JAERI-M
84-035

直線立体磁気軸配位におけるMHD平衡

1984年3月

服藤　憲司*・常松　俊秀・安積　正史
竹田　辰興

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M レポートは，日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは，日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319—11 茨城県那珂郡東海村）あて，お申しこしください。なお，このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319—11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319—11, Japan.

編集兼発行　日本原子力研究所
印　　刷　日立高速印刷株式会社

JAERI－M 84－035

直線立体磁気軸配位におけるＭＨＤ平衡

日本原子力研究所東海研究所核融合研究部
服藤憲司*・常松俊秀・安積正史・竹田辰興

（１９８４年１月３１日受理）

直線立体磁気軸配位における磁気流体力学的平衡を，数値的に研究した。矩形数値境界内の円形リミッターにより規定されるプラズマを対象に，真空領域の存在する自由境界値問題として定式化し，数値解法として，逐次近似過大緩和法及び行列のＬＵ分解に基づく直接法の両者を採用して，平衡解析コードを開発した。

この計算コードを用いて平衡の諸特性を調べた結果，プラズマ自身の圧力による磁気井戸の増加が確認され，「自己安定化効果」現象の一端が示唆された。また，磁気軸の捩率による回転変換とプラズマ電流のつくるそれとが互いに打ち消し合うようなパラメーター領域では，解の収束範囲が極めて狭いことがわかった。

＊　核融合特別研究生，東北大学工学部

MHD Equilibria in a Straight System with a Non-Planar Magnetic Axis

Kenji HARAFUJI*, Toshihide TSUNEMATSU, Masafumi AZUMI and Tatsuoki TAKEDA

Department of Thermonuclear Fusion Research,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received January 31, 1984)

Numerical investigations of equilibria with free boundary are made in the straight system with a three dimensional magnetic axis. Grad-Shafranov equation is solved by both iterative SOR method and direct method on the basis of LU matrix decomposition. From the standpoint of CPU time, SOR method is better than direct method, when number of outer iterations is executed. A part of the "Self-Stabilization Effect" due to the increase of plasma pressure is successfully simulated. On the parameter space where the relation between the rotational transform due to the plasma current and that due to the torsion of helical magnetic axis is subtractive, the convergence region is very small.

Keywords : MHD Equilibria, Grad-Shafranov Equation, Non-Planar Magnetic Axis, SOR Method, Direct Method, Self-Stabilization Effect, Plasma, Computer Code

---

* On leave from Tohoku University

目　　次

Contents

1. は じ め に

立体磁気軸配位によるプラズマ閉じ込めの研究は，歴史的には1958年にスピッツァーによって提案された「8の字形ステラレーター」に始まる[1)]。この配位は，磁気軸が一平面上にないトーラス配位で，日本でもプラズマ・ベータートロンやラヒトップなどが作製され研究された。その配位に基づく閉じ込め装置は，現在核融合炉の候補として最も期待され，また世界的に核融合研究の主流となっているトカマク型装置に比べて，系が複雑である点，及びプラズマ体積に対する装置全体の体積が比較的大きくなる，という欠点は否めないものの，「ステラレーター」で代表される外部導体系に属し，以下のような長所，特色を持っている。(1)本質的にプラズマ中に大電流を流す必要がなく，そのために電流駆動型ヘリカル不安定性から解放される。(2)プラズマ電流が零であっても平衡が存在するので，交流放電が可能である。(3)プラズマ閉じ込めのための重要なパラメーターの1つである磁力線の回転変換が，磁気軸の空間的な捩れによって作られている。(4)磁気面に楕円度や三角形度の成分を適当に与えることにより，真空磁場において磁気井戸を形成させ，また磁気シアーを大きくとれる[2)]。円断面プラズマであっても，ベータ値（プラズマ圧力と磁場圧力との比）がある程度高くなってくると，プラズマ自身の圧力で磁気面形状が変化して安定化する，いわゆる「自己安定化効果」[3)]が期待できる。

本報告書では，「立体磁気軸トーラス配位」の中でも特にヘリカル対称性の良い，「アスペレーターNP配位（図1）」[4)]を念頭におき，この配位の第一近似で厳密な意味でヘリカル対称性の成立する「直線立体磁気軸配位」のプラズマの磁気流体力学的平衡を，数値的に研究する。

立体磁気軸配位は，最終的にはプラズマ電流を流さずに，高温・高ベータ値プラズマを閉じ込めることを目的とするものの，実際的には電流を流してジュール加熱を行う方が簡便である。ここでは，基本的にプラズマ電流の流れている場合の平衡を扱う。

本報告書は5章で構成されている。第2章では，平衡の基礎方程式について述べる。第3章では，平衡方程式の数値解法について，また第4章では平衡計算の結果の例について記し検討を加える。最後に，第5章では上記各章で得られた結論をまとめる。

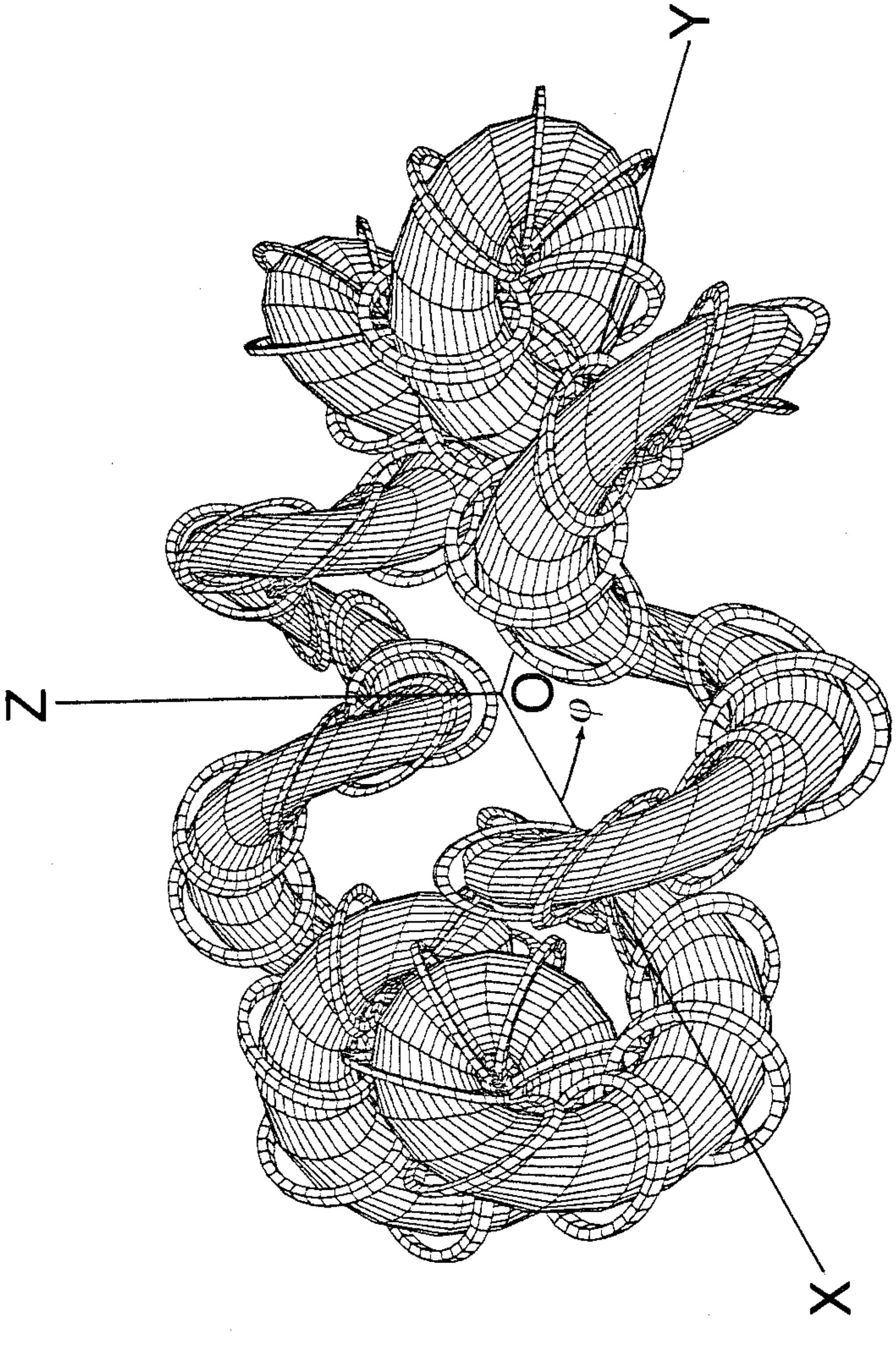


Fig.1 Schematic drawing of discharge vessel of a toroidal system with a three dimensional magnetic axis.

2. 基 礎 方 程 式

プラズマの磁気流体力学的（ＭＨＤ）平衡は次式で与えられる。

$$\vec{\nabla} P = \vec{j} \times \vec{B} \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{j} \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

ここで，Pはプラズマ圧力，j及びBは，それぞれ電流密度及び磁場を示す。また，μ_o は真空の透磁率である。ヘリカル対称性を持った直線立体磁気軸配位を考える時，磁場は，らせん状の，磁気軸または装置の幾何学的中心軸に準拠したメルシエ座標（ρ，ω，s）[5]を用いて，

$$\vec{B} = T\vec{u} + \vec{u} \times \vec{\nabla}\psi \tag{2.4}$$

で与えられる。ここで

$$\vec{u} = \frac{æ\rho\vec{e}_\omega + h_s\vec{e}_s}{h_s^2 + æ^2\rho^2} \tag{2.5}$$

$$h_s = 1 - k\rho\cos\theta \tag{2.6}$$

$$\theta = \omega - æ s \tag{2.7}$$

である。θ は，s に垂直な面上で，らせん軸の曲率中心方向から測った角度を表わす。定数k及びæは，それぞれらせん軸の曲率及び捩率を与え，次式で与えられる。

$$k = \frac{\alpha^2 r_o}{1 + \alpha^2 r_o^2} \quad ; \quad æ = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 r_o^2} \tag{2.8}$$

ここで，$2\pi / \alpha$ 及び r_o は，各らせん軸のピッチ及び半径である。図２に，本報告書で扱う座標と幾何学的配置を示してある。なお，ヘリカル対称性を仮定しているので，すべての物理量は ρ と θ のみの関数として表現できる。(2.4) 式にあらわれる ψ は磁気面関数であり，Tは ψ のみに依存する任意関数である。

さて，ヘリカル対称の場合，(2.1) 式は以下の ψ に関する２階偏微分方程式（グラド・シャフラノフ方程式）に還元される[2]。

$$L\psi - \frac{2æT}{(h_s^2 + æ^2\rho^2)^2} + \frac{TT'(\psi)}{h_s^2 + æ^2\rho^2} + \mu_o P'(\psi) = 0 \tag{2.9}$$

ここで，Lは微分演算子であり，次式で与えられる。

$$L = \frac{1}{h_s\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{h_s\rho}{h_s^2 + æ^2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{h_s\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{h_s}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.10}$$

$T = T(\psi)$ 及び $P = P(\psi)$ は，それぞれプラズマ電流分布及びプラズマ圧力分布を決定する。

さて，Tと磁場の ω 成分 B_ω 及び s 成分 B_s との間には

$$T = h_s B_s + æ\rho B_\omega \tag{2.11}$$

の関係が成立する。また，磁場の各成分及び電流密度は，ψ 及びTを用いて

$$B_\rho = \frac{1}{h_s \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{2.12}$$

$$B_\omega = -\frac{h_s \dfrac{\partial \psi}{\partial \rho} - æ \rho T}{h_s^2 + æ^2 \rho^2} \tag{2.13}$$

$$B_s = \frac{æ \rho \dfrac{\partial \psi}{\partial \rho} + h_s T}{h_s^2 + æ^2 \rho^2} \tag{2.14}$$

$$\mu_o \vec{j} = T'(\psi) \vec{B} + \mu_o P'(\psi) \left(æ \rho \vec{e}_\omega + h_s \vec{e}_s \right) \tag{2.15}$$

となる。

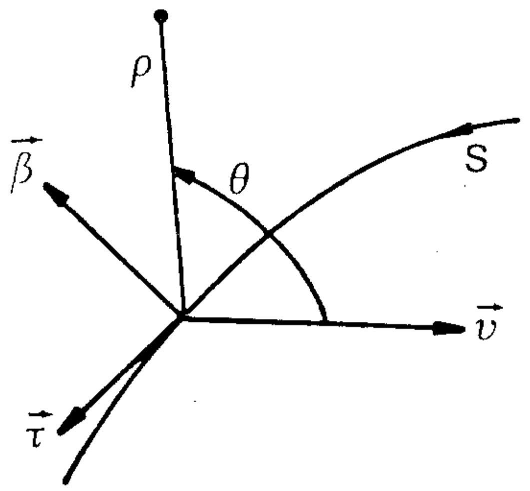


Fig.2(a) The coordinates ρ, θ, s. τ, υ, and β are the tangent, normal and binormal vectors, respectively.

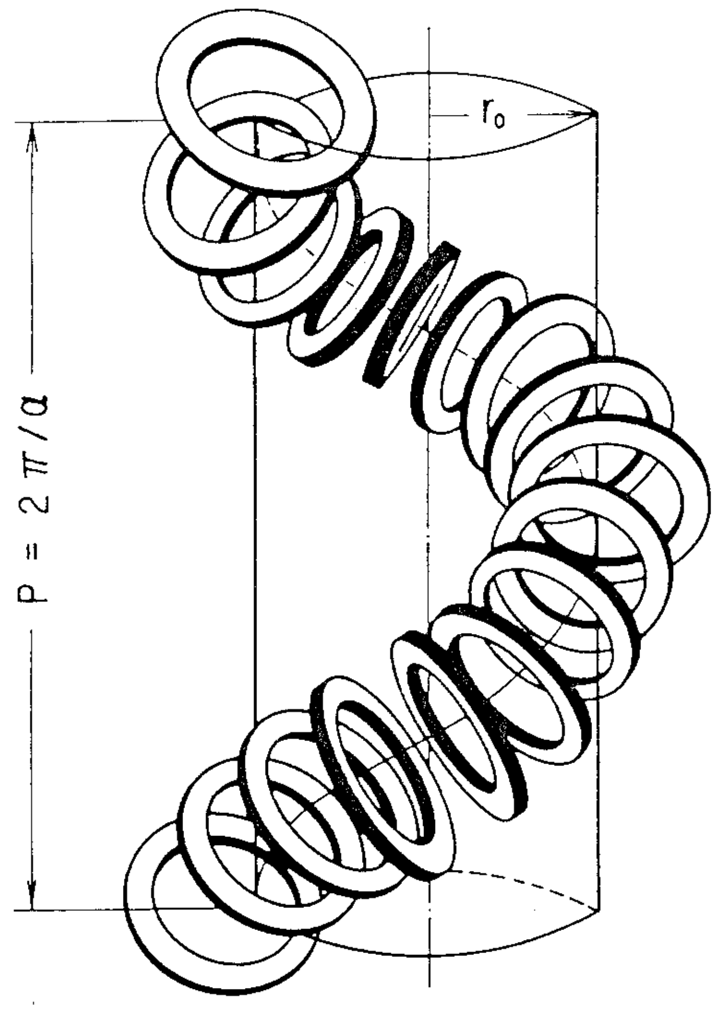


Fig.2(b) Coil arrangement of a device with a helical magnetic axis.

3. 計算方法

この章では，グラド・シャフラノフ方程式の数値解を具体的に求める方法について述べる。まず，自由境界値問題としての定式化と，変数の規格化を行い，有限差分法によって得られた連立一次方程式を解くプログラムを構成した。数値解法としては，SOR法及び直接法を採用した。

3.1 数値計算のための定式化[6-8]

前章で与えられた平衡方程式（2.9）式を，自由境界値問題として数値的に解くために，次式の様に並べかえる。

$$L\psi - \frac{2\,æ\,B_o}{(h_s^2 + æ^2\rho^2)^2}$$

$$= -S(\psi)\left\{\frac{TT'(\psi)}{h_s^2 + æ^2\rho^2} + \mu_o P'(\psi) - \frac{2\,æ\,(T - B_o)}{(h_s^2 + æ^2\rho^2)^2}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (3.1)$$

ここで

$$S(\psi) = 1 \ : プラズマ中$$
$$S(\psi) = 0 \ : 真空中 \quad \cdots\cdots \quad (3.2)$$

である。（3.1）式において，B_oはポロイダル電流の流れ関数Tの真空領域の部分の効果を表わす。

さて，真空磁場においては，磁気軸は装置の幾何学的な中心から主法線方向，すなわち曲率の中心方向へ変位しており，またプラズマ・パラメーターの変化によっても，その位置は変化する。（3.1）式は，らせん磁気軸及び装置の幾何学的中心の軌跡であるらせん軸，のどちらに準拠した座標系に対しても成立するが，数値計算上の便宜を考慮に入れた場合，装置の幾何軸に準拠した座標系で解く方が都合が良い。何故ならば，一般に，磁気軸の幾何軸からの変位の大きさの関数として，磁気軸に垂直な面と幾何軸に垂直な面とは有限の傾きを有しており，そのために数値境界上での境界値の与え方が，磁気軸に準拠した座標系で解く場合に複雑になってくるからである。なお，上述の2つの面の傾きの大きさの計算方法は，付録Aに概述してある。

（3.1）式の具体的な計算内容は以下のとおりである。すなわち，プラズマ領域を規定するリミッターの軌跡をあらかじめ与え，プラズマ電流分布及びプラズマ圧力分布をψの関数として仮定し，最初のステップではリミッター内の領域がすべてプラズマで満たされるとして（3.1）式を解く。以下のステップでは，次に示す反復法により逐次新しい解を求め，最終的に収束させる。

$$\widetilde{L}\,\psi_{n+1} = \begin{cases} R(\psi_n) & : \ \psi_n \le \psi_{nL} \\ 0 & : \ \psi_n > \psi_{nL} \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (3.3)$$

上式において，$\widetilde{L}$ は微分演算子Lと同等の内容を持つ差分演算子であり，添字nは，n回目の反復計算後における値であることを示す。Rは，(3.1)式における右辺の内容を代表し，ψ_{nL} は次式で与える，n回目の反復計算後においてリミッターで規定されるψの最大値である。

$$\psi_{nL} = \mathrm{MAX}\ \{\ \psi_n(\rho,\theta),\ \ (\rho,\theta) \in C_L\ \} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.4)$$

C_L はリミッターの軌跡を示す。各の反復段階において，新しいψ_nのある部分がC_L によってこすり取られて，新しいプラズマ境界C_pが決定される。C_pは，ψ_{nL}すなわちプラズマ境界における磁束関数ψ_o ＝一定の軌跡と一致する。

3.2 規 格 化

(3.1)式にあらわれる変数及び幾何学的パラメーターを無次元化する。また，同時に求めるべきψの変域が，概略0から1程度になる様に調整し，数値誤差の影響をなるべく受けないようにする。

プラズマの平均半径をaとおき，以下のように規格化を行う。ハットを付した変数は規格化されたものを表わすことにする。

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{a} \quad (3.5)$$

$$\hat{\psi} = \frac{\psi}{\psi^*} \quad (3.6)$$

ただし

$$\psi^* = \text{æ}\, B_o a^2 \quad (3.7)$$

(3.5)及び(3.6)式で与えられる規格化に従い，その他のものを次に示すように規格化する。

$$\hat{\text{æ}} = \text{æ}\, a \quad (3.8)$$

$$\hat{k} = k a \quad (3.9)$$

$$\hat{h}_s = 1 - \hat{k}\,\hat{\rho}\,\cos\theta \quad (3.10)$$

$$\hat{L} = a^2 L \quad (3.11)$$

$$\hat{T} = \frac{a}{\psi^*} T \quad , \quad \hat{B}_o = \frac{a}{\psi^*} B_o \quad (3.12)$$

$$\hat{P} = \mu_o \frac{a^2}{\psi^{*2}} P \quad (3.13)$$

(3.5)～(3.13)式を(3.1)式に代入すると

$$\hat{L}\,\hat{\psi} - \frac{2\,\hat{\text{æ}}\,\hat{B}_o}{(\hat{h}_s^2 + \hat{\text{æ}}^2\hat{\rho}^2)^2} = -S(\hat{\psi})\left\{\frac{\hat{T}\hat{T}'(\psi)}{\hat{h}_s^2 + \hat{\text{æ}}^2\hat{\rho}^2} + \hat{P}'(\hat{\psi}) - \frac{2\,\hat{\text{æ}}\,(\hat{T} - \hat{B}_o)}{(\hat{h}_s^2 + \hat{\text{æ}}^2\hat{\rho}^2)^2}\right\}$$

(3.14)

となる。以下，ハットを省略する。

3.3 行列方程式

(3.1) 式で与えられる平衡方程式を，有限差分法に基づいて行列方程式に帰着させる。

(3.1) 式は（ρ，θ）座標系で記述されているが，このままでは $\rho=0$ の点における境界条件の設定が困難であるので，次の座標変換を行ってデカルト座標（x，y）で解く。

$$x=\rho\cos\theta \quad , \quad y=\rho\sin\theta \qquad \cdots\cdots (3.15)$$

変換後の微分演算子Lを，以下の様に整理する。

$$L=a_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{yy}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y} \qquad \cdots\cdots (3.16)$$

ここで

$$a_{xx}=\frac{h_s^2+æ^2y^2}{h_s^2(h_s^2+æ^2\rho^2)}$$

$$a_{xy}=\frac{-2æ^2xy}{h_s^2(h_s^2+æ^2\rho^2)}$$

$$a_{yy}=\frac{h_s^2+æ^2x^2}{h_s^2(h_s^2+æ^2\rho^2)}$$

$$a_x=\frac{-x(3h_s^2æ^2+æ^4\rho^2)+k(h_s^2+æ^2\rho^2)^2}{h_s^3(h_s^2+æ^2\rho^2)^2}$$

$$a_y=-\frac{y(3h_s^2æ^2+æ^4\rho^2)}{h_s^3(h_s^2+æ^2\rho^2)^2} \qquad \cdots\cdots (3.17)$$

$$h_s=1-kx \quad ; \quad \rho^2=x^2+y^2 \qquad \cdots\cdots (3.18)$$

である。中心差分による差分化を行うと (3.16) 式より次式を得る。

$$\begin{aligned}\widetilde{L}\psi_{ij} &= E_{ij}\psi_{i+1,j+1}+F_{ij}\psi_{i+1,j-1}+G_{ij}\psi_{i-1,j+1}\\ &+H_{ij}\psi_{i-1,j-1}+J_{ij}\psi_{i+1,j}+K_{ij}\psi_{ij}\\ &+L_{ij}\psi_{i-1,j}+M_{ij}\psi_{i,j+1}+N_{ij}\psi_{i,j-1}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (3.19)$$

ここで

$$E_{ij}=\left(\frac{\widetilde{a}_{xy}}{4\Delta x\Delta y}\right)_{ij} \;,\quad F_{ij}=\left(-\frac{\widetilde{a}_{xy}}{4\Delta x\Delta y}\right)_{ij} \;,$$

$$G_{ij}=\left(-\frac{\widetilde{a}_{xy}}{4\Delta x\Delta y}\right)_{ij} \;,\quad H_{ij}=\left(\frac{\widetilde{a}_{xy}}{4\Delta x\Delta y}\right)_{ij} \;,$$

$$J_{ij} = \left(\frac{\widetilde{a}_{xx}}{(\Delta x)^2} + \frac{\widetilde{a}_x}{2\Delta x}\right)_{ij}, \quad K_{ij} = \left(-\frac{2\widetilde{a}_{xx}}{(\Delta x)^2} - \frac{2\widetilde{a}_{yy}}{(\Delta y)^2}\right)_{ij},$$

$$L_{ij} = \left(\frac{\widetilde{a}_{xx}}{(\Delta x)^2} - \frac{\widetilde{a}_x}{2\Delta x}\right)_{ij}, \quad M_{ij} = \left(\frac{\widetilde{a}_{yy}}{(\Delta y)^2} + \frac{\widetilde{a}_y}{2\Delta y}\right)_{ij},$$

$$N_{ij} = \left(\frac{\widetilde{a}_{yy}}{(\Delta y)^2} - \frac{\widetilde{a}_y}{2\Delta y}\right)_{ij} \tag{3.20}$$

である。また

$$\Delta x = \frac{b_x}{M-1} \quad ; \quad \Delta y = \frac{b_y}{N-2} \tag{3.21}$$

$$x_i = (i-1)\Delta x, \quad 1 \le i \le M \tag{3.22}$$

$$y_j = (j-2)\Delta y, \quad 1 \le j \le N \tag{3.23}$$

ここで，b_x 及び b_y は解くべき矩形領域のｘ及びｙ方向の一辺の長さであり，Ｍ及びＮは，それぞれの方向の矩形メッシュの分割数である。また Δx，Δy 及び x_i，y_j は各方向のメッシュ巾，及びメッシュの座標点である（図３参照）。

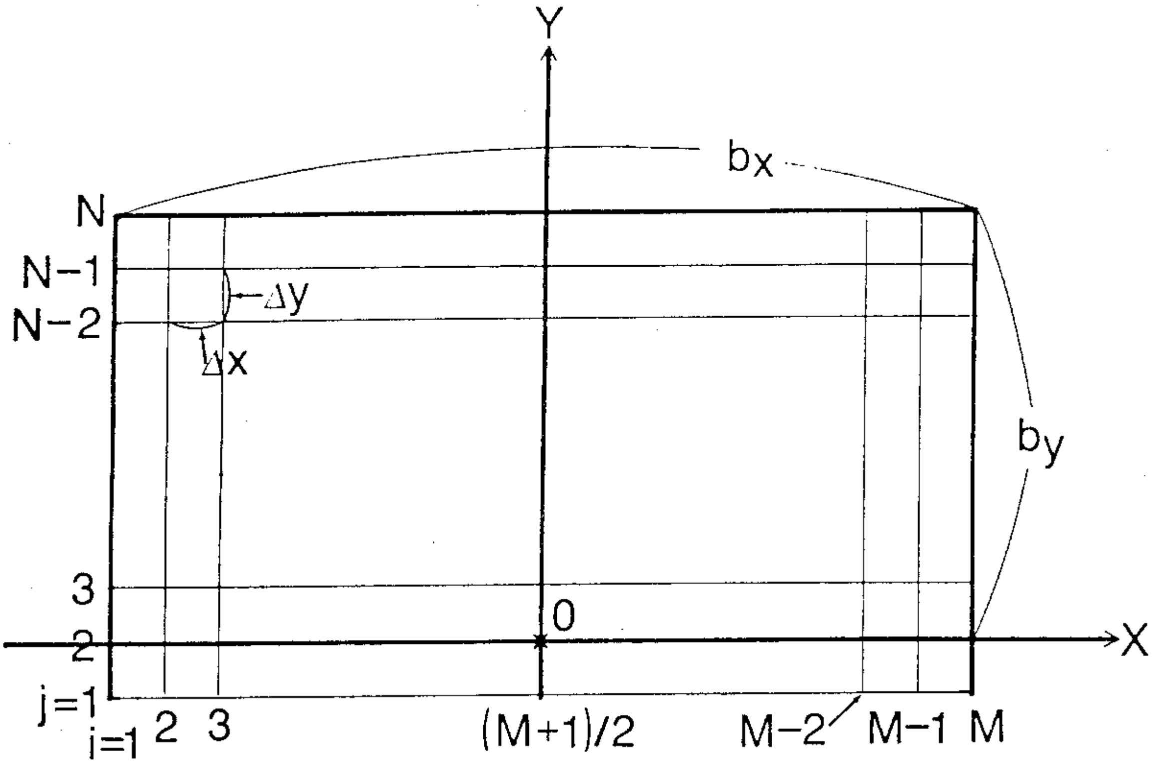


Fig.3　Constitution of rectangular mesh for the equilibrium calculation.

なお，記号の上に付された波形は，差分表示したものであることを意味する。

(3.19) 式を次のようにまとめる。

$$\widetilde{L}\psi_{ij} = U_{ij} \tag{3.24}$$

U_{ij} は，(3.19) 式の右辺の内容を表わしている。これより

$$W\vec{\psi}=\vec{U} \tag{3.25}$$

という行列方程式を得る。$\vec{\psi}$ 及び $\vec{U}$ は，それぞれ (3.24) 式の ψ_{ij} 及び U_{ij} をベクトル表示したものであり，W は $\tilde{L}$ に対応する行列である。行列 W は次のようなブロック三重対角行列となる。

$$W=\begin{pmatrix} D_1 & Q_1 & & & & & \\ P_2 & D_2 & Q_2 & & & 0 & \\ & P_3 & D_3 & Q_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & P_{M-2} & D_{M-2} & Q_{M-2} & \\ & 0 & & & P_{M-1} & D_{M-1} & Q_{M-1} \\ & & & & & P_M & D_M \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

ここで

$$D_i=\begin{pmatrix} K_{i1} & M_{i1} & & & & & \\ N_{i2} & K_{i2} & M_{i2} & & & 0 & \\ & N_{i3} & K_{i3} & M_{i3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & N_{i,N-2} & K_{i,N-2} & M_{i,N-2} & \\ & 0 & & & N_{i,N-1} & K_{i,N-1} & M_{i,N-1} \\ & & & & & N_{iN} & K_{iN} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$P_i=\begin{pmatrix} L_{i1} & G_{i1} & & & & & \\ H_{i2} & L_{i2} & G_{i2} & & & 0 & \\ & H_{i3} & L_{i3} & G_{i3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & H_{i,N-2} & L_{i,N-2} & G_{i,N-2} & \\ & 0 & & & H_{i,N-2} & L_{i,N-1} & G_{i,N-1} \\ & & & & & H_{iN} & L_{iN} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

$$Q_i=\begin{pmatrix} J_{i1} & E_{i1} & & & & & \\ F_{i2} & J_{i2} & E_{i2} & & & 0 & \\ & F_{i3} & J_{i3} & E_{i3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & F_{i,N-2} & J_{i,N-2} & E_{i,N-2} & \\ & 0 & & & F_{i,N-1} & J_{i,N-1} & E_{i,N-1} \\ & & & & & F_{iN} & J_{iN} \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

以上の行列表現において，$\vec{\psi}$及び$\vec{U}$は

$$\vec{\psi} = \left[\begin{array}{c} \psi_1 \\ \hdashline \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{M-1} \\ \hdashline \psi_M \end{array}\right], \quad \psi_i = \left[\begin{array}{c} \psi_{i1} \\ \hdashline \psi_{i2} \\ \vdots \\ \psi_{i,N-1} \\ \hdashline \psi_{iN} \end{array}\right] \quad 1 \le i \le M \tag{3.30}$$

$$\vec{U} = \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hdashline U_2 \\ \vdots \\ U_{M-1} \\ \hdashline U_M \end{array}\right], \quad U_i = \left[\begin{array}{c} U_{i1} \\ \hdashline U_{i2} \\ \vdots \\ U_{i,N-1} \\ \hdashline U_{iN} \end{array}\right] \quad 1 \le i \le M \tag{3.31}$$

で与えられる。

3.4 境界条件

ここでは，平衡方程式を矩形領域内に円形のリミッターを配して解く。ヘリカル対称であるので，y＝0の線について上下対称であり，よってy＝0上で対称境界条件を課して上半分のみを解けば十分である。矩形上の他の3辺に対しては

$$\psi_B = A + \psi_{ext} \tag{3.32}$$

の形で境界値を与える。ここで，Aは任意定数であり，ψ_{ext}は外部多極磁場コイルによる磁気面関数の境界上での値である（付録B参照）。（3.32）式で与えられる境界条件は，導体シェルと，シエル内までしみ込んだ静的外部多重極磁場によって，プラズマ平衡を達成する場合に相当する。

さて，解くべき領域は図3において，$2 \le i \le M-1$，$2 \le j \le N-1$で与えられる格子上の点である。ψ_{1k}，ψ_{Mk}（$1 \le k \le N$），及び$\psi_{\ell k}$（$1 \le \ell \le M$）は境界条件として既知である。この境界条件によって境界値を消去すると，（3.26）－（3.31）式中の破線で区切った部分について，行列要素を以下のように変形した行列方程式となる。

$$U_{2j} \to U_{2j} - H_{2j}\psi_{1,j-1} - L_{2j}\psi_{1j} - G_{2j}\psi_{1,j+1} \quad \text{for } 3 \le j \le N-2$$

$$U_{M-1,j} \to U_{M-1,j} - F_{M-1,j}\psi_{M,j-1} - J_{M-1,j}\psi_{Mj} - E_{M-1,j}\psi_{M,j+1} \quad \text{for } 3 \le j \le N-2$$

$$U_{i,N-1} \to U_{i,N-1} - G_{i,N-1}\psi_{i-1,N} - M_{i,N-1}\psi_{iN} - E_{i,N-1}\psi_{i+1,N} \quad \text{for } 3 \le i \le M-2$$

$$U_{2,N-1} \to U_{2,N-1} - H_{2,N-1}\psi_{1,N-2} - L_{2,N-1}\psi_{1,N-1} - G_{2,N-1}\psi_{1N} - M_{2,N-1}\psi_{2N} - E_{2,N-1}\psi_{3N}$$

$$U_{M-1,N-1} \to U_{M-1,N-1} - F_{M-1,N-1}\psi_{M,N-2} - J_{M-1,N-1}\psi_{M,N-1} - E_{M-1,N-1}\psi_{MN} - G_{M-1,N-1}\psi_{M-2,N}$$
$$- M_{M-1,N-1}\psi_{M-1,N}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{i2} \to E_{i2} + F_{i2} = 0 \\ G_{i2} \to G_{i2} + H_{i2} = 0 \\ M_{i2} \to M_{i2} + N_{i2} \end{array}\right\} \quad \text{for} \quad 2 \leq i \leq M-1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.33)$$

なお，ここで（3.33）式中の最後の3つの補正は，$y=0$ での対称境界条件を意味する。

3.5 SOR法

大型行列Wは，疎なブロック3重対角行列であることに着目して，「ブロックSOR法」を用いて解く。アルゴリズムは次の形で表現できる[9]。

$$D_i \boldsymbol{\phi}_i^{(m+1)} = \omega \left\{ -P_i \boldsymbol{\phi}_{i-1}^{(m+1)} - Q_i \boldsymbol{\phi}_{i+1}^{(m)} - D_i \boldsymbol{\phi}_i^{(m)} + \mathbf{U}_i \right\} + B_i \boldsymbol{\phi}_i^{(m)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.34)$$

これを，次のように2つに分割する。

$$D_i \hat{\boldsymbol{\phi}}_i^{(m+1)} = -P_i \boldsymbol{\phi}_{i-1}^{(m+1)} - Q_i \boldsymbol{\phi}_{i+1}^{(m)} + \mathbf{U}_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.35)$$

$$\boldsymbol{\phi}_i^{(m+1)} = \omega \left(\hat{\boldsymbol{\phi}}_i^{(m+1)} - \boldsymbol{\phi}_i^{(m)} \right) + \boldsymbol{\phi}_i^{(m)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.36)$$

すなわち，求めようとする解 ϕ の，例えば解析解から予想される推定値を $\phi^{(o)}$ とおき，次の改良された根 $\phi^{(1)}$ を求める。以下逐次同様の操作を行って，m回目の解を $\phi^{(m)}$ で示している。収束の判定は

$$\left| \frac{\phi^{(m+1)} - \phi^{(m)}}{\phi^{(m+1)}} \right| < \varepsilon_1 \qquad (3.37)$$

の条件を満足しているか否かで行う。ε_1 は任意の微少パラメーターである。

（3.36）式にあらわれる定数 ω は緩和因子であり，上述のアルゴリズムができるだけ速く収束するように選ばれるべきパラメーターであって

$$0 < \omega < 2 \qquad (3.38)$$

で与えられる。行列Wは，ヤングの「性質A」を持つ行列とは異なるため，上述のアルゴリズムが正しい値に収束することが保証されているわけではないが，後述するように直接法と比較して良い一致を示した。

さて，（3.35）式において，D_i は3対角行列であるので，このステップはガウスの消去法を用いた直接的な方法で解ける。すなわち，（3.35）式の右辺のベクトルをまとめて $\overline{\mathbf{U}}_i$ とおき，

$$v_2 = \frac{M_{i2}}{K_{i2}} \; ; \qquad v_k = \frac{M_{ik}}{K_{ik} - N_{ik} v_{k-1}} \qquad 3 \leq k \leq N-2$$

$$g_2 = \frac{\overline{U}_{i2}}{K_{i2}} \; ; \qquad g_k = \frac{\overline{U}_{ik} - N_{ik} g_{k-1}}{K_{ik} - N_{ik} v_{k-1}} \qquad 3 \leq k \leq N-1$$

$$(3.39)$$

と定義すれば，解ベクトル $\boldsymbol{\phi}_i$ の要素 ϕ_{ik} は次式によって漸化的に与えられる。

$$\psi_{i,N-1} = g_{N-1} \;:\; \psi_{ik} = g_k - v_k \psi_{i,k+1} \qquad 2 \le k \le N-2 \qquad \cdots\cdots (3.40)$$

(3.39) 及び (3.40) 式で与えられるステップは，それぞれ前進消去及び後退代入を表わす。

3.6 直 接 法

行列Wがブロック3対角行列になっていることを利用し，行列のLU分解を使って，直接的に行列方程式 (3.25) を解く。すなわち，(3.39) 式と同等の内容のアルゴリズムを (3.25) 式に適用する。

$$D_2 V_2 = Q_2 \;:\; (D_i - P_i V_{i-1}) V_i = Q_i \qquad 3 \le i \le M-2$$
$$D_2 \mathbf{g}_2 = \mathbf{U}_2 \;:\; (D_i - P_i V_{i-1}) \mathbf{g}_i = \mathbf{U}_i - P_i \mathbf{g}_{i-1} \qquad 3 \le i \le M-1 \qquad \cdots\cdots (3.41)$$

(3.41) 式で定義される行列 V_i 及びベクトル $\mathbf{g}_i$ を用いて，以下のように漸化的に解ベクトル $\boldsymbol{\psi}_i$ を求めることができる。

$$\boldsymbol{\psi}_{M-1} = \mathbf{g}_{M-1} \;:\; \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{g}_i - V_i \boldsymbol{\psi}_{i+1} \qquad 2 \le i \le M-2 \qquad \cdots\cdots (3.42)$$

(3.41) 式において，係数行列をAとおく。すなわち

$$A_i = \begin{cases} D_i & \text{for} \quad i = 2 \\ D_i - P_i V_{i-1} & \text{for} \quad 3 \le i \le M-1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots (3.43)$$

と定義し，A_i を次の形にLU分解する。

$$A_i = \begin{pmatrix} \ell_{11} & & & & \\ \ell_{21} & \ell_{22} & & \text{O} & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & & u_{2n} \\ & & 1 & \cdots & u_{3n} \\ & \text{O} & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (3.44)$$

但し，$n = N-2$ である。

これより，(3.41) 式で与えられる行列方程式は，以下のような連立1次方程式に帰着できる。

$$LU\vec{x} = \vec{b} \qquad \cdots\cdots (3.45)$$

ここで，$\vec{x}$ は行列 V_i の列ベクトル及びベクトル $\mathbf{g}_i$ を代表し，$\vec{b}$ は行列 Q_i の列ベクトル及びベクトル $\mathbf{U}_i - P_i \mathbf{g}_{i-1}$ を代表している。(3.45) 式を解くことは，次の2つの方程式

$$L\vec{y} = \vec{b} \qquad (3.46)$$
$$U\vec{x} = \vec{y} \qquad (3.47)$$

を解くことに還元される。[10]

行列L及びUの各要素の求め方，(3.46)及び(3.47)式の具体的な求め方，及びそれらのためのプログラム・リストは付録Cに掲載してある[11]。また，この節で述べてある直接法のプログラム・リストは付録Dに載せてある。

3.7 平衡量の計算

プラズマの境界$\psi=\psi_o$の内部での物理量Qの平均を

$$<Q>=\frac{\int_s Q\,dS}{\int_s dS}=\frac{\int_0^{\psi_o}d\psi\int_0^{2\pi}Q\frac{\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}}{\int_0^{\psi_o}d\psi\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3.48)$$

で定義し，平衡計算の結果から，プラズマの諸種の巨視的なパラメーターを以下のようにして計算する[2]。

$$\beta_s=\frac{2\mu_0<P>}{<B_s^2>} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3.49)$$

$$I_P=\int_s j_s\,dS \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3.50)$$

$$\mu=\frac{d\chi}{d\phi}=\frac{1}{2\pi}\oint\left\{\frac{<\frac{B_\omega}{\rho}(1-k\rho\cos\theta)>}{<B_s>}-æ\right\}ds \quad\cdots\cdots\quad (3.51)$$

$$U=\frac{dV}{d\phi}=\oint\frac{1-<k\rho\cos\theta>}{<B_s>}ds \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3.52)$$

ここで，β_s，I_P，μ及びUはそれぞれ，トロイダル・ベータ値，全プラズマ電流，回転変換及び比体積を表わす。ただし，(3.48)及び(3.50)式中にあらわれるdSについての積分は，プラズマ断面についての面積分であり，(3.51)及び(3.52)式にあらわれる周回積分は，磁気軸に沿って1周期分，線積分することを意味している。また，(3.51)式において，$d\phi$及び$d\chi$はそれぞれ，ψ=一定面と$\psi+d\psi$=一定面との間の，トロイダル及びポロイダル方向の磁束である。(3.52)式中にあらわれるdVは，上述の2つの面間の体積である。(3.51)式の括弧内の第一項はプラズマ電流による回転変換への寄与を，また第二項は磁気軸の捩率による寄与を表わしている。すなわち，回転変換は，プラズマ電流による

$$\mu_J=\frac{L}{2\pi}\frac{<\frac{B_\omega}{\rho}(1-k\rho\cos\theta)>}{<B_s>} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3.53)$$

と，捩率による

$$\mu_æ=-\frac{æL}{2\pi} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3.54)$$

の和として表わされる。ここで，Lは磁気軸に沿った1ピッチあたりの長さである。
さらに，ポロイダル・ベータ値を以下のように定義する。

$$\beta_P = \frac{2\mu_o \langle P \rangle}{\langle\!\langle B_P{}^2 \rangle\!\rangle} \qquad \cdots\cdots (3.55)$$

ここで

$$\langle\!\langle B_P{}^2 \rangle\!\rangle = \oint_{\psi_o} (B_\rho{}^2 + B_\theta{}^2)\ d\ell \Big/ \oint_{\psi_o} d\ell$$

$$B_\theta = B_\omega - \frac{æ\rho}{h_s} B_s \qquad \cdots\cdots (3.56)$$

$\oint_{\psi_o}$ は，プラズマ表面の磁気面上の周回積分を表わす。

なお，(3.48)～(3.56) 式中にあらわれる座標，幾何学的パラメーター，及び物理量は，すべて磁気軸に準拠した座標系から見たものである。ところが，平衡計算は幾何軸に準拠した座標系で解くため，これから得られる上述の諸量を磁気軸に準拠したものへ変換する必要がある。このための具体的な計算方法は付録Aにまとめてある。

3.8 平衡量の調整と外部反復

(3.1) 式で与えられる平衡方程式を解くためには，P(ψ)とT(ψ)の形を具体的に与える必要がある。まず，両者がψに関して線型の場合を考え，次の形を仮定する。

$$P(\psi) = P_o \left(1 - \frac{\psi}{\psi_o} \right) \qquad \cdots\cdots (3.57)$$

$$T(\psi) = B_o + \sigma\ (\psi - \psi_o) \qquad \cdots\cdots (3.58)$$

ここで，ψ_o はプラズマ境界でのψの値である。このモデルは，プラズマ圧力が放物型分布をしており，またプラズマ電流は擬一様分布であることを表わしている。この場合，(3.53) 式で定義される μ_J の曲率の効果 $k\rho$ に関する第零近似 $\widetilde{\mu}_J$ は次式で与えられる。

$$\widetilde{\mu}_J = - \frac{\mu_o\ I_P\ \mu_{æ}}{2\pi\, æ\, a^2 B_o} \qquad \cdots\cdots (3.59)$$

ここで，a はプラズマの平均半径であり

$$a = \sqrt{\frac{S_P}{\pi}} \qquad \cdots\cdots (3.60)$$

で与えられる。S_P はプラズマの全断面積である。さて

$$\widetilde{\mu}_* = \frac{\widetilde{\mu}_J}{\mu_{æ}} = - \frac{\mu_o I_P}{2\pi æ a^2 B_o} \qquad \cdots\cdots (3.61)$$

で定義される量を導入すると，$k\rho$ に関する第零近似で，(3.57) 及び (3.58) 式にあらわれる P_o 及び σ は

$$\frac{\sigma}{æ} = \frac{2\beta_s}{æ^2 a^2 (1 + \widetilde{\mu}_*)} - 2\widetilde{\mu}_* - \frac{\varepsilon^2}{1 + \widetilde{\mu}^*} \qquad \cdots\cdots (3.62)$$

$$\frac{\mu_o P_o}{æ B_{oi}\, \psi_o} = \frac{2\beta_s}{æ^2 a^2 (1 + \widetilde{\mu}_*)} \qquad \cdots\cdots (3.63)$$

と表現できる[12]。ただし，ε は磁気面の楕円度で，x 軸方向及び y 軸方向の径長をそれぞれ ℓ_x 及び ℓ_y とおくと

$$\varepsilon = \frac{\ell_x^2 - \ell_y^2}{\ell_x^2 + \ell_y^2} \quad \cdots\cdots (3.64)$$

で与えられる。なお，(3.62) 式において，ε についての 3 次以上の項は無視してある。また

$$B_{oi} = B_o - \sigma\psi_o = B_o\{1 - \beta_s + æ^2 a^2 \widetilde{\mu}_*(1 + \widetilde{\mu}_*)\} \simeq B_o \quad \cdots\cdots (3.65)$$

である。なお，磁気面の形状パラメータの定義に関しては，付録Eを参照のこと。

β_s や I_P 等，指定した平衡量が，与えられた値になるような平衡を求めるためには，(3.57) 及び (3.58) 式の係数を調整しながら，前小節までに述べた平衡計算を行う，「外部反復」の過程を設けなければならない。以下，本報告書のコードで採用した外部反復の方法について記す。

β_s 及び I_P の目的とする値をそれぞれ β_s^*，I_P^* とおく。m回目の外部反復後の値を，各 $\beta_s^{(m)}$，$I_P^{(m)}$，またその段階でのプラズマの平均半径を $a^{(m)}$，磁気面の楕円度を $\varepsilon^{(m)}$ とおく。各反復段階での平衡量の目的値からのずれを次のように定義する。

$$\Delta\beta_s^{(m)} = \beta_s^{(m)} - \beta_s^* \quad \cdots\cdots (3.66)$$

$$\Delta I_P^{(m)} = I_P^{(m)} - I_P^* \quad \cdots\cdots (3.67)$$

(3.62) 及び (3.63) 式において，

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{æ} \quad \cdots\cdots (3.68)$$

$$P_1^* = -\frac{\mu_o P_o}{æ B_{oi}\psi_o} \quad \cdots\cdots (3.69)$$

とおき，$\widetilde{\mu}_*$，P_1^* 及び σ^* のmステップ目の値をそれぞれ $\widetilde{\mu}_*^{(m)}$，$P_1^{*(m)}$ 及び $\sigma^{*(m)}$ とおけば，これらを

$$\widetilde{\mu}_*^{(m)} = \widetilde{\mu}_*^{(m-1)}\left(1 - \frac{\Delta I_P^{(m)}}{I_P^*}\right)\left(\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}\right)^2 \quad \cdots\cdots (3.70)$$

$$P_1^{*(m)} = P_1^{*(m-1)}\left(1 - \frac{\Delta\beta_s^{(m)}}{\beta_s^*}\right)\left(\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}\right)^2 \quad \cdots\cdots (3.71)$$

$$\sigma^{*(m)} = -2\mu_*^{(m)} - P_1^{*(m)} - \frac{\varepsilon^{(m)2}}{1 + \mu_*^{(m)}} \quad \cdots\cdots (3.72)$$

のように変化させていけば良い。なお，収束させる平衡量の組合わせを（β_s，I_P）ではなく，（β_s，μ_*）とする場合には，(3.70) 式において，μ_* と I_P の役割を交換して同様の操作を行えば良い。

3.9 平衡計算の構成

平衡計算のフロー・チャートを図 4(a)に示す。SOR 法，あるいは直接法によって (3.1) 式を

解いた後，右辺Uと左辺Sとが一致しているか否かの収束のチェックを

$$\mathrm{MAX}\left|\frac{U-S}{U}\right| < \varepsilon_2 \qquad \cdots\cdots (3.73)$$

で行う。ε_2 は任意の微少パラメーターである。

上述の条件が満たされない場合，反復の各ステップで（U−S）／Uで示される値が，その絶対値をあまり変えず0を横切って振動しているか，それとも漸近的に0に近づいているのかを，前々回及び前回の値を常に記憶しておいて調べ，前者の場合には

$$\psi = \delta\psi_k + (1-\delta)\,\psi_{k-1}\ ;\quad 0 < \delta < 1 \qquad \cdots\cdots (3.74)$$

で与えられる緩和をかけて，次の反復計算を行うことにする。特に，高ベータ値プラズマの平衡計算の際などの場合に有効と考えられる。(3.73)式で与えられる条件が満たされた場合には，次に目的とする β_s（あるいは β_P），I_P（あるいは μ^*）についての外部反復を行う。

高ベータ値プラズマの平衡を得る場合，直接高いベータ値で計算を行うより，低ベータ値の平衡をまず求め，以下前回で得られた平衡解を初期値として，少しづつベータ値を上げていく方が効率的である。すなわち，直接高ベータ値で平衡を求めようとして解が収束しない場合でも，上述の方法を用いれば収束するような場合が多く，このためにパラメーター空間における収束領域はより広くなる。また，ある程度ベータ値が高くなってくると，たとえ直接そのベータ値を与えて平衡が解けた場合でも，上述の方法を用いて少しづつベータ値を上げていった場合とCPU時間を比較すると，ほとんどその差はない。

図4(b)に，図4(a)に対応するメイン・プログラムのリストをのせてある。

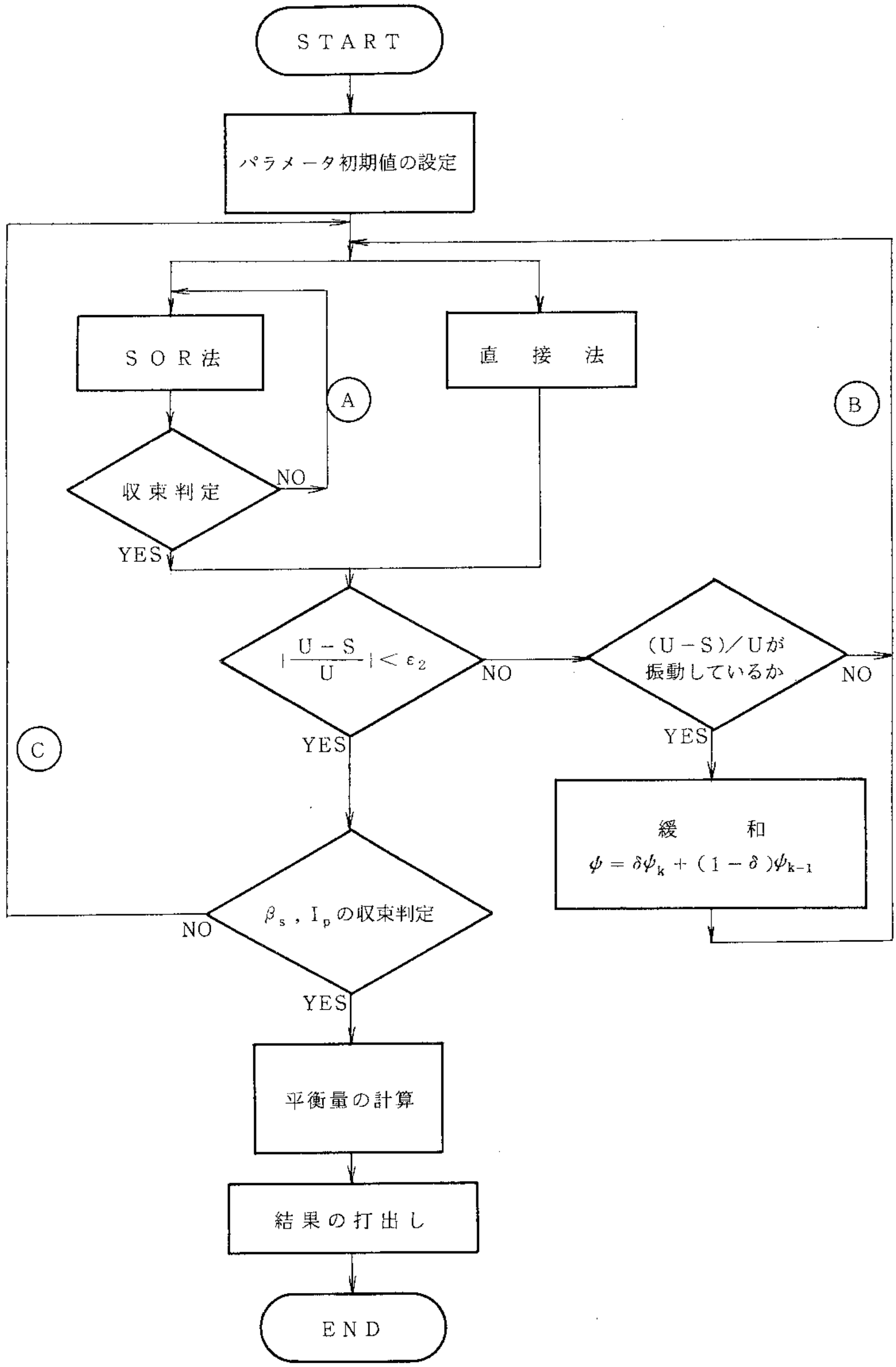


Fig.4(a) Flow chart of the equilibrium calculation.

MAIN

```
*DECK MAIN
C +================================================================+
C =                                                                =
C =              EQUILIBRIUM CALCULATION IN A SYSTEM               =
C =           WITH A NON-PLANAR HELICAL MAGNETIC AXIS.             =
C =              (FOR INPUT DATA OF ERATO CODE)                    =
C =                                                                =
C =     1. SOR METHOD                                              =
C =     2. DIRECT METHOD (ON THE BASIS OF LU MATRIX DECOMPOSITION) =
C =                                                                =
C =          DOUBLE PRECISION                                      =
C =          ARBITRARY CURRENT DISTRIBUTION                        =
C =          RECTANGULAR SHELL IS USED                             =
C =          EOS PREPROCESSOR  IS USED                             =
C =                                                                =
C =                              JAERI  1983.10.18    HARE         =
C +================================================================+
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
*CALL EOLB
*CALL BETLOP
*CALL CNTVAL
*CALL INDCTR
*CALL SEIGYO
*CALL EPSLN
*CALL SORC
*CALL CONST0
*CALL CONST1
*CALL CONST2
*CALL CONST3
*CALL CONST4
C
      COMMON/CONV/HHA,HHF,KGG,LGG
      COMMON/SHUUSO/CRZ
C
      CALL CLOCKM(IST)
C
      CALL ZYOSU(M,N)
      CALL BVALUE(M,N)
      CALL MATRIX(M,N)
C
C -----------------------------------------------------------------
C             BETA VALUE INCREASE LOOP
C -----------------------------------------------------------------
      DO 8000 IUP = 1,KUP
      BETA = BETA0 + (IUP - 1)*DPR
C
C -----------------------------------------------------------------
C              OUTER ITERATION
C                 PLASMA RADIUS FITTING
C -----------------------------------------------------------------
C
      DO 7500 KLMT = 1,MLMT
      IF(MLMT.NE.1) RL = RL*(RPLS/RP)
      EPCC = EPC
      EPGG = EPG
      IF(KLMT.EQ.MLMT) GO TO 1800
C
      EPCC = 10.0*EPC
      EPGG = 10.0*EPG
C
 1800 CALL LIMIT(M,N)
      IF(KLMT.NE.1) GO TO 565
      CALL INTOUT(M,N)
C -----------------------------------------------------------------
C              OUTER ITERATION
C                 PLASMA PARAMETER FITTING
C -----------------------------------------------------------------
C
  565 DO 7000 IOUTER = 1,MMAX
C
C -----------------------------------------------------------------
C              SOR ITERATION
C                   SOR OUTER ITERATION
C                   SOR INNER ITERATION
C -----------------------------------------------------------------
C
      DO 2000 INNERA=1,LMAXA
      IF(IFLAG.EQ.0) CALL SOR(M,N,INNERA)
      IF(IFLAG.EQ.1) CALL DIRECT(M,N)
C
```

MAIN

```
      IF(IOVF.EQ.1) GO TO 580
      IF(IABC.EQ.1) GO TO 250
C
      CALL PSIFIT(M,N,INNERA)
      IF(INDA.EQ.2) GO TO 250
 2000 CONTINUE
C ---------------------------------------------------------------------
  250 CALL PARFIT(M,N,IOUTER,INNERA)
      IF(IABC.EQ.1) GO TO 650
      IF(INDF.EQ.2) GO TO 720
 7000 CONTINUE
C ---------------------------------------------------------------------
  720 PLL=(RP-RPLS)/RPLS
      PLR=ABS(PLL)
      WRITE(6,960) KLMT,RP,PLL
      IF(PLR.LE.EPL) GO TO 650
 7500 CONTINUE
C ---------------------------------------------------------------------
  650 CALL PARMET(M,N,IOUTER,INNERA)
      CALL CLOCKM(IFL)
      ITIME=IFL-IST
      WRITE(6,800) ITIME
C
      IF(IABC.NE.1) GO TO 350
      IF(IPLOT.NE.1) CALL GRAPH(M,N,IPT,NDIV)
      GO TO 8500
C
  350 CALL WTRNSA
      CALL WTRNSC(M,N,IUP)
      CALL XEQQ(NDIV,IDIV,M,N,IUP)
C
      IF((IPLOT.NE.1).AND.(MOD(IUP,IPRNT).EQ.0))
     &    CALL GRAPH(M,N,IPT,NDIV)
C
C ---------------------------------------------------------------------
 8000 CONTINUE
C ---------------------------------------------------------------------
 8500 STOP
C
  580 WRITE(6,980)
      STOP
C
  800 FORMAT(//5X, 'CPU TIME =', I7, ' MSEC'/)
  960 FORMAT(10X, 'KLMT =', I5, 5X, 'RP =', F8.5, 5X, 'PLL =', E12.5)
  980 FORMAT(/10X, 'NO CONVERGENCE FOR THE GIVEN PARAMETERS'/)
C
      END
```

Fig.4(b) Source program list of Main routine which denotes the flow of the calculation.

4. 計 算 結 果

4.1 SOR法と直接法の比較

(3.1) 式において$S(\psi)=0$，として与えられる真空解について，SOR法と直接法の比較を行った。

まず，SOR法について，その収束特性を調べるために，緩和因子ωの変化に対する，必要とする反復回数を，立体磁気軸の幾何学的特性を表わすパラメーターであるαr_0，及びメッシュ数を変化させて調べてみた。なお，(2.8) 式より$k=\alpha r_0 æ$の関係式を得るので，αr_0を変化させることは，曲率と捩率の比を変化させることに対応する。ここでは，曲率kを固定して，捩率æを変化させる方法をとった。

図5は，メッシュ数$M=41$，$N=22$，$\alpha r_0=0.5$，1.0，1.5及び2.0 に対して緩和因子ωを1.0から2.0まで変化させた時に，(3.73) 式の収束判定条件において，$\varepsilon_2=1.0\times10^{-5}$を満足するのに要する反復回数を示している。この図から，概略$\omega\sim1.84$の時が最適で，その値を越えると急激に収束速度が悪化し，$\omega\gtrsim1.92$に対しては収束しないことがわかる。

メッシュ数を増加させても，ωの最適値は1.8以上，2.0以下のパラメーター領域に入っている。そこで，ωの最適値近傍の，図5の場合と同じ収束条件下において要する反復回数を，メッシュ数を3通り変化させて示したのが図6(a)~(c)である。この3つの図より，メッシュ数の増加に伴ない，ωの最適値は2.0に近づく傾向にあることがわかる。また，幾何学的パラメーターαr_0の増加に伴ない，ωの最適値はより小さな値をとるが，その差はあまり顕著ではない。

さて，SOR法において緩和因子ωの最適値をとった場合と，直接法を用いた場合との，CPU時間の測定値の比較を行ったものがTable Ⅰである。これより，外部反復を行わないで1回限り解く場合には，収束条件ε_2を1.0×10^{-4}としても直接法の方が有利であることが理解できる。なお，LU分解を行う時にピボッティングを行わないようにすると，ピボッティングを行っているFACOM SSL Ⅱのライブラリを用いる場合に比べて30％近くCPU時間が短縮される。

次に，プラズマのある場合について調べる。この場合には，希望のプラズマ・パラメーターとなるようにするための外部反復が入ってくる。最終的に希望とする精度の解が得られれば良いので，SOR法を用いて解く場合，その内部反復の収束判定のパラメーターε_1を初めのうちはゆるくしておき，だんだんと厳しくする方法が効率的である。あるいは，図4(a)のフローチャートにおいて，Ⓐの内部反復の反復回数の最大値をそれ程大きくせず，Ⓑの反復をくり返していくうちに，同時にSORの収束を高める方法が良い。Table Ⅱに，このような手法を用いたSOR法と，直接法とのCPU時間の測定値の比較を示している。使用した幾何学的パラメーターは，矩形境界の1辺の長さが$0.4\,k\rho$，リミッター径は$0.25\,k\rho$，$\alpha r_0=1.0$，プラズマのパラメーターは，$\beta_s=1\%$，$\mu_*=-0.7$である。ここでは，Ⓐの内部反復の最大値を100回で

打切っている。この表から理解できるように，SOR 法の方が直接法より 30％以上，計算時間が短くて済む。

4.2 μ_* と β_s の空間における平衡の特性

正方形の境界で，外部多極磁場を印加しない場合の，自由境界平衡の特性を調べる。境界の一辺の長さを 0.4 kρ とし，プラズマの平均半径が 0.25 kρ となる様に，円形リミッターの半径を調整してある。すなわち，図 4 で示されるフローチャートにおいて，β_s や I_p を収束させるための外部反復ループの外側に，さらにプラズマの半径を希望のものとするためのループを設けてある。

平衡計算は，$\alpha r_0 = 0.5$，1.0 及び 2.0，メッシュ数 $M = 81$，$N = 42$ として，(3.73) 式の収束判定値である ε_2 は 1.0×10^{-4} に設定して行った。磁気軸の変位，磁気井戸の深さ及びポロイダル・ベータ値の計算結果を，μ_* と β_s の空間にプロットした（図 8−10）。ここで，μ_* は (3.53)，(3.54) 式を用いて，数値的に得られた μ_J，$\mu_æ$ を使い，次式で計算される。

$$\mu_* = \mu_J / \mu_æ \quad \cdots\cdots (4.1)$$

図 8(a)，9(a)，10(a)には，プラズマの中心からの磁気軸の変位量 ξ_a のプラズマ半径に対する割合 Δ_a，及び矩形中心からの磁気軸の変位量 ξ_b の矩形の 1 辺の半分の長さに対する割合 Δ_b を，各百分率で示してある（図 7 参照）。ただし，曲率中心方向に磁気軸が変位する場合に，正値をとるようにしてある。また，図 8(b)，9(b)，10(b)には，磁気井戸の深さ，及びポロイダル・ベータ値をプロットしてある。なお，磁気井戸の深さ W は (3.52) 式を用い，

$$W = \frac{U_a - U_b}{U_a} \times 100 \quad (\%) \quad \cdots\cdots (4.2)$$

で定義してある。ここで U_a 及び U_b は各磁気軸上及びプラズマ境界での比体積である。μ_* は，プラズマ電流による回転変換と，磁気軸の捩率によるそれとの比であり，$\mu_æ$ が (3.54)式で示されるように負値であるので，$-\mu_* = 1.0$ で与えられる点は，捩率による回転変換がプラズマ電流による回転変換によって完全に巻き戻される点，すなわち平衡の存在し得ない点をあらわす。SOR 法を用いて行った本計算では，外部反復は $-\mu_*$ が 0.5 に達する以前に収束していない。

図 8 〜 10 の 3 ケースに共通して言えることは，$-\mu_*$ が零を横切って大きくなるに従い，磁気軸の変位，磁気井戸及びポロイダル・ベータ値の，トロイダル・ベータ値の増加に対する変化がより激しくなっていることである。これは，上述のように $-\mu_* = 1.0$ の点に共鳴点を控えているからである。例えば，半径 b_t の円形トロイダル・コイルを配置し，半径 a の円断面プラズマを仮定した場合における，プラズマ柱の中心のトロイダル・コイルの中心からの変位 ξ は，シャフラノフの平衡変位式を用いて

$$\xi = \frac{3}{8} k \left(b_t^2 - a^2 \right) - \frac{k \left(b_t^2 - a^2 \right) \beta_s}{2 æ^2 \left(1 + \widetilde{\mu_*} \right) \left(b_t^2 + a^2 \widetilde{\mu_*} \right)} + \frac{1}{2} k a^2 \frac{\widetilde{\mu_*} \left[\left(b_t^2 - a^2 \right) / 2 + b_t^2 \,\ell n \left(b_t / a \right) \right]}{\left(b_t^2 + a^2 \widetilde{\mu_*} \right)} \quad \cdots\cdots (4.3)$$

で与えられる[2]。なお，この式では放物型圧力分布，一様電流分布の仮定のもとに導いたものであり，また本計算では（3.57）及び（3.58）式で与えられる分布で解いてあるので，本質的な違いはない。さて，（4.3）式からもわかるように，$-\mu_*$ が共鳴点である 1.0 に近づくに従い，ξ がより大きく変化することが読みとれる。

3つのケースを比較してみて，αr_0 が大きくなる程，すなわち相対的に曲率が捩率より大きくなる程，ここにプロットした諸種の量の（μ_*，β_s）パラメーター空間上での変化がより大きくなっていることがわかる。

$-\mu_*=0$となる場合，すなわちプラズマ電流を流さない場合を考えてみる。$\beta_s=0$%では，磁気丘（magnetic hill）となっており，このままではMHD的に不安定である。しかし，各のケースについて，β_s がある程度上昇してくると磁気井戸が形成されてくる。すなわち，プラズマ自身の圧力により井戸を掘って安定化する，「自己安定化効果」の一端を表わしている。αr_0 が大きい程，β_s の変化がより大きく反映されて，より小さい β_s の値で磁気井戸が形成される。

一般に，Δ_a はプラズマ柱内の磁気井戸の深さと密接な関係があると考えられ，多くの場合，Δ_a の値が零を横切り小さくなる程，具体的には磁気軸がプラズマの中心に対して磁場の弱い曲率の外側へ移動する程，磁気井戸はより深くなっている。

4.3 平衡計算結果 I（外部多極磁場を印加しない場合）

前節で示した，（μ_*，β_s） 空間における代表的な点の平衡計算の結果を図示して，その内容を調べる。計算条件は，すべて前節で述べたものと同じである。

まず，$\alpha r_0=1$の場合について調べる。図 11 − 14 で与えられる一連の図は，$-\mu_*$ を − 0.3 に固定して β_s の値を増加していった時のポロイダル磁束面(a)，プラズマ電流分布(b)，プラズマ圧力分布(c)，回転変換(d)及び比体積(e)を表わす。ポロイダル磁束面の図において，点線で描いた円はリミターの位置であり，そのリミターで切り取られている，太い実線であらわした磁気面はプラズマ境界を表わす。また各の図において，右側が曲率の中心方向，すなわち主法線方向である。

トロイダル・ベータ値 β_s の増加とともに，×印で示した磁気軸がプラズマ中心から曲率の外側の方へ移動し，それに伴ないプラズマ柱内に磁気井戸が形成されていく様子が，比体積の ψ 依存性を示すグラフを比較することにより読みとれる。プラズマ電流分布に関しては，低ベータ値で曲率中心方向にピークを持っていた分布が，ベータ値の増加とともに曲率の外側にピークを持った分布に変わり，$\beta_s=10$%では曲率中心方向の電流の一部が逆転していることがわかる。この現象は，以下のようにして説明できる。すなわち，（2.15）式で与えられる電流分布の s 成分をとると

$$\mu_0 j_s = h_s \mu_0 P'(\psi) + \frac{æ\rho \dfrac{\partial T}{\partial \rho} + h_s TT'(\psi)}{h_s^2 + æ^2 \rho^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.4)$$

となり，この式に（3.57），（3.58），（3.62）及び（3.63）の各式を代入して整理し，$k\rho$ の展開

についての1次のオーダーまで採用すると

$$\mu_o j_s = 2\,æ B_o \{ \frac{2\beta_s k\rho \cos\theta}{æ^2 a^2 (1+\widetilde{\mu}_*)} - (1 + k\rho \cos\theta)\widetilde{\mu}_* \} \quad \cdots\cdots\cdots (4.5)$$

を得る。この式より，$\beta_s = 0$ %の場合には $\theta = 0$ の方向，すなわち主法線方向の方がその反対方向よりも電流密度が大きいことがわかる。しかし，$-\mu_*$が負で，すなわちプラズマ電流I_pがたて磁場に対して反平行に流れている場合で，かつβ_sの値がある程度大きくなってくると，今度は逆に曲率の外側（$\theta = \pi$）の方が電流密度が大きくなる。なお，(4.5)式の第一項は，いわゆるPfirsh-Schlüter電流であり，回転変換μに反比例している。

次に，回転変換μのϕによる依存性のβ_sによる変化を調べる。$\beta_s \leq 5$ %程度までの低ベータ値の場合には，プラズマ柱内の磁気シアーは，ほぼ零である。ところが，$\beta_s = 10$ %の場合には，ある程度の大きさの磁気シアーが存在することがわかる。さて，楕円度εに比例する項までを考慮に入れた場合の，直線立体磁気軸配位における回転変換μ_sは次式で与えられる[2]。

$$\mu_s = \frac{d\chi}{d\phi} = -\frac{æL}{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$+\frac{æL}{2\pi}\cdot\frac{\phi}{\pi B_o}\left[\left(\frac{5}{32}-\frac{\varepsilon}{4}\right)k^2 - \frac{23}{6}\varepsilon kQ + \frac{2}{3}Q^2 \right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.6)$$

回転変換の大きさは，主に第1項目により支配され，磁気シアーに関連した部分は第2項目にあらわれている。ポロイダル磁束面のβ_sの変化による一連の図を比較することにより，低ベータ値で幾分たて長であったプラズマ柱内の磁気面が，ベータ値の増加とともに磁気軸が外側へ移動しながら，よこ長になってくる様子がわかる。楕円度εの減少は，(4.6)式の第2項の増加をもたらし，これより上述の磁気シアーの増加のメカニズムの一端が理解できる。また，磁気面の三角形度成分が，わずかではあるが増加し，これもシアー増加の一因となっている。

次に，図15及び16は，$-\mu_* = -1.0$ の場合の計算例である。$-\mu_* = -0.3$ の例と比べて，ベータ値の増加による諸種の量の変化が，かなり緩和されている様子がわかる。

図17及び18に，$-\mu_* = 0.1$ の場合，すなわちプラズマ電流をたて磁場の方向に対して平行に流した場合の例を掲げる。$-\mu_* < 0$ の場合に比べて，β_sの増加による諸種の量の変化は激しい。電流分布は曲率中心方向に強くピーキングしており，β_sの増加により一段とその度合を強めている様子がわかる。

さて，次に幾何学的なパラメーターを変えてみた場合の例を示す。図19－21は，$\alpha r_o = 0.5$ で，$-\mu_* = 0.1$ の計算例である。相対的に曲率の影響が小さくなるため，$\alpha r_o = 1$ の場合と比べて磁気面が全体的に丸みを帯びている。逆に，図22，23に示した$\alpha r_o = 2.0$ の例では，相対的に曲率の効果が大きくなり，プラズマ・パラメーターの変化に対する磁気面の変形が大きい。

4.4 平衡計算結果II（外部多極磁場を印加した場合）

外部多極磁場を印加して非円形断面にした場合の，平衡計算結果の一例を示す。

図24は，ここで考える真空磁気面であり，楕円度及び3角形度は，それぞれ概略$\varepsilon \sim 0.37$，

$Q/k \sim 1.8$ である。なお，この例では磁気井戸が形成されている。さて，以下この真空磁界にプラズマ及びプラズマ電流を加えた場合の，磁気面変形の様子を調べる。

図25(a)〜(c)は，$\beta_s = 1$ %として μ_* を変化させていった場合の例である。$-\mu_*$ が正の場合，すなわちプラズマ電流をたて磁場に対して平行に流した場合には，磁気面の楕円度は増し，逆に反平行に流した場合には楕円度が小さくなってくる様子がわかる。

次に，図26(a)，(b)は，$-\mu_* = -0.2$ として，β_s の値が1%及び10%とした時の例である。真空磁気面に三角形成分が入っている場合，β_s が増加すると，磁気軸近傍の磁気面は頭を押えられるような形で曲率の外側へ移動し，磁気軸近傍の楕円度の減少が著しい。真空磁気面に三角形度成分Qを持つ場合には，(4.6) 式の εkQ に比例する項の存在のために，ε の減少がQの存在の効果と相乗作用を起こし，シアーの増加が加速される。以上の理由により，三角形度Qは，真空磁場配位のシアーをもたらすと同時に，ベータ値の増加に伴なう磁気面変形の過程における，シアーの増加にも寄与する。

有限の楕円度を持っている場合，磁気軸近傍の真空磁場の回転変換の絶対値は円断面の場合のそれより小さいので，プラズマ電流をたて磁場に対して平行に流す時，より少ないプラズマ電流で回転変換は巻き戻されるため，(μ_*，β_s) 空間における収束領域はより狭くなる。

Table I Comparison of CPU Time (ms) by SOR and Direct method in the case of vacuum magnetic field configuration.

	αr_0	ε_2	41 x 22	61 x 32	81 x 42
SOR Method	0.5	10^{-4}	964	3756	10004
		10^{-5}	1130	4481	12216
	1.0	10^{-4}	865	3507	9432
		10^{-5}	1023	4130	11224
	1.5	10^{-4}	893	3499	9477
		10^{-5}	1068	4145	11240
	2.0	10^{-4}	849	3189	9023
		10^{-5}	1017	3789	10938
Direct Method (SSL II)			848	3182	8419
Direct Method (Without Pivotting)			592	2263	6042

Table II

Comparison of CPU time(s) by SOR and Direct Method in the case of β_s =0.01, $-\mu_*$ =-0.72 and αr_0=1.0.

	SOR Method		Direct Method	
ε_2	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}
41 x 22	17	21	26	30
61 x 32	50	66	92	106
81 x 42	122	147	233	236

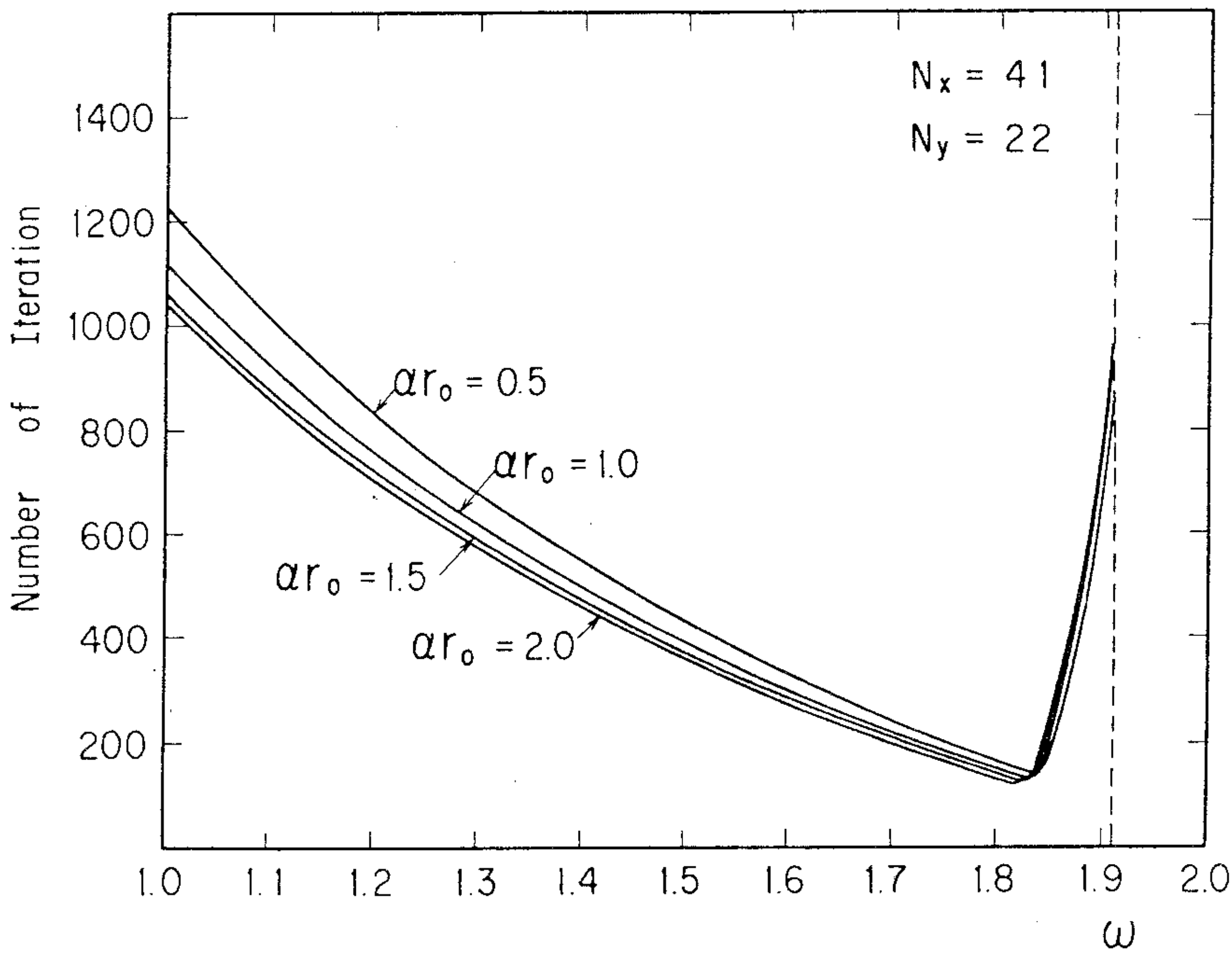
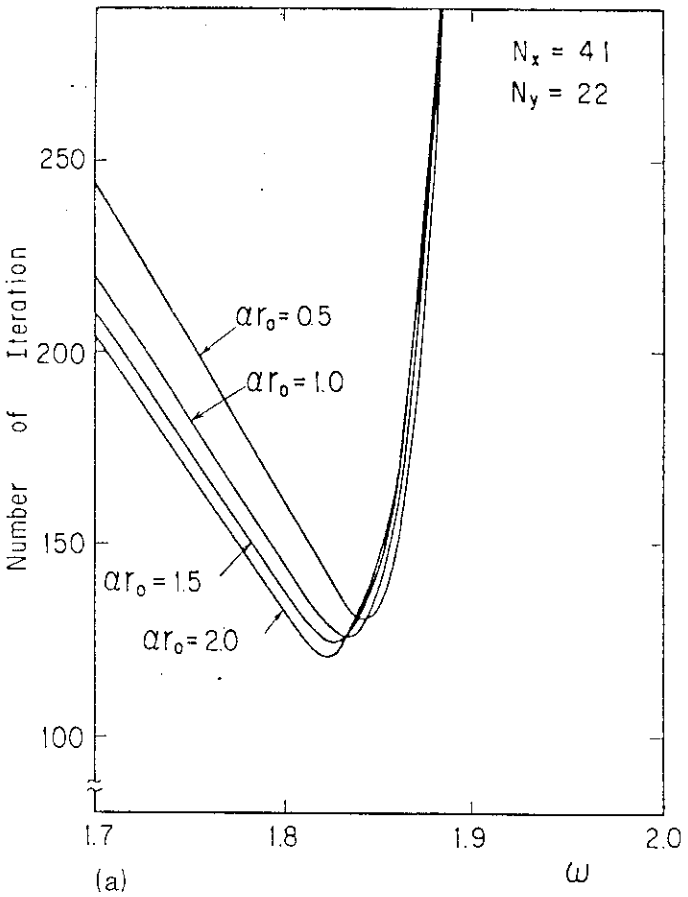
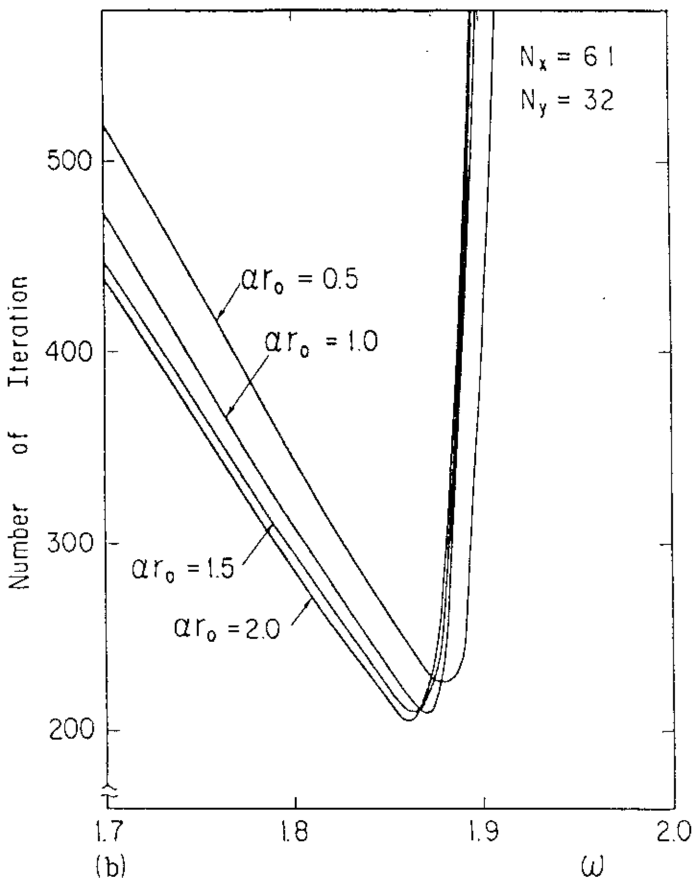


Fig.5

Number of SOR iterations needed to satisfy the convergence condition ε_2=1.0 x 10^{-5} as a function of the relaxation factor ω in the cases of αr_0=0.5, 1.0, 1.5 and 2.0. When ω is greater than about 1.92, the iteration scheme does not converge.





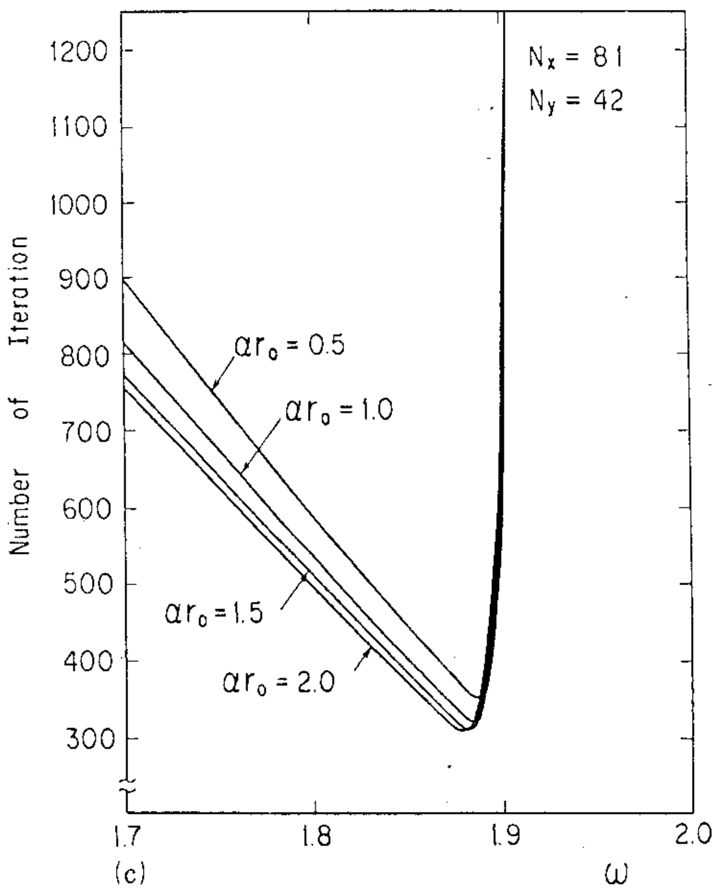


Fig. 6 Number of SOR iterations needed to satisfy the convergence condition $\varepsilon_2=1.0\times10^{-5}$ as a function of the relaxation factor ω in the neighborhood of optimum ω value for the cases of 3 types of mesh number.

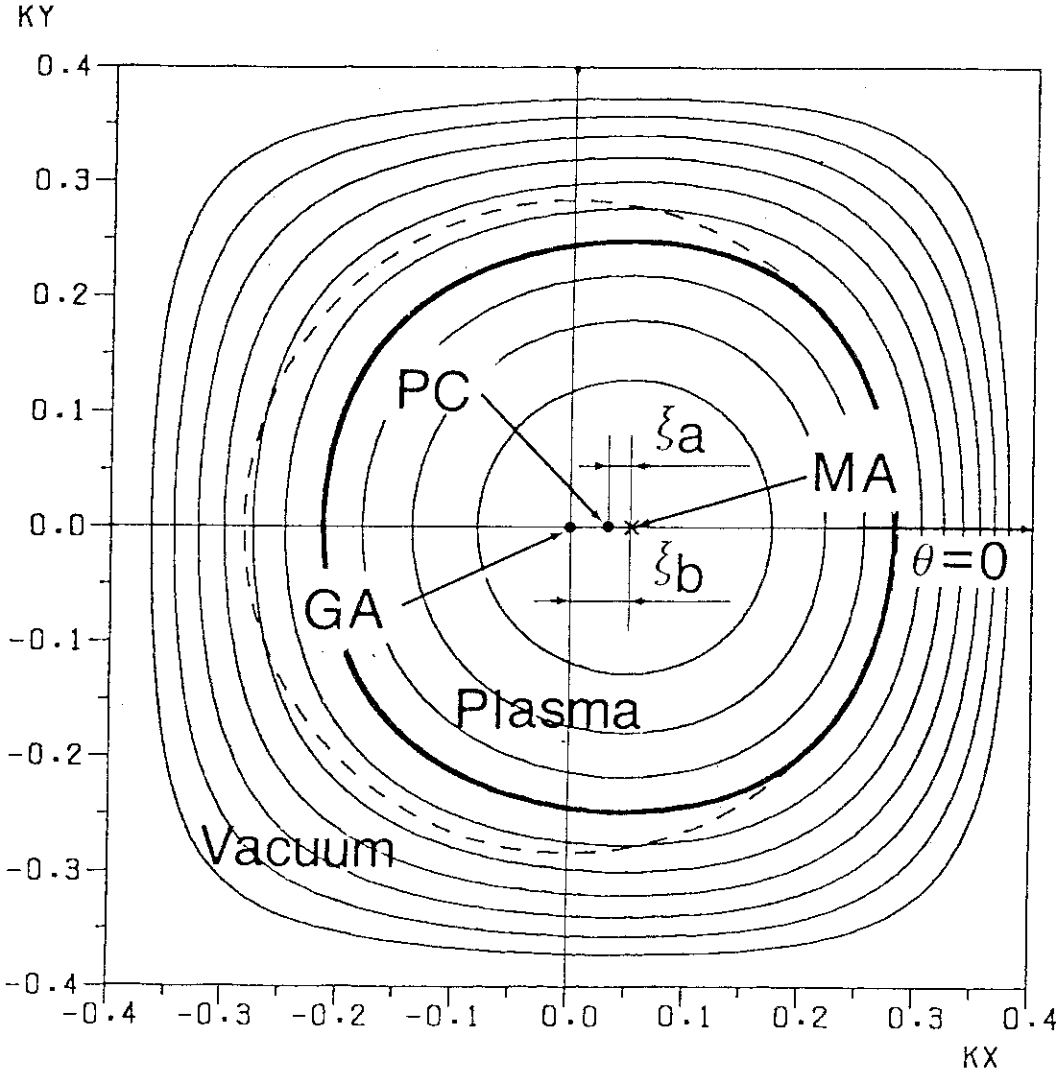


Fig.7

Difinitions of ξ_a and ξ_b on the (ρ , θ) flux surface plane. PC, MA and GA mean center of plasma column, magnetic axis and geometrical axis, respectively. The closed curve depicted by bold line denotes the plasma-vacuum boundary. The pricipal normal direction is on the right hand side.

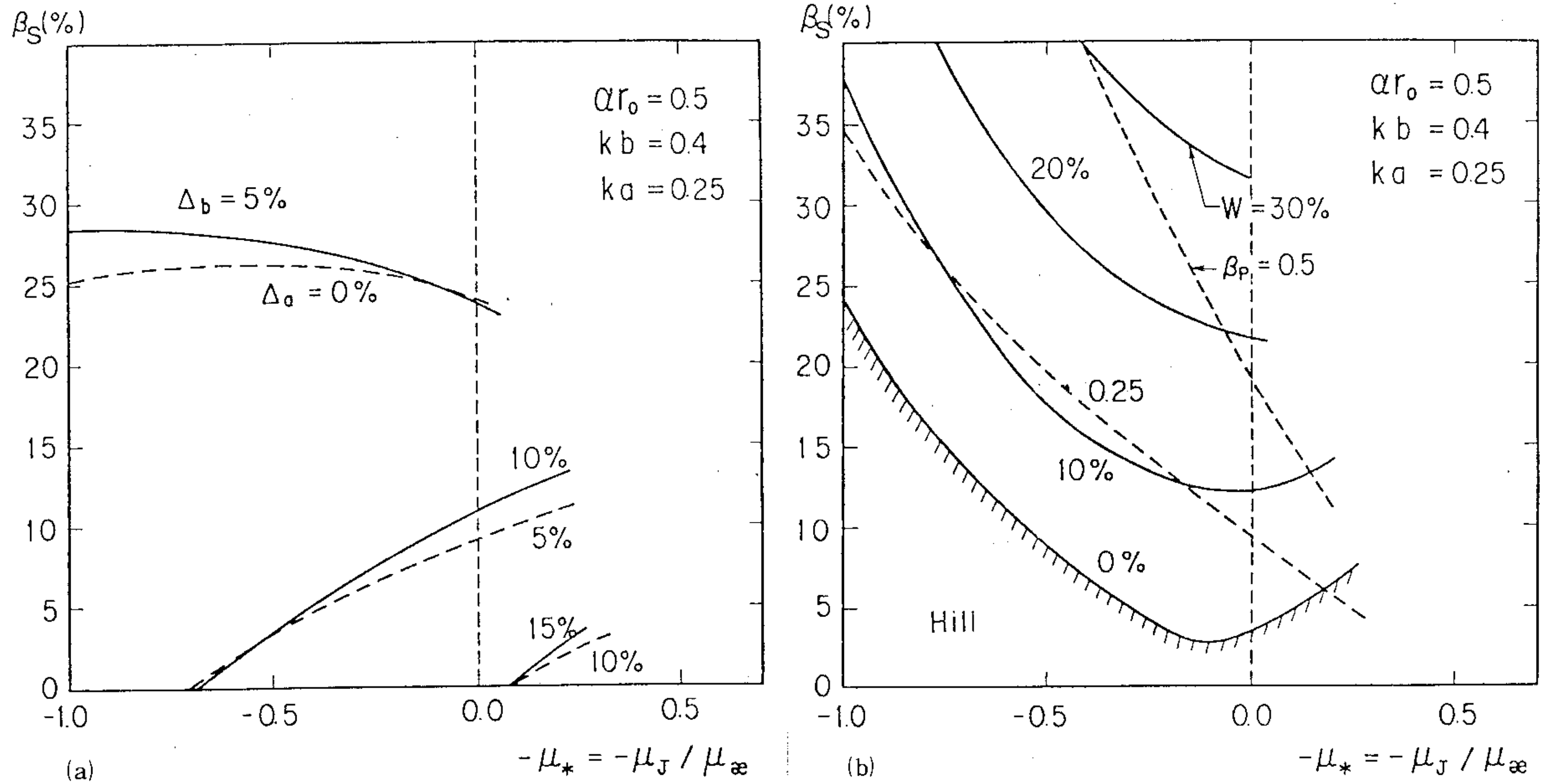


Fig. 8 Characteristics of equilibria on the ($-\mu_*$, β_s) space for αr_0=0.5, kb=0.4 and ka=0.25.

(a) The ratio Δ_a(%) of the shift of the magnetic axis from the center of the plasma column to the average plasma radius of the plasma column, and the ratio Δ_b(%) of the shift of the magnetic axis from the geometrical center to the half-length of the rectangular numerical boundary. The ratios Δ_a and Δ_b are positive, when the magnetic axis shifts toward the curvature cneter or the principal normal direction ($\theta = 0$).

(b) Well depth W and poloidal beta value β_p. The hatched curve denotes the magnetic well-hill boundary.

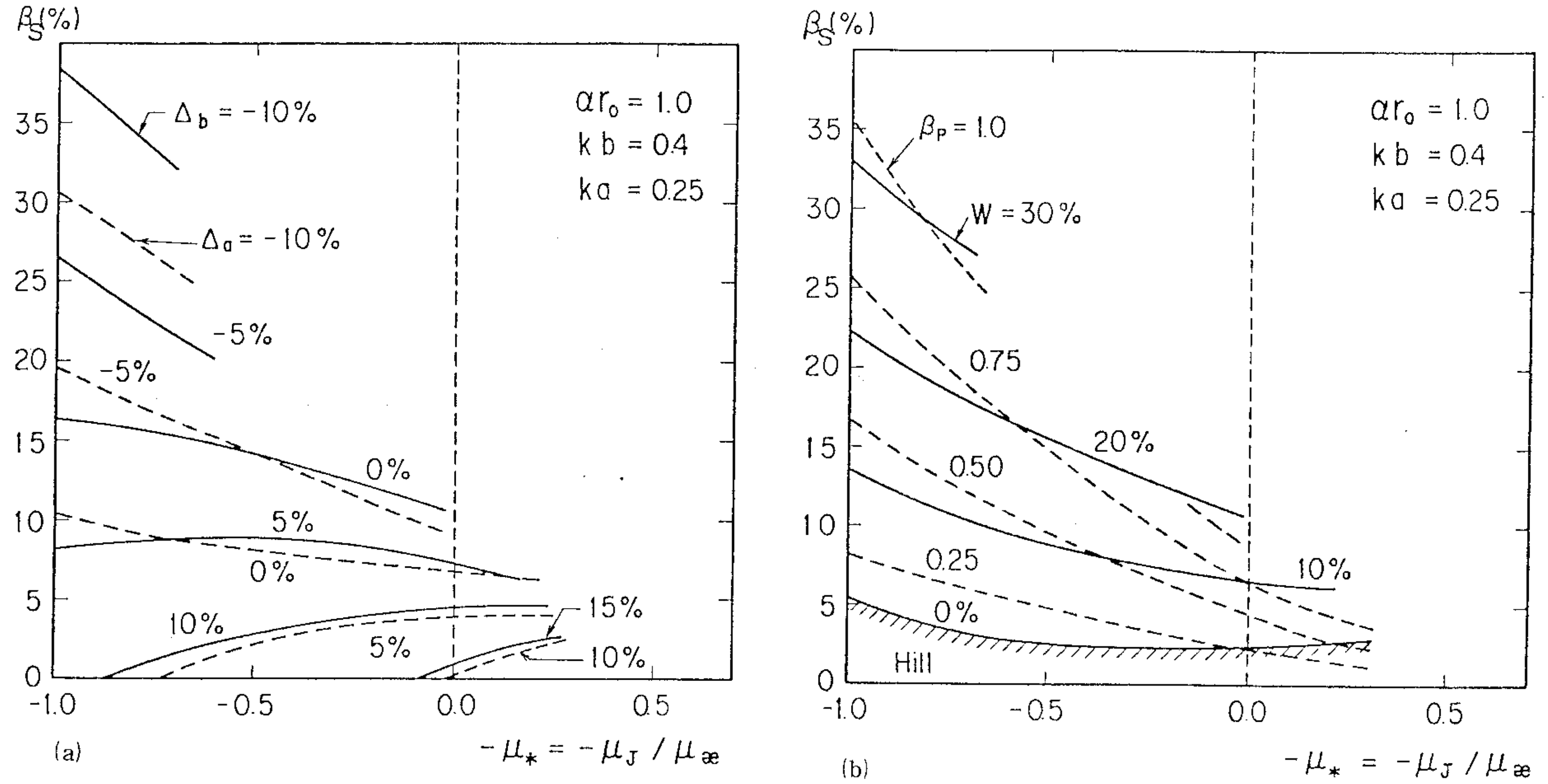
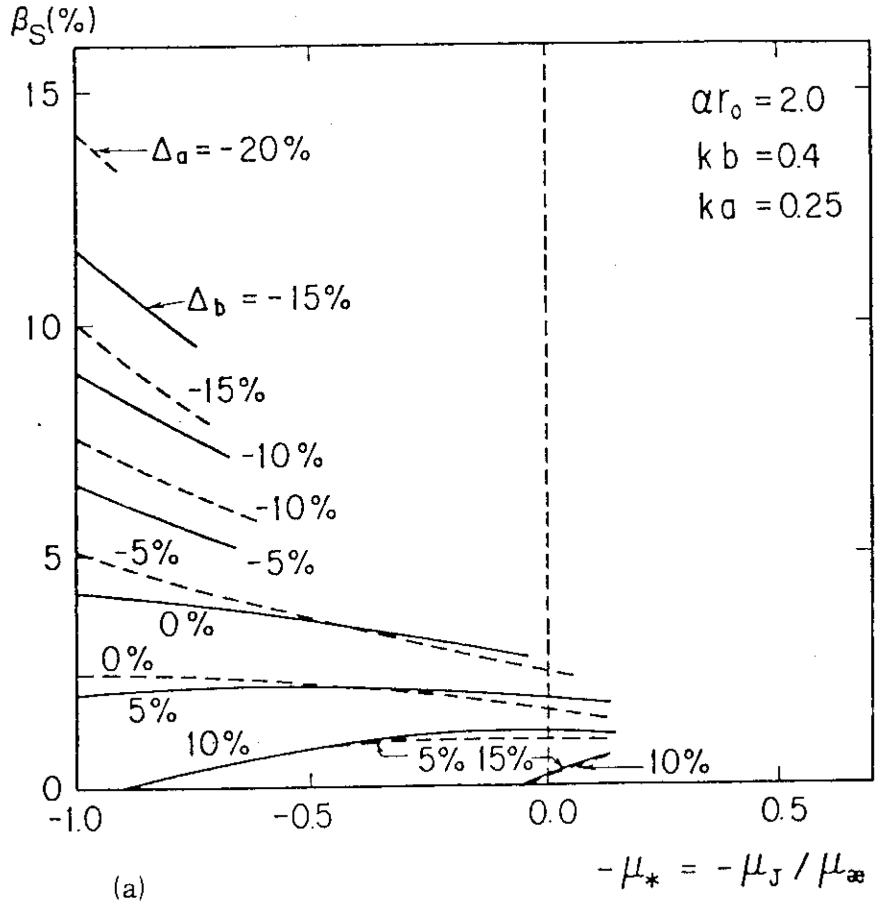


Fig. 9 Characteristics of equilibria on the ($-\mu_*$, β_s) space for αr_0=1.0, kb=0.4 and ka=0.25.



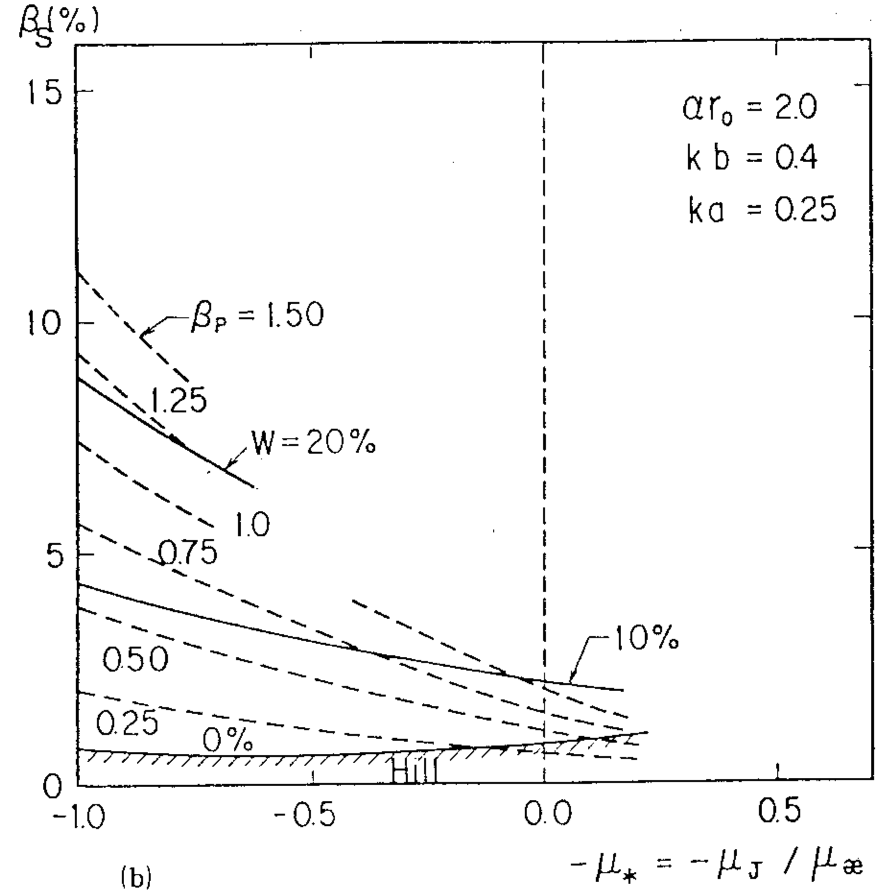
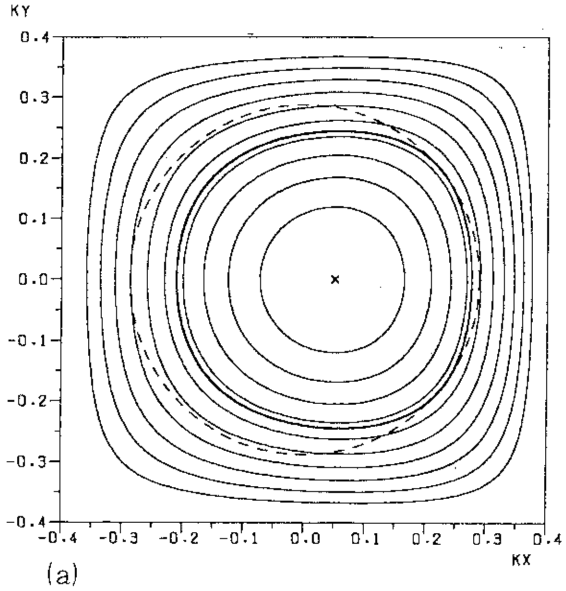
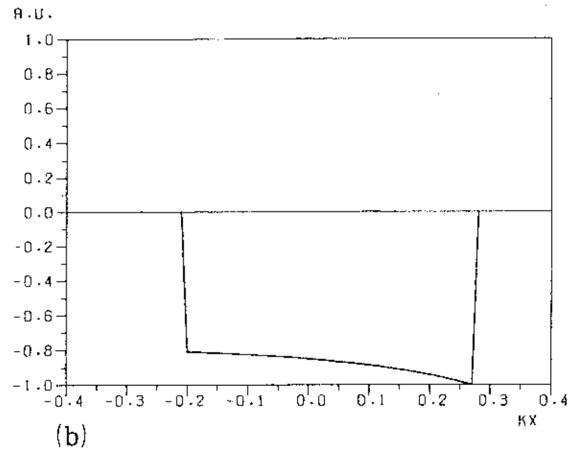
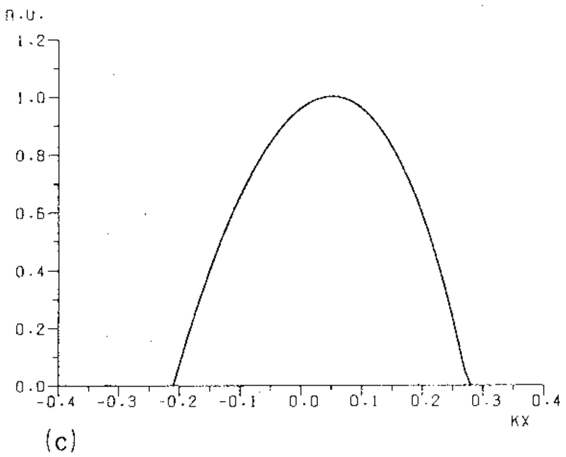
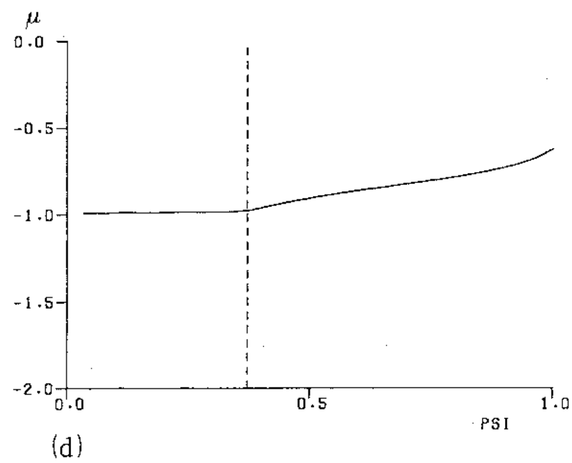


Fig.10 Characteristics of equilibria on the ($-\mu_*$, β_S) space for αr_0=2.0, kb=0.4 and ka=0.25.









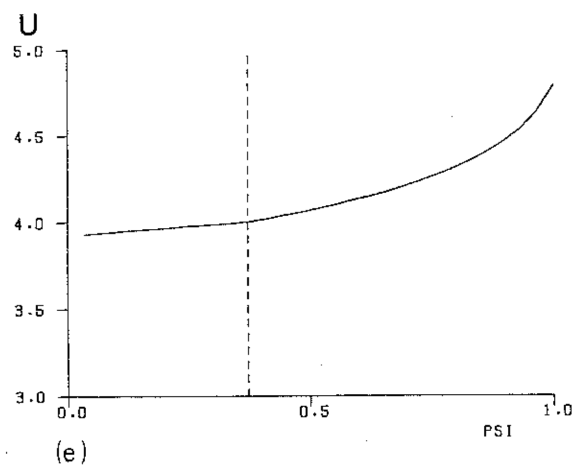


Fig. 11 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=1.0$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are:$-\mu_*=-0.3$, $\beta_s=$ 1.0%. (a) Flux surfaces on the (ρ, θ) plane. Bold curve denotes the plasma-vacuum boundary. Cross mark represents the position of magnetic axis. Circle depicted by dotted line is the final position of the circular material limiter to obtain the equilibrium with the required plasma average radius. The curvature center is on the right hand side. (b) Profile of the normalized plasma current on the y=0 plane. (c) Profile of the normalized plasma pressure on the y=0 plane. (d) Profile of the rotational transform μ versus normalized magnetic flux function Ψ. The dotted line denotes the position of plasma-vacuum boundary. (e) Profile of the specific volume versus normalized magnetic flux function.

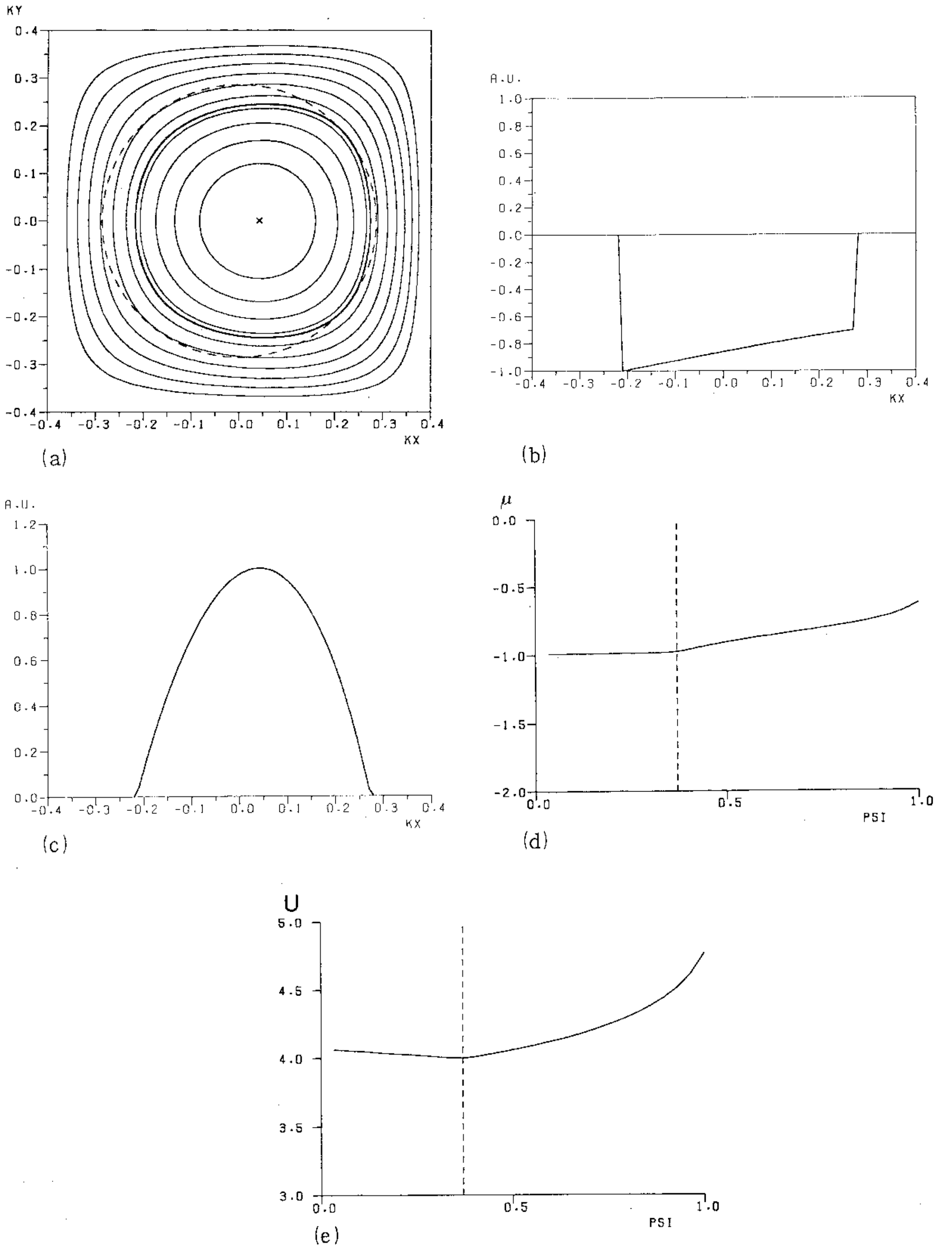


Fig.12 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=1.0$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*=-0.3$, $\beta_s=3.0\%$.

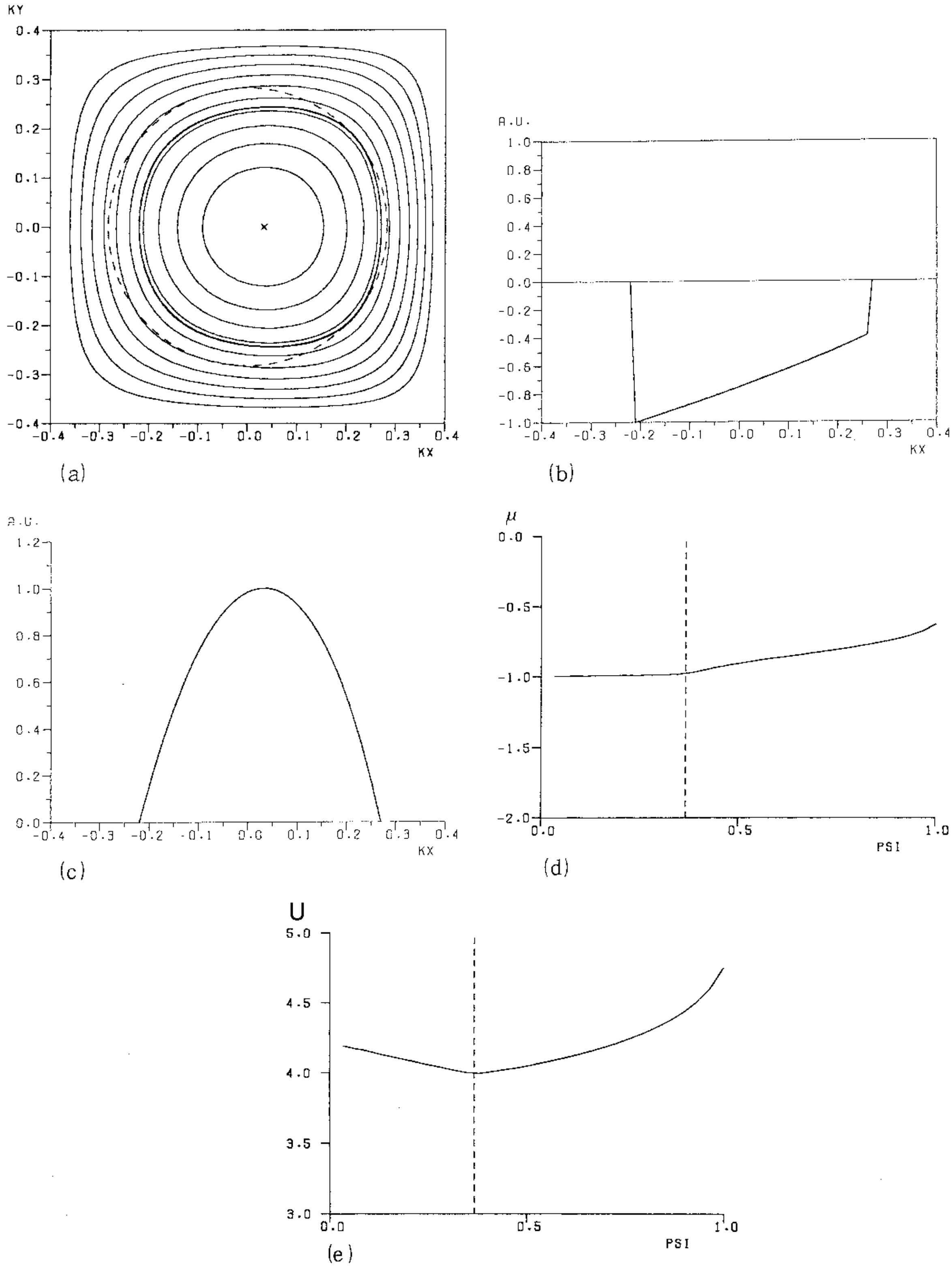


Fig.13 Numerical results of the equilibria for αr_0=1.0, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*$=-0.3, β_s=5.0%.

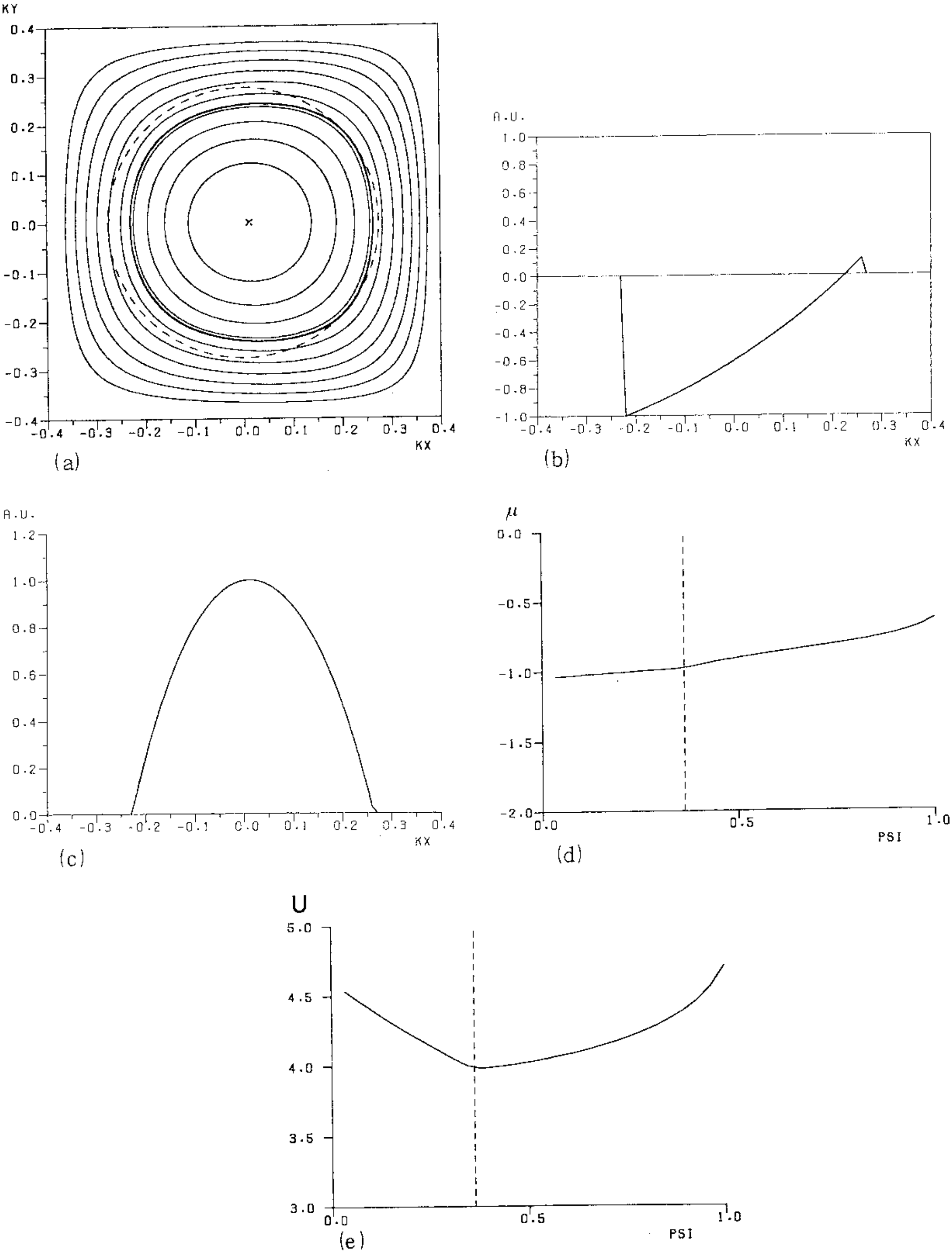


Fig.14 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=1.0$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*=-0.3$, $\beta_s=10.0\%$

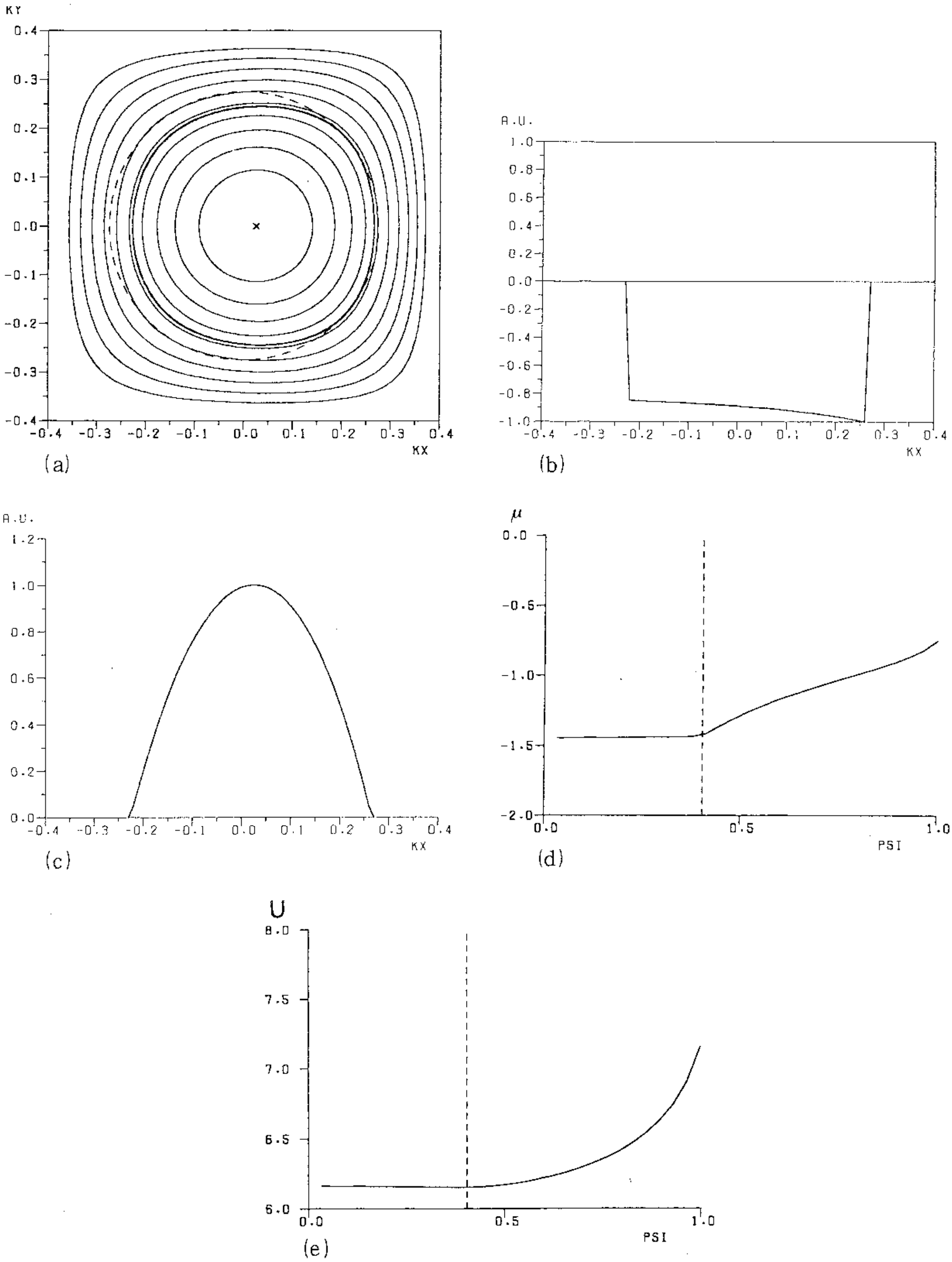


Fig. 15 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=1.0$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*=-1.0$, $\beta_s=5.0\%$.

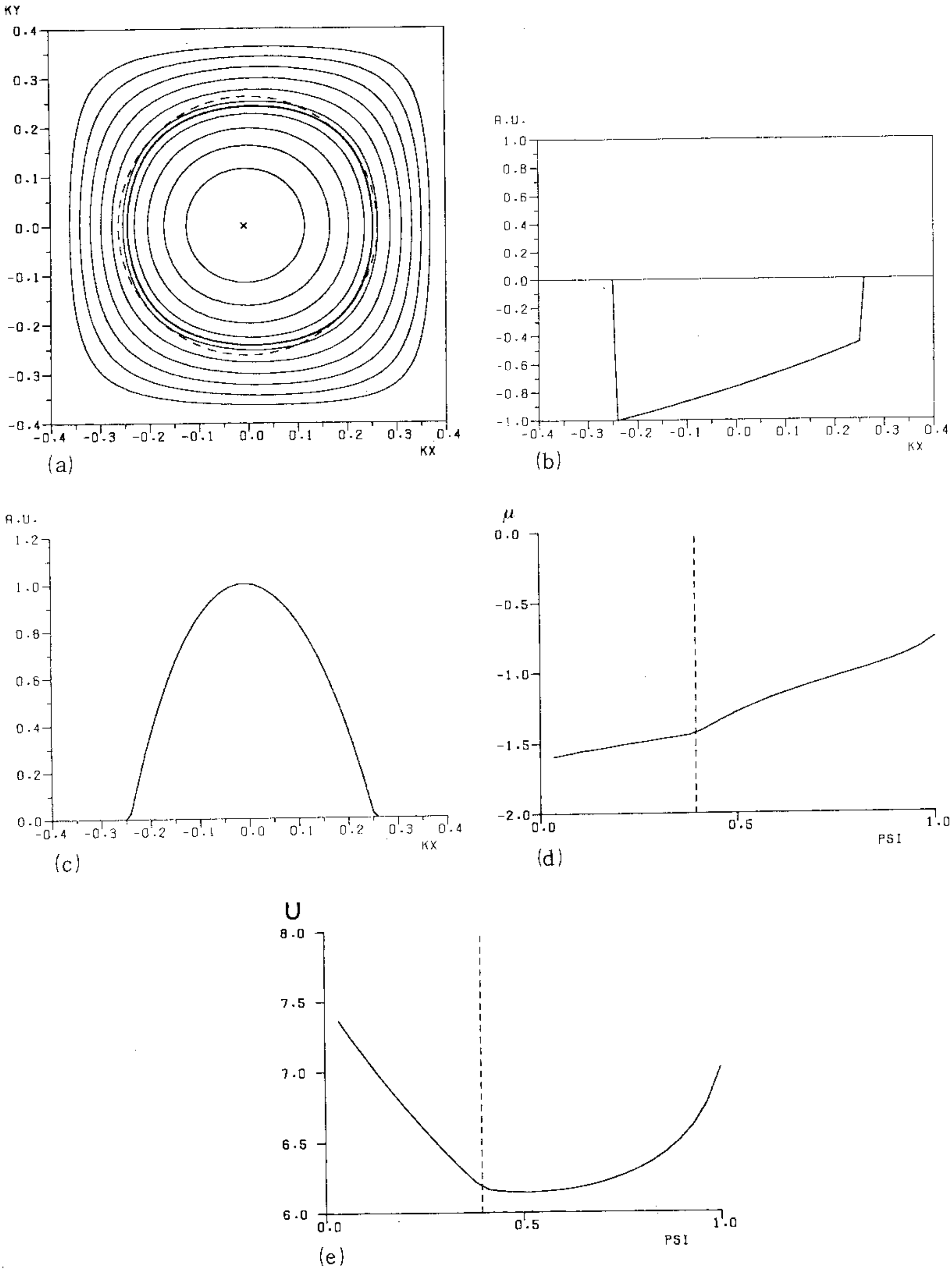


Fig.16 Numerical results of the equilibria for αr_0=1.0, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*$=-1.0, β_s= 20.0%

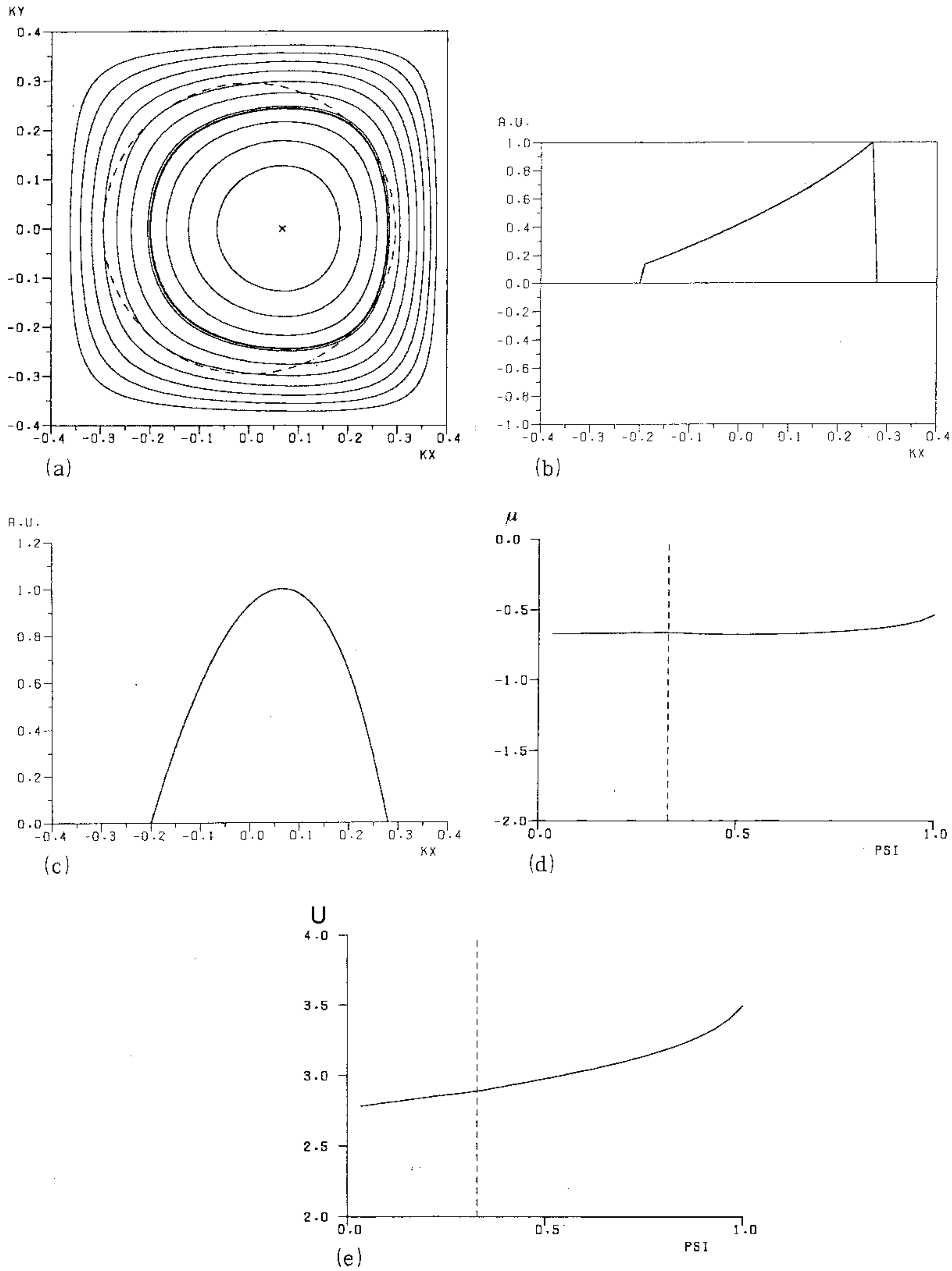


Fig. 17 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=1.0$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*= 0.1$, $\beta_s=1.0\%$.

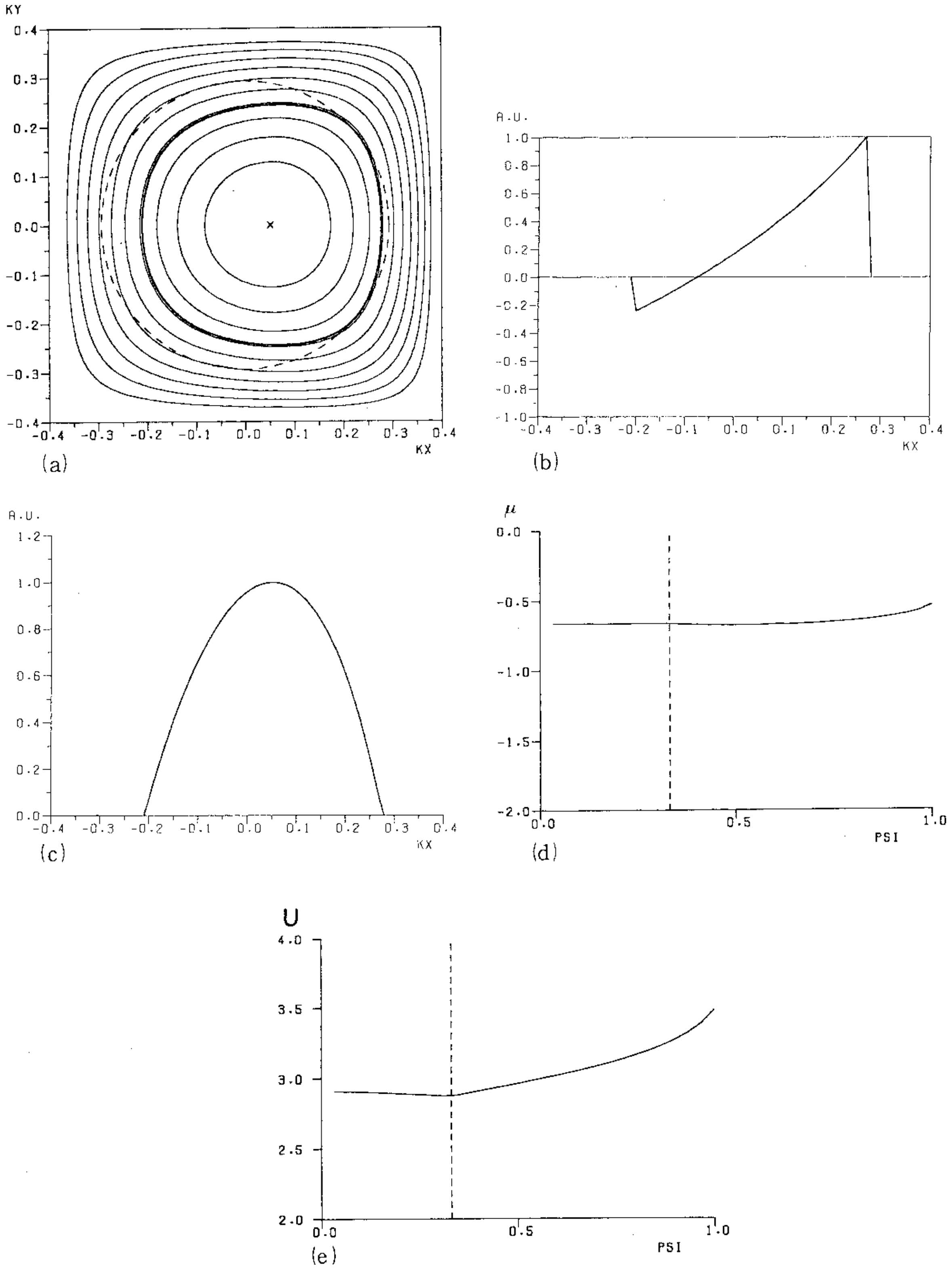


Fig. 18 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=1.0$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*= 0.1$, $\beta_s=3.0\%$.

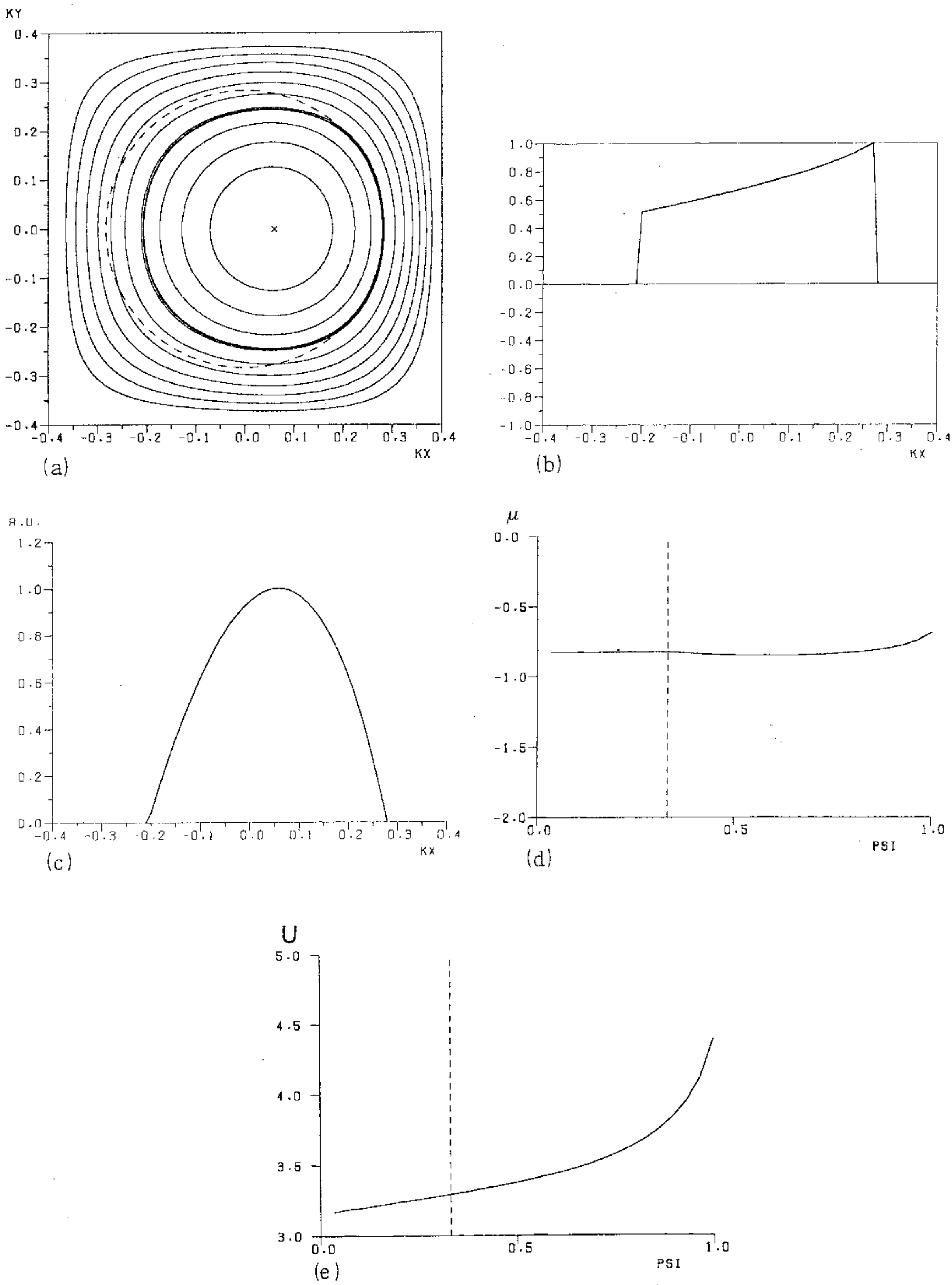


Fig.19 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=0.5$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*= 0.1$, $\beta_s=1.0\%$.

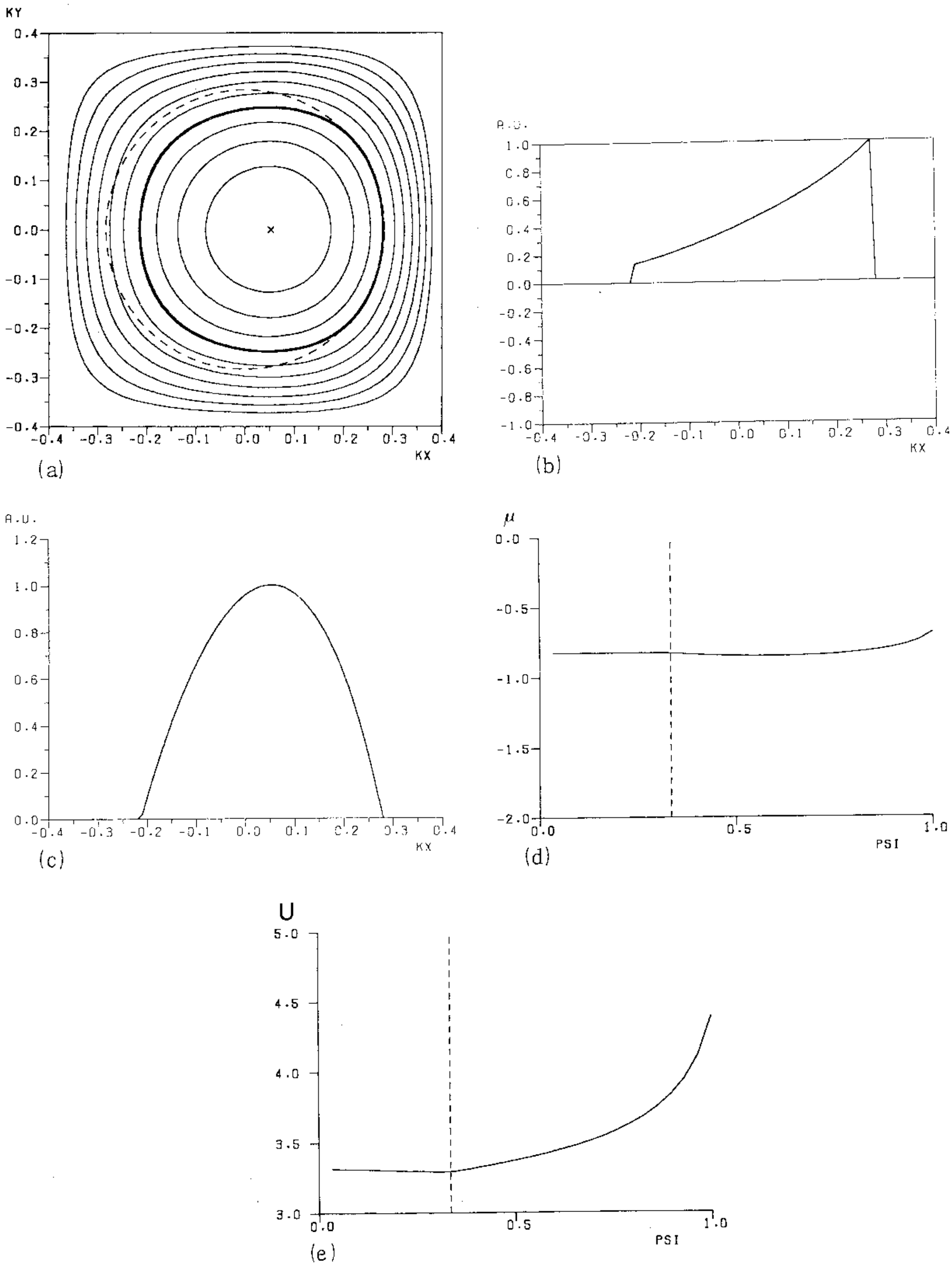


Fig.20 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=0.5$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*= 0.1$, $\beta_s=5.0\%$.

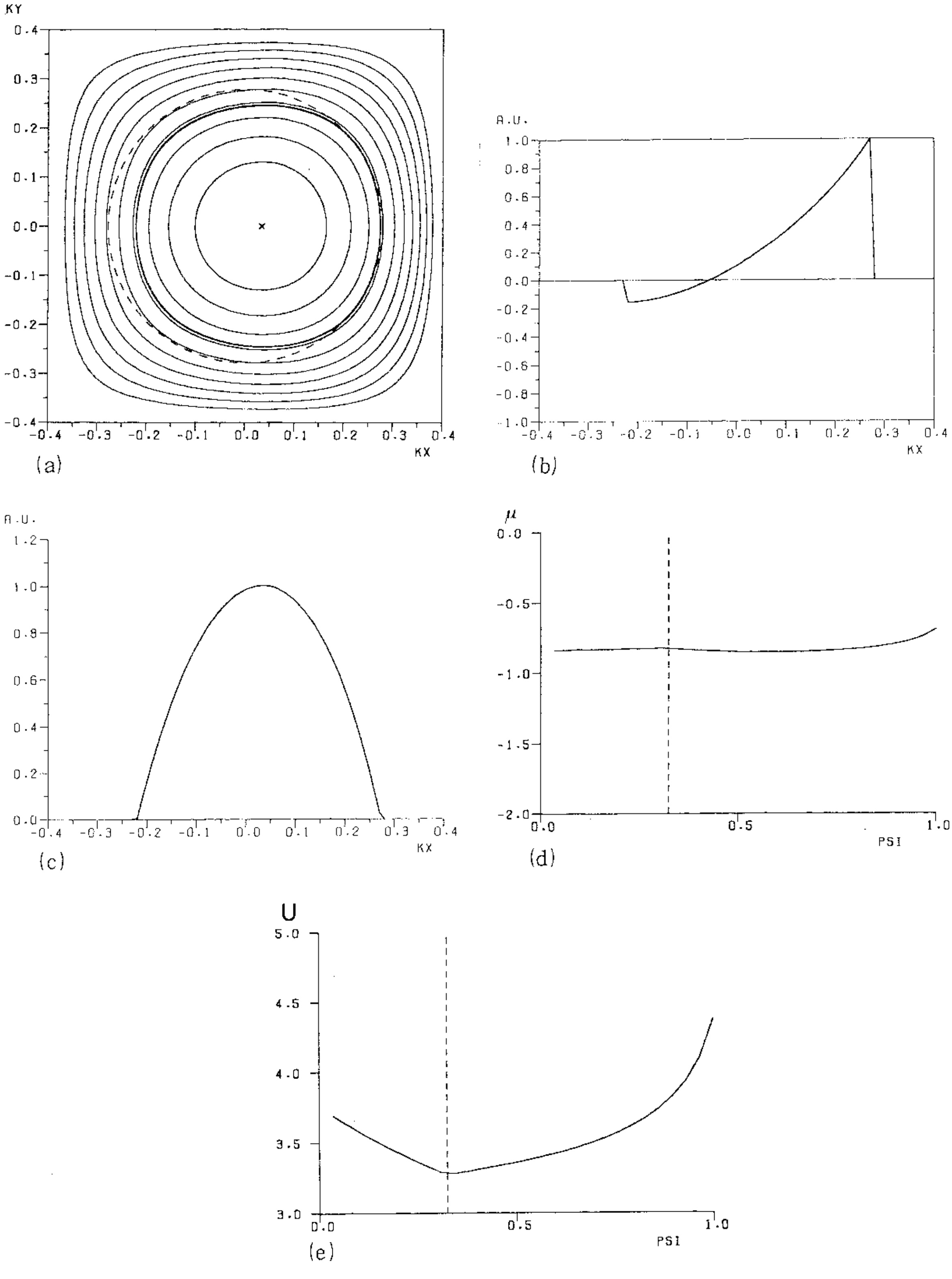


Fig.21 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=0.5$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*= 0.1$, $\beta_s=15.0\%$.

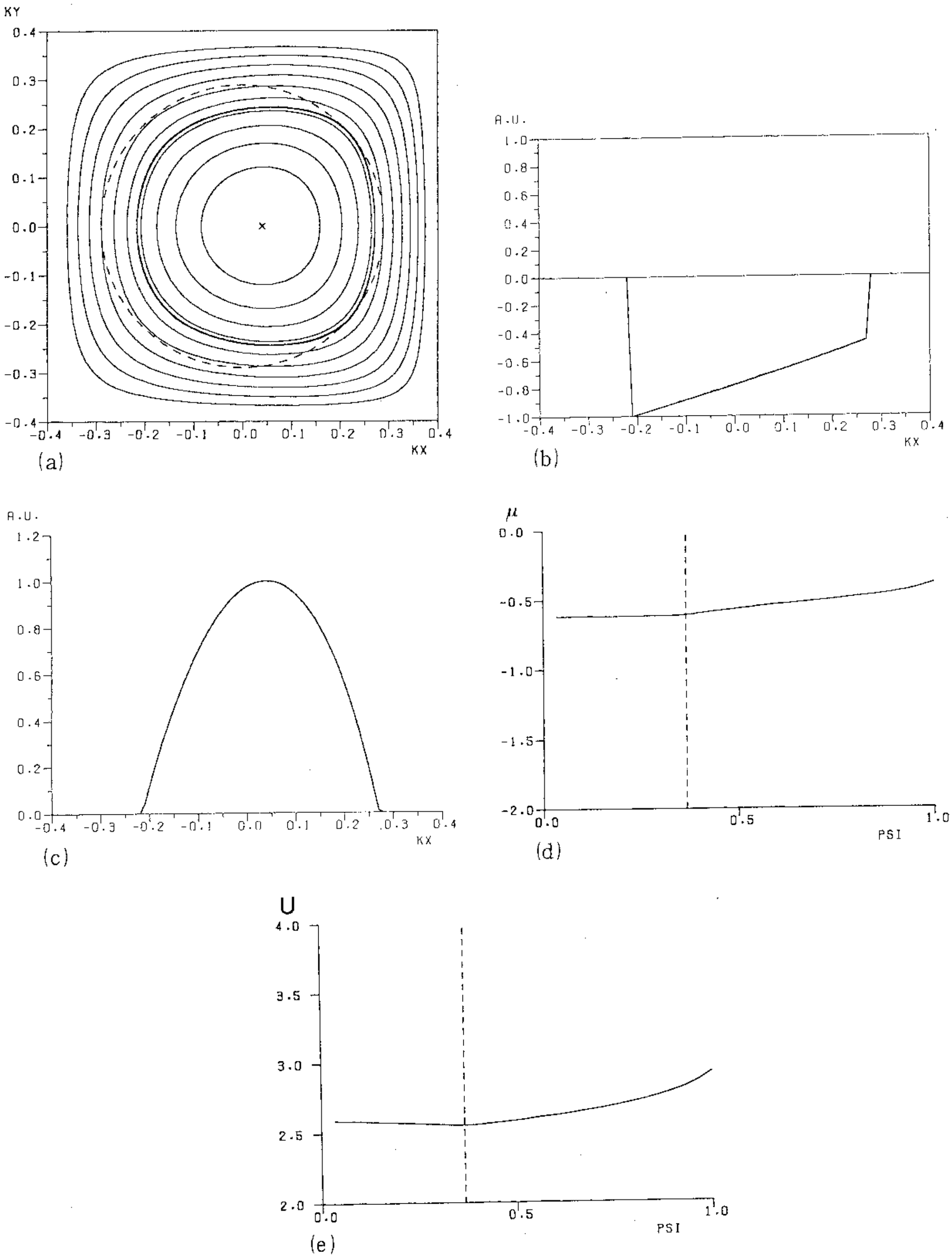


Fig.22 Numerical results of the equilibria for αr_0=2.0, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*=-0.3$, β_s=1.0%.

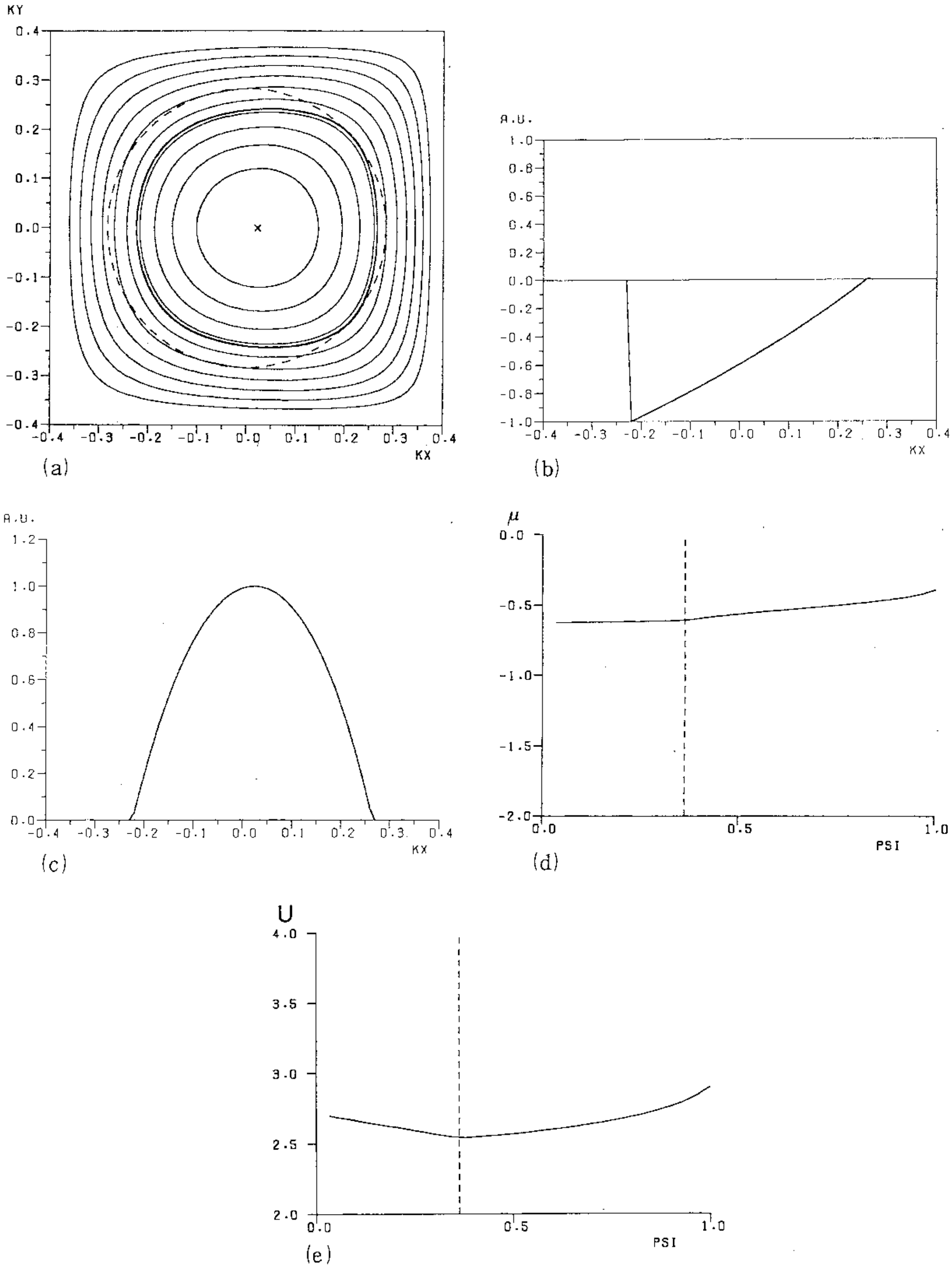


Fig. 23 Numerical results of the equilibria for $\alpha r_0=2.0$, kb=0.4 and ka=0.25. Plasma parameters are: $-\mu_*=-0.3$, $\beta_s=2.0\%$.

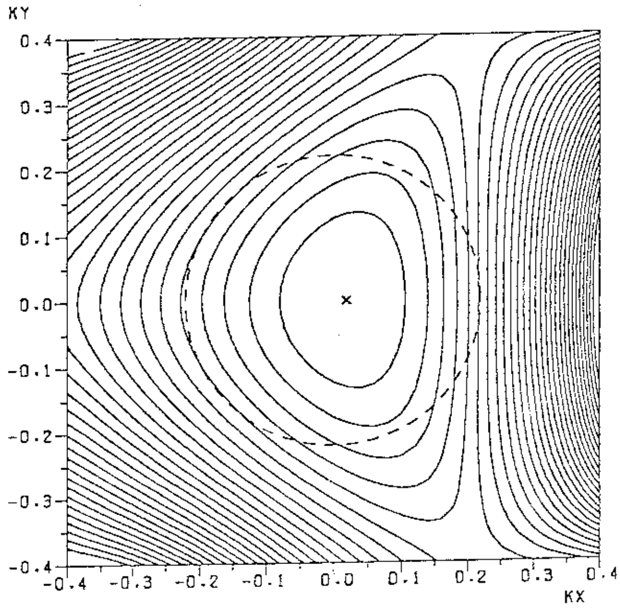


Fig.24 Flux surfaces on the (ρ, θ) plane in the vacuum magnetic field configuration, when external multipole field is added. Geometrical parameters are: $\alpha r_0=1.0$, kb=0.4. The approximate values of ellipticity and triangularity of magnetic surfaces are: $\varepsilon \sim 0.37$, $Q/k \sim 1.8$. Averaged minimum magnetic field configuration is formed.

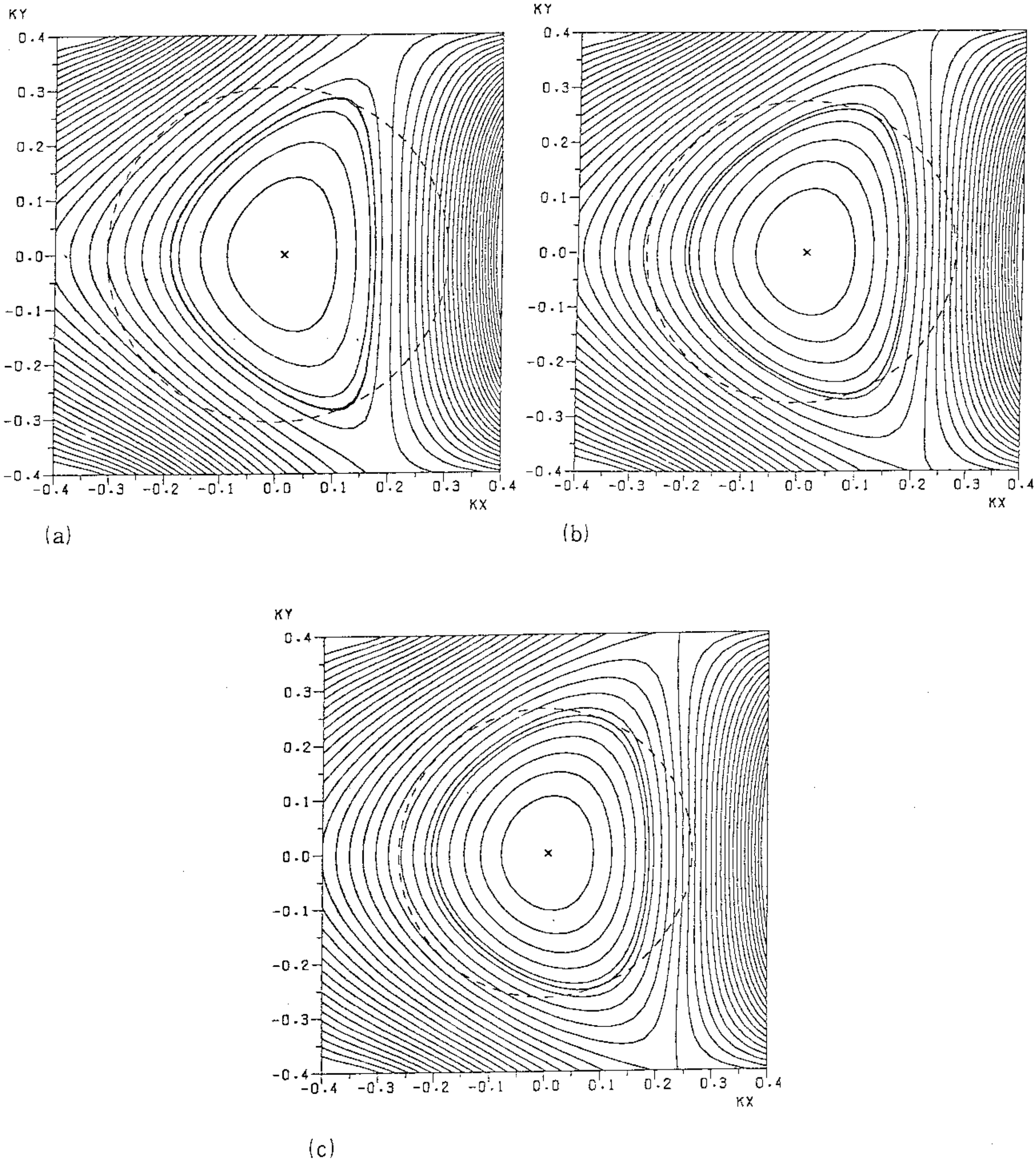


Fig.25

Numerical results of equilibria in the case of ka=0.22 and β_s=1.0%. The other parameters are equal to those of Fig.24. (a) $-\mu_*$=0.28, W=3.0%, β_p=0.24. (b) $-\mu_*$=-0.20, W=1.9%, β_p=0.11. (c) $-\mu_*$=-0.48, W=0.7%, β_p=0.07.

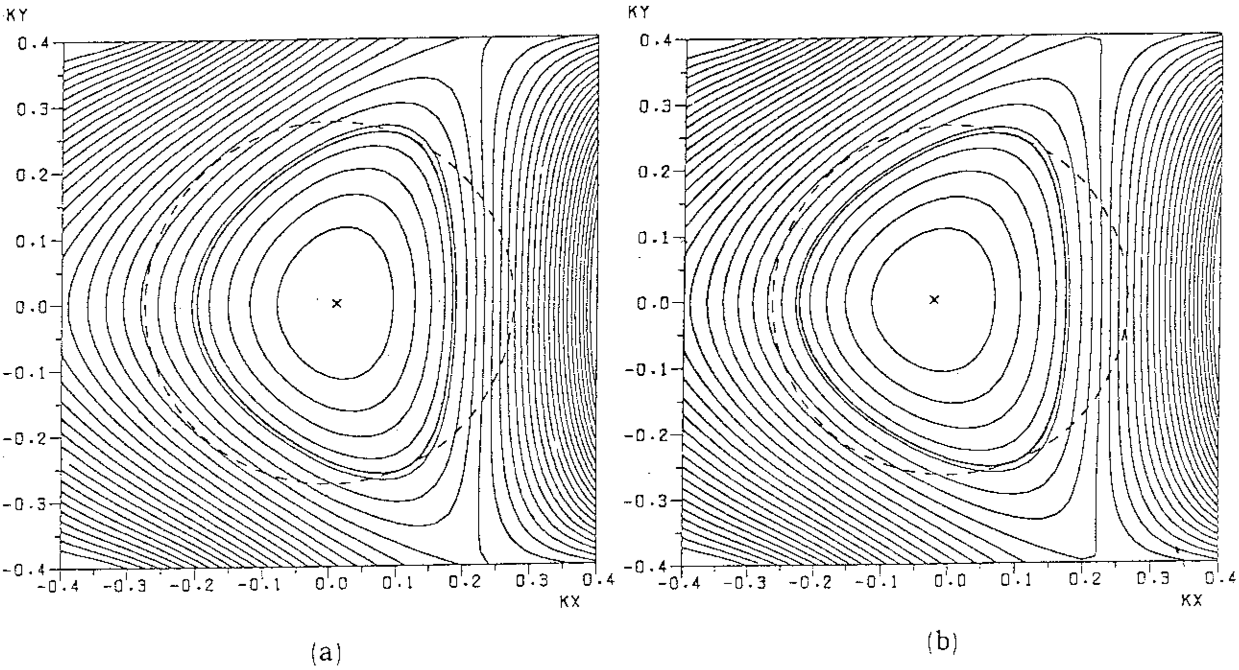


Fig.26

Numerical results of equilibria in the case of ka=0.22 and $-\mu_*=-0.2$. The other parameters are equal to those of Fig.24. (a) β_s=1.0%, W=1.9%, β_p=0.11. (b) β_s=10.0%, W=15.1%, β_p=1.03.

5. 結　　論

ヘリカル対称の成立する直線立体磁気軸配位のための平衡解析コードを開発し，その磁気流体力学的平衡に関する諸特性を，数値的に調べた。計算モデルは，矩形のトロイダル・コイルに相当する数値境界内に円形リミッターを配置し，真空領域の存在する自由境界値問題として扱った。数値解法として，逐次近似過大緩和法（SOR法）及び行列のLU分解に基づく直接法の両者を比較しながら用いた。本研究によって得られた主な知見は以下のとおりである。

まず，平衡コードとその解法に関して，

(1) 平衡方程式を一度だけ解く時には，直接法の方がSOR法より，CPU時間の観点から優れている。

(2) 外部反復を何度か行いながら平衡解を求める場合には，SOR法の内部反復の回数を適当に制御することにより，SOR法は直接法よりCPU時間が30％以上短縮される。

(3) SOR法における最適な緩和因子ωは，メッシュ数の増加とともに漸増の傾向にある。また，ωが1.92程度以上になると収束しない。

平衡の特性に関して

(4) 幾何学的なパラメーターαr_oが小さい程，すなわち相対的に磁気軸の曲率に比べて捩率が大きい程，プラズマ・ベータ値の増加に対するプラズマの諸種のパラメーターの変化はゆるやかである。

(5) $-\mu_* > 0$では，磁気軸の捩率による回転変換がプラズマ電流による回転変換によって巻き戻されるため，磁気面の「硬さ」がやわらかくなり，プラズマの諸種のパラメーターのベーター値の増加に対する変化が著しい。また，この領域における解の収束領域は極めて狭いことから，平衡をとりにくい領域であることが予想される。

(6) ベータ値の増加に伴なう，磁気軸のプラズマ中心に対する曲率の外側方向への移動量の割合Δ_aと，プラズマ柱内の磁気井戸の深さWは強い相関関係を有し，プラズマ自身の圧力によって磁気井戸を掘る「自己安定化効果」現象の一端が確認された。

なお，このようにして得られた平衡の安定性を調べるためには，トカマク・プラズマにおけるERATO[13]，PEST[14]のような完全MHD系の安定性解析コードを開発する必要がある。Gruberらがステラレーター型のヘリカル系について開発した安定性解析コードHERA[15]にならって，直線立体磁気軸系の安定性解析コードを開発するための定式化を行ったが，それは後に発表する。

謝　辞

本研究を遂行するにあたり，有意義な議論をしていただいた理論解析研究室の津田孝，滝塚知典，栗田源一，徳田伸二，伊藤公孝研究員に感謝致します。また，計算機使用にあたり，富士通㈱外来研究員の奈良岡賢逸，田中幸夫の両氏より多くの有益な助言をいただきました。東北大学の佐々木典彦博士には，時宜に応じ数々の適切なる助言をいただき，ありがとうござ

5. 結　　論

ヘリカル対称の成立する直線立体磁気軸配位のための平衡解析コードを開発し，その磁気流体力学的平衡に関する諸特性を，数値的に調べた。計算モデルは，矩形のトロイダル・コイルに相当する数値境界内に円形リミッターを配置し，真空領域の存在する自由境界値問題として扱った。数値解法として，逐次近似過大緩和法（SOR法）及び行列のLU分解に基づく直接法の両者を比較しながら用いた。本研究によって得られた主な知見は以下のとおりである。

まず，平衡コードとその解法に関して，

(1) 平衡方程式を一度だけ解く時には，直接法の方がSOR法より，CPU時間の観点から優れている。

(2) 外部反復を何度か行いながら平衡解を求める場合には，SOR法の内部反復の回数を適当に制御することにより，SOR法は直接法よりCPU時間が30％以上短縮される。

(3) SOR法における最適な緩和因子ωは，メッシュ数の増加とともに漸増の傾向にある。また，ωが1.92程度以上になると収束しない。

平衡の特性に関して

(4) 幾何学的なパラメーターαr_0が小さい程，すなわち相対的に磁気軸の曲率に比べて振率が大きい程，プラズマ・ベータ値の増加に対するプラズマの諸種のパラメーターの変化はゆるやかである。

(5) $-\mu_* > 0$では，磁気軸の振率による回転変換がプラズマ電流による回転変換によって巻き戻されるため，磁気面の「硬さ」がやわらかくなり，プラズマの諸種のパラメーターのベーター値の増加に対する変化が著しい。また，この領域における解の収束領域は極めて狭いことから，平衡をとりにくい領域であることが予想される。

(6) ベータ値の増加に伴なう，磁気軸のプラズマ中心に対する曲率の外側方向への移動量の割合Δ_aと，プラズマ柱内の磁気井戸の深さWは強い相関関係を有し，プラズマ自身の圧力によって磁気井戸を掘る「自己安定化効果」現象の一端が確認された。

なお，このようにして得られた平衡の安定性を調べるためには，トカマク・プラズマにおけるERATO[13]，PEST[14]のような完全MHD系の安定性解析コードを開発する必要がある。Gruberらがステラレーター型のヘリカル系について開発した安定性解析コードHERA[15]にならって，直線立体磁気軸系の安定性解析コードを開発するための定式化を行ったが，それは後に発表する。

謝　辞

本研究を遂行するにあたり，有意義な議論をしていただいた理論解析研究室の津田孝，滝塚知典，栗田源一，徳田伸二，伊藤公孝研究員に感謝致します。また，計算機使用にあたり，富士通㈱外来研究員の奈良岡賢逸，田中幸夫の両氏より多くの有益な助言をいただきました。東北大学の佐々木典彦博士には，時宜に応じ数々の適切なる助言をいただき，ありがとうござ

いました。また，終始御激励下さった小幡行雄核融合研究部長，田中正俊核融合研究部次長に感謝します。著者の1人である服藤が，本研究所で研究を遂行できるよう種々の御鞭撻をいただいた東北大学及び日本原子力研究所に対し，深く謝意を表します。また，長尾重夫中部工業大学教授及び渡辺博茂東北大学教授からは，著者の蒙を啓らかしめる数多くの助言と示唆をいただきました。

References

1) L.Spitzer Jr.: Phys. Fluids 1 (1958) 235

2) L.S.Solovev and V.D.Shafranov: Rev. of Plasma Phys., ed.M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1970) vol.5

3) A.M.Mikhailovskii and V.D.Shafranov: Sov. Phys.-JETP 39 (1974) 88

4) S.Nagao and Asperator NP Group: Proc. 7th Symp. on Engineering Prob. of Fusion Research, Knoxville (1977) vol.1 p.841

5) C.Mercier: Nucl.Fusion 3 (1963) 89; 4 (1964) 213

6) M.S.Chu, D.Dobrott, T.H.Jensen and T.Tamano: Phys. Fluids 17 (1974) 1183

7) Y.Suzuki: Nucl.Fusion 14 (1974) 345

8) Y.Hamada, Y.Suzuki, K.Ohasa, M.Fujiwara and K.Miyamoto: Plasma Phys. 18 (1976) 889

9) R.S.Varga: Matrix Iterative Method (Prentice-Hall Inc. New Jersey U.S.A., 1962)

10) FACOM Fortran SSL II Manual Version 4 (1979)

11) S.Tokuda: Private Communication

12) H.Watanabe, Y.Funato and S.Nagao: J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 1542

13) R.Gruber, F.Troyon, D.Berger, L.C.Bernard, S.Rousset, R.Schreiber, W.Kerner, W.Schneider and K.V.Roberts: Comput. Phys. Commun. 21 (1981) 323

14) R.C.Grimm, J.M.Greene and J.L.Johnson: Method of Computational Physics vol.16 (Academic Press, New York, 1975) ch.4

15) R.Gruber, S.Semenzato, F.Troyon and T.Tsunematsu: Comput. Phys. Commun. 24 (1981) 363

16) S.Nagao: Private Communication

17) K.Harafuji, N.Sasaki, H.Watanabe and S.Nagao: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 1323

付録A　幾何軸に準拠した座標系と磁気軸に準拠した座標系との間の単位ベクトルの変換関係

数値計算において，装置の幾何学的ならせん軸に準拠したメルシエ座標系（ρ^*，ω^*，s^*）と，らせん磁気軸に準拠したメルシエ座標系（ρ，ω，s）との間の単位ベクトルの正確な変換関係が，しばしば必要となってくる。ここでは，それを導出する。なお，以下右肩に＊を付したものは幾何学的な直線らせん軸に準拠した変数を表わすこととし，磁気軸に準拠した変数と区別することにする。

ξを幾何学的な直線らせん軸からの曲率中心方向への磁気軸の変位量とすると，一般に以下の様な関係式が成立する[16]。

$$x = r_o^*\cos\gamma^*\alpha s^* - \rho^*\cos\gamma^*\alpha s^*\cdot\cos\theta^* + \gamma^*\rho^*\sin\gamma^*\alpha s^*\cdot\sin\theta^*$$

$$= (r_o^* - \xi)\cos\gamma\alpha s - \rho\cos\gamma\alpha s\cdot\cos\theta + \gamma\rho\sin\gamma\alpha s\cdot\sin\theta \quad \cdots\cdots (A.1)$$

$$y = r_o^*\sin\gamma^*\alpha s^* - \rho^*\sin\gamma^*\alpha s^*\cdot\cos\theta^* - \gamma^*\rho^*\cos\gamma^*\alpha s^*\cdot\sin\theta^*$$

$$= (r_o^* - \xi)\sin\gamma\alpha s - \rho\sin\gamma\alpha s\cdot\cos\theta - \gamma\rho\cos\gamma\alpha s\cdot\sin\theta \quad \cdots\cdots (A.2)$$

$$z = \gamma^* s^* + r_o^*\gamma^*\alpha\rho^*\sin\theta^*$$

$$= \gamma s + (r_o^* - \xi)\gamma\alpha\rho\sin\theta \quad \cdots\cdots (A.3)$$

ここで，（x，y，z）はデカルト座標系である。また，

$$\theta^* = \omega^* - æ^* s^* \quad \cdots\cdots (A.4)$$

$$\gamma^* = \frac{1}{(1 + \alpha^2 r_o^{*2})^{1/2}} \quad \cdots\cdots (A.5)$$

$$\gamma = \frac{1}{\{1 + \alpha^2 (r_o^* - \xi)^2\}^{1/2}} \quad \cdots\cdots (A.6)$$

である。

磁気軸の変位ξが有限である場合，s^*が一定の面とsが一定の面とは，$\theta^* = 0$及びπで与えられる直線を共通の軸として傾いている。すなわち，s^*＝一定の面とs＝一定の面とのずれΔsは，ヘリカル対称性を仮定しているのでs^*には依存せず，ρ^*及びθ^*の関数として一意的に決まる。まず

$$X = \rho\cos\theta \quad ; \quad Y = \rho\sin\theta \quad \cdots\cdots (A.7)$$

$$X^* = \rho^*\cos\theta^* \quad ; \quad Y^* = \rho^*\sin\theta^* \quad \cdots\cdots (A.8)$$

とおき，(A.1)〜(A.3)式を用いると，Δs を与える以下の超越方程式を得る。

$$\frac{1}{\alpha}\Delta(\gamma\alpha s) + (r_o^* - \xi)\alpha\{(r_o^* - X^*)\sin\Delta(\gamma\alpha s) + \gamma^* Y^* \cos\Delta(\gamma\alpha s)\}$$
$$= r_o^* \gamma^* \alpha Y^* \qquad \cdots\cdots \text{(A.9)}$$

ここで

$$\Delta(\gamma\alpha s) = \gamma\alpha s - \gamma^* \alpha s^* \qquad \cdots\cdots \text{(A.10)}$$

である。(A.9)式は，例えばニュートン法を用いて解くことができる。特に，$\Delta s \simeq 0$ の近似を用いると，

$$\Delta s = \frac{\frac{\xi}{\gamma}\gamma^* \alpha \rho^* \sin\theta^*}{1 + (r_o^* - \xi)\alpha^2(r_o^* - \rho^* \cos\theta^*)} \qquad \cdots\cdots \text{(A.11)}$$

となる。ここで $s^* = 0$ とおいてあるが，前述の様にヘリカル対称性が成立するので一般性を失なわない。なお，(A.7)式で定義されたX及びYは，(A.9) 式で決定される Δs を用いて次式の様に表現できる。

$$\begin{aligned} X &= \rho\cos\theta \\ &= (r_o^* - \xi) - (r_o^* - \rho^* \cos\theta^*)\cos(\gamma\alpha\Delta s) \\ &\quad + \gamma^* \rho^* \sin\theta^* \sin(\gamma\alpha\Delta s) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots \text{(A.12)}$$

$$\begin{aligned} Y &= \rho\sin\theta \\ &= \frac{1}{\gamma}\{(r_o^* - \rho^* \cos\theta^*)\sin(\gamma\alpha\Delta s) \\ &\quad + \gamma^* \rho^* \sin\theta^* \cos(\gamma\alpha\Delta s)\} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots \text{(A.13)}$$

さて，(A.1)〜(A.3)式の両辺の増分をとると

$$dx = A\,d\rho + B\,d\omega + C\,ds = A^* d\rho^* + B^* d\omega^* + C^* ds^* \qquad \cdots\cdots \text{(A.14)}$$

$$dy = D\,d\rho + E\,d\omega + F\,ds = D^* d\rho^* + E^* d\omega^* + F^* ds^* \qquad \cdots\cdots \text{(A.15)}$$

$$dz = G\,d\rho + H\,d\omega + J\,ds = G^* d\rho^* + H^* d\omega^* + J^* ds^* \qquad \cdots\cdots \text{(A.16)}$$

と表現できる。ここで

$$A = -\cos(\gamma\alpha\Delta s)\cos\theta + \gamma\sin(\gamma\alpha\Delta s)\sin\theta$$
$$B = \rho\cos(\gamma\alpha\Delta s)\sin\theta + \gamma\rho\sin(\gamma\alpha\Delta s)\cos\theta$$
$$\begin{aligned} C &= -\gamma\alpha(r_o^* - \xi)\sin(\gamma\alpha\Delta s) + \gamma\rho(\alpha - \text{æ})\sin(\gamma\alpha\Delta s)\cos\theta \\ &\quad + \rho(-\text{æ} + \gamma^2\alpha)\cos(\gamma\alpha\Delta s)\sin\theta \end{aligned}$$
$$D = -\sin(\gamma\alpha\Delta s)\cos\theta - \gamma\cos(\gamma\alpha\Delta s)\sin\theta$$
$$E = \rho\sin(\gamma\alpha\Delta s)\sin\theta - \gamma\rho\cos(\gamma\alpha\Delta s)\cos\theta$$

$$F=(r_o^*-\xi)\gamma\alpha\cos(\gamma\alpha\Delta s)+\gamma\rho(-\alpha+æ)\cos(\gamma\alpha\Delta s)\cos\theta$$
$$+\rho(-æ+\gamma^2\alpha)\sin(\gamma\alpha\Delta s)\sin\theta$$
$$G=(r_o^*-\xi)\gamma\alpha\sin\theta$$
$$H=\rho(r_o^*-\xi)\gamma\alpha\cos\theta$$
$$J=\gamma-æ(r_o^*-\xi)\gamma\alpha\rho\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (A.17)$$

$$A^*=-\cos\theta^*$$
$$B^*=\rho^*\sin\theta^*$$
$$C^*=\rho^*(-æ^*+\gamma^{*2}\alpha)\sin\theta^*$$
$$D^*=-\gamma^*\sin\theta^*$$
$$E^*=-\gamma^*\rho^*\cos\theta^*$$
$$F^*=\gamma^*\alpha r_o^*+\gamma^*\rho^*(-\alpha+æ^*)\cos\theta^*$$
$$G^*=r_o^*\gamma^*\alpha\sin\theta^*$$
$$H^*=\rho^*\gamma^*\alpha r_o^*\cos\theta^*$$
$$J^*=\gamma^*-æ^*\gamma^*\alpha r_o^*\rho^*\cos\theta^* \quad \cdots\cdots\cdots \quad (A.18)$$

である。(A.14)～(A.16)式を，$d\rho$，$d\omega$ 及び ds に関する連立方程式と考えて解くと次の様になる。

$$d\rho=P_\rho^*d\rho^*+P_\omega^*d\omega^*+P_s^*ds^*$$
$$d\omega=Q_\rho^*d\rho^*+Q_\omega^*d\omega^*+Q_s^*ds^*$$
$$ds=R_\rho^*d\rho^*+R_\omega^*d\omega^*+R_s^*ds^* \quad \cdots\cdots\cdots \quad (A.19)$$

但し

$$P_\rho^*=(EJA^*+HCD^*+FBG^*-CEG^*-HFA^*-BJD^*)/K$$
$$P_\omega^*=(EJB^*+HCE^*+FBH^*-CEH^*-HFB^*-BJE^*)/K$$
$$P_s^*=(EJC^*+HCF^*+FBJ^*-CEJ^*-HFC^*-BJF^*)/K$$
$$Q_\rho^*=(AJD^*+FGA^*+DCG^*-CGD^*-AFG^*-DJA^*)/K$$
$$Q_\omega^*=(AJE^*+FGB^*+DCH^*-CGE^*-AFH^*-DJB^*)/K$$
$$Q_s^*=(AJF^*+FGC^*+DCJ^*-CGF^*-AFJ^*-DJC^*)/K$$
$$R_\rho^*=(AEG^*+BGD^*+DHA^*-GEA^*-DBG^*-AHD^*)/K$$
$$R_\omega^*=(AEH^*+BGE^*+DHB^*-GEB^*-DBH^*-AHE^*)/K$$
$$R_s^*=(AEJ^*+BGF^*+DHC^*-GEC^*-DBJ^*-AHF^*)/K$$
$$K=AEJ+BFG+DHC-CEG-AFH-DBJ \quad \cdots\cdots\cdots \quad (A.20)$$

で与えられる。(A.14)式を用いて，位置ベクトル $\vec{r}$ の増分 $d\vec{r}$ を幾何軸系及び磁気軸系で書き下すと

$$d\vec{r}=\vec{e}_\rho d\rho+\rho\,\vec{e}_\omega d\omega+h_s\vec{e}_s ds$$

$$= \vec{e}_\rho (P_\rho^* d\rho^* + P_\omega^* d\omega^* + A_s^* ds^*)$$
$$+ \rho\vec{e}_\omega (Q_\rho^* d\rho^* + Q_\omega^* d\omega^* + Q_s^* ds^*)$$
$$+ h_s\vec{e}_s (R_\rho^* d\rho^* + R_\omega^* d\omega^* + R_s^* ds^*)$$
$$= (\vec{e}_\rho P_\rho^* + \rho\vec{e}_\omega Q_\rho^* + h_s\vec{e}_s R_\rho^*) d\rho^*$$
$$+ (\vec{e}_\rho P_\omega^* + \rho\vec{e}_\omega Q_\omega^* + h_s\vec{e}_s R_\omega^*) d\omega^*$$
$$+ (\vec{e}_\rho P_s^* + \rho\vec{e}_\omega Q_s^* + h_s\vec{e}_s R_s^*) ds^*$$
$$= \vec{e}_\rho^{\,*} d\rho^* + \rho^*\vec{e}_\omega^{\,*} d\omega^* + h_s^*\vec{e}_s^{\,*} ds^* \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A.21)$$

(A．21) 式より

$$\vec{e}_\rho^{\,*} = P_\rho^*\vec{e}_\rho + \rho Q_\rho^*\vec{e}_\omega + h_s R_\rho^*\vec{e}_s$$
$$\vec{e}_\omega^{\,*} = (P_\omega^*\vec{e}_\rho + \rho Q_\omega^*\vec{e}_\omega + h_s R_\omega^*\vec{e}_s) / \rho^*$$
$$\vec{e}_s^{\,*} = (P_s^*\vec{e}_\rho + \rho Q_s^*\vec{e}_\omega + h_s R_s^*\vec{e}_s) / h_s^* \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A.22)$$

を得る。逆に

$$\vec{e}_\rho = P_\rho\vec{e}_\rho^{\,*} + \rho^* Q_\rho\vec{e}_\omega^{\,*} + h_s^* R_\rho\vec{e}_s^{\,*}$$
$$\vec{e}_\omega = (P_\omega\vec{e}_\rho^{\,*} + \rho^* Q_\omega\vec{e}_\omega^{\,*} + h_s^* R_\omega\vec{e}_s^{\,*}) / \rho$$
$$\vec{e}_s = (P_s\vec{e}_\rho^{\,*} + \rho^* Q_s\vec{e}_\omega^{\,*} + h_s^* R_s\vec{e}_s^{\,*}) / h_s \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A.23)$$

の関係が成立する。但し，P_ρ，P_ω 等，サフィックス＊が付されていないものは，（A．20）式において＊の着脱の関係が逆になったものである。

一例として，$\vec{\nabla}\psi$ の各成分の変換関係を示す。

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{e}_\rho$$
$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho^*}\vec{e}_\rho^{\,*} + \frac{1}{\rho^*}\frac{\partial\psi}{\partial\omega^*}\vec{e}_\omega^{\,*} + \frac{1}{h_s^*}\frac{\partial\psi}{\partial s^*}\vec{e}_s^{\,*}\right)\cdot(P_\rho\vec{e}_\rho^{\,*} + \rho^* Q_\rho\vec{e}_\omega^{\,*} + h_s^* R_\rho\vec{e}_s^{\,*})$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial\rho^*}P_\rho + \frac{\partial\psi}{\partial\omega^*}Q_\rho + \frac{\partial\psi}{\partial s^*}R_\rho$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial\rho^*}P_\rho + (Q_\rho - æ^* R_\rho)\frac{\partial\psi}{\partial\theta^*} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A.24)$$

同様にして

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial\rho^*}P_\omega + (Q_\omega - æ^* R_\omega)\frac{\partial\psi}{\partial\theta^*}$$
$$= -\frac{1}{æ}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\rho^*}P_s + (Q_s - æ^* R_s)\frac{\partial\psi}{\partial\theta^*}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A.25)$$

を得る。

付録B　外部多極磁場コイルの作る磁束の計算方法

図B.1に示すように，極数ℓが1，2及び3の多極磁場コイルを矩形境界の外側に配置する。そして，これらのコイルのつくる磁束ψ_eの矩形境界上での値ψ_{eb}を，ビオ・サバール則に基づいて数値的に求めて，非円形断面平衡の計算を行う。

具体的には，各極数のコイルの単位電流あたりのつくる磁場のω及びs成分を，矩形境界を十分に囲む（ρ，θ）グリッドの各点で，まず求める。磁気面関数ψは

$$\psi = \int_0^{\rho} (\text{æ}\,\rho B_s - h_s B_\omega)\, d\rho \qquad \cdots\cdots (B.1)$$

で与えられるので，この定義式に従い（ρ，θ）の各グリッド上のψ_eを，数値積分を実行して求める。内挿操作により，（ρ，θ）グリッド上のψ_eを用いて，矩形境界上のψ_{eb}を求め，データ・ファイルとしてディスクに蓄え，必要に応じて読み出せるようにする。

一般に，$\ell = 1$，$\ell = 2$及び$\ell = 3$の多極磁場の成分の大きさは，各磁気面のシフト，楕円度及び3角度の大きさを特徴づけるものであるが，曲率が比較的大きいため，各の極数の曲率の効果によって上下に分離したサイド・バンドの効果が無視できない。すなわち，平面軸ステラレーターのスカラーポテンシャル

$$\phi_0 = a_N I_N (N \text{æ} \rho) \sin N\theta, \quad N = \ell\,(2m-1),\ m = 1, 2, 3, \cdots\cdots \qquad (B.2)$$

を$k\rho$に関して零次の解として，摂動法により$k\rho$の展開の1次の解を求めると

$$\phi_1 = \phi^{(+)} + \phi^{(-)} \qquad \cdots\cdots (B.3)$$

ここで

$$\phi^{(\pm)} = \Big[\, C^{\pm}\, I_{N\pm1}\{(N\pm1)\text{æ}\rho\} - \frac{a_N k}{2\text{æ}}\{(2N\pm1)\, I_{N\pm1}(N\text{æ}\rho) \pm N\text{æ}\rho\, I'_{N\pm1}(N\text{æ}\rho)\}\Big] \sin(N\pm1)\theta \qquad \cdots\cdots (B.4)$$

となる[17]。ただし，ダッシュはアーギュメントについての微分を表わす。よって，例えば$\ell = 2$の成分から，比較的大きな磁気軸のシフト及び3角度成分が生じる。そのために，一般に希望とする楕円度，3角度等を作り出すための各多極磁場コイルの電流値の制御は複雑である。なお，(B.4)式にあらわれる$C^{\pm}$は，境界条件によって決定される定数である。

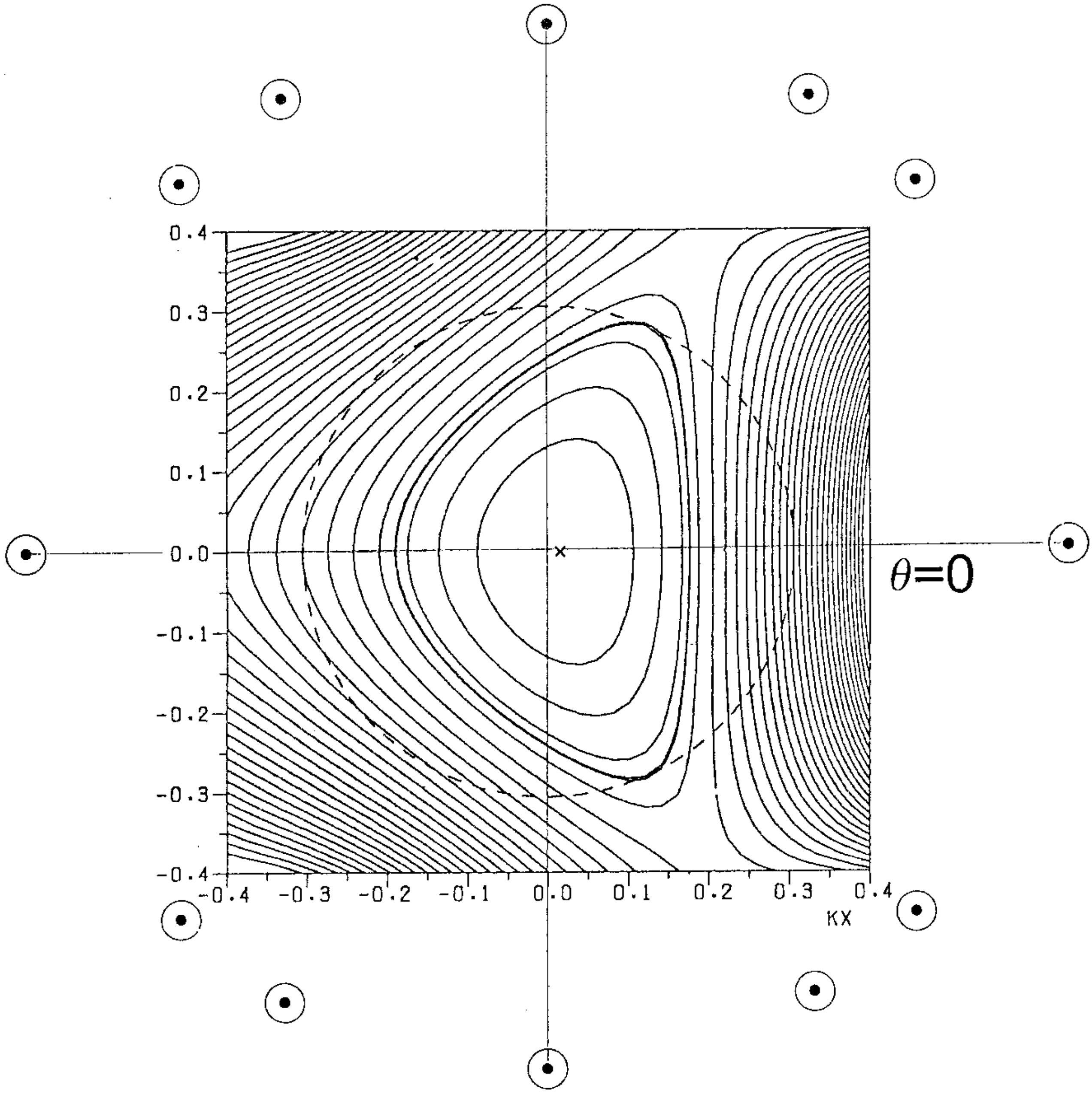


Fig.B.1 Arrangement of external multipole field coils.

付録C　LU分解と連立一次方程式の解法

(3.44) 式で与えられる，A_i をLU分割した時の，L及びU行列の各要素は以下の様にして求められる。ピボッティングは行っていない。

$$
a_{ij} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & & & & \\ \ell_{21} & \ell_{22} & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots\cdots & \ell_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \cdots\cdots & u_{2n} \\ & & 1 & \cdots\cdots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.44)$$

1)　$k = 1$

$$a_{11} = \ell_{11}$$

$$a_{1j} = \ell_{11} \cdot u_{1j} \quad \rightarrow \quad u_{1j} = a_{1j} / \ell_{11} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C.1)$$

2)　$k = 2$

$$a_{21} = \ell_{21}$$

$$a_{22} = \ell_{21} \cdot u_{12} + \ell_{22} \quad \rightarrow \quad \ell_{22} = a_{22} - \ell_{21} \cdot u_{12} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (C.2)$$

$$a_{2j} = \ell_{21} \cdot u_{1j} + \ell_{22} \cdot u_{2j} \quad \rightarrow \quad u_{2j} = (a_{2j} - \ell_{21} \cdot u_{1j}) / \ell_{22}$$

$$\text{for} \quad j = 3, \cdots, n \qquad \cdots (C.3)$$

3)　$3 \leq k \leq n - 1$

$$a_{k1} = \ell_{k1}$$

3.1　$2 \leq j \leq k$ に対して

$$a_{kj} = \sum_{m=1}^{j} \ell_{km} u_{mj} = \sum_{m=1}^{j-1} \ell_{km} u_{mj} + \ell_{kj}$$

$$\rightarrow \ell_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{j-1} \ell_{km} u_{mj} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C.4)$$

3.2　$k + 1 \leq j \leq n$ に対して

$$a_{kj} = \sum_{m=1}^{k-1} \ell_{km} u_{mj} + \ell_{kk} u_{kj}$$

$$\rightarrow u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} \ell_{km} u_{mj}) / \ell_{kk} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C.5)$$

4)　$k = n$

$$a_{n1} = \ell_{n1}$$

$$a_{n2} = \ell_{n1} \cdot u_{12} + \ell_{n2}$$

$$a_{n3} = \ell_{n1} \cdot u_{13} + \ell_{n2} \cdot u_{23} + \ell_{n3}$$

$$\vdots$$

$$a_{nn} = \ell_{n1}\, u_{1n} + \cdots\cdots + \ell_{nn}$$

$$\rightarrow \ell_{nj} = a_{nj} - \sum_{m=1}^{j-1} \ell_{nm}\, u_{mj} \qquad \cdots\cdots \quad (C.6)$$

次に，連立１次方程式（3.46）及び（3.47）式は以下のようにして解く。

a）Ly = b　（前進代入）

$$y_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, y_k \right) / \ell_{kk}, \quad i = 1, \cdots, n \qquad \cdots\cdots \quad (C.7)$$

なる式で逐次求める。

b）Ux = y を解く　（後退代入）

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}\, x_k, \quad i = n, \cdots, 1 \qquad \cdots\cdots \quad (C.8)$$

なる式で逐次求める。

LU分解のプログラム・リスト

DRLU

```
*DECK DRLU
C ----------------------------------------------------------------------+
      SUBROUTINE DRLU(A,MDUM,N,EPS,IP,IS,ZDUM,ICON)
C ----------------------------------------------------------------------+
C     LU DECOMPOSITION ROUTINE WITHOUT PIVOTTING
C -----------------------------------------------------------------------
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),ZDUM(1),IP(1)
      DATA EPS0 /1.0D-20/
C ----------------------------------------------------------------------+
C         STANDARD LU DECOMPOSITION PROGRAM  1982.7.2.                   I
C         A   ---  N*N FULL REAL MATRIX                                 I
C         N   ---  ORDER OF THE MATRIX *A*                              I
C       EPS   ---  CONDITION NUMBER OF THE DIAGONAL ELEMENT             I
C                  OF THE LOWER TRIANGULAR MATRIX                       I
C                  IF (EPS .LE. EPS0)   EPS <---- EPS0                  I
C      ICON   ---  CONDITION CODE                                       I
C                  ICON = 1000    N .LE. 3                              I
C                  ICON = 2000    ABS(A(I,I)) .LE. EPS                  I
C                  IF ICON = 1000 .OR. ICON = 2000 THEN                 I
C                  LU DECOMPOSITION IS STOPPED.                         I
C                                                                       I
C   MDUM, IP, IS, ZDUM  ----  DUMMY ARGUMENTS AS FROM 1982.7.2          I
C ----------------------------------------------------------------------+
          IF(N .LE. 3) GO TO 1000
          ICON = 0
          IF(EPS .LE. EPS0) EPS = EPS0
C
C  (1) I = 1
C
      I = 1
      IF(DABS(A(1)) .LE. EPS) GO TO 2000
      IN = 1-N
      IJ = N+IN
      DO 10 J = 2,N
C     IJ = J*N+IN
      IJ = IJ + N
   10 A(IJ) = A(IJ)/A(1)
C
C  (2) I = 2
C
      I = 2
      IN2 = 2-N
      IN1 = 1-N
      A(N+2) = A(N+2)-A(2)*A(N+1)
      IF(DABS(A(N+2)) .LE. EPS) GO TO 2000
      I1J = N+N+IN1
      I2J = N+N+IN2
      DO 20 J = 3,N
C     I2J = J*N+IN2
C     I1J = J*N+IN1
      I1J = I1J+N
      I2J = I2J+N
   20 A(I2J) = (A(I2J)-A(2)*A(I1J))/A(N+2)
C
C  (3) I = 3,4,---,N-1
C
      DO 100 I = 3,N-1
      IN = I-N
      IJ = N+IN
      MJS = 0
          DO 110 J=2,I
C         IJ = J*N+IN
          IJ = IJ+N
C         MJS = J*N-N
          MJS = MJS+N
          IM = IN
          MJ = MJS
               DO 115 M=1,J-1
               IM = IM+N
               MJ = MJ+1
C              MN = M-N
C              IM=M*N+IN
C              MJ=J*N+MN
  115          A(IJ) = A(IJ)-A(IM)*A(MJ)
C
  110     CONTINUE
          II = I*N +IN
          IF(DABS(A(II)) .LE. EPS) GO TO 2000
C
```

DRLU

```
C  ELEMENTS OF THE U-MATRIX
C
            IJ = II
            MJS = I*N-N
            DO 120 J=I+1,N
C           IJ=J*N+IN
            IJ = IJ+N
            IM = IN
            MJS = MJS+N
            MJ = MJS
C           MJ = J*N-N
               DO 125 M=1,I-1
               IM = IM+N
               MJ = MJ+1
C              MN = M-N
C              IM = M*N+IN
C              MJ = J*N+MN
  125          A(IJ) = A(IJ) - A(IM)*A(MJ)
            A(IJ) = A(IJ)/A(II)
  120       CONTINUE
  100 CONTINUE
C
C   (4) I = N
C
      I = N
      IJ = N
      MJS = 0
      DO 200 J = 2,N
C     IJ = J*N
      IJ = IJ+N
      IM = 0
      MJS = MJS+N
C     MJ = J*N-N
      MJ = MJS
         DO 210 M=1,J-1
         IM = IM+N
         MJ = MJ+1
C        MN=M-N
C        IM=M*N
C        MJ=J*N+MN
  210    A(IJ) = A(IJ) - A(IM)*A(MJ)
  200 CONTINUE
      N2 = N*N
      IF(DABS(A(N2)) .LE.EPS) GO TO 2000
      RETURN
 1000 ICON = 1000
      RETURN
 2000 ICON = 2000
      RETURN
      END
```

連立一次方程式の解法のプログラム・リスト

LINEAR

```
*DECK LINEAR
C ----------------------------------------------------------------------+
      SUBROUTINE LINEAR(A,B,N)
C ----------------------------------------------------------------------+
C     TO SOLVE MATRIX EQUATION ON THE BASIS OF GAUSS REDUCTION
C ----------------------------------------------------------------------
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),B(1)
C
      B(1) = B(1)/A(1)
      DO 100 I=2,N
      IN = I-N
      IJ = IN
         DO 110 J = 1,I-1
         IJ = IJ+N
C        IJ = J*N+IN
  110    B(I) = B(I) - A(IJ)*B(J)
      II = I*N+IN
  100 B(I) = B(I)/A(II)
C
      N1 = N+1
      IJS = N*N
      DO 200 I = 1,N-1
      INB = N-I
C     IN  = INB-N
      IJS = IJS - N1
      IJ = IJS
         DO 210 J = INB+1,N
         IJ = IJ + N
C        IJ = J*N + IN
  210    B(INB) = B(INB) - B(J)*A(IJ)
  200 CONTINUE
      RETURN
      END
```

付録D　直接法のプログラム・リスト

DIRECT

```
*DECK DIRECT
C ----------------------------------------------------------------------+
      SUBROUTINE DIRECT(M,N)
C ----------------------------------------------------------------------+
C       TO SOLVE GRAD-SHAFRANOV EQUATION BY DIRECT METHOD
C              ON THE BASIS OF LU MATRIX DECOMPOSITION.
C -----------------------------------------------------------------------
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
*CALL MTRX
*CALL PSABC
*CALL CROUT
*CALL EXTF2
*CALL SEIGYO
C
C -----------------------------------------------------------------------
C  ( 1 )  FORWARD REDUCTION
C -----------------------------------------------------------------------
      DO 200 K=2,M-1
      CALL UHENO(N,K)
C
      IF(K.EQ.2) GO TO 82
      IF(K.EQ.M-1) GO TO 84
      GO TO 86
C -----------------------------------------------------------------------
C     1.1    CORRECTION OF R.H.S. VECTORS USING THE BOUNDARY CONDITION
C            AT K = 1 AND K = M
C -----------------------------------------------------------------------
   82 DO 110 J=2,N-1
      UA=ZE(K,J)*BELA(J-1)+ZL(K,J)*BELA(J)-ZE(K,J)*BELA(J+1)
  110 UQ(J)=UQ(J)-UA
      UQ(N-1)=UQ(N-1)-ZM(K,N-1)*BELC(2)-ZE(K,N-1)*BELC(3)
      GO TO 88
C
   84 DO 120 J=2,N-1
      UB=-ZE(K,J)*BELB(J-1)+ZJ(K,J)*BELB(J)+ZE(K,J)*BELB(J+1)
  120 UQ(J)=UQ(J)-UB
      UQ(N-1)=UQ(N-1)+ZE(K,N-1)*BELC(M-2)-ZM(K,N-1)*BELC(M-1)
      GO TO 88
C -----------------------------------------------------------------------
C     1.2    CORRECTION OF R.H.S. VECTORS USING THE BOUNDARY CONDITION
C            AT J = N
C -----------------------------------------------------------------------
   86 UQ(N-1)=UQ(N-1)-ZM(K,N-1)*BELC(K)+ZE(K,N-1)*BELC(K-1)
     &         -ZE(K,N-1)*BELC(K+1)
C
C -----------------------------------------------------------------------
C           HEREAFTER RENUMBERING INDECES OF MATRICES AND VECTORS
C           IS PERFORMED.
C ------------------------------------------------------------------------
C     1.3  TO CALCULATE MATRIX  AA = DD - PP*VV     WA ====> VV
C ------------------------------------------------------------------------
   88 IF(IDRT.EQ.1) GO TO 300
      DO 21 NA=1,N-2
      DO 21 NB=1,N-2
   21 AA(NA,NB)=0.0
C
      DO 11 IA=1,N-2
   11 AA(IA,IA)=ZK(K,IA+1)
C
      DO 12 IA=1,N-3
   12 AA(IA,IA+1)=ZM(K,IA+1)
C
      DO 13 IA=1,N-3
   13 AA(IA+1,IA)=ZN(K,IA+2)
C
      IF(K.EQ.2) GO TO 26
C
      DO 15 JB=1,N-2
      DO 16 IB=2,N-3
C
      IG=IB+1
      AA(IB,JB)=AA(IB,JB)-(ZE(K,IG)*WA(IB-1,JB)
     &            +ZL(K,IG)*WA(IB,JB)-ZE(K,IG)*WA(IB+1,JB))
   16 CONTINUE
C
      AA(1,JB)=AA(1,JB)-(ZL(K,2)*WA(1,JB)-ZE(K,2)*WA(2,JB))
      AA(N-2,JB)=AA(N-2,JB)-(ZE(K,N-1)*WA(N-3,JB)
     &                        +ZL(K,N-1)*WA(N-2,JB))
   15 CONTINUE
C -----------------------------------------------------------------------
```

DIRECT

```
C    1.4   LU DECOMPOSITION  OF THE MATRIX AA
C -----------------------------------------------------------------------
   26 IF(ISSL.EQ.0)
     &    CALL DRLU(AA,MDUM,N-2,EPS,IP,IS,ZDUM,ICON)
      IF(ISSL.EQ.1)
     &    CALL DALU(AA,N-2,N-2,EPS,IP,IS,ZDUM,ICON)
C
      WRITE(3) ((AA(LA,LB),LA=1,N-2),LB=1,N-2)
      GO TO 45
C
  300 READ(3)  ((AA(LA,LB),LA=1,N-2),LB=1,N-2)
C
C -----------------------------------------------------------------------
C    1.5   TO CALCULATE THE VECTOR TT = UQ - PP*CA
C -----------------------------------------------------------------------
   45 IF(K.GE.3) GO TO 28
      DO 40 JS=1,N-2
      JT=JS+1
   40 TT(JS)=UQ(JT)
      GO TO 66
C
   28 TT(1)=UQ(2)-ZL(K,2)*CA(1)+ZE(K,2)*CA(2)
      DO 17 JC=2,N-3
      JF=JC+1
      TT(JC)=UQ(JF)-(ZE(K,JF)*CA(JC-1)+ZL(K,JF)*CA(JC)
     &              -ZE(K,JF)*CA(JC+1))
   17 CONTINUE
C
      TT(N-2)=UQ(N-1)-ZE(K,N-1)*CA(N-3)-ZL(K,N-1)*CA(N-2)
C
C -----------------------------------------------------------------------
C    1.6   TO CALCULATE R.H.S. VECTOR BB      =====>QQ
C -----------------------------------------------------------------------
   66 DO 20 I=1,N-2
      IF(K.EQ.M-1) GO TO 90
C
      DO 10 L=1,N-2
   10 BB(L)=0.0
C
      IA=I-1
      IF(I.EQ.1) GO TO 24
      BB(IA)=ZE(K,I)
   24 BB(IA+1)=ZJ(K,I+1)
C
      IF(I.EQ.N-2) GO TO 37
      BB(IA+2)=-ZE(K,I+2)
C
C -----------------------------------------------------------------------
C    1.7   TO SOLVE MATRIX EQUATION
C -----------------------------------------------------------------------
   37 IF(ISSL.EQ.0) CALL LINEAR(AA,BB,N-2)
      IF(ISSL.EQ.1) CALL DLUX(BB,AA,N-2,N-2,1,IP,ICON)
C
      DO 50 IC=1,N-2
   50 WW(IC,I)=BB(IC)
   20 CONTINUE
C
      DO 56 IK=1,N-2
      DO 56 JK=1,N-2
   56 WA(IK,JK)=WW(IK,JK)
C
   90 IF(ISSL.EQ.0) CALL LINEAR(AA,TT,N-2)
      IF(ISSL.EQ.1) CALL DLUX(TT,AA,N-2,N-2,1,IP,ICON)
C
      DO 18 JD=1,N-2
   18 GG(JD)=TT(JD)
C
      DO 19 JL=1,N-2
   19 CA(JL)=GG(JL)
C
      WRITE(2) ((WW(LA,LB),LA=1,N-2),LB=1,N-2),
     &         (GG(LC),LC=1,N-2)
C
  200 CONTINUE
C -----------------------------------------------------------------------
C  ( 2 )  BACKWARD SUBSTITUTION
C -----------------------------------------------------------------------
      BACKSPACE 2
      READ(2) ((WW(LA,LB),LA=1,N-2),LB=1,N-2),
     &         (GG(LC),LC=1,N-2)
```

DIRECT

```
      BACKSPACE 2
      DO 60 JH=1,N-2
   60 ZZ(M-1,JH)=GG(JH)
C
      DO 500 K=2,M-2
      KK=M-K
C
      BACKSPACE 2
      READ(2) ((WW(LA,LB),LA=1,N-2),LB=1,N-2),
     &          (GG(LC),LC=1,N-2)
      BACKSPACE 2
C
      DO 70 LC=1,N-2
      DD=0.0
      DO 75 LD=1,N-2
   75 DD=DD+WW(LC,LD)*ZZ(KK+1,LD)
      ZZ(KK,LC)=GG(LC)-DD
   70 CONTINUE
  500 CONTINUE
C -----------------------------------------------------------------------
C  ( 3 )  EPILOGUE
C -----------------------------------------------------------------------
      DO 210 I=2,M-1
      DO 220 J=1,N-2
      JR=J+1
  220 PSC(I,JR)=ZZ(I,J)
  210 PSC(I,1)=PSC(I,3)
C
      DO 240 J=1,N
      PSC(1,J)=BELA(J)
  240 PSC(M,J)=BELB(J)
C
      DO 260 I=1,M
  260 PSC(I,N)=BELC(I)
C
      PSC(1,1)=PSC(1,3)
      PSC(M,1)=PSC(M,3)
C
      IDRT=1
      REWIND 3
C
      RETURN
      END
```

UHEND

```
*DECK UHEND
C-----------------------------------------------------------------------+
      SUBROUTINE UHEND(N,ID)
C-----------------------------------------------------------------------+
C   5. TO GIVE RIGHT HAND SIDE TERMS OF THE MATRIX EQUATION.
C                            ( DIRECT METHOD )
C-----------------------------------------------------------------------
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
*CALL XYRO
*CALL COEF
*CALL PSABC
*CALL CROUT
*CALL SEIGYO
*CALL LMTR
*CALL CONST1
*CALL CONST2
*CALL CONST3
*CALL CONST4
C
      DO 20 JD=1,N
C
      PKK    = PSI(ID,JD)
C
      HSKR   = HS2(ID)+TOR*TOR*RO(ID,JD)*RO(ID,JD)
      HSKR2  = HSKR*HSKR
C
      UO(JD) = 2.0*TOR*BT/HSKR2
C
      IF((IABC.NE.2).OR.(PKK.GT.PSCRT)) GO TO 20
      CRTFL  = BT+B1*((PKK-PSCRT)+CZ*((PKK-PSCRT)**2))
      CRTFD  = B1*(1.0+2.0*CZ*(PKK-PSCRT))
      UO(JD)= 2.0*TOR*CRTFL/HSKR2
     &          -CRTFL*CRTFD/HSKR-AMU0*P0
C
   20 CONTINUE
C
      RETURN
      END
```

付録E　磁気面の楕円度と三角形度

ヘリカル対称の成立する場合，ρに関する展開の4次までの近似で，スカラーポテンシャルは

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \qquad \cdots\cdots (E.1)$$

$$\varphi_0 = B_0 \left(s - æ \frac{\varepsilon}{2} \rho^2 \sin 2\theta - æ \frac{Q}{3} \rho^3 \sin 3\theta - æ \frac{G}{4} \rho^4 \sin 4\theta \right) \qquad \cdots\cdots (E.2)$$

$$\varphi_1 = æ B_0 \left\{ -\frac{k}{8} (1+\varepsilon) \rho^3 \sin\theta - \frac{1}{12} \left[(13+5\varepsilon) \frac{k^2}{8} + 2\varepsilon æ^2 + kQ \right] \rho^4 \sin 2\theta \right\} \qquad \cdots\cdots (E.3)$$

と表現できる[2)]。これらの式中にあらわれるε，Qをそれぞれ磁気面の楕円度，及び3角度と定義する。このスカラーポテンシャルから磁場を求め，$\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\psi$ の関係式より磁気面関数を求めると

$$\psi = \frac{æ}{2} B_0 \left[(1+\varepsilon \cos 2\theta) \rho^2 + (\alpha_1 \cos\theta + \alpha_3 \cos 3\theta) \rho^3 + (\beta_0 + \beta_1 \cos 2\theta + \beta_2 \cos 4\theta) \rho^4 \right] \qquad \cdots\cdots (E.4)$$

ここで

$$\alpha_1 = \frac{3-\varepsilon}{4} k \quad ; \quad \beta_0 = \frac{7-\varepsilon}{32} k^2 \ ,$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{3} Q - \frac{\varepsilon}{3} k \quad ; \quad \beta_1 = \frac{17+\varepsilon}{48} k^2 + \frac{2}{3} \varepsilon æ^2 - \frac{1}{6} kQ$$

$$\beta_2 = -\frac{kQ}{4} + \frac{G}{2} \qquad \cdots\cdots (E.5)$$

となる。なお，Gは磁気面の4角度を特徴づけるパラメーターである。