

JAERI - M  
84-225

トカマク・プラズマの破壊不安定性の数値解析

1984年12月

田中 幸夫\*

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division  
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-  
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1984

編集兼発行 日本原子力研究所  
印 刷 いばらき印刷(株)

トカマク・プラズマの破壊不安定性の数値解析

日本原子力研究所東海研究所核融合研究部

田中 幸夫\*

(1984年11月24日受理)

トカマク・プラズマの内部破壊不安定性と大破壊不安定性を解析するために抵抗性モード，抵抗性内部キンク・モード，ティアリング・モードの線形不安定性と非線形発展を数値計算した。線形不安定性を数値計算する手法として行列法による解法を開発した。内部破壊不安定性を説明する抵抗性モードの非線形発展は抵抗値が実際のトカマク・プラズマ程度に小さな値でも線形成長率を維持したまま，磁力線のつなぎ換えが完了するまで成長することを示した。また抵抗性内部キンク・モードは理想内部キンク・モードが十分不安定な領域では，磁力線のつなぎ換えを完全に終了する前に飽和することを示した。この計算は中性粒子を入射したトカマク実験の結果と一致する。また大破壊不安定性を説明するティアリング・モードの非線形相互作用はプラズマ形状のトロイダル及び楕円変形によって本質的に変化しないことを示した。

---

\* 外来研究員：富士通（株）

Numerical Analyses of Disruptive Instabilities  
in a Tokamak Plasma

Yukio TANAKA\*

Department of Thermonuclear Fusion Research  
Tokai Research Establishment, JAERI

( Received November 24, 1984 )

Linear stability and nonlinear evolution of the resistive mode, the resistive internal kink mode, and the tearing mode are studied numerically to analyze both internal and major disruptions in a tokamak plasma. A matrix method is devised for calculating linear stability of these modes. In the nonlinear phase the resistive mode grows exponentially with the linear growth rate until complete reconnection of the magnetic flux (the internal disruption) even for small resistivity of a realistic plasma. It is shown that in the sufficiently unstable region of the ideal internal kink mode, the amplitude of the resistive internal kink mode is saturated without complete reconnection of magnetic flux. This result is consistent with suppression of the internal disruption observed in neutral beam injection heating experiments of a tokamak plasma. It is also shown that the toroidicity and elongation of the plasma cross-section scarcely affect the nonlinear interaction between different helicity tearing modes, which causes an abrupt destabilization to the major disruption.

Keywords : Disruption, Tokamak, Plasma, Stability, MHD,  
Resistive Instability, Numerical Analysis

---

\* On leave from Fujitsu Limited.

## 目 次

1. 序論	1
1.1 トカマク装置による核融合プラズマの閉じ込め	1
1.2 トカマク・プラズマの破壊不安定性	1
1.3 破壊不安定性に対する今までの理論的研究と問題点	2
1.4 本研究の目的と意義	3
2. 基礎方程式系	5
2.1 電磁流体方程式	8
2.2 簡約電磁流体方程式	8
2.3 ヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式	20
2.4 第2章の要約	25
3. 数値計算法	26
3.1 線形不安定性の解法	26
3.2 非線形発展の解法	30
3.3 第3章の要約	35
4. 内部破壊不安定性の解析	36
4.1 抵抗性モードの非線形発展	36
4.2 抵抗性内部キンク・モードの非線形発展	43
4.3 第4章の要約	45
5. 大破壊不安定性の解析	48
5.1 円柱プラズマにおけるティアリング・モードの非線形発展	48
5.2 非円形断面トロイダル・プラズマにおけるティアリング・モードの非線形発展	61
5.3 第5章の要約	63
6. 結論	67
謝辞	67
文献	68
付録A ヘリカル座標系	71
付録B 抵抗性モードの線形解析解	74
付録C 抵抗性内部キンク・モードの線形解析解	75
付録D ティアリング・モードの線形解析解	78
付録E ティアリング・モードの非線形発展の解析的理論	81

## CONTENTS

1. Introduction .....	1
1.1 Confinement of fusion plasma by a tokamak .....	1
1.2 Disruptive instabilities in a tokamak plasma .....	1
1.3 Previous theoretical works and problems on disruptive instabilities...	2
1.4 Purposes and significances of the present work .....	3
2. Basic equations .....	5
2.1 Magnetohydrodynamic equations .....	5
2.2 Reduced set of magnetohydrodynamic equations .....	8
2.3 Helical symmetry incompressible magnetohydrodynamic equations .....	20
2.4 Summary of chapter 2 .....	25
3. Numerical methods .....	26
3.1 Solution method for linear instabilities .....	26
3.2 Solution method for nonlinear evolutions .....	30
3.3 Summary of chapter 3 .....	35
4. Analyses of the internal disruption .....	36
4.1 Nonlinear evolution of the resistive mode .....	36
4.2 Nonlinear evolution of the resistive internal kink mode .....	43
4.3 Summary of chapter 4 .....	45
5. Analyses of the major disruption .....	48
5.1 Nonlinear evolution of tearing mode with cylindrical plasma .....	48
5.2 Nonlinear evolution of tearing mode with noncircular toroidal plasma..	61
5.3 Summary of chapter 5 .....	63
6. Conclusion .....	67
Acknowledgements .....	67
References .....	68
Appendix A Helical coordinates .....	71
Appendix B Analytical solution of linear resistive mode .....	74
Appendix C Analytical solution of linear resistive internal kink mode ..	75
Appendix D Analytical solution of linear tearing mode .....	78
Appendix E Analytical theory of nonlinear evolution of tearing mode ....	81

# 1. 序 論

## 1.1 トカマク装置による核融合プラズマの閉じ込め

枯渇することのないエネルギーを獲得することを目的として核融合炉の研究が進められている。核融合炉は軽元素の原子核同志がクーロン障壁を越えて衝突し融合反応をおこした結果解放されるエネルギーを利用する炉で、最終的には地上に無尽蔵に存在する重水素(D)のみを燃料とするDD核融合炉が目標である。このような核融合炉が実現すれば事実上燃料枯渇の心配のないエネルギー源を手にすることができる。もっとも、現在は臨界条件の達成がDD炉に比べて容易なDT炉の実現を目指した研究開発が進められている。DT炉は重水素(D)と三重水素(T)の燃焼反応



を行う炉で、この炉の実現には温度及び密度×閉じ込め時間を十分大きくしてローソン条件を満すようにすることが必要である。このローソン条件を満すプラズマを作る方法としては、強い磁場を利用して高温プラズマを閉じ込める方法と高出力レーザー又は粒子ビーム等の照射によって高温プラズマを生成する慣性閉じ込め法がある。

磁場閉じ込め装置の中で現在最も良い閉じ込め性能を示しているのが軸対称トーラス型磁場閉じ込め装置の1つに分類されるトカマク装置である。この装置でDT炉を実現するためには、おおよそ密度  $10^{20} \text{ m}^{-3}$ 、温度  $10^8 \text{ k}$ 、エネルギー閉じ込め時間1秒の閉じ込めを達成すればよいが、これらの数値は個別にはきわめて近い値が達成されている。トカマク装置は図1.1に示すようなもので基本的には磁場発生用のコイル群、加熱装置、真空容器等から構成される。トカマクではトーラス大周方向に(トロイダル方向)に流れる強いプラズマ電流  $I_p$  によって作られるポロイダル磁場  $B_p$  と外部導体シェルまたは外部コイルによって作られる磁場  $B_v$  によって平衡を達成し、これに強いトロイダル磁場  $B_t$  を印加して安定化を図る。

このトカマク装置で閉じ込められたプラズマの安定性を理解する上で重要な概念に安全係数  $q$  と磁気面がある。プラズマを閉じ込めている磁力線がポロイダル方向に一回転したときのトロイダル方向への回転数を安全係数  $q$  といい、また磁力線がトロイダル方向に数多く回って作る閉じたトーラス面を磁気面という。

## 1.2 トカマク・プラズマの破壊不安定性

トカマク・プラズマの閉じ込めに関する重要な理論的課題の1つは破壊不安定性 (disruptive instability) の解析である。この不安定性はプラズマ内部の圧力分布が大域的に変化して大きなエネルギー輸送をおこしたりプラズマ中の磁気面の破壊から閉じ込めを悪化させ、ついには放電の終焉に至らしめる危険な不安定性である。核融合炉においてこの不安定性が起こると閉じ込め性能の悪化がおこるといふ点から望ましくないのみならず、放電の終焉に伴いプラズマが第1壁に接触して大きな熱的損傷を与えたり、放電停止による大きな電気力が構造の破壊をもたら

すという危険性も内在しており、この不安定性の構造を解明して、制御したり抑制する方法を考案することが急務である。

実験的に観測される破壊不安定性は種々の様相を示しており必ずしもすべてが単一のシナリオによって発生する不安定性ではないと考えられる。しかしその現象は内部破壊不安定性と大破壊不安定性に大別することができ、いずれも最も基本的な要因となっているのが電磁流体的不安定性の非線形発展であると考えられている。

内部破壊不安定性はプリンストン大学のST-トカマクの実験<sup>1)</sup>で最初に観測された現象である。この実験ではプラズマ中心部の電子温度がジュール加熱の時間スケールで上昇した後、急激に減少する過程を繰り返していることがプラズマ内部より発生している軟X線の観測で明らかにされた。これを鋸歯状振動とよんでいる。また、この急激に温度が下がる部分を内部破壊不安定性とよんでいる。

大破壊不安定性はトカマク装置による実験<sup>2)</sup>の初期の段階から観測されていた不安定である。この不安定性は $m=2,3$ の磁場の変動から始まり、ループ電圧の減少とともにプラズマ温度が下がる。著しいときはプラズマ電流を減少させて放電を終焉に至らしめる。

### 1.3 破壊不安定性に対する今までの理論的研究と問題点

内部破壊不安定性に対する理論的モデルは最初kadomtsev<sup>3), 4)</sup>によって提案された。このモデルは次のようなものである。まず $q < 1$ の領域でプラズマ中に $m/n = 1/1$  ( $m, n$ はそれぞれトロイダル及びポロイダル方向のモード数)のヘリカル・モードが成長する。そして、この領域の磁力線が $q > 1$ の領域の磁力線と電気抵抗によってつなぎ換え(reconnection)を起こし新しい閉じた磁気面群(磁気島)を形成する。このときプラズマ粒子は磁気面上を容易に移動できるので $q < 1$ の領域の高温プラズマは $q > 1$ の領域の低温プラズマ中に掃き出される。そして最終的には初期状態に較べて低エネルギーの再び円形磁気面を持った状態にプラズマは移行する。このモデルは内部破壊不安定の電子温度の減少をうまく説明している。しかしながらこの論文ではエネルギーの低い円形磁気面を持った状態が到達可能かどうか、また $m/n = 1/1$ モードの非線形成長が実験結果を説明するのに十分な早さをもつかどうかという点について明らかにされていない。

この点を調べるための数値計算がWaddell<sup>5)</sup>等によって遂行された。ここでは基礎方程式として簡約電磁流体方程式を用い、 $m/n = 1/1$ ヘリカル・モードとして抵抗性モードを考えた。その結果、低エネルギー状態は到達可能であり、また非線形成長は線形成長率を維持したまま十分早く成長することが示された。しかしながら、この計算では数値的な不安定性を避けるために実際のトカマク・プラズマの $\eta$ (磁気レイノルズ数の逆数として表された電気抵抗値)の値( $\sim 10^{-6}$ )に較べて大きな値( $2 \times 10^{-5}$ )で実行されており、より実際のトカマク・プラズマに近い $\eta$ での $m/n = 1/1$ 抵抗性モードの非線形発展については示されていない。

Biskampはこの小さな $\eta$ の値では $m/n = 1/1$ 抵抗性モードの非線形成長は指数関数的に線形成長率で成長( $\sim e^{\gamma t}$ ;  $\gamma \sim \eta^{1/3}$ )するのではなくSweet-Parker理論による磁力線の再結合過程に支配されて成長し、その時間依存性は $\sim \eta^{1/2} t$ になると説明している<sup>6, 7)</sup>。しかしながらSweet-Parker理論はオーダー評価であり、この理論がそのまま $m/n = 1/1$ 抵抗性モード



の非線形発展を説明できるかどうか疑わしい。したがって、この小さな $n$ の値での $m/n = 1/1$  抵抗性モードの非線形発展はまだ十分には解明されていない問題であるといえる。

また中性粒子入射加熱実験<sup>8)</sup>ではプラズマ圧力の上昇とともに鋸歯状振動が連続的な $m = 1$  振動に推移するのが観測されている。これは磁力線のつなぎ換えによってできる磁気島がある大きさを飽和してしまい、kadomtsev モデルの円形磁気面をもった低エネルギー状態に移行しないことを示している。

Holmes<sup>9)</sup>等は圧力駆動型モードがこの現象を引き起こすと説明しているが彼等の計算ではこの圧力駆動型モードを不正確に計算していることが安積<sup>10)</sup>やCharton<sup>11)</sup>等の研究で示されている。したがって、この中性粒子入射加熱実験時の内部破壊不安定性が抑制される現象も解明されずに残されている問題といえる。

次に大破壊不安定性について述べる。この大破壊不安定性のモデルも内部破壊不安定性のモデルと同時にkadomtsev<sup>3,4)</sup>によって提案されている。そこではこの大破壊不安定性をプラズマ中心部のヘリカル・モードが外側のヘリカル・モードと相互作用して引き起こすと説明している。つまりこの相互作用によってプラズマ表面のポロイダル磁束が変化し、ループ電圧の減少を引き起こすと述べている。

大破壊不安定性に対する数値計算は最初White<sup>12)</sup>等によって遂行された。この論文では $m/n = 2/1$  ティアリング・モードが成長して大きな磁気島を形成し大破壊不安定性を起こすと述べている。しかしながらWaddell<sup>13,14)</sup>等は、より注意深く計算して $m/n = 2/1$  ティアリング・モードはRutherfordの解析的な計算による予想通りに非常に早い段階から成長率の低い非線形領域に入ってしまう磁気島はWhite等の計算のように大きく成長しないことを示した。また同時にWaddell等は $m/n = 2/1$  モードと $m/n = 3/2$  モードが非線形相互作用することによって磁気島が大きく成長して大破壊不安定性を起こすと説明している。

このWaddell等の計算ではトカマク・プラズマを円柱プラズマで近似して大破壊不安定性を考察している。しかしながら実際のトカマク・プラズマはトロイダル形状をしており、またプラズマ断面も円形でない場合がある。このプラズマの形状の影響はティアリング・モードのポロイダルモード間の結合となって現れる。そして、このモード間結合は大破壊不安定性を説明するティアリング・モードの非線形相互作用を変化させることが考えられる。この点についてCarreras<sup>16)</sup>等は円形断面のトロイダル・プラズマでの解析を遂行している。しかしながら非円形断面トロイダル・プラズマについてはまだ解析されずに残されている。

#### 1.4 本研究の目的と意義

本研究は破壊不安定性についてまだ明らかにされていない問題を数値計算を中心に解明することを目的としたものであり、この結果得られる知識はトカマク型核融合炉を設計する際に必要とされる破壊不安定性の抑制または制御に役立つものと思われる。

第2章ではこの破壊不安定性を解析する際のプラズマの数学的モデルである基礎方程式について述べる。

第3章ではこの基礎方程式系を数値計算するための計算手法について述べる。特に新たに開発

した線形不安定性を解析するための数値計算法について論じる。

第4章では内部破壊不安定性に関する数値解析をする。特に、まだ明らかにされていない $\eta$ が小さいときの $m=1$ 抵抗性モードの非線形発展について論じる。また中性粒子入射加熱実験における内部破壊不安定性抑制現象を説明するために、抵抗性内部キンク・モードの非線形発展を論じる。

第5章では大破壊不安定性に関する解析をする。特にティアリング・モードの非線形相互作用に与えるプラズマ形状の影響を解明する。

最後の第6章で本論文でなされた研究の結論を述べる。

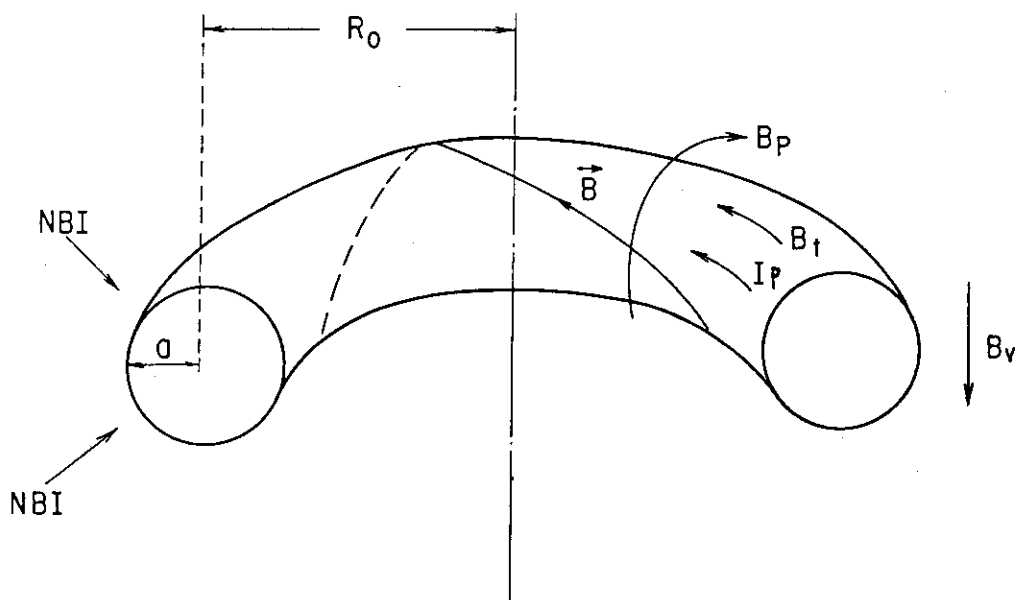


図 1.1 トカマク概念図。トロイダル磁場 $B_t$ 、ポロイダル磁場 $B_p$ 、垂直磁場 $B_v$ で作られる螺旋状の磁場 $B$ でプラズマを閉じ込める。 $R_0$ は大半径、 $a$ は小半径で、 $R_0/a$ をアスペクト比という。

## 2. 基礎方程式系

本章では解析対象に適した2種類の基礎方程式系を電磁流体方程式から導出する。まず2.1節ではもともとなる電磁流体方程式の性質及びこれら2種類の基礎方程式系を導出する際の指針について述べる。2.2節では具体的に電磁流体方程式よりトカマクのアスペクト比が大きいとする近似を用いて第1の基礎方程式系である簡約電磁流体方程式を導びき出す。2.3節ではプラズマのヘリカル対称性と非圧縮性を仮定して第2の基礎方程式系であるヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式を導出する。最後の2.4節で本章の要約をする。

### 2.1 電磁流体の方程式

破壊不安定性の激しい振る舞いは磁場エネルギーが短い時間に解放されて起こるものと考えられている。つまりこの現象は以下の電磁流体方程式の枠組の中で説明できるはずである。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0, \quad (2.1-1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.1-2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla P = -\Gamma P \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (2.1-3)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J}, \quad (2.1-4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.1-5)$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (2.1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1-7)$$

ここで、 $\rho$ はプラズマの質量密度、 $\mathbf{V}$ はプラズマ速度、 $P$ はプラズマ圧力、 $\mathbf{B}$ は磁場、 $\mathbf{J}$ はプラズマ電流、 $\eta$ はプラズマの電気抵抗、 $\Gamma$ は比熱比、 $\mu$ は真空の透磁率である。(2.1-1)式は質量密度 $\rho$ に関する連続の式である。(2.1-2)式はプラズマの運動方程式で右辺第1項は圧力による力であり第2項はローレンツ力である。(2.1-3)式はプラズマの状態方程式、(2.1-4)式はオームの法則を表しており、(2.1-5)式は磁場の電磁誘導の式である。(2.1-6)

式は電流の作る磁場を表す式であり、プラズマと電磁場の相互作用が準定常的であると仮定して変位電流が無視されている。(2.1-7)式は磁力線が発生したり消滅したりすることがないことを表している式である。

この電磁流体方程式は非線形方程式であり、プラズマの圧縮性、有限電気抵抗の効果を含んだ方程式である。また解析するプラズマ形状も一般には非円形断面トロイダル形状をしている。この方程式をそのまま数値計算すれば、これらすべての効果を含んだ結果が得られる。しかしながらこの種の計算を遂行するには現在の計算機的能力では、計算時間の点から非常に難しい。そこでここでは解析する現象又は効果に対応する部分だけを残し、他の不必要なところを省くようにして電磁流体方程式を簡約化することを考える。

以下具体的に解析対象に応じた簡約化法について述べる。本論文では(1)抵抗性モードの低 $\eta$ での非線形発展、(2)抵抗性内部キンク・モードの非線形発展、(3)ティアリング・モードの非線形相互作用に与えるプラズマ形状の影響などが調べられる。そして、これらすべての場合において、有限電気抵抗( $\eta \neq 0$ )での不安定モードの非線形発展を扱っているため、この非線形と有限電気抵抗の効果は残さなければならない。一方、これらのモードの時間スケール(約 $10^{-5} \sim 10^{-4}$ 秒)はプラズマの圧縮性の現れである磁気音波の時間スケール(約 $10^{-7}$ 秒)と比較するとゆっくりしているためプラズマは非圧縮性と仮定することが可能である。プラズマ形状及び大アスペクト比に関する近似については解析対象に応じて一番適切な近似法を選ぶ必要がある。まず(1)の解析については大アスペクト比近似を用いる。そして形状については簡単にするために円柱プラズマ形状を仮定する。(2)の解析については抵抗性内部キンク・モードを表現するために大アスペクト比近似は使用しないで非圧縮性の仮定のみを用いる。そしてプラズマ形状として簡単のためにヘリカル対称性のある円柱プラズマを仮定する。最後の(3)の解析についてはプラズマ形状は一般的な非円形断面トロイダル形状とし、大アスペクト比近似を用いる。このようにして(1)の解析に対して得られる方程式を円柱プラズマ簡約電磁流体方程式、また(2)の解析に対して得られる方程式をヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式、最後の(3)の解析に対して得られる方程式を非円形断面トロイダル・プラズマ簡約電磁流体方程式とよぶ。一般に大アスペクト比近似を用いて導出された方程式を簡約電磁流体方程式とよぶ。また円柱プラズマ簡約電磁流体方程式は非円形断面トロイダル・プラズマ簡約電磁流体方程式の特別な場合になっている。表2.1に上述の簡約化法及び方程式系に含まれる性質をまとめた。

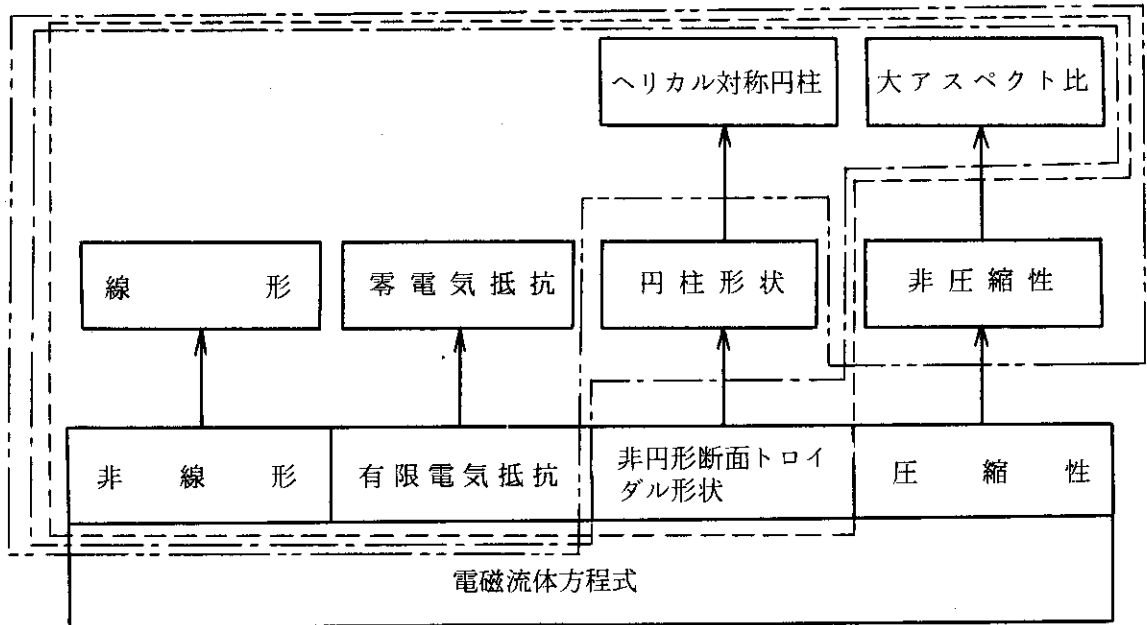


表 2.1 電磁流体方程式の諸性質とそれらについての簡約化法。破線は非円形断面トロイダル・プラズマ簡約電磁流体方程式，1点破線は円柱プラズマ簡約電磁流体方程式，2点破線はヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式を表している。

## 2.2 簡約電磁流体方程式

本節では簡約電磁流体方程式を電磁流体方程式から導出する。この簡約電磁流体方程式の特徴は時間スケールの早い磁気音波が方程式から解析的に取り除かれており、数値時間積分における時間キザミ幅が大きくとれることである。また変数が磁束関数、流れ関数、圧力の3変数に減少することも数値計算を容易にする。これらの長所があるので、この簡約電磁流体方程式は内部破壊不安定性<sup>17, 18, 19)</sup>、大破壊不安定<sup>13, 14)</sup>、異常表皮効果等の研究に使用され成果を修めている。この簡約電磁流体方程式は最初、外部キンク・モードの解析のために2次元(ヘリカル対称)の円柱プラズマに対するものがRosenbluth<sup>21)</sup>等によって導入され、Strauss<sup>22)</sup>によって3次元の円柱プラズマに対するものに拡張された。また本質的に3次元である非円形断面トロイダル・プラズマ形状に対する簡約電磁流体方程式が安積<sup>18)</sup>、Carreras<sup>16)</sup>によって導出されている。

以下、具体的に非円形断面トロイダル・プラズマ、簡約電磁流体方程式とこの特別な場合である円柱プラズマ簡約電磁流体方程式を電磁流体方程式から導出する。まずトロイダル方向の角変数を $\zeta \equiv R_0 \varphi$  ( $\varphi$ はトロイダル方向の角度)として、またこの方向に垂直な断面(ポロイダル面)でのベクトル成分を添字“ $\perp$ ”で示すと磁場 $B$ は磁束関数 $\Psi$ を使って

$$B = B_T \nabla \zeta + \nabla \zeta \times \nabla \Psi + b_{\perp}, \quad (2.2-1)$$

と表せる。また $B_T$ と $b_{\perp}$ の関数は、これを(2.1-7)式に代入することによって

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{\partial B_T}{\partial \zeta} + \nabla_{\perp} \cdot b_{\perp} = 0, \quad (2.2-2)$$

となる。

電流密度は(2.1-6)式より

$$\mu_0 J = \mu_0 J_T \nabla \zeta + \nabla B_T \times \nabla \zeta - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \nabla_{\perp} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \mu_0 j, \quad (2.2-3)$$

$$\mu_0 J_T \equiv \Delta^* \Psi = R^2 \nabla_{\perp} \cdot \frac{\nabla_{\perp} \Psi}{R^2}, \quad \mu_0 j \equiv \nabla \times b_{\perp}, \quad (2.2-4)$$

と表せる。

また(2.1-4)式と(2.1-5)式より電場 $E$ を消去して

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (V \times B - \eta J), \quad (2.2-5)$$

を得る。これに(2.2-1)式を代入して

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V_{\perp} \cdot \nabla \Psi = \eta J_T + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 (V_{\perp} \cdot \nabla \zeta \times b_{\perp} + \eta j \cdot \nabla \zeta), \quad (2.2-6)$$

$$\frac{\partial B_T}{\partial t} = -\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \cdot \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B_T V_{\perp} - (V \cdot \nabla \zeta) B_{\perp} + \eta J \times \nabla \zeta \right], \quad (2.2-7)$$

$$\frac{\partial b_{\perp}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B_T V_{\perp} - \nabla \zeta \times \nabla \Phi - (V \cdot \nabla \zeta) B_{\perp} + \eta J \times \nabla \zeta \right], \quad (2.2-8)$$

を得る。ここでスカラー関数 $\phi$ を導入した。

質量密度 $\rho$ 及び圧力 $P$ の式はそれぞれ(2.1-1)式及び(2.1-3)式より

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho + \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho (R^2 \nabla \cdot \frac{\mathbf{V}}{R^2}) = 0, \quad (2.2-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2\Gamma} P + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2\Gamma} P + \Gamma \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2\Gamma} P (R^2 \nabla \cdot \frac{\mathbf{V}}{R^2}) = 0, \quad (2.2-10)$$

となる。

最後に運動方程式(2.1-2)式は

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_\perp}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V})_\perp \right] &= -\nabla_\perp P - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 (J_T \nabla_\perp \Psi + \nabla_\perp \frac{B_T^2}{2\mu_0}) \\ &+ \frac{B_T}{\mu_0} \nabla_\perp \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \times \nabla \zeta + B_T \mathbf{j} \times \nabla \zeta - (\mathbf{j} \cdot \nabla \zeta) \nabla_\perp \Psi \\ &- J_T \mathbf{b}_\perp \times \nabla \zeta + (\mathbf{j} \times \mathbf{b}_\perp)_\perp \end{aligned} \quad (2.2-11)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial V_\zeta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V})_\zeta \right] &= -\frac{R_0}{R} \frac{\partial P}{\partial \zeta} - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla_\perp B_T \times \nabla_\perp \Psi \right. \\ &+ \left. \frac{R_0}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{|\nabla_\perp \Psi|^2}{2\mu_0} \right) + \frac{R_0}{R} \mathbf{j} \cdot \nabla \Psi + \frac{1}{\mu_0} \frac{R_0}{R} \mathbf{b}_\perp \cdot \nabla B_T \right. \\ &\left. - \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 (\nabla_\perp \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \times \mathbf{b}_\perp)_\zeta + (\mathbf{j} \times \mathbf{b}_\perp)_\zeta \right] \end{aligned} \quad (2.2-12)$$

となる。またこの2つの式から $\nabla_\perp (B_T^2/2)$ の項を消去すると

$$\begin{aligned} &\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 U \mathbf{v} + (R^2 \nabla \cdot \frac{\mathbf{V}_\perp}{R^2}) \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho \mathbf{v} \times \nabla \zeta \right] \\ &- \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho \times \frac{\nabla V_\perp^2}{2} \cdot \nabla \zeta - \frac{1}{2} \nabla \zeta \cdot \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \times \nabla (\rho V_\zeta^2) \\ &- \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho \mathbf{v} \times \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta) \cdot \nabla \zeta = -\nabla \zeta \cdot \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \times \nabla P \\ &- \nabla \zeta \cdot (\nabla_\perp J_T \times \nabla_\perp \Psi) + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B_T \frac{\partial J_T}{\partial \zeta} \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \nabla_\perp B_T \cdot \nabla_\perp \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \left[ \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \mathbf{j} \cdot \nabla \zeta \right] \end{aligned}$$

$$+ \nabla \cdot (J_T \mathbf{b}_\perp) - \mathbf{j} \cdot \nabla B_T \quad (2.2-13)$$

となる。ここで

$$U \equiv \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho \mathbf{V} \times \nabla \zeta \quad (2.2-14)$$

を導入した。

次に方程式(2.2-1~4, 6~13)式にアスペクト比の逆数が小さい( $\varepsilon \equiv a/R_0 \ll 1$ )として、以下のオーダリングを適用する。

$$B_0 \sim a \sim \rho_0 \sim O(1)$$

$$|\nabla_\perp \Psi| \sim |V_\perp| \sim \frac{1}{R_0} \sim \frac{\partial}{\partial \zeta} \sim \frac{\partial}{\partial t} \sim O(\varepsilon)$$

$$P \sim b_T \sim V_\zeta \sim O(\varepsilon^2) \quad (2.2-15)$$

$$|\mathbf{b}_\perp| \sim \nabla \cdot V_\perp \sim O(\varepsilon^3)$$

ここで解析対象がトカマクであるので安全係数が約1( $q \sim \frac{a}{R_0} \frac{B_T}{|\nabla_\perp \Psi|} \sim 1$ ), ベータ値(プラズマ圧力と磁場圧力の比)が約 $\varepsilon^2$ ( $\beta \sim \frac{2\mu_0 P}{B_T} \sim \varepsilon^2$ )であることを用いた。また $\rho_0$ は平均質量密度, $B_T$ は平均トロイダル磁場で $b_T$ は $B_T = B_0 + b_T$ ある。こうして

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + V_\perp \cdot \nabla_\perp U &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \zeta \cdot \nabla_\perp \Psi \times \nabla_\perp J + B_0 \frac{\partial J_T}{\partial \zeta} \\ &+ \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla_\perp \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho \times \nabla_\perp \frac{V_\perp^2}{2} \cdot \nabla \zeta \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \\ &- \nabla \zeta \cdot \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \times \nabla P + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (2.2-16)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V_\perp \cdot \nabla_\perp \Psi = \eta J + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + O(\varepsilon^4), \quad (2.2-17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2\Gamma} P + \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2\Gamma} P = O(\varepsilon^3), \quad (2.2-18)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial V_\zeta}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla V)_\zeta \right\} = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla_\perp b_T \times \nabla_\perp \Psi \right)_\zeta$$

$$-\frac{\partial |\nabla_\perp \Psi|^2}{\partial \zeta} \frac{1}{2\mu_0} + O(\varepsilon^4), \quad (2.2-19)$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho + \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho = O(\varepsilon^3), \quad (2.2-20)$$

$$\mathbf{B} = B_T \nabla \zeta + \nabla \zeta \times \nabla \Psi + O(\varepsilon^2) \quad (2.2-21)$$

$$\mu_0 J = \mu_0 J_T \nabla \zeta + O(\varepsilon^2) = (R^2 \nabla_{\perp} \cdot \frac{\nabla_{\perp}^2 \Psi}{R^2}) \nabla \zeta + O(\varepsilon^2), \quad (2.2-22)$$

$$\mathbf{V} = V_{\zeta} \nabla \zeta + \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \zeta \times \nabla \Phi + O(\varepsilon^2), \quad (2.2-23)$$

$$U = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho \nabla \Phi + O(\varepsilon^2), \quad (2.2-24)$$

を得る。ここで  $V_{\zeta}$  は (2.2-19) 式以外に現れないので以下で計算する必要はない。また本論文で解析している破壊不安定性は磁場の変化が本質的な役割を果しているので、 $\rho, P$  については簡単のために  $\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho = \text{定数}$ ,  $\Gamma = 0$  と仮定する。そして  $O(\varepsilon^2)$  以下の項を省略することによって以下の非円形断面トロイダル・プラズマ簡約電磁流体方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{V}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} U &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \zeta \cdot \nabla_{\perp} \Psi \times \nabla_{\perp} J + B_0 \frac{\partial J}{\partial \zeta} \\ &+ \nabla \zeta \cdot \nabla P \times \nabla_{\perp} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.2-25)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{V}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Psi = \eta J - E^w(t) + B_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (2.2-26)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla P = 0, \quad (2.2-27)$$

$$U = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \rho \nabla \Phi, \quad (2.2-28)$$

$$\mu_0 J = R^2 \nabla_{\perp} \cdot \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 \Psi}{R^2}\right), \quad (2.2-29)$$

$$\mathbf{B} = B_0 \nabla \zeta + \nabla \zeta \times \nabla \Psi, \quad (2.2-30)$$

$$\mathbf{V}_{\perp} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \nabla \zeta \times \nabla \Phi, \quad (2.2-31)$$

ここで  $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$  を  $\phi$  が流れ関数に一致するように、また  $E_{(t)}^W$  が壁での電場となるように  $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \rightarrow B_0 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - E_{(t)}^W$  と書き替えた。(2.2-25)式は渦度の運動方程式、(2.2-26)式は電磁誘導の方程式、(2.2-27)式は圧力の方程式となっている。

いままではポロイダル断面における微分を演算子  $\nabla_{\perp}$  で表現して具体的な座標系については記述しなかった。以下この座標系について考える。プラズマ安定性解析では磁力線方向の微分((2.2-25)式の  $(\frac{R}{R_0})^2 \nabla \zeta \cdot \nabla_{\perp} \Psi \times \nabla_{\perp} J + B_0 \frac{\partial J}{\partial \zeta}$  (2.2-26)式の  $V_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Psi$  と  $B_0 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$ )が重要な役割を果たしており、これを精度よく表現する座標系を選ぶ必要がある。ここではこの目的のために自然座標系<sup>23)</sup>  $(r, \theta, \zeta)$  (図2.1)を用いることにする。この座標系上では平衡状態の磁力線は直線となり、これに沿った微分を精度よく表現できる。

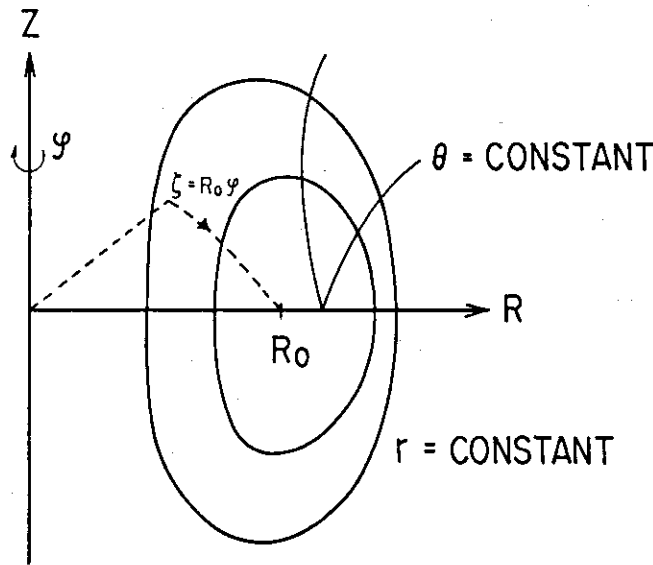


図 2.1 自然座標系

具体的に自然座標系  $(r, \theta, \zeta)$  は次のように与えられる。

まず平衡配位の磁束  $\psi$  を一つの座標系に採用する。またポロイダル角変数は磁力線が直線に見えるように決める。つまり磁力線上を移動したときにトロイダル角変数の変化に対するポロイダル角変数の変化が  $\psi$  のみの関数になるように

$$\left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)_{\psi=\text{const.}} = \frac{B^{\theta}}{B^{\zeta}} = 1/R_0 q(\psi), \quad (2.2-32)$$

とする。また  $B = B_0 \nabla \zeta + \nabla \zeta \times \nabla \psi$  であることより  $\left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)_{\psi=\text{const.}}$  はこの座標系での体積要素  $g \equiv [(\nabla r \times \nabla \theta) \times \nabla \zeta]^{-2}$  を使用して

$$\frac{B^{\theta}}{B^{\zeta}} = \frac{B \cdot \nabla \theta}{B \cdot \nabla \zeta} = \frac{(d\psi/dr) g^{-1/2}}{B_0 g^{\zeta}}, \quad (2.2-33)$$

と表せる。一方  $(R, Z)$  面において等  $\psi$  線の方程式が等  $\psi$  線上での長さを  $l$  として

$$\frac{dR}{dl} = \frac{1}{|\nabla r|} \frac{dr}{d\zeta}, \quad \frac{dZ}{dl} = -\frac{1}{|\nabla r|} \frac{dr}{dR}, \quad (2.2-34)$$

で与えられ、また

$$\begin{aligned}
 g^{-1/2} &= (\nabla r \times \nabla \theta) \cdot \nabla \zeta = \left( \frac{\partial r \partial \theta}{\partial R \partial Z} - \frac{\partial r \partial \theta}{\partial Z \partial R} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right) \\
 &= \left( \frac{R_0}{R} \right) |\nabla r| \left( \frac{d\theta}{dl} \right)_{\Psi=\text{const.}}
 \end{aligned}
 \tag{2.2-35}$$

であることより  $\theta$  は

$$\left( \frac{d\theta}{dl} \right)_{\Psi=\text{const.}} = \frac{1}{g^{1/2} |\nabla r|} \left( \frac{R}{R_0} \right) = \frac{B_0 R_0}{|\nabla \Psi| R^2 q(\Psi)},
 \tag{2.2-36}$$

となる。ここで (2.2-32) (2.2-33) 式を利用した。またこれをポロイダル方向に 1 周積分して  $q(r)$  は

$$q(r) = \frac{R_0 B_0}{2\pi} \oint \frac{dl}{R^2 |\nabla \Psi|},
 \tag{2.2-37}$$

と与えられる。ここではさらに円柱プラズマの場合に  $r$  が小半径に一致するように

$$r \equiv \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 g^{1/2} = \frac{R_0}{B_0} q(r) \frac{d\Psi}{dr},
 \tag{2.2-38}$$

とする。ここで (2.2-33) 式を使用した。以上まとめて自然座標系は

$$\begin{cases}
 r = \frac{R_0}{B_0} \frac{d\Psi}{dr} q(\Psi), \\
 \theta = \frac{R_0 B_0}{q(r)} \oint \frac{dl}{R^2 |\nabla \Psi|}, \\
 \zeta = R_0 \varphi,
 \end{cases}
 \tag{2.2-39}$$

で与えられる。

この座標系を用いて簡約電磁流体方程式 (2.2-25~31) を表すと

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \Phi] + [\Psi, J] + [P, f] + B_0 \frac{\partial J}{\partial \zeta},
 \tag{2.2-40}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\Psi, \Phi] + B_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \eta J - E^v,
 \tag{2.2-41}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [P, \Phi],
 \tag{2.2-42}$$

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (h^{rr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + h^{r\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^{r\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + h^{\theta\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}),
 \tag{2.2-43}$$

$$J = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (g^{rr} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + g^{r\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (g^{r\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + g^{\theta\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}), \quad (2.2-44)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (2.2-45)$$

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (2.2-46)$$

$$f = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2, \quad h^{rr} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 g^{rr}, \quad h^{\theta\theta} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 g^{\theta\theta}, \quad h^{r\theta} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 g^{r\theta}, \quad (2.2-47)$$

となる。ここで演算子〔 〕は

$$[X, Y] \equiv \frac{1}{r} \left( \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial Y}{\partial \theta} - \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial r} \right), \quad (2.2-48)$$

で定義される。また  $g^{rr}$ ,  $g^{r\theta}$ ,  $g^{\theta\theta}$  は反変メトリック・テンソルで

$$g^{rr} = |\nabla r|^2, \quad g^{r\theta} = \nabla r \cdot \nabla \theta, \quad g^{\theta\theta} = |\nabla \theta|^2, \quad (2.2-49)$$

で定義される。

この方程式の規格化は長さについては壁での  $r (=a)$ , 磁場については壁でのポロイダル磁場  $B_\theta (r=a)$  で行っている。これより時間についてはポロイダル・アルフェン時間  $\tau_{HP} (\equiv (\mu_0 \rho)^{1/2} a / B_\theta (r=a))$  で規格化されたことになる。また電気抵抗値は  $\bar{\eta} = \tau_{HP} / \tau_\eta$  となり、磁気レイノルズ数の逆数になっている。ここで  $\tau_\eta (\equiv \mu_0 a^2 / \eta)$  は磁場の拡散時間である。以下  $\bar{\eta}$  の“-”を省略する。

この方程式の境界条件は破壊不安定性の過程でプラズマの全電流は変化しないこと、プラズマの流れは壁で零であること、またプラズマ圧力は壁で零であることより

$$\frac{\partial \Psi(r=a, t)}{\partial r} = \text{const.}, \quad \Phi(r=a, t) = 0, \quad P(r=a, t) = 0, \quad (2.2-50)$$

となる。

また  $\eta(r)$  を

$$\eta(r) = E^\theta(t=0) / J(r, t=0) \quad (2.2-51)$$

とすることによって、不安定モードが存在しないときは  $\Psi$  は時間変化しないようにすることができる。

方程式(2.2-40~42)のエネルギー積分は

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dM}{dt} = Q_P - Q_J, \quad (2.2-52)$$

$$K = \frac{1}{2} \int \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left[ g^{rr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + 2g^{r\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2 \right] r dr d\theta, \quad (2.2-53)$$

$$M = \frac{1}{2} \int \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[ g^{rr} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 + 2g^{r\theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2 \right] r dr d\theta, \quad (2.2-54)$$

$$Q_J = \int \eta \left(\frac{R_0}{R} J\right)^2 r dr d\theta, \quad (2.2-55)$$

$$Q_P = \int E^{\nu} J r dr d\theta, \quad (2.2-56)$$

となる。ここで  $k$  は運動エネルギー、 $M$  は磁場エネルギー、 $Q_J$  はジュール熱によるエネルギー損失、 $Q_P$  は壁からのポインティング・エネルギー束を表している。

いままでは一般的な非円形断面トロイダル形状の簡約電磁流体方程式について述べてきたが、以下ではより簡単な図 2.2 に示すような、長さ  $2\pi R_0$ 、半径  $a$  の円柱プラズマに対する簡約電磁流体方程式について考える。この形状の平衡状態の等  $\Psi$  面は同心円状をしているので、 $r$  は半径に一致し、 $\theta$  は通常の円柱座標の  $\theta$  に一致する。

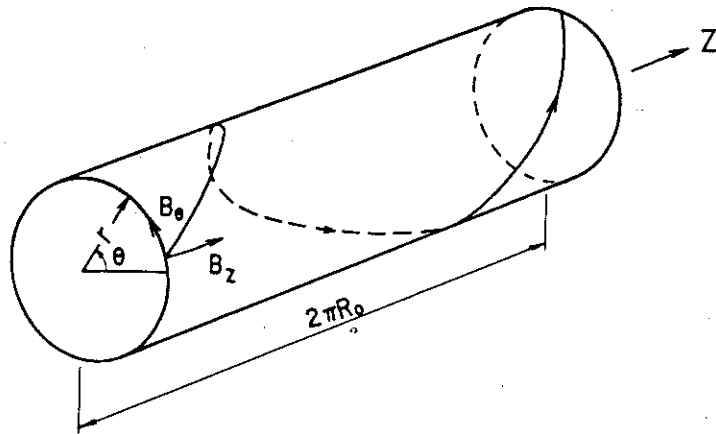


図 2.2 円柱プラズマ形状

これよりメトリック  $g^{rr}$ 、 $g^{r\theta}$ 、 $g^{\theta\theta}$  及び  $f$  は

$$g^{rr} = 1, \quad g^{r\theta} = 0, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad f = 1, \quad (2.2-57)$$

と与えられる。これを (2.2-40~47) 式に代入することによって以下のような円柱プラズマ簡約電磁流体方程式を得る。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \Phi] + [\Psi, J] + B_0 \frac{\partial J}{\partial z}, \quad (2.2-58)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\Psi, \Phi] + B_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \eta J - E^{\nu}, \quad (2.2-59)$$

$$U = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad (2.2-60)$$

$$J = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad (2.2-61)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (2.2-62)$$

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (2.2-63)$$

ここで  $f = 1$  であることより圧力  $P$  は運動方程式に含まれなくなり計算する必要がなくなる。また演算子  $[\ ]$  は (2.2-48) 式で定義されている。

エネルギー積分も

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dM}{dt} = Q_p - Q_j, \quad (2.2-64)$$

$$K = \frac{1}{2} \int [ (\frac{\partial \Phi}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta})^2 ] r dr d\theta, \quad (2.2-65)$$

$$M = \frac{1}{2} \int [ (\frac{\partial \Psi}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta})^2 ] r dr d\theta, \quad (2.2-66)$$

$$Q_j = \int \eta J^2 r dr d\theta, \quad (2.2-67)$$

$$Q_p = \int E^w J r dr d\theta, \quad (2.2-68)$$

と表せる。

次に円柱プラズマで摂動がヘリカル対称性をもつ場合を考える。このときすべての物理量は  $r$  と  $\varphi = \theta - nZ / m R_0$  ( $m, n$  はヘリカル対称性のピッチ) のみの関数で表せ、また  $\frac{\partial}{\partial Z} = R_0 \frac{m}{n} \frac{\partial}{\partial \theta}$  が成り立つ。これを (2.2-58~63) に代入して

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \Phi] + [\Psi, J], \quad (2.2-69)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\Psi, \Phi] + \eta J - E^w, \quad (2.2-70)$$

$$U = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad (2.2-71)$$

$$J = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad (2.2-72)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (2.2-73)$$

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (2.2-74)$$

を得る。ここでヘリカル対称性を考慮して、 $\psi - \frac{n}{m} \frac{B_0 r^2}{R_0} \rightarrow \psi$ ,  $J - 2 \frac{n}{m} \frac{R_0}{B_0} \rightarrow J$  と置き換えてある。

次に線形不安定性を解析するときの基礎方程式となる線形簡約電磁流体方程式を導く。まず物理量を  $\psi + \tilde{\psi}$ ,  $P + \tilde{P}$ ,  $J + \tilde{J}$  のように平衡量と " ~ " をつけた摂動量に分離する。次にこれを (2.2-40~46) 式に代入し、摂動量が小さいとして2次以上の項を落す。こうして線形簡約電磁流体方程式は

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \tilde{F} \tilde{J} + [\tilde{\psi}, J] + [\tilde{P}, f], \quad (2.2-75)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \tilde{F} \tilde{\psi} + \eta \tilde{J}, \quad (2.2-76)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}, \quad (2.2-77)$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (h^{rr} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + h^{r\theta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^{r\theta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + h^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}), \quad (2.2-78)$$

$$\tilde{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (g^{rr} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + g^{r\theta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (g^{r\theta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + g^{\theta\theta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}), \quad (2.2-79)$$

$$\tilde{V}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}, \quad \tilde{V}_\theta = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}, \quad (2.2-80)$$

$$\tilde{B}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}, \quad \tilde{B}_\theta = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}, \quad (2.2-81)$$

$$\tilde{F} = \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \frac{\partial}{\partial \theta} + B_0 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (2.2-82)$$

と得られる。

円柱プラズマに対する線形簡約方程式も同様に

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \tilde{F} \tilde{J} - \frac{1}{r} \frac{dJ}{dr} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}, \quad (2.2-83)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \tilde{F} \tilde{\psi} + \eta \tilde{J}, \quad (2.2-84)$$

$$\tilde{U} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2}, \quad (2.2-85)$$

$$\tilde{J} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \theta^2}, \quad (2.2-86)$$

$$\tilde{V}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta}, \quad \tilde{V}_\theta = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r}, \quad (2.2-87)$$

$$\tilde{B}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta}, \quad \tilde{B}_\theta = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r}, \quad (2.2-88)$$

$$\hat{F} \equiv \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \frac{\partial}{\partial \theta} + B_0 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2-89)$$

となる。

以下では平衡状態を与える方程式について考える。まず非円形断面トロイダル・プラズマ簡約電磁流体方程式の場合について述べる。このときの平衡状態を決定する方程式は(2.2-40)式において  $U=0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \zeta}=0$  として

$$J(r, \theta) = -\frac{dP}{dr} \frac{dr}{d\Psi} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + A(\Psi) \quad (2.2-90)$$

と得られる。ここで  $A(\Psi)$  は任意関数であり Grad-Shafranov 方程式との対応からトロイダル磁束関数  $T(\Psi)$  を使用して  $A(\Psi) = T \frac{dT}{d\Psi}$  と表せる。また(2.2-29)式より  $J(r, \theta)$  を  $\Psi$  で表して下記の

$$J(r, \theta) = R^2 \nabla_\perp \cdot \frac{(\nabla_\perp \Psi)}{R^2} = -\frac{dP}{d\Psi} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + T \frac{dT}{d\Psi}, \quad (2.2-91)$$

この方程式は  $P(\Psi)$ ,  $T(\Psi)$  を与えて反復法で解くことが可能である。しかしながらここでは  $P(\Psi)$ ,  $T(\Psi)$  の代りに  $P(\Psi)$ ,  $q(\Psi)$  を与えて解くことにする。そして  $T(\Psi)$  は次のようにして,  $P(\Psi)$ ,  $q(\Psi)$  から計算できる。すなわち, (2.2-91) 式の等  $\Psi$  線上での平均  $\langle \dots \rangle$  をとると

$$\langle J(r, \theta) \rangle = -\frac{dP}{d\Psi} \left\langle \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \right\rangle + T \frac{dT}{d\Psi}, \quad (2.2-92)$$

となる。また(2.2-38, 44, 49)式より

$$\langle J(r, \theta) \rangle = \frac{1}{q} \frac{d}{d\Psi} q \langle |\nabla \Psi|^2 \rangle \quad (2.2-93)$$

となり,  $q(\Psi)$ ,  $P(\Psi)$  を与えれば  $T(\Psi)$  が決まる。

$q(\Psi)$ ,  $P(\Psi)$  は次のような関数型で与えることにする。

$$q(\Psi) = q_0 [1 + (\sqrt{\Psi}/r_0)^{2\lambda}]^{1/\lambda} \quad (2.2-94)$$

$$\frac{dP}{d\Psi} = \beta_J (1 - \alpha \Psi^{c1} - (1 - \alpha) \Psi^{c2}), \quad (2.2-95)$$



ここで  $q_0, \lambda, r_0$  は安全係数の形状を決めるパラメータ,  $\beta_J, \alpha, C_1, C_2$  は圧力の分布を決めるパラメータである。

この平衡を計算するときは  $\Psi$  を  $(R, Z)$  座標上の関数として解くが, 一方簡約電磁流体方程式はこの平衡より決定される座標系  $(r, \theta)$  を使用して計算する。従って  $\Psi(R, Z)$  から  $(r, \theta)$  座標を構成し, その座標上で平衡諸量を計算することが必要になる。 $r, \theta$  については (2.2-39) 式より計算する。メトリック  $g^{r\Gamma}, g^{r\theta}, g^{\theta\theta}$  は  $\Psi(R, Z)$  より計算する。

円柱プラズマに対する平衡方程式は (2.2-90) 式より

$$J(r) \equiv \nabla_{\perp}^2 \Psi = -\frac{dP}{d\Psi} + T \frac{dT}{d\Psi} \quad (2.2-96)$$

となる。P は円柱プラズマ簡約電磁流体方程式中に現れず, また  $J(r)$  は (2.2-93) 式より

$$J(r) = \frac{R_0}{B_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{q(r)} \right) \quad (2.2-97)$$

となるので, 安全係数  $q(r)$  を

$$q(r) = q_0 [1 + (r/r_0)^{2\lambda}]^{1/\lambda} \quad (2.2-98)$$

のように与えて平衡を決定する。ここで  $q_0, \lambda$  及び  $r_0$  は形状を決めるパラメータである。

2.3 ヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式

前節では電磁流体方程式をアスペクト比の逆数 ( $\varepsilon \equiv a/R_0$ ) で展開し、2次以上の高次項を落して簡約電磁流体方程式を導出した。この簡約電磁流体方程式を使用して抵抗性モードやティアリング・モードの解析が可能である。しかしながら4.2節で述べる内部キック・モードは $\varepsilon$ 展開の2次の項まで扱わないと表現できない。そこで、ここでは $\varepsilon$ についての展開をしないで非圧縮性の仮定のみで基礎方程式系を導出することを考える。この非圧縮性の仮定により時間スケールの早い磁気音波を解析的に取り除くことができる。また方程式系を簡単にするためにヘリカル対称性のある円柱プラズマを仮定する。さらに簡約電磁流体方程式の場合と同様に $\rho = \text{定数}$ とする。これらの仮定のもとに電磁流体方程式から導出される方程式をヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式とよぶことにする。

以下このヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式を電磁流体方程式から具体的に求めてみる。まず非直交座標系である次のようなヘリカル座標系(図2.3, 付録A)を考える。

$$\left\{ \begin{array}{l} r = r \\ \varphi = \theta - \frac{k}{m}z \\ \zeta = (z + \frac{kr^2}{m}\theta)/\sigma \end{array} \right. \quad (2.3-1)$$

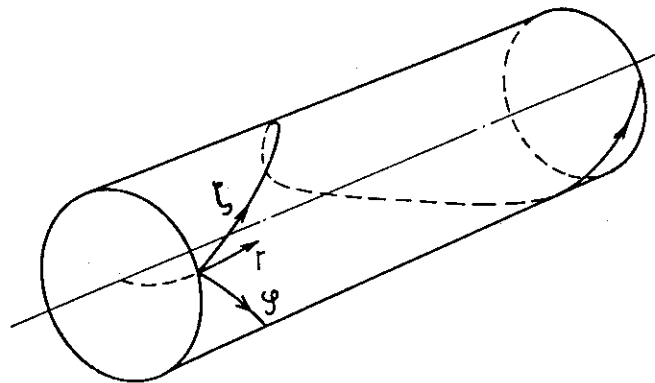


図2.3 ヘリカル座標系

ここで $k = n/R_0$ ,  $\sigma = 1 + (Rr/m)^2$ ,  $(r, \theta, Z)$ は円柱座標系である。この座標系でベクトルAの成分表示を次のように定義する(付録A)。

$$A = (A_r, A_\varphi, A_\zeta) = (A \cdot e_r, A \cdot e_\varphi, A \cdot e_\zeta) \quad (2.3-2)$$

ここで $e_r, e_\varphi, e_\zeta$ は円柱座標系の基本ベクトルを使用して

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\theta - \frac{kr}{m} \mathbf{e}_z \quad (2.3-3)$$

$$\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_z + \frac{kr}{m} \mathbf{e}_\theta.$$

のように表せる。ヘリカル対称性を仮定するとすべての物理量は座標  $r$  と  $\varphi = \theta - \frac{k}{m}z$  のみの関数で表せるようになり物理量の  $\zeta$  についての微分は零となる。このときのベクトル演算子  $\nabla\phi$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}$  の成分表示を付録 A に載せた。

この座標系で速度  $\mathbf{V}$  はプラズマの非圧縮性 ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ) より流れ関数  $\phi$  を用いて

$$\mathbf{V} = V_\zeta \mathbf{e}_\zeta + \mathbf{e}_\zeta \times \nabla \phi, \quad (2.3-4)$$

と表せる。同様に磁場についても  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  ((2.1-7)式) であることにより磁束関数  $\psi$  を用いて

$$\mathbf{B} = B_\zeta \mathbf{e}_\zeta + \mathbf{e}_\zeta \times \nabla \psi, \quad (2.3-5)$$

と表すことができる。

以下  $V_\zeta$ ,  $\phi$ ,  $B_\zeta$ ,  $\psi$  についての方程式を求めることにする。

まず  $V_\zeta$  については (2.1-2) 式を

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left( P + \frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (2.3-6)$$

と書き改め、(A・12-C) を利用することによって

$$\frac{\partial V_\zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla V_\zeta = \mathbf{B} \cdot \nabla B_\zeta, \quad (2.3-7)$$

となる。

次に  $\phi$  については、(2.1-2) 式に  $\nabla \times$  を演算し、 $\mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{V}$  とすると

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V}, \quad (2.3-8)$$

となる。この式と  $\mathbf{e}_\zeta$  の内積を (A・12-C) を利用して求めると

$$\frac{\partial U_\zeta}{\partial t} + \sigma \mathbf{V} \cdot \nabla \left( U_\zeta + \frac{2k}{m\sigma^2} V_\zeta \right) + \frac{k^2}{m^2 \sigma} \frac{\partial V_\zeta^2}{\partial \varphi} = \sigma \mathbf{B} \cdot \nabla (J_\zeta / \sigma) + \frac{k^2}{m^2 \sigma} \frac{\partial B_\zeta^2}{\partial \varphi}, \quad (2.3-9)$$

となる。また  $\mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{V}$  より (A・11-C) を利用して

$$U_\zeta = (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_\zeta = \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} - \frac{2k}{m\sigma} V_\zeta = \Delta^* \phi - \frac{2k}{m\sigma} V_\zeta, \quad (2.3-10)$$

と表せるので

$$\frac{\partial \Delta^* \Phi}{\partial t} + V \cdot \nabla \left( \Delta^* \Phi + \frac{2k}{m\sigma^2} V_\zeta \right) + \frac{k^2}{m^2 \sigma^2} \frac{\partial V_\zeta^2}{\partial \varphi} = B \cdot \nabla J + \frac{k^2}{m^2 \sigma^2} \frac{\partial B_\zeta^2}{\partial \varphi}, \quad (2.3-11)$$

を得る。

また  $B_\zeta$  については (2.1-4) 式と (2.1-5) 式より

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (V \cdot \nabla) B = (B \cdot \nabla) V - \eta \nabla \times J, \quad (2.3-12)$$

となり,  $U_\zeta$  の導出のときと同じように (A・12-C) を利用して

$$\frac{\partial B_\zeta}{\partial t} + \sigma V \cdot \nabla \left( \frac{B_\zeta}{\sigma} \right) = \sigma B \cdot \nabla \left( \frac{V_\zeta}{\sigma} \right) - \frac{2k}{m\sigma} B \cdot \nabla \Phi + \eta \sigma \left( \Delta^* B_\zeta - \frac{2k}{m\sigma} J \right), \quad (2.3-13)$$

を得る。

最後に  $\Psi$  についての式を求める。(A・9)(A・11-C) よりあるベクトル  $A$  に対して

$$e_\zeta \times \nabla \times A = -\frac{1}{\sigma} \nabla (A \cdot e_\zeta), \quad (2.3-14)$$

が成り立つ。(2.3-5) 式を (2.3-12) 式に代入して  $e_\zeta$  のベクトル積を左からとると, 左辺は

$$e_\zeta \times \frac{\partial}{\partial t} (B_\zeta e_\zeta + e_\zeta \times \nabla \Psi) = -\frac{\partial}{\partial t} \sigma \nabla \Psi$$

となる。

また右辺は関係式 (2.3-14) を利用して

$$\begin{aligned} e_\zeta \times \nabla \times (V \times B - \eta J) &= -\frac{1}{\sigma} \nabla \left[ (V \times B) \cdot e_\zeta - \eta J \cdot e_\zeta \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma} \nabla \left[ (V_\zeta e_\zeta + e_\zeta \times \nabla \Phi) \times (B_\zeta e_\zeta + e_\zeta \times \nabla \Psi) \cdot e_\zeta - \eta J \cdot e_\zeta \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma} \nabla \left[ -V \cdot \nabla \Psi - \eta J \cdot e_\zeta \right] \end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V \cdot \nabla \Psi = \eta J_\zeta - E^w(t), \quad (2.3-15)$$

が得られる。 $E_{(t)}^w$  は積分定数で物理的には電場である。ここで  $J_\zeta$  (以下  $J$  と書く) は (2.1-6) 式と (A.11-C) より

$$J = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2k}{m\sigma^2} B_\zeta, \quad (2.3-16)$$

となる。以上の (2.3-7), (2.3-11), (2.3-13) 及び (2.3-15) がヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式でまとめて書くと,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left[ U + \frac{2k}{m\sigma^2} V_\zeta \cdot \Phi \right] + [\Psi, J] + \frac{k^2}{m^2 \sigma^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\zeta^2 - V_\zeta^2), \quad (2.3-17)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\Psi, \Phi] + \sigma \eta J - E^v(t), \quad (2.3-18)$$

$$\frac{\partial V_\zeta}{\partial t} = [V_\zeta, \Phi] + [\Psi, B_\zeta], \quad (2.3-19)$$

$$\frac{\partial B_\zeta}{\partial t} = \sigma \left[ \frac{B_\zeta}{\sigma}, \Phi \right] + \sigma \left[ \Psi, \frac{V_\zeta}{\sigma} \right] - \frac{2k}{m\sigma} [\Psi, \Phi] + \eta \sigma \left( \Delta^* B_\zeta - \frac{2k}{m\sigma} J \right), \quad (2.3-20)$$

$$U = \Delta^* \Phi, \quad (2.3-21)$$

$$J = \Delta^* \Psi + \frac{2k}{m\sigma} B_\zeta, \quad (2.3-22)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (2.3-23)$$

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad B_\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (2.3-24)$$

$$[X, Y] \equiv \frac{1}{r} \left( \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial r} \right), \quad (2.3-25)$$

$$\Delta^* \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma \equiv 1 + \left( \frac{kr}{m} \right)^2. \quad (2.3-26)$$

となる。この方程式は 2.1 節の議論から予想されるように、 $k \rightarrow 0$ ,  $kB_\zeta \rightarrow nB_0/R_0$  (大アスペクト比近似) でヘリカル対称円柱プラズマ簡約電磁流体方程式 (2.2-69 ~ 74) に一致する。

方程式の規格化は前節と同様に長さについては小半径  $a$ , 磁場については  $q(r_s) = 1$  のポロイダル磁場  $B_\theta(r_s)$  で行う。

境界条件も前節と同様に計算中にプラズマの全電流は変わらないとし、またプラズマの流れは  $r = a$  に位置する壁の所で零であることより

$$\begin{aligned} \Psi(r=a, t) &= \text{const.}, & B_\zeta(r=a, t) &= \text{const.}, \\ \Phi(r=a, t) &= 0, & V_\zeta(r=a, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3-27)$$

となる。

また、この方程式のエネルギー積分は

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dM}{dt} = Q_J - Q_P, \quad (2.3-28)$$

$$K = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{\sigma} \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{v_\zeta^2}{\sigma} \right\} r dr d\varphi, \quad (2.3-29)$$

$$M = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{\sigma} \cdot \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{B_z^2}{\sigma} \right\} r dr d\varphi, \quad (2.3-30)$$

$$Q_J = \int \eta \left\{ \sigma J^2 + \frac{1}{\sigma} \cdot \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} r dr d\varphi, \quad (2.3-31)$$

$$Q_P = E^w \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \eta B_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (2.3-32)$$

となる。ここで  $k$  は運動エネルギー、 $M$  は磁場エネルギー、 $Q_J$  はジュール熱による散逸、 $Q_P$  は壁からのポインティング束を表している。

線形ヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式も前節と同様、物理量を  $\Psi + \tilde{\Psi}$ ,  $B_z + \tilde{B}_z$  のように平衡量と摂動量に分離し、(2.3-17~26)式に代入して

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \hat{F} \tilde{J} - \frac{1}{r} \frac{dJ}{dr} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \varphi} + \frac{2k^2}{m^2 \sigma^2} B_z \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial \varphi}, \quad (2.3-33)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \hat{F} \tilde{\Phi} + \sigma \eta \tilde{J}, \quad (2.3-34)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial t} = \hat{F} \tilde{B}_z - \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \varphi} \quad (2.3-35)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial t} = \hat{F} \tilde{V}_z - \frac{2k}{m\sigma} \hat{F} \tilde{\Phi} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B_z}{\sigma} \right) \tilde{\Phi} + \eta \sigma (\Delta^* \tilde{B}_z - \frac{2k}{m\sigma} \tilde{J}), \quad (2.3-36)$$

$$\tilde{U} = \Delta^* \tilde{\Phi}, \quad (2.3-37)$$

$$\tilde{J} = \Delta^* \tilde{\Psi} + \frac{2k}{m\sigma^2} \tilde{B}_z, \quad (2.3-38)$$

$$\hat{F} \equiv \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

を得る。

平衡状態は(2.3-17)式からわかるように任意の  $J(r)$ ,  $B_z(r)$  で保たれている。以下では  $J(r)$ ,  $B_z(r)$  を与える代わりに安全係数  $q(r)$  と圧力分布  $P(r)$  を

$$\begin{cases} q(r) = q_0 [1 + (r/r_0)^{2\lambda}]^{1/\lambda}, \\ P(r) = P_0 [1 - r^{2p_1}]^{p_2} \end{cases} \quad (2.3-39)$$

のように与えて平衡を決めることにする。ここで  $\lambda$  及び  $r_0$  は安全係数の形状を、また  $P_1, P_2$  は圧力分布を決めるパラメータである。  $q(r)$  から  $J(r)$  の計算は (2.2-97) 式から求める。また  $B_z(r)$  は  $\frac{dp}{dr} = J_\theta B_z - J_z B_\theta$  と  $B_z = B_z + \frac{kr}{m} B_\theta$  より求められる。

#### 2.4 第2章の要約

本章では破壊不安定性を解析するための基礎方程式系として簡約電磁流体方程式とヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式を電磁流体方程式から導出した。簡約電磁流体方程式は電磁流体方程式からアスペクト比が大きいトカマク・プラズマであることを仮定して導出した。またヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式はヘリカル対称円柱プラズマに対して非圧縮性の仮定のみを用いて導出した。

### 3. 数値計算法

本章では基礎方程式を数値的に解く方法について論ずる。まず3.1節で線形方程式の解法である新に開発した行列法について論ずる。次の3.2節では非線形方程式の解であるフーリエ展開と時間積分法について論ずる。最後の3.3節で本章の要約をする。

#### 3.1 線形不安定性の解法<sup>24)</sup>

電磁流体方程式の線形解を数値的に得るためには一般的に時間発展法と行列法が考えられる。行列法は多くの記憶容量を必要とするが計算時間は時間発展法に比較して少なくすむ。そして理想電磁流体方程式（電気抵抗が零の場合の電磁流体方程式）の場合には、扱う行列を固有値、固有ベクトルを比較的容易に計算することができる対称行列とすることが可能であるので、しばしば用いられている。しかしながら抵抗性電磁流体方程式を行列法で解こうとすると扱うことの難しい非対称行列の固有値問題を解かなければならず、今まではほとんど用いられていない。

ここでは非対称行列の固有値問題の解法を工夫することによって抵抗性電磁流体方程式を行列法で解くことを考える。以下具体的に抵抗性電磁流体方程式として簡約電磁流体方程式を用いた行列法を示す。ヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式の場合も全く同様に扱うことができる。

まず、すべての物理量を二つの角変数  $\theta$ 、 $\zeta$  について

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}(r, \theta, \zeta, t) \\ \tilde{\Psi}(r, \theta, \zeta, t) \\ \tilde{P}(r, \theta, \zeta, t) \end{bmatrix} = \sum_n \sum_{m=m_0, m_0 \pm 1, \dots} \begin{bmatrix} i\tilde{U}_{m,n}(r, t) \\ \tilde{\Psi}_{m,n}(r, t) \\ \tilde{P}_{m,n}(r, t) \end{bmatrix} e^{i(m\theta - n\zeta/R_0)}, \quad (3.1-1)$$

$$\begin{bmatrix} g^{rr}(r, \theta) \\ g^{r\theta}(r, \theta) \\ g^{\theta\theta}(r, \theta) \\ f(r, \theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=m_0, m_0 \pm 1, \dots} \begin{bmatrix} g_m^{rr}(r) \\ ig_m^{r\theta}(r) \\ g_m^{\theta\theta}(r) \\ f_m(r) \end{bmatrix} e^{im\theta},$$

とフーリエ展開する。ここで  $m$ 、 $n$  はそれぞれポロイダル及びトロイダル・モード数である。また  $m_0$  成分の振幅が一番大きいとして、このモードを中心に展開している。平衡の軸対称性より各々のトロイダル成分は分離して扱うことができるので、以下では添字  $n$  を省略する。

(3.1-1) 式を (2.2-75~77) 式の線形簡約電磁流体方程式に代入することによって

$$\frac{\partial \tilde{U}_m}{\partial t} = F_m \tilde{J}_m + \sum_{n=k+1}^k \frac{k}{r} \{ J_k \frac{d\tilde{\Psi}_l}{dr} - \tilde{\Psi}_k \frac{dJ_l}{dr} + f_k \frac{d\tilde{P}_l}{dr} - \tilde{P}_k \frac{df_l}{dr} \}, \quad (3.1-2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}_m}{\partial t} = -F_m \tilde{\Phi}_m + \eta \tilde{J}_m, \quad (3.1-3)$$



$$\frac{\partial \tilde{P}_n}{\partial t} = -\frac{m}{r} \frac{d\tilde{P}_n}{dr}, \quad (3.1-4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n = \sum_{n=k+l} \{ & h_k^r \frac{d^2 \tilde{\Phi}_l}{dt^2} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d(rh_k^r)}{dr} - (l+m)h_k^{\theta\theta} \right] \frac{d\tilde{\Phi}_l}{dr} \\ & - l \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(rh_k^{\theta\theta})}{dr} + mh_k^{\theta\theta} \right\} \tilde{\Phi}_l \}, \end{aligned} \quad (3.1-5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n = \sum_{n=k+l} \{ & g_k^r \frac{d^2 \tilde{\Psi}_l}{dt^2} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d(rg_k^r)}{dr} - (l+m)g_k^{\theta\theta} \right] \frac{d\tilde{\Psi}_l}{dr} \\ & - l \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(rg_k^{\theta\theta})}{dr} + mg_k^{\theta\theta} \right\} \tilde{\Psi}_l \}, \end{aligned} \quad (3.1-6)$$

$$F_n = \left( \frac{m}{r} \frac{d\tilde{Y}}{dr} - n \frac{B_0}{R_0} \right),$$

を得る。

つぎに物理変数の時間依存性を

$$\xi_n(r, t) = \xi_n(r) e^{\lambda t} \quad (3.1-7)$$

と仮定する。そして動径方向については差分法で離散化する。このとき物理量は共鳴面付近で大きく変化するので、この領域の分解能を上げる必要がある。ここでは、この目的のために次のような関数  $x(r)$  を導入する。

$$\begin{aligned} r &= x [1 - g(x-x_p)(x-1)] \\ g &= \frac{(1-x_f)}{x_p(x_p-1)}, \end{aligned} \quad (3.1-8)$$

そしてこの  $x$  について等間隔に離散化して分解能を上げる。ここでは  $x_p$  はメッシュが集積する中心で、 $x_f$  は下式で示されるような集積度を定めるパラメータである。

$$x_f dx = dr \quad r=x_p \quad (3.1-9)$$

また  $x$  についての差分法としては、以下のような2次の精度をもった中心差分法を用いる。

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_i+\Delta x) - f(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.1-10)$$

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} = \frac{f(x_i+\Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (3.1-11)$$

このようにして (3.1-2~6) 式は次のような成長率  $\lambda$  を固有値とする一般固有値問題に還元される。

$$\lambda BX = AX, \quad (3.1-12)$$

$$X^t = [\tilde{\Phi}_{n,i}, \tilde{\Psi}_{n,i}, \tilde{P}_{n,i}],$$



ここで  $L_n, D_n, U_n$  は

$$\begin{aligned}
 D_1 &= E_{1,2}, \\
 U_1 &= D_1^{-1} \cdot E_{1,3}, \\
 L_n &= E_{n,1}, & n=2,3,\dots,N, \\
 D_n &= E_{n,2} - E_{n,1}U_{n-1}, & n=2,3,\dots,N, \\
 U_n &= D_n^{-1}E_{n,3}, & n=1,2,\dots,N-1.
 \end{aligned} \tag{3.1-13}$$

のように計算できる。 $D_n^{-1}E_{n,3}$  は  $D_n$  を LU 分解してから計算する。そして行列  $E$  の行列式の値は

$$\begin{aligned}
 \det(E) &= \det(L)\det(U) = \det(L) = \det(D_1D_2\dots D_n \cdot D_N) \\
 &= \det(D_1)\det(D_2)\dots\det(D_n)\cdot\det(D_N)
 \end{aligned} \tag{3.1-14}$$

が成り立つので各々のブロック行列  $D_n$  の行列式の値の積として計算できる。このとき  $\det(E)$  の値は非常に大きくなるので  $\det(D_1), \det(D_2), \dots, \det(D_n), \dots$  の符号を調べて、 $\det(E)$  の符号のみを求めることにする。また  $\det(D_n)$  の符号は (3.1-13) 式で  $D_n$  の LU 分解ができているので下三角行列の対角成分の符号のみを調べれば求められる。

上述の行列式の反復を何回も繰り返せば正確な固有値を求めることができるが、それには多くの反復と多量の計算時間を必要とする。そこで少ない反復で近似的な固有値を求めることにとどめ、次の逆べき反復法を実行する。すなわち、(3.1-12) 式を近似固有値  $\lambda_a$  の値だけ

$$(\lambda - \lambda_a)BX = (A - \lambda_a B)X. \tag{3.1-15}$$

のように原点移動して、逆べき反復法

$$\begin{cases}
 Y^{n+1} = (A - \lambda_a B)^{-1}BX^n, \\
 X^{n+1} = Y^{n+1} / \|Y^{n+1}\|,
 \end{cases} \tag{3.1-16}$$

を繰り返す。

ここで  $\|Y^{n+1}\|$  はベクトル  $Y^{n+1}$  のノルムである。行列  $(A - \lambda_a B)$  の LU 分解はすでに遂行されているので前進消去と後退代入のみが (3.1-16) 式の反復で必要になる。そして最も不安定なモードに対応する固有値を求めることに限定すれば、固有値は実数であるので  $\|X^{n+1} - X^n\|$  が収束する。このときの固有値は

$$\lambda_N = \lambda_a + \|Y^{n+1}\|^{-1} \cdot \text{sign}(X^{n+1}, X^n), \tag{3.1-17}$$

で与えられる。またレイリー商

$$\lambda_R = \frac{(X^{n+1}, AX^{n+1})}{(X^{n+1}, BX^{n+1})} \tag{3.1-18}$$

からも固有値が求まる。この  $\lambda_N$  と  $\lambda_R$  の差は上述のブロック LU 分解のときに生じる誤差を表す。

### 3.2 非線形発展の解法

不安定性の非線形発展を解析するために基礎方程式系(2.2-40~42)又は(2.3-17~20)を時間を追って数値的に解く必要がある。ここではこのときの数値計算法について論ずる。まず動径変数  $r$  については前節で述べた差分法を用いる。また角変数  $\theta$ ,  $\zeta$  についてはフーリエ展開で離散化する。このフーリエ展開を用いることによって不安定性解析で重要な磁場  $B$  に沿っての微分  $B \cdot \nabla$  は単なる定数 ( $mB\theta - n \frac{B_0}{R_0}$ ) の乗算になり、精度よく計算できる。以下、このフーリエ展開法を使用して非円形断面トロイダル・プラズマ簡約電磁流体方程式とヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式を離散化する。

まず簡約電磁流体方程式について考える。物理変数を

$$\begin{bmatrix} \Phi(r, \theta, \zeta, t) \\ \Psi(r, \theta, \zeta, t) \\ P(r, \theta, \zeta, t) \end{bmatrix} = \sum_{m, n} \begin{bmatrix} i\Phi_{m/n}(r, t) \\ \Psi_{m/n}(r, t) \\ P_{m/n}(r, t) \end{bmatrix} e^{i(m\theta - n\zeta/R_0)}, \quad (3.2-1)$$

$$\begin{bmatrix} g^{rr}(r, \theta) \\ g^{r\theta}(r, \theta) \\ g^{\theta\theta}(r, \theta) \\ f(r, \theta) \end{bmatrix} = \sum_m \begin{bmatrix} g_m^{rr}(r) \\ ig_m^{r\theta}(r) \\ g_m^{\theta\theta}(r) \\ f_m(r) \end{bmatrix} e^{im\theta}, \quad (3.2-2)$$

とフーリエ展開する。また  $\Phi(r, \theta, \zeta, t)$  について左右対称,  $\Psi(r, \theta, \zeta, t)$ ,  $P(r, \theta, \zeta, t)$  について上下対称を仮定すれば

$$\Phi_{m/n} = -\Phi_{-m/-n}, \quad \Psi_{m/n} = \Psi_{-m/-n}, \quad P_{m/n} = P_{-m/-n} \quad (3.2-3)$$

が成立する。(3.2-1~2)式を(2.2-40~46)式に代入して、以下のフーリエ展開された式を得る。

$$\frac{\partial U_{m/n}}{\partial t} = [U, \Phi]_{m/n} + [J, \Psi]_{m/n} + [f, P]_{m/n} - n \frac{B_0}{R_0} J_{m/n}, \quad (3.2-4)$$

$$\frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial t} = [\Psi, \Phi]_{m/n} + n \frac{B_0}{R_0} \Phi_{m/n} + \eta J_{m/n} - E^v \delta_{m,0} \delta_{n,0}, \quad (3.2-5)$$

$$\frac{\partial P_{m/n}}{\partial r} = [P, \Phi]_{m/n}, \quad (3.2-6)$$

$$U_{m/n} = \sum_{l=k+l} \{ h_l^{kr} \frac{d^2 \Phi_{l/n}}{dr^2} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d(rh_k^{rr})}{dr} - (l+m)h_k^{\theta\theta} \right] \frac{d\Phi_{l/n}}{dr} - l \left[ \frac{1}{r} \frac{d(rh_k^{r\theta})}{dr} + mh_k^{\theta\theta} \right] \Phi_{l/n} \}, \quad (3.2-7)$$

$$J_{m/n} = \sum_{n=k+l} \left\{ g_k^r \frac{d^2 \Psi_{l/n}}{dr^2} + \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(r g_k^r)}{dr} - (l+m) g_k^{\theta\theta} \right\} \frac{d\Psi_{l/n}}{dr} - l \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(r g_k^{\theta\theta})}{dr} + m g_k^{\theta\theta} \right\} \Psi_{l/n} \right\}, \quad (3.2-8)$$

$$V_{r\ m/n} = \frac{m}{r} \Phi_{m/n}, \quad V_{\theta\ m/n} = \frac{\partial \Phi_{m/n}}{\partial r}, \quad (3.2-9)$$

$$B_{r\ m/n} = -\frac{m}{r} \Psi_{m/n}, \quad B_{\theta\ m/n} = \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial r}, \quad (3.2-10)$$

ここで演算子 [ ]<sub>m/n</sub> は

$$[X, Y]_{m/n} \equiv \sum_{m=m^*} \sum_{n=n^*} \frac{m^*}{r} \left( X_{m^*/n^*} \frac{\partial Y_{m^*/n^*}}{\partial r} - Y_{m^*/n^*} \frac{\partial X_{m^*/n^*}}{\partial r} \right), \quad (3.2-11)$$

で定義される。δ<sub>ij</sub> はクロネッカーの記号である。エネルギー積分も

$$\sum_n \left( \frac{dK_n}{dt} + \frac{dM_n}{dt} \right) = Q_p - \sum_n Q_{Jn}, \quad (3.2-12)$$

$$K_n = \frac{1}{2} \sum_{n=j+k+l} \int \left( \frac{R}{R_0} \right)^2_j \left[ g_k^r \left( \frac{\partial \Phi_{m/n}}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \Phi_{l/n}}{\partial r} \right) - 2l g_k^{\theta\theta} \left( \frac{\partial \Phi_{m/n}}{\partial r} \right) \Phi_{k/n} + g_l^{\theta\theta} \Phi_{m/n} \Phi_{k/n} \right] r dr, \quad (3.2-13)$$

$$M_n = \frac{1}{2} \sum_{n=j+k+l} \int \left( \frac{R_0}{R} \right)^2_j \left[ g_k^r \left( \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \Psi_{l/n}}{\partial r} \right) - 2l g_k^{\theta\theta} \left( \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial r} \right) \Psi_{k/n} + g_l^{\theta\theta} \Psi_{m/n} \Psi_{k/n} \right] r dr, \quad (3.2-14)$$

$$Q_p = E^{\omega} I, \quad (3.2-15)$$

$$Q_{Jn} = \sum_{n=k+l} \int \eta \left( \frac{R_0}{R} \right)_k^2 J_{m/n} J_{l/n} r dr, \quad (3.2-16)$$

となる。

また境界条件は (2.2-50) 式より

$$\Psi_{m=0}(r=a) = 0, \quad \Phi_m(r=a) = 0, \quad P_m(r=a) = 0, \quad (3.2-17)$$

$$\frac{d\Psi_{m=0}(r=a, t)}{dr} = \text{const.}$$

と表される。

ヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式についても同様に変数  $\Psi(r, \varphi)$ ,  $B_\zeta(r, \varphi)$ ,  $\Phi(r, \varphi)$ ,  $V_\zeta(r, \varphi)$  を角変数  $\varphi$  についてフーリエ展開する。

$$\begin{bmatrix} \Psi(r, \varphi) \\ B_\zeta(r, \varphi) \\ \Phi(r, \varphi) \\ V_\zeta(r, \varphi) \end{bmatrix} = \sum_l \begin{bmatrix} \Psi_l(r) \\ B_{\zeta l}(r) \\ i\Phi_l(r) \\ iV_{\zeta l}(r) \end{bmatrix} \exp(il\varphi), \quad (3.2-18)$$

また  $\Psi(r, \varphi)$ ,  $B_\zeta(r, \varphi)$  について上下対称,  $\Phi(r, \varphi)$ ,  $V_\zeta(r, \varphi)$  について左右対称性を仮定すれば

$$\Psi_l = \Psi_{-l}, \quad B_{\zeta l} = B_{\zeta -l}, \quad \Phi_l = -\Phi_{-l}, \quad V_{\zeta l} = -V_{\zeta -l}, \quad (3.2-19)$$

が成立する。(3.2-18) 式をヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式(2.3-17~20)に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_l}{\partial t} &= [U + \frac{2k}{m\sigma^2} V_\zeta, \Phi]_l + [J, \Psi]_l + \frac{k^2}{m^2\sigma} ([V_\zeta, V_\zeta]_l \\ &\quad + [B_\zeta, B_\zeta]_l), \end{aligned} \quad (3.2-20)$$

$$\frac{\partial \Psi_l}{\partial t} = [\Psi, \Phi]_l + \sigma\eta J_l - E^w \delta_{l,0}, \quad (3.2-21)$$

$$\frac{\partial V_{\zeta l}}{\partial t} = [V_\zeta, \Phi]_l + [\Psi, B_\zeta]_l, \quad (3.2-22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\zeta l}}{\partial t} &= \sigma [\frac{B_\zeta}{\sigma}, \Phi]_l + \sigma [\Psi, \frac{V_\zeta}{\sigma}]_l + \frac{2k}{m\sigma} [\Psi, \Phi]_l \\ &\quad + \sigma\eta (\Delta^* B_{\zeta l} - \frac{2k}{m\sigma} J_l), \end{aligned} \quad (3.2-23)$$

$$U_l = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma} \cdot \frac{\partial \Phi_l}{\partial r} \right) - \frac{l^2}{r^2} \cdot \Phi_l, \quad (3.2-24)$$

$$J_l = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sigma} \cdot \frac{\partial \Psi_l}{\partial r} \right) - \frac{l^2}{r^2} \cdot \Psi_l + \frac{2k}{m\sigma^2} B_{\zeta l}, \quad (3.2-25)$$

$$V_{rl} = \frac{l}{r} \Phi_l, \quad V_\varphi = \frac{\partial \Phi_l}{\partial r}, \quad (3.2-26)$$

$$B_{rl} = -\frac{l}{r} \Psi_l, \quad B_\varphi = \frac{\partial \Psi_l}{\partial r}, \quad (3.2-27)$$

を得る。ここで演算子  $[ ]_l, \{ \}_l$  は

$$\begin{aligned} (X, Y)_l &\equiv \sum_{l=j+k} \frac{j}{r} (X_j \frac{\partial Y_k}{\partial r} - Y_j \frac{\partial X_k}{\partial r}), \\ (X, X)_l &\equiv \sum_{l=j+k} l X_j X_k. \end{aligned} \tag{3.2-28}$$

で定義される。

境界条件は (2.3-27) 式より

$$\begin{aligned} \Psi_{l \neq 0}(r=1) &= 0, & \Phi_{l \neq 0}(r=1) &= 0, & B_{\zeta l \neq 0}(r=1) &= 0, & V_{\zeta l \neq 0}(r=1) &= 0, \\ \frac{d\Psi_{l=0}(r=1, t)}{dr} &= \text{const.}, & B_{\zeta l=0}(r=1, t) &= \text{const.} \end{aligned} \tag{3.2-29}$$

となる。

次に時間積分法について論ずる。

まず (2.2-40~42) 式を下式のようにモデル化して数値的時間積分に対する性質を考察する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F \Psi, \tag{3.2-30}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -F \Phi - \eta k^2 \Psi, \tag{3.2-31}$$

$\eta = 0$  の場合、この式はシェア・アルフェン振動に対応する  $e^{\pm i |F| t}$  の解をもつ。

この振動を表している部分、つまり (3.2-30~31) 式の左辺の第1項はもとの方程式では非線形項なので陰解法を適用すると非常に大きな次元数の行列方程式を解かなければならず、現実的でない。しかしながら (3.2-31) 式の第2項に対応する項は線形項なのでこの部分のみ陰解法にすることを考えればブロック三重対角行列方程式を解くだけでよい。また、この項を陰解法で扱うことにより陽解法が必要とされる。 $\Delta t < (\eta k^2)^{-1}$  の条件から解放され時間キザミ幅を大きくとれる。そこで (3.2-31) 式の第2項のみを陰解法、その他の項を陽解法の時間積分で解くことにするまた精度を上げるために2段法の数値時間積分を適用する。すなわち

$$\begin{cases} \Phi^{n+1/2} = \Phi^n + \alpha \Psi^n \\ \Psi^{n+1/2} = [ (1-\beta)\Psi^n - \alpha\Phi^{n+1/2} ] / (1+\beta) \end{cases} \tag{3.2-32}$$

$$\begin{cases} \Phi^{n+1} = \Phi^n + 2\alpha\Psi^{n+1/2} \\ \Psi^{n+1} = [ (1-\beta)\Psi^{n+1/2} - \alpha\Phi^{n+1} ] / (1+\beta) \end{cases} \tag{3.2-33}$$

とする。ここで  $\alpha \equiv F \Delta t / 2$ ,  $\beta \equiv \eta k^2 \Delta t / 4$  である。この時間積分が数値的に安定に解けるためには  $(\phi, \psi)^{n+1} = A(\phi, \psi)^n$  で表せる行列 A の固有値の絶対値が 1 以下であることがフォン・ノイマン<sup>29)</sup> の安定条件から要請される。この条件は容易に計算することができて  $\alpha, \beta$  が

$$\alpha \leq \sqrt{2} \quad \text{and} \quad (\alpha \leq 0.95 \text{ or } \alpha \geq 1.588 \text{ or } \beta \geq 0.08\alpha) \quad (3.2-34)$$

のとき安定となる。

この数値積分法を実際の簡約電磁流体方程式 ( 2.2 - 40~42 ) 式に適用すると第 1 ステップは

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{n+1/2} = U^n + ([U^n, \Phi^n] + [\Psi^n, J^n] + [P^n, f] + B_0 \frac{\partial J^n}{\partial \zeta}) \frac{\Delta t}{2}, \\ \Phi^{n+1/2} = \Delta^{-1} U^{n+1/2}, \\ \Psi^{n+1/2} = \{1 - \eta(\Delta t/4)\Delta\}^{-1} \{ \Psi^n + ([\Psi^n, \Phi^{n+1/2}] + B_0 \frac{\partial \Phi^n}{\partial \zeta} \\ \quad + \eta \Delta \Psi^n / 2 - E^w) \frac{\Delta t}{2} \}, \\ J^{n+1/2} = \Delta \Psi^{n+1/2}, \\ P^{n+1/2} = P^n + [P^n, \Phi^{n+1/2}] \frac{\Delta t}{2}, \end{array} \right. \quad (3.2-35)$$

となり、第 2 ステップも

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{n+1} = U^n + ([U^{n+1/2}, \Phi^{n+1/2}] + [J^{n+1/2}, \Psi^{n+1/2}] + [P^{n+1/2}, f] \\ \quad + B_0 \frac{\partial J^{n+1/2}}{\partial \zeta}) \Delta t, \\ \Phi^{n+1} = \Delta^{-1} U^{n+1}, \\ \Psi^{n+1} = \{1 - \eta(\Delta t/4)\Delta\}^{-1} \{ \Psi^{n+1/2} + ([\Psi^{n+1/2}, \Phi^{n+1}] + B_0 \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial \zeta} \\ \quad + \eta \Delta \Psi^{n+1/2} / 2 - E^w) \frac{\Delta t}{2} \}, \\ J^{n+1} = \Delta \Psi^{n+1}, \\ P^{n+1} = P^n + [P^{n+1/2}, \Phi^{n+1}] \Delta t, \end{array} \right. \quad (3.2-36)$$

となる。ここで  $\Delta$  は ( 3.2 - 7 ) 式で表されるラプラシアンを差分化して得られるブロック 3 重対角行列で、 $\Delta^{-1}, \{1 - (\eta \Delta t / 4) \Delta\}^{-1}$  は 3.1 節の ( 3.1 - 13 ) 式で述べたブロック LU 分



解をして前進消去，後退代入で解く。またこの方程式が安定に解ける $\Delta t$ は(3.2-34)式より，線形領域でおおよそ

$$\Delta t < 1.9F^{-1} \quad (3.2-37)$$

となる。

### 3.3 第3章の要約

本章では線形方程式の数値解法である行列法と非線形方程式の数値解法であるフーリエ展開法と時間積分法について論じた。線形方程式の解法では従来用いられていた時間発展法に代り行列法を，非対称行列固有値問題の数値解法を工夫して適用した。また非線形方程式の解法では不安定性を精度よく計算できるフーリエ展開法について示した。また時間キザミ幅を大きくとれる時間積分法を示した。

## 4. 内部破壊不安定性の解析

本章では  $m=1$  抵抗性モードおよび  $m=1$  抵抗性内部キック・モードを数値計算することによって内部破壊不安定性を解析する。4.1 節で  $m=1$  抵抗性モードの線形不安定性および非線形発展を解析する。特に現実のトカマク・プラズマに近い小さな  $\eta$  の値での非線形発展を詳細に調べる。4.2 節では  $m=1$  抵抗性内部キック・モードの線形不安定性および非線形発展を解析して、中性粒子入射加熱実験において観測される内部破壊不安定性の抑制現象についての説明を試みる。最後の 4.3 節で本章の要約をする。

### 4.1 抵抗性モードの非線形発展

第 1 章で述べたように内部破壊不安定性はプラズマ中に  $m/n=1/1$  のヘリカル・モードが発生し共鳴面 ( $q=1$ ) で電気抵抗による磁力線のつなぎ換えが起こる現象と解釈することができる。このヘリカル・モードとして最初に考えられるものが抵抗性モードである。これは円柱プラズマ簡約電磁流体方程式で計算できる  $m=1$  モードで Coppi<sup>30)</sup> 等によって線形解析解が計算されている。

数値計算に入る前に、この線形解析解の導出を簡単に述べる。まず円柱プラズマ簡約電磁流体方程式 (2.2-83~84) を解くために  $\eta$  の効果が著しい共鳴面付近の領域 (内部領域) とその外の領域 (外部領域) に分けて考えることにする。そして外部領域の解は  $\eta=0$  として

$$\xi = \begin{cases} \xi_0 & (r < r_s) \\ 0 & (r > r_s) \end{cases} \quad (4.1-1)$$

と求まる (付録 A)。ここで  $\xi$  は動径方向の変位で  $\xi = \frac{1}{r} \left( \frac{\phi}{r} \right)$  で表される。また  $r_s$  は共鳴面での半径である。次に内部領域での解を求めるためにこの領域がプラズマ半径に比較して狭いと仮定して方程式 (2.2-83~84) を  $r_s$  の近傍で展開する。こうして得られた方程式の解のうち (4.1-1) 式に接続するものとして

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (2/\pi)^{1/2} \xi_0 \int_x^\infty e^{-\zeta^2/2} d\zeta, \\ \gamma &= F^{2/3} \eta^{1/3} \end{aligned} \quad (4.1-2)$$

を得る (付録 A)。ここで  $x = (r - r_s)/r_\eta$ ,  $r_\eta = \eta^{1/3} F'(r_s)^{-1/3}$  で  $r_\eta$  は内部領域の解  $\phi$ ,  $U$ ,  $\psi$ ,  $J$  はそれぞれ,  $\alpha \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} F'(r_s) r_s$  として

$$\Phi(x) = \alpha \xi_0 r_\eta \int_x^\infty e^{-\zeta^2/2} d\zeta, \quad (4.1-3)$$

$$U(x) = \alpha \xi_0 r_\eta^{-1} x e^{-x^2/2}, \quad (4.1-4)$$

$$\Psi(x) = \alpha \xi_0 r_\eta (e^{-x^2/2} - x \int_x^\infty e^{-\xi^2/2} d\xi), \quad (4.1-5)$$

$$J(x) = \alpha \xi_0 r_\eta^{-1} e^{-x^2/2}, \quad (4.1-6)$$

となる。

次に線形不安定性の数値計算に移る。(2.2-13~16)式において $m/n = 1/1$ として3.1節で述べた行列法により線形成長率及び固有モードを計算する。このときの平衡は

$$q(r) = 0.9(1 + (r/1.5)^2) \quad (4.1-7)$$

で与えられ、共鳴面の半径は $r_s = 0.5$ となっている。動径メッシュは物理量の変化の激しい内部領域を正確に表現するためにこの領域に集積化させる。図4.1(a)に計算された成長率 $\gamma$ を $\eta$ の関数として示した。成長率 $\gamma$ は $\eta < 10^{-3}$ では $\eta$ の増加に伴って $\sim \eta^{1/3}$ で大きくなる。そして $\eta \sim 10^{-3}$ で最大となり以後 $\eta$ の増加とともに減少する。図4.1(a)における破線は(4.1-2)式より計算された解析的成長率である。 $\eta < 10^{-5}$ では数値計算の結果は解析的なそれと良い一致を示している。 $\eta > 10^{-5}$ では数値計算の結果は低めにでている。これは $\eta$ が大きくなるに従って内部領域は広がってくるが解析的取り扱いではこの内部領域が十分狭いとする近似を用いていることによる。図4.1(b)に数値計算した $\eta = 10^{-6}$ での固有モードを示した。 $\tilde{\psi}$ は $r < r_s$ で大きく変化し $r > r_s$ ではほとんど零である。また共鳴面での $\tilde{\psi}$ の値は(2.2-84)式の第1項が零なので第2項の $\eta$ による $\tilde{\psi}$ の拡散効果(磁力線のつなぎ換え)を示している。 $\tilde{\phi}$ は $r < r_s$ で $\tilde{\phi} \sim r$ であり、 $r \sim r_s$ で急激にその値を減少させ、 $r > r_s$ で零になっている。このことは $r$ 方向の変位が $(\frac{\phi}{r})/r$ と表せるので、この領域でプラズマが剛体のように一定の大きさに平衡移動して共鳴面付近で急激にその変位を減少させていることを表している。電流 $\tilde{j}$ は共鳴面で鋭い頂点をもつ分布をしており、その広がりにはプラズマの変位が減少する領域の大きさにほぼ等しい。つまりこの領域で(2.2-84)式の第2項の影響が大きくなって磁力線のつなぎ換えを起こしている。またこの領域のみで値をもつことから、このモードのトルクはこの領域に集中していることがわかる。これら固有モードの振る舞いは(4.1-3~6)式で示された解析解と良く一致している。

以下、非線形発展を計算する。数値計算法は3.2節で述べた。平衡は線形計算で使用したものと同一平衡を用いる。フーリエ・モードは $m/n = 0/0, 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6$ を使用して200動径メッシュ用いる。また初期摂動として行列法で計算した線形方程式の固有関数を用い初期振幅の大きさは磁気島幅が $10^{-2}$ になる様に与える。

まず $\eta = 10^{-5}$ での磁気軸及び全磁場エネルギーの時間発展を図4.2(b)(c)に示した。ここで初期状態の全磁場エネルギーを零としてある。また図4.2(b)(c)中の矢印の時刻でのヘリカル磁束を図4.2(a)に示す。このヘリカル磁束は共鳴面における磁場を差し引いた残りの磁場に対応する磁

束で磁気島の形成を表すのに便利な磁束である。図 4.2(a)において  $t=320$  では、 $r < r_s$  の領域のヘリカル磁束はこの領域全体が平行移動して共鳴面付近で小さな磁気島を形成している。そしてこの磁気島の成長とともに磁気軸が外側へ押しやられ ( $t=420$ )、次第に磁気島は  $r < r_s$  の領域の大半を占める ( $t=520$ )。最終的にヘリカル磁束は再び同心円状をした状態になり磁気軸は消滅する ( $t=620$ )。電子はヘリカル磁気面上を自由に移動できる。また初期状態ではヘリカル磁気面は同心円状で中心ほど電子温度が高くなっている。この電子温度が高い磁気面と電子温度が低い磁気面が  $q=1$  の共鳴面で結合することによって  $q < 1$  の領域の電子温度は低下し  $q > 1$  の領域の電子温度は上昇する。この現象が内部破壊不安定性として観測されていると思われる。図 4.2(b) からわかるように、このときの磁気軸の時間発展は線形の成長率を維持したまま磁気軸が消滅するまで成長している。また図 4.2(c) よりプラズマは磁気軸が消滅するまで磁場エネルギーを解放し続けている。つまり第 1 章で述べた kadomtsev モデルをよく再現している。

次に実際のトカマク・プラズマに近い小さな  $\eta$  の値での非線形発展を考察する。数値計算する前に準線形理論で解析的考察をする。(2.2-59) 式より線形発展による 0 次のフーリエ・モードの磁束関数の変化  $\delta\psi_0$  は

$$2\gamma\delta\psi_0 = -\frac{2}{r}(\Phi\psi)' + \eta\delta\psi_0, \quad (4.1-8)$$

となる。 $r$  は線形成長率で、 $'$  は  $r$  についての微分を表す。この式に線形解析解 (4.1-3~6) 式を代入して

$$\delta\psi_0(x) = -\frac{4}{\pi}\xi_0^2 F'(r_s)r_s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2}|x-y|} \frac{d}{dy} \left\{ \int_y^{\infty} e^{-\zeta^2/2} d\zeta (e^{-y^2/2} - y \int_y^{\infty} e^{-\zeta^2/2} d\zeta) \right\} \quad (4.1-9)$$

を得る。これを (2.2-58) 式の右辺に代入して

$$FJ - \frac{1}{r} \frac{d\delta J_0}{dr} \psi = (2/\pi)^{1/2} \xi_0^2 F'(r_s)r_s [xe^{-x^2/2} - \frac{\xi_0^2}{r\eta} f(x)] \quad (4.1-10)$$

を得る。ここで  $f(x)$  は物理パラメータに依存しない関数で

$$f(x) = (e^{-x^2/2} - x \int_x^{\infty} e^{-\zeta^2/2} d\zeta) \frac{d^3}{dx^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2}|x-y|} \frac{d}{dy} \left[ \int_y^{\infty} e^{-\zeta^2/2} d\zeta (e^{-y^2/2} - y \int_y^{\infty} e^{-\zeta^2/2} d\zeta) \right] \quad (4.1-11)$$

で与えられる。(4.1-10) 式において 0 次の電流分布の変化による左辺第 2 項の非線形項の影響が左辺第 1 項の線形項の効果と同程度になる  $\xi$  を評価できる。すなわち、この式において  $\xi_0^2 \sim r\eta^2$  として

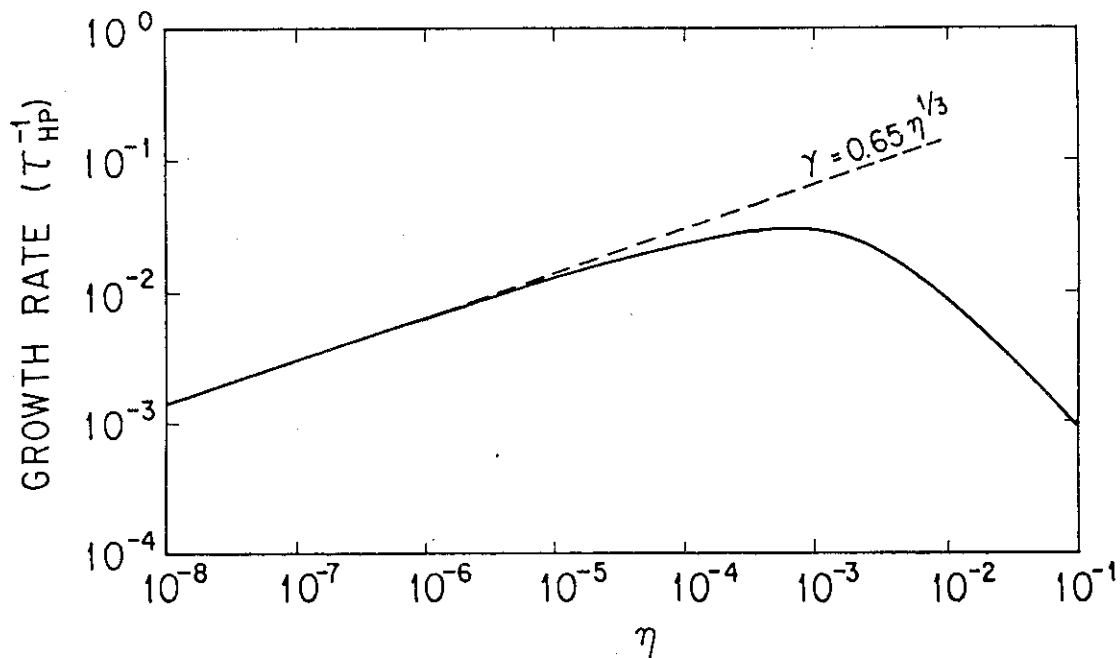
$$\xi_c \sim F^{-1/3} \eta^{1/3} \quad (4.1-12)$$

を得る。

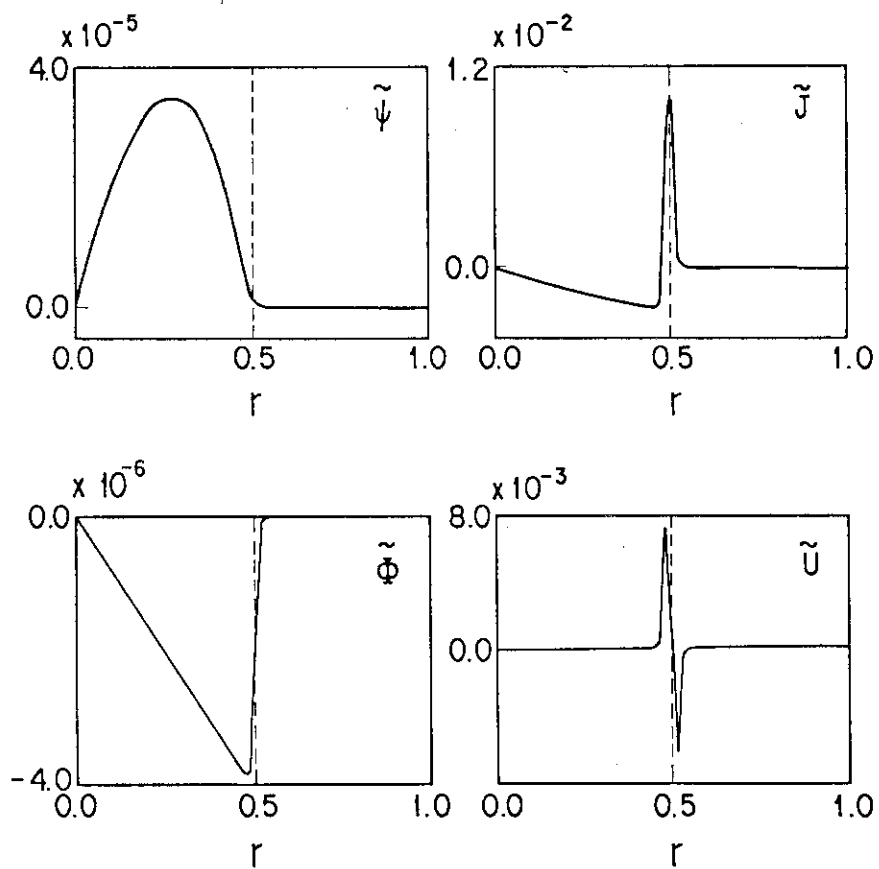
実際に数値計算したときの結果が図 4.3(a)に示されている。(図中の○印)

ここでフーリエ・モードは $m/n=0/0, 1/1$ だけ使用して(準線形),  $\xi_c$ は $\xi$ の成長率が初期の成長率の0.8倍になるときの $\xi$ で定義した。図中の破線は $\sim \eta^{1/3}$ の直線で数値計算結果と解析的評価(4.1-12)式は良い一致を示している。

次に高次フーリエ・モードを取り入れて数値計算する。図中の $\times, \triangle, \square, +, \nabla, \times$ はそれぞれ $m/n=0/0, 1/1 \dots N/N$ として $N=2, 3, 4, 5, 6, 7$ の場合の $\xi_c$ の値である。 $N$ の増加にともなって $\xi_c$ の値は大きくなっている。また図 4.3(b)に $\eta=10^{-6}$ での $\xi$ の時間発展を $N=1, 3, 7$ について示した。 $N$ が大きくなるに従って線形成長率のまま時間発展している領域が多くなっている。このことより $m=1$ 抵抗性モードの非線形発展では高次モードの効果が重要であり、また高次モードの数を十分多くとれば $m=1$ 抵抗性モードの非線形発展は線形成長率を維持したまま成長することがわかる。

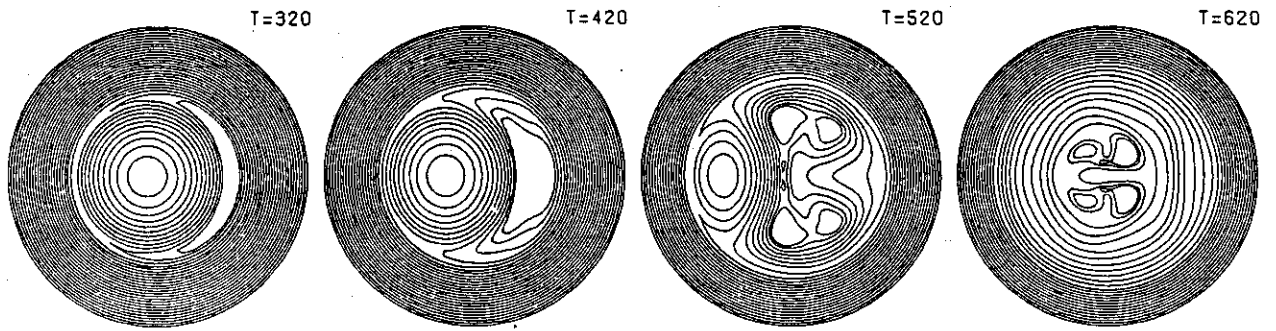


(a) 成長率の  $\eta$  依存性。破線は解析的な成長率。

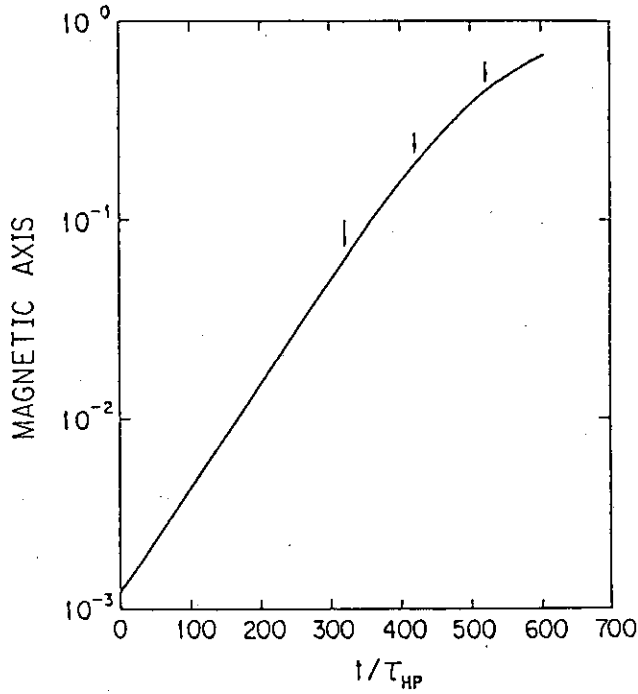


(b)  $\eta(r_s) = 10^{-6}$  での固有関数。振幅は磁気島幅が  $10^{-2}$  になるように選んである。

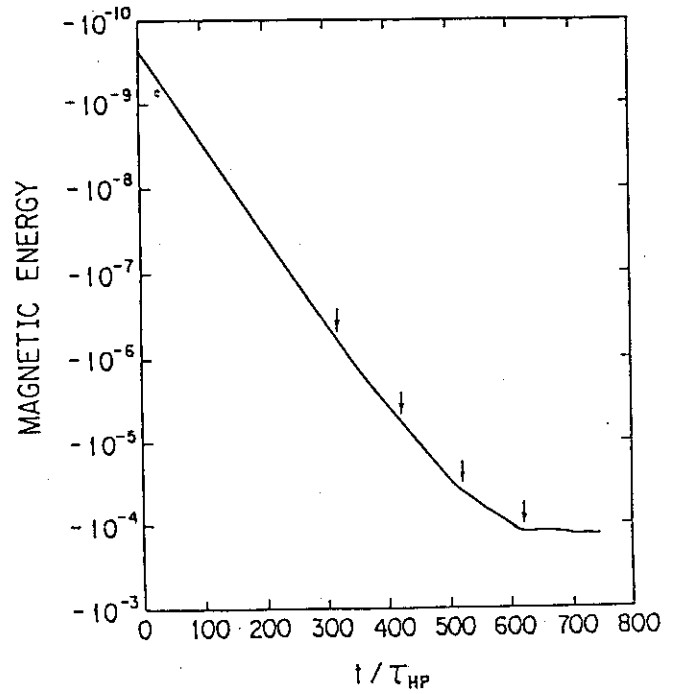
図 4.1  $m/n = 1/1$  抵抗性モードの線形不安定性の数値計算。



(a) ヘリカル磁束。



(b) 磁気軸。



(c) 磁場エネルギー。

図 4.2  $m/n = 1/1$  抵抗性モードの非線形発展の数値計算 ( $\eta(r_s) = 10^{-6}$ )。

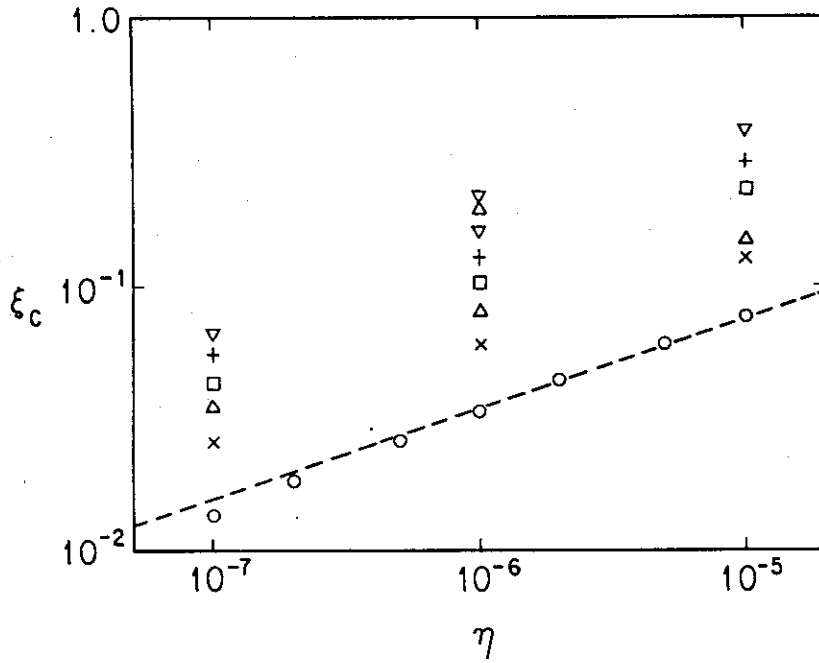


図 4.3(a)  $\xi_c$  の  $\eta$  依存性。

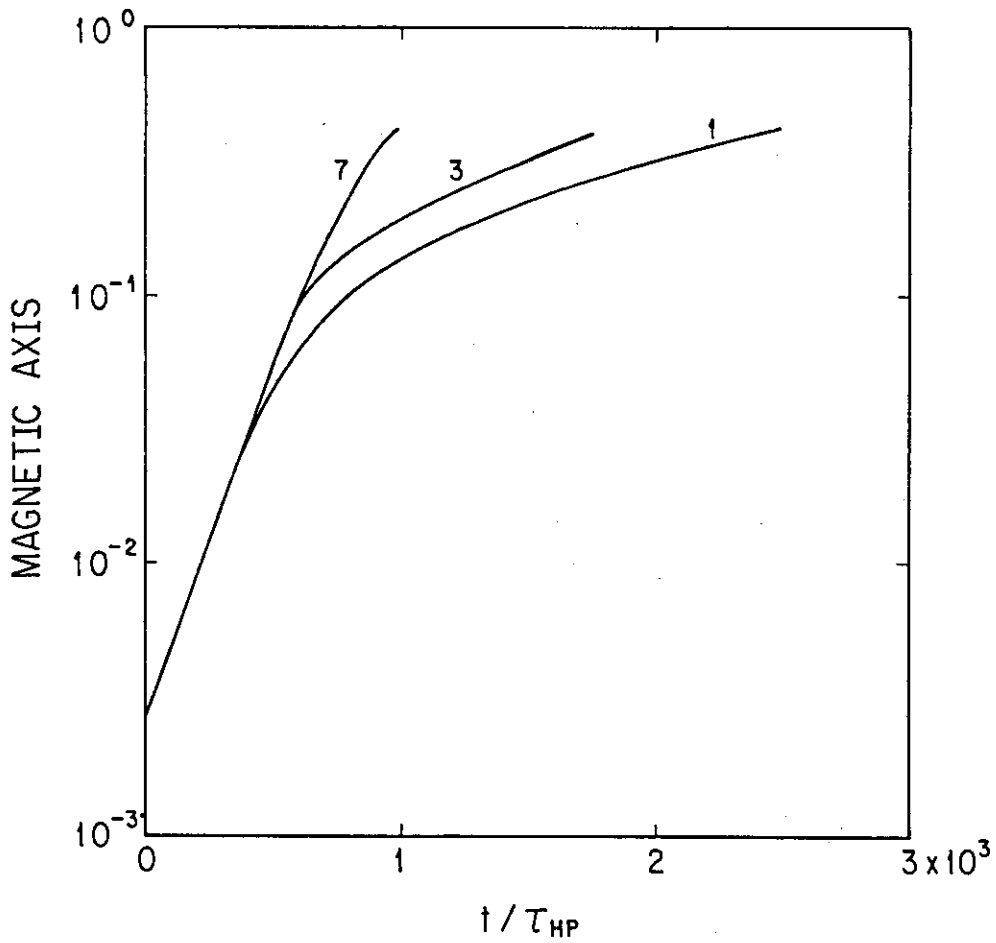


図 4.3(b)  $\eta(r_s) = 10^{-6}$  での  $m/n = 1/1$  抵抗性モードのフーリエ・モード数  $N = 1, 3, 7$  に対する磁気軸の時間発展。



4.2 抵抗性内部キック・モードの非線形発展<sup>31, 32, 33)</sup>

トカマク装置において中性粒子入射加熱をすると内部破壊不安定性が抑制されることが観測<sup>8)</sup>される。このときのトカマク・プラズマは圧力が高くなっており、内部キック・モードが不安定になっていることが予想される。<sup>34)</sup>ここでは、この内部キック・モードの効果を取り入れて数値計算することによって、この内部破壊抑制現象の説明を試みる。内部キック・モードは電磁流体方程式において逆アスペクト比の自乗の次数で表現される不安定性なので簡約電磁流体方程式では表現できない。そこで、この逆アスペクト比展開をしていない方程式系であるヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式(2.3-17~26)を基礎方程式系として用いる。そしてこの方程式で電気抵抗がある場合の内部キック・モードである抵抗性内部キック・モードの線形不安定性及び非線形発展を数値計算する。

まず、線形不安定性について解析する。(2.3-33~36)式を $m/n = 1/1$ の場合について3.1節で述べた行列法で抵抗性内部キック・モードの線形成長率および固有モードを計算する。図4.4に成長率の縦方向の波数 $k$ に対する依存性を $\eta = (r_s) = 0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}$ について示した。図4.5には対応する固有モード( $V_\theta = \frac{d\phi}{dr}$ )を示した。この計算における平衡は

$$\begin{cases} q(r) = 0.8(1+r^2), \\ p(r) = 0.57(1-r^2) \end{cases} \quad (4.2-1)$$

で与えた。

$k$ が小さくて抵抗性モード( $k=0, \eta \neq 0$ )の成長率 $\gamma_\eta$ が理想内部キック・モード( $k \neq 0, \eta=0$ )の成長率 $\gamma_i$ より十分大きな場合、抵抗性内部キック・モード( $k \neq 0, \eta \neq 0$ )は本質的に抵抗性モードであり、固有モードの共鳴面での分布は $\eta$ の値で決められている(図4.5(b))。 $k$ が大きくなって $\gamma_i$ が $\gamma_\eta$ と同程度になると抵抗性内部キック・モードの成長率は $k$ の増加とともに大きくなる。 $\gamma_i \gg \gamma_\eta$ になると抵抗性内部キック・モードは本質的に理想内部キック・モードになり固有モードの共鳴面での分布は $\eta$ に依らなくなる(図4.5(a))。

抵抗性内部キック・モードの成長率は解析的にも評価できる。<sup>29)</sup>2.3節の抵抗性モードの場合と同様に共鳴面付近の内部領域とその外の外部領域に分けて方程式を組み立てて両者の解をその境界で接続する。こうして抵抗性内部キック・モードの成長率 $\gamma$ はおおよそ

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_{i,a} & (\gamma_i \gg \gamma_\eta) \\ \gamma_{\eta,a} & (\gamma_i \ll \gamma_\eta) \end{cases} \quad (4.2-2)$$

と求まる(付録C)。ここで $\gamma_{i,a}$ は $\eta=0$ のときの成長率<sup>35)</sup>で

$$\gamma_{i,a} = \frac{\pi}{r_s^3 (B_\phi/r)} \int_0^{r_s} (-g) dr \quad (4.2-3)$$

$$g = \frac{2k^2 r^2}{\sigma} p + \frac{B_z^2}{r^3} \left(1 - \frac{1}{\sigma} + \frac{2k^2 r^2}{\sigma^2}\right) - \frac{4k^2 r^2 B_z}{\sigma^3 r} (B_\phi + kr B_z)$$

である(付録C)。また $r_{\eta,a}$ は2.3節で示した抵抗性モードの成長率である。図4.4の破線は(4.2-3)式を示したものである。kが小さい領域で数値計算の結果は解析的解と良く一致している。また図中の○印は(4.1-2)式より計算された抵抗性モードの解析的な成長率である。 $\eta$ が小さい場合は数値計算の結果は第2章のときと同じように解析解と良く一致している。

次に五つの典型的なパラメータについての非線形発展を計算する。このときのプラズマ・パラメータは表4.1にまとめられている。ケースBとDは理想内部キック・モードに、ケースEは抵抗性モードに、ケースAとCは抵抗性内部キック・モードに対応している。この計算において共鳴面付近で起こる鋭い表皮電流による数値的な困難を避けるために流体の運動方程式(2.3-17)式に粘性項 $\nu \nabla^2 U$ を加えた。粘性係数 $\nu$ は線形の成長率を変えない程度の大きさ $5 \times 10^{-6}$ にとる。またフーリエ・モード数は20、動径方向のメッシュ数は200メッシュとり共鳴面付近で実質400等間隔メッシュになるように(3.1-8)式を利用して集積化する。

図4.6に磁気軸の時間発展を示した。抵抗性モードの場合(ケースE)、磁気軸は線形成長率で指数関数的に成長し、磁力線のつなぎ換えがすべての領域にわたって完了するまで成長する。これは4.1節の簡約電磁流体方程式を用いて数値計算した場合と同じ結果を与えている。

理想内部キック・モードの場合(ケースB, D)は磁気軸の移動は指数関数的な成長の後、飽和してプラズマは近隣のヘリカルな形状をした平衡に移っている。この理想内部キック・モードの飽和レベルはRosenbluthによって解析的に

$$\xi_{sat} = \frac{13}{r_s (B_p/r)^2} \int_0^{r_s} (-g) dr = \frac{13}{\pi} (B_p/r)^2 \gamma_{i,a}, \quad (4.2-4)$$

と与えられている。<sup>35)</sup>ここで $B_p = \frac{d\psi}{dr}$ で $g$ ,  $\gamma_{i,a}$ は(4.2-3)式で定義されている。この飽和レベルはケースBとDについて矢印で示されている。数値計算の結果得られた飽和レベルは数値的拡散のために若干大きくなっている。

ケースBとDに $\eta$ を含めて抵抗性内部キック・モードを計算する(ケースA, C)。線形領域では磁気軸の移動は理想内部キック・モードの場合と比較して早められる。しかし非線形領域でこの成長率は鈍化する。縦方向の波数kが大きくなると、この鈍化の傾向は顕著になり大きなkでは成長が飽和する(ケースA)。

電流分布J, ヘリカル磁束 $\psi$ , 縦方向の磁場 $B_z$ の時間発展を図4.7(a)(b)(c)に示した。この図で点線は平衡状態の分布を示す。いずれのケースについてもモードの成長とともに磁気軸が移動して共鳴面付近に表皮電流が流れる。理想内部キック・モードの場合(図4.7(a)), 表皮電流は磁気軸の移動を制止するまで発展する。このとき表皮電流が存在する所で $B_z$ の著しい変化がみられる。抵抗性モードの場合(図4.7(b))は表皮電流は電気抵抗 $\eta$ のために消滅している。そして共鳴面に磁気島が形成されている。最後に抵抗性内部キック・モードの場合(図4.7(c))は表皮電流が消滅して磁気島が形成されている。興味深い点は $B_z$ が大きく変形されて $B_z$ の島構造分布が形成されていることである。平衡状態との比較より磁気島内部では $B_z$ の磁場エネルギーは解放されているが外側では増加していることがわかる。この磁気島外部でのエネルギーの増加がこのモードの成長を抑制し飽和させているものと思われる。飽和状態の理想内部キック・モードと抵抗性モードの状態を比較することは興味深い。理想内部キック・モードの飽和状態は共鳴面

付近の表皮電流に起因するが、一方抵抗性内部キンク・モードは  $B_z$  の変形に起因している。

この抵抗性内部キンク・モードの非線形発展の数値計算は理想内部キンク・モードが十分不安定になれば、この抵抗性モードの成長は内部破壊を起こすことなく飽和することを示しており、実験結果をうまく説明している。

### 4.3 第4章の要約

本章では  $m=1$  抵抗性モード及び  $m=1$  抵抗性内部キンク・モードを解析した。 $m=1$  抵抗性モードの線形不安定性の数値計算の結果は解析的な評価と一致した。 $m=1$  抵抗性モードの非線形発展の数値計算では、実際のトカマク・プラズマに近い小さな  $\eta$  の値についても、フーリエ・モード数を十分多く使用して計算すれば線形成長率を維持したまま成長することを示した。 $m=1$  抵抗性内部キンク・モードの線形不安定性の数値計算の結果も解析的な評価と一致した。また  $m=1$  抵抗性内部キンク・モードの非線形発展の数値計算では、理想内部キンク・モードが十分不安定になる領域では抵抗性内部キンク・モードの非線形発展は内部破壊から飽和へと移行することが示された。この移行は中性粒子入射加熱実験において観測される内部破壊抑制現象を説明しているものと思われる。

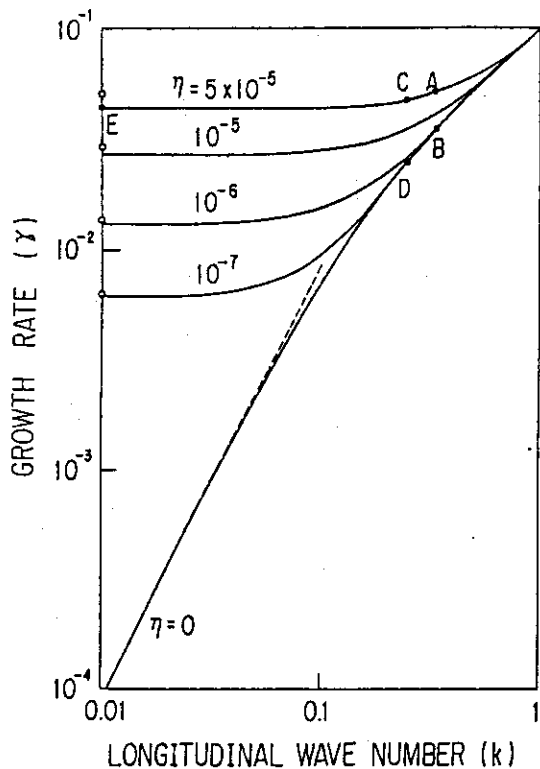


図 4.4 抵抗性内部キンク・モードの成長率の縦方向波数  $k$  依存性。破線は理想内部キンク・モードの解析的成長率。記号○は  $\eta = 5 \times 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-6}$  に対する抵抗性モードの解析的成長率。

cases	$\eta$	$k$	results
A	$5 \times 10^{-5}$	1/3	S
B	0	1/3	S
C	$5 \times 10^{-5}$	1/4	D
D	0	1/4	S
E	$5 \times 10^{-5}$	0	D

D:disruption, S:saturation

表 4.1

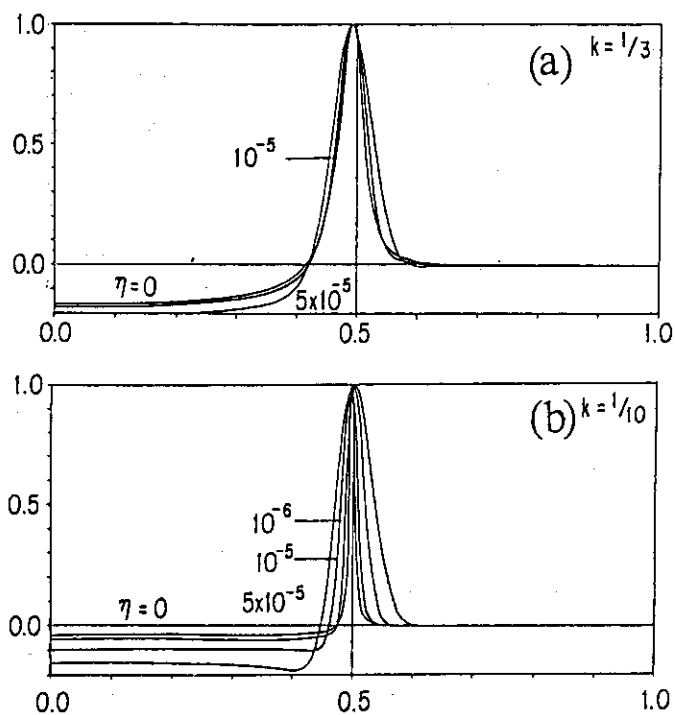


図 4.5  $\eta = 0, 10^{-6}, 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}$  に対する  $k = 1/3, 1/10$  での固有モード ( $\frac{d\phi}{dr}$ )。

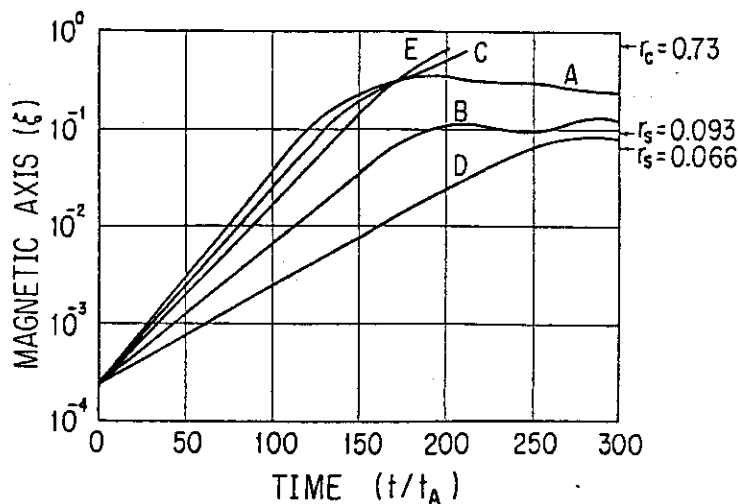


図 4.6 磁気軸の時間発展。矢印は理想内部キンク・モードの解析的飽和レベル。  $r_c$  は磁力線が完全につなぎ換えを起こすときの磁気軸の位置。計算のパラメータは表 4.1 にまとめられている。

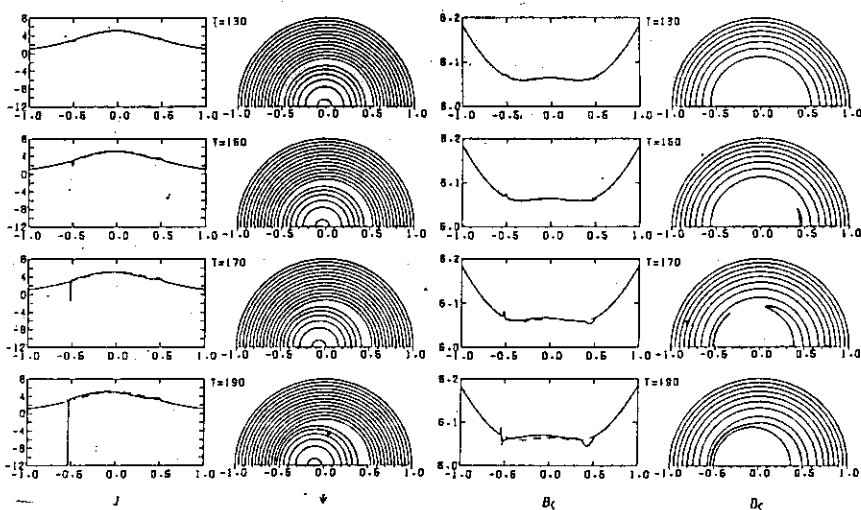


図 4.7(a) 理想内部キンク・モードの電流分布  $J$ , ヘリカル磁束  $\psi$ , 磁場  $B_z$  の時間発展 (ケース B:  $\eta = 0, k = 1/3$ )。

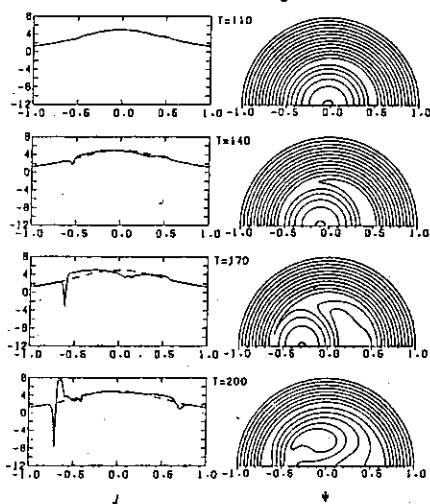


図 4.7(b) 抵抗性モードの電流分布  $J$ , ヘリカル磁束  $\psi$ , 磁場  $B_z$  の時間発展 (ケース E:  $\eta = 5 \times 10^{-5}, k = 0$ )。

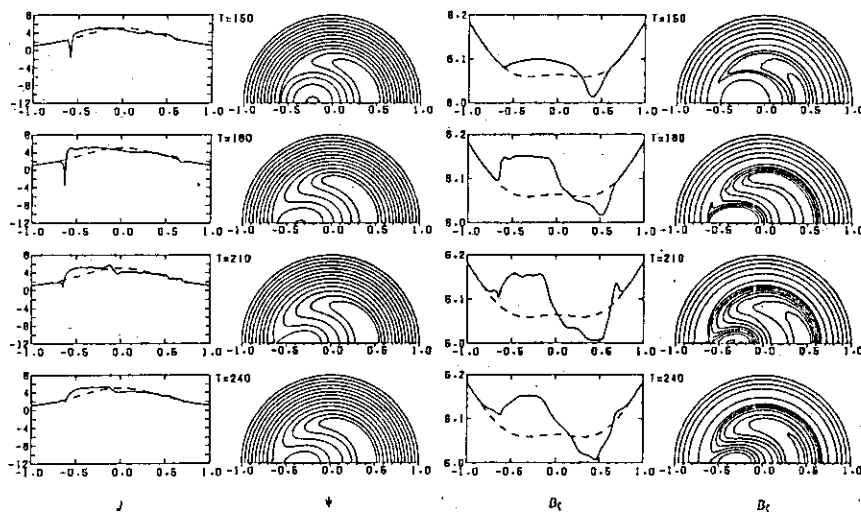


図 4.7(c) 抵抗性内部キンク・モードの電流分布  $J$ , ヘリカル磁束  $\psi$ , 磁場  $B_z$  の時間発展 (ケース A:  $\eta = 5 \times 10^{-5}, k = 1/3$ )。

## 5. 大破壊不安定性の解析

本章ではティアリング・モードを数値計算することによって大破壊不安定性を解析する。5.1節では円柱プラズマにおけるティアリング・モードの非線形相互作用を数値計算して大破壊不安定性を説明する。5.2節ではこのティアリング・モードの非線形相互作用に与えるプラズマ形状の影響を解析する。最後の5.3節で本章の要約をする。

### 5.1 円柱プラズマにおけるティアリング・モードの非線形発展

4.1節では(2.2-83~84)式を $m/n=1/1$ として行列法で解き、 $m=1$ 抵抗性モードを論じた。この $m=1$ 抵抗性モードと $m=2$ の場合に(2.2-83~84)式が表すモードはその性質が大きく異なる。それは $m=1$ の場合は(2.2-83~84)式において $\eta=0$ としたときの解が臨界安定(成長率が零で不安定の境目の状態)であるが、一方 $m \geq 2$ の場合は安定であることによる。この $m \geq 2$ の電気抵抗 $\eta$ によるモードをティアリング・モード<sup>36)</sup>とよび $m=1$ 抵抗性モードと区別している。

まずこのティアリング・モードの線形解析解の導出を簡単に述べる。(2.2-83~84)式において $m=1$ 抵抗性モードの場合と同様に $\eta$ の効果の著しい共鳴面付近の領域(内部領域)とその外の領域(外部領域)に分ける。そして外部領域と接続するような内部領域解を求める。つまり外部領域解は共鳴面近傍で

$$\begin{cases} \Psi = \Psi_s \Phi_s(x) + A_1 \Phi_n(x) & (r > r_s) \\ \Psi = \Psi_s \Phi_s(x) + A_2 \Phi_n(x) & (r < r_s) \end{cases} \quad (5.1-1)$$

$$\Phi_n(x) = x + \frac{1}{2} \kappa x^2 + \frac{1}{12} \kappa^2 x^3 + \dots$$

$$\Phi_s(x) = 1 + \kappa x \log|x| + \frac{1}{2} \kappa^2 x^2 \log|x| - \frac{3}{4} \kappa^2 x^2 + \dots$$

となる(付録D)。ここで $X = r - r_s$ 、 $K = mJ'(r_s)/F'(r_s)r_s$ で、 $'$ は $r$ についての微分を表す。また内部領域解はこの領域がプラズマ半径に比較して狭いと仮定して方程式(2.2-83~84)を $r_s$ の近傍 $x$ について展開する。そして外部解と接続するものとして

$$\begin{cases} \gamma = 0.5 F^{2/5} \eta^{3/5} \Delta^{4/5} \\ \Phi(x) = \alpha \Psi(0) \gamma r_n^{-1} z e^{-z^2/2} \end{cases} \quad (5.1-2)$$

を得る<sup>38)</sup>(付録D)。ここで $\Delta'$ は $(\frac{\Psi'}{\Psi})_{\pm} = \lim_{r \rightarrow r_s \pm 0} (\frac{\Psi'}{\Psi})$ として

$$\Delta' = r_s \left[ \left(\frac{\Psi'}{\Psi}\right)_+ - \left(\frac{\Psi'}{\Psi}\right)_- \right] = r_s \frac{A_1 - A_2}{\Psi_s} \quad (5.1-3)$$

で与えられ、また $r_\eta = (\eta r / |F'|^2)^{1/4}$ は内部領域の広がりを示している。(5.1-2)式より内部領域での $U(x)$ ,  $\Psi(x)$ ,  $J(x)$ は

$$\begin{cases} U(x) = -6\alpha\Psi(0)\gamma r_\eta^{-3} z e^{-z^2/2} \\ \Psi(x) = \Psi(0) \\ J(x) = 2\alpha^2\Psi(0)\gamma^2 r_\eta^{-4} e^{-z^2/2} \end{cases} \quad (5.1-4)$$

で与えられる。ここで $\alpha = 0.47 |F'(r_s)|^{-1}$ である。

また外部領域での磁場エネルギーの変化を $\delta W$ とすると

$$\delta W = \Psi^2(0)\Delta' \quad (5.1-5)$$

と表すことができる<sup>37)</sup>(付録D)。内部領域での磁場エネルギーの解放は少ないので(5.1-5)式より $\Delta' < 0$ でモードは不安定、 $\Delta' > 0$ で安定であることがわかる。また数値計算上は(5.1-3)式より $\Delta'$ を求めるより、(5.1-5)式の大域的量 $\delta W$ から $\Delta'$ を求める方が精度よく計算できる。

次に数値計算に移ろう。基礎方程式は(2.2-83~88)式で、数値計算法は3.1節で節明した行列法を用いる。また平衡は

$$q = 1.378 [1 + (r/0.6)^8]^{1/4} \quad (5.1-6)$$

で与える。4.1節の $m=1$ の計算と同様にメッシュ数及びその集積化はモードを表現するのに十分な数をとる。図5.1(a)に $m/n=2/1$ ティアリング・モードの成長率 $\gamma$ を $\eta$ の関数として示した。また図5.1(b)には $\eta=10^{-5}$ での固有モード $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{J}$ ,  $\tilde{U}$ を示した。成長率 $\gamma$ は $\eta \leq 10^{-2}$ では $\eta$ の増加とともに $\gamma \sim \eta^{3/5}$ で大きくなっている。また固有モード $\tilde{\Psi}$ は共鳴面( $r_s=0.7$ , 図中の破線)で変曲点になっており中心付近で $\sim r^2$ である。 $\tilde{\Phi}$ は $m=1$ 抵抗性モードと異なり共鳴面付近に極在している。これはプラズマの変位が $m=1$ 抵抗性モードの場合と異なり共鳴面付近でのみ起こっていることを示している。また $\tilde{J}$ と $\tilde{U}$ は $m=1$ 抵抗性モードの場合とほぼ同様の分布をしている。つまり共鳴面付近で磁力線のつなぎ換えが起こり、この領域にトルクが集中していることを示している。

図5.1(a)における破線は(5.1-2)式の解析的な成長率である。 $\Delta'$ は(5.1-5)式より評価した。4.1節と同様に $\eta$ の小さい場合の成長率は解析解と良く一致している。 $\eta$ が比較的大きい場合、数値計算の結果は解析解よりも低めに出ている。これは4.1節の $m=1$ の計算のときと同じ理由で解析解では内部領域が狭いと近似していることによる。固有モードは(5.1-2, 4)式で示された解析解と良く一致している。またこのときの内部領域の広がり $r_\eta \sim 10^{-2}$ である。

次に  $m=2$  ティアリング・モードの非線形発展の数値計算を方程式 (2.2-58~63) を 3.2 節で述べた数値計算法で解くことにより実行する。平衡は線形計算で使ったものを用いる。フーリエ・モードは  $m/n = 0/0, 2/1, 4/2, 6/3, 8/4, 10/5, 12/6$  を使用して動径方向に 200 メッシュ用いる。

図 5.2(c)(d) に運動エネルギーと磁場エネルギーの時間発展を示す。運動エネルギーは  $t \sim 200$  まで指数関数的に成長し、以後成長率は鈍化するものの成長を続け  $t \sim 1300$  で最大値をとり、その後若干減少し  $E_k \sim 1.3 \times 10^{-7}$  で飽和している。一方磁場エネルギーは  $t \sim 200$  まではやはり指数関数的に減少し、以後ゆるやかな減少をして  $E_M \sim 10^{-2}$  まで磁場エネルギーを解放して飽和する。以上のことより、このティアリング・モードは  $t \sim 200$  までは線形理論で成長し以後非線形領域に入って飽和していると考えられることができる。図 5.2(a)(b) にヘリカル磁束と磁気島幅の時間発展を示す。磁力線は  $r = r_s$  の共鳴面でつなぎ換えを起こし磁気島を形成していく。そしてこの磁気島の成長は非線形領域でも続き、およそ 0.36 の大きさで飽和している。このとき、この磁気島幅の成長は非線形領域では時間に比例して成長していることが図 5.2(b) よりわかる。

$m=1$  抵抗性モードの場合と同様にこのティアリング・モードの非線形発展に対するフーリエモード数  $N$  ( $m/n = 0/0, 2/1, \dots, 2N/N$ ) の影響を考察する。図 5.3 に  $N=2, 4, 6$  の場合の磁気島幅の時間発展を示した。  $N=2$  の場合は  $N=6$  に比較して飽和した磁気島幅が小さいために計算されているものの、  $N=4$  と  $N=6$  ではほとんど変化はみられない。このことより  $N=6$  程度でフーリエ・モード数は十分であるといえる。

ティアリング・モードの非線形発展に対する解析的な考察は Rutherford<sup>15)</sup> や White<sup>38)</sup> 等によってなされている。それらによるとティアリング・モードは磁気島幅が内部領域  $r_\eta$  を越えて大きくなると非線形領域に入りそれ以後飽和するまで

$$\frac{dw}{dt} = \eta \Delta \quad (5.1-7)$$

に従って成長する (付録 E, この式に従って成長する領域を Rutherford 領域とよぶ)。上述の計算では内部領域の大きさは  $r_\eta \sim 10^{-2}$  であり、  $t=200$  での磁気島幅にはほぼ等しい。またそれ以降の磁気島幅の成長は時間に比例している (図 5.2(d))。図 5.4 に  $\frac{dw}{dt}$  の  $\eta$  依存性 ( $w > r_\eta$  での) の数値計算結果を示す。 $\frac{dw}{dt}$  はほぼ  $\eta$  に比例している。これらのことより (5.1-7) 式は数値計算結果と良く一致しているといえる。

以上のことより  $m/n=2/1$  ティアリング・モードの非線形発展では磁気島は White<sup>12)</sup> 等の計算のようにプラズマ断面全体を覆うほど大きくならず、また時間スケールも (5.1-7) 式からわかるように電気抵抗による拡散時間程度であり、このモードのみでは大破壊不安定性を説明できないことがわかる。

次に  $m/n=2/1$  モードと  $m/n=3/2$  モードの非線形相互作用について解析する。大破壊不安定性の実験では  $m/n=2/1$  モードの信号以外に  $m/n=3/2$  モードの信号が観測されている。<sup>37, 38)</sup> そこでここでは  $m/n=2/1$  モードと  $m/n=3/2$  モードの非線形相互作用を考察することにする。まずこのモードの線形不安定性を  $q$  分布を変化させて考察する。この  $q$  分布の変化は実際のトカマク・プラズマ中の電流分布の変化に近くなるように



$$q = 1.378 [1 + (r/0.6)^{2\lambda}]^{1/\lambda} \quad (5.1-8)$$

で与えて $\lambda$ を変化させる。この関数型では $q$ 分布は $\lambda$ が大きい程、中心付近で平坦な $q$ 分布を与える。このときの電流分布も同様に中心付近で平坦な分布になる。図 5.5(a)に $\lambda$ を変化させたときの $m/n=2/1$ モードと $m/n=3/2$ モードの線形成長率を示す。 $\lambda \geq 1.2$ で $m/n=3/2$ モードが不安定になり $\lambda$ の増加とともに $m/n=2/1$ ,  $m/n=3/2$ 両モードともに成長率は大きくなっていく。

次に非線形相互作用を考えない場合の $m/n=2/1$ モードと $m/n=3/2$ モードの飽和磁気島幅の $\lambda$ 依存性を図 5.5(b)に与える。これより $\lambda$ の増加とともに両モードの飽和磁気島幅は増加し、特に $m/n=3/2$ モードの飽和磁気島幅は $\lambda$ の増加とともに急激に増加することがわかる。また $\lambda \geq 2.3$ で両磁気島幅の重なりが起きている。

$m/n=2/1$ モードと $m/n=3/2$ モードの非線形結合発展を考えることにする。 $m/n=2/1$ モードと $m/n=3/2$ モードは非線形的にモード結合することによって $m/n=5/3$ ,  $1/1$ モードを励起する。そして $m/n=2/1$ モード自身は $m/n=3/2$ モードと励起された $m/n=5/3$ ,  $1/1$ モードと非線形結合する。同様に $m/n=3/2$ モードも $m/n=2/1$ モードと励起された $m/n=5/3$ ,  $1/1$ モードと非線形結合発展する。以下この非線形結合発展の数値計算を実行する。平衡の $q$ 分布は(5.1-8)式において $\lambda=4$ としたものを使う。またフーリエ・モードは $m/n=0/0$ ,  $2/1$ ,  $3/2$ ,  $4/2$ ,  $1/1$ ,  $5/3$ ,  $6/3$ ,  $6/4$ ,  $8/4$ ,  $1/0$ ,  $7/4$ ,  $4/3$ ,  $8/5$ ,  $10/5$ ,  $9/5$ ,  $3/1$ ,  $10/6$ ,  $2/2$ ,  $12/6$ ,  $11/6$ ,  $5/2$ ,  $9/6$ ,  $12/7$ ,  $0/1$ ,  $14/7$ ,  $13/7$ ,  $7/3$ ,  $11/7$ ,  $7/5$ を使用して動径方向に200メッシュ用いる。

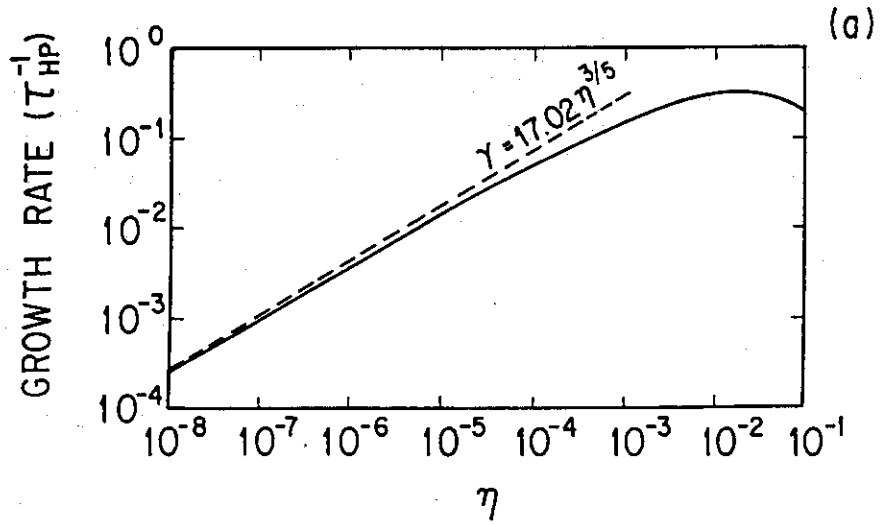
図 5.6(a)に磁気エネルギーの時間発展を示す。ここで $t_{\text{tot}}$ は全磁場エネルギーの変化を示し、 $m/n=0/0$ ,  $t_{\text{tot}}$ は全磁場エネルギーの変化を示し、 $m/n=0/0$ ,  $t_{\text{tot}}$ では値が負であるのでその絶対値を示した。この図より $m/n=2/1$ モードは初期の段階からRutherford領域に入っている。また $m/n=3/2$ モードは指数関数的に成長したのちRutherford領域に入り $t \geq 90$ で成長率が大きく増加している。またこのときの $m/n=1/1$ と $5/3$ モードも同様に成長率が増加している。つまり $m/n=2/1$ と $3/2$ モードが $m/n=1/1$ と $5/3$ モードを仲介して非線形相互作用していると考えられる。図 5.6(b)にこのときの磁場エネルギーから計算した $m/n=3/2$ モードの成長率を示す。 $t \geq 90$ で成長率が大きく変化している。図 5.6(c)に磁気島幅の時間発展を示す。 $t \sim 90$ で $m/n=2/1$ と $3/2$ モードの磁気島幅が重なり、それ以降 $m/n=3/2$ モードの磁気島幅が急激に大きくなっている。図 5.6(d)に(2.2-64)式より計算したループ電圧の時間変化を示す(初期値を零とした)。 $t \sim 90$ 以降急激に低下している。図 5.6(e)に $t=140$ での $m/n=2/1$ ,  $3/2$ ,  $5/3$ ,  $7/4$ ,  $8/5$ ,  $9/5$ ,  $3/1$ ,  $11/6$ ,  $5/2$ ,  $12/7$ ,  $13/7$ ,  $7/3$ ピッチのヘリカル磁束を示す。種々のピッチ磁気島が成長しており $m/n=2/1$ と $3/2$ の磁気島が重なっていることがわかる。図 5.6(f)に磁力線の軌道を計算したときの $\zeta=0$ 断面を通る位置を示してある。 $t=0$ では $m/n=2/1$ ,  $3/2$ の小さな磁気島がみられるものの、その他の領域ではきれいな磁気面が構成されている。 $t=100$ で $m/n=2/1$ と $3/2$ の磁気島が重なり、この領域で磁気面が壊されている。以後この磁気面が壊された領域が広がり $t=140$ ではほぼ全領域の磁気面が破壊される。

図 5.7 に $\eta$ を変化させて $m/n=3/2$ モードの成長率が $m/n=2/1$ との相互作用で増加すると

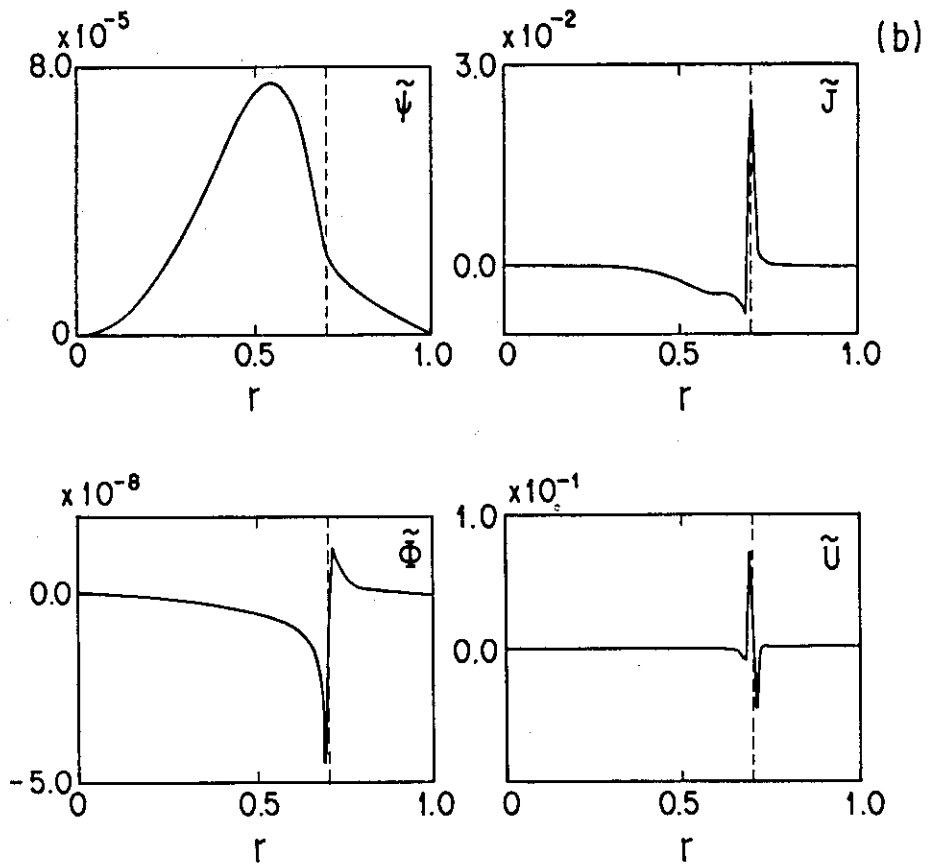
きの時間スケール $\Gamma$  (図 5.6(b)における最初のピーク幅)と $m/n = 2/1$ ティアリング・モードの線形成長率の時間スケール $\tau_{2/1}$ との関係を示した。 $\Gamma$ は $\tau_{2/1}$ にはほぼ比例しており、この非線形相互作用の時間スケールは実験結果を説明するのに十分な速さをもつことがわかる。

この数値計算より次のことが結論される。 $m/n = 2/1$ モードと $m/n = 3/2$ モードの非線形相互作用が起こるとループ電圧が急激に減少する。そして種々のピッチの磁気島が生じる結果、磁気面が破壊される。この磁気面の破壊は磁気面の存在によって保たれている電子温度を減少させるはずである。またこの温度の減少はプラズマ圧力を下げプラズマのインダクタンスを低下させる。そしてこのインダクタンスの減少により垂直磁場とプラズマの平衡が破れてプラズマはトラス内側へ移動し壁と衝突してプラズマ電流を下げると思われる。またこの非線形相互作用の時間スケールは十分早い。以上より $m/n = 2/1$ モードと $m/n = 3/2$ モードの非線形相互作用が大破壊不安定性を引き起こすと考えることができる。

次に中心付近で尖った電流分布 ( $q$  分布) で同様の計算をする。つまり (5.1-8) 式で $\lambda = 1.5$ とした $q$ 分布計算を実行する。図 5.7(a)(b)にそれぞれ磁気島幅の時間発展およびループ電圧の時間発展を示す。 $\lambda = 4$ の場合にみられた磁気島幅の急激な拡大はみられない。またループ電圧もほとんど変化していない。このことより $\lambda = 1.5$ のような中心付近で尖った電流分布では大破壊不安定性を起こさないことがわかる。

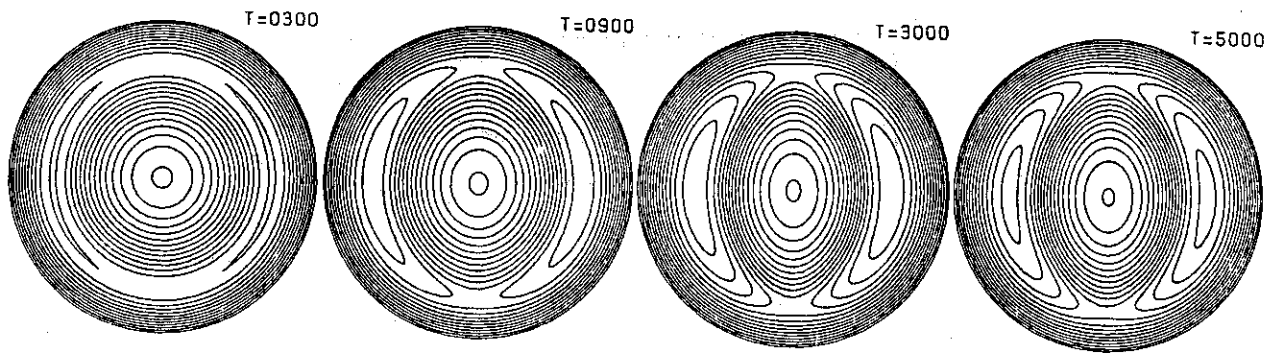


(a) 成長率の  $\eta$  依存性。破線は解析的成長率。

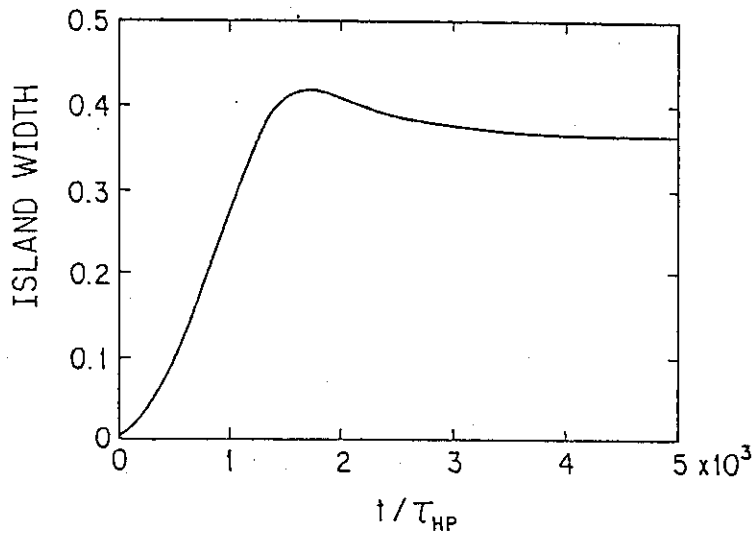


(b)  $\eta(r_s) = 10^{-5}$ での固有関数。振幅は磁気島幅が  $10^{-2}$ の大きさに選んである。

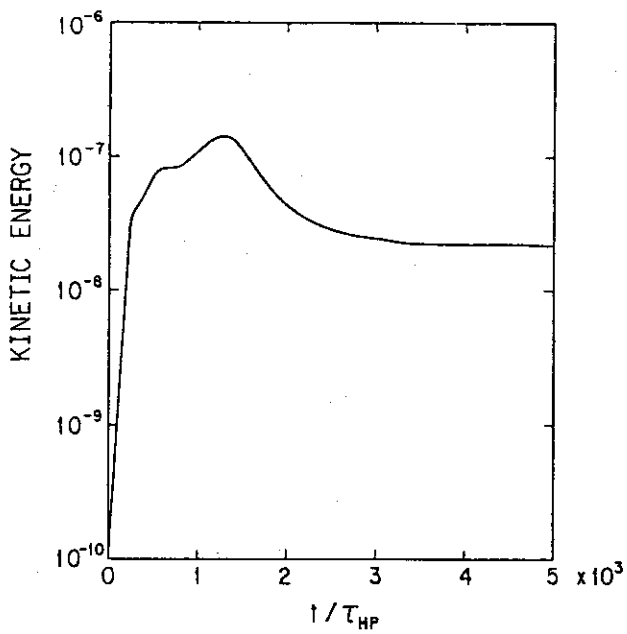
図 5.1  $m/n = 2/1$ ティアリング・モードの線形不安定性の数値計算。



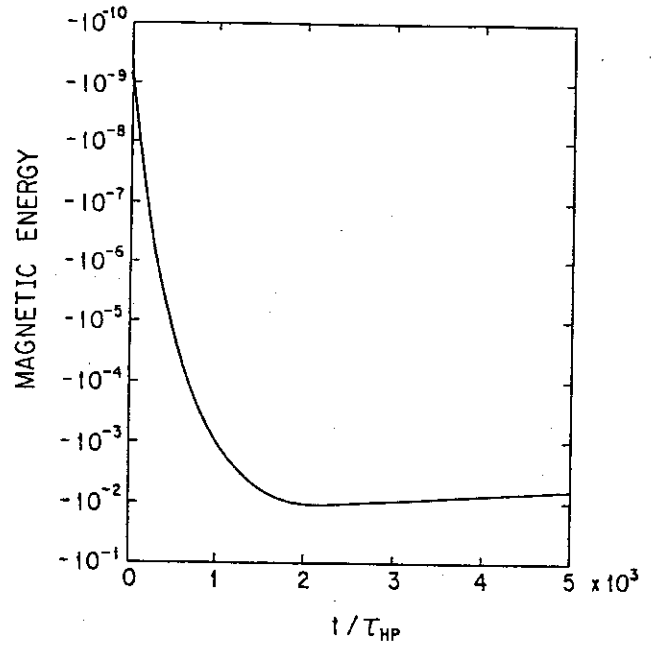
(a) ヘリカル磁束。



(b) 磁気島幅。



(c) 運動エネルギー。



(d) 磁場エネルギー。

図 5.2  $m/n = 2/1$  ティアリング・モードの非線形発展の数値計算 ( $\eta(r_s) = 10^{-5}$ )。

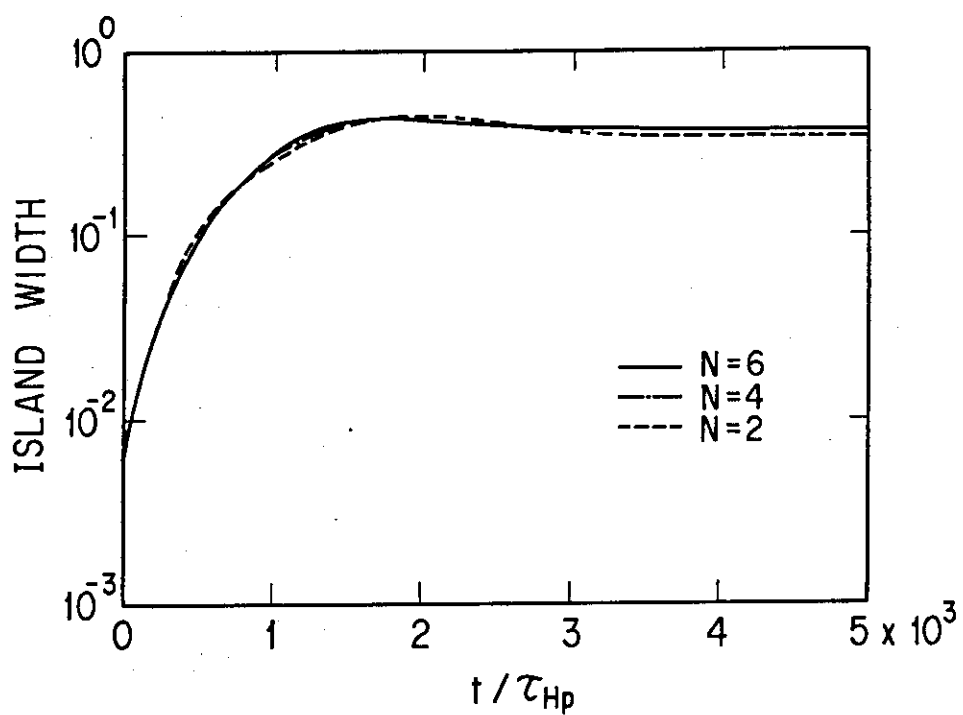


図 5.3  $m/n = 2/1$  ティアリング・モードのフーリエ・モード数  $N = 2, 4, 6$  における磁気島幅の時間発展。

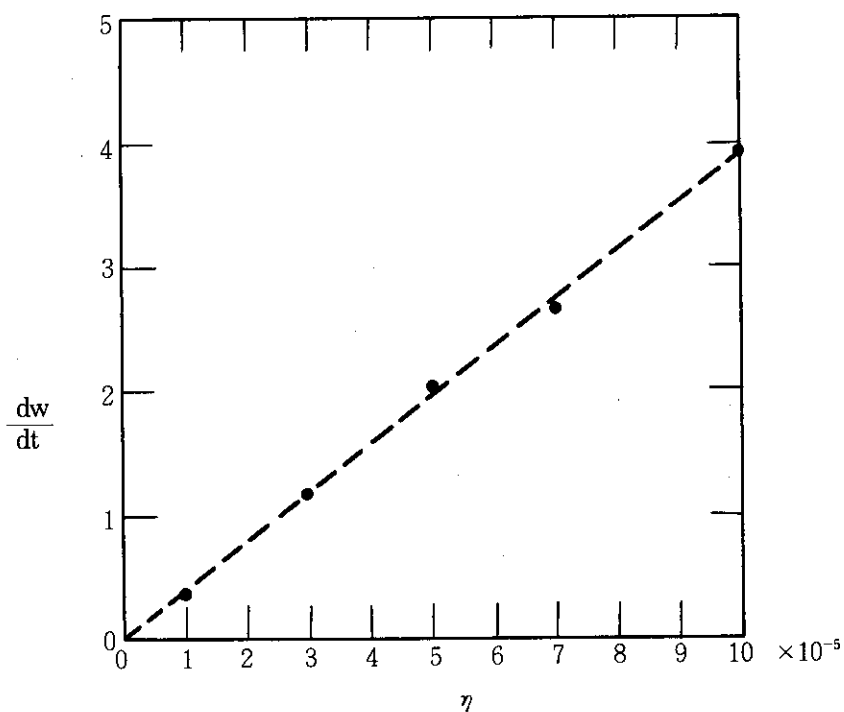


図 5.4  $m/n = 2/1$  ティアリング・モードの非線形領域における磁気島幅の時間変化 ( $\frac{dw}{dt}$ ) の  $\eta$  依存性。

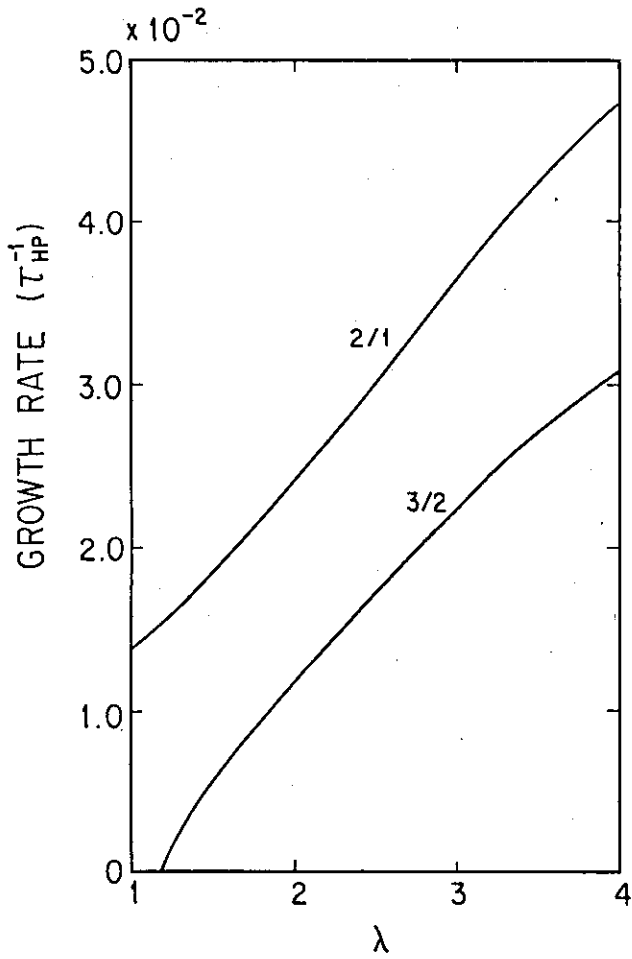


図 5.5(a) 平衡を  $q = 1.378 [1 + (r/0.6)^{2\lambda}]^{1/2}$  で与えて  $\lambda$  を変化させたときの  $m/n = 2/1$  と  $m/n = 3/2$  ティアリング・モードの成長率。

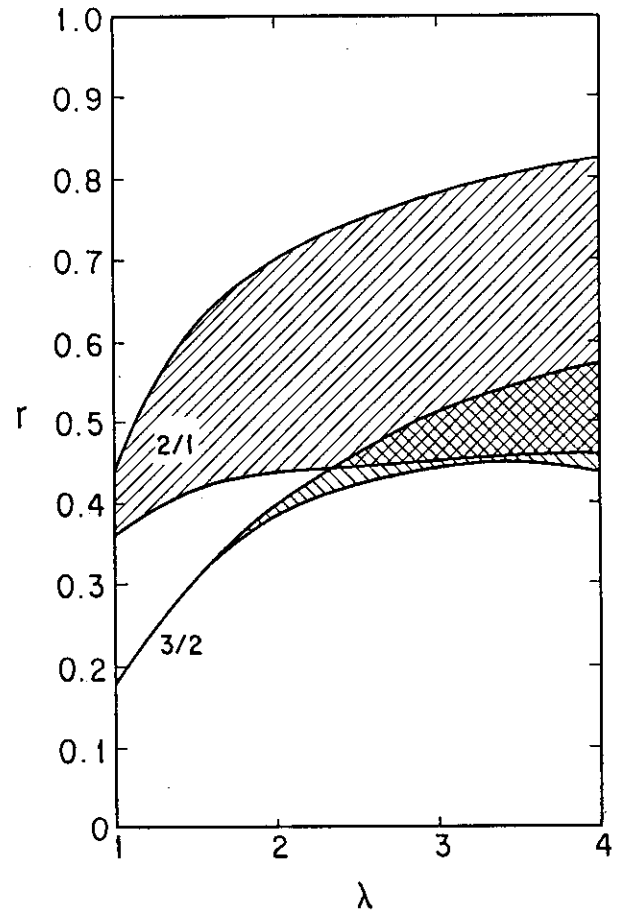
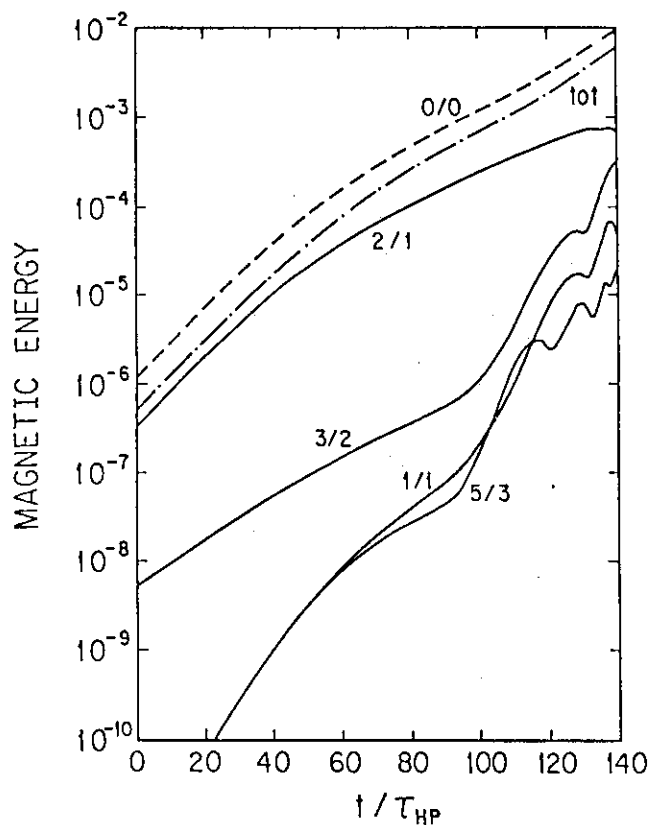
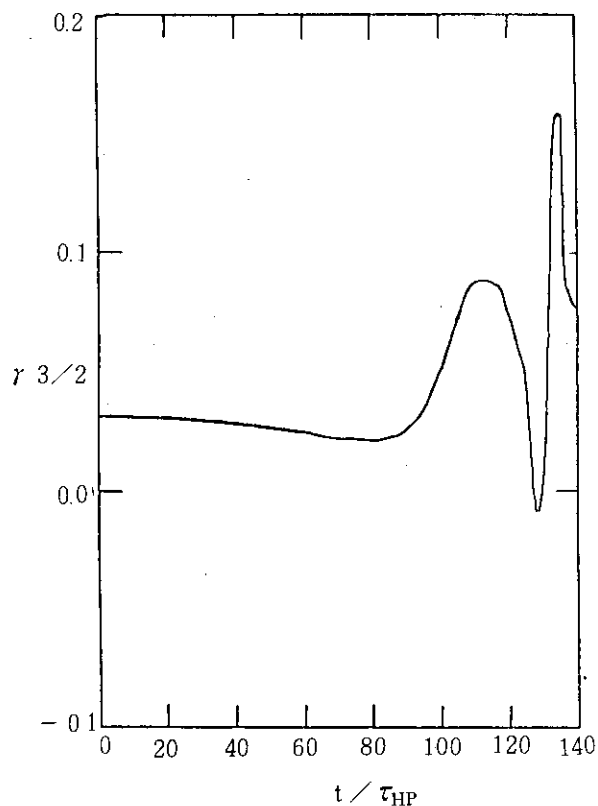


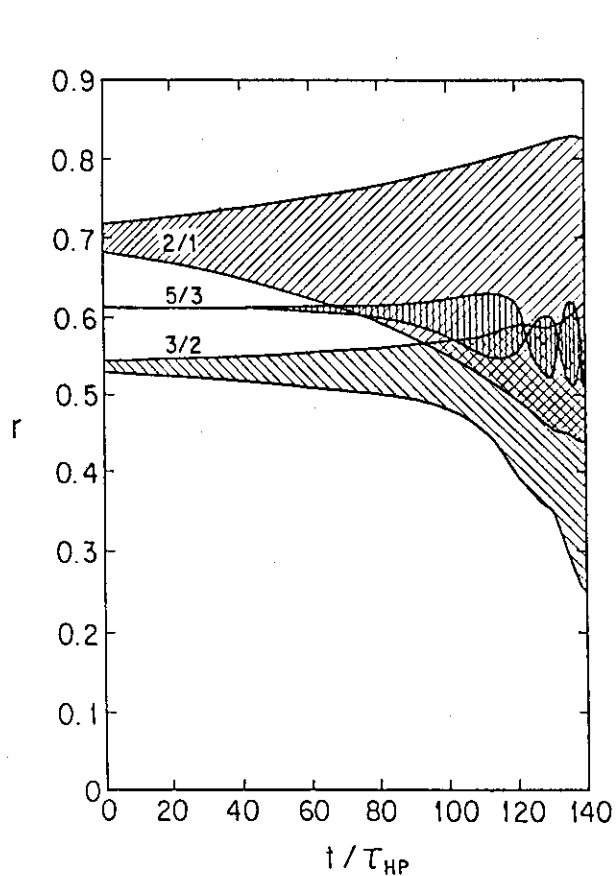
図 5.5(b)  $\lambda$  を変化させたときの飽和磁気島幅。



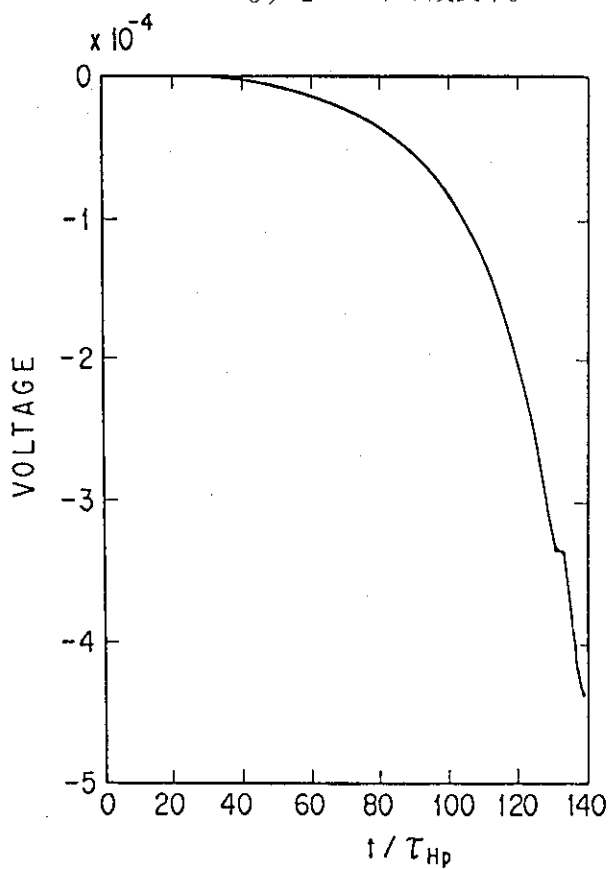
(a) 磁場エネルギーの時間発展。



(b) 磁気エネルギーより計算した  $m/n = 3/2$  モードの成長率。

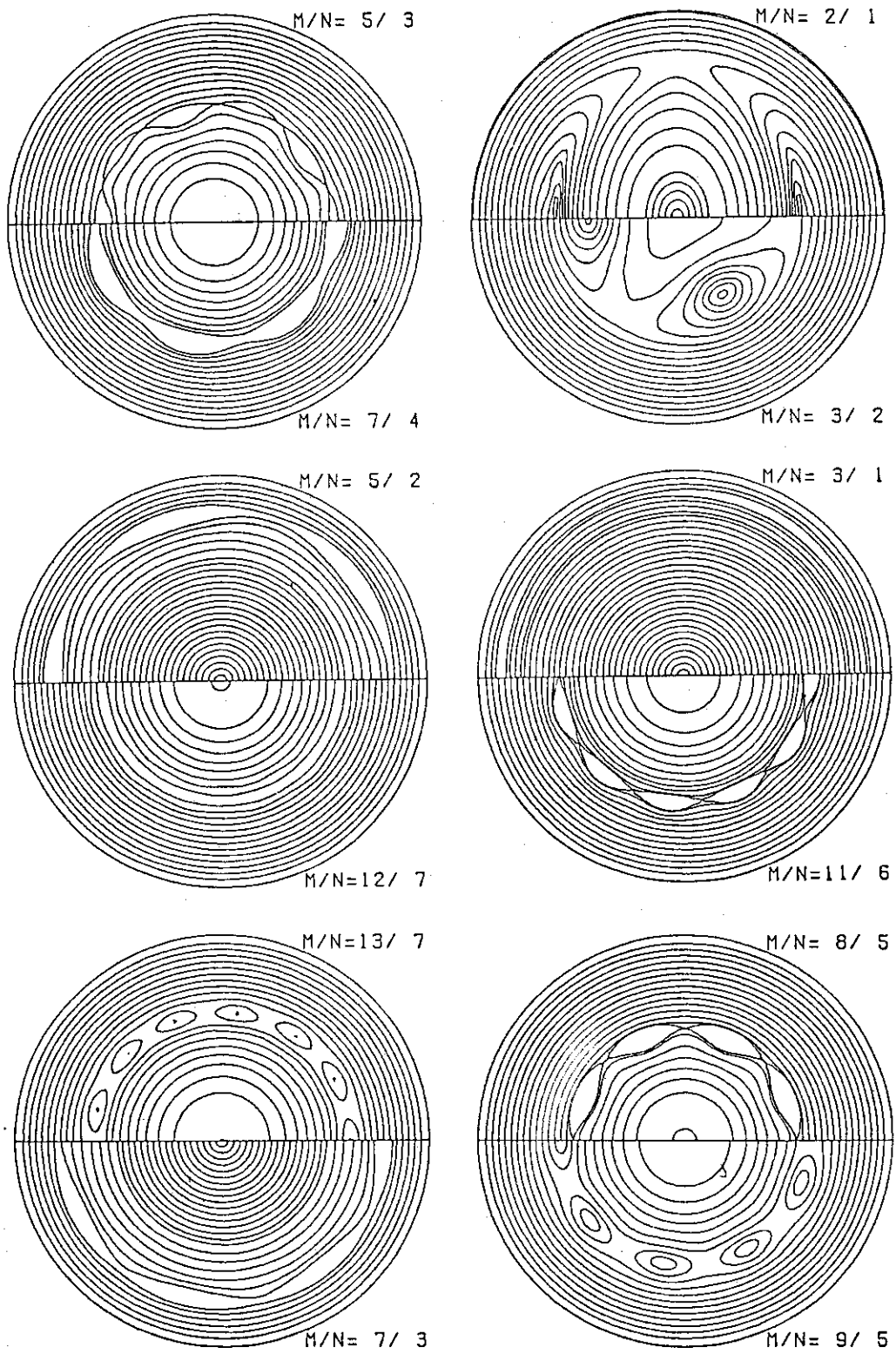


(c) 磁気島の時間発展。



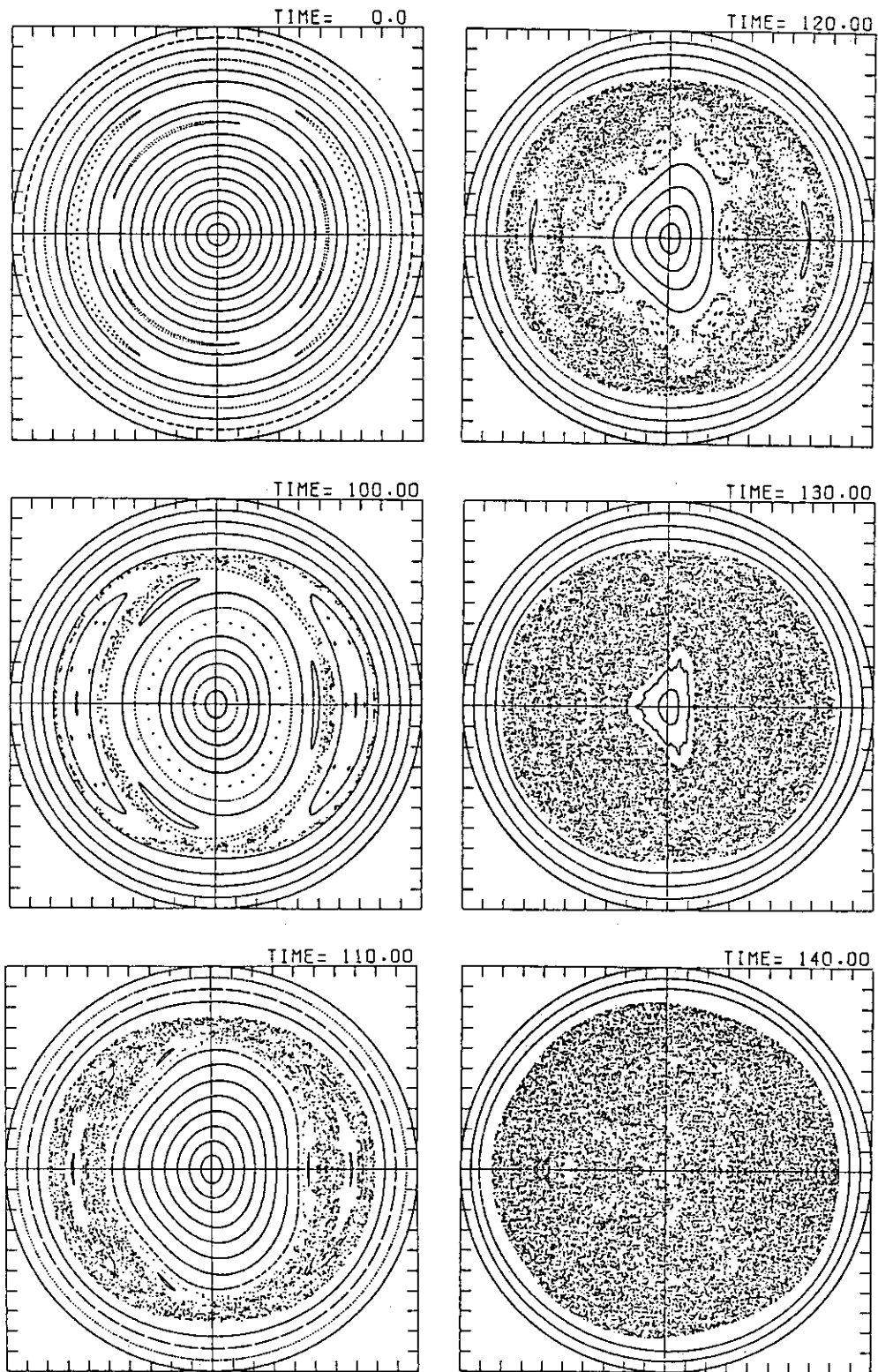
(d) ループ電圧の時間発展 (初期値を零としてある)。

図 5.6 ティアリング・モードの非線形相互作用の数値計算。



(e)  $t = 140$ でのヘリカル磁束。





(f) 磁力線の軌跡の時間変化。

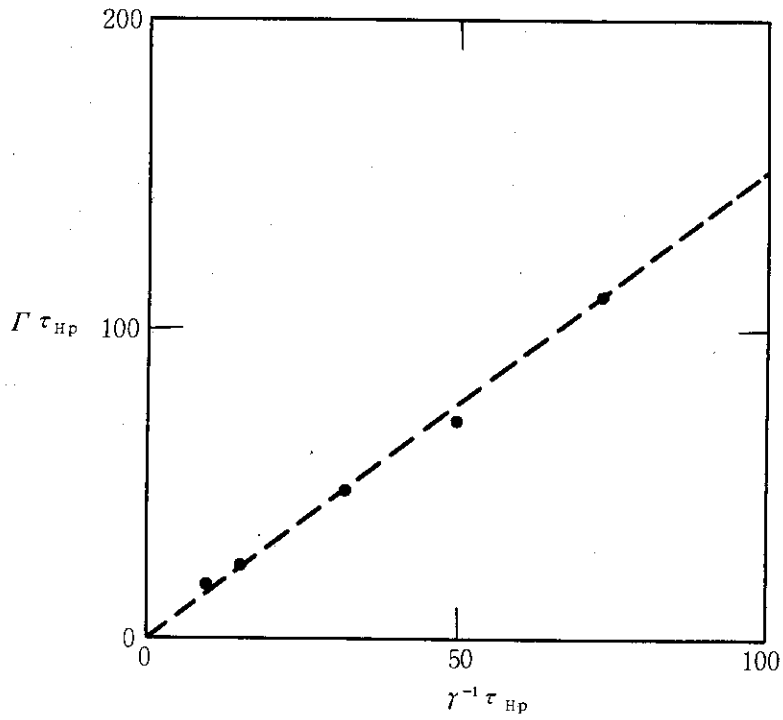


図 5.7  $m/n = 2/1$  と  $3/2$  モードの非線形相互作用の時間スケールの  $\eta$  依存性。

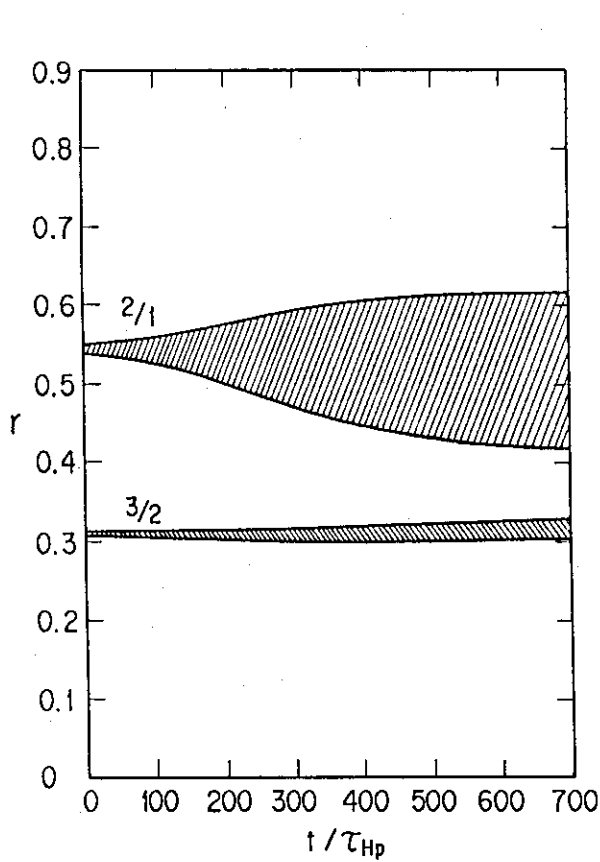


図 5.8(a)  $\lambda = 1.5$  の平衡の磁気島の時間発展。

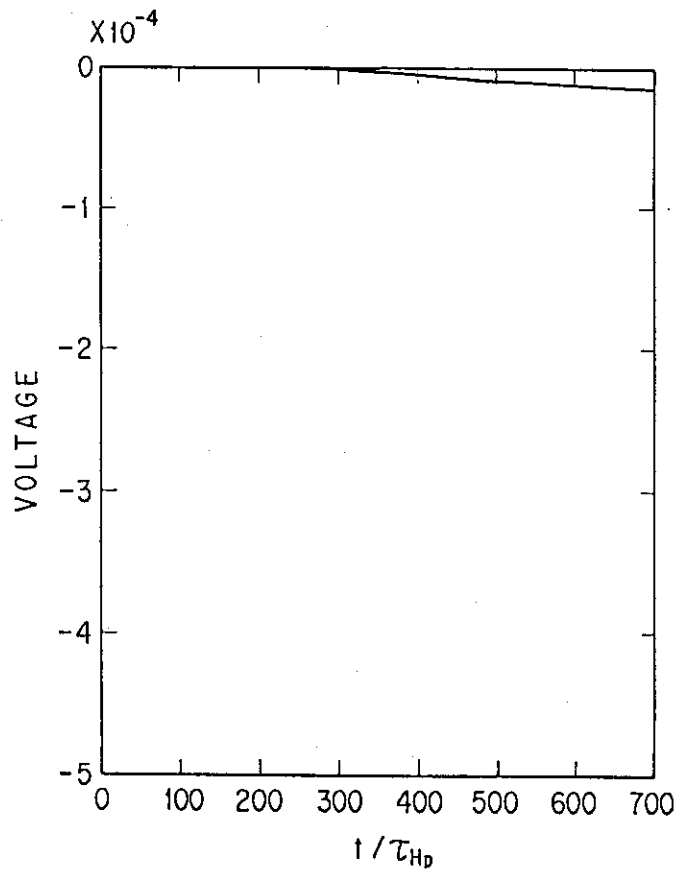


図 5.8(b)  $\lambda = 1.5$  の平衡のループ電圧の時間発展。

5.2 非円形断面トロイダル・プラズマでのティアリング・モードの非線形発展<sup>41,42,43)</sup>

プラズマが円柱の場合、メトリックは  $g^{rr}=1$ ,  $g^{r\theta}=0$ ,  $g^{\theta\theta}=r^{-2}$ ,  $f=1$  で与えられ、 $\theta$  の関数にはならない。しかしながら、より一般的な形状プラズマの場合メトリックは  $\theta$  の関数になる。たとえば  $\epsilon = a/R_0 \ll 1$  の円形断面トロイダル・プラズマでは平衡の  $\Psi$  の等値線は中心の異なる同心円の集まりになり  $\epsilon$  程度の大きさのメトリックの1次のフーリエ成分  $g_{k=1}^{rr}=1$ ,  $g_{k=1}^{r\theta}$ ,  $g_{k=1}^{\theta\theta}$  が現れる。また楕円断面プラズマの場合も同様に偶数番目のフーリエ・モード数のメトリックが現れる。この  $\theta$  の関数になったメトリックにより円柱プラズマで  $m/n$  モードとして表現されていた不安定性はより一般的な形状のプラズマでは  $m \pm 1/n$ ,  $m \pm 2/n$ , ... のモードと結合する。このモード結合の効果と同時にプラズマ形状の変化は0次のフーリエ・モードのメトリックをも変化させる。そしてこの0次のメトリックの変化は(2.2-44)式からわかるように0次の電流の変化を表している。つまり  $\theta$  方向に平均したトロイダル電流分布の変化を示している。この平均した電流分布の変化とモード結合の二つの効果がティアリング・モードに対するプラズマ形状の効果として現れることになる。

図5.9(a)にアスペクト比  $R_0/a$  を変化させたときの " $m/n=2/1$ " モードと " $m/n=3/2$ " モードの成長率を示す(図中実線)。計算は(2.2-75~77)式を行列法で解くことによって実行された。平衡としては(2.2-94)式において  $q_0=1.37$ ,  $r_0=0.6$ ,  $\lambda=4$  とした  $q$  分布を使用し、また解析をプラズマ形状の効果に限定するためにプラズマ圧力は零とした。すなわち(2.2-95)式において  $\beta_j=0$  とした。(2.2-91)式の平衡方程式は上下対称を仮定して  $R$  方向 256 メッシュ、 $Z$  方向 128 メッシュの正方形メッシュで解かれた。メトリックは2次のフーリエ成分まで求めた。またモード結合は両端2モードまで計算した。つまり " $m/n=2/1$ " モードとしては  $m/n=0/1, 1/1, 2/1, 3/1, 4/1$  モードまた " $m/n=3/2$ " モードとしては  $m/n=1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2$  モードを計算した。そして  $\eta$  は  $q=2$  の所で  $\eta=5 \times 10^{-5}$  としている。成長率は " $m/n=2/1$ " モード、" $m/n=3/2$ " モードともにアスペクト比6以下ではアスペクト比の増加とともに大きくなる。アスペクト比6以上では " $m/n=2/1$ " モードの成長率はほとんど変化しないが " $m/n=3/2$ " モードは穏やかに上昇する。また破線で示された成長率はモード結合を無くした場合の計算で  $\theta$  方向に平均したトロイダル電流の変化の効果が見られる。つまり " $m/n=2/1$ " モードとしては  $m/n=2/1$  フーリエ・モード、また " $m/n=3/2$ " モードとしては  $m/n=3/2$  フーリエ・モードのみを使用して計算したものである。このモード結合を無くした計算の成長率はモード結合を含めた成長率より低めになっておりアスペクト比が大きくなるに従って両者の違いは小さくなっている。このことより電流分布の変化による効果とモード結合の2つの効果のうち電流分布の変化による効果は安定化に働き、モード間結合は不安定化に働いていることがわかる。また全体としては電流分布の変化による安定化の効果が大きいといえる。

図5.9(b)にアスペクト比を10に固定しプラズマ表面での楕円度  $E$  を変化させたときの成長率を示す(図中実線)。ここでアスペクト比の依存性を考察した場合と同じ  $q$  分布、 $\eta$  分布を用い、 $\beta_j=0$  とし、メトリックの次数およびフーリエ・モード数も同じにした。また破線で示された成長率はそれぞれモード間結合を無くした、 $m/n=2/1$  および  $m/n=3/2$  のフーリエ・モードのみ

の計算である。 $m/n=2/1$ モード、 $m/n=3/2$ モードともに破線で示されたモード結合を無くした場合の成長率は円形 ( $E=1$ ) のときに最大値をとり円形からはずれるに従って減少する。またモード間結合は不安定化に働いており、 $m/n=3/2$ モードでは  $0.6 \leq E \leq 1.0$  の領域でモードを僅ながら不安定にするまでになっている。

次にプラズマ形状の影響がティアリング・モードの非線形相互作用に与える影響を解析する。プラズマ形状が円柱プラズマから変化するとモード結合を引き起こし新たなモードを励起する。この励起されたモードが他のモードと非線形相互作用することが考えられる。たとえばトロイダル効果が大きくなると  $m/n=2/1$ モードは  $m/n=0/1$ と  $m/n=3/1$ モードを励起する。そして  $m/n=3/1$ モードは  $m/n=2/1$ モードと  $m/n=3/2$ モードの相互作用で励起される  $m/n=1/1$ モードと非線形相互結合して  $m/n=2/1$ モードに影響を与える可能性がある。またプラズマ断面を楕円にすると  $m/n=3/2$ モードは  $m/n=1/2$ モードと  $m/n=5/2$ モードを励起する。そして  $m/n=5/2$ モードは  $m/n=3/1$ モードと相互作用して  $m/n=2/1$ モードに影響を与える可能性が考えられる。また  $m/n=5/2$ モードの共鳴面は  $m/n=2/1$ モードの共鳴面に近いのでこの点からも非線形相互作用が起こる可能性がある。そこで線形不安定性を解析した平衡のうち典型的な三種類について非線形発展を計算することにする。つまり円柱プラズマにはほぼ等しい  $E=1$ ,  $R_0=10$  のケース (ケース(I)), トロイダル効果が大きい  $E=1$ ,  $R_0=4$  のケース (ケース(II)), また楕円の効果の入った  $E=1.5$ ,  $R_0=10$  ケース (ケース(III)) の3種類のケースについて計算を実行する。q分布,  $\eta$ 分布は線形計算で使用されたものと同じ分布で計算する。またフリーエ・モードは  $m/n=1/0, 2/0, 1/1, 2/1, 3/1, 4/1, 1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2, 6/2, 7/2, 4/3, 5/3, 6/3, 7/3, 8/3, 9/3, 4/4, 5/4, 6/4, 7/4, 8/4, 9/4, 10/4, 11/4$  を使用して、動径方向に等間隔で200メッシュ用いる。

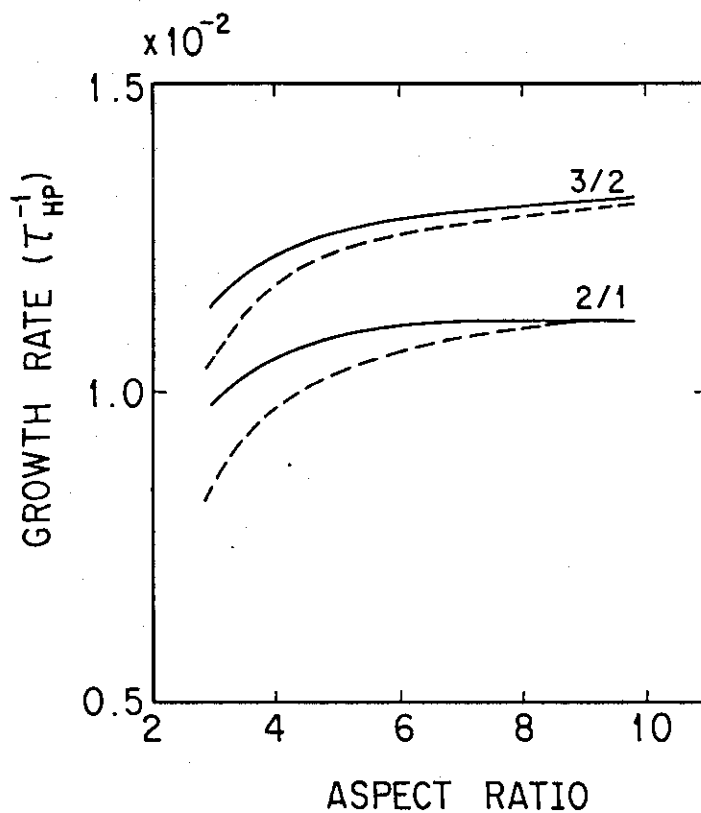
図5.10~5.11にそれぞれのケースでの磁場エネルギー (一般形状プラズマでは磁場エネルギーは正確には各モードに分離できないが、ここではメトリックによる結合を除いて各モードごとのエネルギーを定義する。) と磁気島幅およびループ電圧の時間発展を示した。磁気エネルギーについては円柱プラズマで非線形相互作用を起こす  $m/n=2/1, 3/2, 5/3$ モードとトロイダル効果で  $m/n=2/1$ モードから励起される  $m/n=3/1$ モード及び楕円形状の効果で  $m/n=5/2$ モードの時間発展が示された。また磁気島幅については  $m/n=2/1, 3/2, 3/1, 5/2$ の磁気島幅の時間発展を示した。

ケース(I)の場合  $m/n=2/1$ モードの磁気島幅と  $m/n=3/2$ モードの磁気幅が重なった後  $m/n=3/2$ モードがより不安定化されてループ電圧を急減に下げる。また磁気面は壊されていることがわかる。このケースはほぼ円柱プラズマでの  $m/n=2/1$ モードと  $m/n=3/2$ モードの非線形相互作用の場合と同様である。次にケース(II)のトロイダル効果が大きい場合を考察する。この場合はトロイダル効果によって  $m/n=3/1$ モードが強く不安定化されている。そしてこの  $m/n=3/1$ モード磁気島がケース(I)の場合と比較して大きくなり、その結果磁気面が壊されている領域が広がっている。しかしながら  $m/n=2/1$ モードと  $m/n=3/2$ モードの非線形相互作用してループ電圧を減少させると同時に磁気面を壊す機構は本質的に変わっていない。最後に楕円の効果の入ったケース(III)について考察する。このケースでは楕円変形の効果により  $m/n=5/2$ モードが強く不安定化されている。そしてこのモードは  $m/n=3/2$ モードの成長が鈍化する  $t \geq 340$  以

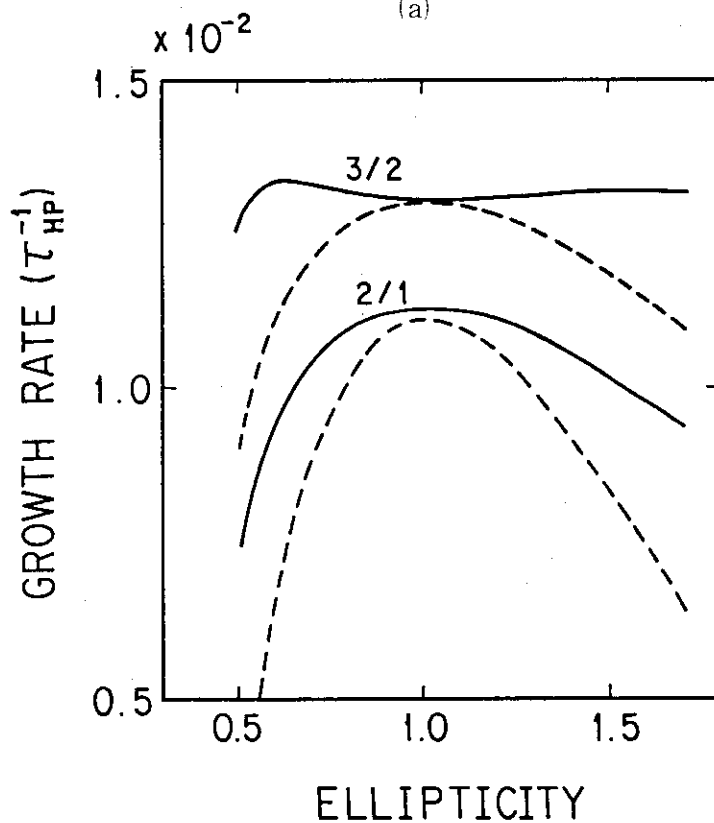
後も成長を続けている。またこの $m/n=5/2$ の磁気島幅は $m/n=2/1$ の磁気島幅と $t \sim 300$ で重なって以後大きく成長している。しかしながらケース(II)場合と同様に $m/n=2/1$ モードと $m/n=3/2$ モードの非線形相互作用による大破壊不安定の機構は本質的に変えていない。以上の解析よりトロイダル効果、楕円の効果はともに励起するモードを多くはするが $m/n=2/1$ モードと $m/n=3/2$ モードで引き起こされる大破壊不安定性の機構は本質的に変化させないといえる。

### 5.3 第5章の要約

本章ではティアリング・モードの線形不安定性および非線形発展を数値計算して大破壊不安定性を解析した。円柱プラズマでのティアリング・モードの数値計算では $m/n=2/1$ モードと $m/n=3/2$ モードの非線形相互作用が大破壊不安定性を起こすことを確認した。またこの大破壊不安定性を起こす $q$ 分布と起こさない $q$ 分布を示した。非円形断面トロイダル・プラズマでのティアリング・モードの数値計算では、プラズマ形状の影響による電流分布の変化は安定化に作用しメトリックを通してのモード間結合は不安定に作用することが明らかになった。また非線形発展に対するプラズマ形状の影響はメトリックを通じて種々のモードを励起するが、大破壊不安定性を本質的に変えないことが明らかになった。

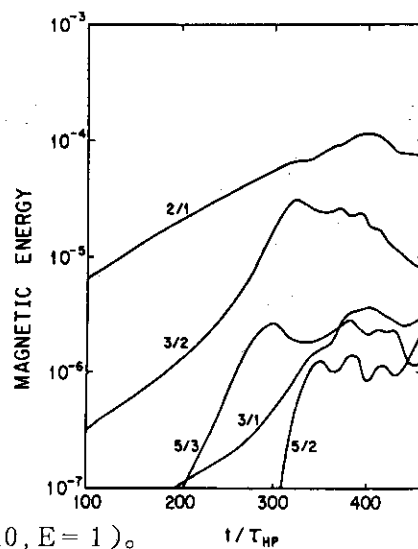
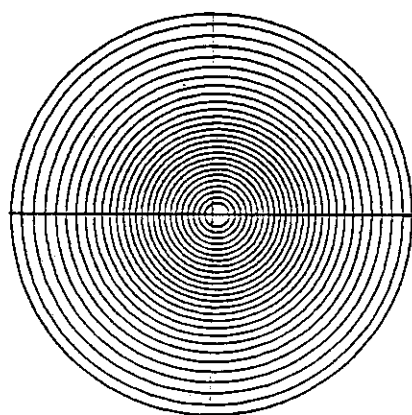


(a)

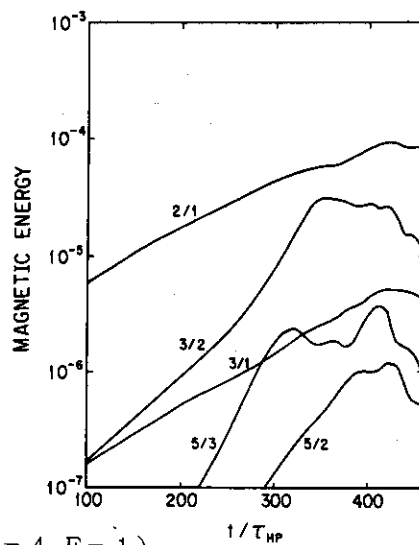
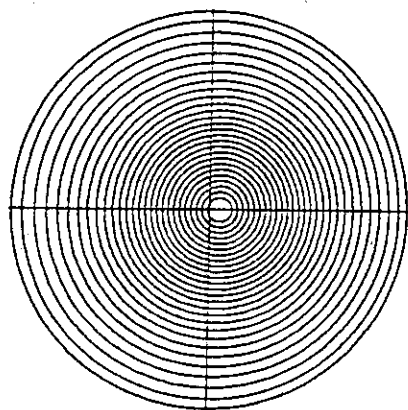


(b)

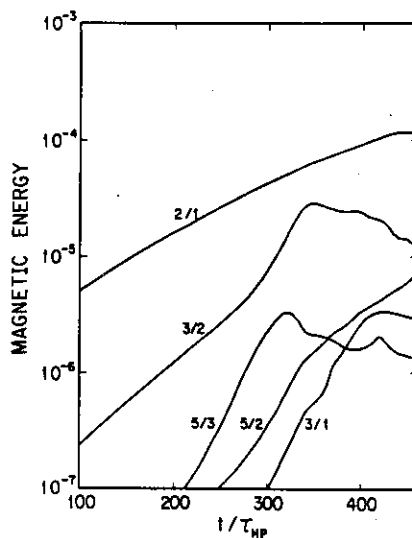
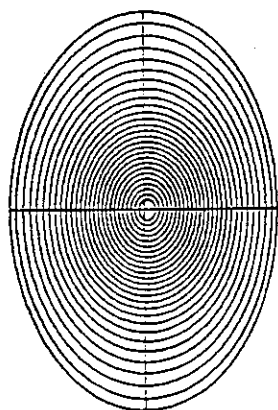
図 5.9 プラズマ形状の効果を入れて計算した " $m/n = 2/1$ " と " $m/n = 3/2$ " ティアリング・モードの成長率。破線はモード結合を除いたときの成長率。



(a) ケース(I) ( $R_0 = 10, E = 1$ )。



(b) ケース(II) ( $R_0 = 4, E = 1$ )。



(c) ケース(III) ( $R_0 = 10, E = 1.5$ )。

図 5.10 プラズマ形状の効果を入れて計算したティアリング・モードの磁場エネルギーの時間発展。

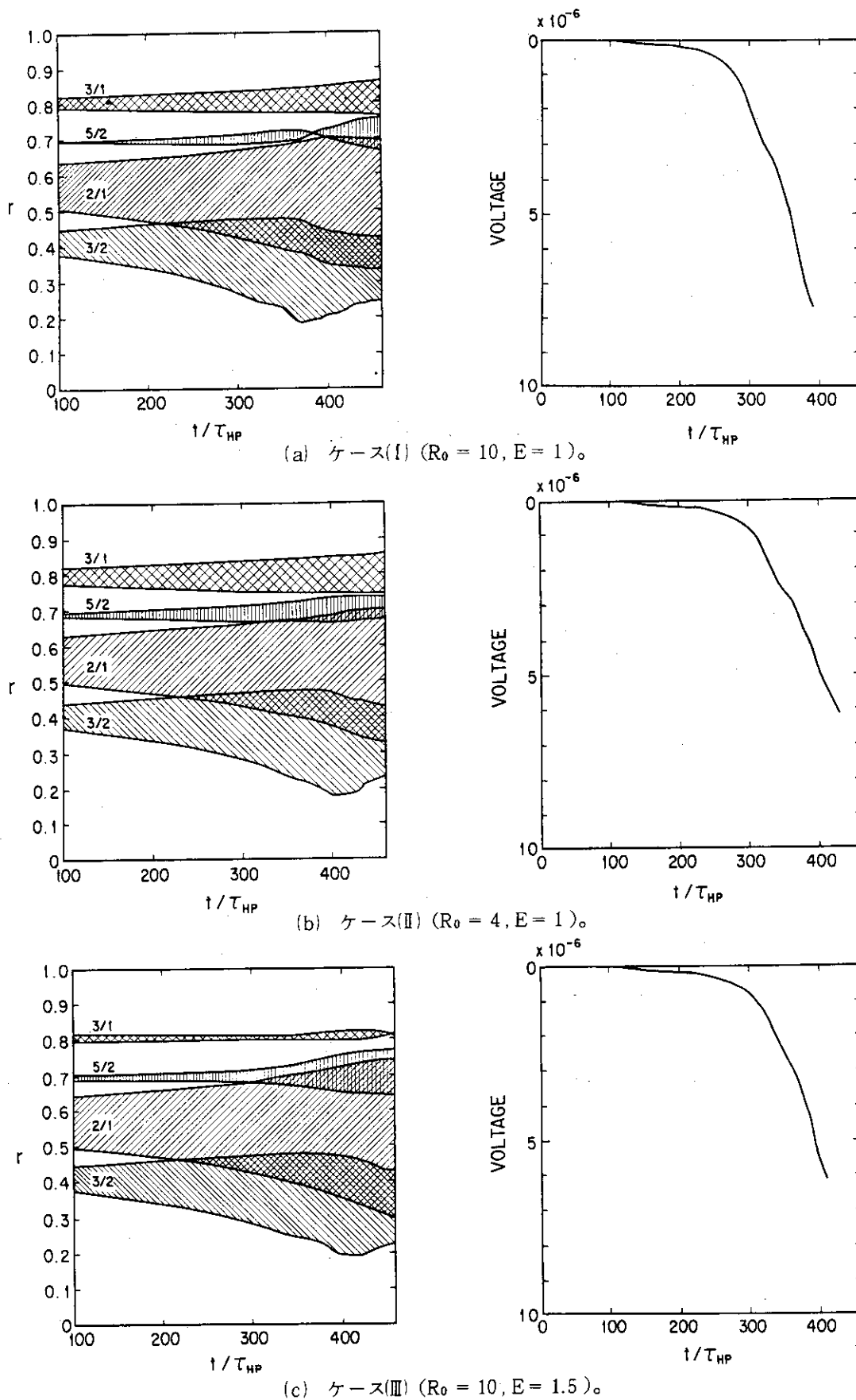


図 5.11 プラズマ形状の効果を入れて計算したティアリング・モードの磁気島及びループ電圧の時間発展。



## 6. 結 論

本論文ではトカマク・プラズマの破壊不安定性について研究した。

第2章では破壊不安定性を解析する際の基礎方程式系である簡約電磁流体方程式とヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式を電磁流体方程式から導出した。

第3章では基礎方程式を解くための数値計算法を論じた。線形方程式については有限電気抵抗プラズマの解析では今までほとんど用いられていない行列法による解法を非対称固有値問題を行列式法と逆べき法を組み合わせることで解くことにより可能とした。また非線形方程式の数値解法では不安定性を精度よく計算できるフーリエ展開法と時間キザミ幅を大きくとれる時間積分法について論じた。

第4章では内部破壊不安定性を解析した。最初に電気抵抗値が現実のトカマク・プラズマに近い値でも  $m=1$  抵抗性モードの非線形発展は線形成長率を維持したまま成長することを示した。次に中性粒子入射加熱実験で観測される内部破壊不安定性の抑制現象を今までの内部破壊不安定性の解析に考慮されていなかった内部キック・モードの効果を取り入れることによって説明できることを示した。

第5章では大破壊不安定性を解析した。最初に  $m/n=2/1$  及び  $3/2$  ティアリング・モードの非線形相互作用が、この不安定性を起こすことを示した。次にこの不安定性を起こす  $q$  分布と起こさない  $q$  分布の例を示した。また、この相互作用に与えるプラズマ形状の影響を調べた。その結果プラズマ形状の変化は種々のモードを励起するが  $m/n=2/1$  モードと  $m/n=3/2$  モードの非線形相互作用は本質的に変化させないことを示した。

これら破壊不安定性に対する新たな知識はトカマク型核融合炉を設計する際に必要とされる破壊不安定性の抑制もしくは制御に役立つものと思われる。

## 謝 辞

本論文の作成において終始、懇切な御指導と御鞭撻を賜りました東京工業大学総合理工学研究科丹生慶四郎教授に感謝いたします。また著者の大学時代より、研究活動の御教示と激励を賜りました日本大学理工学部川上一郎教授に感謝いたします。

本研究は日本原子力研究所核融合研究部において小幡行雄部長、田中正俊次長および竹田辰興理論解析研究室室長の御指導と種々の御配慮の結果達せられたものであります。ここに改めて感謝いたします。また本研究のテーマを与えて下さり終始有益な助言をいただきました理論解析研究室の安積正史氏に感謝いたします。また同研究室の津田孝、滝塚知典、常松俊秀、栗田源一、徳田伸二および伊藤公孝の各氏には熱心な討論と助言をしていただきましたことを感謝いたします。

また田子精男富士通株式会社科学システム開発部第3システム課長には種々の御配慮及び激励を賜り感謝いたします。

## 6. 結 論

本論文ではトカマク・プラズマの破壊不安定性について研究した。

第2章では破壊不安定性を解析する際の基礎方程式系である簡約電磁流体方程式とヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式を電磁流体方程式から導出した。

第3章では基礎方程式を解くための数値計算法を論じた。線形方程式については有限電気抵抗プラズマの解析では今まではほとんど用いられていない行列法による解法を非対称固有値問題を行列式法と逆べき法を組み合わせることで解くことにより可能とした。また非線形方程式の数値解法では不安定性を精度よく計算できるフーリエ展開法と時間キザミ幅を大きくとれる時間積分法について論じた。

第4章では内部破壊不安定性を解析した。最初に電気抵抗値が現実のトカマク・プラズマに近い値でも  $m=1$  抵抗性モードの非線形発展は線形成長率を維持したまま成長することを示した。次に中性粒子入射加熱実験で観測される内部破壊不安定性の抑制現象を今までの内部破壊不安定性の解析に考慮されていなかった内部キンク・モードの効果を取り入れることによって説明できることを示した。

第5章では大破壊不安定性を解析した。最初に  $m/n=2/1$  及び  $3/2$  ティアリング・モードの非線形相互作用が、この不安定性を起こすことを示した。次にこの不安定性を起こす  $q$  分布と起こさない  $q$  分布の例を示した。また、この相互作用に与えるプラズマ形状の影響を調べた。その結果プラズマ形状の変化は種々のモードを励起するが  $m/n=2/1$  モードと  $m/n=3/2$  モードの非線形相互作用は本質的に変化させないことを示した。

これら破壊不安定性に対する新たな知識はトカマク型核融合炉を設計する際に必要とされる破壊不安定性の抑制もしくは制御に役立つものと思われる。

## 謝 辞

本論文の作成において終始、懇切な御指導と御鞭撻を賜りました東京工業大学総合理工学研究科丹生慶四郎教授に感謝いたします。また著者の大学時代より、研究活動の御教示と激励を賜りました日本大学理工学部川上一郎教授に感謝いたします。

本研究は日本原子力研究所核融合研究部において小幡行雄部長、田中正俊次長および竹田辰興理論解析研究室室長の御指導と種々の御配慮の結果達せられたものであります。ここに改めて感謝いたします。また本研究のテーマを与えて下さり終始有益な助言をいただきました理論解析研究室の安積正史氏に感謝いたします。また同研究室の津田孝、滝塚知典、常松俊秀、栗田源一、徳田伸二および伊藤公孝の各氏には熱心な討論と助言をしていただきましたことを感謝いたします。

また田子精男富士通株式会社科学システム開発部第3システム課長には種々の御配慮及び激励を賜り感謝いたします。

## References

- 1) Von Goeler, W.Stodiek, N.Sauthoff, Phys. Rev. Lett. 33, 1201(1974).
- 2) L.A.Artsimovich, K.A.Razumova, At. Energ. 17, 170(1963) [ Sov. At. Energy 17, 886(1964) ].
- 3) B.B.Kadomtsev, Fiz. Plazmy 1, 710(1975) [ Sov. plasma phys. 1, 389(1975) ].
- 4) B.B.Kadomtsev, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1977), Vol I, p.555.
- 5) B.V.Waddell, M.N.Rosenbluth, D.A.Monticello, R.B.White, Nucl. Fusion 16, 528(1976).
- 6) D.Biskamp, "Physics of Plasma Close to Thermonuclear Conditions", in proceedings of the Course of the International School of Plasma Physics Vol I, p.181 (1979).
- 7) D.Biskamp, Sherwood Meeting on Theoretical Aspect of Controlled Thermonuclear Research, Tucson, Arizona, 1c9, (1979).
- 8) S.Yamamoto, et al., Nucl. Fusion 21, 993(1981).
- 9) J.A.Holmes, B.A.Carreras, H.R.Hicks, V.E.Lynch, K.E.Rothe, Phys. Fluids 25, 800(1982).
- 10) M.Azumi, "Numerical Study of the Resistive Internal Kink Mode", the U.S.-Japan Workshop on 3D MHD Studies(Nagoya, 1984), unpublished.
- 11) L.A.Charlton, B.A.Carreras, J.A.Holmes, H.R.Hicks, V.E.Lynch, "Calculations in Toroidal Geometry with Full MHD Equations", Proceeding of the U.S.-Japan Workshop on 3D MHD studies", (Oak Ridge, 1984).
- 12) R.B.White, D.A.Monticello, M.N.Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. 39, 1618(1977).
- 13) B.V.Waddell, B.A.Carreras, H.R.Hicks, J.A.Holmes, D.K.Lee, Phys. Rev. Lett. 41, 1386(1978).
- 14) B.V.Waddell, B.A.Carreras, H.R.Hicks, J.A.Holmes, Phys. Fluids 22, 896(1979).
- 15) B.A.Carreras, J.A.Holmes, H.R.Hicks, V.E.Lynch, Nucl. Fusion 21, 511(1981).
- 16) B.A.Carreras, H.R.Hicks, D.K.Lee, Phys. of Fluids 24, 66(1981).
- 17) M.Azumi, unpublished, (1976).

- 18) Y.Tanaka, M.Azumi, T.Tsunematsu, T.Takeda, "Higt-Speed Numerical Code AEOLUS-R1 for Resistive MHD Instability with Single Helicity", JAERI-M 8656 (1980) (in Japanese).
- 19) G.Kurita, M.Azumi, T.Tsunematsu, T.Takeda, Plasma Phys. **25**, 1097(1983).
- 20) Y.N.Dnestrovskii, D.P.kostomarov, V.G.Pereverzev, K.N.Tarasyan, Fiz. Plazmy **4**, 1001(1978) [ Sov. J. Plasma Phys. **4**, 557(1978) ].
- 21) M.N.Rosenbluth, D.A.Monticello, H.R.Strauss and R.B.White, Phys. of Fluids **19**, 1987(1976).
- 22) H.R.Strauss, Phys. of Fluids **19**, 134(1976).
- 23) S.Hamada, Nucl. Fusion **2**, 23(1962).
- 24) Y.Tanaka, M.Azumi, G.Kurita, T.Tsunematsu, T.Takeda, "A Matrix Method for Resistive MHD Stability Analysis of Axisymmetric Toroidal Plasma", to be published.
- 25) T.takeda, Y.Shimomura, M.Ohta, M.Yoshikawa, Phys. Fluids **15**, 2193(1972).
- 26) R.Gruber, Comput. Phys. Commun. **20**, 421(1980).
- 27) A.H.Glasser, J.M.Greene, J.L.Johnson, Phys. Fluids **18**, 875(1975).
- 28) H.R.Hicks, B.C.Carreras, J.A.Holmes, D.K.Lee, B.V.Waddell, J. Computational Phys. **44**, 46(1981).
- 29) R.D.Richtmyer, K.W.Morton, "Difference Methods for Initial-Value Problems", John Wiley and Sons (1976).
- 30) B.Coppi, R.Galvao, R.Pellat, M.N.Rosenbluth, P.H.Rutherford, Fiz. Plazmy **2**, 961(1976) [ Sov.J.Plasma Phys. **2**, 533(1976) ].
- 31) Y.Tanaka, M.Azumi, G.kurita, T.Takeda, "Numerical Study of  $m=1$  Resistive Internal Kink Mode in a Cylindrical Tokamak", to be published in Plasma Physics and Controlled Fusion.
- 32) M.Azumi, S.Tokuda, G.Kurita, T.Tsunematsu, T.Takizuka, T.Tuda, K.Itoh, Y.Tanaka, T.Takeda, "Internal Disruption in High  $\beta_p$  Tokamak", JAERI-M 9787(1981).
- 33) T.Takizuka, T.Tsunematsu, S.Tokuda, M.Azumi, G.Kurita, T.Tuda, K.Itoh, Y.Tanaka, T.Matsuura, T.Takeda, "Computational Studies of Tokamak Plasma", JAERI-M 9354(1981).
- 34) M.N.Bussac, R.Pellat, D.Edery, J.L.Soule, Phys. Rev. Lett. **5**, 1638(1975).
- 35) M.N.Rosenbluth, R.Y.Dagazian, P.H.Rutherford, Phys. of Fluids **6**, 1894(1973).

- 36) H.P.Furth, J.Killeen, M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 6, 459(1963).
- 37) H.P.Furth, in Propagation and Instabilities in Plasmas, Stanford University Press, Stanford, CA, p.87.
- 38) R.B.White, D.A.Monticello, M.N.Rosenbluth, B.V.Waddell, Phys. Fluids 20, 800(1977).
- 39) N.R.Sauthoff, S.von Goeler, W.Stodiek, Nucl. Fusion 18, 1445(1978).
- 40) K.Toi, S.Itoh, K.Kadota, K.Kawahata, N.Noda, K.Sakurai, K.Sato, S.Tanahashi, S.Yasue, Nucl. Fusion 19, 1643(1979).
- 41) T.Tsunematsu, Y.Tanaka, M.Azumi, S.Tokuda, G.Kurita, T.Takeda, "Numerical Study of Resistive Modes in Tokamak(I) --Linear Instability --", proceedings of the tenth conference on numerical simulation of plasmas (San Diego, 1983) 2B17.
- 42) Y.Tanaka, T.Tsunematsu, M.Azumi, S.Tokuda, G.Kurita, T.Takeda, "Numerical Study of Resistive Modes in Tokamak(II) --Nonlinear Instability --", ibid. 2B18.
- 43) T.Takeda, M.Azumi, M.Kumagai, G.Kurita, K.Naraoka, T.Takizuka, Y.Tanaka, S.Tokuda, "MHD Computations at JAERI" IPPJ-632(1983).

## 付録A ヘリカル座標系

ヘリカル座標系  $(r, \varphi, \zeta)$  は円柱座標系  $(r, \theta, z)$  を使用して

$$\begin{cases} r = r \\ \varphi = \theta - \frac{k}{m}z \\ \zeta = (z + \frac{kr^2}{m}\theta)/\sigma \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

で定義される。ここで  $k = n/R_0$ ,  $\sigma = 1 + (kr/m)^2$  で  $m, n$  はヘリカルのピッチを表している。この座標系は非直交系で線素は

$$dl^2 = (1 + \frac{4k^2r^2}{m^2\sigma^3}\varphi^2)dr^2 + \frac{r^2}{\sigma}d\varphi^2 + \sigma d\zeta^2 - \frac{2kr}{m\sigma}\varphi dr d\zeta. \quad (\text{A.2})$$

と与えられる。この座標系でのベクトルの共変成分は

$$A = (A_r, A_\varphi, A_\zeta) = (A \cdot e_r, A \cdot e_\varphi, A \cdot e_\zeta) \quad (\text{A.3})$$

$$e_r = \frac{\partial r}{\partial r} = e_r - \frac{2kr^2}{m^2\sigma^2}\varphi e_\theta - \frac{2kr}{m\sigma^2}\varphi e_z$$

$$e_\varphi = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{r}{\sigma}(e_\theta - \frac{kr}{m}e_z) \quad (\text{A-4})$$

$$e_\zeta = \frac{\partial r}{\partial \zeta} = e_z + \frac{kr}{m}e_\theta.$$

と与えられる。以下では簡単のために下記のような基本ベクトル  $e^*$  を導入してベクトル成分を表すことにする。

$$A = (A_r^*, A_\varphi^*, A_\zeta^*) = (A \cdot e_r^*, A \cdot e_\varphi^*, A \cdot e_\zeta^*) \quad (\text{A.5})$$

$$e_r^* = e_r$$

$$e_\varphi^* = e_\theta - \frac{kr}{m}e_z \quad (\text{A.6})$$

$$e_\zeta^* = e_z + \frac{kr}{m}e_\theta.$$

以下では\*を省略する。

この成分表示を使用して、内積  $A \cdot B$ 、外積  $A \times B$  は

$$A \cdot B = A_r B_r + (A_\varphi B_\varphi + A_\zeta B_\zeta) / \sigma \quad (\text{A.7})$$

$$A \times B = (A_\varphi B_\zeta - A_\zeta B_\varphi) / \sigma, A_\zeta B_r - A_r B_\zeta, A_r B_\varphi - A_\varphi B_r \quad (\text{A.8})$$

と表される。また  $\zeta$  方向に対称性がある場合 ( $\frac{\partial}{\partial \zeta} = 0$ ) の微分演算  $\nabla \phi$ ,  $\nabla \cdot A$ ,  $\nabla \times A$ ,  $(A \cdot \nabla) B$  は

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\sigma}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}, 0 \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.10})$$

$$[\nabla \times A]_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\zeta}{\partial \varphi} \quad (\text{A.11-a})$$

$$[\nabla \times A]_\varphi = -\frac{\partial A_\zeta}{\partial r} \quad (\text{A.11-b})$$

$$[\nabla \times A]_\zeta = -\frac{\sigma}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r A_\varphi}{\sigma} \right) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2kr}{m\sigma^2} A_\zeta \right] \quad (\text{A.11-c})$$

$$[(A \cdot \nabla) B]_r = A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r\sigma^2} (A_\varphi + \frac{kr}{m} A_\zeta) (B_\varphi + \frac{kr}{m} B_\zeta) \quad (\text{A.12-a})$$

$$[(A \cdot \nabla) B]_\varphi = A_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \quad (\text{A.12-b})$$

$$+ \frac{1}{r\sigma} \{ B_r (A_\varphi + \frac{kr}{m} A_\zeta) + \frac{kr}{m} A_r (B_\zeta - \frac{kr}{m} B_\varphi) \}$$

$$[(A \cdot \nabla) B]_\zeta = A_r \frac{\partial B_\zeta}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial B_\zeta}{\partial \varphi} \quad (\text{A.12-c})$$

$$+ \frac{k}{m\sigma} \{ B_r (A_\varphi + \frac{kr}{m} A_\zeta) - A_r (B_\varphi + \frac{kr}{m} B_\zeta) \}$$

$$\{\nabla^2 A\}_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} - \frac{A_r}{r^2} \quad (\text{A.13-a})$$

$$- \frac{2}{r^2 \sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( A_\varphi + \frac{kr}{m} A_\zeta \right)$$

$$\{\nabla^2 A\}_\varphi = \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A_\varphi}{r} \right) - \frac{2k^2}{m^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r A_\varphi \right) \quad (\text{A.13-b})$$

$$+ \frac{2k}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A_\zeta}{\sigma} \right) + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}$$

$$\{\nabla^2 A\}_\zeta = \frac{\sigma}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial A_\zeta}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_\zeta}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.13-c})$$

$$+ \frac{2k}{m\sigma} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r A_\varphi}{\sigma} \right) - \frac{2kr}{m\sigma^2} A_\zeta \right\}$$

と表せる。



## 付録B 抵抗性モードの線形解析解

ここでは ( 2.2 - 83~84 ) 式から  $m=1$  抵抗性モードの線形解析解を求める。以下で  $\eta$  の効果が著しい共鳴面付近の領域 ( 内部領域 ) とその外の領域 ( 外部領域 ) に分けて方程式を組み立てる。まず外部領域の解を求める。( 2.2 - 83~84 ) 式において,  $\eta=0$ ,  $\tilde{\Phi} = i\phi e^{im\theta}$ ,  $\tilde{\Psi} = \psi e^{im\theta}$ ,  $\xi = \frac{\phi}{r}$  として

$$\frac{d}{dr} F^2 \frac{d\xi}{dr} - (m^2 - 1) F^2 r \xi = 0, \quad (B.1)$$

を得る。 $m=1$  の場合, この方程式は  $F(r_s) = 0$  で特異点を持ち, その解は

$$\xi = \begin{cases} \xi_0 & (r < r_s) \\ 0 & (r > r_s) \end{cases} \quad (B.2)$$

となる。ここで  $\xi_0$  は定数である。

次に内部領域解を求めることにする。この領域では ( 2.2 - 83~84 ) 式は  $r = r_s + x$ ,  $F(r) \sim F'(r_s)x$ ,  $\Delta \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  として

$$\begin{cases} \gamma \tilde{\Phi}'' = F'(r_s) x \tilde{\Psi}' , \\ \gamma \tilde{\Psi}'' = -F'(r_s) x \tilde{\Phi}' + \eta \tilde{\Psi}' , \end{cases} \quad (B.3)$$

となる。ここで ' は  $r$  についての微分を表す。これから  $\tilde{\Psi}$  を消去すると

$$\xi^{(4)} - \frac{2}{r} \xi^{(2)} - \frac{1}{\gamma \eta} (F'^2(r_s) r^2 + \gamma^2) \xi^{(1)} = 0, \quad (B.4)$$

を得る。ここで添字の  $(n)$  は  $r$  についての  $n$  階微分を表す。この方程式の解のうち  $x \rightarrow \pm\infty$  で ( B.2 ) に接続するものは

$$\xi = (2/\pi)^{1/2} \xi_0 \int_x^\infty e^{-\xi^2/2} d\xi, \quad (B.5)$$

$$\gamma = F'(r_s)^{2/3} \eta^{1/3} \quad (B.6)$$

である。これが内部領域の解である。

### 付録C 抵抗性内部キック・モードの線形解析解

ここではヘリカル対称非圧縮電磁流体方程式から抵抗性内部キック・モードの線形解析解を導出する。まず理想内部キック・モード ( $\eta=0$ ) の線形解析解をもとめる。(2.3-33, 34)式より  $\tilde{\psi}$  を消去して

$$\gamma^2 \Delta^* \tilde{\Phi} = -F \Delta^* (F \tilde{\Phi}) + \frac{m}{r} \frac{\partial J_F \tilde{\Phi}}{\partial r} + \frac{2k}{\sigma^2 r} (B_\phi + \frac{kr}{m} B_\zeta) \gamma \tilde{B}_\zeta \quad (C.1)$$

を得る。また(2.3-34, 35, 36)式より  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{V}_\zeta$  を消去して

$$\tilde{B}_\zeta = \left[ \frac{r}{\gamma^2 + F^2} \frac{2k}{\sigma r} (B_\phi + \frac{kr}{m} B_\zeta) - \frac{m B_\zeta'}{\gamma r} \right] \left( \frac{\tilde{\Phi}}{r} \right), \quad (C.2)$$

を得る。(C.1)式を(C.2)式に代入して

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^3 (F^2 + \gamma^2)}{\sigma} \frac{d\xi}{dr} \right] - g(r) \xi = 0, \quad (C.3)$$

$$g(r) = (\gamma^2 + F^2) \left( m^2 - \frac{1}{\sigma} + \frac{2k^2 r^2}{m^2 \sigma^2} \right) r + \frac{2k^2 r^2}{\sigma} \frac{dP}{dr} + \frac{4k^2 r}{\sigma^2} B_\phi B_\theta + \frac{4k^2 r}{\sigma} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + F^2} B_\theta$$

を得る。ここで  $\xi, P$  はそれぞれ  $r$  方向の変位, プラズマ圧力で  $\zeta = \frac{1}{r} \left( \frac{\tilde{\Phi}}{r} \right)$ ,  $\frac{dP}{dr} = \frac{B_\theta}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) + B_z \frac{dB_z}{dr}$  である。

(C.3)式を縦方向波数  $K$  について展開して解くことにする。このとき, 解を  $\xi(r) = \xi_0(r) + \xi_1(r) + \dots$  とすると,  $\xi_0(r)$  については(C.3)式より付録Bの抵抗性モードの外部解と一致して

$$\xi = \begin{cases} \xi_0 & (r < r_s) \\ 0 & (r > r_s) \end{cases} \quad (C.4)$$

となる。次に  $\xi_1(r)$  については,  $r = r_s + x$ ,  $F(r) = F'(r_s)x$  として(C.3)式より

$$\frac{d\xi}{dr} = \begin{cases} \frac{-\xi_0}{r_s^3 (\gamma^2 + F'^2 x^2)} \int_0^r g dr & (r < r_s), \\ \frac{-\xi_0}{r_s^3 (\gamma^2 + F'^2 x^2)} \int_0^{r_s} g dr & (r > r_s), \end{cases} \quad (C.5)$$

となる。ここで  $F'$  は  $r = r_s$  での微分  $F'(r_s)$  を表している。

$r > r_s$  の領域の解は

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{-\xi_0}{r_s^3(\gamma^2 + F'^2 x^2)} \int_0^{r_s} g dr = \frac{\xi_0}{r_s^3(\gamma^2 + F'^2 x^2)} G \quad G = \int_0^{r_s} (-g) dr \quad (C.6)$$

であることより

$$\xi = \int \frac{\xi_0}{r_s^3(\gamma^2 + F'^2 x^2)} G = -\frac{\xi_0}{r_s^3 \gamma |F'|} G \tan^{-1}\left(\frac{|F'|x}{\gamma}\right) + \text{const.} \quad (C.7)$$

また  $x \rightarrow \infty$  で  $\xi = 0$  であることより

$$\xi = -\frac{\xi_0}{r_s^3 \gamma |F'|} G \left[ \tan^{-1}\left(\frac{|F'|x}{\gamma}\right) - \frac{\pi}{2} \right], \quad (C.8)$$

また  $x \rightarrow -\infty$  で  $\xi = \xi_0$  になることより、 $\gamma$  と  $\xi$  は下記のように求まる。

$$\gamma = \frac{\pi}{r_s^3 |F'|} G = \frac{\pi}{r_s^3 |F'|} \int_0^{r_s} (-g) dr, \quad (C.9)$$

$$\xi = \frac{\xi_0}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{|F'|x}{\gamma}\right) \right] = \frac{\xi_0}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{r_s^3 F'^2}{\pi G} x^2\right) \right] \quad (C.10)$$

また  $\tilde{\Phi}$  は

$$\tilde{\Phi} = -\frac{\tilde{\Phi}_0}{r_s^4 \gamma^2 |F'|} G \left[ \tan^{-1}\left(\frac{|F'|x}{\gamma}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (C.11)$$

となる。

次に抵抗性内部キック・モード ( $\eta \neq 0$ ) の場合の解を求める。付録Bの計算法と同様に  $\eta$  の効果が無視できる外部領域とこの効果が著しい内部領域に分ける。(C.5)式より外部領域解は共鳴面近傍(内部領域近傍)で

$$\frac{d\xi}{dr} = \begin{cases} \frac{-\xi_0}{r_s^3 F'^2 x^2} \int_0^r g dr & (r < r_s), \\ \frac{-\xi_0}{r_s^3 F'^2 x^2} \int_0^{r_s} g dr & (r > r_s), \end{cases} \quad (C.12)$$

を満す。ここで  $r$  は小さいと仮定して省いた。内部領域の方程式は付録Bのとときと同様に

$$\begin{cases} \gamma \tilde{\Phi}' = F' x \tilde{\Psi}' \\ \gamma \tilde{\Psi}' = -F' x \tilde{\Phi}' + \eta \tilde{\Psi}', \end{cases} \quad (C.13)$$

となる。この方程式の解のうち (C.12) 式に接続するものを求めることにする。(C.13) 式を解くために関数  $\chi$

$$\chi(x) = x \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} - \tilde{\Psi} = \gamma^2 \frac{d\xi}{dx} + \chi_\infty \quad (C.14)$$

を導入する。この  $\chi$  で  $\xi, \Psi$  は

$$\xi = -\gamma^2 \int_x^\infty dx (\chi - \chi_\infty) \quad (C.15)$$

$$\Psi = -\chi - x \int_x^0 \frac{dx d\chi}{x dx}, \quad (C.16)$$

のように表せる。(C.13) 式より  $\chi$  は

$$\eta\gamma \left( \frac{d\chi^2}{dx^2} - \frac{2d\chi}{x dx} \right) - (\chi^2 + \gamma^2)\chi = -x^2\chi_\infty \quad (C.17)$$

を満す。この式は  $\zeta = x^2 / r^{1/2}$ ,  $\hat{r} = r / r_\eta$  ( $r_\eta$  は (B.6) 式の  $r$ ) として

$$4 \left( \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} \right) - \frac{2d\chi}{\zeta d\zeta} - \left( \frac{\hat{r}^{2/3}}{\zeta} + 1 \right) \chi = -\chi_\infty \quad (C.18)$$

となる。この解は

$$\chi = \frac{\chi_\infty}{(\hat{r}^{3/2} - 1)} \left\{ 1 - \frac{\hat{r}^{2/3}}{2^{1/2}} \int_0^1 dy y^p \frac{d}{dy} \left[ (1+y)^{1/2} \exp\left(-\frac{\zeta(1-y)}{2(1+y)}\right) \right] \right\} \quad (C.19)$$

と表せる。ここで  $P = (\hat{r}^{3/2} - 1) / 4$  である。また (C.12) 式は

$$\chi_\infty = -\gamma_i \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx d\chi}{x dx} \quad (C.20)$$

と表せる ( $r_i$  は (C.9) 式の  $r$ )。これより

$$\gamma = \gamma_i \left( \frac{\hat{r}^{9/4} \Gamma\left\{(\hat{r}^{3/2} - 1)/4\right\}}{8 \Gamma\left\{(\hat{r}^{3/2} + 5)/4\right\}} \right), \quad (C.21)$$

が得られる。よって

$$r = \begin{cases} r_i & (r_i \gg r_\eta) \\ r_\eta & (r_i = 0) \end{cases} \quad (C.22)$$

となる。

### 付録D ティアリング・モードの線形解析解

ここではティアリング・モードの線形解析解を求める。付録Bと同様に  $\eta$  の効果の著しい共鳴面付近の領域（内部領域）とその外の領域（外部領域）に分けて方程式を組み立てる。まず外部領域での解をもとめる。（2.2-83）式において  $\tilde{\Psi} = \psi e^{rt+im\theta}$  ,  $r \sim 0$  と仮定すると

$$F\Delta\psi - \frac{m dJ_0}{r dr}\psi = 0, \tag{D.1}$$

を得る。この方程式の内部領域近傍の解を考察する。つまり  $r = r_s + x$  ,  $x \ll r_s$  として（D.1）式を  $x$  について展開すると

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{\kappa}{x}\psi = 0, \quad \kappa = mJ'_0/F'(r_s)r_s \tag{D.2}$$

を得る。この方程式の解のうち  $r = r_s$  で  $\psi$  が定数となるものは

$$\begin{cases} \psi_+ = \psi_s \Phi_s(x) + A_1 \Phi_n(x) & (r > r_s) \\ \psi_- = \psi_s \Phi_s(x) + A_2 \Phi_n(x) & (r < r_s) \end{cases} \tag{D.3}$$

$$\Phi_n(x) = x + \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{12}\kappa^2 x^3 + \dots$$

$$\Phi_s(x) = 1 + \kappa x \log|x| + \frac{1}{2}\kappa^2 x^2 \log|x| - \frac{3}{4}\kappa^2 x^2 + \dots$$

$$\begin{cases} \psi'_+ = \psi_s(1 + \kappa \log|x| + \kappa + \dots) + A_1(1 + \kappa x + \dots) & (r > r_s) \\ \psi'_- = \psi_s(1 + \kappa \log|x| + \kappa + \dots) + A_2(1 + \kappa x + \dots) & (r < r_s) \end{cases}$$

と表せる。この解の微分は  $r = r_s$  で発散するが  $(\frac{\psi'}{\psi})_{\pm} = \lim_{r \rightarrow r_s \pm 0} (\frac{\psi'}{\psi})$  として

$$\Delta' = r_s \left[ \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)_+ - \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)_- \right] = r_s \frac{A_1 - A_2}{\psi_s} \tag{D.4}$$

は一定値をとる。そこでこの  $\Delta'$  を内部領域解との接続条件とする。

次に内部領域での解を求めることにする。付録Aの場合と同様、この領域では（2.2-83~84）式は  $r = r_s + x$  ,  $F(r) = F'(r_s)x$  ,  $\Delta \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  として

$$\begin{cases} \gamma \tilde{\Phi}' = F(r_s) x \tilde{\Psi}' \\ \gamma \tilde{\Psi} = -F(r_s) x \tilde{\Phi} + \eta \tilde{\Psi}' \end{cases} \tag{D.5}$$

となる。これより $\Psi'$ を消去して

$$\Phi'' = \frac{|F'|^2}{\eta\gamma} x^2 \Phi = -\frac{|F'|}{\eta} x \Psi, \quad (D.6)$$

を得る。ここで計算対象にしているトカマクの場合 $F' < 0$  ( $q > 0$ )であることを使用した。この式は $\Psi$ は定数と仮定し $\Psi = -\gamma^{-3/4} \eta^{1/4} |F'|^{1/2} \Psi^{-1} \Phi$ ,  $z = (\eta\gamma / |F'|^2)^{-1/4} x$ とすれば

$$\Phi'' - z^2 \Phi = z, \quad (D.7)$$

と書き直せる。この方程式の解を得るために、 $\Phi$ をエルミート関数 $H_n(z)$ で展開する。

$$\Phi(z) = \sum_n \varphi_n H_n(z) e^{-z^2/2} \quad (D.8)$$

これを(D.7)式の左辺に代入して

$$\Phi'' - z^2 \Phi = -\sum_n (2n-1) \varphi_n H_n(z) e^{-z^2/2} \quad (D.9)$$

を得る。また $z$ はエルミート関数で

$$z = \sum_n \frac{\sqrt{2}}{4^n \Gamma(n+1)} H_{2n+1}(z) e^{-z^2/2} \quad (D.10)$$

と展開できる。(D.9)式と(D.10)式を比較することにより

$$\varphi_{2n+1} = -\frac{\sqrt{2}}{4^n (4n+3) \Gamma(n+1)} \quad (D.11)$$

を得る。これより $\varphi(z)$ は

$$\varphi(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4^n (4n+3) \Gamma(n+1)} H_{2n+1}(z) e^{-z^2/2}, \quad (D.12)$$

と表せる。この級数のうち $n$ の大きい項の寄与は小さいので、 $n=0$ の項のみ残すことにする。つまり

$$\varphi(z) = -\frac{\sqrt{2}}{3} z e^{-z^2/2} \quad (D.13)$$

とする。これより $\Delta'$ は

$$\Delta' = -2.36 F'^{-1/2} \Psi(0)^{-1} \gamma^{5/4} \eta^{-3/4} \quad (D.14)$$

となり、 $\gamma$ および $\Phi$ は

$$\begin{cases} \gamma = 0.5 F'^{2/5} \eta^{3/5} \Delta'^{4/5} \\ \Phi(x) = \alpha \Psi(0) \gamma r_\eta^{-1} z e^{-z^2/2} \end{cases} \quad (D.15)$$

となる。

次にこのティアリング・モードが起こす磁場エネルギーの変化  $\delta W$  を計算する。(2.2-66)式より外部領域での磁場エネルギーの変化は

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \left[ \tilde{\Psi}'_m^2 + \frac{m^2}{r^2} \tilde{\Psi}_m^2 + \frac{1}{2} (\Psi_0' + \tilde{\Psi}_0')^2 - \frac{1}{2} \Psi_0'^2 \right] r dr \\ &= \int \left[ \tilde{\Psi}'_m^2 + \frac{m^2}{r^2} \tilde{\Psi}_m^2 + \Psi_0' \tilde{\Psi}'_0 \right] r dr \\ &= \int \left[ \tilde{\Psi}'_m^2 + \frac{m^2}{r^2} \tilde{\Psi}_m^2 + \frac{m}{Fr} \frac{dJ_0}{dr} \tilde{\Psi}_m^2 \right] r dr \end{aligned} \quad (D.16)$$

となる。この積分を最少化するオイラー方程式は

$$\tilde{\Psi}''_m + \frac{1}{r} \tilde{\Psi}'_m - \frac{m^2}{r^2} \tilde{\Psi}_m - \frac{m}{Fr} \frac{dJ_0}{dr} \tilde{\Psi}_m = 0, \quad (D.17)$$

であり、これはまた外部領域での方程式(D.1)と一致している。これを(D.16)式に代入して

$$\delta W = \Psi^2(0) \Delta \quad (D.18)$$

を得る。

## 付録E ティアリング・モードの非線形発展の解析的理論

ここではティアリング・モードの非線形発展を解析的に考察する。まず準線形理論で非線形領域に入る磁気島幅を評価する。(2.2-59)式よりティアリング・モードが存在するときの内部領域での0次のフーリエ・モードの磁束の変化 $\delta\psi_0$ は

$$\frac{\partial \delta\psi_0}{\partial t} = -\frac{2m}{r}(\tilde{\Phi}\tilde{\Psi})' + \eta\delta J_0 \quad (E.1)$$

と与えられる。内部領域の拡散時間( $r^2\eta/\eta \sim \eta^{-1/5}$ )はモードが成長する時間( $r^{-1} \sim \eta^{-3/5}$ )に比較して短いので磁束は内部領域で瞬時に拡散すると考えることができる。よって(E.1)式の左辺は無視することができて

$$\delta J_0 = \frac{m}{r}(\tilde{\Phi}\tilde{\Psi})'/\eta \quad (E.2)$$

を得る。これを(2.2-83)式に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} &= F\tilde{J} - \frac{m d\delta J_0}{r dr} = F\tilde{J} - \frac{m^2}{r_s^2}\tilde{\Psi}\tilde{\Phi}'/\eta \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{m^2}{r_s^2}\tilde{\Psi}/\eta\right)\tilde{\Phi}' &= F\tilde{J} \end{aligned} \quad (E.3)$$

を得る。この式より

$$\frac{m^2}{r_s^2}\tilde{\Psi}/\eta > \gamma \quad (E.4)$$

となれば左辺第1項の慣性項は無視でき、非線形領域に入ることがわかる。(E.4)式を磁気島幅 $W = 4(\tilde{\Psi}/|\psi_0''|)^{1/2}$ を使用して書き直すと

$$W > \gamma_n \quad (E.5)$$

となる。つまりティアリング・モードは磁気島幅が内部領域を越えて大きくなると非線形領域に入ることがわかる。

次に非線形領域での磁気島の成長を考察する。(2.2-58)式において慣性項を無視すると

$$\mathbf{B} \cdot \nabla J = 0 \quad (E.6)$$

が得られる。これはJが $\psi$ だけの関数 $J(\psi)$ であれば満たされる。また(2.2-59)式を磁力線にそって平均すると

$$\nabla^2 \psi = J(\psi) \quad (E.7)$$



$$\left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle = \langle \eta \rangle J(\Psi) - E^w(t) \quad (E.8)$$

を得る。ここで  $\langle \rangle$  は磁力線にそって平均で

$\langle F \rangle = \oint (dl / \nabla \Psi) F / \oint (dl / \nabla \Psi)$  で定義される。 $\Psi = \Psi_0 + \tilde{\Psi} \cos 2\theta$  とおいて (E.8) 式を磁気島の幅に渡って積分することにより

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \eta \tilde{\Psi} \Delta' / W \quad (E.9)$$

を得る。これはまた磁気島幅  $W$  を使用して書き直すと

$$\frac{dW}{dt} = \eta \Delta' \quad (E.10)$$

となる。つまり非線形領域での磁気島幅は時間に比例して成長することがわかる。