

JAERI - M

83-144

三次元中性子輸送問題を解くガレルキン型
の二重有限要素法アルゴリズム

1983年9月

藤村統一郎・松村 正弘^{*}・中原 康明

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合せは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。なお、このほかに財団法人原子力広済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1983

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷株

三次元中性子輸送問題を解くガレルキン型の二重有限要素法アルゴリズム

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部
藤村統一郎・松村正弘^{*}・中原康明

(1983年8月10日 受理)

本稿は、三次元幾何形状における定常、多群中性子輸送問題に対する二重有限要素法に基づくガレルキン法のアルゴリズムとその特徴について詳細に述べたものである。

定式化においては、現実の原子炉の形状をできる限り正確に模擬するため、空間要素として三角柱要素と四角柱要素の組合せを採用すると共に、中性子束の角度分布を滑らかに表現するため、角度空間において重なりをもつ六つの基底を採用している。本解法の特徴は境界条件を陽に記述すること、および平面の層に沿って次々と節点を走査する反復法にあり、その収束加速法の新しい提案もなされる。

この解法に基づく計算コードが開発され、その概要についての解説も示される。また、今迄に実施した実在規模の問題を含む計算の経験に基づき、差分法のコードとの比較をもとに二重有限要素解の特徴が示される。

* 株式会社 アイ・エス・エル

An Algorithm for Solving Three-Dimensional Neutron Transport
Problems by the Galerkin-Type Double Finite Element Method

Toichiro FUJIMURA, Masahiro MATSUMURA*
and Yasuaki NAKAHARA

Department of Reactor Engineering,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received August 10, 1983)

This report describes in detail an algorithm for solving static multi-group neutron transport problems in the three-dimensional geometry by the Galerkin method based on a double finite element method (DFEM) and its characteristics.

The formulation involves the use of a combination of triangular and quadrangular prism elements to simulate the practical reactor configurations as accurately as possible, and six bases with coupling in the angular space to represent the angular distribution of the neutron flux smoothly. The present method is characterized by the explicit representation of boundary condition, and by the iteration which sweeps the node points successively through planar layers. New proposition is given to accelerate the convergence.

A computer code has been written on the basis of the method mentioned above. The information on the program structure is given also. In addition, on the basis of the experiences in the calculations including real scale problems, the characteristics of the DFEM solutions are shown in comparison with other finite difference codes.

Keywords: Computational Algorithm, Neutron Transport, Three-Dimensional Geometry, Galerkin Method, Double Finite Element Method, Finite Element Method, Prism Element, Boundary Condition, Plane Iteration, Convergence Acceleration, Computer Code, Finite Difference Code

* I.S.L. Co. Ltd.

目 次

1. はじめに.....	1
2. 数値解法.....	3
2.1 二重有限要素法.....	4
2.1.1 空間の基底関数.....	4
2.1.2 角度の基底関数.....	5
2.2 ガレルキン法.....	8
2.2.1 体系方程式.....	8
2.2.2 境界条件.....	9
2.3 反復解法.....	12
2.3.1 平面反復法.....	12
2.3.2 収束加速法.....	12
3. 計算コードの概略.....	16
3.1 計算手順.....	16
3.2 入力データの取扱い法.....	31
3.2.1 中性子断面積.....	31
3.2.2 要素分割.....	31
3.2.3 外部中性子源.....	31
3.2.4 繼続計算法.....	32
3.2.5 出力の編集.....	33
4. アルゴリズムの特徴と問題点の検討.....	35
謝 辞.....	38
文 献.....	39

Contents

1.	Introduction	1
2.	Numerical methods	3
2.1	A double finite element method	4
2.1.1	Spatial basis functions	4
2.1.2	Angular basis functions	5
2.2	The Galerkin type scheme	8
2.2.1	System equation	8
2.2.2	Boundary conditions	9
2.3	Iterative method	12
2.3.1	Plane iteration	12
2.3.2	Acceleration of convergence	12
3.	Main feature of the computer code	16
3.1	Computational flow	16
3.2	Input data treatment	31
3.2.1	Neutron cross sections	31
3.2.2	Partitioning into elements	31
3.2.3	External sources	31
3.2.4	Restarting procedure	32
3.2.5	Edition of output	33
4.	Discussions on characteristic features of the algorithm	35
	Acknowledgements	38
	References	39

1. はじめに

最近、原子炉その他の核燃料施設の安全性の基準が厳しくなり、施設内の各種の放射線の挙動をできる限り正確に把握しようという機運が高まりつつある。従来、このような場合には、二次元輸送計算や三次元拡散計算で充分だとされていたが、特に再処理施設や核燃料貯蔵庫、輸送容器といった複雑な形状を解析する場合には、三次元輸送計算が必要となってくる。

また一方では、発電炉の性能向上、運転時の安全性向上や運転コスト低減の上からも精度のよい三次元炉心解析に対する要求が高まってきている。従来はコンピュータの性能上の制約から実用的な三次元計算の実現は困難視されてきたが、コンピュータのハード面での急速な進歩と意欲的な新世代コンピュータの開発計画の展開に伴い、三次元炉心シミュレーションへの関心も大きくなりつつある。このため、近年様々な解法に基づく三次元輸送コードの開発が活発になってきた。^{1)～4)}しかし、外部中性子源のみを対象とした遮蔽問題を除くと、三次元輸送計算はほとんどモンテカルロコードで行われているのが現状である。

一般に、中性子核分裂源の存在する体系を扱う固有値問題においては、モンテカルロコード¹⁾のほかに差分法（Finite Difference Method, FDM）に基づく S_n コード²⁾が使われる。こゝに、前者は計算時間がかかり、統計誤差を伴うという欠点を有するが、複雑な形状を容易に扱えるという長所を有している。また、後者は規則正しい形状しか扱いにくく、ray effect を生じやすい⁵⁾⁶⁾という欠点を有するかたわら、計算時間が短かくかつ決定論的な解を与えるという長所を有している。

有限要素法（Finite Element Method, FEM）は元来複雑な形状の構造物の応力解析などに使われ成功を収めてきたものであるが、⁷⁾放射線輸送の分野にも広く応用されるようになった。^{6)8)～15)}規則正しい形状をした体系を解く場合、この方法は差分法に比べて幾分計算時間を要するが、複雑な形状が扱い易く、角度変数にこの方法を応用すると、ray effect を和らげられることが知られている。⁶⁾⁸⁾¹⁰⁾従って、三次元輸送問題の空間変数と角度変数の双方に FEM を適用する二重有限要素法（Double FEM, DFEM）を用いれば、先に述べたモンテカルロ法と S_n 法の双方の長所が活かせることになる。

DFEMによる定式化は、重み付き残差法によるものと変分法（variational method）によるものとの二つに大別できる。前者は、基底関数を重みとして用いるガレルキン法に代表されるよう⁸⁾⁹⁾¹³⁾¹⁶⁾に、定式化が非常に簡単である。⁸⁾⁹⁾¹³⁾¹⁶⁾しかし、基底関数自身が境界条件を満たさないとき、節点値でこれらを規定しなければならないし、体系の行列方程式が漏れの項のため非対称になるという煩雑さを伴なう。一方、parity function を用い、その汎関数の停留点を求める変分法は、定式化は危険であるが、境界条件が汎関数に自動的に組み込まれ、体系行列方程式も対称となるため数値的に解き易い。^{6)10)～12)15)17)18)}以上の理由から、まず定式化の簡単なガレルキン法に基づいた DFEM の、三次元中性子輸送問題への応用を試みた。変分法による応用は別稿に譲るとして、本稿ではガレルキン法による応用を主に述べる。

こゝでは、現実的見地から多角柱状の炉体系を対象とし、それを三角柱と四角柱要素に分割

する。この扱いはすでに開発されているFEMによる三次元拡散コードFEM-BABEL¹⁴⁾と同じであり、そこで使われている一次要素を採用する。また、角度領域に関してはさしあたって六つの方向を考慮する。これはKaperら¹⁰⁾が二次元等方散乱源問題に対して用いた三次要素に対し、三次元非等方散乱源問題が扱えるよう修正を施したものである。このとき、中性子束はこれらの基底関数の積の一次結合で近似され、ガレルキン法を応用した後得られる体系方程式に境界条件を適用して解かれる。

本稿はこれらの定式化の詳細なまとめを行うとともに、開発された計算コードの概要について述べる。また、このコードを検証するために行なったいくつかの計算における経験に基づいて、他の差分法のコード^{19) 20)}と対比しつつ、DFEM解の特徴について議論する。

2. 数 值 解 法

本稿では定常状態における三次元多群中性子輸送方程式を扱うが、その一般形は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & Q \nabla \phi^g (\mathbf{r}, \Omega) + \sigma_t^g (\mathbf{r}) \phi^g (\mathbf{r}, \Omega) \\
 & = \sum_{g'=1}^G \int_S \sum_{n=0}^N \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right) P_n(\mu_0) \sigma_{sn}^{g' \rightarrow g} (\mathbf{r}) \phi^{g'} (\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' \\
 & + \frac{\chi^g}{\lambda} \sum_{g'=1}^G \nu \sigma_f^{g'} (\mathbf{r}) \phi^{g'} (\mathbf{r}) + Q^g (\mathbf{r}, \Omega) \quad (g=1 \sim G).
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここに、各記号の意味は下記による。

\mathbf{r}	空間変数
Ω	角度変数
S	全角度空間 (4πステラジアン)
g	エネルギー群の指數
G	全エネルギー群数
ϕ^g	角度中性子束
ϕ^g	中性子束
Q^g	外部中性子源
σ_t^g	巨視全断面積
$\sigma_{sn}^{g' \rightarrow g}$	巨視散乱断面積
$\sigma_f^{g'}$	巨視核分裂断面積
ν	一回の核分裂で放出される中性子の平均個数 (2.5)
χ^g	核分裂スペクトル
μ_0	散乱角
n	散乱の異方性を表わすルジャンドル展開の次数
N	ルジャンドル展開の打切り次数(3)
P_n	ルジャンドルの多項式
λ	中性子実効増倍率

また、(1)式では $Q^g = 0$ ($g=1 \sim G$) (固有値問題) または $\sigma_f^g = 0$ ($g=1 \sim G$) (外部中性子問題) とする。

次に、境界条件としては最もありふれた真空条件と反射条件の二種類を考える。即ち、

$$\begin{aligned}
 \phi^g (\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \quad \text{for } \mathbf{r} \in \Gamma_v, \Omega \in S_- \\
 \phi^g (\mathbf{r}, \Omega') &= \phi^g (\mathbf{r}, \Omega'') \quad \text{for } \mathbf{r} \in \Gamma_r, \Omega' = \Omega'' - 2(\Omega'' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

ここに、 Γ_v は真空境界、 Γ_r は反射境界、 S_- は S のうちの入射方向の全角度、 \mathbf{n} は境界上に立て

られた外向きの法線である。

以下、方程式(1), (2)を解く数値解法について述べる。

2.1 二重有限要素法

DFEMは空間と角度の双方にFEMを適用する方法であり、各々独立に論じることができる。

2.1.1 空間の基底関数

FEMでは基底関数のことを「要素」と呼ぶこともあり、混乱を避けるため、「要素」という語は「空間を分割した透き間」の意に用いることとする。

本稿では取扱う体系の形状として多角柱を想定し、それを底面に平行な平面で切り、各層を三角柱と四角柱の要素に分割する。この様子はFig. 1に示される。先に述べたように、基底関数としてはFEM-BABEL¹⁴⁾で用いられている一次関数を使う。この定義式は次のようになる。

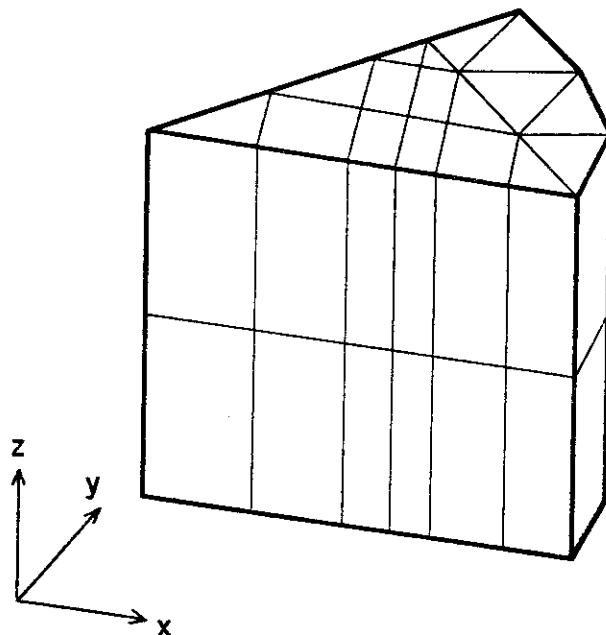


Fig. 1 A Partitioning of a reactor into triangular and quadrangular prism elements

いま、三角柱要素を考え、その節点の座標を (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_1) , (x_3, y_3, z_1) , (x_1, y_1, z_2) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_2) としよう。このとき、

$$J_p = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad (3)$$

かつ

$$\begin{aligned} u_1^p(x, y) &= \{x_2y_3 - x_3y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)\} / J_p, \\ u_2^p(x, y) &= \{x_3y_1 - x_1y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)\} / J_p, \\ u_3^p(x, y) &= \{x_1y_2 - x_2y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)\} / J_p \end{aligned} \quad (4)$$

とすれば、空間の基底関数は着目する要素において

$$\begin{aligned}
 v_n^p(x, y, z) &= \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} u_n^p(x, y) \quad \text{for } n \in \text{bottom}, \\
 &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} u_{n-3}^p(x, y) \quad \text{for } n \in \text{top}
 \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる。

一方、四角柱要素の場合はその八つの節点を $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_1), (x_1, y_2, z_1), (x_1, y_1, z_2), (x_2, y_1, z_2), (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_2, z_2)$ とすると、三角柱要素のときと同様

$$J_b = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^b(x, y) &= (x_2 - x)(y_2 - y)/J_b, \quad u_2^b(x, y) = (x - x_1)(y_2 - y)/J_b, \\
 u_3^b(x, y) &= (x - x_1)(y - y_1)/J_b, \quad u_4^b(x, y) = (x_2 - x)(y - y_1)/J_b,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 u_n^b(x, y, z) &= \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} u_n^b(x, y) \quad \text{for } n \in \text{bottom}, \\
 &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} u_{n-4}^b(x, y) \quad \text{for } n \in \text{top}
 \end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる。

2.1.2 角度の基底関数

本稿では中性子の散乱の非等方性を考慮するので、Kaper^ら¹⁰⁾の与えた基底関数より一般化されたものを考えなければならない。更に、三次元問題を解くためには、角度領域も 4π ステラジアンまで拡張する必要がある。このように、多次元計算を行う場合、自ずから各空間に対する要素の数も制限されてくる。本稿では、当座の処置として全角度空間に対し、六つの基底関数を定義している。以下、Fig. 2 に示された座標系のもとで、これらの新しい基底の構成について述べてみよう。

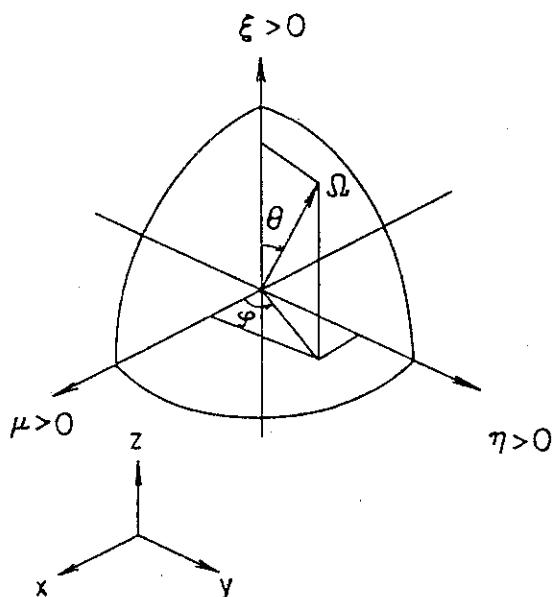


Fig. 2 Angular co-ordinate system ($\mu = \sin\theta\cos\varphi$, $\eta = \sin\theta\sin\varphi$, $\xi = \cos\theta$)

最初に方位角 φ について考える。 φ の全領域 $[0, 2\pi]$ を $h = \pi/2$ の刻みで四等分し、左端の節点 $\varphi_1 = 0$ に対応する基底として

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varphi) &= -\frac{(h-\varphi)^3}{h^3} + \frac{\varphi^3}{h^3} + 2 \frac{(h-\varphi)}{h} - \frac{\varphi}{h} && \text{on } [0, h], \\ &= 0 && \text{on } [h, 3h], \\ &= \frac{(4h-\varphi)^3}{h^3} + \frac{(3h-\varphi)^3}{h^3} - \frac{(4h-\varphi)}{h} - 2 \frac{(3h-\varphi)}{h} && \text{on } [3h, 4h]\end{aligned}\quad (9)$$

を定義する。他の節点 $\varphi_k = (k-1)h$ ($k=2 \sim 4$) に対する基底 λ_k は、Fig. 3 にも見られるように、 λ_1 を h ずつ右へ移動することによって得られる。このとき、 λ_k は周期 2π を持つことに注意する。これらの基底は関係式

$$\lambda_k(0) = \lambda_k(2\pi), \lambda_k(\varphi_{k'}) = \delta_{kk'}, \lambda'_k(\varphi_{k'}) = 0 \quad (k, k' = 1 \sim 4), \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k(\varphi) = 1$$

をみたしている。

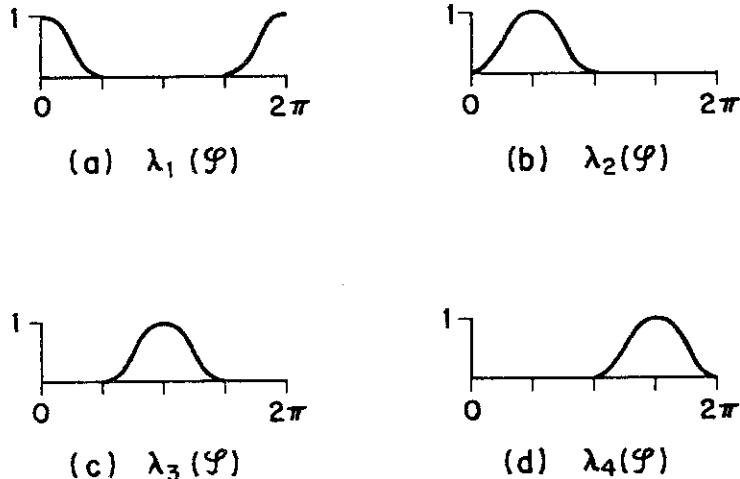


Fig. 3 Four base functions λ_k on the φ -variable

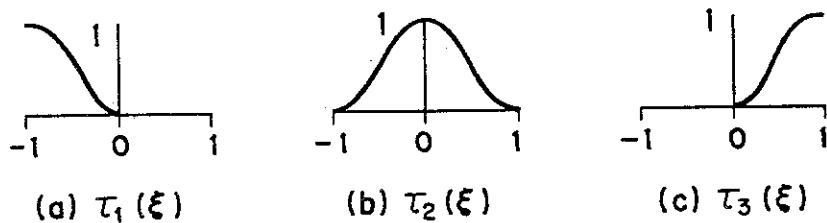
次に天頂角 θ の余弦 $\xi = \cos \theta$ について考える。 ξ の全領域 $[-1, 1]$ を刻み 1 で二等分し、各節点 ξ_l ($l=1 \sim 3$) に対応する基底 τ_l を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\tau_1(\xi) &= \xi^3 + (1+\xi)^3 - 2\xi - (1+\xi) && \text{on } [-1, 0], \\ &= 0 && \text{on } [0, 1], \\ \tau_2(\xi) &= \tau_1(-1-\xi) && \text{on } [-1, 0], \\ &= \tau_1(\xi-1) && \text{on } [0, 1], \\ \tau_3(\xi) &= 0 && \text{on } [-1, 0], \\ &= \tau_1(-\xi) && \text{on } [0, 1].\end{aligned}\quad (11)$$

この基底は Fig. 4 で示されるが、 $\xi_l = l-2$ とおくと、 λ_k と同様に関係式

$$\tau_l(\xi_{l'}) = \delta_{ll'}, \tau'_l(\xi_{l'}) = 0 \quad (l, l' = 1 \sim 3), \quad \sum_{l=1}^3 \tau_l(\xi) = 1 \quad (12)$$

をみたしている。

Fig. 4 Three base functions t_l on the ξ -variable

いま、積 $\lambda_k(\varphi) \tau_l(\xi)$ を考えてみよう。Fig. 2に示されるように Ω を組 (φ, ξ) と同一視して考えると、これらの積は形式的に 12 個の Ω の関数を構成する。従って、これらが基底をなしているとすれば、一般の Ω の関数 ρ は

$$\rho(\Omega) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^3 t_{kl} \lambda_k(\varphi) \tau_l(\xi) \quad (13)$$

と表わせる筈である。しかし、二つの極 $\xi = \pm 1$ で ρ が φ に依存しない一定の値を持つためには

$$t_{kl} = t_l, \quad k=1 \sim 4, \quad l \neq 2 \quad (14)$$

が必要であり、このことから、適切な Ω の基底関数として

$$\chi_1 = \tau_1, \quad \chi_j = \lambda_{j-1} \tau_2 \quad (j=2 \sim 5), \quad \chi_6 = \tau_3 \quad (15)$$

の六つが定義される。Fig. 5に示されるように、 $\chi_j(\Omega)$ は座標に沿った六つの互いに垂直な方向 Ω_j をそれぞれの「支え」の中心に持っている。即ち、

$$\chi_j(\Omega_{j'}) = \delta_{jj'} \quad (j, j' = 1 \sim 6) \quad (16)$$

が成り立っている。

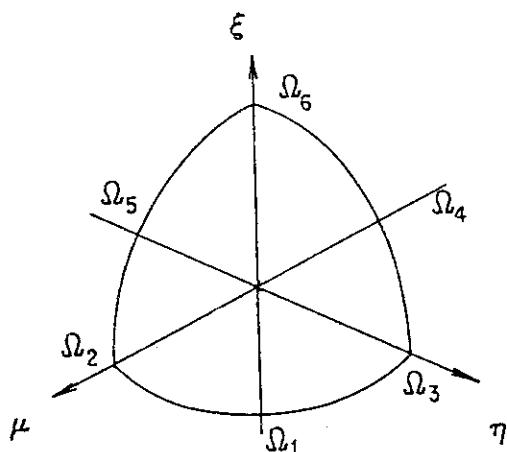


Fig. 5 Six representative directions

2.2 ガレルキン法

本節では、基底関数を用いた中性子束の近似法とガレルキン法^{8) 9) 13)}による体系方程式の導出、およびこの方法に特有な境界条件の設定法について述べる。

2.2.1 体系方程式

(5)式および(8)式で与えた空間の基底関数の要素内の表現を一般化し、 $\phi_i(\mathbf{r})$ ($i=1 \sim I$) と置き換えてみよう。ここに、 $\phi_i(\mathbf{r})$ は、節点 \mathbf{r}_i において 1、他の節点において 0 となる区分的な一次関数であり、 I は炉体系全体の節点数である。また、角度の基底関数を $\chi_j(\Omega)$ ($j=1 \sim J$) ($J=6$) とすれば、第 g 群の角度中性子束は

$$\phi^g(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J c_{i'j'}^g \phi_{i'}(\mathbf{r}) \chi_{j'}(\Omega) \quad (17)$$

と近似できる。こうすると、節点 i 、方向 j における角度中性子束が c_{ij}^g で与えられるほか、任意の点 (\mathbf{r}, Ω) における値が与えられたことになる。

次に、(17)式をもとの(1)式に代入したとしよう。

この式は近似的に成り立つものであり、ガレルキン法では基底関数を重みとして、その残差 $R^g(\mathbf{r}, \Omega)$ が

$$\int_D \frac{1}{4\pi} \int_S R^g \phi_i \chi_j d\mathbf{r} d\Omega = 0 \quad (18)$$

となるよう節点値 c_{ij}^g を定める。ここに、 D は炉体系全体の領域を示しており、(18)式より得られる体系方程式は $I \times J$ 次の代数方程式

$$\sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J A_{ij}^{g'} c_{i'j'}^g = b_{ij}^g \quad (i=1 \sim I, j=1 \sim J) \quad (19)$$

である。このとき、内積を変数に依存して

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \int_D \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle \chi(\Omega) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_S \chi(\Omega) d\Omega \quad (20)$$

で定義すれば、各々の係数は

$$\begin{aligned} A_{ij}^{g'} &= \left\langle \phi_i \frac{\partial \phi_{i'}}{\partial x} \right\rangle \left\langle \mu \chi_j \chi_{j'} \right\rangle + \left\langle \phi_i \frac{\partial \phi_{i'}}{\partial y} \right\rangle \left\langle \eta \chi_j \chi_{j'} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \phi_i \frac{\partial \phi_{i'}}{\partial z} \right\rangle \left\langle \xi \chi_j \chi_{j'} \right\rangle + \left\langle \sigma_t^g \phi_i \phi_{i'} \right\rangle \left\langle \chi_j \chi_{j'} \right\rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} b_{ij}^g &= \sum_{g'=1}^G \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J \left[\sum_{n=0}^N (2n+1) \left\langle \sigma_{sn}^{g' \rightarrow g} \phi_i \phi_{i'} \right\rangle \times \right. \\ &\quad \left. \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\left\langle R_n^k \chi_j \right\rangle \left\langle R_n^k \chi_{j'} \right\rangle + \left\langle S_n^k \chi_j \right\rangle \left\langle S_n^k \chi_{j'} \right\rangle \right) \right\} \right] c_{i'j'}^{g'}, \\ &\quad + \sum_{g'=1}^G \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J \frac{\chi^g}{\lambda} \left\langle \nu \sigma_f^{g'} \phi_i \phi_{i'} \right\rangle \left\langle \chi_j \right\rangle \left\langle \chi_{j'} \right\rangle c_{i'j'}^{g'}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$+ \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J \langle \phi_i \phi_{i'} \rangle \langle \chi_j \chi_{j'} \rangle c_{ij'}^g$$

で与えられる。ここに、球面調和関数は

$$R_n^k(\Omega) = \sqrt{\frac{(2-\delta_{k0})(n-k)!}{(n+k)!}} P_n^k(\mu) \cos k\varphi, \quad (23)$$

$$S_n^k(\Omega) = \sqrt{\frac{(2-\delta_{k0})(n-k)!}{(n+k)!}} P_n^k(\mu) \sin k\varphi,$$

ルジャンドルの陪関数は

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{d\mu^k} \left\{ \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \right\} \quad (0 \leq k \leq n) \quad (24)$$

で与えられているものとする。

2.2.2 境界条件

2.1節で与えられた基底関数は、解こうとする問題とは独立に定義された。即ち、基底自身は境界条件を満たしていない。しかし、定義から、体系内では変数 r と θ に対して連続であることが分る。^{9) 13)} 本稿では、(2)式に示されたように、真空条件と反射条件について節点値 c_{ij}^g を用いて規定する方法を示そう。

準備として、炉体系の境界 $\partial D = \Gamma_v + \Gamma_r$ の上の節点での法線方向 $\mathbf{n} = (\varphi, \xi)$ の与え方を考える。ここに、 Γ_v と Γ_r はそれぞれ真空および反射境界を示すものとする。Fig. 6 を見ると分るように、底面、上面および前面の法線方向は容易に決まる。これに対し、後面は一般に曲面を模擬するので任意の方向の法線を考えなければならないが、現在採用している角度の基底関数 $\chi_j(\Omega)$ との関連から

$$\mathbf{n} = \{ (k-1)\pi/4, 0 \} \quad (k=1 \sim 5) \quad (25)$$

の五つの方向のうち最も近いもので後面の法線の近似を行うことにする。

次に、節点値による境界条件の記述法を代表的な例でみてみよう。Fig. 7は節点 i が上面にあり、その法線が Ω_6 の方向と一致することを示している。このとき、もし上面が真空であれば中性子の入ってくる方向 Ω_1 の係数は零である。従って、

$$c_{i1} = 0 \quad (26)$$

と記述できる。一般に境界条件はエネルギー群に無関係なので、指数 g は略してある。またこの境界が反射的であれば、入ってくる方向と出していく方向の係数は等しいから

$$c_{i1} = c_{i6} \quad (27)$$

と記述できる。

一方、後面の場合は上面に比べ複雑になる。Fig. 8で円柱状炉心の $1/8$ を模擬した形状を考えてみよう。前面と後面左側部分のなす角は 45° ($\pi/4$ ラジアン) となり、節点 i は平面 $x=y$ の上にあって、 $\mathbf{n} = (3\pi/4, 0)$ である。即ち Ω_2 と Ω_5 が「入ってくる方向」であり、 Ω_3 と Ω_4 がそれぞれに対応した「出ていく方向」である。従って、この面が真空であれば

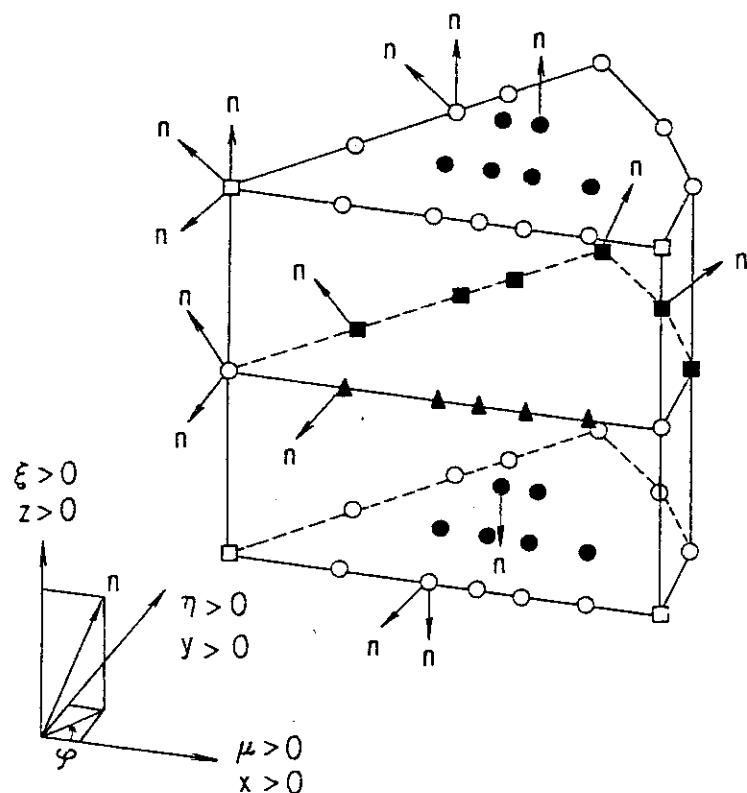


Fig. 6 Normal directions for a node arrangement. Dots show the nodes on the top and bottom boundaries. Triangles and squares show the nodes on the front and back boundaries, respectively. White circles show the nodes on the edge or vertex.

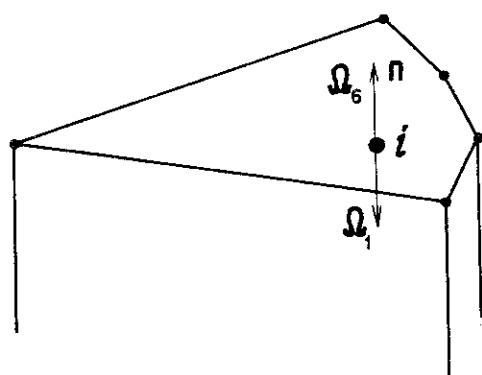


Fig. 7 Normal directions of the top boundary

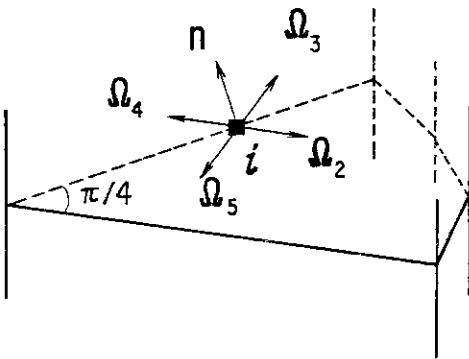


Fig. 8 Normal directions for a node on the back boundary

$$c_{i2} = c_{i5} = 0, \quad (28)$$

また反射的であれば

$$c_{i2} = c_{i3}, \quad c_{i4} = c_{i5} \quad (29)$$

と書けることが分る。

以下、Table 1 に真空および反射条件の各境界での記述法を整理しておく。

Table 1 Description of boundary conditions for a node i

Boundary	Normal n (φ, ξ)	Vacuum	Reflective
Bottom	(—, -1)	$c_{i6}=0$	$c_{i1}=c_{i6}$
Back (Right)	(0, 0)	$c_{i4}=0$	$c_{i2}=c_{i4}$
Back	($\pi/4$, 0)	$c_{i4}=c_{i5}=0$	$c_{i2}=c_{i5}, c_{i3}=c_{i4}$
Back	($\pi/2$, 0)	$c_{i5}=0$	$c_{i3}=c_{i5}$
Back	($3\pi/4$, 0)	$c_{i2}=c_{i5}=0$	$c_{i2}=c_{i3}, c_{i4}=c_{i5}$
Back (Left)	($-\pi$, 0)	$c_{i2}=0$	$c_{i2}=c_{i4}$
Front	($-3\pi/2$, -1)	$c_{i3}=0$	$c_{i3}=c_{i5}$
Top	(—, 1)	$c_{i1}=0$	$c_{i1}=c_{i6}$

上に述べた境界条件の記述法の妥当性については後の章で詳細に検討されるので、ここではこれらと体系方程式(19)との関係について論じよう。方程式(19)は、エネルギー群を固定して考えると、 $I \cdot J$ 個の未知数 c_{ij}^g に対し $I \cdot J$ 個の方程式をもつてるので解くことはできるが、その解は境

界条件を満たしていない。従って、本稿では次のような処置を施す。

まず真空条件の式²⁶を考える。これは c_{i1} に関する式なので、(19式の対応する $\{(i-1) \times J + 1\}$ 番目の式を²⁶式で置き換える。また、反射条件の式²⁷のときは、 c_{i1} と c_{i6} の式になっているが、やはり $\{(i-1) \times J + 1\}$ 番目の式を置き換える。これは、 $\{(i-1) \times J + 6\}$ 番目の式と置き換えて誤りではない。次に²⁸式のように二つの式からなるときを考える。このときは c_{i2} と c_{i5} に対応する式を置き換えればよい。また²⁹式のような場合には、角度の指数の若い方に注目し、 c_{i2} と c_{i4} に対応する所を置き換える。

これまで、Fig. 7 や Fig. 8 のように、節点 i が境界面の内部にある場合についてであった。ところで節点が二つの境界面に含まれる場合、どちらの点とみなすかの問題が起る。我々の数値実験の結果、このような場合に一方の条件を無視すると、中性子束分布に不合理なゆがみをもたらすことが分ったので、双方の条件を考慮することにした。同様に、体系の角の点のように三つの境界面に含まれる場合は、三方の条件を考慮する。この様子は Fig. 6 にも示されている。

体系方程式¹⁹を見ると、1つの節点について六つの方程式があることが分る。もし、節点が角の点であっても、一方の境界について最大二つの式を置き換えるだけであるから、三方の境界について置き換えが可能である。従って、(19式の同じ式を二度置き換えることの無いように注意さえすればよい。次節以降は、この新しく置き換えられた体系方程式

$$\sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J A'_{ij} {}^{g'}_{i'j'} C'_{i'j'} = b'_{ij} \quad (i=1 \sim I, j=1 \sim J) \quad (30)$$

を考察の対象にしよう。元の式¹⁹と同様、この式も漏れの項のため非対称であり、数値解法上様々な困難が伴う。

2.3 反復解法

多群中性子輸送方程式(1)の数値解法を概観すると、通常の差分法のコード²⁰⁾と同様、外側反復と内側反復から成り立っている。以下、これらの詳細と収束加速法を記述しよう。

2.3.1 平面反復法

各群の体系方程式³⁰を解く内側反復法は、Fig. 1 および 6 に示されるように、多角柱の形状において節点が xy 平面に平行な平面に揃えて取られているため、下方の平面から節点値を決めていく「平面反復法」に基づいている。この方法は FEM-BABEL¹⁴⁾ で使われているものであり、同形の三次元形状を採用した本コードでも使用される。各平面内の節点値は、平面内を節点番号順に sweep し、次に逆順に sweep する back and forth SOR 法によって求める。

2.3.2 収束加速法

加速法の立場で SOR 法を考える場合、二つのことが思い浮ぶ。一つは加速因子 ω の決め方である。現時点では parameter survey がゆき届いていないので標準値を決めるに至っていないが、およそ 0.6 くらいでうまく例が多い。本コードでは入力で与えられる。いま一つは ω を与えた後の適応的加速法^{19) 21)} である。³⁰式が非対称方程式のため、その有効性が保証されず、現在は

back and forth SOR 法のままである。

粗メッシュ再釣合法^{14) 20)}は次の形で書くのが分り易い。いま、第 g 群の体系方程式(30)に対応する中性子束の方程式を

$$\frac{\mathbf{H}_{(I,I)} \vec{\phi}}{(I,I) \cdot (I,1)} = \mathbf{s}_{(I,1)} \quad (31)$$

としよう。ここに、方程式の次数は I であり、群の指数は省かれている。(31)式の節点 j における近似解を $\hat{\phi}_j$ とし、第 l 粗メッシュ C_l における修正因子を f_l とすれば(31)式は

$$\sum_{l=1}^M \sum_{j \in C_l} h_{ij} (\hat{\phi}_j f_l) = s_i \quad (i=1 \sim I) \quad (32)$$

または

$$\sum_{l=1}^M \mathbf{H}_{k,l} (\hat{\phi}_l f_l) = \mathbf{s}_k \quad (k=1 \sim M) \quad (33)$$

$$(n_k, n_l) \quad (n_l, 1) \quad (n_k, 1)$$

と書ける。ここに、 $\hat{\phi}_l$ は近似値 ϕ_j を成分とする n_l 次ベクトルであり、M は全粗メッシュの数である。

最も簡単な公式は粗メッシュごとに(32)式の和をとることによって得られる。⁺ 即ち、

$$\sum_{l=1}^M \left(\sum_{i \in C_k} \sum_{j \in C_l} h_{ij} \hat{\phi}_j \right) f_l = \sum_{i \in C_k} s_i \quad (k=1 \sim M) \quad (34)$$

である。これに対し、FEM-BABEL¹⁴⁾では重み ϕ_i をかけて

$$\sum_{l=1}^M \left(\sum_{i \in C_k} \sum_{j \in C_l} \hat{\phi}_i h_{ij} \hat{\phi}_j \right) f_l = \sum_{i \in C_k} \hat{\phi}_i s_i \quad (k=1 \sim M) \quad (35)$$

または

$$\sum_{l=1}^M (\hat{\phi}_k^T \mathbf{H}_{k,l} \hat{\phi}_l) f_l = \hat{\phi}_k^T \mathbf{s}_k \quad (k=1 \sim M) \quad (36)$$

としている。 f_l は(36)式より得られるので、各点の全中性子束と角度中性子束はそれぞれ $\hat{\phi}_i \left(\sum_{i \in C_l} f_l \right)$, $c_{ij} \left(\sum_{i \in C_l} f_l \right)$ ($j=1 \sim J$) で修正される。内側反復の終期においては f_l は 1 に収束する。

ところでこれらの方法をみると、反復終期において二つ以上の粗メッシュに属する節点では「過修正」の恐れがあることが分る。従って、 w_j を節点 j を含む粗メッシュの数とするとき

$$\sum_{l=1}^M \left(\sum_{i \in C_k} \sum_{j \in C_l} \hat{\phi}_i h_{ij} \hat{\phi}_j \frac{1}{w_j} \right) f_l = \sum_{i \in C_k} \hat{\phi}_i s_i \quad (k=1 \sim M) \quad (37)$$

とすれば反復終期においても適用できる。このときの修正は $\hat{\phi}_i \left(\sum_{i \in C_l} \frac{f_l}{w_i} \right)$, $c_{ij} \left(\sum_{i \in C_l} \frac{f_l}{w_i} \right)$

($j=1 \sim J$) とする。また、(35)式のようにすべての $\hat{\phi}_i$ を重みとして用いるのではなく、例えは各粗メッシュの内部に

$$\max_{i \in C_k} \hat{\phi}_i = \hat{\phi}_{i_0} \quad (38)$$

⁺) 日本原子力学会、昭和 50 年年会予稿集 A45 東京、4月 1-3 日、1975

なる i_0 を選んで

$$\sum_{j \in C_l} \left(\sum_{j \in C_l} \frac{h_{i_0 j} \hat{\phi}_j}{w_j} \right) = f_l = s_{i_0} \quad (39)$$

とすれば計算も簡単になる。これらの提案はやがて本コードにも採用される予定である。

外側反復が必要となるのは固有値問題の場合である。このとき基礎方程式(1)を $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^G)^t$ として

$$A\psi = L\psi + \sigma_t \psi - S\psi = \frac{1}{\lambda} B\psi \quad (40)$$

と書き変えると、この式は同次方程式なので、ある解 ψ の定数倍もまた解となる。本コードでは計算の途中は固有値で正規化された値 ψ^* を扱うので、

$$d_i^* = \sum_{j=1}^J c_{ij}^* \frac{1}{4\pi} \int_S \chi_j(\Omega) d\Omega, \quad (41)$$

$$\phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \psi^*(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \sum_{i=1}^I d_i^* \phi_i(\mathbf{r}), \quad (42)$$

$$F(\psi^*) = \sum_{g=1}^G (B\psi^*)^g = \sum_{g'=1}^G \nu \sigma_f^{g'}(\mathbf{r}) (\phi^*)^{g'}(\mathbf{r}) \quad (43)$$

として

$$\lambda = \int_D F(\psi^*) d\mathbf{r} \quad (44)$$

である。従って、外側反復は flat な初期値から出発して

$$\begin{aligned} c'_{ij}^g &= 1 \quad (g = 1 \sim G, i = 1 \sim I, j = 1 \sim J), \\ \lambda' &= \int_D F(\psi') d\mathbf{r}, \quad \psi'_0 = \frac{\psi'}{\lambda'}, \\ \lambda_1 &= \int_D F(\psi_1^*) d\mathbf{r}, \quad A\psi_1^* = \frac{1}{\lambda_{l-1}} B\psi_{l-1}^* \end{aligned} \quad (45)$$

で行われる。

外側反復の加速法の一つに中性子源外挿法があるが、その一般則を GAUGE コードのマニュアル²²⁾ に即して記そう。いま核分裂の存在する領域を W 個の粗メッシュに分割し、各粗メッシュにおける核分裂源を

$$\beta_w^l = \int_{C_w} F(\psi_l^*) d\mathbf{r} \quad (l \geq 1) \quad (46)$$

としたとき、公式

$$\begin{aligned} \epsilon_w^l &= (\beta_w^l - \beta_w^{l-1}) / \beta_w^{l-1} \quad (w = 1 \sim W), \\ \epsilon_a^l &= \max_w |\epsilon_w^l|, \quad \epsilon_e^l = \sum_{w=1}^W |\epsilon_w^l| / W, \\ \sigma_a^l &= (1 + \epsilon_a^{l-1}) \epsilon_a^l / \epsilon_a^{l-1}, \quad \sigma_e^l = (1 + \epsilon_e^l) \epsilon_e^l / \epsilon_e^{l-1} \quad l \geq 1 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}\mu_a^l &= \text{Max} (\sigma_a^l, \sigma_e^l), \quad \mu_i^l = \text{Min} (\sigma_a^l, \sigma_e^l), \\ \tau^l &= \mu_i^l / (1 - \mu_i^l), \quad \delta^l = (\tau^l - \tau^{l-1}) / \tau^{l-1}, \\ \epsilon_i^l &= \text{Min}_w |\epsilon_w^l|, \quad v^l = (\epsilon_a^l - \epsilon_i^l) / \lambda_l\end{aligned}$$

により各パラメーターを求め、適用規準

$$l \geq 4, \quad v^l \leq v^{l-1}, \quad \mu_a < 1.0, \quad (48)$$

$$\mu_i > 0.5, \quad \text{Max} (\delta^l, \delta^{l-1}) < 0.1. \quad (49)$$

がみたされたとき、

$$c_{ij,l}^{*,g} = c_{ij}^{*,g} + \tau^l (c_{ij}^{*,g} - c_{ij,l-1}^{*,g}) \quad (50)$$

で外挿する。ここに(47), (48)および(49)式に必要な初期値は

$$\begin{aligned}\beta_w^0 &= 1/W, \quad \epsilon_a^0 = 0.1, \quad \epsilon_e^0 = 0.01, \\ \tau^0 &= 0, \quad v^0 = 0.01, \quad \delta^0 = 0.01\end{aligned} \quad (51)$$

とする。また $c_{ij}^{*,g}$ は(40)式に示されるように、内側反復で得られたままの正規化された値である。

我々が採用した公式は $W = 1$ の場合である。適用条件(48)および(49)式が満たされないときは、

$c_{ij,l}^{*,g} = c_{ij}^{*,g}$ とする。一般に(48)式よりも(49)式の方が満たされにくいので、外挿の回数を増やしたいときは、後者の条件を緩める。

次に GAUGE コードにおける外挿法の実際を見てみよう。マニュアル²²⁾には「 $\bar{\phi}_m^g$ をメッシュ m での平均中性子束、 τ を外挿因子としたとき

$$\bar{\phi}_m^g (\text{new}) = \tau \bar{\phi}_m^g (\text{temporary}) \quad (52)$$

としてよい」と記される。このとき、「 $c_{ij,l}^{*,g} / c_{ij}^{*,g}$ はエネルギー群に依存し、 $\bar{\phi}_m^g (\text{new}) / \bar{\phi}_m^g (\text{temporary})$ はエネルギー群に依存しない」という違いが起こる。また、固有値も $\lambda = \sum_g \sum_m \nu \sigma_f^g \bar{\phi}_m^g$ で計算するより(44)式で計算する方が一般に正確である。DFEMにおいては

$$\sum_{i=1}^I \phi_i(\mathbf{r}) = 1, \quad \sum_{j=1}^J \chi_j(\Omega) = 1 \quad (53)$$

が成り立つので、(38)～(41)式より

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \langle \nu \sigma_f^g \phi_i \rangle \langle \chi_j \rangle c_{i,j,l}^{*,g} \\ &= \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J \left\{ \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \langle \nu \sigma_f^g \phi_i \phi_{i'} \rangle \langle \chi_j \rangle \langle \chi_{j'} \rangle c_{i',j',l}^{*,g} \right\}\end{aligned} \quad (54)$$

が成り立つ。即ち特別な簡略化を要せず、(22)式で準備した値をそのまま使って中性子源を計算できるという特徴を有している。

3. 計算コードの概略

我々は三次元多群中性子輸送問題を二重有限要素法に基づくガレルキン法で解くコードの開発を行った。炉体系の形状は多角柱を想定しており、拡散コード FEM-BABEL¹⁴⁾と同様の要素分割を行うので、この部分に係わるルーチンの多くはFEM-BABELのそれを採用している。以下、この章ではコードの概略と入力データの取扱い法について述べる。

3.1 計算手順

このコードの計算の流れと主なルーチンの機能は Fig. 9~15 および Fig. 17~20 に示される。個々のサブルーチンの機能や変数名、入出力のブロックについては、本報告での説明には直接必要ないので、コードの公開時に別途執筆予定のコードマニュアルで解説することとし、ここではアルゴリズムに直接関係する計算の流れについて、これらの図を用いて簡単な説明を加えておこう。

本コードは一時的に DFEM-GAL と呼ぶことにするが、Fig. 9 はその入口の様子を示すものである。このコードの主な流れは Fig. 10 の MAIN 1 で制御されるが、各ブロックの実行時間はサブルーチン ELAPS によって知ることができる。また、MATRIX は継続計算のときのように既に係数行列を作成済みのとき skip される。このルーチンの内容は Fig. 11 に示されるが、この図において Δx と Δy は二つの節点 $P_i (x_i, y_i, z_i)$, $P_j (x_j, y_j, z_j)$ に対して $\Delta x = x_j - x_i$, $\Delta y = y_j - y_i$ を表わす。 Δs は要素の xy 断面の面積である。Fig. 12 の XYZ は空間変数に関する内積を計算するルーチンであり、 Δz は z 方向のメッシュ幅を示すものである。係数行列の実際の計算は、Fig. 13 にあるように各平面についてデータを用意した後、この Δz を使って作られる。

次に、Fig. 14 の MTRXS 1 を見てみよう。これは平面についての global matrix を組立てる際の漏れの項を計算するルーチンであり、例えば $\langle SPX \rangle$ は(21)式の $\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \phi_{i'} \rangle$ を計算する際に必要な要素 e での積分

$$\langle SPX (k, k' e) \rangle = \int_e \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_{i'} d\mathbf{r} \quad (55)$$

を表わしている。ここに、 k, k' は節点 i, i' の要素 e における局所的な節点番号 (e が三角柱のとき $1 \leq k, k' \leq 6$, 四角柱のとき $1 \leq k, k' \leq 8$) である。また

$$\langle ANM (j, j') \rangle = \langle \mu \chi_j \chi_{j'} \rangle \quad (56)$$

であり、以下の $\langle SPY \rangle$, $\langle ANE \rangle$ についても同様である。

これらは体系方程式(30)を平面反復法で解くとき、着目する平面に対する係数行列 (A-行列), 着目する平面の上の平面に対する係数行列 (C-行列) および着目する平面の下の平面に対する係数行列 (D-行列) を構成する際に必要となる。C および D-行列は、同じ物質の領域にあれば、平面の番号が変わっても不变である。従って平面の番号でなく、物質の領域の番号 NZ に対

応して構成すればよい。一方、A一行列は着目する平面の上下の領域の物質に関係するので、平面が同一物質領域内にあるとき A_{NZ}^{NZ} 、物質領域境界にあるとき A_{NZ}^{NZ-1} を構成する。 $\{C\}_B$ 、 $\{D\}_T$ の添字はそれぞれ底面、上面の略であり、それらの面における境界条件の導入のために同じ物質領域における同種の行列とは異なったものになっている。また、Fig. 15 の MTRXS 2 は核分裂中性子源と散乱中性子源の項を計算するルーチンであり、対称性のため D一行列は不要である。ここでは、角度変数の内積は全て $\langle AN \rangle$ で記されている。

以上の sub-global matrix を足し合わすと、異なった行列の列 A_B , C_B , D_T , A_1^1 , C_1 , A_2^1 , C_2 , D_2 , A_2^2 , ……, A_{NZRN}^{NZRN-1} , C_{NZRN} , D_{NZRN} , A_{NZRN}^{NZRN} , D_T , A_T が得られる。ここに、NZRN は z 方向の物質領域の数であり、側面の境界条件も導入されている。これを方程式 30 と対応させて図式化したのが Fig. 16 である。この図では、 $NZRN=3$ 、 z 方向の領域番号を NZ、そこでのメッシュ数も NDZN (NZ)としたとき、 $NDZN(NZ)=2$ ($NZ=1 \sim NZRN$) となっている。

Fig. 17 の OUTER から反復計算に入るが、Fig. 18 の INITIAL でその初期設定を行い、Fig. 19 の LAMDA で k_{eff} など 54 式の計算を行う。核分裂源と群外散乱源の集計は Fig. 20 の SOURCE で行われる。

参考のため、本コードではどんな作業用ファイルが用いられるかを Table 2 に示しておく。この表において、IAMAT は角度の添字 (j, j') に対応する 36 の大きさを持っており、NBAND は平面内で一つの節点に隣り合う最大節点数で通常 9、NPOINT は平面内節点数である。また、NGRP は群数であり、NDW, NUP はそれぞれ最大下方および上方散乱群数である。unit 9 の NZMAX は z 方向の節点数 (平面数) である。

DFEM-GAL

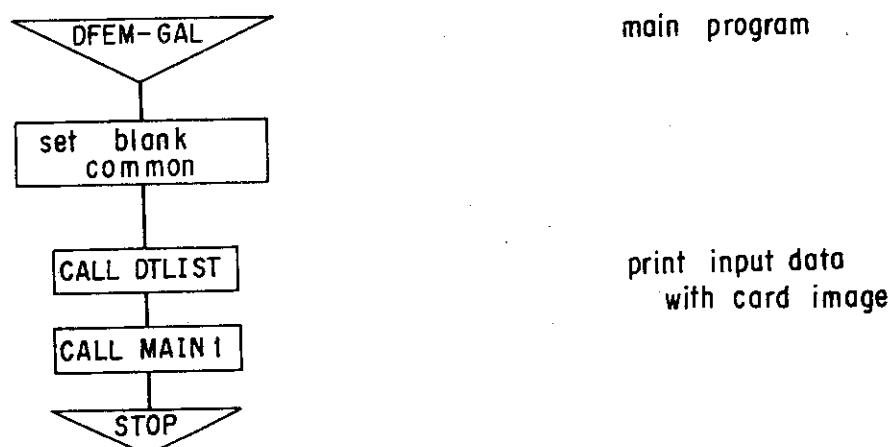


Fig. 9 Program flow of DFEM-GAL

MAIN 1

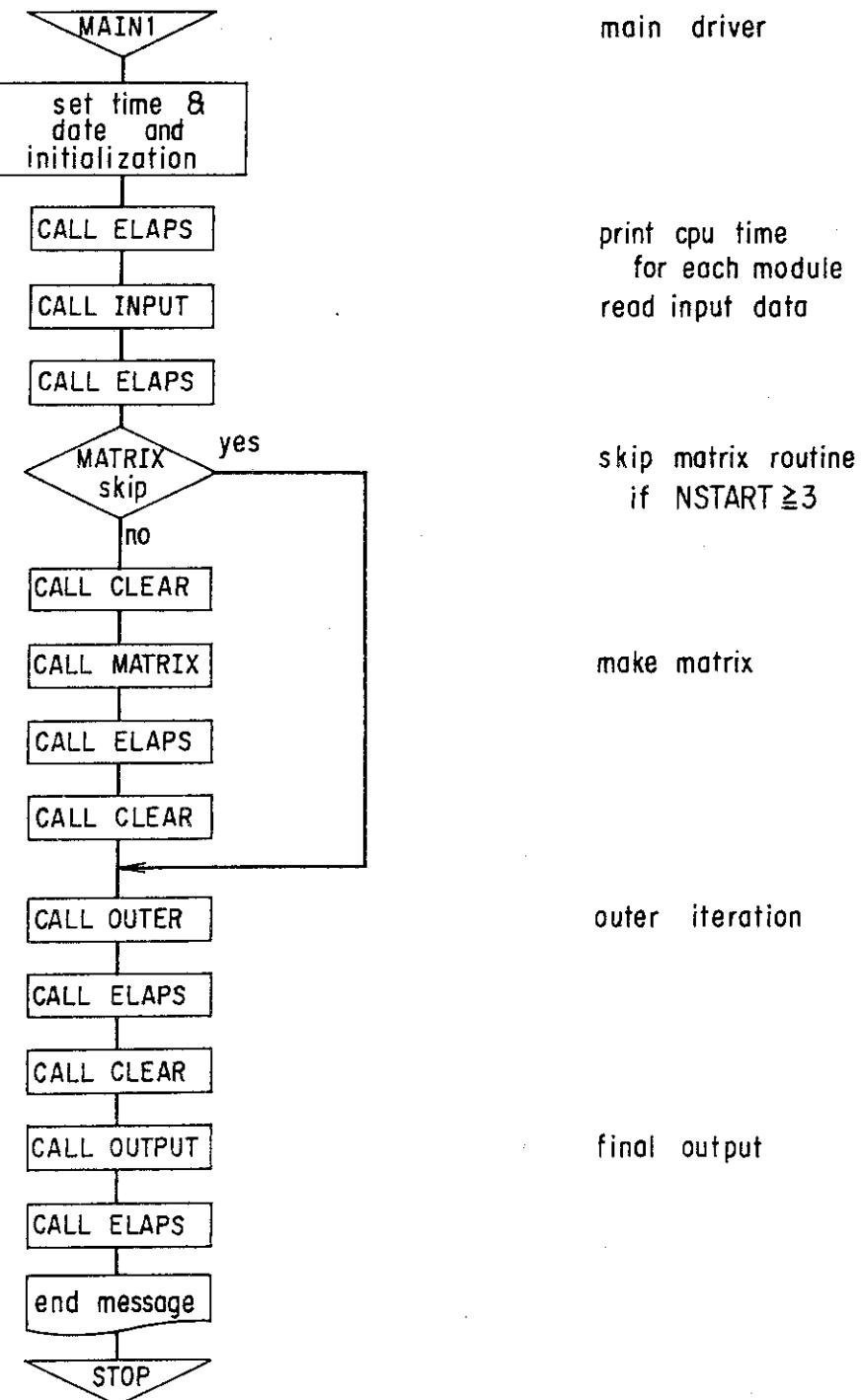


Fig. 10 Program flow of MAIN1

MATRIX

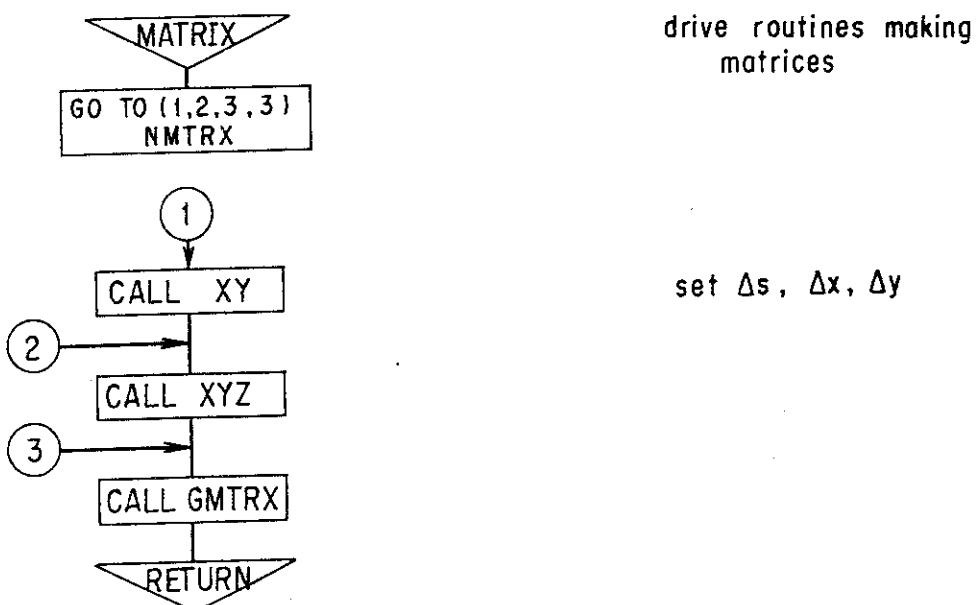


Fig. 11 Program flow of MATRIX

XYZ

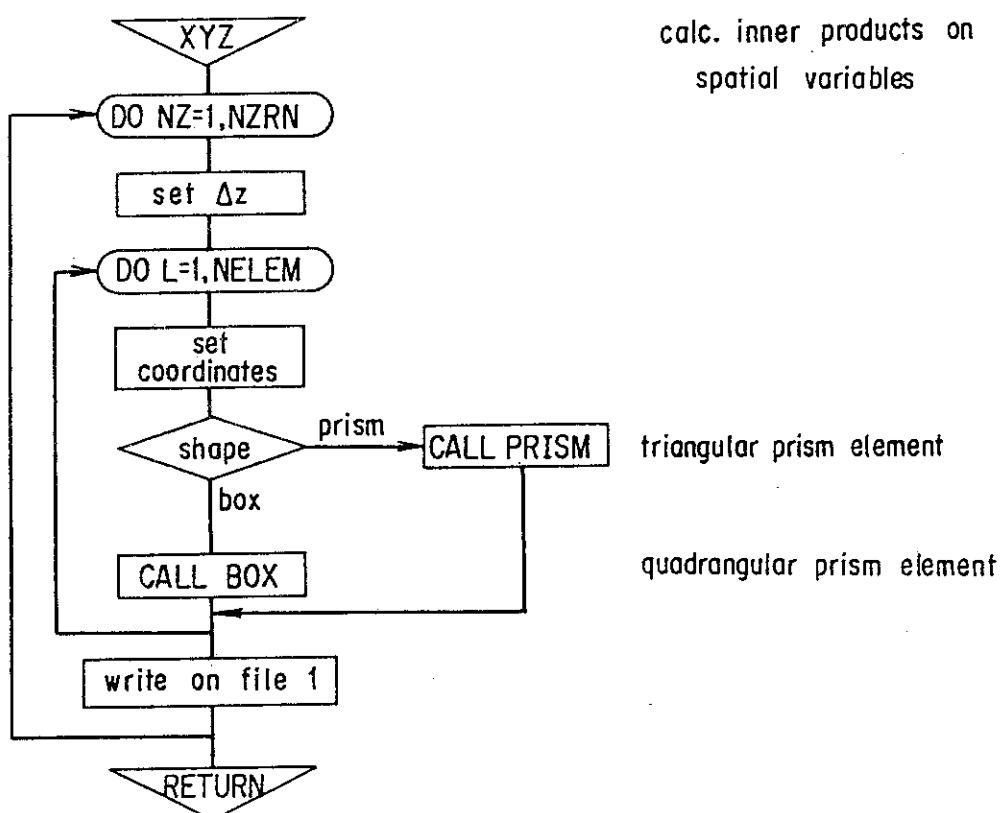


Fig. 12 Program flow of XYZ

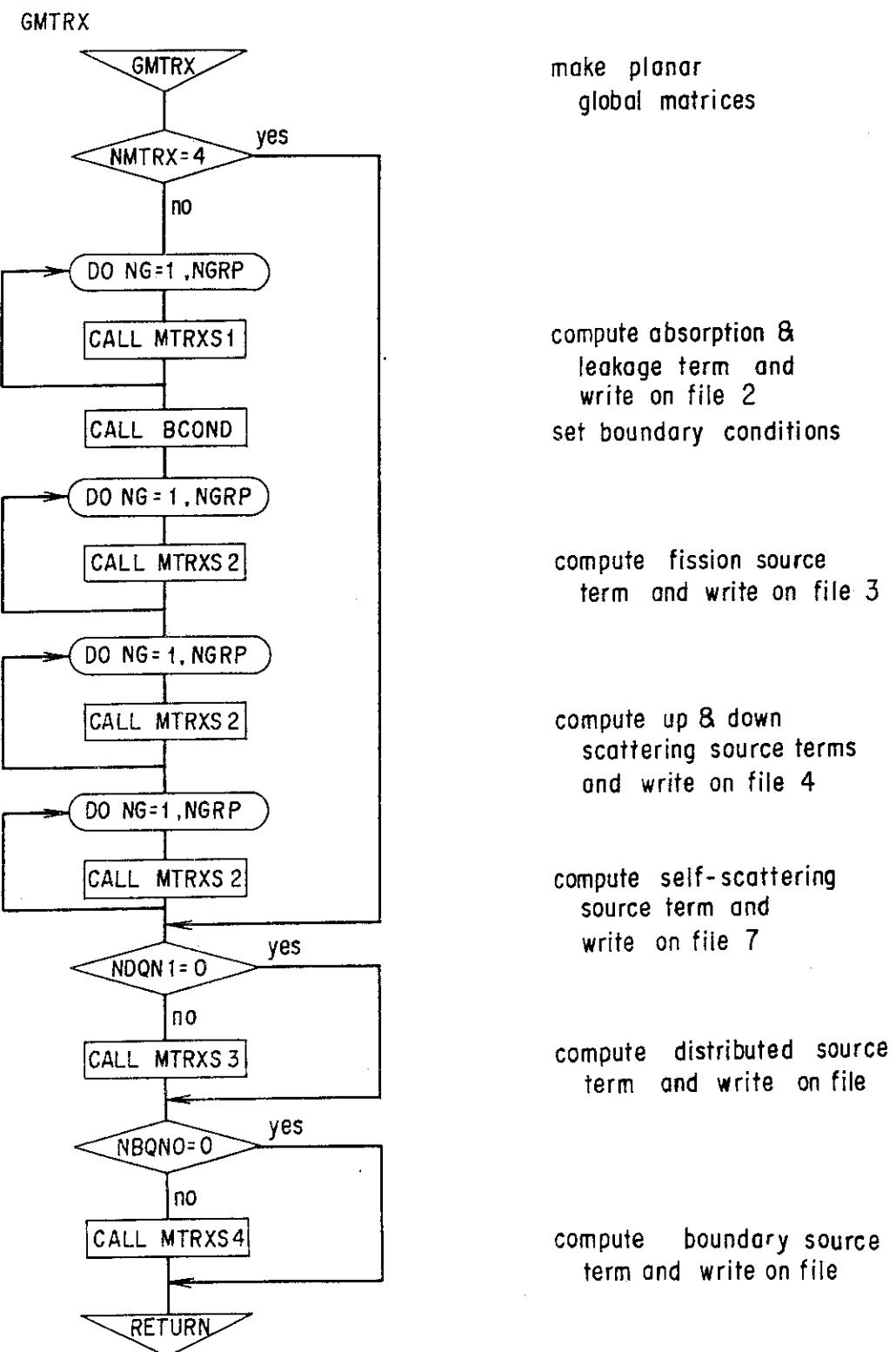


Fig. 13 Program flow of GMTRX

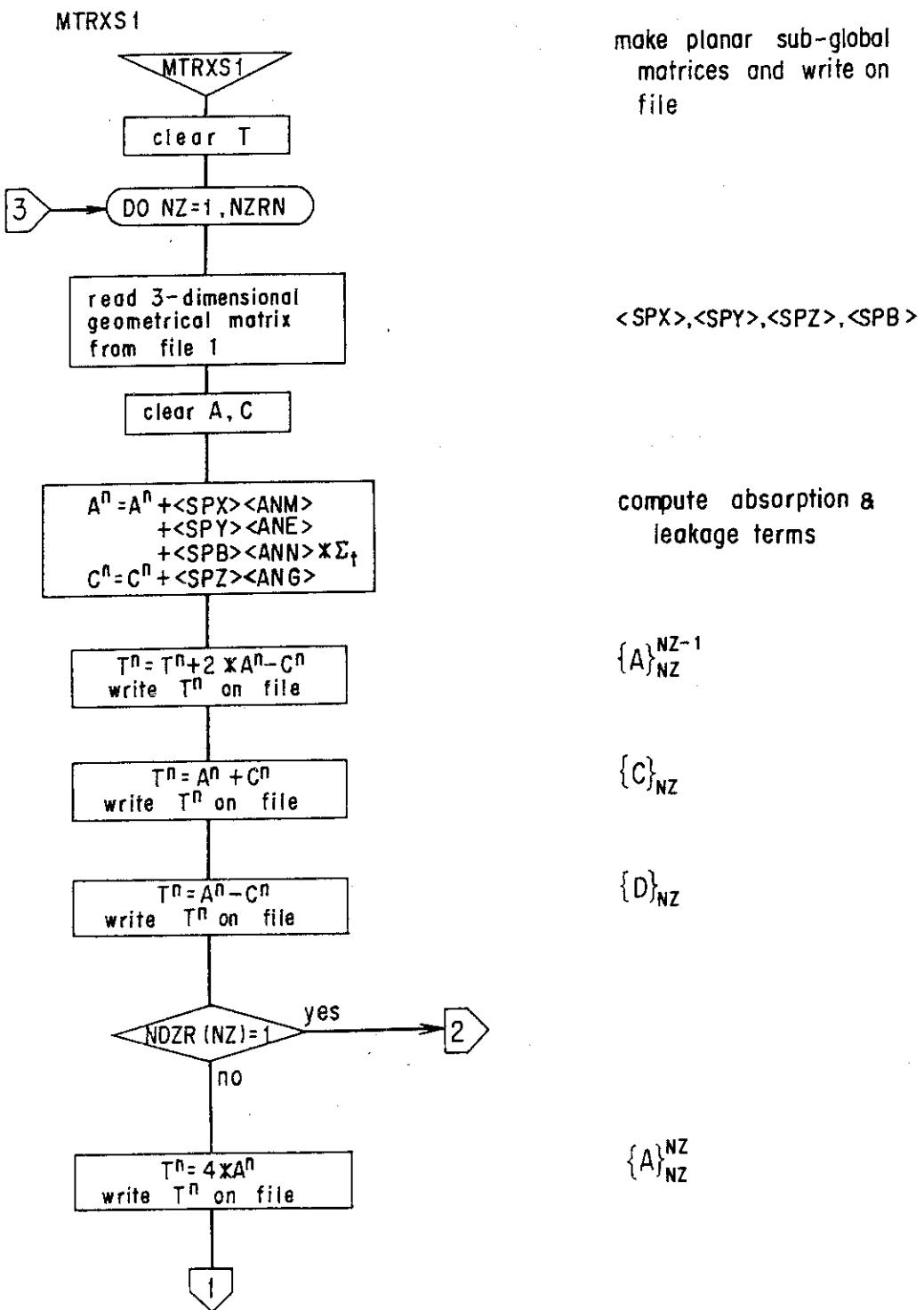


Fig. 14 Program flow of MTRXS1

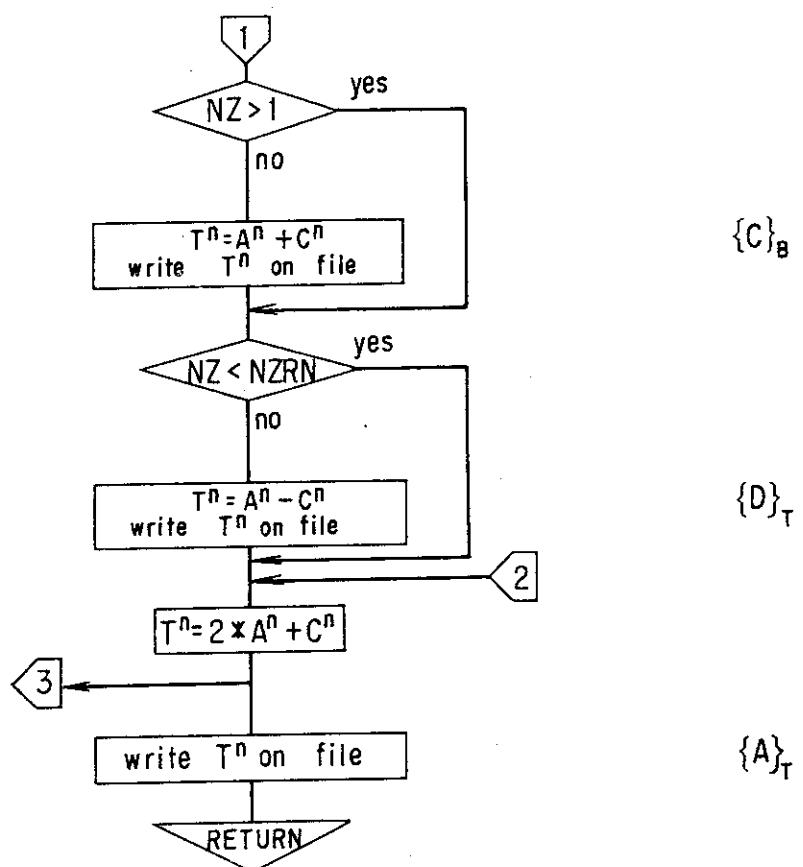


Fig. 14 (Continued)

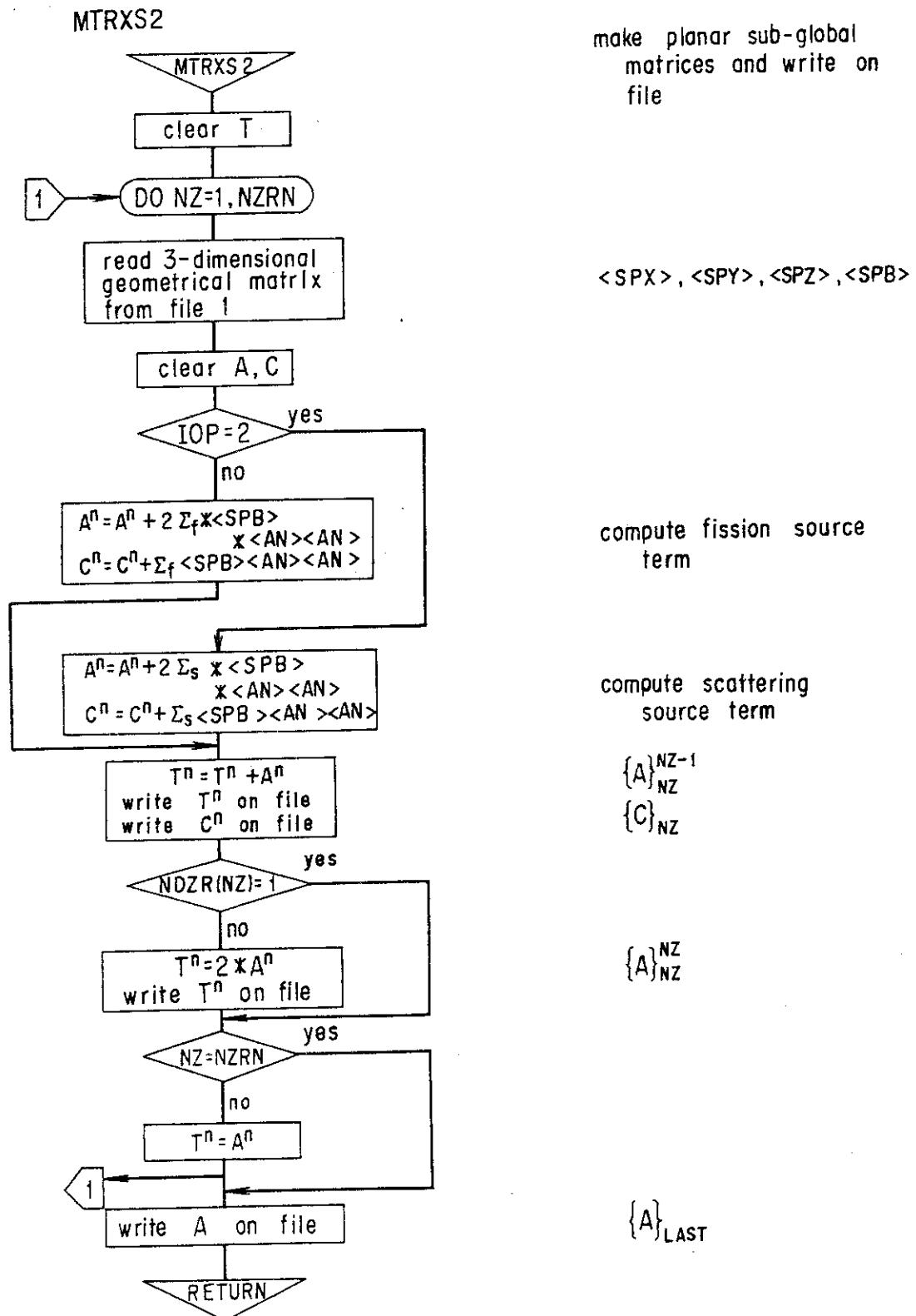


Fig. 15 Program flow of MTRXS2

A_B	C_B	
D_1	A_1^1	C_1
D_1	A_2^1	C_2
D_2	A_2^2	C_2
D_2	A_3^2	C_3
D_3	A_3^3	C_3
D_T	A_T	

Fig. 16 Structure of the global matrix

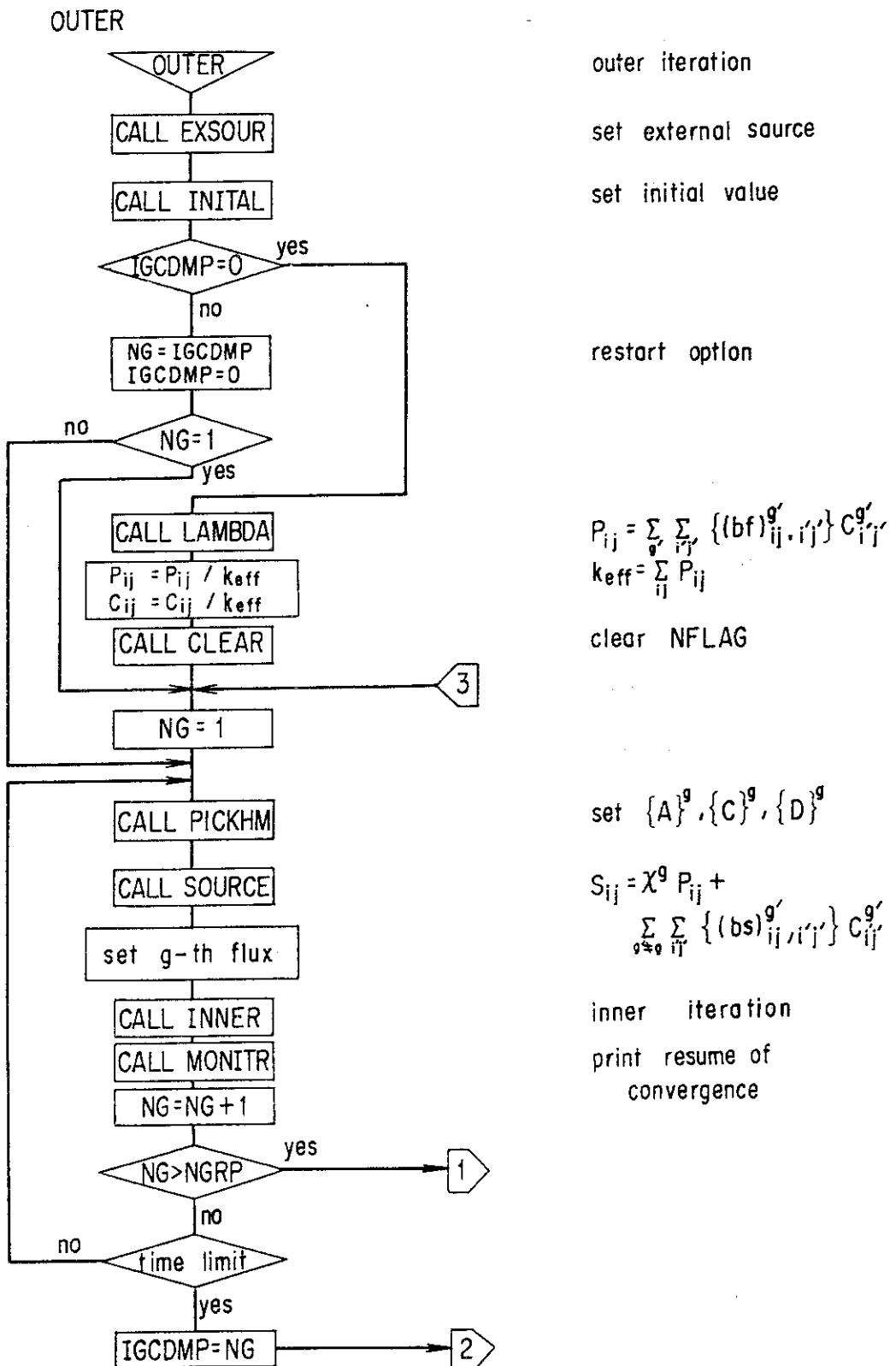


Fig. 17 Program flow of OUTER

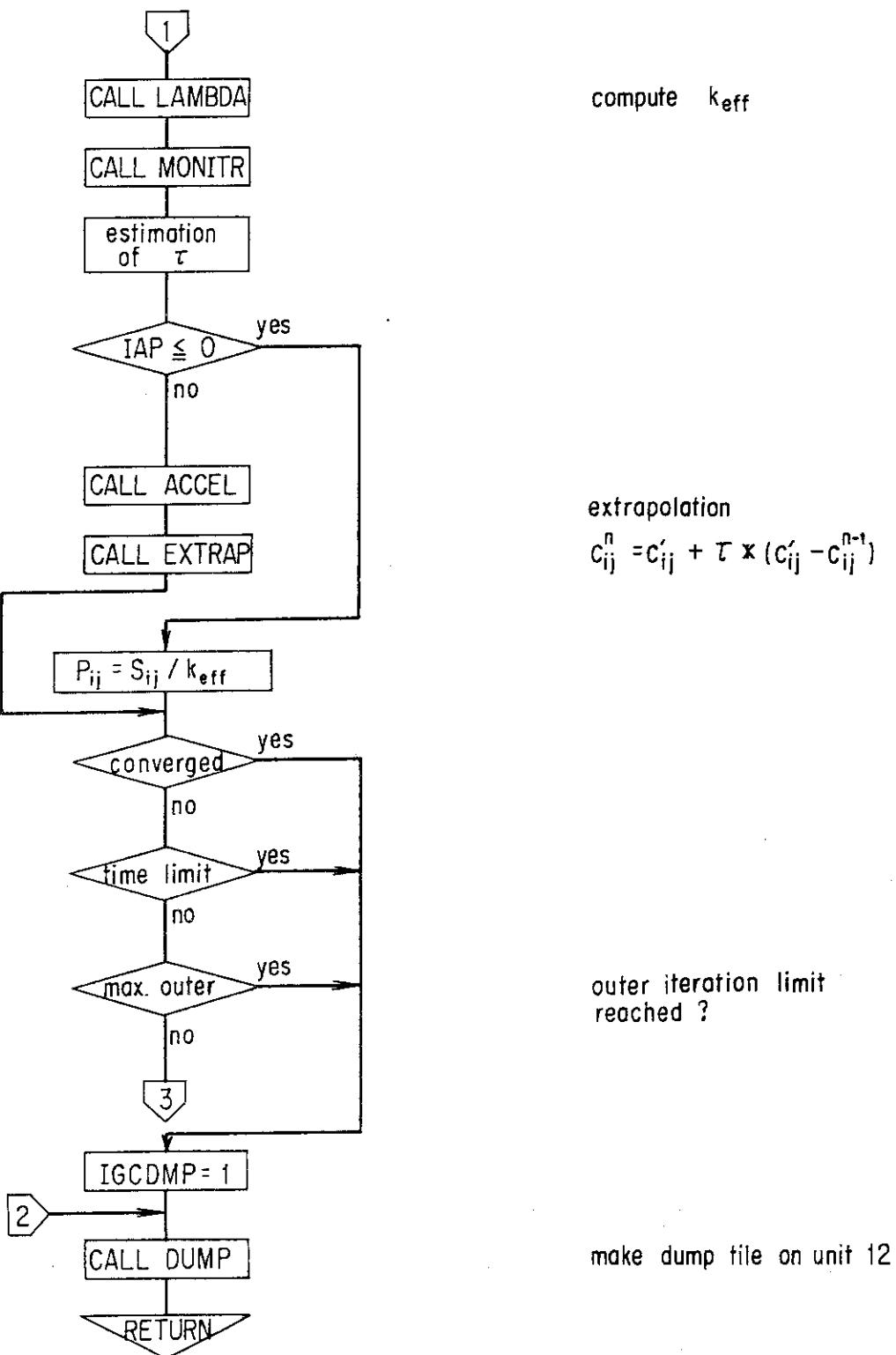


Fig. 17 (Continued)

INITAL

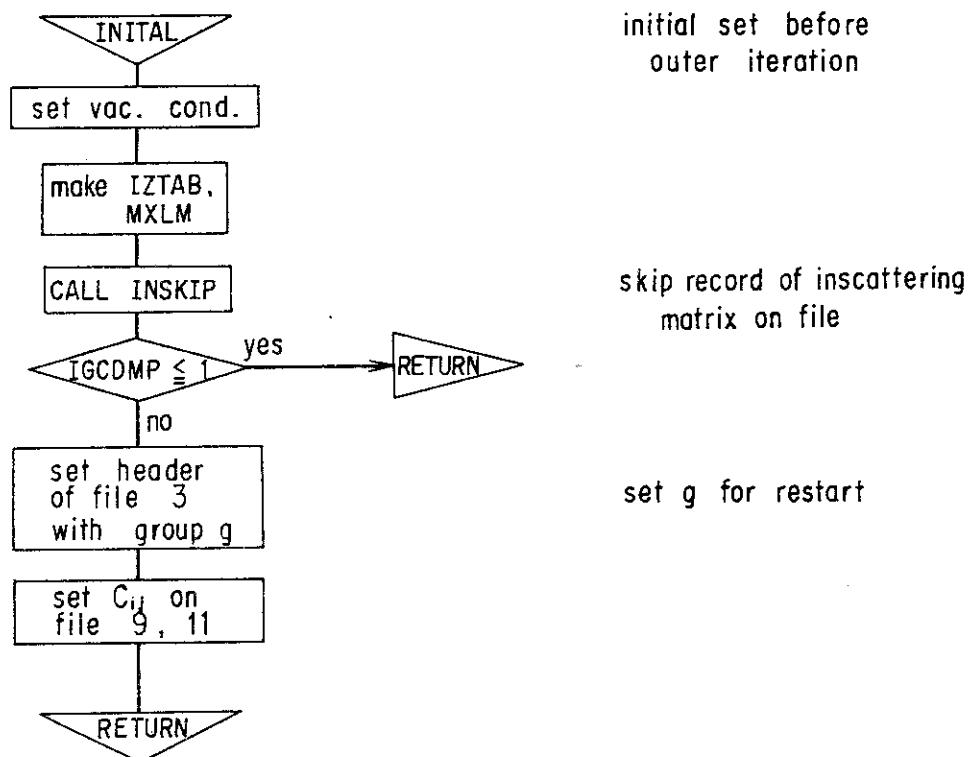


Fig. 18 Program flow of INITAL

LAMBDA

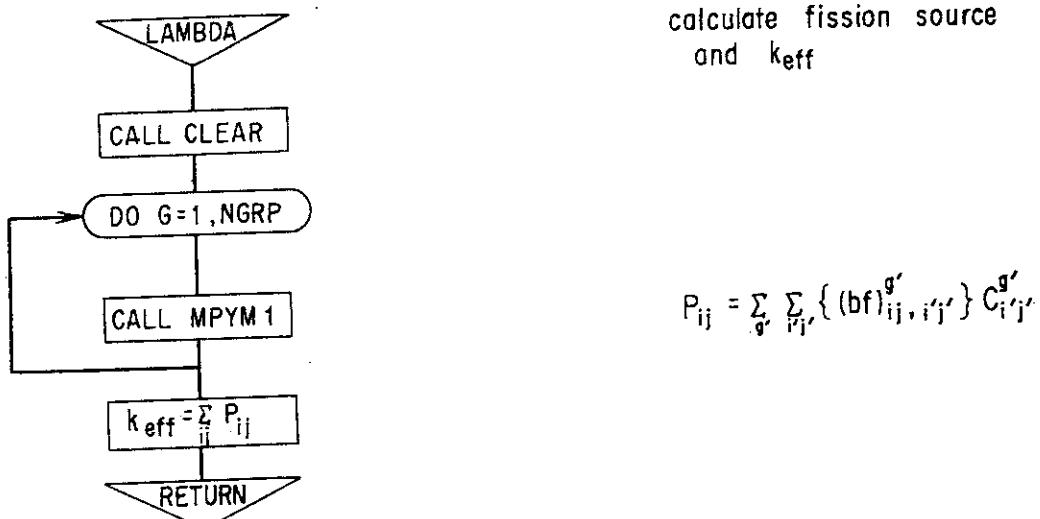


Fig. 19 Program flow of LAMBDA

SOURCE

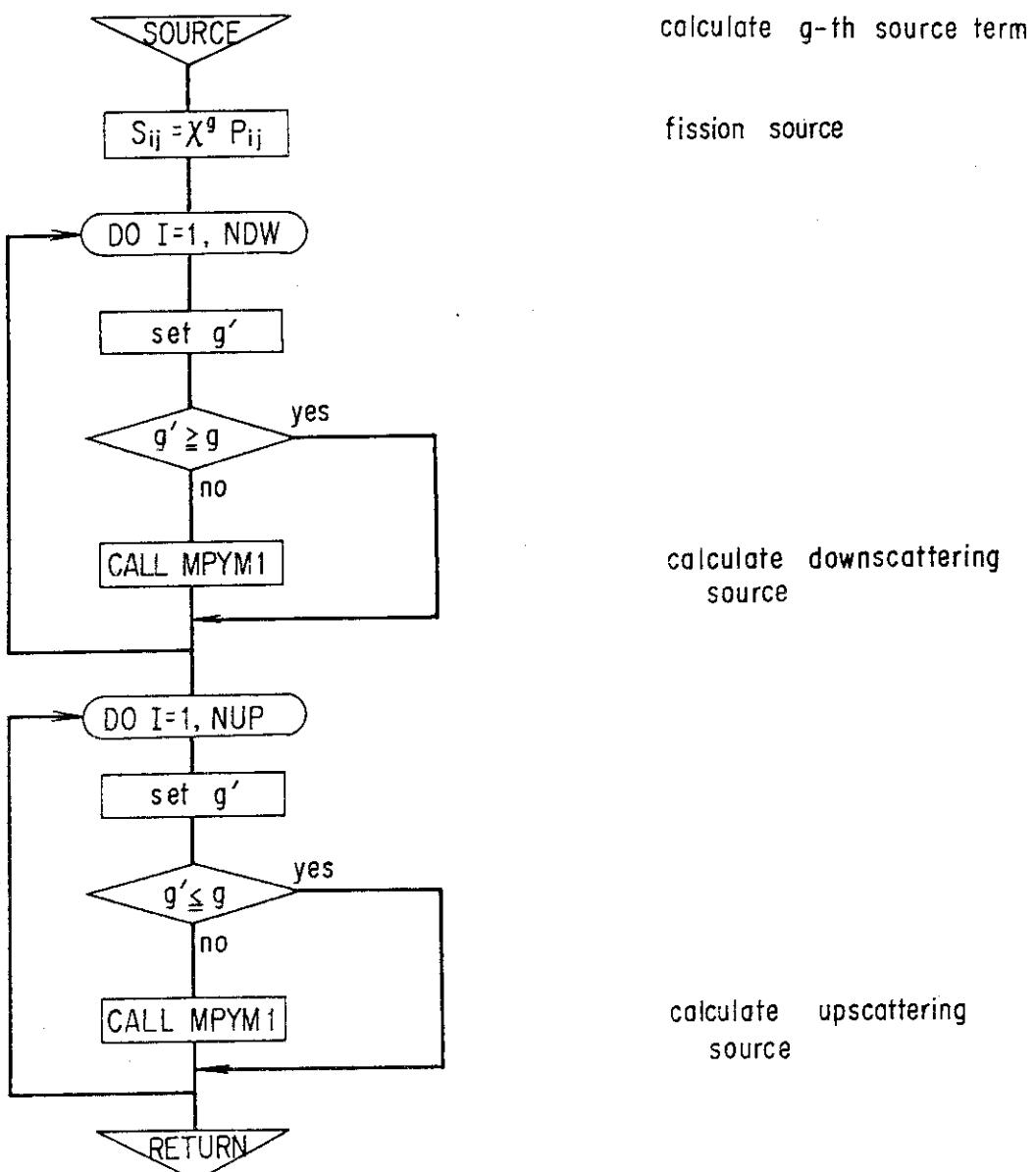


Fig. 20 Program flow of SOURCE

Table 2 File requirements used for input and output

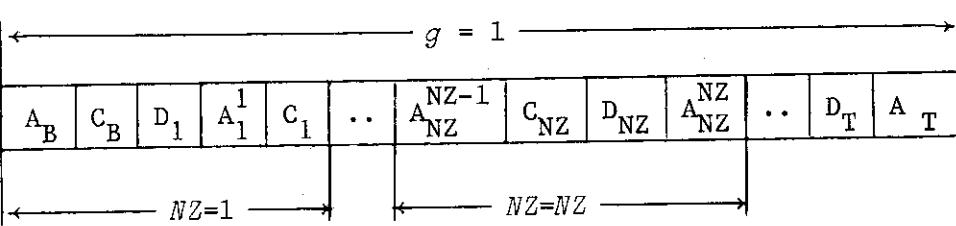
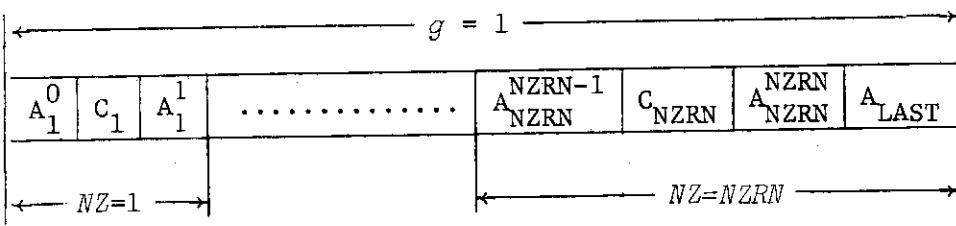
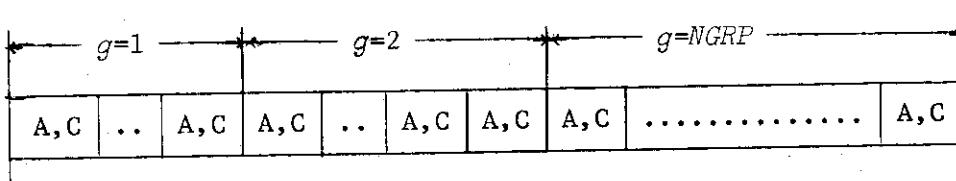
Unit	Contents
1	Geometrical 3-dimensional matrix data for each z mesh and z region; record 1 - record NZRN ($\{SPX(i,j), SPY(i,j), SPZ(i,j), SPB(i,j), i=1,16\}, j=1,NELEM$)
2	$x-y$ plane global matrix data of every z region for each energy group, that is, $\{A(Aij,ij)\}$ ($IAMAT, NBAND, NPOINT$), $\{C(Aij,ij)\}$ ($IMAT, NBAND, NPOINT$), $\{D(Aij,ij)\}$ ($IAMAT, NBAND, NPOINT$);  <p>It is noted that there is no A_{NZ}^{NZ} when the number of meshes within a region, NDZR(NZ) is equal to 1. Similarly, there is no C_1 when NDZR(1)=1 and no D_{NZRN} when NDZR(NZRN)=1.</p>
3	Fission source term, that is, $\{A(bf)ij,ij\}$ ($IAMAT, NBAND, NPOINT$), $\{C(bf)ij,ij\}$ ($IAMAT, NBAND, NPOINT$) 
4	Up and down scattering term in the same form as of file unit 3: $\{A(bs)ij,ij\}$ ($IAMAT, NBAND, NPOINT$), $\{C(bs)ij,ij\}$ ($IMAT, NBAND, NPOINT$) from $g'=g-NDW$ to $g'=g+NUP$ in the following order.  <p>$NGRP \rightarrow 1 \quad 2 \rightarrow 1 \quad NGRP \rightarrow 2 \quad 3 \rightarrow 2 \quad 1 \rightarrow 2 \quad NGRP-1 \rightarrow NGRP \quad 1 \rightarrow NGRP$</p>

Table 2 (Continued)

5	Card input
6	Print output
7	Self-scattering term in the same form as of file unit 3
8	Temporary file. It is used in the input routine.
9	Fluxes are written for each energy group and this file is used also as the external tape for initial flux guess; record 1 - record <i>NGRP</i> : ((FLUX(<i>i,j,k</i>), <i>i</i> =1, <i>JANG</i>), <i>j</i> =1, <i>NPOINT</i>), <i>k</i> =1, <i>NZMAX</i>).
10	Temperature file. It is used at the inner iterations for {A(Aij,ij)}, {C(Aij,ij)} and {D(Aij,ij)}
11	Temporary file for fluxes (same contents as in file unit 9)
12	Dump file
13	Temporary file. It is used at the inner iterations for {A(Ss)ij,ij} and {C(Ss)ij,ij} .
14	Temporary file for external source
15	Distributed source term in the same form as of file unit 3
16	Boundary source term in the same form as of file unit 3
17	It is used only as the external tape for the geometrical <i>x-y</i> plane data. For instance, it is directly read from the edit file of LOOM-P 23).

3.2 入力データの取扱い法

入力の具体的な記述法は別途執筆予定のコードマニュアルで与えられるが、基本的取扱い法についてここで整理しておく。

3.2.1 中性子断面積

中性子断面積は、ダンプされたファイルから入力される場合を除いて、カードイメージで TWOTRAN-II²⁰⁾と同じ形式で入力される。いま G 群、 P_N の計算において上方散乱群数を U 、下方散乱群数を D 、物質領域数を M とする。このとき、標準的な断面積の list : $(\sigma_a, \nu \sigma_f, \sigma_t, \sigma^{g+U \rightarrow g}, \dots, \sigma^{g+1 \rightarrow g}, \sigma^{g \rightarrow g}, \sigma^{g-1 \rightarrow g}, \dots, \sigma^{g-D \rightarrow g})$ に対し、(((list), $g=1 \sim G$), $n=0 \sim N$), $m=1 \sim M$) で入力される。この処理は list 上における各断面積の位置を指示することにより行われるので、 σ_a の前や σ_t の後などに不要な断面が入っていても構わない。

このような多量のデータは、例えば FIDO format^{14) 20)}により入力するとよい。この format は米国オークリッジ国立研究所で開発されたもので、断面積データの入力以外にも使用でき、特に FEM では要素分割のためのデータの作成や修正などの労力が著しく軽減できる。

3.2.2 要素分割

一般に FEM は不規則な形状を扱うので、その要素分割を規定するための入力は龐大となる。本コードの場合、現実的な大部分の炉形状を扱うことができるよう多角柱を対象としているが、入力を簡単にするため Fig. 1 のような分割を行う。即ち節点は $x y$ 方向および z 方向に揃えてとる。従って、要素分割は全節点の (x, y) 座標と z 座標を独立に与えることにより行える。しかし、FDM のメッシュの与え方に比べるとこれでも入力が増えるので、直方体や円柱などの規則正しい形状に対しては、 $x y$ 一平面に関して要素の自動分割が行えるようになっている。Fig. 21 はこれらの自動分割例を示したものである。

z 方向は FDM と同様に扱えるので、まず物質領域に合わせて粗い分割を行い、次に各領域を等分割して要素に分割する。なお、 $x y$ 方向に関する物質の指定は各要素ごとに行う。

3.2.3 外部中性子源

外部中性子源としては、体系内部の物質領域に対して与えられる分布中性子源と、外部境界面に対して与えられる境界中性子源の二通りがある。前者は、分布中性子源の存在する物質領域の $x y$ 方向と z 方向の領域番号をそれぞれ数え上げて r_k ($k=1 \sim K$), s_l ($l=1 \sim L$) としたとき、各共通領域 (r_k, s_l) において各群ごとに一様な分布源

$$q_{ij}^g (k, l) = \text{constant} \quad \text{for } i \in (k, l), j=1 \sim J \quad (57)$$

が与えられる。ここに q_{ij}^g は(22式に見られる値であり、節点 i が分布中性子源の存在しない領域にも含まれると、分布は i で階段的とする。また、実際に源の無い領域に対しては $q_{ij}^g (k, l) = 0$ とする。

一方、後者は三通りの方法で与える。まず前面と後面からなる側面の場合には、一つの $x y$ 平

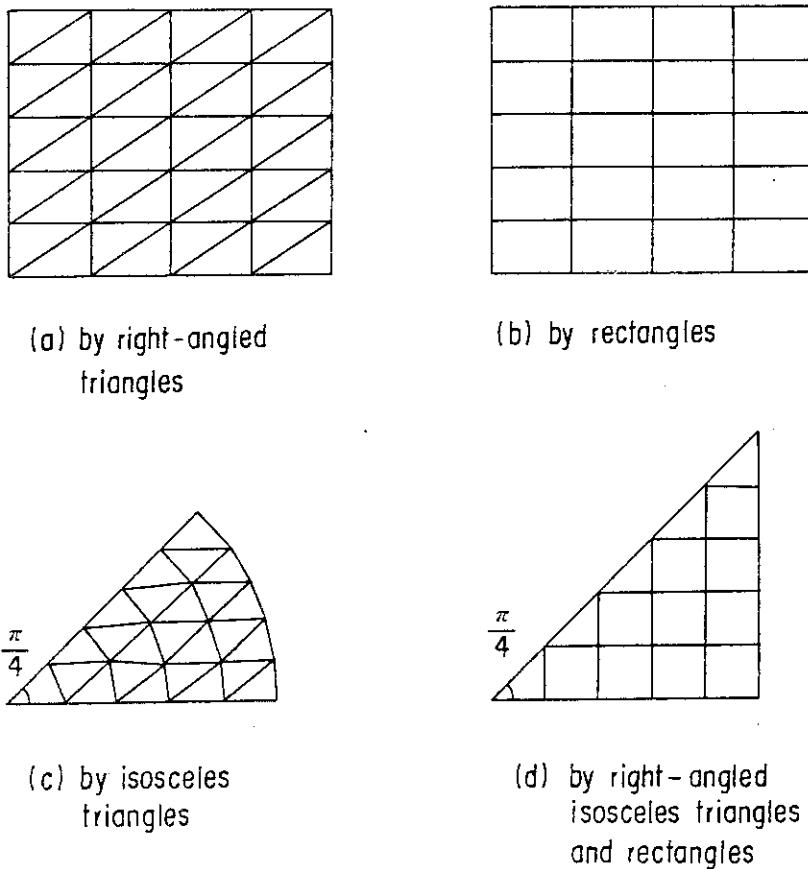


Fig. 21 Auto-mesh generation in an (x, y) plane for various reactor configurations

面上の節点の数を NPOINT として、その外側境界の節点 i ($i=1 \sim \text{NPOINT}$) に対して与える。いま、 z 方向を無視して考えると、一つの側面は二つの節点よりなるので、二つの q_{ij}^g が非零のときに限り境界中性子源が与えられたと考える。従って分布中性子源の場合と同様節点 i が源の無い面と有る面の境界に位置するとき、分布はやはり階段的とする。以上の結果、側面への境界中性子源の与え方は

$$q_{ij}^g = \text{constant for } i \in \text{side boundary} \quad (58)$$

となり、 z 方向は下面から上面まで通して与えられる。

次に下面と上面への境界中性子源の与え方をまとめて記す。この場合節点は一括して扱い

$$q_{ij}^g = \text{constant for } i \in \text{bottom} \quad (59)$$

または

$$q_{ij}^g = \text{constant for } i \in \text{top} \quad (60)$$

である。

3.2.4 繼続計算法

3 次元輸送計算のような大規模の反復計算においては、精度のよい初期値の採用が重要となる。本コードでは、初期推定値として(45式に示したように

$$c_{ij}^g = 1 \text{ for } g=1 \sim G, i=1 \sim I, j=1 \sim J \quad (61)$$

を用いるが、計算終了時にはこの改良値をダンプ・ファイルに保存して次のランに使用できるようになっている。言い換えれば、別のファイルから任意の推定値を与えることもできる。また、最初のランに必要な中性子断面積や幾何形状を示すデータもダンプ・ファイルで引き継ぐことができるし、更に計算時に必要とされる反復打切り回数などのパラメータも、プログラムの主な流れを変えない範囲で変更できる。

ダンプ・ファイルの内容はTable 3で示される。ここに、NRBCとNVBCはそれぞれ反射、真空条件を持つ節点数、NDQN1とNBQNOはそれぞれ、分布中性子源領域数、境界中性子源節点数である。NEDNOとNAFNOは全中性子束および角度中性子束の出力オプションである。配列の大きさを示す変数のうち、JANGは角度の基底の数(6)、NELEMは平面内要素数、MPOINTは要素の節点番号を記憶するに必要な語数を示す。MXLM、MXLF、MXLS、MXLQは記録の長さを示す変数であるが、Table 2からそれぞれのファイルの各群に対する長さおよび全体の長さが容易に推定されよう。

3.2.5 出力の編集

多次元輸送計算では、その結果の出力が思わぬ程多量になるので細心の配慮が必要となる。また、出力を限定するためにその指定法が複雑になっても困る。ここでは、必ず出力されるものと、出力のオプションについて、若干説明を要するものを中心に記す。

必ず出力されるものの最初は、入力カードの与えた形のままの出力であり、入力エラー・チェックが行い易い。タイトル・カードは代表的な頁の先頭に記される。その他、入力のパラメータや核分裂スペクトルなど重要で量の少ないものも必ず出力される。特に計算機の記憶領域の使用状況を示す表は、必要最大記憶容量を知る上で重要である。反復計算に入ってからは、反復回数や計算時間、それに加速パラメータの値などが出力される。

中性子束の出力は、全中性子束のそれと角度中性子束のそれと角度中性子束のそれに大別される。ともに x, y 平面の節点などを指定して z 方向に中性子束を出力するか、 z 方向のメッシュを指定して x, y 方向の中性子束を出力するかのどちらかを指定する。角度中性子束は出力が増えるので、群も指定できるようになっている。

なお、計算中の中性子束は固有値で正規化されるが、出力のときは入力パラメータの POWER で正規化される。即ち、炉心の対称性を表わす変数を FA1（例えば $1/16$ 炉心のとき 16）、1 ワット・秒の power に必要な核分裂の数を FA2（ふつう 3.3×10^{10} ）とすれば

$$\text{POWER} = \int_D \int_{\Omega} \sum_{g=1}^G \sigma_f^g c_{ij}^g \phi_i(\mathbf{r}) \chi_j(\Omega) d\mathbf{r} d\Omega / FA2 \times 10^6 \quad (62)$$

$$\alpha = 1 / FA1$$

として

$$c_{ij}^g = \alpha c_{ij}^g \quad (63)$$

である。ここに c_{ij}^g は $1/FA1$ 炉心の power が入力された POWER になるよう正規化された値であり、 c_{ij}^* が実際に出力される値である。

Table 3 Contents of dump file

No.	Record	Contents	Description
1	1	MT12(32)	Flag for reading the dump file
2	1	A(1) - A(260)	Entry table and input constants
3	1	3\$.4*,5*	Geometrical data on $x-y$ plane
4	1	8\$,9*	Geometrical data of z mesh
5	1	10\$	Regional data on $x-y$ plane
6	1	11\$	Material table
7	1	12*	Cross section data
8	1	13*	χ data
9	1	14\$,15\$	Data for reflective boundary condition; it is skipped if $NRBC=0$.
10	1	16\$,17\$	Data for vacuum boundary condition; it is skipped if $NVBC=0$.
11	1	18\$	$x-y$ planar data for coarse mesh rebalancing
12	1	19\$	z mesh data for coarse mesh rebalancing
13	1	20\$,21\$,22*	Data for distributed source; it is skipped if $NDQN1=0$.
14	1	23\$,24*	Data for boundary source; it is skipped if $NBQNO=0$.
15	1	25\$	Data for editing flux; it is skipped if $NEDNO=0$.
16	1	26\$,27\$	Data for editing angular flux; it is skipped if $NAFNO=0$.
17	<i>NGRP</i>	FLUX(<i>JANG</i> , <i>NBAND</i> , <i>NPOINT</i>)	Fluxes
18	1	NBTAB(<i>NBAND</i> , <i>NPOINT</i>)	Band width table
19	1	DZRN(<i>NZRN</i>)	Δz for each region in z direction
20	1	IQTAB(<i>NELEM</i>)	The shape table for elements
21	1	AN(<i>JANG</i>)	Inner products on angular variables
22	1	MFPI1(<i>NXYRN</i>)	Node point table for each region
23	1	MFPI2(<i>MPOINT</i>)	Node point table for each region
24	1	P(<i>JANG</i> , <i>NPOINT</i> , <i>NZMAX</i>)	Fission source
25	1	NFLAG(<i>NGRP</i>)	Flag for convergence of g -th group
26	1	DS(<i>NELEM</i>)	Δs for each element
27	1	DX(<i>NELEM</i>)	Δx for each rectangular prism element
28	1	DY(<i>NELEM</i>)	Δy for each rectangular prism element
29	1	ALPH(3, <i>NELEM</i>)	Δx for each triangular prism element
30	1	BETA(3, <i>NELEM</i>)	Δy for each triangular prism element
31	<i>NZRN</i>	SPX,SPY,SPZ,SPB	Copy of file unit 1
32	<i>MXLM</i>	{A}, {C}, {D}	Copy of file unit 2
33	<i>MXLF</i>	{A(bf)}, {C(bf)}	Copy of file unit 3
34	<i>MXLS</i>	{A(bs)}, {C(bs)}	Copy of file unit 4
35	<i>MXLF</i>	{A(Ss)}, {C(Ss)}	Copy of file unit 7
36	<i>MXLF</i>	{A}, {C}	Copy of file unit 15; it is skipped if $NDQN1=0$.
37	<i>MXLQ</i>	{A}, {C}, {D}	Copy of file unit 16; it is skipped if $NBQNO=0$.

4. アルゴリズムの特徴と問題点の検討

この章では、今迄に行われた実在規模の原子炉を含むいくつかの炉心計算や外部中性子源問題の計算で得られた知見をもとに我々のガレルキン型DFEMアルゴリズムの特徴と問題点について述べる。

中性子輸送方程式にFEMを適用する場合、ガレルキン法および変分法的定式化が考えられる。前者は、定式化は簡単であるが境界条件の記述が複雑で体系行列式が非対称になるという短所があった。例えば上面に対する反射条件

$$c_{i1} = c_{i6} \quad \text{for } i \in \text{top} \quad (64)$$

は、角度の基底関数のとり方から

$$\sum_{j=1}^J c_{ij} \chi_j(\Omega') = \sum_{j=1}^J c_{ij} \chi_j(\Omega') \quad \text{for } i \in \text{top}, \quad \Omega' = \Omega - 2(\Omega \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (65)$$

を満たすが、真空条件

$$c_{i1} = 0$$

は、

$$\sum_{j=1}^J c_{ij} \chi_j(\Omega) = 0 \quad \text{for } i \in \text{top}, \quad \Omega \in S_- \quad (66)$$

を満たさない。ここに、 S_- は上面において中性子の体系への入射方向を指している。言い換えるれば、入射方向の主成分である χ_1 の係数は零であるが、いくらか寄与のある $\chi_2 \sim \chi_5$ の係数が零でないため

$$\sum_{j=1}^J c_{ij} \chi_j(\Omega) > 0 \quad \text{for } i \in \text{top}, \quad \Omega \in S_- \quad (67)$$

となっている。

このため、最初のテスト計算として簡単な立方体の裸の原子炉を例にとり、その境界の中性子束の計算結果を調べた。¹⁸⁾この例では、メッシュを色々変えたFDMのコードCITATION¹⁹⁾の結果と比較したが、DFEMによる結果は少ない要素数にも拘らず境界中性子束分布を精度よく表わしており、真空条件の記述法にさほど問題が無いことが分った。この改良法として、係数 c_{ij} ($j=2 \sim 5$)に $\chi_j(\Omega)$ の S_- の成分に見合った重みを掛けて c_{ij} の値を減ずる方法を用いると、計算結果が更に真値に近づくことが確かめられている。また、このような真空条件の記述法の固有値などに与える影響も、体系の規模が大きくなるに従って小さくなる。

体系行列方程式の非対称性については、計算機の記憶容量の増加とSOR法のパラメータ ω の経験的な推定という二つの困難さを伴う。我々の多くのテスト問題では、過大緩和($\omega > 1$)よりむしろ過小緩和($\omega < 1$)の方が一般的で、臨界をはるかに越えるような問題を除いてよい収束値を得て来た。SOR法が不適の問題については、例えば共役傾斜法などの適用が考えられよう。体系方程式が対称となる変分法的定式化においては、このような問題の大部分が理論的に解決される。

内側反復過程における粗メッシュ再釣合法には種々な方法があるが、現在の version は FEM-BABEL¹⁴⁾のやり方になっており、テスト計算ではすべて全体系が一つの粗メッシュに割り当てられている。従って、本格的テストおよび改良は将来の課題である。なお、負の角度中性子束の出現に対し、平面反復の段階で零に置き換える方法を採用している。

外側反復は中性子源外挿法で加速される。FEMにおいては、特別な簡略化を必要とせずに核分裂源が精度よく計算できることを既に 2.3.2 節で示した。この有効性は前述の立方体の裸の原子炉の例¹⁸⁾で示される。この例では、Fig. 22 に示されるように二度漸近状態が起こり、その外挿も効果的に行われている。このため、外側反復を l 回行った後の固有値相対誤差

$$\epsilon_o = \left| \frac{\lambda_l - \lambda_{l-1}}{\lambda_l} \right| \quad (68)$$

が 10^{-5} に減ずるまでの反復回数は約 $1/3$ に節約されている。

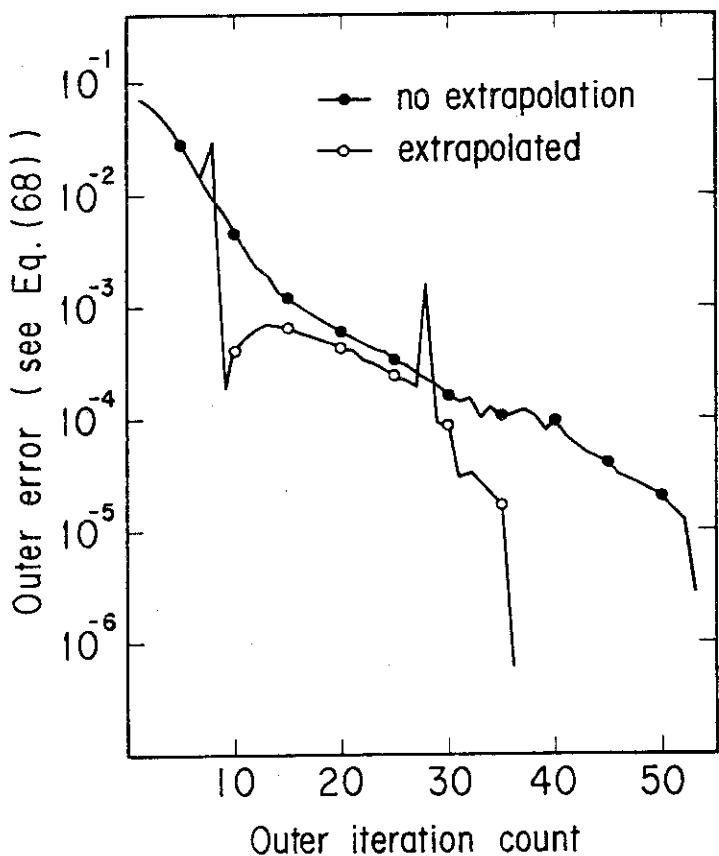


Fig. 22 Acceleration of the outer iteration convergence by source extrapolation

角度の基底関数 χ_j は互に重なり合う支えを持っていることが従来の S_n 法と異なり、角度中性子束の滑らかな表現に役立っている。ray effect^{5),6)} の起こり易い Lathrop の中性子透過問題²⁴⁾を修正して行った計算¹⁸⁾では、二次元輸送コード TWOTRAN-II²⁰⁾の S_{16} 計算と比較して、DFEMによる解は外側境界のうち分布中性子源に近い部分の全中性子束が幾分大きな値を持つが、通常

の S_n 計算は透過計算においては過小値を与える傾向があることを考えると、DFEM の解は良い傾向を示していると言えよう。また、TWOTRAN-II による計算値には ray effect が現れるが、DFEM の同程度の要素数の計算値には、予測通り ray effect がほとんど消滅することが確認された。¹⁸⁾ 更に定量的な精度の詰めを行うには、実測データとの比較検討が必要であろう。我々が用いた角度の基底は共通な支えを持たない基底に取り換えることにより体系行列方程式の次数を (全節点数(I)×(角度の基底の数 J)) から J へ減らすことができるが、中性子束の滑らかさが失われる可能性があるので注意をしなければならない。

三次元輸送計算のため、空間の基底関数を一次とし、角度の基底関数の数を六個としたほか、散乱の非等方性も 3 次 (B_3) までと制限している。このため、精度を上げる最も簡単な手段は要素数を増やすことになるが、(x, y) 方向と z 方向のメッシュの釣合、更には角度の基底関数の数との釣合も大切であり、計算量が急激に増加することになるので慎重な検討が必要となる。¹⁰⁾

本コードで可能な三次元輸送計算の規模を示すために行った高速炉を模擬した計算¹⁶⁾では、1/16 の円柱炉心サイズが $r=111.22$ cm, $z=79.54$ cm の場合、TWOTRAN-II による 36×36 (r, z) メッシュ、 S_4 計算の固有値 (k_{eff}) が 0.9968 であったのに比べ、DFEM-GAL の 169×9 要素による計算のそれは 1.0102 であった。この例でも種々なメッシュによる計算がなされているが、因に本コードの計算コストを示しておくと、 49×9 要素のとき、約 170000 語、内側反復打切り回数が 5 回、外側反復回数が 33 回のときの FACOM M-200 計算機における計算時間が約 500 秒であった。これらは、プログラムの最適化を行うことにより、更に低減される可能性がある。

以下に成果および将来の課題をまとめると、

- 1) 平面反復法は大部分が SOR 法の過小緩和に対してよい収束を示し、中性子源外挿法では正確な核分裂源の計算が特別の配慮なしに行え、実際に有効であることも確かめられた。粗メッシュ再釣合法に関しては新しい方法の提案もなされたが、テストや改良はこれからの課題である。
- 2) ガレルキン法に基づく二重有限要素法は独特な境界条件の記述法を必要とするが、境界中性子束は問題なく求まり、ray effect も和らげられることが確かめられた。
- 3) 更に精度を上げるには、アルゴリズム開発の観点からみると、解法の理論的な誤差評価を進めるとともに、空間要素の形や数と、角度の基底関数の次数や数の誤差に対する相関を詳しく調べる必要がある。
- 4) 一方、コードを具体的に高速炉や熱中性子炉に適用し、それらの設計基準精度を満足できる実用性のあるものにするには、種々の炉心体系についての計算を行い、入力として用いる核データや群定数と精度との関連性を明らかにすることも必要である。
- 5) 変分法のコードとの比較計算を行い、二つの解法の一般的な違いと問題による違いを明確にする。

以上のほか、更にコードとしての最適化を進める必要があろう。

我々のアルゴリズムに基づくコードのいわば初版が完成したが、具体的な解析業務に使うには、テスト計算例のタイプや数も十分でなく、更に広範囲の使用例とその経験に基づくコードの改良

作業が必要である。今迄に得られた研究成果の一部は時折発表する機会があったが、本稿は新たな提案も含め、研究者間の検討資料となるよう詳細かつ総合的に記したものである。

謝 辞

この研究の開始にあたり、原子力工学試験センター所長・下桶敬則氏および核燃料施設安全解析室長・内藤淑孝氏より多大なる激励と援助を頂きました。また、本コードの開発にあたり、原子炉システム研究室長・石黒幸雄氏より絶えざる激励と助言を得るとともに、計算センター・石黒美佐子氏と原子炉システム研究室・高野秀機氏には計算結果の解析に対し協力を得ました。ここに記して謝意を表します。

作業が必要である。今迄に得られた研究成果の一部は時折発表する機会があったが、本稿は新たな提案も含め、研究者間の検討資料となるよう詳細かつ総合的に記したものである。

謝 辞

この研究の開始にあたり、原子力工学試験センター所長・下桶敬則氏および核燃料施設安全解析室長・内藤淑孝氏より多大なる激励と援助を頂きました。また、本コードの開発にあたり、原子炉システム研究室長・石黒幸雄氏より絶えざる激励と助言を得るとともに、計算センター・石黒美佐子氏と原子炉システム研究室・高野秀機氏には計算結果の解析に対し協力を得ました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Straker E.A. : ORNL-4585 (1970).
- 2) Lathrop K.D. : LA-6333-MS (1976).
- 3) Nishimura T., Toda K., Yokobori H. and Sugawara A. : J. Nucl. Sci. Technol. (Tokyo), 17, 539 (1980).
- 4) Sasamoto N. and Takeuchi K. : Nucl. Sci. Eng., 80, 554 (1982).
- 5) Lathrop K.D. : Nucl. Sci. Eng., 32, 357 (1968).
- 6) Briggs L.L., Miller W.F. Jr. and Lewis E.E. : Nucl. Sci. Eng., 57, 205 (1975).
- 7) Zienkiewicz O.C. and Cheung Y.K. : "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw-Hill, New York (1967).
- 8) Ohnishi T. : "Proc. Conf. Numerical Reactor Calculations, IAEA, Vienna", (1972).
- 9) Reed Wm. H., Brinkley F.W. and Lathrop K.D. : LA-5428-MS (1973).
- 10) Kaper H.G., Leaf G.K. and Lindemon A.J. : ANL-8126 (1974).
- 11) Lewis E.E., Miller W.F. Jr. and Henry T.P. : Nucl. Sci. Eng., 58, 203 (1975).
- 12) Tomlinson E.T. and Robinson J.C. : Nucl. Sci. Eng., 63, 167 (1977).
- 13) Fujimura T., Tsutsui T., Horikami K., Ohnishi T. and Nakahara Y. : "FEMRZ Program for Solving Two-Dimensional Neutron Transport Problems in Cylindrical Geometry by the Finite Element Method", JAERI 1253 (1978).
- 14) Ise T. Yamazaki T. and Nakahara Y. : "FEM-BABEL, A Computer Program for Solving Three-Dimensional Neutron Diffusion Equation by the Finite Element Method", JAERI 1256 (1978).
- 15) Acroyd R.T. : Annal. Nucl. Ener., 8, 539 (1981).
- 16) Fujimura T., Nakahara Y. and Matsumura M. : J. Nucl. Sci. Technol. (Tokyo), 20 620 (1983).
- 17) Kaplan S. and Davis J.A. : Nucl. Sci. Eng., 28, 166 (1967).
- 18) Fujimura T., Nakahara Y. and Matsumura M. : "Proc. Int. Conf. Radiation Shielding, Tokyo", (1983).
- 19) Fowler T.B., Vondy D.R. and Cunningham G.W. : ORNL-TM-2496 (Rev. 2) (1969).
- 20) Lathrop K.D. and Brinkley F.W. : LA-4848-MS (1973).
- 21) Fujimura T. and Matsui Y. : Nucl. Sci. Eng., 77, 360 (1981).
- 22) Wagner M.R. : GA-8307 (1968).
- 23) Ise T. and Yamazaki T. : "LOOM-P : a Finite Element Mesh Generation

- Program with On-Line Graphic Display", JAERI-M 7119 (1977).
24) Lathrop K.D. : Nucl. Sci. Eng., 45, 255 (1971).