}$ を用いて、次のように、表わされる。

$$\begin{aligned} \psi_i^k(\xi'_\delta, 0) &= \pm \frac{2^{2k} (2^{2k}-1) B_{k+1}}{(2k)!} \\ &= \pm \frac{\sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \binom{2k-1}{2r-1} E_{k-r}}{(2k-1)!} \end{aligned} \quad (B-7)$$

前節に示したように、

$$C'_i = \frac{1}{(2i)!}$$

であるから、式(B-7)を用いて式(23)は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} V'_\ell &= \pm \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \frac{2^{2k} (2^{2k}-1) B_k}{(2k)! (2\ell-2k)!} \quad (B-8) \\ &= \pm \frac{1}{(2\ell-1)!} \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \binom{2\ell-1}{2k-1} \left\{ \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \binom{2k-1}{2r-1} E_{k-r} \right\} \\ &= \pm \frac{1}{(2\ell-1)!} \left[\sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^{\ell-k+1} \binom{2\ell-1}{2k-1} \left\{ \sum_{r=0}^{\ell-k} (-1)^r \binom{2\ell-2k}{2r} E_{\ell-k-r} \right\} - E_0 \right] \end{aligned}$$

こゝで、最後の式内の中かっこ内は、知られた式(B-3)と同一であり、その値は零である。したがって、 V'_ℓ は、次の値を持つ。

$$V'_\ell = \mp \frac{1}{(2\ell-1)!} \quad \xi'_\delta \leq \xi'_m \text{ (符号同順)} \quad (B-9)$$

この V'_ℓ の値と、式(B-8)より、Bernoulli数について、次の漸化式を得る。

$$\sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k+1} 2^{2k} (2^{2k}-1) \binom{2\ell}{2k} B_k = 2\ell \quad (B-10)$$

B.3 平板における W'_ℓ の値

W'_ℓ は次のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} W'_0 &= \frac{1}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \\ W'_\ell &= \frac{1}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \sum_{k=0}^{\ell-1} (-1)^k \psi_f^{k+1}(\xi'_m, 0) W'_{\ell-k-1} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここで $\psi_f^k(\xi'_m, 0)$ は、次式である。

$$\left. \begin{aligned} \psi_f^0(\xi'_m, 0) &= \frac{1}{u_f} \frac{\partial U_f^\infty(\xi')}{\partial \xi'} \Big/ \xi'_m \\ \psi_f^k(\xi'_m, 0) &= \frac{1}{u_f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \frac{\partial Q_n}{\partial \xi'} / \xi'_m}{\beta_n^{2k}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

この式(26)の右辺は、式(A-1)、および、(A-8)で、式(A-9)と定められる関数 $U_f(\xi', \tau')$ に関するもので、点 ξ'_m は等温条件下にあり、他端 ξ'_s には、ステップ状に単位熱流束が与えられる場合である。なお、 u_f は、この単位熱流束の値であり、本報では、 $u_f = -1$ としている。

平板で、 $\xi'_s = 0$ 、 $\xi'_m = 1$ の場合には、式(A-10)を用いて、式(26)は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \psi_f^0(\xi'_m, 0) &= 1 \\ \psi_f^k(\xi'_m, 0) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\left\{ \frac{\pi}{2} (2n-1) \right\}^{2k+1}} \end{aligned} \right\} \quad (B-11)$$

平板で、 $\xi'_m = 0$ 、 $\xi'_s = 1$ の場合も、式(A-11)より、式(26)は、式(B-11)であることが、すぐ、確かめられる。すなわち、平板の場合は、 $\psi_f^k(\xi'_m, 0)$ は、したがって、 W'_ℓ は、2点の位置関係によらず、同一の値を持つ。

式(B-11)の第1式より、

$$W'_\ell = 1$$

である。また、第2式は、式(B-1)と同一であるから、式(30)の計算は、B. 1節に示した式(18)の計算と同一になり、 W'_ℓ は、次の値を持つ。

$$\left. \begin{aligned} W'_0 &= 1 \\ W'_\ell &= \frac{1}{(2\ell)!} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-12})$$

B.4 平板における D'_ℓ の値

D'_ℓ は、次のように定義されている。

$$D'_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \phi_f^k(\xi'_\delta, 0) W'_{\ell-k} \quad (37)$$

W'_i は、式(30)に示され、平板のときのその値は、すでに、前節に示されている。そして、 $\phi_f^k(\xi'_\delta, 0)$ は次式である。

$$\left. \begin{aligned} \phi_f^0(\xi'_\delta, 0) &= \frac{1}{u_f} U_f^\infty(\xi'_\delta) \\ \phi_f^k(\xi'_\delta, 0) &= \frac{1}{u_f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n Q_n(\xi'_\delta)}{\beta_n^{2k}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

すなわち、 $\phi_f^k(\xi'_\delta, 0)$ は、前節に用いた $U_f(\xi', \tau')$ に関連するものである。

前節と同様に、 $\xi'_\delta = 0$ 、 $\xi'_m = 1$ の場合には、式(A-10)を、また、 $\xi'_\delta = 1$ 、 $\xi'_m = 0$ の場合には、式(A-11)を用いると、式(33)は、次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \phi_f^0(\xi'_\delta, 0) &= \mp 1 \\ \phi_f^k(\xi'_\delta, 0) &= \mp 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\{ \frac{\pi}{2} (2n-1) \right\}^{2k+2}} \end{aligned} \right\}, \quad \xi'_\delta \leq \xi'_m \text{ (符号同順)} \quad (\text{B-13})$$

この式(B-13)の第2式は、Bernoulli数 B_i を用いて⁽¹⁴⁾、次のように表わされる。

$$\phi_f^k(\xi'_\delta, 0) = \mp \frac{2^{2k+2} (2^{2k+2} - 1)}{(2k+2)!} B_{k+1} \quad (\text{B-14})$$

前節に示したように、平板の場合は、

$$W'_i = \frac{1}{(2i)!}$$

であるから、式(37)は、式(B-14)を用いて、次のように書ける。

$$D'_\ell = \mp \left[\frac{1}{(2\ell)!} + \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \frac{2^{2k+2} (2^{2k+2} - 1) B_{k+1}}{(2k+2)! (2\ell-2k)!} \right]$$

$$= \mp \left[\frac{1}{(2\ell)!} + \frac{1}{(2\ell+2)!} \left\{ \sum_{k=1}^{\ell+1} (-1)^{k-1} 2^{2k} (2^{2k}-1) \binom{2\ell+2}{2k} B_k - 2^2 (2^2-1) \binom{2\ell+2}{2} B_1 \right\} \right]$$

こゝで、右辺の中かゝる内第1項の和は、さきに示したBernoulli数についての漸化式(B-10)で与えられ、その値は、 $2\ell+2$ である。また、 $B_1 = 1/6$ であるから、結局、 D'_ℓ は、次の値を持つ。

$$D'_\ell = \mp \frac{1}{(2\ell+1)!}, \quad \xi'_\delta \leq \xi'_m \quad (\text{符号同順})$$

付録C 2点間の温度, および, 熱流束変化の関係を与える
Burggraf の式と本報の式との関係

第2章に述べたように, Burggraf⁽¹²⁾ は, 固体内の2点 ξ'_m と ξ' の温度, および, 熱流束変化の関係について, 式(41)のように, 時間変化と, 場所変化が分離できると仮定した。このことによって, 場所変化は, 式(42), (43)の微分方程式, および, 境界条件より求められるとした。

一方, 本報で得られた, 固体内の2点の温度, および, 熱流束の関係式(39), (40) は, このBurggraf の仮定が正しいことを示した。しかし, この式(39), (40) に示される場所変化に関する諸係数 $C'_\ell, D'_\ell, V'_\ell, W'_\ell$ は, 夫々, ステップ状単位表面条件変化時の内部温度応答に関係づけられている。そして, これらの諸係数に関与する関数の従うべき微分方程式, および, 境界条件は, 式(44), (45) に示したように, Burggraf のそれとは, 全く異っており, したがって, その表示式も, また, 全く異なるように見える。しかしながら, 両者の係数は同一なものであることを, 以下に示す。

なお, 両者の係数が同一のものであれば, それら係数は, Burggraf の係数の関係式(42), (43)から, 最も簡単に求めることができる。

式(42), (43) は, 固体内の1点 ξ'_m に対する同固体内の任意な他の点 ξ' について成立している。ここで, 便宜上, 他の任意の1点を ξ'_0 とする。すなわち, 微分方程式群式(42)は, 式(44), (45) と同様に,

$$\xi_0 \leq \xi' \leq \xi'_m, \text{ または, } \xi'_m \leq \xi' \leq \xi'_0$$

なる ξ' について記述していることにする。

まず, $f_n(\xi')$ を考える。この $f_n(\xi')$ は, 次のように $x_n^i(\xi'), y_n^i(\xi')$ で構成されるものとする。

$$f_n(\xi') \equiv (-1)^n x_n^i(\xi') + y_n^i(\xi') \quad (C-1)$$

そして, この $x_n^i(\xi')$ と $y_n^i(\xi')$ は, 次の微分方程式, および, 境界条件により, $f_n(\xi')$ に課せられた条件, 式(42), (43) を満たすように定めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 x_0^i(\xi') &= 0 \\ \nabla^2 x_n^i(\xi') &= -x_{n-1}^i(\xi'), & n \geq 1 \\ x_0^i(\xi'_0) &= 0 \\ x_n^i(\xi'_0) &= 0, & n \geq 1 \end{aligned} \right\} (C-2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial x_n^t}{\partial \xi' / \xi'_m} &= 0, \quad n \geq 0 \\
 \nabla^2 y_n^t(\xi') &= y_{n-1}^t(\xi') \\
 y_0^t &= 0 \\
 y_n^t(\xi'_m) &= -(-1)^n x_n^t(\xi'_m), \quad n \geq 1 \\
 \frac{\partial y_n^t}{\partial \xi' / \xi'_m} &= 0, \quad n \geq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (C-3)$$

式(C-2)と式(44), (45)を較べてみると、直ちに、次式であることがわかる。

$$x_n^t(\xi') = \phi_t^n(\xi', 0) \quad (C-4)$$

したがって、式(C-3)の境界条件の一つは、次式となる。

$$y_n^t(\xi'_m) = -(-1)^n \phi_t^n(\xi'_m, 0) \quad (C-5)$$

すなわち、式(C-1)~(C-5)から、

$$\begin{aligned}
 f_n(\xi'_\delta) &= y_n^t(\xi'_\delta) \\
 &= \text{function}(\phi_t^0(\xi'_m, 0), \phi_t^1(\xi'_m, 0), \dots, \phi_t^n(\xi'_m, 0))
 \end{aligned}$$

という記述の内容を調べることに相当している。

こゝで、 $y_n^t(\xi')$ として、次式を考える。

$$y_n^t(\xi') = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} \phi_t^\ell(\xi'_m, 0) P_{n-\ell}^t(\xi') \quad (C-6)$$

この式と、式(C-3), (C-5)とより、 $P_\ell^t(\xi')$ は次の関係で、 $y_n^t(\xi')$ に課された条件を満足している。

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 P_0^t &= 0, \\
 P_0^t(\xi'_m) &= 1, \quad \frac{\partial P_0^t}{\partial \xi' / \xi'_m} = 0 \\
 \nabla^2 P_\ell^t &= P_{\ell-1}^t, \quad \ell \geq 1 \\
 P_\ell^t(\xi'_m) &= 0, \quad \frac{\partial P_\ell^t}{\partial \xi' / \xi'_m} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (C-7)$$

この式と、式(42), (43)の $f_\ell(\xi')$ とを較べてみると、

$$f_{\ell}(\xi') = P_{\ell}^1(\xi')$$

であることがわかる。したがって、式(C-1)は、式(C-4), (C-6)を用いて、次式で与えられる。

$$f_n(\xi') = (-1)^n \phi_t^n(\xi', 0) + \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} \phi_t^{\ell}(\xi'_m, 0) f_{n-\ell}(\xi') \quad (C-8)$$

この式で、 $\xi' = \xi'_\delta$ の場合は、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} f_n(\xi'_\delta) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{\ell} \phi_t^{\ell+1}(\xi'_m, 0) f_{n-\ell-1}(\xi'_\delta) \\ f_0 &= 1 \end{aligned} \right\} (C-9)$$

この式より、 $f_1(\xi'_\delta), f_2(\xi'_\delta), \dots$ と $f_n(\xi'_\delta)$ は、逐次、求めることが出来る。そして、この関係は、式(18)に示した C'_{ℓ} についての漸化式と全く同一である。すなわち、

$$C'_{\ell} = f_{\ell}(\xi'_\delta) \quad (C-10)$$

である。

式(C-8)を ξ' について微分し、 $\xi' = \xi'_\delta$ とすると、次式である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \xi'} &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi' / \xi'_\delta} &= -\psi_t^1(\xi'_\delta, 0) \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi' / \xi'_\delta} &= (-1)^n \psi_t^n(\xi'_\delta, 0) - \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{\ell} \phi_t^{\ell}(\xi'_m, 0) \frac{\partial f_{n-\ell}}{\partial \xi' / \xi'_\delta}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \right\} (C-11)$$

この式より、 $\frac{\partial f_n}{\partial \xi' / \xi'_\delta}$ は、 $n = 1, 2, 3, \dots$ と逐次、求めることが出来る。

この $\frac{\partial f_n}{\partial \xi' / \xi'_\delta}$ に対応するものは、式(23)の V'_{ℓ} であり、この V'_{ℓ} は、次の様書き直すことが出来る。

$$\begin{aligned} V'_1 &= -\psi_t^1(\xi'_\delta, 0) \\ V'_{\ell} &= \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \psi_t^k(\xi'_\delta, 0) C'_{\ell-k} \\ &= (-1)^{\ell} \psi_t^{\ell}(\xi'_\delta, 0) + \sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^{\ell-k} \psi_t^{\ell-k} \sum_{S=0}^{k-1} (-1)^S \phi_t^{S+1}(\xi'_m, 0) C'_{k-S-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^\ell \psi_i^\ell(\xi'_\beta, 0) - \sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^k \phi_i^k(\xi'_m, 0) \sum_{S=1}^{\ell-k} (-1)^S \psi_i^S(\xi'_\beta, 0) C'_{\ell-k-S} \\
 &= (-1)^\ell \psi_i^\ell(\xi'_\beta, 0) - \sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^k \phi_i^k(\xi'_m, 0) V'_{\ell-k} \tag{C-12}
 \end{aligned}$$

この式と、式(C-11)を較べると、全く、同一の漸化式であることがわかる。したがって、

$$V'_\ell = \frac{\partial f_n}{\partial \xi'_\beta / \xi'_\beta} \tag{C-13}$$

である。式(C-10)、(C-13)に示されたように、 C'_ℓ 、 V'_ℓ は、式(42)、(43)で与えられる $f_n(\xi')$ 、 $\frac{\partial f}{\partial \xi^a}$ と全く、同一である。

同様の手続により、式(42)、(43)に与えられる $g_n(\xi')$ と、式(39)、(40)の D'_n 、 W'_n との関係を求めることが出来る。

$g_n(\xi')$ として、次式を用いる。

$$g_n(\xi') \equiv \frac{(-1)^n x_n^f(\xi') + y_n^f(\xi')}{\psi_i^0(\xi'_m, 0)} \tag{C-14}$$

この $x_n^f(\xi')$ 、 $y_n^f(\xi')$ は、次式により、 $g_n(\xi')$ に課された条件、式(42)、(43)を満足するように定めることが出来る。

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 x_0^f &= 0, \\
 \frac{\partial x_0^f}{\partial \xi'_\beta / \xi'_\beta} &= 1, \\
 x_0^f(\xi'_m) &= 0 \\
 \nabla^2 x_n^f &= x_{n-1}^f, \\
 x_n^f(\xi'_m) &= 0, \\
 \frac{\partial x_n^f}{\partial \xi'_\beta / \xi'_\beta} &= 0
 \end{aligned} \right\} n \geq 1 \tag{C-15}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 y_n^f &= y_{n-1}^f \\
 y_n^f(\xi'_m) &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_0^f}{\partial \xi' / \xi'_m} &= \psi_f^0(\xi'_m, 0) - \frac{\partial x_0^f}{\partial \xi' / \xi'_m} \\ \frac{\partial y_n^f}{\partial \xi' / \xi'_m} &= -(-1)^n \frac{\partial x_n^f}{\partial \xi' / \xi'_m} \end{aligned} \right\} \quad (C-16)$$

式(C-15)と、式(44), (45)を較べてみると、直ちに、次式である。

$$x_n^f(\xi') = \phi_f^n(\xi', 0) \quad (C-17)$$

したがって、式(C-16)内の境界条件は、次式となる。

$$\frac{\partial y_0^f}{\partial \xi' / \xi'_m} = 0, \quad \frac{\partial y_n^f}{\partial \xi' / \xi'_m} = (-1)^{n+1} \psi_f^n(\xi'_m, 0) \quad (C-18)$$

したがって、

$$y_0^f(\xi') = 0$$

である。こゝで、 $y_n^f(\xi')$ として、次式を考える。

$$y_n^f(\xi') = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} \psi_f^\ell(\xi'_m, 0) P_{n-\ell}^f(\xi'), \quad n \geq 1 \quad (C-19)$$

この式内の各 P_ℓ^f は、次式で、式(C-16), (C-18)を満たしている。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 P_0^f &= 0, \\ P_0^f(\xi'_m) &= 0, \quad \frac{\partial P_0^f}{\partial \xi' / \xi'_m} = 1 \\ \nabla^2 P_\ell^f &= P_{\ell-1}^f, \quad \ell \geq 1 \\ P_\ell^f(\xi'_m) &= 0, \quad \frac{\partial P_\ell^f}{\partial \xi' / \xi'_m} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (C-20)$$

この式(C-20)と式(42), (43)の $g_\ell(\xi')$ とを較べてみると、

$$g_\ell(\xi') = P_\ell^f(\xi')$$

であることがわかる。したがって、(C-14)は、式(C-17), (C-19)を用いて、次のように表わされる。

$$g_n(\xi') = \frac{(-1)^n \phi_f^n(\xi', 0) + \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} \psi_f^\ell(\xi'_m, 0) g_{n-\ell}(\xi')}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \quad (C-21)$$

こゝで、 $\xi' = \xi'_\delta$ とすると、次式である。

$$\left. \begin{aligned} g_0(\xi'_\delta) &= \frac{\phi_f^0(\xi'_\delta, 0)}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \\ g_n(\xi'_\delta) &= \frac{(-1)^n \phi_f^n(\xi'_\delta, 0) - \sum_{\ell=1}^n (-1)^\ell \psi_f^\ell(\xi'_m, 0) g_{n-\ell}(\xi'_\delta)}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (C-22)$$

この式より、 $g_n(\xi'_\delta)$ は、 $n = 1, 2, 3, \dots$ と逐次、求めることが出来る。

一方、式(37)に示した D'_ℓ は、次のように変形出来る(式(C-12)の場合に準ずる)。

$$\left. \begin{aligned} D'_0 &= \frac{\phi_f^0(\xi'_\delta, 0)}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \\ D'_\ell &= \frac{(-1)^\ell \phi_f^\ell(\xi'_\delta, 0) - \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \psi_f^k(\xi'_m, 0) D'_{\ell-k}}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \end{aligned} \right\} \quad (C-23)$$

この式と、式(C-22)は、全く、同一の漸化式である。したがって、

$$D'_\ell = g_\ell(\xi'_\delta) \quad (C-24)$$

である。

また、式(C-21)を ξ' で微分し、 $\xi' = \xi'_\delta$ としたものより、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_0}{\partial \xi' / \xi'_\delta} &= \frac{1}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \\ \frac{\partial g_n}{\partial \xi' / \xi'_\delta} &= \frac{1}{\psi_f^0(\xi'_m, 0)} \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^\ell \psi_f^{\ell+1}(\xi'_m, 0) \frac{\partial g_{n-\ell-1}}{\partial \xi' / \xi'_\delta} \end{aligned} \right\} \quad (C-25)$$

この式より、 $\frac{\partial g_n}{\partial \xi' / \xi'_\delta}$ は、 $n = 1, 2, 3, \dots$ と逐次、求めることが出来る。そして、この式と、式(30)とを較べてみると、全く、同一の漸化式であることがわかり、

$$W'_\ell = \frac{\partial g_\ell}{\partial \xi' / \xi'_\delta} \quad (C-26)$$

である。

このように、本報の2点間の温度、および、熱流束変化関係式に現われる各係数 $C'_\ell, D'_\ell, V'_\ell, W'_\ell$ は、Burrgraf のそれにおける各係数 f_n, g_n と、式(C-10), (C-13), (C-24), (C-26)とで関係づけられる。

付録D 内部温度応答関数の時間変化の例

一端 $\xi = 0$ に、ステップ状単位表面温度上昇があり、他端 $\xi = 1$ が断熱の場合の内部温度応答は、付録Aの式(A-3)に示した $U_i(\xi, \tau)$ 、または、式(A-15)に示した $U_{bt}(\xi, \tau)$ (ただし、 $Bi = 0$) で与えられる。

Table D. 1-(a), およびD. 2-(a) には、時間 τ が極めて小さい場合の $\frac{\partial^\ell U_{bt}(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ ($Bi = 0$) の値を示してある。夫々、ステップ状単位表面温度上昇端に極めて近い点、 $\xi = 0.01$ と、断熱端 $\xi = 1.0$ について、示してある。

式(A-3), または、式(A-15)に示されるように、これらの $\frac{\partial^\ell U_{bt}(\xi, \tau)}{\partial \tau^\ell}$ の計算は、それらの式の右辺第2項の級数の和として求められる。これらの級数は項数 n の増加で、指数関数項により減少する。この第 S 項を u_S^ℓ とし、 n 項までの和を $(\frac{\partial^\ell U_{bt}}{\partial \tau^\ell})_n$ とすると次式である。

$$\left(\frac{\partial^\ell U_{bt}}{\partial \tau^\ell}\right)_n = \sum_{S=1}^n u_S^\ell$$

Table D. 1-(a) および、D. 2-(a) に示した各値は、次式の関係が、 $n = N$, $n = N + 1$, $n = N + 2$ で、成立ったときの $(\frac{\partial^\ell U_{bt}}{\partial \tau^\ell})_{N+2}$ の値である。

$$\frac{u_n^\ell}{\left(\frac{\partial^\ell U_{bt}}{\partial \tau^\ell}\right)_n} < 10^{-12}$$

このような $(\frac{\partial^\ell U_{bt}}{\partial \tau^\ell})_{N+2}$ を構成する各 u_S^ℓ ($1 \leq S \leq N + 2$) のうち u_S^ℓ の値の最大のものを $u_{S \max}^\ell$ とする。Table D. 1-(b), および、Table D. 2-(b)には、夫々の表(a)の各値についての、次の値が示してある。

$$\frac{u_{S \max}^\ell}{\left(\frac{\partial^\ell U_{bt}}{\partial \tau^\ell}\right)_{N+2}}$$

Table D. 1-(b), D. 2-(b) に示されるように、小さな時間では、相当の桁数での計算が必要である。

また、Table D. 1-(c), および、D. 2-(c) には、夫々、表(a)の各値を得るに必要な級数の項数 ($N + 2$ 項) が示してある。本計算では、算高の項数を4000項としたので、この表に示した数字が4001のときは、前記の級数の収斂の判定条件を満たしていないことを示す。

なお、式(A-3)、または、式(A-15)形式の内部応答関数は、時間 τ が大きい場合に収束のよいこと、 τ が小さい場合には、収束のよくないことが知られている。そして、式(A-3)と同一の値を与える次式が、時間 τ が小さい場合に、収束がよい(項数が少なくてすむ)ことが知られている。

$$U_t(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+1-\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+1+\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right\}$$

Table D.1 --(a) Temperature variation of $\frac{\partial U_{bi}(\tau, \xi)}{\partial \tau \xi}$ at $\xi = 0.01$

TIME \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.000001	-0.47660-06	-0.10490+00	0.16680+08	-0.26520+16	0.42150+24	-0.66960+32	0.10630+41	-0.16870+49	0.26770+57	-0.42440+65
0.000002	0.60260-06	-0.12360-07	0.19770+01	-0.31610+09	0.50530+17	-0.80760+25	0.12900+34	-0.20610+42	0.32900+50	-0.52520+58
0.000003	-0.21370-06	-0.13670-14	0.21930-06	-0.35160+02	0.56360+10	-0.90340+18	0.14780+27	-0.23210+35	0.37190+43	-0.59580+51
0.000004	0.43890-06	0.78670-20	0.12460-11	0.17640-03	0.24250+05	0.34160+13	0.47840+21	0.55870+29	0.74440+37	0.74330+45
0.000005	-0.16390-06	0.15390-14	0.14930-06	0.13870+02	0.12520+10	0.10410+18	0.83450+25	0.63110+33	0.44770+41	0.29560+49
0.000006	0.10060-06	0.48700-11	0.32600-03	0.20720+05	0.12440+13	0.70260+20	0.37040+28	0.18090+36	0.80900+43	0.32640+51
0.000007	-0.97040-07	0.14870-08	0.72670-01	0.33400+07	0.14340+15	0.57090+22	0.20850+30	0.68930+38	0.20210+45	0.50990+52
0.000008	0.13920-06	0.10570+06	0.39310+01	0.13610+09	0.43500+16	0.12690+24	0.33280+31	0.76700+37	0.14990+44	0.23220+53
0.000009	-0.27650-06	0.28530-05	0.83300+02	0.22420+10	0.54980+17	0.12100+25	0.23340+32	0.38110+39	0.49220+46	0.42430+53
0.000010	-0.78010-07	0.39180-04	0.92070+03	0.19740+11	0.38020+18	0.64470+25	0.93080+32	0.10790+40	0.87820+46	0.26760+53
0.000020	0.61080-06	0.37170+01	0.20440+08	0.90600+14	0.29150+21	0.49100+27	-0.57540+33	-0.36630+40	0.74420+46	0.36920+53
0.000030	0.44560-04	0.13050+03	0.29720+09	0.45710+15	0.26660+21	-0.45930+27	-0.35460+33	0.17780+40	-0.15250+46	-0.67270+52
0.000040	0.40700-03	0.68070+03	0.80830+09	0.49190+15	-0.16040+21	-0.27270+27	0.40200+33	-0.58900+39	-0.87310+45	0.22120+52
0.000050	0.15650-02	0.17000+04	0.11900+10	0.25500+15	-0.26350+21	0.24650+26	0.16750+33	-0.24490+39	0.15500+45	0.18880+51
0.000060	0.38920-02	0.29760+04	0.13230+10	0.22960+14	-0.18880+21	0.98190+26	0.71180+31	-0.83710+38	0.12250+45	-0.10930+51
0.000070	0.000000	0.42820+04	0.12670+10	-0.11820+15	-0.96760+20	0.79620+26	-0.31890+32	-0.85630+37	0.37530+44	-0.54780+50
0.000080	0.12420-01	0.54780+04	0.11130+10	-0.18050+15	0.33330+20	0.47850+26	0.28750+32	0.95430+37	0.51460+43	-0.15790+50
0.000090	0.18420-01	0.64960+04	0.92230+09	-0.19450+15	0.18410+19	0.24220+26	-0.18500+32	0.97070+37	-0.26560+43	-0.25370+49
0.000100	0.25350-01	0.73220+04	0.73220+09	-0.18310+15	0.18310+20	0.10070+26	-0.10340+32	0.65400+37	-0.31600+43	0.67470+48
0.000200	0.11380+00	0.90360+04	-0.11300+09	-0.21180+14	0.59120+19	-0.12920+25	0.26680+30	-0.47910+35	0.33370+40	0.39110+46
0.000300	0.19670+00	0.74610+04	-0.16580+09	0.23030+13	0.56290+18	-0.15200+24	0.32640+29	-0.69220+34	0.15250+40	-0.33950+45
0.000400	0.26360+00	0.59690+04	-0.13060+09	0.37890+13	-0.53730+17	-0.15630+23	0.40720+28	-0.83840+33	0.17060+39	-0.35940+44
0.000500	0.31730+00	0.48390+04	-0.96790+08	0.29040+13	-0.96790+17	0.13550+22	0.45300+27	-0.11460+33	0.22720+38	-0.44100+43
0.000600	0.36130+00	0.40010+04	-0.72250+08	0.20450+13	-0.72250+17	0.26470+22	-0.35890+26	-0.13590+32	0.33510+37	-0.64440+42
0.000700	0.39800+00	0.33700+04	-0.55020+08	0.14390+13	-0.49560+17	0.19740+22	-0.75760+26	0.98240+30	0.41850+36	-0.10110+42
0.000800	0.42920+00	0.28840+04	-0.42810+08	0.10300+13	-0.33330+17	0.13050+22	-0.56130+26	0.22420+31	-0.27490+35	-0.13170+41
0.000900	0.45610+00	0.25030+04	-0.33990+08	0.73530+12	-0.22730+17	0.84770+21	-0.36350+26	0.16540+31	-0.68000+35	0.78080+39
0.001000	0.47950+00	0.21970+04	-0.27460+08	0.56300+12	-0.15820+17	0.55620+21	-0.22960+26	0.10540+31	-0.50070+35	0.21040+40
0.002000	0.61710+00	0.88020+03	-0.60510+07	0.69110+11	-0.11030+16	0.22450+20	-0.55710+24	0.16230+29	-0.54350+33	0.20450+38
0.003000	0.68310+00	0.49950+03	-0.23590+07	0.18540+11	-0.20370+15	0.28730+19	-0.49430+23	0.10030+28	-0.23450+32	0.62000+36
0.004000	0.72370+00	0.33130+03	-0.11900+07	0.71250+10	-0.59650+14	0.64160+18	-0.84270+22	0.13070+27	-0.23360+31	0.47270+35
0.005000	0.75180+00	0.24000+03	-0.69600+06	0.33630+10	-0.22730+14	0.19750+18	-0.20950+22	0.26260+26	-0.37960+30	0.62150+34
0.006000	0.77280+00	0.18410+03	-0.44750+06	0.18120+10	-0.10270+14	0.74810+17	-0.66580+21	0.70000+25	-0.84890+29	0.11660+34
0.007000	0.78930+00	0.14700+03	-0.30740+06	0.10720+10	-0.52280+13	0.32780+17	-0.25120+21	0.22740+25	-0.23750+29	0.28100+33
0.008000	0.80260+00	0.12080+03	-0.22180+06	0.67870+09	-0.29060+13	0.16000+17	-0.10760+21	0.85540+24	-0.78430+28	0.81480+32
0.009000	0.81370+00	0.10160+03	-0.16620+06	0.45310+09	-0.17290+13	0.846810+16	-0.50840+20	0.36010+24	-0.29430+28	0.27250+32
0.0010000	0.82310+00	0.87000+02	-0.12830+06	0.31540+09	-0.10850+13	0.48010+16	-0.25950+20	0.16380+24	-0.12220+28	0.15300+32
0.0020000	0.87440+00	0.31150+02	-0.23170+05	0.28720+08	-0.49830+11	0.11120+15	-0.30310+18	0.97690+21	-0.36320+25	0.10500+29
0.0030000	0.89730+00	0.17030+02	-0.84650+04	0.70150+07	-0.81390+10	0.12140+14	-0.22130+17	0.47680+20	-0.11850+24	0.33400+27
0.0040000	0.91100+00	0.11080+02	-0.41380+04	0.25760+07	-0.22440+10	0.25140+13	-0.34420+16	0.55700+19	-0.10400+23	0.22010+26
0.0050000	0.92030+00	0.79390+01	-0.23740+04	0.11830+07	-0.82530+09	0.174030+12	-0.81160+15	0.10510+19	-0.15720+22	0.26630+25
0.0060000	0.92730+00	0.60440+01	-0.15070+04	0.62610+06	-0.36420+09	0.27240+12	-0.11690+15	0.26900+18	-0.33530+21	0.47370+24
0.0070000	0.93260+00	0.48000+01	-0.10260+04	0.36560+06	-0.18230+09	0.11690+12	-0.91660+14	0.84910+17	-0.90760+20	0.10990+24
0.0080000	0.93700+00	0.39300+01	-0.73540+03	0.22930+06	-0.10010+09	0.56200+11	-0.38560+14	0.31260+17	-0.29250+20	0.31010+23
0.0090000	0.94060+00	0.32950+01	-0.54810+03	0.15200+06	-0.58990+08	0.29440+11	-0.17960+14	0.12950+17	-0.10770+20	0.10150+23
0.0100000	0.94360+00	0.28140+01	-0.42140+03	0.10520+06	-0.36750+08	0.16510+11	-0.90650+13	0.58820+16	-0.44040+19	0.37370+22

Table D.1 -(b) Ratio of maximum value in series calculation and final value as shown in Table D.1 -(a)

TIME\i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0000001	0.420+05	0.260+05	0.160+04	0.190+03	0.360+02	0.910+01	0.290+01	0.110+01	0.480+00	0.240+00
0.0000002	0.330+05	0.150+12	0.660+10	0.290+09	0.270+08	0.330+07	0.520+06	0.980+05	0.210+05	0.540+04
0.0000003	0.940+05	0.110+19	0.250+17	0.930+15	0.580+14	0.480+13	0.500+12	0.620+11	0.900+10	0.150+10
0.0000004	0.460+05	0.170+24	0.260+22	0.890+20	0.660+19	0.310+17	0.310+17	0.600+16	0.520+15	0.100+15
0.0000005	0.120+06	0.780+18	0.160+17	0.650+15	0.440+14	0.420+13	0.520+12	0.830+11	0.160+11	0.390+10
0.0000006	0.200+06	0.220+15	0.530+13	0.280+12	0.230+11	0.270+10	0.430+09	0.880+08	0.230+08	0.740+07
0.0000007	0.210+06	0.690+12	0.190+11	0.110+10	0.120+09	0.160+08	0.320+07	0.850+06	0.290+06	0.130+06
0.0000008	0.140+06	0.910+10	0.290+09	0.210+08	0.240+07	0.420+05	0.990+05	0.310+05	0.140+05	0.930+04
0.0000009	0.720+05	0.320+09	0.110+08	0.940+06	0.130+06	0.250+05	0.720+04	0.300+04	0.180+04	0.180+04
0.0000010	0.260+06	0.220+08	0.860+06	0.790+05	0.120+05	0.300+04	0.100+04	0.520+03	0.460+03	0.120+04
0.0000020	0.330+05	0.160+03	0.140+02	0.320+01	0.140+01	0.170+01	0.360+01	0.170+01	0.290+01	0.240+01
0.0000030	0.450+03	0.370+01	0.510+00	0.210+00	0.390+00	0.280+00	0.630+00	0.250+00	0.630+00	0.420+00
0.0000040	0.490+02	0.580+00	0.110+00	0.100+00	0.200+00	0.140+00	0.110+00	0.110+00	0.140+00	0.110+00
0.0000050	0.130+02	0.190+00	0.590+01	0.110+00	0.640+01	0.470+00	0.810+01	0.670+01	0.130+00	0.180+00
0.0000060	0.510+01	0.970+01	0.420+01	0.670+00	0.480+01	0.580+01	0.590+00	0.580+01	0.480+01	0.660+01
0.0000070	0.270+01	0.650+01	0.420+01	0.880+01	0.820+01	0.380+01	0.610+01	0.180+00	0.470+01	0.390+01
0.0000080	0.160+01	0.490+01	0.320+01	0.450+01	0.840+01	0.340+01	0.350+01	0.690+01	0.110+00	0.410+01
0.0000090	0.110+01	0.400+01	0.310+01	0.330+01	0.870+00	0.370+01	0.290+01	0.350+01	0.850+01	0.800+01
0.0000100	0.790+00	0.350+01	0.320+01	0.280+01	0.670+01	0.510+01	0.290+01	0.280+01	0.370+01	0.120+00
0.0000200	0.180+00	0.210+01	0.590+01	0.320+01	0.220+01	0.210+01	0.240+01	0.340+01	0.130+00	0.490+01
0.0000300	0.100+00	0.210+01	0.270+01	0.850+01	0.370+01	0.240+01	0.210+01	0.210+01	0.220+01	0.240+01
0.0000400	0.760+01	0.210+01	0.240+01	0.320+01	0.120+00	0.420+01	0.270+01	0.230+01	0.220+01	0.220+01
0.0000500	0.630+01	0.230+01	0.240+01	0.270+01	0.370+01	0.150+00	0.480+01	0.300+01	0.250+01	0.240+01
0.0000600	0.550+01	0.240+01	0.240+01	0.260+01	0.300+01	0.430+01	0.190+00	0.540+01	0.330+01	0.280+01
0.0000700	0.500+01	0.250+01	0.250+01	0.260+01	0.290+01	0.340+01	0.480+01	0.230+00	0.590+01	0.360+01
0.0000800	0.470+01	0.260+01	0.260+01	0.270+01	0.290+01	0.310+01	0.370+01	0.540+01	0.280+00	0.650+01
0.0000900	0.440+01	0.270+01	0.270+01	0.280+01	0.290+01	0.310+01	0.340+01	0.600+01	0.590+01	0.340+00
0.0001000	0.420+01	0.290+01	0.280+01	0.290+01	0.300+01	0.310+01	0.330+01	0.360+01	0.430+01	0.650+01
0.0002000	0.320+01	0.390+01	0.380+01	0.380+01	0.380+01	0.380+01	0.380+01	0.380+01	0.390+01	0.390+01
0.0003000	0.290+01	0.460+01	0.460+01	0.450+01	0.450+01	0.450+01	0.450+01	0.450+01	0.460+01	0.460+01
0.0004000	0.280+01	0.530+01	0.520+01	0.520+01	0.520+01	0.520+01	0.520+01	0.520+01	0.520+01	0.520+01
0.0005000	0.270+01	0.590+01	0.580+01	0.580+01	0.580+01	0.580+01	0.580+01	0.580+01	0.580+01	0.570+01
0.0006000	0.260+01	0.650+01	0.630+01	0.630+01	0.630+01	0.630+01	0.630+01	0.630+01	0.630+01	0.630+01
0.0007000	0.250+01	0.700+01	0.680+01	0.680+01	0.680+01	0.680+01	0.680+01	0.680+01	0.680+01	0.680+01
0.0008000	0.250+01	0.740+01	0.730+01	0.730+01	0.720+01	0.720+01	0.720+01	0.720+01	0.720+01	0.720+01
0.0009000	0.250+01	0.790+01	0.770+01	0.770+01	0.760+01	0.770+01	0.760+01	0.760+01	0.760+01	0.760+01
0.0010000	0.240+01	0.830+01	0.810+01	0.810+01	0.800+01	0.810+01	0.810+01	0.800+01	0.800+01	0.800+01
0.0020000	0.230+01	0.120+00	0.110+00	0.110+00	0.110+00	0.110+00	0.110+00	0.110+00	0.110+00	0.110+00
0.0030000	0.220+01	0.140+00	0.140+00	0.140+00	0.140+00	0.140+00	0.140+00	0.140+00	0.140+00	0.140+00
0.0040000	0.220+01	0.160+00	0.160+00	0.160+00	0.160+00	0.160+00	0.160+00	0.160+00	0.160+00	0.160+00
0.0050000	0.210+01	0.180+00	0.180+00	0.180+00	0.180+00	0.180+00	0.170+00	0.180+00	0.180+00	0.180+00
0.0060000	0.210+01	0.200+00	0.200+00	0.190+00	0.190+00	0.190+00	0.190+00	0.190+00	0.200+00	0.190+00
0.0070000	0.210+01	0.220+00	0.210+00	0.210+00	0.210+00	0.210+00	0.210+00	0.210+00	0.210+00	0.210+00
0.0080000	0.210+01	0.230+00	0.230+00	0.220+00	0.220+00	0.220+00	0.220+00	0.220+00	0.220+00	0.220+00
0.0090000	0.210+01	0.250+00	0.240+00	0.240+00	0.240+00	0.240+00	0.240+00	0.240+00	0.240+00	0.240+00
0.0100000	0.210+01	0.260+00	0.260+00	0.250+00	0.250+00	0.250+00	0.250+00	0.250+00	0.250+00	0.250+00

Table D.1-(c) Necessary terms in series calculation as shown in Table D.1-(a)

TIME \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0000001	3102	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000002	2202	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000003	1900	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000004	1602	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000005	1499	3595	3596	3598	3600	3601	3602	3686	3693	3697
0.0000006	1397	3083	3087	3091	3095	3098	3100	3102	3188	3196
0.0000007	1297	2691	2694	2697	2699	2701	2778	2791	2798	2802
0.0000008	1199	2395	2397	2400	2401	2478	2491	2498	2502	2592
0.0000009	1102	2187	2192	2196	2199	2202	2286	2296	2302	2394
0.0000010	1097	1994	1998	2000	2002	2085	2095	2101	2191	2281
0.0000020	795	1187	1195	1200	1278	1298	1384	1394	1402	1486
0.0000030	678	893	900	970	997	1002	1091	1097	1171	1184
0.0000040	585	761	782	799	876	891	900	988	984	994
0.0000050	499	665	686	702	768	800	800	853	882	896
0.0000060	483	588	600	692	688	700	781	775	787	799
0.0000070	457	546	577	600	648	668	690	702	702	754
0.0000080	399	494	502	576	596	600	647	675	691	694
0.0000090	392	475	496	538	594	585	595	601	660	674
0.0000100	380	451	482	496	547	565	575	588	598	645
0.0000200	275	299	352	366	376	388	397	402	449	452
0.0000300	226	258	279	297	301	315	312	343	354	364
0.0000400	194	221	243	260	279	283	288	293	298	301
0.0000500	179	195	202	230	245	263	266	270	276	281
0.0000600	166	183	194	201	219	233	250	251	255	260
0.0000700	155	172	183	192	198	203	223	239	240	243
0.0000800	146	162	173	182	189	196	201	214	230	230
0.0000900	138	153	164	173	180	187	193	198	202	222
0.0001000	130	146	156	164	172	179	185	190	195	200
0.0002000	93	100	103	116	122	128	132	137	141	145
0.0003000	79	86	91	95	99	101	103	109	114	117
0.0004000	70	77	81	85	88	91	94	96	98	100
0.0005000	64	69	74	77	80	83	85	88	90	92
0.0006000	59	64	68	71	74	77	79	81	83	85
0.0007000	55	60	63	66	69	71	74	76	78	79
0.0008000	52	56	60	63	65	67	69	71	73	75
0.0009000	49	54	57	59	62	64	66	68	69	71
0.0010000	47	51	54	57	59	61	63	64	66	68
0.0020000	35	38	40	42	43	45	46	47	48	50
0.0030000	29	32	33	35	36	37	38	39	40	41
0.0040000	26	28	30	31	32	33	34	35	36	36
0.0050000	24	26	27	28	29	30	31	32	32	33
0.0060000	22	24	25	26	27	27	29	29	30	31
0.0070000	21	22	24	24	25	26	27	27	28	29
0.0080000	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27
0.0090000	19	20	21	22	23	24	24	25	25	26
0.0100000	18	19	20	21	22	23	23	24	24	25

Table D.2 -(a) Temperature variation of $\frac{\partial U_{ht}(\tau, \xi)}{\partial \tau \ell}$ at $\xi = 1.0$

TIME \ ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.000001	-0.48550-09	-0.17420-02	0.27510+06	-0.43450+14	0.68610+22	-0.10830+31	0.17110+39	-0.27020+47	0.42660+55	-0.67370+63
0.000002	-0.47850-09	-0.24150-01	0.38140-01	-0.60230+07	0.93120+15	-0.15020+24	0.23720+32	-0.37460+40	0.59150+48	-0.93400+56
0.000003	-0.47530-09	-0.33490-16	0.52880-08	-0.83500+00	0.13190+09	-0.20820+17	0.32880+25	-0.51930+33	0.82000+41	-0.12950+50
0.000004	-0.47120-09	-0.46420-23	0.73310-15	-0.11580+06	0.38280+02	-0.28870+10	0.45590+18	-0.71990+26	0.11370+35	-0.17950+43
0.000005	-0.46650-09	-0.23220-28	0.75040-22	-0.16820-13	0.25370-05	-0.40020+03	0.63200+11	-0.99800+19	0.15760+28	-0.24890+36
0.000006	-0.46520-09	-0.22180-28	-0.40920-21	-0.15180+15	-0.33330-08	-0.14260+01	0.52330+05	-0.33600+13	0.24120+21	-0.34640+29
0.000007	0.46360-09	0.50350-28	-0.76550-22	0.24090-15	-0.10370-08	0.14300-01	-0.10180+06	0.71980+12	-0.81470+19	0.64370+26
0.000008	-0.45540-09	0.12080-28	-0.61420-22	0.32830-15	0.75410-09	-0.48740-02	0.52180+05	-0.30900+12	0.29430+19	-0.40890+26
0.000009	0.45200-09	0.12940-28	-0.54350-22	-0.11730-15	-0.17240-09	-0.48280-03	0.50580+04	-0.76620+11	0.26770+18	0.85810+24
0.000010	-0.45750-09	0.10740-28	-0.46730-22	0.17470-09	-0.37740-09	0.13170-02	-0.33700+04	0.53440+11	-0.36420+18	0.53230+25
0.000020	-0.43020-09	-0.51270-29	0.34180-23	0.62740-17	-0.31870-10	0.96860-05	0.27950+02	0.77080+08	-0.11500+15	-0.12700+22
0.000030	-0.42990-09	0.87340-29	-0.59860-24	-0.21440-18	-0.14740-11	-0.71110-05	-0.17980+02	0.16030+08	-0.50790+14	0.33590+21
0.000040	-0.41310-09	0.79180-29	-0.77860-24	0.20150-18	-0.14720-12	-0.18520-05	-0.10430+01	-0.13690+07	-0.36520+13	0.96060+19
0.000050	-0.39130-09	0.12140-28	-0.78550-24	0.99800-18	-0.13370-13	-0.92960-06	0.10220+00	0.64040+04	-0.89260+10	-0.27690+19
0.000060	0.38490-09	0.11870-28	-0.42320-18	-0.21150-12	0.73360-08	-0.82470-01	0.10510+06	-0.58630+12	0.32420+17	-0.27690+19
0.000070	-0.37700-09	0.44120-29	-0.53300-24	-0.36860-18	0.15980-12	-0.18160-06	0.24940+00	-0.20060+06	0.18030+12	0.44100+18
0.000080	0.38880-09	0.95170-29	-0.49370-24	0.43520-18	0.68560-13	-0.18690-07	0.80290-01	-0.42600+05	0.11430+10	-0.11640+18
0.000090	-0.36940-09	-0.68830-30	-0.63450-25	-0.30230-18	0.18180-12	-0.78570-07	0.56740-01	-0.35850+05	0.11300+11	-0.29690+17
0.000100	-0.36620-09	0.85830-29	-0.75460-24	0.12320-18	-0.20130-13	0.30840-07	-0.69350-02	0.49660+04	-0.24960+10	-0.92920+16
0.000200	-0.30340-09	0.24270-29	-0.10540-25	-0.25940-19	0.73830-15	0.80900-09	0.53970-03	-0.88760+02	0.39330+08	-0.15190+14
0.000300	0.28790-09	0.11810-29	-0.21360-25	0.17590-21	-0.16320-14	0.23230-09	-0.23660-04	0.80380+01	-0.65610+06	0.49420+12
0.000400	-0.25880-09	0.29620-29	-0.68350-25	0.11230-20	0.13570-15	0.69310-10	-0.57290-05	0.18940+01	-0.14290+06	0.50820+11
0.000500	-0.24060-09	0.77910-30	-0.24830-26	0.18450-20	0.85060-16	0.13540-10	-0.22220+06	0.22670+00	-0.45930+04	0.48240+10
0.000600	0.23380-09	0.99270-30	-0.39590-25	-0.42300-21	-0.55020-16	0.79120-11	-0.78290-06	0.13680+00	-0.15290+05	0.20270+10
0.000700	-0.19590-09	0.19950-30	-0.22060-25	-0.85920-22	-0.47830-16	0.23160-11	-0.15810-06	0.27690-01	-0.16180+04	0.30980+09
0.000800	-0.21510-09	0.10560-29	0.70270-26	0.41100-21	-0.13640-16	0.12470-11	-0.12320-06	0.72430-02	-0.10250+04	0.11140+09
0.000900	-0.17020-09	0.13180-29	-0.17320-25	0.35090-21	-0.60450-17	-0.10730-13	-0.16640-07	0.14200-02	-0.19250+03	0.31580+08
0.001000	-0.18020-09	0.94160-30	-0.12350-25	0.71720-21	-0.36900-17	0.53330-12	-0.20130-07	0.12330-02	-0.27610+02	0.82900+07
0.002000	-0.12950-09	0.58080-30	-0.65440-26	0.73910-22	-0.23670-18	0.21630-13	-0.16190-09	0.91510-05	-0.78620+00	0.63110+04
0.003000	-0.95660-10	0.81000-30	-0.16810-26	0.17170-22	-0.85210-19	0.21620-14	-0.98580-11	0.15110-05	-0.40830-01	0.59000+03
0.004000	0.53260-10	-0.91830-31	-0.12920-27	0.67500-23	0.34620-19	0.73150-15	0.68410-11	0.97100-07	-0.12900-02	0.30360+02
0.005000	-0.52820-10	-0.56240-31	-0.11680-27	0.29330-23	0.12090-19	0.18770-15	0.27240-11	0.21250-08	-0.39130-06	0.19250+01
0.006000	0.46270-10	0.16960-30	0.57680-28	0.55080-25	0.12570-19	0.35140-16	0.54580-12	-0.87230-08	-0.65080-04	0.11120+00
0.007000	-0.20940-10	0.35220-30	-0.11500-27	0.18570-23	-0.37330-20	0.91120-16	-0.50680-12	0.35850-08	-0.30030-04	0.28310+00
0.008000	0.15750-10	0.16300-30	-0.29410-28	0.10250-23	-0.33640-20	0.35130-16	-0.23940-12	0.19470-08	-0.23290-04	0.22240+00
0.009000	-0.18670-10	0.30250-31	-0.17320-27	0.57880-24	-0.83590-21	0.12660-16	-0.11710-13	-0.10760-08	0.96270-06	-0.13550-01
0.010000	-0.13400-10	0.45450-31	-0.82580-28	-0.45300-24	0.39710-20	-0.28190-17	0.64220-13	-0.10510-09	-0.15620-05	0.13300-04
0.020000	-0.36250-11	0.25760-33	-0.55810-28	0.42820-25	0.27160-21	-0.14940-19	0.20950-14	-0.26940-11	0.11140-07	-0.25350-01
0.030000	0.68590-12	0.47670-31	0.45940-28	0.15940-23	0.41620-19	0.10490-14	0.25750-10	0.61330-06	0.14160-01	0.31670+03
0.040000	-0.15760-12	0.16030-23	-0.24450-19	0.36040-15	0.51280-11	0.70280-07	0.92540-03	0.11680+02	0.14080+06	0.16160+10
0.050000	-0.36280-13	0.30780-18	0.29860-14	0.27750-10	0.24630-06	0.20820-02	0.16690+02	0.12620+06	0.89540+09	0.59130+13
0.060000	-0.35770-13	0.97410-15	-0.65210-11	0.41440-07	0.24890-03	0.20820-01	0.74090+04	0.36180+08	0.16180+12	0.65290+15
0.070000	0.73110-14	0.29730-12	0.14530-08	0.66790-05	0.28680-01	0.11420+03	0.41700+06	0.13790+10	0.40430+13	0.10200+17
0.080000	0.24610-14	0.21140-10	0.78610-07	0.87000+00	0.25380+04	0.11420+03	0.66560+07	0.15340+11	0.29980+14	0.46440+17
0.090000	0.18380-12	0.57060-09	0.16660-05	0.44830-02	0.11000+02	0.24190+04	0.46690+08	0.76230+11	0.98450+14	0.84900+17
0.100000	0.30720-11	0.78350-08	0.18410-04	0.39470-01	0.76050+02	0.12890+06	0.18620+09	0.21590+12	0.17560+15	0.53530+17

Table D.2 -(b) Ratio of maximum value in series calculation and final value as shown in Table D.2 -(a)

TIME \ l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0000001	0.260+10	0.160+07	0.940+05	0.120+05	0.220+04	0.560+03	0.180+03	0.680+02	0.300+02	0.150+02
0.0000002	0.270+10	0.790+13	0.240+12	0.150+11	0.140+10	0.180+09	0.280+08	0.540+07	0.120+07	0.300+06
0.0000003	0.270+10	0.470+20	0.940+18	0.390+17	0.250+16	0.210+15	0.220+14	0.280+13	0.410+12	0.690+11
0.0000004	0.270+10	0.290+27	0.440+25	0.140+24	0.650+22	0.410+21	0.330+20	0.310+19	0.340+18	0.430+17
0.0000005	0.270+10	0.520+32	0.310+32	0.550+30	0.220+29	0.110+28	0.690+26	0.520+25	0.460+24	0.470+23
0.0000006	0.270+10	0.500+32	0.430+31	0.380+32	0.870+31	0.140+32	0.310+32	0.480+31	0.770+30	0.720+29
0.0000007	0.270+10	0.200+32	0.180+32	0.160+32	0.160+32	0.670+31	0.670+31	0.820+31	0.720+31	0.100+32
0.0000008	0.280+10	0.790+32	0.190+32	0.860+31	0.140+32	0.110+32	0.630+31	0.800+31	0.730+31	0.530+31
0.0000009	0.280+10	0.700+32	0.180+32	0.180+32	0.440+32	0.640+32	0.340+32	0.150+32	0.330+32	0.920+32
0.0000010	0.280+10	0.800+32	0.180+32	0.930+31	0.130+32	0.150+32	0.290+32	0.110+32	0.110+32	0.610+31
0.0000020	0.300+10	0.120+33	0.850+32	0.460+32	0.130+32	0.880+32	0.760+32	0.830+32	0.190+33	0.700+32
0.0000030	0.300+10	0.570+32	0.260+33	0.490+33	0.700+32	0.190+32	0.130+32	0.290+32	0.210+32	0.850+31
0.0000040	0.310+10	0.540+32	0.130+33	0.250+33	0.260+33	0.200+32	0.450+32	0.520+32	0.340+32	0.260+32
0.0000050	0.330+10	0.320+32	0.930+32	0.250+32	0.130+34	0.150+32	0.140+33	0.260+34	0.260+34	0.130+32
0.0000060	0.330+10	0.300+32	0.420+32	0.430+32	0.430+32	0.830+33	0.610+32	0.480+32	0.100+32	0.240+33
0.0000070	0.340+10	0.730+32	0.830+32	0.340+32	0.330+32	0.170+32	0.870+31	0.930+31	0.100+32	0.480+31
0.0000080	0.330+10	0.320+32	0.730+32	0.210+32	0.490+32	0.890+32	0.130+32	0.190+32	0.600+33	0.590+31
0.0000090	0.340+10	0.420+33	0.480+33	0.220+32	0.120+32	0.120+32	0.960+31	0.100+32	0.250+32	0.840+31
0.0000100	0.350+10	0.320+32	0.340+32	0.420+32	0.760+32	0.200+32	0.440+32	0.370+32	0.510+32	0.110+32
0.0000200	0.420+10	0.790+32	0.870+33	0.350+32	0.180+33	0.330+32	0.120+32	0.230+32	0.180+32	0.190+32
0.0000300	0.440+10	0.130+33	0.230+33	0.190+34	0.200+32	0.190+32	0.310+32	0.180+32	0.510+32	0.180+32
0.0000400	0.490+10	0.460+32	0.670+32	0.140+33	0.880+32	0.170+32	0.260+32	0.120+32	0.270+32	0.150+32
0.0000500	0.530+10	0.160+33	0.930+33	0.500+32	0.640+32	0.320+32	0.200+33	0.230+32	0.160+33	0.240+32
0.0000600	0.540+10	0.110+33	0.450+32	0.140+33	0.530+32	0.240+32	0.240+32	0.120+32	0.120+32	0.120+32
0.0000700	0.650+10	0.510+33	0.630+32	0.460+33	0.350+32	0.420+32	0.430+32	0.210+32	0.360+32	0.220+32
0.0000800	0.590+10	0.910+32	0.160+33	0.690+32	0.790+32	0.420+32	0.270+32	0.340+32	0.210+32	0.190+32
0.0000900	0.750+10	0.690+32	0.550+32	0.600+32	0.120+33	0.290+34	0.100+33	0.810+32	0.470+32	0.250+32
0.0001000	0.710+10	0.910+32	0.660+32	0.230+32	0.130+33	0.360+32	0.480+32	0.470+32	0.150+33	0.390+32
0.0002000	0.980+10	0.100+33	0.440+32	0.390+32	0.180+33	0.390+32	0.130+33	0.700+32	0.280+32	0.140+33
0.0003000	1.10+11	0.610+32	0.940+32	0.610+32	0.120+33	0.640+32	0.230+33	0.300+32	0.260+32	0.480+32
0.0004000	0.240+11	0.470+33	0.790+33	0.750+32	0.110+33	0.520+32	0.690+32	0.730+32	0.960+32	0.810+32
0.0005000	0.240+11	0.680+33	0.630+33	0.990+32	0.140+33	0.740+32	0.510+32	0.780+33	0.590+33	0.190+33
0.0006000	0.270+11	0.210+33	0.970+33	0.330+34	0.730+32	0.170+33	0.930+32	0.580+32	0.910+32	0.710+33
0.0007000	0.610+11	0.920+32	0.380+33	0.140+33	0.140+33	0.330+32	0.430+32	0.520+32	0.620+32	0.750+32
0.0008000	0.810+11	0.190+33	0.120+34	0.870+32	0.990+32	0.470+32	0.300+32	0.400+32	0.290+32	0.310+32
0.0009000	0.680+11	0.950+33	0.170+33	0.120+33	0.260+33	0.780+32	0.460+33	0.340+32	0.290+33	0.180+33
0.0010000	0.950+11	0.600+33	0.310+33	0.110+33	0.380+32	0.220+33	0.470+32	0.170+33	0.820+32	0.770+32
0.0020000	0.350+12	0.740+35	0.160+33	0.210+33	0.500+32	0.180+34	0.320+32	0.750+32	0.630+32	0.110+33
0.0030000	0.190+13	0.330+33	0.110+33	0.210+31	0.780+29	0.410+28	0.280+27	0.230+26	0.240+25	0.280+24
0.0040000	0.800+13	0.850+25	0.130+24	0.440+22	0.230+21	0.170+20	0.160+19	0.190+18	0.280+17	0.480+16
0.0050000	0.350+14	0.390+20	0.780+18	0.330+17	0.220+16	0.210+15	0.260+14	0.410+13	0.820+12	0.200+12
0.0060000	0.350+14	0.110+17	0.260+15	0.140+14	0.120+13	0.140+12	0.220+11	0.440+10	0.110+10	0.370+09
0.0070000	0.170+15	0.340+14	0.960+12	0.580+11	0.580+10	0.820+09	0.160+09	0.420+08	0.150+08	0.640+07
0.0080000	0.510+15	0.450+12	0.150+11	0.100+11	0.120+10	0.100+09	0.490+07	0.160+07	0.710+06	0.460+06
0.0090000	0.680+13	0.160+11	0.560+09	0.470+08	0.630+07	0.130+07	0.360+06	0.150+06	0.890+05	0.920+05
0.0100000	0.400+12	0.110+10	0.430+08	0.390+07	0.610+06	0.150+06	0.520+05	0.260+05	0.230+05	0.600+05

Table D. 2 -(c) Necessary terms in series calculation as shown in Table D. 2 -(a)

TIME \ l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0000001	3507	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000002	2515	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000003	2070	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000004	1803	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000005	1620	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000006	1484	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000007	1378	3731	3818	3892	3960	4001	4001	4001	4001	4001
0.0000008	1293	3515	3572	3629	3701	3755	3801	3856	3904	3945
0.0000009	1222	3312	3367	3434	3508	3570	3611	3646	3706	3766
0.0000010	1161	3144	3195	3248	3310	3364	3423	3484	3499	3531
0.0000020	833	2229	2278	2316	2342	2400	2433	2466	2506	2525
0.0000030	685	1814	1871	1913	1928	1946	1971	2005	2027	2044
0.0000040	597	1571	1615	1652	1680	1687	1717	1741	1760	1779
0.0000050	537	1402	1443	1463	1515	1507	1544	1585	1604	1587
0.0000060	492	1279	1312	1338	1361	1401	1405	1422	1430	1467
0.0000070	457	1190	1219	1259	1259	1275	1307	1289	1324	1336
0.0000080	428	1109	1140	1155	1180	1202	1209	1227	1261	1251
0.0000090	405	1060	1085	1090	1106	1123	1138	1154	1173	1181
0.0000100	385	992	1016	1037	1058	1068	1087	1101	1117	1122
0.0000200	277	706	731	734	752	758	766	778	787	797
0.0000300	228	579	594	612	609	618	628	635	646	651
0.0000400	199	499	511	524	531	536	544	550	559	564
0.0000500	179	450	464	467	475	481	492	494	504	506
0.0000600	164	410	418	428	434	439	445	450	455	461
0.0000700	153	383	388	399	401	408	413	418	424	428
0.0000800	143	355	365	370	377	382	386	392	396	400
0.0000900	136	335	342	349	356	367	367	371	375	378
0.0001000	129	318	325	330	338	341	347	351	357	360
0.0002000	93	226	231	235	241	243	247	250	252	257
0.0003000	77	185	190	193	197	199	203	204	207	209
0.0004000	68	162	167	168	171	173	176	178	180	182
0.0005000	61	146	149	151	154	155	157	161	166	164
0.0006000	56	133	137	140	140	143	144	146	148	151
0.0007000	53	123	126	128	130	131	133	135	137	139
0.0008000	50	116	119	120	122	123	125	127	128	130
0.0009000	47	110	112	113	116	117	119	120	122	123
0.0010000	45	104	106	108	109	112	112	114	115	117
0.0020000	33	77	76	78	78	81	80	82	83	84
0.0030000	28	62	63	63	63	63	63	63	63	63
0.0040000	25	49	49	50	50	50	50	50	50	50
0.0050000	23	41	41	42	42	42	42	42	42	43
0.0060000	21	36	36	36	36	37	37	37	37	38
0.0070000	20	32	32	32	33	33	33	33	34	34
0.0080000	19	29	29	30	30	30	30	30	31	31
0.0090000	18	27	27	27	28	28	28	28	29	29
0.0100000	17	25	25	26	26	26	26	27	27	28