

JAERI-M
8466

水平環状断熱層内における高温高压ガス
の自然対流・第2報

(数値解と解析解の比較)

1979年10月

小川 益郎・滝塚 貴和・佐野川好母

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

水平環状断熱層内における高温高圧ガスの自然対流・第2報
(数値解と解析解の比較)

日本原子力研究所東海研究所高温工学室
小川 益郎・滝塚 貴和・佐野川好母

(1979年9月5日受理)

前報で、水平環状断熱層内に発生する高温高圧ガスの自然対流に対して、断熱層内の物性値の温度による変化を考慮に入れた数値計算プログラムについて報告した。

本報告では、このプログラムで物性値を一定とした場合の数値解と摂動法による解析解との比較を行った。この摂動法による解析で設けた仮定が成り立つ範囲内で両者は良く一致した。

数値計算プログラムを用いて、物性値が温度によって変化する場合と一定とした場合との自然対流の熱流動特性を比較するにあたり、前もって、物性値を一定とした場合の熱流動特性を摂動法による解析解を用いて、広範囲なパラメーターに対して定性的に調べた。この解析法では、基礎式を直接数値的に解く方法に比べて、計算機の記憶容量および計算時間を著しく減らすことができる。

Natural Convection of High-Temperature, High-Pressure Gas in a Horizontal
Annular Layer of Thermal Insulator, 2nd Report
(Comparison between Numerical and Analytical Solutions)

Masuro OGAWA, Takakazu TAKIZUKA and Konomo SANOKAWA

Division of High Temperature Engineering,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received September 5, 1979)

In the previous report, the procedure of numerical calculation was described for the natural convection in a horizontal layer of thermal insulator with variable physical properties. In the present report, the numerical solutions for constant thermophysical properties are compared with the analytical solutions by perturbation method. Both are in agreement in the range where the perturbation analysis holds good.

The thermoconvective characteristics for constant physical properties are first examined by use of the perturbation solutions in order to study the effects of temperature dependency of the thermophysical properties. The analytical procedure requires far less computer storage and execution time than the numerical one.

Keywords ; Natural Convection, Thermal Insulator, Horizontal Annular, Perturbation Method, Numerical Solutions, Porous Media, Gas, Isothermal Outer Wall, Heat Transfer Coefficient, Constant Physical Properties.

目 次

1. 序 論	1
2. 摂動法による解析解	1
2.1 解析の前提条件	1
2.2 基礎式	2
2.3 無次元化	3
2.4 摂動法	4
2.5 境界条件	7
2.6 解の誤差評価	9
3. 数値解と解析解の比較	13
3.1 実効熱伝導率	13
3.2 数値解と解析解の比較	14
4. 解析解による熱流動特性	17
4.1 外管等温	17
4.2 外管表面一様熱通過率	18
参 考 文 献	19

C o n t e n t s

1. Introduction	1
2. Analytical Solution by Perturbation Method	1
2.1 Fundamental Assumptions	1
2.2 Governing Equations	2
2.3 Non-dimensionalization	3
2.4 Perturbation Method	4
2.5 Boundary Conditions	7
2.6 Error Estimation	9
3. Comparison between Numerical and Analytical Solutions	13
3.1 Effective Thermal Conductivity	13
3.2 Comparison of Solutions	14
4. Thermoconvective Characteristics from Analytical Solutions.....	17
4.1 Constant Temperature at Outer Pipe	17
4.2 Uniform Overall Heat Transfer Coefficient at Outer Pipe.....	18
References	19

記 号 表

Bi	; ビオー数 ($= k(r_o - r_i) / \lambda^*$)	
c_p	; 内在気体の定圧比熱	[J/kg · K]
Da	; ダルシイ数 ($= K / (r_o - r_i)^2$)	
ΔE_ψ	; 流れ関数に関する便宜的な誤差	
ΔE_θ	; 温度に関する便宜的な誤差	
Gr	; グラスホフ数 ($= (r_o - r_i)^3 g \beta (T_i - T_\infty) / \nu^2$)	
g	; 重力加速度	[m/s ²]
h	; 外管表面熱伝達率	[W/m ² · K]
K	; 断熱材の透過係数	[m ²]
k	; 熱通過率	[W/m ² · K]
Nu	; ヌッセルト数 ($= 2 r_w h / \lambda_{air}$)	
p	; 圧 力	[N/m ²]
P	; 無次元圧力 ($= (r_o - r_i)^2 p / \rho \nu^2$)	
Pr	; プラントル数 ($= c_p \mu / \lambda^*$)	
r	; 半径方向距離	[m]
r_i	; 内管半径	[m]
r_o	; 外管内半径	[m]
r_w	; 外管外半径	[m]
R	; 無次元半径方向距離 ($= r / (r_o - r_i)$)	
Ra	; レーレイ数 ($= Gr \cdot Pr$)	
q	; 熱流束	[W/m ²]
T	; 温 度	[°C]
T_i	; 内管表面温度	[°C]
T_∞	; 外管雰囲気温度	[°C]
U	; 無次元半径方向流速成分 ($= \varepsilon (r_o - r_i) \rho \cdot c_p \cdot u / \lambda^*$)	
u	; 半径方向流速成分	[m/s]
V	; 無次元周方向流速成分 ($= \varepsilon (r_o - r_i) \rho \cdot c_p \cdot v / \lambda^*$)	
v	; 周方向流速成分	[m/s]
β	; 内在気体の体膨張係数	[1/K]
ε	; 断熱材の気孔率	
Ψ	; 無次元流れ関数	
λ_{air}	; 空気の熱伝導率	[W/m · K]
λ_{eff}	; 実効熱伝導率	[W/m · K]

λ^*	;	内在気体静止時の実効熱伝導率	[W / m · K]
λ_w	;	外管の熱伝導率	[W / m · K]
μ	;	内在気体の粘性係数	[kg / m · s]
ρ	;	内在気体の密度	[kg / m ³]
Θ	;	無次元温度 (= $\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$)	
θ	;	周方向角度	[radian]
ν	;	内在気体の動粘性係数	[m ² / s]

1. 序 論

前報告では、^[1] 水平環状断熱層内の高温高压気体の自然対流に関する、物性値の温度変化を考慮した場合の数値計算プログラムについて述べた。

数値計算プログラムを作成し、数値解を得るときに、意図した数値計算が正しく行われているかどうかをいかにして確認するかが問題となる。一般に、数値計算を必要とする場合は、解析的厳密解を得ることが困難であり、多くの場合、厳密解が得られるような仮定もしくは境界条件を設定することによって問題を単純化し、これらのもとで解いた厳密解と数値解を比較するか、既に行われた実験結果と数値解とを比較することが行われる。

ここでは先に報告した数値計算プログラムの妥当性を調べるために、物性値が一定の場合に対して、水平環状断熱層外管が等温である場合と、外管表面の熱伝達率が一樣である場合の各々の解析解と数値解を比較する。さらに、数値計算プログラムを用いて、物性値の温度変化の影響を調べるにあたり、前もって、物性値が一定の場合の熱流動特性を、摂動法による解析解を用いて調べる。この解析解では基礎式を直接数値的に解く方法と比べて、計算機の容量および記算時間を著しく減らすことができる。

2. 摂動法による解析解

本章では、運動方程式における浮力の項に含まれる流体密度以外の物性値は一定であるとして、外管が等温の場合と外管表面の熱通過率が一樣の場合について、摂動法を用いた解析を行う。

2.1 解析の前提条件

前報の数値計算において設けた仮定とは次の2点で異っている他は同一である。

(1) 流体の温度による物性値変化については、浮力に関する流体の密度変化だけを考慮し、 $\rho = \rho_{\infty} \{ 1 - \beta (T - T_{\infty}) \}$ とするが、その他については物性値一定とする。

(2) 外管は、周方向に一定温度 T_{∞} であるか、もしくは、外管表面の熱通過率 k が周方向に一樣であり、外側の雰囲気温度は一定温度 T_{∞} であるとする。

従って、外壁の周方向の熱伝導は考慮していない。上記2点以外は、前報に記した仮定と同じであるが、ここに再掲する。

(3) 2次元極座標系を用いる。座標系を図 2.1 に示す。

(4) 左右対称とし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲だけを取り扱う。

(5) 定常状態とする。

(6) 運動方程式において、Darcy の法則を適用し、対流の慣性項と粘性項は考慮しない。

1. 序 論

前報告では,^[1] 水平環状断熱層内の高温高压気体の自然対流に関する, 物性値の温度変化を考慮した場合の数値計算プログラムについて述べた。

数値計算プログラムを作成し, 数値解を得るときに, 意図した数値計算が正しく行われているかどうかをいかにして確認するかが問題となる。一般に, 数値計算を必要とする場合は, 解析的厳密解を得ることが困難であり, 多くの場合, 厳密解が得られるような仮定もしくは境界条件を設定することによって問題を単純化し, これらのもとで解いた厳密解と数値解を比較するか, 既に行われた実験結果と数値解とを比較することが行われる。

ここでは先に報告した数値計算プログラムの妥当性を調べるために, 物性値が一定の場合に対して, 水平環状断熱層外管が等温である場合と, 外管表面の熱伝達率が一樣である場合の各々の解析解と数値解を比較する。さらに, 数値計算プログラムを用いて, 物性値の温度変化の影響を調べるにあたり, 前もって, 物性値が一定の場合の熱流動特性を, 摂動法による解析解を用いて調べる。この解析解では基礎式を直接数値的に解く方法と比べて, 計算機の容量および計算時間を著しく減らすことができる。

2. 摂動法による解析解

本章では, 運動方程式における浮力の項に含まれる流体密度以外の物性値は一定であるとして, 外管が等温の場合と外管表面の熱通過率が一樣の場合について, 摂動法を用いた解析を行う。

2.1 解析の前提条件

前報の数値計算において設けた仮定とは次の2点で異っている他は同一である。

- (1) 流体の温度による物性値変化については, 浮力に関する流体の密度変化だけを考慮し, $\rho = \rho_{\infty} \{ 1 - \beta (T - T_{\infty}) \}$ とするが, その他については物性値一定とする。
- (2) 外管は, 周方向に一定温度 T_{∞} であるか, もしくは, 外管表面の熱通過率 k が周方向に一樣であり, 外側の雰囲気温度は一定温度 T_{∞} であるとする。
従って, 外壁の周方向の熱伝導は考慮していない。上記2点以外は, 前報に記した仮定と同じであるが, ここに再掲する。
- (3) 2次元極座標系を用いる。座標系を図2.1に示す。
- (4) 左右対称とし, $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲だけを取り扱う。
- (5) 定常状態とする。
- (6) 運動方程式において, Darcy の法則を適用し, 対流の慣性項と粘性項は考慮しない。

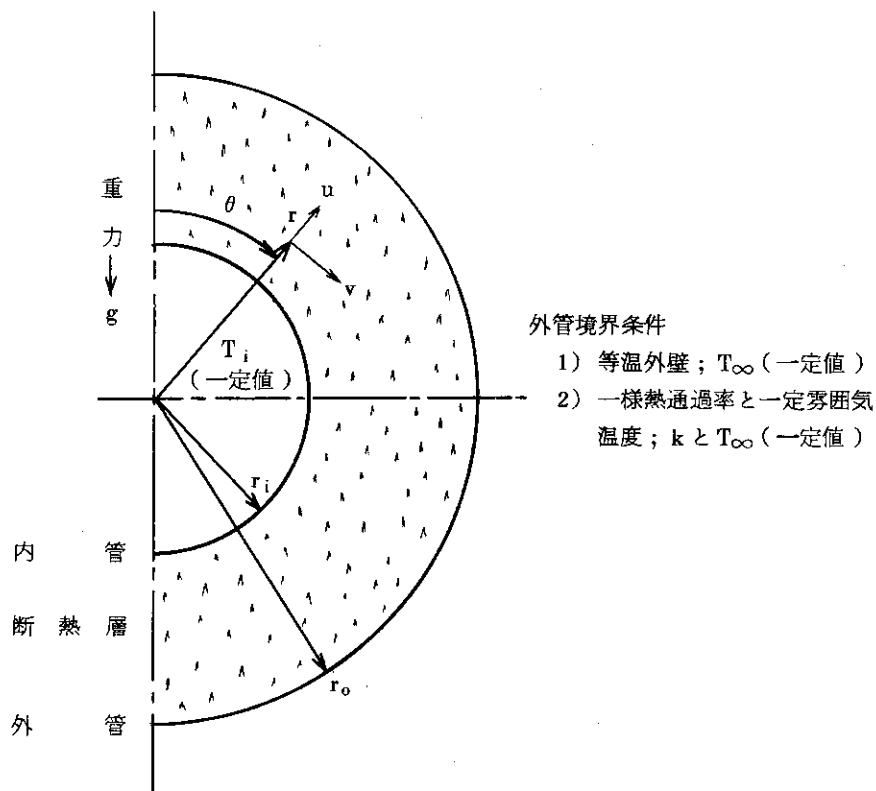


図 2.1 座 標 系

(7) エネルギー式における熱伝導率 λ^* は、断熱層内の気体が静止しているときの実効熱伝導率を与える。実効熱伝導率とは、断熱材と内在する気体を巨視的に一様と考えて断熱材の熱伝導、気体の流動による熱伝達を入れて熱伝導率と同じ次元を持つ係数である。

(8) 内管表面温度は一定とする。

(9) エネルギー式において、粘性による散逸は無視し、熱ふく射の効果は考慮しない。

2.2 基 礎 式

前節で述べた前提条件のもとで、水平環状断熱層内の気体に対する連続の式、運動方程式、エネルギー式は次のようになる。

〔連続の式〕

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (2-1)$$

〔運動方程式〕

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g \cos \theta + \frac{\varepsilon}{K} \mu u = 0 \quad (2-2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho g \sin \theta + \frac{\epsilon}{K} \mu v = 0 \quad (2-3)$$

[エネルギー式]

$$\epsilon \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \lambda^* \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (2-4)$$

2.3 無次元化

半径方向距離 r ，半径方向速度 u ，周方向速度 v ，圧力 p の各変数と，温度 T を次式に従って無次元化する。

$$R = \frac{r}{r_o - r_i} \quad \left(R_i = \frac{r_i}{r_o - r_i}, R_o = \frac{r_o}{r_o - r_i} \right) \quad (2-5)$$

$$U = \epsilon (r_o - r_i) \frac{\rho c_p}{\lambda^*} u \quad (2-6)$$

$$V = \epsilon (r_o - r_i) \frac{\rho c_p}{\lambda^*} v \quad (2-7)$$

$$P = \frac{(r_o - r_i)}{\rho \nu^2} p \quad (2-8)$$

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (2-9)$$

特性無次元数を次のように定義する。

$$G_r = \frac{(r_o - r_i)^3 g \beta (T_i - T_\infty)}{\nu^2} \quad (2-10)$$

$$P_r = \frac{c_p \mu}{\lambda^*} \quad (2-11)$$

$$D_a = \frac{K}{(r_o - r_i)^2} \quad (2-12)$$

レイリー数 $R_a (= G_r \cdot P_r)$ とダルシイ数の積 $(R_a D_a)'$ は，

$$(R_a D_a)' = \frac{K g \beta (T_i - T_\infty)}{\nu} (r_o - r_i) \frac{c_p \rho}{\lambda^*} \quad (2-13)$$

となり，前報で定義した $R_a D_a$ とは，，数値計算で物性値を一定としたとき，次のような関係となる。

$$R_a D_a = (R_a D_a)' \frac{T_o + 273.15}{T_i - T_\infty} \quad (2-14)$$

(2-5) - (2-13) 式の無次元量を用いて，(2-1) - (2-4) 式を無次元化する。得られた無次元式に次式で表される無次元流れ関数 Ψ

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2-15)$$

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (2-16)$$

を導入すると、連続の式は自動的に満足される。さらに、2つの運動方程式から無次元圧力 \underline{P} を消去すると、

$$-(Ra Da)'\left(\frac{\partial \Theta}{\partial R} \sin \theta + \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \cos \theta\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \quad (2-17)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \quad (2-18)$$

なる無次元流れ関数 Ψ と無次元温度 Θ に関する連立偏微分方程式が得られる。

(2-17)式と(2-18)式が、水平環状断熱層内の気体の自然対流を支配する方程式である。しかしながら、この両式からこのままで解析的に2つの未知数、 Ψ と Θ を求めることはできない。

2.4 摂動法

パラメーター $(Ra Da)'$ は、自然対流の大きさを表わす指標であり、 $(Ra Da)'$ の値が大きい程、自然対流が強く起こっていることを示す。(2-17)式と(2-18)式を解くために、断熱層内の自然対流による熱輸送が、熱伝導を基底として、この熱伝導と自然対流による熱伝達の摂動とから成っていると考え、流れ関数 Ψ と温度 Θ を次のように展開する。

$$\Psi = \Psi_0 + (Ra Da)'\Psi_1 + (Ra Da)'^2\Psi_2 + (Ra Da)'^3\Psi_3 + \dots \quad (2-19)$$

$$\Theta = \Theta_0 + (Ra Da)'\Theta_1 + (Ra Da)'^2\Theta_2 + (Ra Da)'^3\Theta_3 + \dots \quad (2-20)$$

自然対流が起こっていない場合、つまり $(Ra Da)' = 0$ のとき、(2-19)式と(2-20)式より、

$$\Psi = \Psi_0 \quad (2-21)$$

$$\Theta = \Theta_0 \quad (2-22)$$

となり、断熱層内の熱輸送は熱伝導だけで行われているので Θ_0 は熱伝導解であり、 Ψ_0 は、 R, θ に依存しない任意の定数である。ここでは、 $\Psi_0 = 0$ とする。

(2-19)、(2-20)式のように Ψ と Θ を $(Ra Da)'$ のべき級数で表わし、(2-17)、(2-18)式にそれらを代入すると、 $(Ra Da)'$ の各べきごとに $\Theta_0, \Psi_1, \Theta_1, \Psi_2, \Theta_2, \dots$ に関して線型化された微分方程式を得る。 $(Ra Da)'$ の2次の項まで採れば、次のような5つの方程式で表わされる。

< $(Ra Da)'$ の0次 >

$$\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_0}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2-23)$$

< $(Ra Da)'$ の1次 >

$$-\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial R} \sin \theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \cos \theta\right) + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_1}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2-24)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial R} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial R} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_1}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta^2} \quad (2-25)$$

<(RaDa)'の2次>

$$-\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial R} \sin \theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_2}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \Theta_1}{\partial R} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial R} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} \frac{\partial \Theta_0}{\partial R} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial R} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_2}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2-27)$$

(2-23)式からまず Θ_0 が求まり、この Θ_0 を用いて(2-24)式から Ψ_1 が求まる。以下順次 $\Theta_1, \Psi_2, \Theta_2$ が、各々(2-25), (2-26), (2-27)式から得られる。2.1節で仮定したように、外管は、等温、もしくは熱通過率が一樣であり雰囲気温度が一定なので、 $\partial \Theta_0 / \partial \theta = 0$ となる。(2-23)-(2-27)式を解くと、次のような解が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} \Theta &= \Theta_0 + (RaDa)' \Theta_{1R} \cos \theta + (RaDa)'^2 (\Theta_{2R_1} \cos 2\theta + \Theta_{2R_2}) \end{aligned} \right. \quad (2-28)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi &= (RaDa)' \Psi_{1R} \sin \theta + (RaDa)'^2 \Psi_{2R} \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \right. \quad (2-29)$$

ここで、 $\Theta_0, \Theta_{1R}, \Theta_{2R_1}, \Theta_{2R_2}, \Psi_{1R}, \Psi_{2R}$ はRのみの関数であり、

$$\left. \begin{aligned} \Theta_0 &= c_1 \ln R + c_2 \\ \Theta_{1R} &= c_5 R + \frac{c_6}{R} + B_2(R) \\ \Theta_{2R_1} &= c_9 R^2 + \frac{c_{10}}{R^2} + B_4(R) \\ \Theta_{2R_2} &= c_{11} \ln R + c_{12} + B_5(R) \\ \Psi_{1R} &= c_3 R + \frac{c_4}{R} + B_1(R) \\ \Psi_{2R} &= c_7 R^2 + \frac{c_8}{R^2} + B_3(R) \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

と表わされ、 $B_1(R), B_2(R), \dots, B_5(R)$ は、

$$\left. \begin{aligned} B_1(R) &= \frac{c_1}{2} R \ln R \\ B_2(R) &= \frac{c_1}{2} \left(c_3 - \frac{c_1}{4} \right) R \ln R - \frac{c_1 c_4}{2} \frac{\ln R}{R} + \frac{c_1^2}{8} R (\ln R)^2 \\ B_3(R) &= \left(\frac{c_6}{2} + \frac{c_1 c_4}{8} \right) - \frac{c_1 c_4}{4} \ln R \\ &\quad + \left(\frac{c_1 c_3}{8} - \frac{3}{64} c_1^2 \right) R^2 \ln R + \frac{c_1}{32} R^2 (\ln R)^2 \\ B_4(R) &= - \left(\frac{g_2}{4} + \frac{g_7}{8} \right) - \frac{g_6}{4} \ln R + \left(\frac{g_1}{4} - \frac{g_4}{16} + \frac{g_5}{32} \right) R^2 \ln R \end{aligned} \right\} \quad (2-31)$$

$$-\frac{g_7}{4} (\ln R)^2 + \left(\frac{g_4}{8} - \frac{g_5}{16}\right) R^2 (\ln R)^2 + \frac{g_5}{12} R^2 (\ln R)^3$$

$$-\frac{g_3}{4} \frac{\ln R}{R^2}$$

$$B_5(R) = \left(\frac{h_1}{8} - \frac{h_4}{8} + \frac{3}{16} h_5 - \frac{3}{8} h_7\right) R^2 + \left(\frac{h_3}{8} + \frac{h_8}{8}\right) \frac{1}{R^2}$$

$$+ \frac{h_2}{4} (\ln R)^2 + \frac{h_6}{12} (\ln R)^3 + \left(\frac{h_4}{8} - \frac{h_5}{4} + \frac{9}{16} h_7\right) R^2 \ln R$$

$$+ \left(\frac{h_5}{8} - \frac{3}{8} h_7\right) R^2 (\ln R)^3 + \frac{h_7}{8} R^2 (\ln R)^3 + \frac{h_8}{8} \frac{\ln R}{R^2}$$

$$g_1 = \frac{c_1 c_3^2}{4} - \frac{c_1^2 c_3}{16} + c_1 c_7 - \frac{c_1 c_5}{4}$$

$$g_2 = \frac{c_1^2 c_4}{16} + \frac{c_1 c_6}{4} - c_3 c_6 + c_4 c_5$$

$$g_3 = -\frac{c_1 c_4^2}{4} + c_1 c_8$$

$$g_4 = \frac{c_1^2 c_3}{4} - \frac{3}{64} c_1^3$$

$$g_5 = \frac{c_1^3}{16}$$

$$g_6 = c_1 c_3 c_4 - \frac{c_1 c_6}{2} - \frac{c_1^2 c_4}{4}$$

$$g_7 = \frac{3}{8} c_1^2 c_4$$

$$h_1 = 2 c_3 c_5 + \frac{c_1 c_5}{2} + \frac{c_1 c_3}{2} \left(c_3 - \frac{c_1}{4}\right)$$

$$h_2 = \frac{c_1 c_6}{2} - \frac{c_1^2 c_4}{8}$$

$$h_3 = -2 c_4 c_6 - \frac{c_1 c_4^2}{2}$$

$$h_4 = c_1 c_3^2 + \frac{c_1^2 c_3}{2} + c_1 c_5 - \frac{c_1^3}{8}$$

$$h_5 = \frac{3}{4} c_1^2 c_3 + \frac{c_1^3}{16}$$

$$h_6 = -\frac{c_1^2 c_4}{4}$$

$$h_7 = \frac{c_1^3}{8}$$

$$h_8 = c_1 c_4^2$$

(2 - 3 2)

である。ln は自然対数を表しており、 c_1, c_2, \dots, c_{12} は境界条件によって定まる積分定数である。

(2-28)式と(2-29)式から明らかなように、温度は、熱伝導解に、自然対流の擾動が $\cos(n\theta)$ の重ね合せによって表わされ、流れ関数は、 $\sin(n\theta)$ の重ね合せによって表わされている。

2.5 境界条件

流れ関数 Ψ に関する境界条件を次のように与える。

(a-1) すべての θ に対して、内外壁面上、つまり、 $r = r_i$ と $r = r_o$ において、半径方向速度 $u = 0$ とする。(2-6)式と(2-15)式より、 $\partial\Psi/\partial\theta = 0$ となり、 Ψ は定数であることが分かる。ここでは $\Psi = 0$ とする。

したがって、すべての θ に対して、 $R = R_i, R = R_o$ で、 $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ 。

(a-2) すべての r に対して、 $\theta = 0$ と π の境界で、左右対称であることから、この境界面を通る流れはない。すなわち周方向速度 $v = 0$ とする。(2-7)、(2-16)式より、 $\partial\Psi/\partial R = 0$ となり、(a-1)と同様に $\Psi = 0$ とする。

したがって、すべての R に対して、 $\theta = 0$ と π で $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ 。

温度に関する境界条件は、外管が等温である場合、および、外管表面の熱通過率が一樣であり、雰囲気温度が一定の場合とに分けて考える。まず外管が等温である場合、

(b-1) すべての θ に対して、内管は周方向に一定温度 T_i とする。

したがって、すべての θ に対して、 $R = R_i$ で、 $\Theta_0 = 1, \Theta_1 = \Theta_2 = 0$ 。

(b-2) すべての r に対して、問題の対称性から、 $\theta = 0$ と π における境界面を通る熱の流れはないとする。

したがって、すべての R に対して、 $\theta = 0$ と π で、 $\partial\Theta_0/\partial\theta = \partial\Theta_1/\partial\theta = \partial\Theta_2/\partial\theta = 0$ 。

(b-3) すべての θ に対して、外管は周方向に一定温度 T_∞ とする。

したがって、すべての θ に対して、 $R = R_o$ で、 $\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = 0$ 。

となる。外管表面の熱通過率が周方向に一樣で、雰囲気温度が一定値 T_∞ である場合には、

(c-1) (b-1)と同じ。

(c-2) (b-2)と同じ。

(c-3) すべての θ に対して、 $r = r_o$ で、

$$-\lambda^* \frac{\partial T}{\partial r} = k(T - T_\infty) \quad (2-33)$$

であるとする。(2-5)、(2-9)式を用いて上式を無次元化すると、

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = -\frac{k(r_o - r_i)}{\lambda^*} \Theta \quad (2-34)$$

となる。

したがって、すべての θ に対して、 $R = R_o$ で、

$$\frac{\partial \Theta_j}{\partial R} = -B_i \cdot \Theta_j \quad (j = 0, 1R, 2R_1, 2R_2) \quad (2-35)$$

ただし、 B_i はビオ一数 ($= \frac{k(r_o - r_i)}{\lambda^*}$) である。また熱通過率 k は、

$$\frac{k(r_o - r_i)}{\lambda^*} = \frac{1}{R_o} \frac{1}{\frac{\lambda^*}{\lambda_w} \ln \frac{R_w}{R_o} + \frac{\lambda^*}{\lambda_{air}} \frac{2}{Nu}} \quad (2-36)$$

と表わされ、外壁の熱伝導率 λ_w と表面の熱伝達率 k を合せた値である。ここで、 $Nu = 2r_w h / \lambda_{air}$ である。温度と流れ関数の解は、(2-28)式と(2-29)式から明らかなように、境界条件(a-2), (b-2), (c-2)をすでに満たしている。残りの境界条件から積分定数 c_1, c_2, \dots, c_{12} を決める。外管が等温の場合には、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\ln R_i - \ln R_o} \\ c_2 &= 1 - c_1 \ln R_i \\ c_3 &= \frac{R_i B_1(R_i) - R_o B_1(R_o)}{R_o^2 - R_i^2} \\ c_4 &= -R_i \{ c_3 R_i + B_1(R_i) \} \\ c_5 &= \frac{R_i B_2(R_i) - R_o B_2(R_o)}{R_o^2 - R_i^2} \\ c_6 &= -R_i \{ c_5 R_i + B_2(R_i) \} \\ c_7 &= \frac{R_i^2 B_3(R_i) - R_o^2 B_3(R_o)}{R_o^4 - R_i^4} \\ c_8 &= -R_i^2 \{ c_7 R_i^2 + B_3(R_i) \} \\ c_9 &= \frac{R_i^2 B_4(R_i) - R_o^2 B_4(R_o)}{R_o^4 - R_i^4} \\ c_{10} &= -R_i^2 \{ c_9 R_i^2 + B_4(R_i) \} \\ c_{11} &= \frac{B_5(R_i) - B_5(R_o)}{\ln R_o - \ln R_i} \\ c_{12} &= -c_{11} \ln R_i - B_5(R_i) \end{aligned} \right\} \quad (2-37)$$

となり、外管表面で熱通過率が一定の場合には、 $c_2, c_3, c_4, c_6, c_7, c_8, c_{10}, c_{12}$ は、(2-37)式と同じ式で表わされ、 c_1, c_5, c_9, c_{11} は、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{-Bi}{\frac{1}{R_o} + Bi \cdot \ln \frac{R_o}{R_i}} \\ c_5 &= \frac{Bi R_o \{ R_i B_2(R_i) - R_o B_2(R_o) \} - \{ R_i B_2(R_i) + R_o^2 B_2'(R_o) \}}{Bi \cdot R_o (R_o^2 - R_i^2) + (R_i^2 + R_o^2)} \\ c_9 &= \frac{Bi \cdot R_o \cdot \{ R_i^2 B_4(R_i) - R_o^2 B_4(R_o) \} - \{ 2R_i^2 B_4(R_i) + R_o^3 B_4'(R_o) \}}{Bi \cdot R_o (R_o^4 - R_i^4) + 2(R_o^4 + R_i^4)} \end{aligned} \right\}$$

$$c_{11} = \frac{Bi \cdot \{ B_5(R_i) - B_5(R_o) \} - B_5'(R_o)}{\frac{1}{R_o} + Bi \cdot \ln \frac{R_o}{R_i}}$$

(2-38)

となる。ここで、 $B_2'(R)$, $B_4'(R)$, $B_5'(R)$ は、

$$\begin{aligned} B_2'(R) &= \frac{dB_2(R)}{dR} \\ &= \frac{c_1}{2} \left(c_3 - \frac{c_1}{4} \right) - \frac{c_1 c_4}{2} \frac{1}{R^2} + \frac{c_1}{2} \left(c_3 + \frac{c_1}{4} \right) \ln R \\ &\quad + \frac{c_1^2}{8} (\ln R)^2 + \frac{c_1 c_4}{2} \frac{\ln R}{R^2} \\ B_4'(R) &= \frac{dB_4(R)}{dR} \\ &= \left(\frac{g_1}{4} - \frac{g_4}{16} + \frac{g_5}{32} \right) R - \frac{g_6}{4} \frac{1}{R} - \frac{g_3}{4} \frac{1}{R^3} \\ &\quad + \left(\frac{g_1}{2} + \frac{g_4}{8} - \frac{g_5}{16} \right) R \ln R + \left(\frac{g_4}{4} + \frac{g_5}{8} \right) R (\ln R)^2 \\ &\quad + \frac{g_5}{6} R (\ln R)^3 - \frac{g_7}{2} \frac{\ln R}{R} + \frac{g_3}{2} \frac{\ln R}{R^3} \\ B_5'(R) &= \frac{dB_5(R)}{dR} \\ &= \left(\frac{h_1}{4} - \frac{h_4}{8} + \frac{h_5}{8} - \frac{3}{16} h_7 \right) R - \left(\frac{h_3}{4} + \frac{h_8}{8} \right) \frac{1}{R^3} \\ &\quad + \left(\frac{h_4}{4} - \frac{h_5}{4} + \frac{3}{8} h_7 \right) R \ln R + \left(\frac{h_5}{4} - \frac{3}{8} h_7 \right) R (\ln R)^2 \\ &\quad + \frac{h_7}{4} R (\ln R)^3 + \frac{h_2}{2} \frac{\ln R}{R} + \frac{h_6}{4} \frac{(\ln R)^2}{R} - \frac{h_8}{4} \frac{\ln R}{R^3} \end{aligned}$$

(2-39)

である。

(2-38)式において、 $Bi \rightarrow \infty$ とすると c_1 , c_5 , c_9 , c_{11} は、(2-37)式のそれらと等しくなる。つまり、外管表面の熱通過率 k が無限大になれば、外管が等温の境界条件に等しくなる。したがって、外管を等温とする境界条件は、外管表面の熱通過率が一様で、雰囲気温度が一定の境界条件の特殊な場合である。

2.6 解の誤差評価

流れ関数 Ψ と温度 Θ を $(Ra Da)'$ で展開し、ここでは $(Ra Da)'^2$ の項までで近似し、

$$\Psi = (\text{Ra Da})' \Psi_1 + (\text{Ra Da})'^2 \Psi_2$$

$$\Theta = \Theta_0 + (\text{Ra Da})' \Theta_1 + (\text{Ra Da})'^2 \Theta_2$$

としているが、上式の近似が妥当であるためには、真の誤差 ΔE_Ψ と ΔE_Θ が、

$$\Delta E_\Psi = \frac{\sum_1^\infty (\text{Ra Da})'^i \Psi_i - \sum_1^2 (\text{Ra Da})'^i \Psi_i}{\sum_1^\infty (\text{Ra Da})'^i \Psi_i} \quad (2-40)$$

$$\Delta E_\Theta = \frac{\sum_1^\infty (\text{Ra Da})'^i \Theta_i - \sum_1^2 (\text{Ra Da})'^i \Theta_i}{\Theta_0 + \sum_1^\infty (\text{Ra Da})'^i \Theta_i} \quad (2-41)$$

十分小さくなくてはならない。したがって、一般にこのような解析解は、適用可能な範囲を持つこととなる。この適用可能な範囲を明確にしておく必要があるが、(2-40)式と(2-41)式の ΔE_Ψ と ΔE_Θ を求めることができないため、 ΔE_Ψ と ΔE_Θ に代って次のような便宜的な誤差を考える。

$$\overline{\Delta E_\Psi} = \frac{\int_{R_i}^{R_o} \int_0^\pi \Delta E_\Psi' d\theta dR}{\int_{R_i}^{R_o} \int_0^\pi d\theta dR} \quad (2-42)$$

$$\overline{\Delta E_\Theta} = \frac{\int_{R_i}^{R_o} \int_0^\pi \Delta E_\Theta' d\theta dR}{\int_{R_i}^{R_o} \int_0^\pi d\theta dR} \quad (2-43)$$

ここで、

$$\Delta E_\Psi' = \frac{(\text{Ra Da})'^2 \Psi_2}{(\text{Ra Da})' \Psi_1 + (\text{Ra Da})'^2 \Psi_2} \quad (2-44)$$

$$\Delta E_\Theta' = \frac{(\text{Ra Da})'^2 \Theta_2}{\Theta_0 + (\text{Ra Da})' \Theta_1 + (\text{Ra Da})'^2 \Theta_2} \quad (2-45)$$

(2-42)、(2-43)式によって表わされる積分平均値である便宜的誤差 $\overline{\Delta E_\Psi}$ と $\overline{\Delta E_\Theta}$ が、十分小さな値であれば、流れ関数、温度とも各々 $(\text{Ra Da})'^3 \Psi_3$ 、 $(\text{Ra Da})'^3 \Theta_3$ 以上の項は、 Ψ および Θ の真値に与える影響は小さく、 $(\text{Ra Da})'^2$ の項までで近似することは妥当であると考えられる。

外管が等温の場合、 $\overline{\Delta E_\Psi}$ と $\overline{\Delta E_\Theta}$ は、図 2.2 に見られるように、ある $(\text{Ra Da})'$ の値から急激に大きくなっている。

解析解の適用可能な範囲を、ここでは $\overline{\Delta E_\Psi}$ と $\overline{\Delta E_\Theta}$ が 0.3 以下である $(\text{Ra Da})'$ の値までとした。このように定義した $(\text{Ra Da})'$ の上限値 $(\text{Ra Da})'_{01}$ は、無次元内管半径 R_i に対して次式で近似的に表わすことができる。

$$(\text{Ra Da})'_{01} = 9.68 + 40.0 \times R_i - 0.470 \times R_i^2 \quad (2-46)$$

ただし、 R_i は $0.2 \leq R_i \leq 5$ である。 $\overline{\Delta E_\Psi}$ と $\overline{\Delta E_\Theta}$ の値の一方が 0.3 を越えると、内管における局所熱流束が負の値を示したり、断熱層内温度が、内管温度より一部分で高くなったりすることがある。したがって、(2-46)式によって求められる $(\text{Ra Da})'_{01}$ 以上の $(\text{Ra Da})'$ に対して求められる解析解は妥当なものではないと考えられる。

外管の熱通過率が一樣な場合、 $Bi \rightarrow \infty$ なら、 $\overline{\Delta E_\Psi}$ 、 $\overline{\Delta E_\Theta}$ は、外管が等温の場合のそれらと同じ値になる。図 2.3 は、外管の熱通過率が一樣な場合、 Bi 数と $\overline{\Delta E_\Theta}$ 、 $\overline{\Delta E_\Psi}$ の関係を示している。この図から分かるように、 Bi 数が無限大から小さくなるに従って、 $\overline{\Delta E_\Psi}$ と $\overline{\Delta E_\Theta}$

の値は、外管が等温の場合のそれらの値から除々に小さくなっている。この結果から、外管の熱通過率が一樣な場合でも、(2-46)式によって得られる $(RaDa)'$ の値を、妥当な解析解が得られる $(RaDa)'$ の上限値として用いれば、安全側に誤差を評価していることになる。

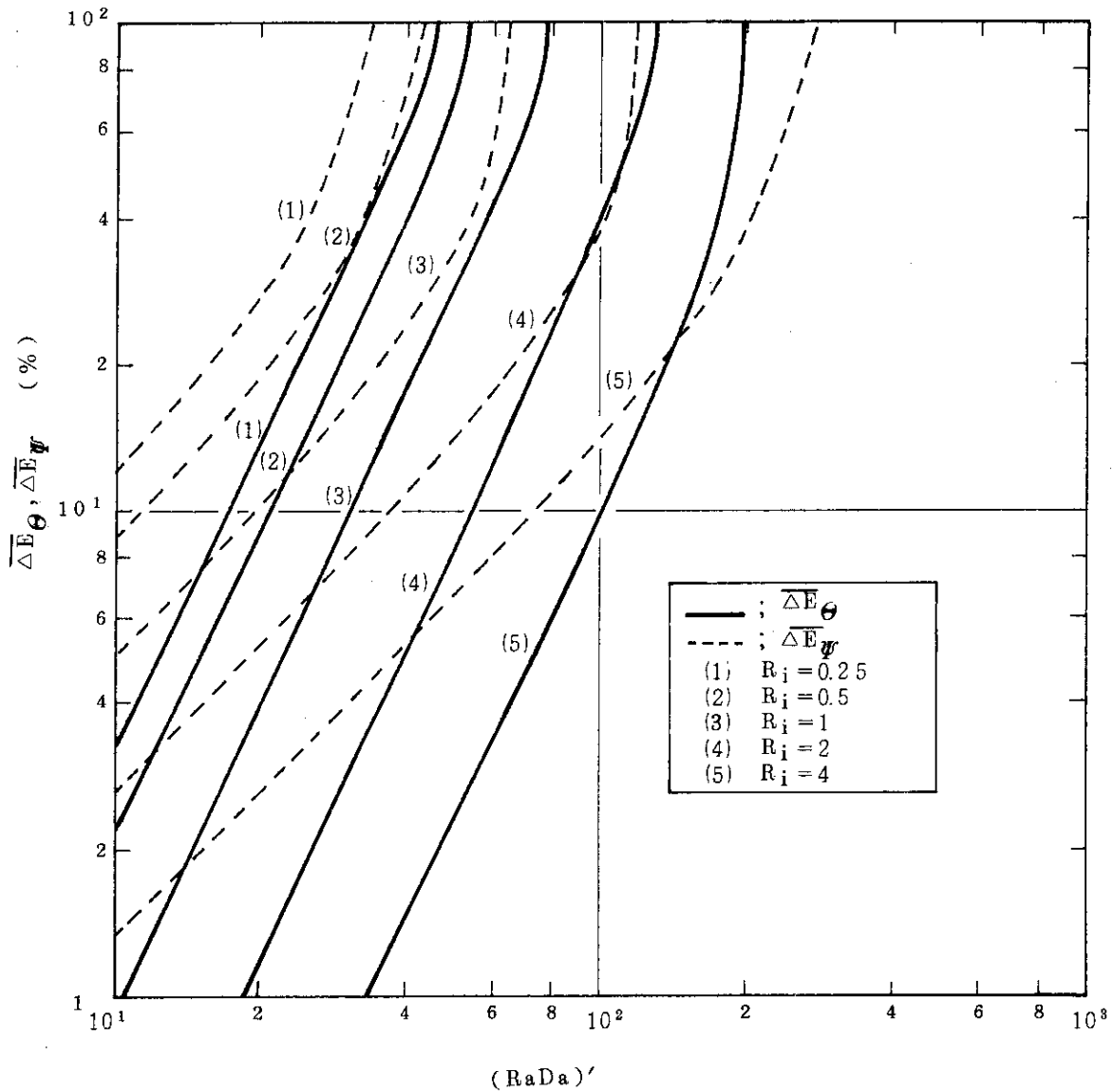


図 2.2 温度と流れ関数の解析解の誤差 (外管等温)

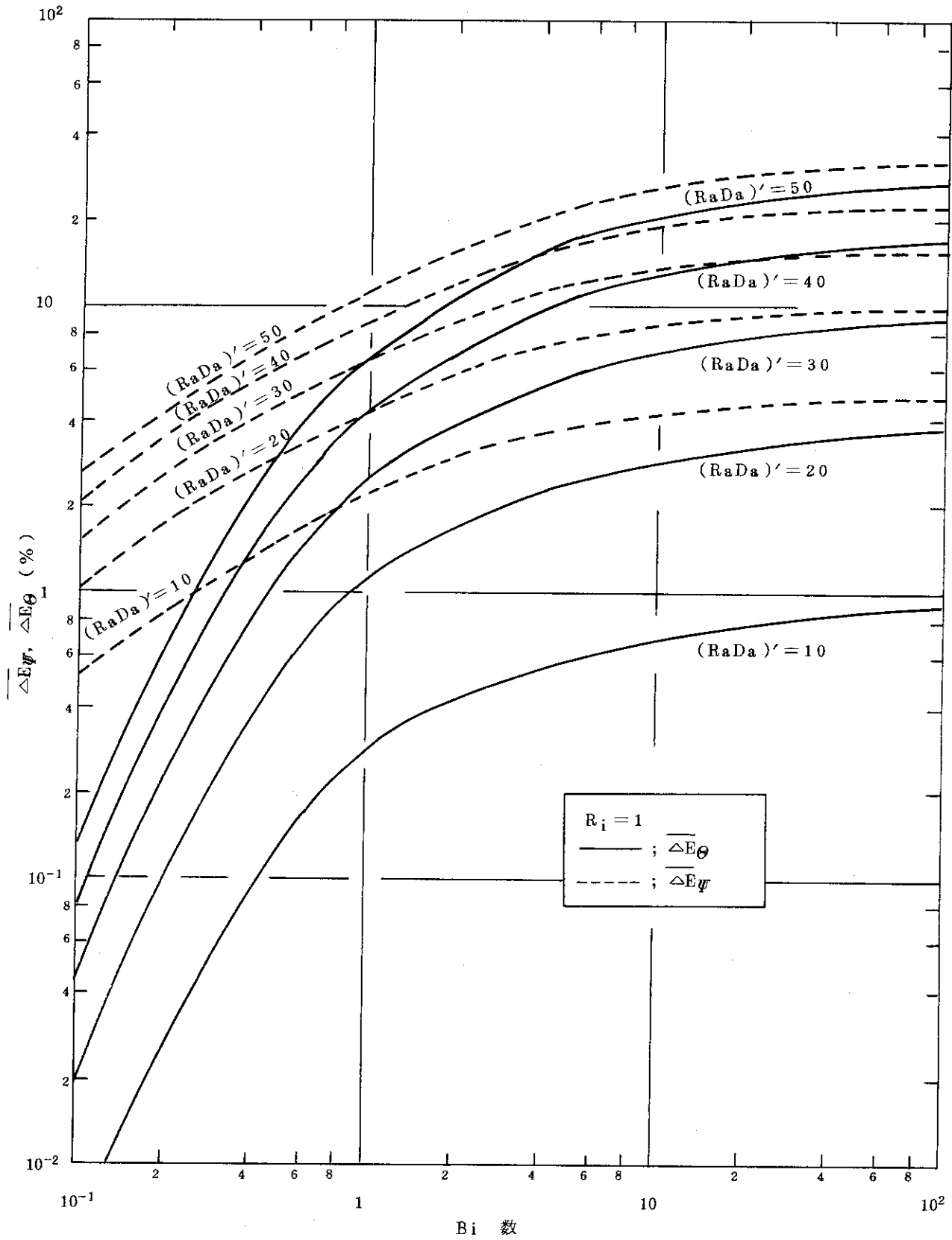


図 2.3 外管熱通過率が一樣な境界条件の場合の解析解の誤差

3. 数値解と解析解の比較

前章で、物性値が一定の場合の断熱層内の自然対流に対して、その流れ関数と温度を解析的に求めた。本章では、この解析によって得られた流れ関数、温度、実効熱伝導率の結果と、前報で報告した数値計算プログラムを用い物性値一定の条件で数値計算を行った結果とを比較する。

3.1 実効熱伝導率

断熱層内の気体の熱流動特性を表わす指標として、次のような値を考える。

断熱材自身の熱伝導、断熱層内の気体の熱伝導、この内在気体の自然対流による熱伝達の三者を包括するような熱伝導率 λ_{eff} を次式によって定義し、

$$\dot{q} \Big|_{r=r_o} = \lambda_{eff} \frac{T_i - T_w}{r_o \ln \frac{r_o}{r_i}} \quad (3-1)$$

この λ_{eff} を実効熱伝導率と呼ぶ。ただし、 T_w は外管の温度であり、等温外管の場合には、 $T_w = T_\infty$ となる。内在気体が静止している場合の実効熱伝導率 λ^* は、外管内面で、

$$\dot{q} \Big|_{r=r_o} = -\lambda^* \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_o} \quad (3-2)$$

と表わされる。 λ^* に対する λ_{eff} の相対的上昇 λ_{eff}/λ^* は、(3-1)式と(3-2)式より、無次元化して、

$$\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} = -\frac{T_i - T_\infty}{T_i - T_w} R_o \ln \frac{R_o}{R_i} \frac{\partial \Theta}{\partial R} \Big|_{R=R_o} \quad (3-3)$$

となり、周方向に変化する。

数値計算においては、3次以上の微小項を無視して、

$$\frac{\partial T}{\partial R} \Big|_{R=R_o} = \frac{3T_{i,j} - 4T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{2\Delta R} \quad (3-4)$$

より λ_{eff}/λ^* を求めた。外管が等温の場合の解析解では、 $T_w = T_\infty$ であり、(2-28)式より、

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} &= -R_o \ln \frac{R_o}{R_i} \frac{\partial \Theta}{\partial R} \Big|_{R=R_o} \\ &= 1 + f_1 \cdot (Ra Da)' \cdot \cos \theta + (f_2 \cos 2\theta + f_2') (Ra Da)'^2 \end{aligned} \quad (3-5)$$

ただし、

$$f_1 = R_o \ln \frac{R_i}{R_o} \frac{\partial \Theta_{1R}}{\partial R} \Big|_{R=R_o}$$

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= R_o \ln \frac{R_i}{R_o} \left. \frac{\partial \Theta_{2R_1}}{\partial R} \right|_{R=R_o} \\ f'_2 &= R_o \ln \frac{R_i}{R_o} \left. \frac{\partial \Theta_{2R_2}}{\partial R} \right|_{R=R_o} \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

となる。 λ_{eff}/λ^* の周方向平均値 $(\lambda_{eff}/\lambda^*)_m$ は、(3-5)式より、

$$\left(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*}\right)_m = 1 + f'_2 (Ra Da)'^2 \quad (3-7)$$

となる。外管に一樣熱通過率を与えた場合、

$$\dot{q} \Big|_{r=r_o} = k (T_w - T_\infty)$$

より、

$$\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} = -R_o \ln \frac{R_o}{R_i} \cdot \left. \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=R_o} \frac{1}{1 + \left. \frac{1}{Bi} \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=R_o}} \quad (3-8)$$

となる。比 λ_{eff}/λ^* は、断熱層内の熱流動特性の主要な指標である。

3.2 数値解と解析解の比較

まず、外管の境界条件として、外管を等温とした場合の数値解と解析解を比較した。数値解では、外管表面の熱伝達率に 10^{10} を入力することによって、外管が等温であるという境界条件を与えた。表 3.1 にその結果を示す。上段の計算結果は、J.P.Caltagirone⁽³⁾ による数値解析結果である。中段が本解析解であり、下段が前報で述べた計算プログラムによる数値解である。無次元数の定義の違いにより、Caltagironeの修正レーリイ数 Ra^* と本解析の $(Ra Da)'$ と数値解の $Ra Da$ とは、次のような関係を持つ。

$$\left. \begin{aligned} (Ra Da)' &= Ra^* \left(\frac{r_o}{r_i} - 1 \right) \\ Ra Da &= Ra^* \left(\frac{r_o}{r_i} - 1 \right) \frac{T_\infty + 273.15}{T_i - T_\infty} \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

数値計算では、 $T_i = 1000^\circ C$ 、 $T_o = T_\infty = 200^\circ C$ の値を入力した。表中の No.4 の場合には、 $(Ra Da)'$ の値が (2-46) 式より得られる $(Ra Da)_{crit}$ を越えるため、解析解は求めている。この表から分かるように、3者は良く一致している。解析解の場合、誤差 $\overline{\Delta E_\theta}$ と $\overline{\Delta E_q}$ が 30% 近くになると、両数値解と少し違っている。

外管の境界条件として、外管表面に一樣な熱通過率を与えた場合の数値解と解析解を比較した結果を表 3.2 に示す。上段が解析解であり、下段が数値解である。解析解では、外管に厚みがなく、したがって、熱伝導によって外管内を周方向に輸送される熱を考慮していない。このため数値解では、外管内の熱伝導は半径方向だけとし、計算プログラムを修正して計算した。両者は良く一致している。

以上のように、前報で述べた数値計算プログラムにより意図した計算が正しく行われることが確認された。

表 3.1 外管が等温の場合の数値解と解析解の比較 (物性値一定)

No	解法	無次元半径 R_i	$\frac{Ra^*}{(RaDa)'} \frac{RaDa}{RaDa}$	$(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*})_m$	$\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} \Big _{\theta=0}$	$\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} \Big _{\theta=\pi}$	ψ_{max}	備考
1	1	0.333	5.00	1.09	1.78	0.572	1.50	
	2		1.50	1.10	1.86	0.608	1.56	$\overline{\Delta E\psi} = 16.8\%$, $\overline{\Delta E\theta} = 6.6\%$
	3		8.87	1.11	1.90	0.568	1.53	
2	1		1.00	1.02	1.31	0.765	1.18	
	2		1.00	1.02	1.31	0.772	1.17	$\overline{\Delta E\psi} = 0.9\%$, $\overline{\Delta E\theta} = 4.9\%$
	3		5.91	1.03	1.32	0.777	1.17	
3	1	2	5.00	1.33	3.10	0.303	5.49	
	2		5.00	1.43	3.31	0.639	6.19	$\overline{\Delta E\psi} = 33.1\%$, $\overline{\Delta E\theta} = 27.9\%$
	3		2.96	1.35	3.29	0.326	5.52	
4	1		2.00	2.63	8.30	0.0545	1.59	
	2							
	3		1.18	2.66	8.73	0.0708	1.65	
5	1	2.414	1.00	1.08	1.74	0.556	5.00	
	2		4.14	1.08	1.75	0.573	5.11	$\overline{\Delta E\psi} = 9.1\%$, $\overline{\Delta E\theta} = 3.5\%$
	3		2.45	1.08	1.74	0.567	4.99	

解法1; Cattagirone, 解法2; 解析解, 解法3; 数値解

$$(RaDa)' = Ra^* \left(\frac{r_o}{r_i} - 1 \right), \quad RaDa = Ra^* \left(\frac{r_o}{r_i} - 1 \right) \frac{T_o + 273.15}{T_i - T_\infty} \quad (\text{ただし } T_i = 1000 \text{ C}, T_o = T_\infty = 200 \text{ C})$$

表 3.2 外管表面の熱通過率が一樣な場合の数値解と解析解の比較 (物性値一定)

No	解法	無次元半径 R_i	$(\frac{RaDa}{RaDa})'$	$(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*})_m$	$\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} \Big _{\theta=0}$	$\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} \Big _{\theta=\pi}$	$\theta_w \Big _{\theta=0}$	$\theta_w \Big _{\theta=\pi}$	ψ_{max}	備	考
1	2	0.25	2.00	1.22	2.24	0.571	0.100	0.0276	1.90	$\overline{\Delta E_{\psi}} = 25.0\%$	$\overline{\Delta E_{\theta}} = 10.9\%$
	3		5.46	1.21	2.23	0.509	0.0996	0.0247	1.80		
2	2	1	1.00	1.02	1.28	0.784	0.0845	0.0535	1.09	$\overline{\Delta E_{\psi}} = 4.3\%$	$\overline{\Delta E_{\theta}} = 0.7\%$
	3		2.73	1.02	1.28	0.788	0.0842	0.0538	1.09		
3	2	1	2.00	1.08	1.63	0.627	0.105	0.0433	2.20	$\overline{\Delta E_{\psi}} = 8.8\%$	$\overline{\Delta E_{\theta}} = 2.90\%$
	3		5.46	1.07	1.61	0.630	0.104	0.0435	2.15		
4	2	1	4.00	1.32	2.58	0.475	0.157	0.0331	4.47	$\overline{\Delta E_{\psi}} = 19.2\%$	$\overline{\Delta E_{\theta}} = 12.9\%$
	3		1.09	1.26	2.41	0.425	0.148	0.0298	4.12		
5	2	4	1.00	1.25	2.14	0.374	0.185	0.0561	1.14	$\overline{\Delta E_{\psi}} = 12.1\%$	$\overline{\Delta E_{\theta}} = 7.7\%$
	3		2.73	1.19	2.03	0.432	0.154	0.0373	1.08		

解法 2 ; 解析解, 解法 3 ; 数値解, $RaDa = (RaDa)' \cdot \frac{T_o + 273.15}{T_i - T_{\infty}}$ (ただし $T_i = 1000^{\circ}C, T_o = T_{\infty} = 0^{\circ}C$)

4. 解析解による熱流動特性

摂動法を用いた自然対流の解析では、外管内の周方向の熱輸送を考慮していない。二重管外管に耐圧の役割を負わせるような場合には、ある程度の肉厚を持ったステンレス鋼管などが使われるが、熱伝導が良いため、管内の周方向の熱輸送量はかなりの大きさとなる。このような場合の解析結果は、特に外管の周方向温度分布などは、実際の場合と異なると考えられる。しかしながら、摂動法による解析では、大型計算機を使って非常に短い計算時間で、広範囲にわたるパラメータサーベイを行うことができる。数値計算では、大型計算機を使い、1回の計算に平均3分程度かかるが、解析解を求める場合は、100回の計算を1分足らずで行うことができる。したがって、摂動法による解析で、定性的に熱流動特性を調べておくことは有効である。以下では、外管が等温の場合と、外管の熱通過率が一樣な場合との境界条件に対して、熱流動特性に与える物性値の温度変化の影響を調べる際の手がかりとするため、一定物性値の場合の解析解を求め定性的に熱流動特性を調べる。

4.1 外管等温

外管が等温であり、物性値が一定である場合の熱流動特性を調べる。

図4.1は、 $\theta = 0, \pi/2, \pi$ における半径方向の温度分布を、 $(Ra Da)'$ = 10, 20, 40の場合について示した図である。 $(Ra Da)'$ の値が大きくなるにつれ、つまり、自然対流が強くなるようになるにつれて、断熱層上部の、特に内管近くの温度が上昇し、それに対して、断熱層下部では温度が低下していることが分かる。図4.2は、図4.1の各 $(Ra Da)'$ に対応した流れ関数の等高線図(流線)である。 $(Ra Da)'$ の値が大きくなるに従って、流れ関数 ψ の絶対値が大きくなり、またその勾配が大きくなって、自然対流が強くなるようになることを示している。また、流れ関数が最大値をとる点が、断熱層の上部に移動している。

実効熱伝導率 λ_{eff} は、(3-5)、(3-6)式によって、また、 $(\lambda_{eff}/\lambda^*)_m$ は、(3-7)式によって求められるが、かなり複雑な計算となる。 λ_{eff}/λ^* と $(\lambda_{eff}/\lambda^*)_m$ の値を容易に求めることができるように、(3-6)式の f_1, f_2, f'_2 を R_i の多項式で近似する。数%以内の誤差で近似すると f_1, f_2, f'_2 は、

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 5.183 \times 10^{-2} - 3.551 \times 10^{-2} \times R_i + 1.274 \times 10^{-2} \times R_i^2 \\ &\quad - 2.223 \times 10^{-3} \times R_i^3 + 1.485 \times 10^{-4} \times R_i^4 \\ f_2 &= 8.805 \times 10^{-4} - 1.059 \times 10^{-3} \times R_i + 4.958 \times 10^{-4} \times R_i^2 \\ &\quad - 1.015 \times 10^{-4} \times R_i^3 + 7.549 \times 10^{-6} \times R_i^4 \\ f'_2 &= 6.831 \times 10^{-4} - 8.622 \times 10^{-4} \times R_i + 4.352 \times 10^{-4} \times R_i^2 \\ &\quad - 9.547 \times 10^{-5} \times R_i^3 + 7.524 \times 10^{-6} \times R_i^4 \end{aligned} \right\} 4-1)$$

となる。ただし、 $0.2 \leq R_i \leq 5$ である。

外壁における局所熱流束は、次式で表わされ、

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_m} = \frac{\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*}}{\left(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*}\right)_m} \quad (4-2)$$

(3-5), (3-7), (4-1)式を用いれば, 容易に計算できる。

図4.3(a)-(c)に, R_i の値が 0.5, 1.0, 2.0 の場合の λ_{eff}/λ^* の周方向分布を示す。 $(RaDa)'$ の値が大きくなると, 断熱層上部で λ_{eff} は, λ^* の 2~3 倍の大きな値になる。

図4.4(a)-(c)は, $R_i = 0.5, 1.0, 2.0$ の場合の, $(RaDa)'$ に対する λ_{eff}/λ^* を周方向 $\theta = 0$ (断熱層上部), $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$ をパラメータに示した図である。 $(RaDa)'$ の値が大きくなるに従って, $\theta = 0$ における λ_{eff}/λ^* の値は次第に 1 より大きくなり, 一方 $\theta = \pi$ における値は 1 より小さくなって行く。図中の点線で示した部分は, $\overline{\Delta E_{\theta}}$ と $\overline{\Delta E_{\theta}}$ の一方が 30% を越えた場合である。 $\theta = \pi$ における λ_{eff}/λ^* 変化が, 比較的大きな $(RaDa)'$ で, 減少から増加へと変わっている。これは, 温度と流れ関数を $(RaDa)'$ の 2 次まで近似しているため, λ_{eff}/λ^* の値が減少から増加に変わる $(RaDa)'$ 以下の範囲の結果が妥当なものである。図4.4(a)-(c)を重ねて見れば, これらの曲線は, 横軸をずらすことにより, ほぼ一致することが分かる。

図4.5は, $(RaDa)'$ に対して $\left(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*}\right)_m$ を図示したものである。点線で示した部分は, $(RaDa)'$ の値が (2-46)式によって求められる $(RaDa)''_1$ の値を越えている。 $(RaDa)''_1$ 以下の $(RaDa)'$ に対して, $\left(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*}\right)_m$ の値が 1 に近い範囲でのみ, この解析解は有効である。

以上と同様な結果は, 文献〔5〕にも一部報告されてはいるが, ここでは次節の外管表面一様熱通過率と比較参考にするため示しておく。

4.2 外管表面一様熱通過率

外管における温度の境界条件として, 外管表面に一様な熱通過率が与えられた場合, 物性値を一定とした断熱層内の熱流動特性について述べる。これについても, 文献〔5〕で報告されているが, Bi 数が小さな場合を取り扱っていない。ここでは, Bi 数が小さい場合も含め検討する。

図4.6に, 断熱層内の半径方向温度分布を示す。これは, 外管等温の場合の図4.1に対応している。外管等温の場合と同様, $(RaDa)'$ の値が大きくなるに従って, 断熱層上部の, 特に内管近くの温度が上昇し, それに対し, 断熱層下部の温度が減少していることが分かる。

図4.7に, λ_{eff}/λ^* と外管温度の周方向分布を示す。 λ_{eff}/λ^* の周方向分布は, 外管等温の場合と同様の傾向を示している。外管温度は, 断熱層上部で最高となり, 断熱層下部で最低となっている。 $(RaDa)'$ の値が大きくなるに従って, 最高温度はますます高く, 最低温度はますます低くなり, 断熱層上部と下部の温度差は大きくなって行く。

図4.8は, $(RaDa)'$ に対する λ_{eff}/λ^* を, 周方向 $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$ をパラメータとして示した図であり, 外管等温の場合の図4.4(b)に対応している。

図4.9は, $(RaDa)'$ に対して, 様々な R_i の場合の $\left(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*}\right)_m$ を示している。

図 4.8 と図 4.9 の曲線の形は、各々に対応する外管等温の場合の図 4.4 (b) と図 4.5 の曲線の形と相似である。

以上のように、熱流動特性に対する R_i と $(RaDa)'$ の影響は、外管等温の場合と同じ傾向を示している。次に、熱流動特性に対する Bi 数の影響を調べる。

図 4.10 は、 $R_i = 1$ 、 $(RaDa)' = 4.0$ のとき、 Bi 数と各周方向 $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$ における実効熱伝導率との関係を示している。 Bi 数の増加と共に、断熱層上部 ($\theta = 0$) の λ^{eff}/λ^* は増加し、 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ の λ^{eff}/λ^* は減少している。しかしながら、 λ^{eff}/λ^* は、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ と $\theta = \pi$ では、各々、 $Bi \approx 2.5$ で最大、 $Bi \approx 4$ で最小となっている。

図 4.11 は、 $R_i = 1$ のとき、 $(RaDa)'$ をパラメータとした、 Bi 数と $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ の関係を示している。各 $(RaDa)'$ の値に対する $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、 Bi 数が大きくなるに従って、ある値に漸近している。 Bi 数が無限大の場合は、外管等温の境界条件の場合と同一であるため、 Bi 数が無限大に近づくとき、 $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、外管等温の場合の値に漸近する。 Bi 数が 0 に近づくとき、 $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、いづれも 1 に近づいている。 Bi 数が 0 の条件は、外管断熱という境界条件を与えることに対応している。したがって、断熱層内の温度はすべて内管温度に等しくなり、断熱層内で自然対流が生じないため、 $\lambda^{eff}/\lambda^* = 1$ となる。

図 4.11 において、各 $(RaDa)'$ に対する $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、ある Bi 数で最大値を取っている。

図 4.12 は、 Bi 数と外管最高温度 Θ_w^{max} の関係を示している。 Bi 数が 0 に近づくとき最高温度は内管温度に近づき、 Bi 数が無限大に近づくとき最高温度は雰囲気温度に等しくなる。

図 4.13 は、 Bi 数と、外管最高温度と外管最低温度との差 ($\Theta_w^{max} - \Theta_w^{min}$) との関係を示している。 Bi 数が 0 または無限大に近づくとき温度差は 0 に近づいている。図 4.11 と同様に、この図でも、温度差は、ある Bi 数で最大となっている。

以上のように、摂動法による解析によって、物性値が一定の場合の断熱層内の自然対流の熱流動特性を定性的に調べた。この解析の欠点は、強い自然対流が断熱層内に存在する場合、実効熱伝導率の比 $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ の値で言えば、約 1.5 以上の場合、妥当な結果が得られないことである。しかしながら、計算機の非常に短い計算時間で定性的、定量的熱流動特性を把握することができるという点において、非常に有用であった。

参 考 文 献

- [1] 小川益郎ほか, JAERI-M 8109
- [2] 下村寛昭, 岡本芳三: 日本原子力学会誌, Vol.20, No.8, pp.583-590 (1978)
- [3] Caltagirone, J.P., : J.Fluid Mech., Vol.76, part 2, pp.337-362, (1976)
- [4] 越後亮三ほか: 日本機械学会論文集 (B編), 45巻, 389号, pp.91-98 (1979)
- [5] Burns, P.J. and Tien, C.L., : Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.22, pp.929-939 (1979)

図 4.8 と図 4.9 の曲線の形は、各々に対応する外管等温の場合の図 4.4 (b) と図 4.5 の曲線の形と相似である。

以上のように、熱流動特性に対する R_i と $(RaDa)'$ の影響は、外管等温の場合と同じ傾向を示している。次に、熱流動特性に対する Bi 数の影響を調べる。

図 4.10 は、 $R_i = 1$ 、 $(RaDa)' = 4.0$ のとき、 Bi 数と各周方向 $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$ における実効熱伝導率との関係を示している。 Bi 数の増加と共に、断熱層上部 ($\theta = 0$) の λ^{eff}/λ^* は増加し、 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ の λ^{eff}/λ^* は減少している。しかしながら、 λ^{eff}/λ^* は、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ と $\theta = \pi$ では、各々、 $Bi \approx 2.5$ で最大、 $Bi \approx 4$ で最小となっている。

図 4.11 は、 $R_i = 1$ のとき、 $(RaDa)'$ をパラメータとした、 Bi 数と $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ の関係を示している。各 $(RaDa)'$ の値に対する $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、 Bi 数が大きくなるに従って、ある値に漸近している。 Bi 数が無限大の場合は、外管等温の境界条件の場合と同一であるため、 Bi 数が無限大に近づくとき、 $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、外管等温の場合の値に漸近する。 Bi 数が 0 に近づくとき、 $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、いずれも 1 に近づいている。 Bi 数が 0 の条件は、外管断熱という境界条件を与えることに対応している。したがって、断熱層内の温度はすべて内管温度に等しくなり、断熱層内で自然対流が生じないため、 $\lambda^{eff}/\lambda^* = 1$ となる。

図 4.11 において、各 $(RaDa)'$ に対する $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ は、ある Bi 数で最大値を取っている。

図 4.12 は、 Bi 数と外管最高温度 Θ_w^{max} の関係を示している。 Bi 数が 0 に近づくとき最高温度は内管温度に近づき、 Bi 数が無限大に近づくとき最高温度は雰囲気温度に等しくなる。

図 4.13 は、 Bi 数と、外管最高温度と外管最低温度との差 ($\Theta_w^{max} - \Theta_w^{min}$) との関係を示している。 Bi 数が 0 または無限大に近づくとき温度差は 0 に近づいている。図 4.11 と同様に、この図でも、温度差は、ある Bi 数で最大となっている。

以上のように、摂動法による解析によって、物性値が一定の場合の断熱層内の自然対流の熱流動特性を定性的に調べた。この解析の欠点は、強い自然対流が断熱層内に存在する場合、実効熱伝導率の比 $(\lambda^{eff}/\lambda^*)_m$ の値で言えば、約 1.5 以上の場合、妥当な結果が得られないことである。しかしながら、計算機の非常に短い計算時間で定性的、定量的熱流動特性を把握することができるという点において、非常に有用であった。

参 考 文 献

- (1) 小川益郎ほか、JAERI-M 8109
- (2) 下村寛昭、岡本芳三：日本原子力学会誌，Vol.20, No.8, pp.583-590 (1978)
- (3) Caltagirone, J.P., : J.Fluid Mech., Vol.76, part 2, pp.337-362, (1976)
- (4) 越後亮三ほか：日本機械学会論文集 (B編)，45巻, 389号, pp.91-98 (1979)
- (5) Burns, P.J. and Tien, C.L., : Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.22, pp.929-939 (1979)

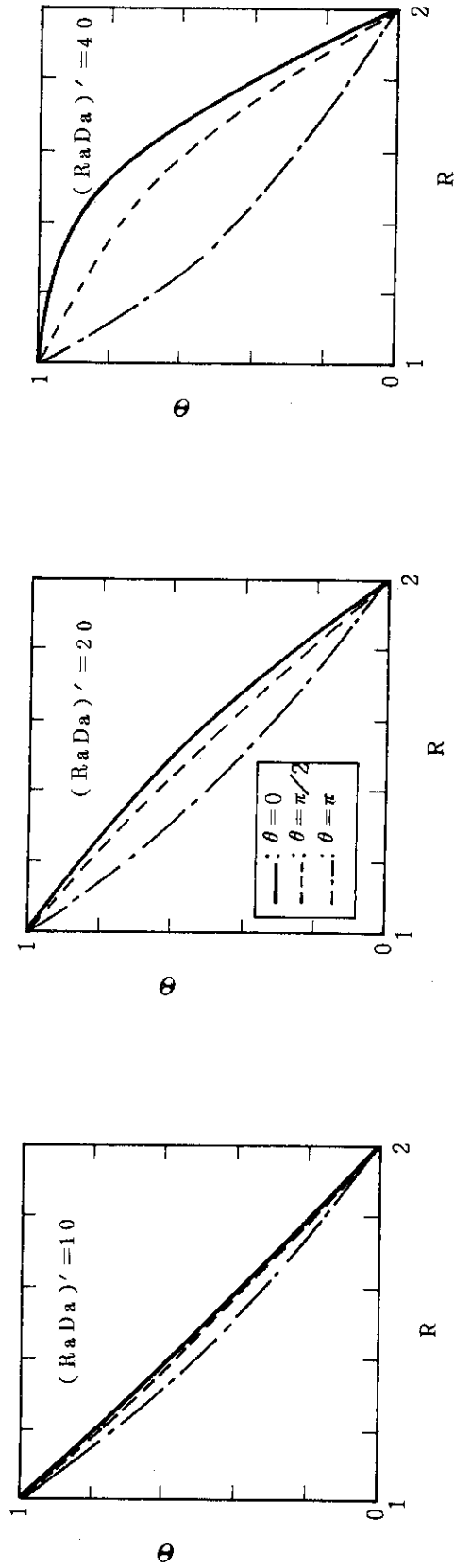
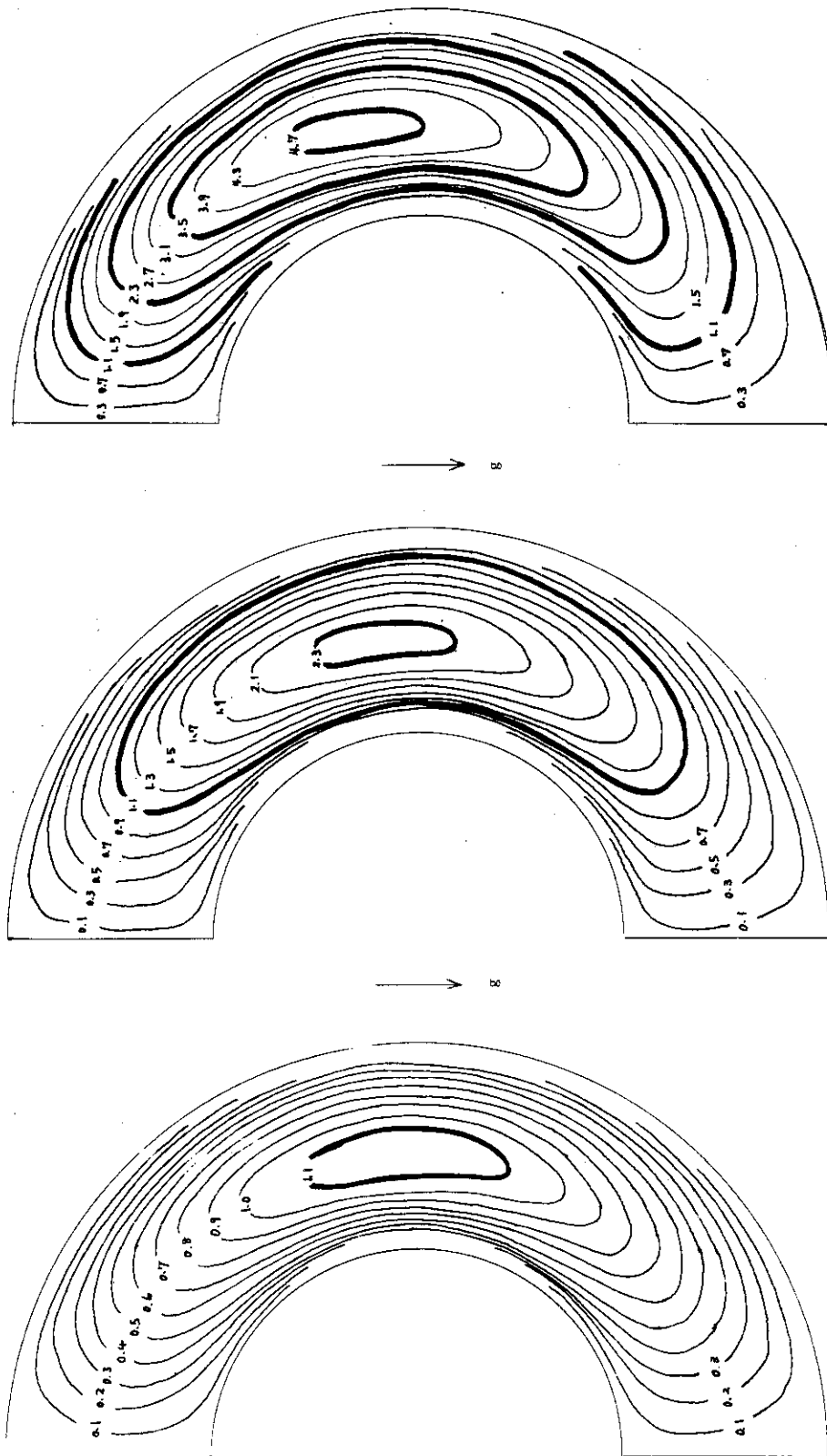


図 4.1 外管等温の場合の $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ における半径方向の無次元温度分布 ($R_i = 1$)



$(RaDa)' = 40$
 $\psi_{max} = 4.86$

$(RaDa)' = 20$
 $\psi_{max} = 2.36$

$(RaDa)' = 10$
 $\psi_{max} = 1.17$

図 4.2 外管等温の場合の $R_i = 1$ の時の無次元流れ関数の等高線図

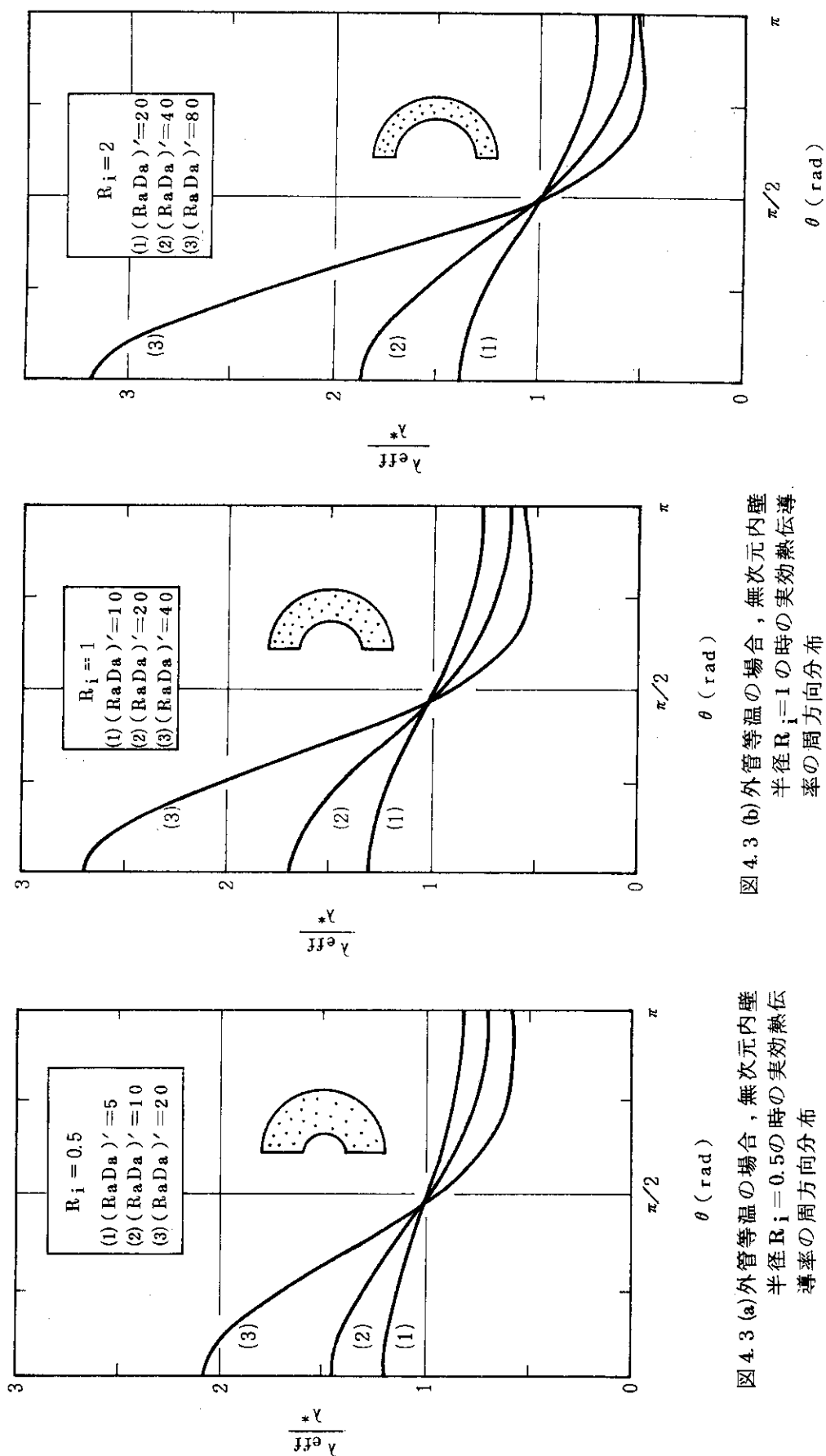


図 4.3 (a) 外管等温の場合，無次元内壁
半径 $Ri = 0.5$ の時の実効熱伝
導率の周方向分布

図 4.3 (b) 外管等温の場合，無次元内壁
半径 $Ri = 1$ の時の実効熱伝導
率の周方向分布

図 4.3 (c) 外管等温の場合，無次元内壁
半径 $Ri = 2$ の時の実効熱伝導
率の周方向分布

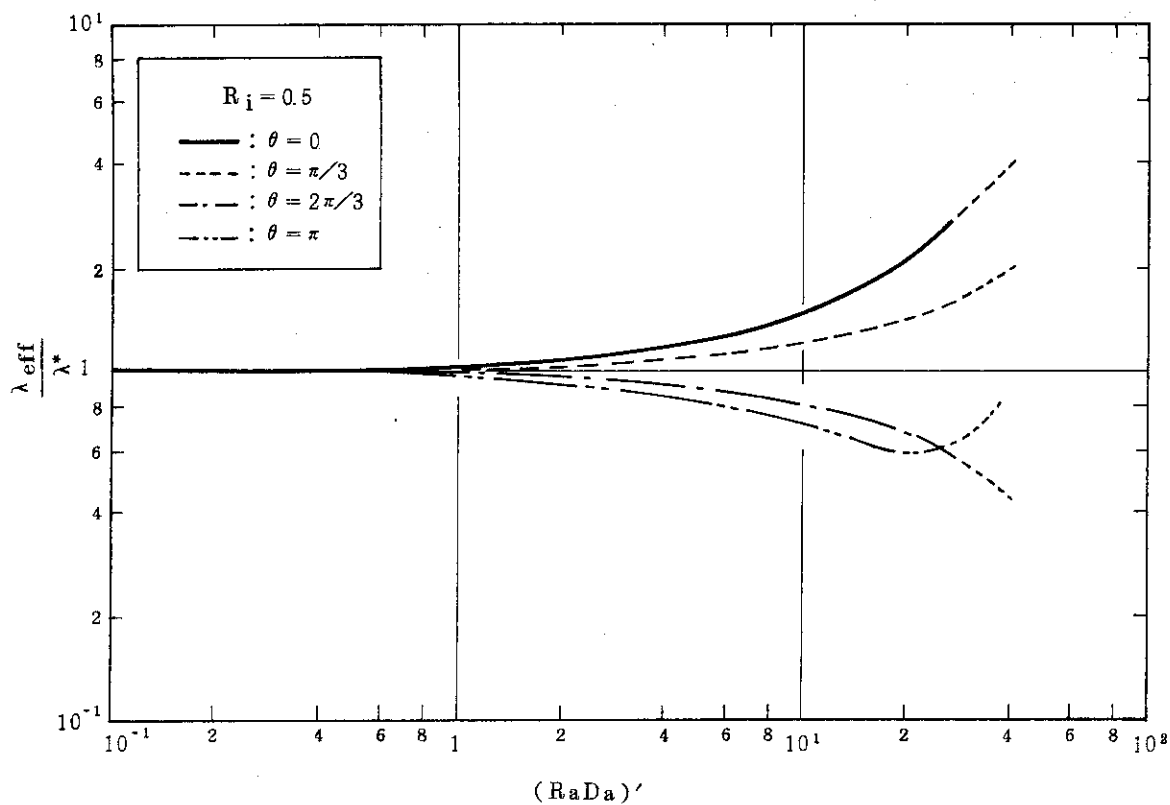


図 4.4(a) 外管等温の場合，無次元内壁半径 $R_i = 0.5$ の時の $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi$ における実効熱伝導率と $(RaDa)'$ の関係

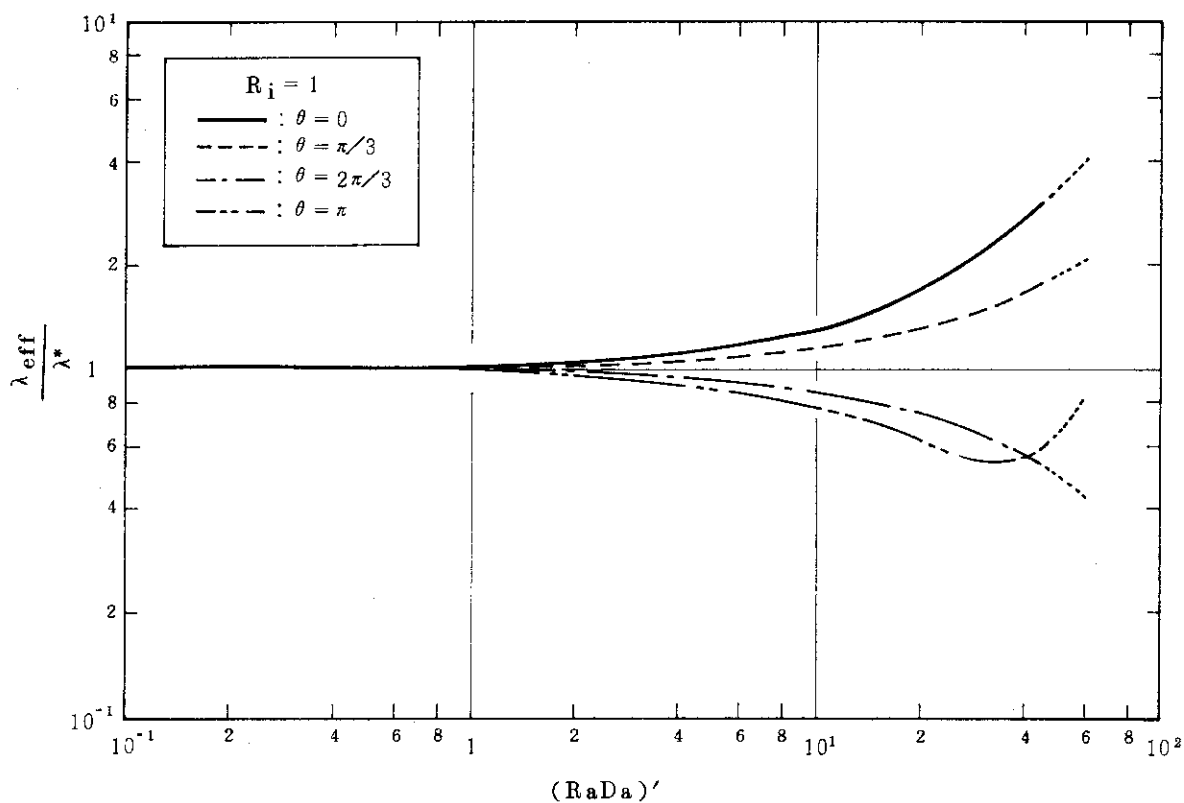


図 4.4(b) 外管等温の場合，無次元内壁半径 $R_i = 1$ の時の $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi$ における実効熱伝導率と $(RaDa)'$ の関係

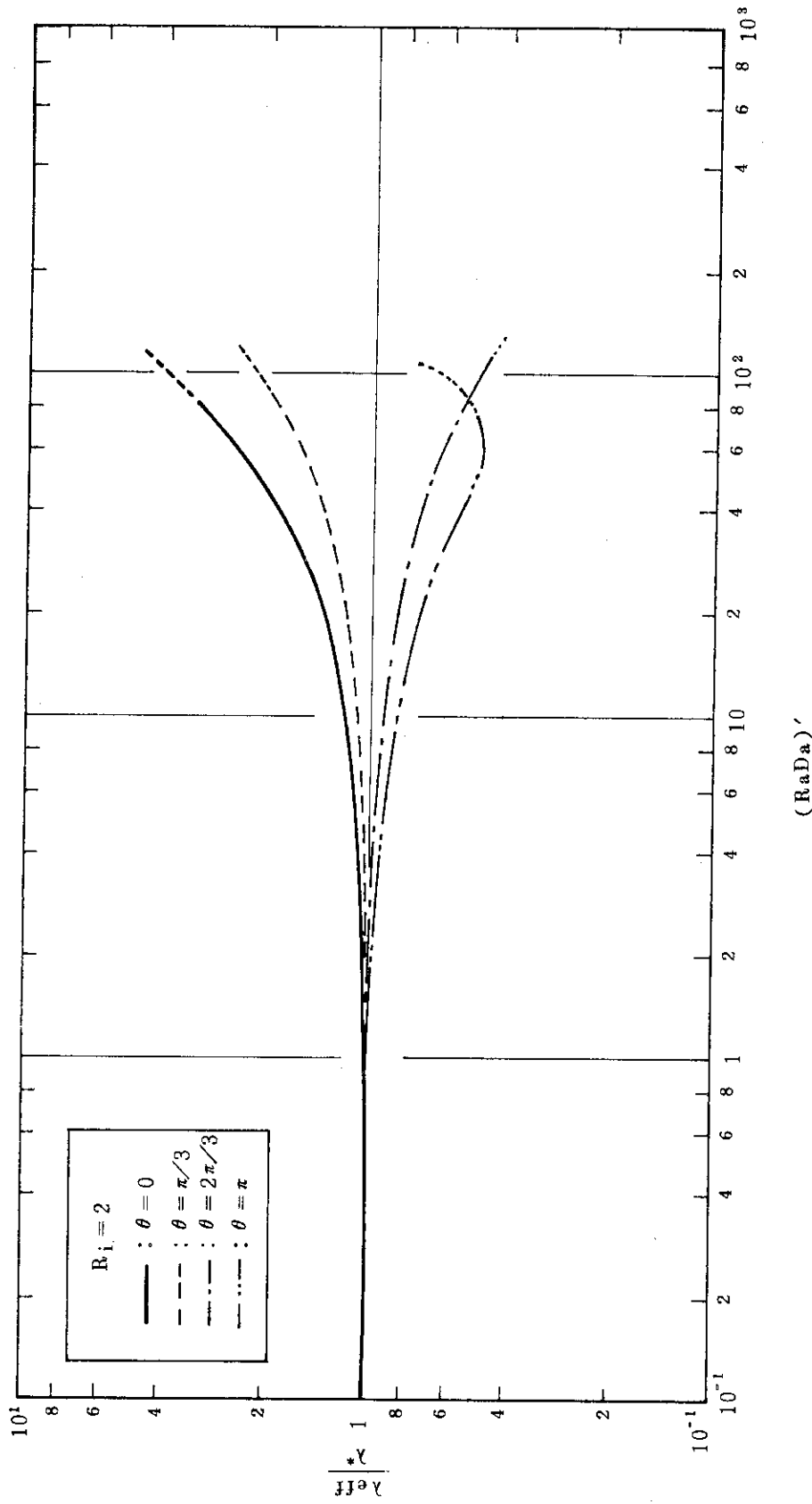


図 4.4(c) 外管等温の場合，無次元内壁半径 $R_i = 2$ の時の $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi$ における実効熱伝導率と $(RaDa)'$ の関係

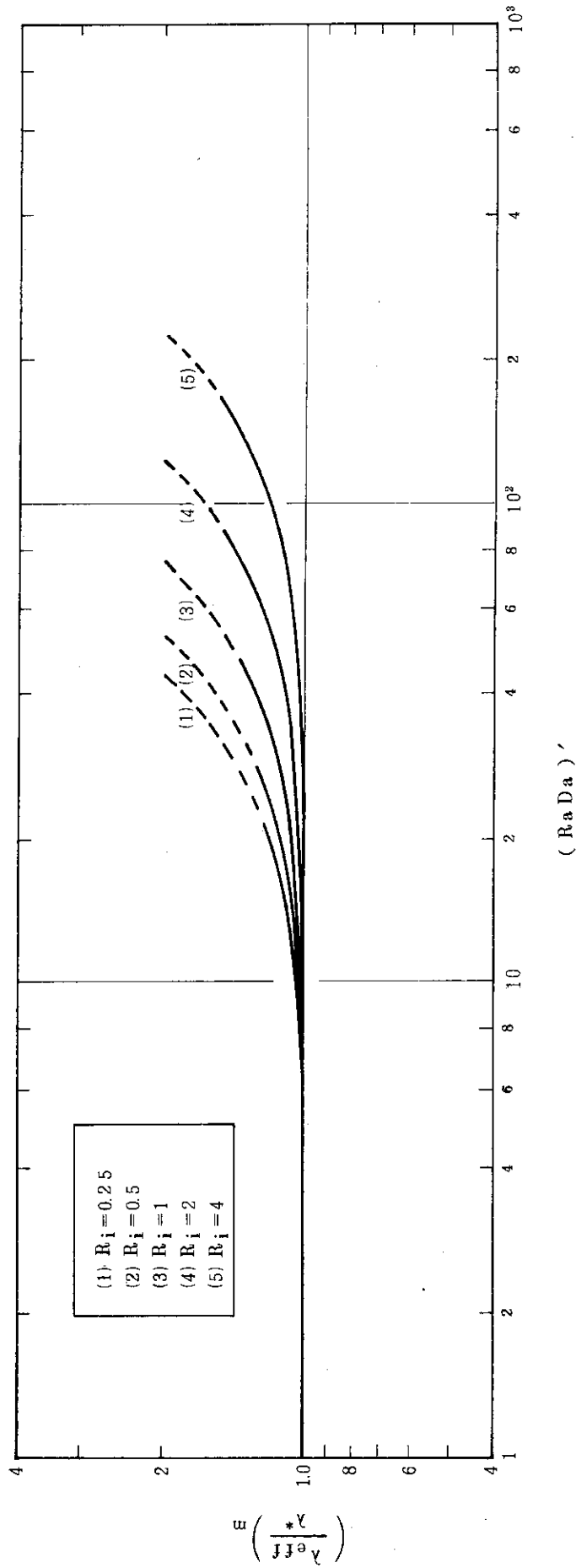


図 4.5 外管等温の場合の平均実効熱伝導率と $(Ra Da)'$ の関係

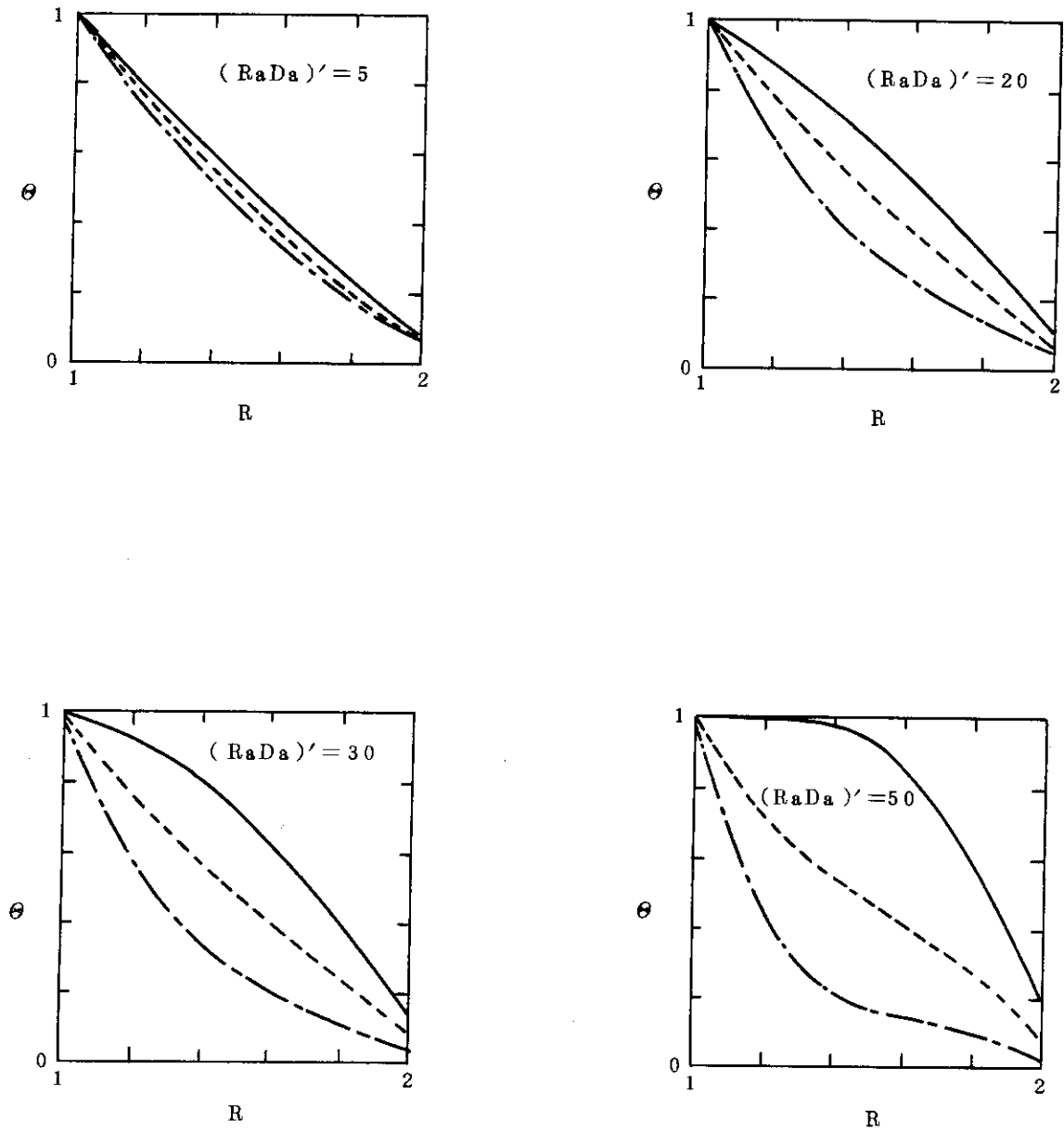
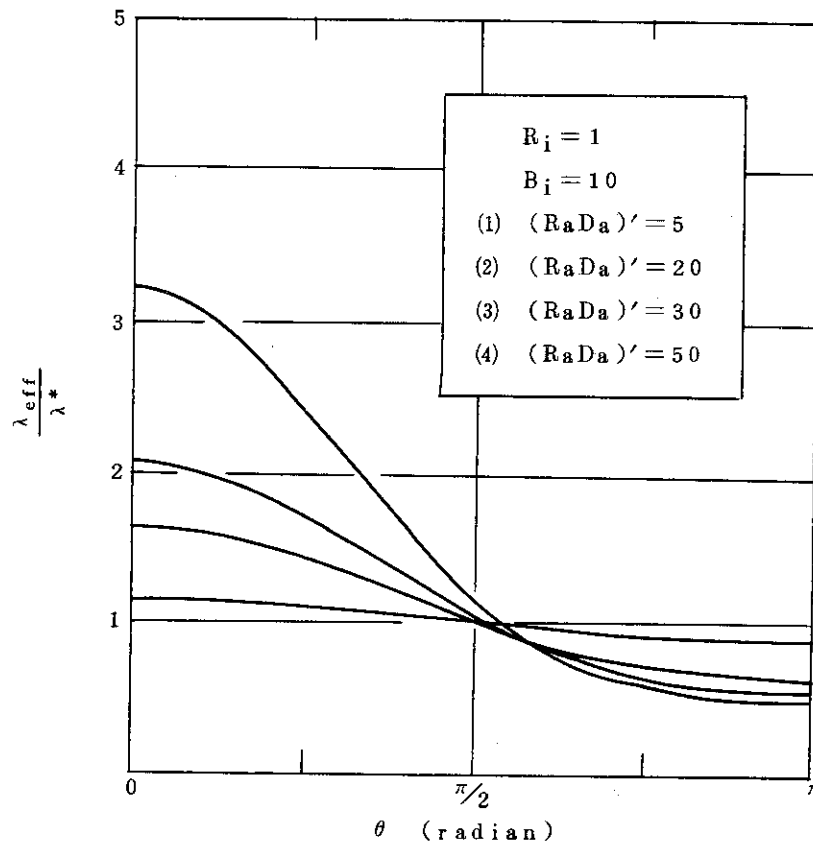
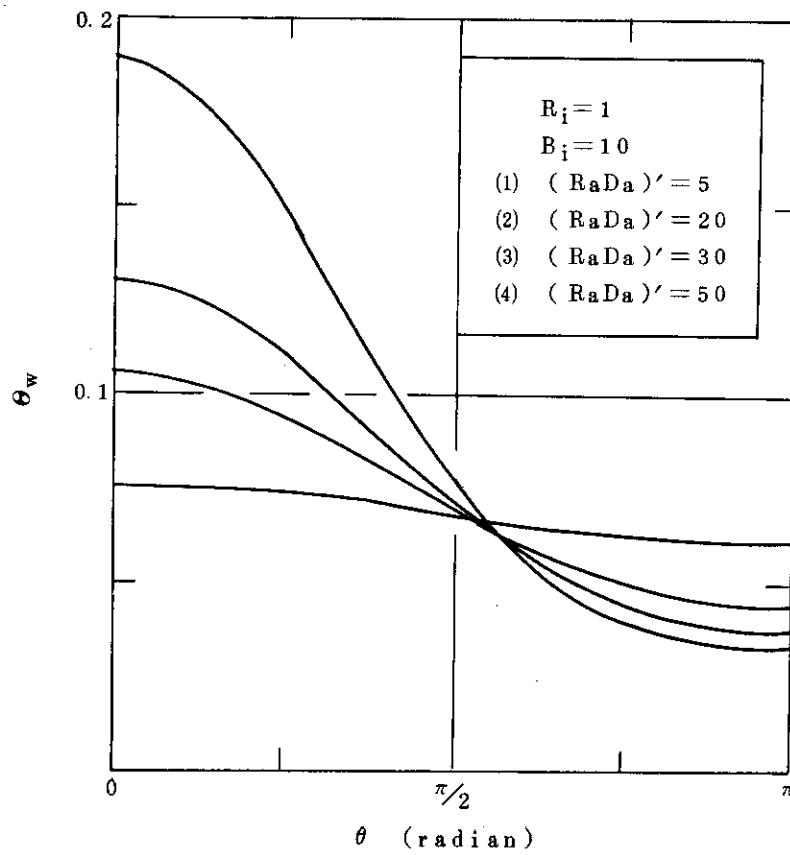


図 4.6 外管表面一様熱通過率の場合の断熱層内の半径方向温度分布 ($Bi = 10, R_i = 1$)



(a) 実効熱伝導率の周方向分布



(b) 外管温度の周方向分布

図 4.7 外管表面一様熱通過率の場合の、実効熱伝導率と外管温度の周方向分布 ($B_i = 10$)

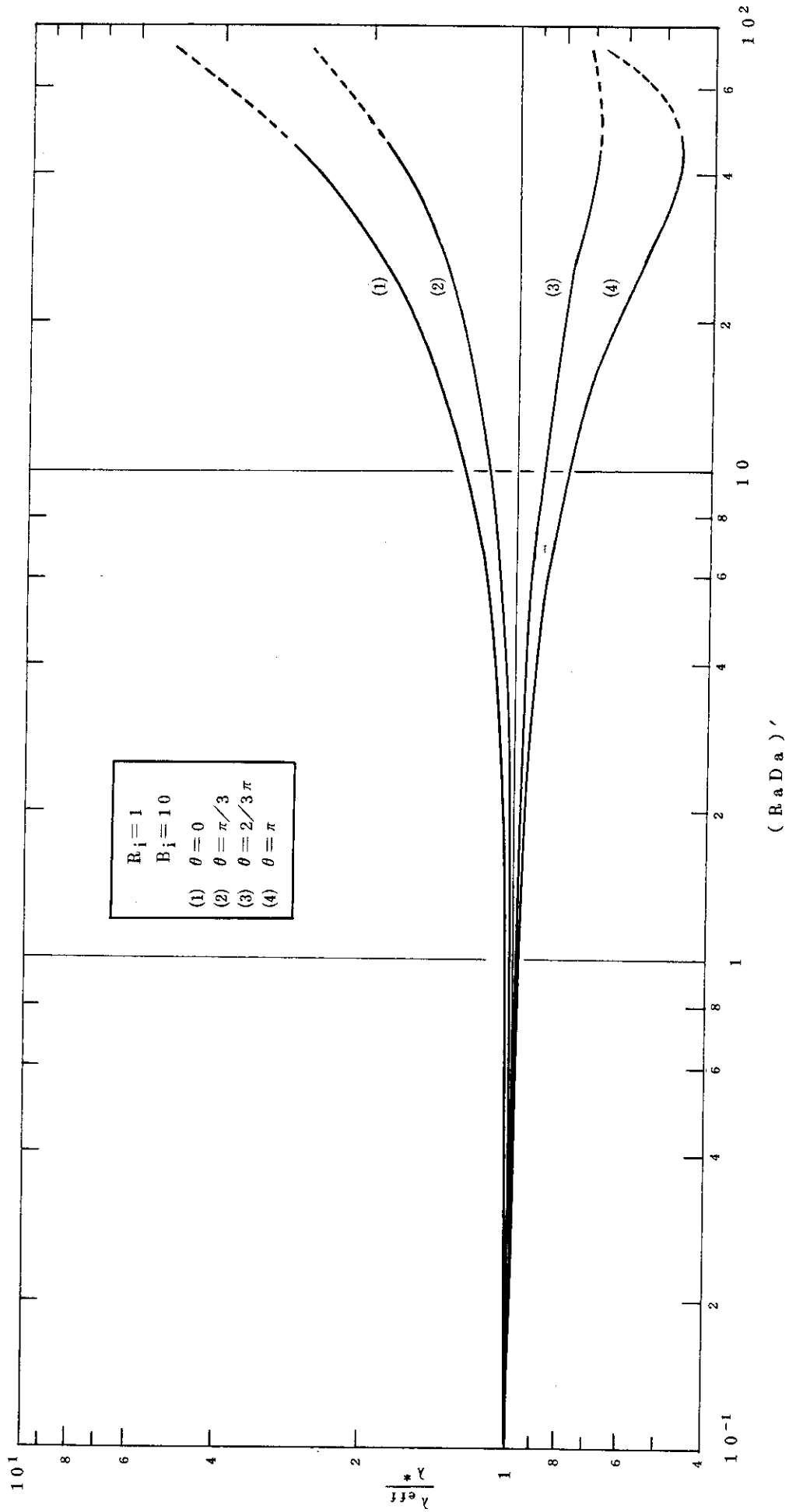


図 4.8 外管表面一様熱通過率の場合の $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ における $(RaDa)'$ と実効熱伝導率の関係 ($R_i = 1, B_i = 10$)

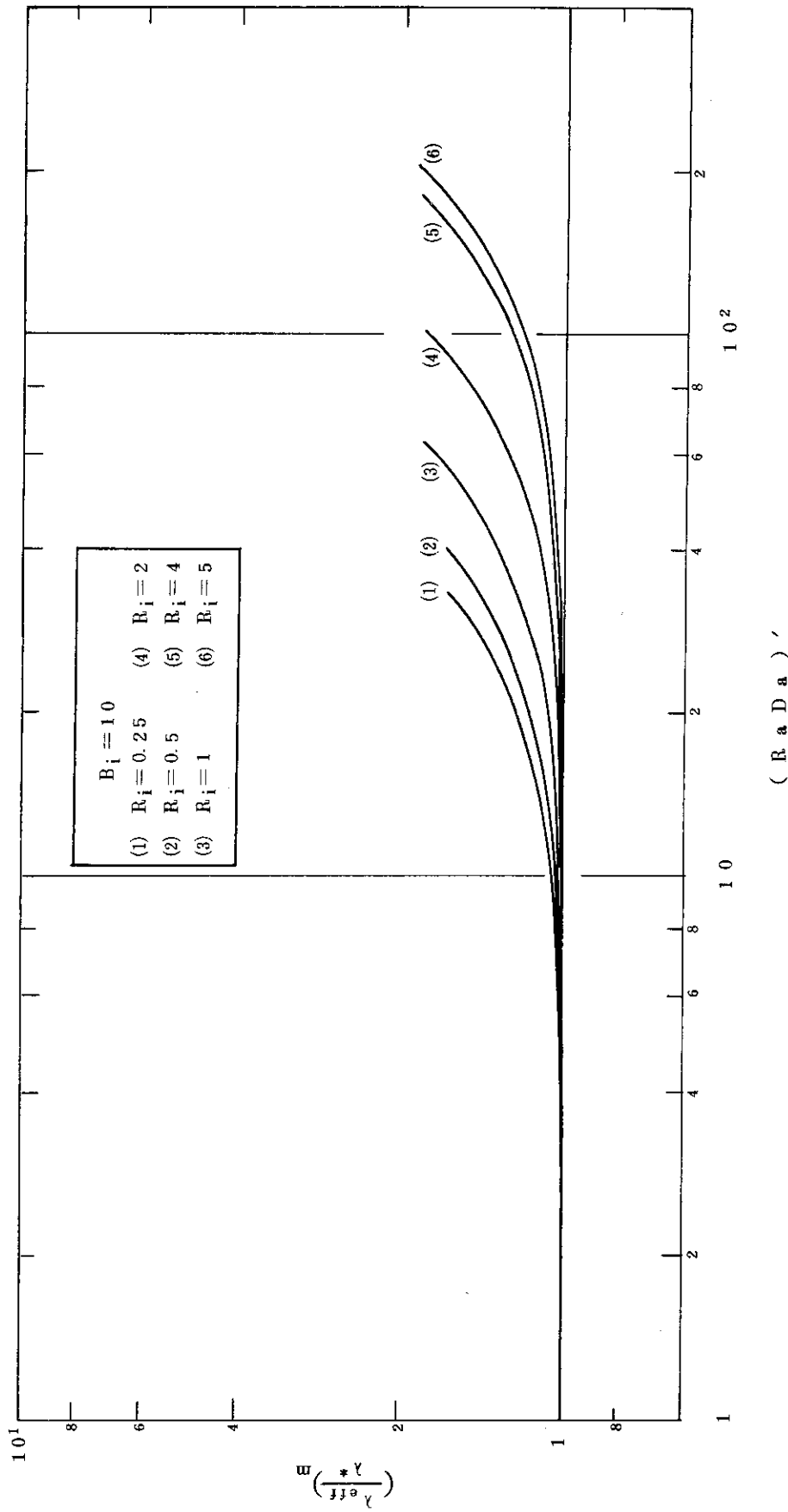


図 4.9 解析解による外管表面一様熱通過率の場合の各内半径に対する $(RaDa)'$ と $(\frac{\lambda_{eff}^*}{\lambda})_m$ の関係 ($B_i = 10$)

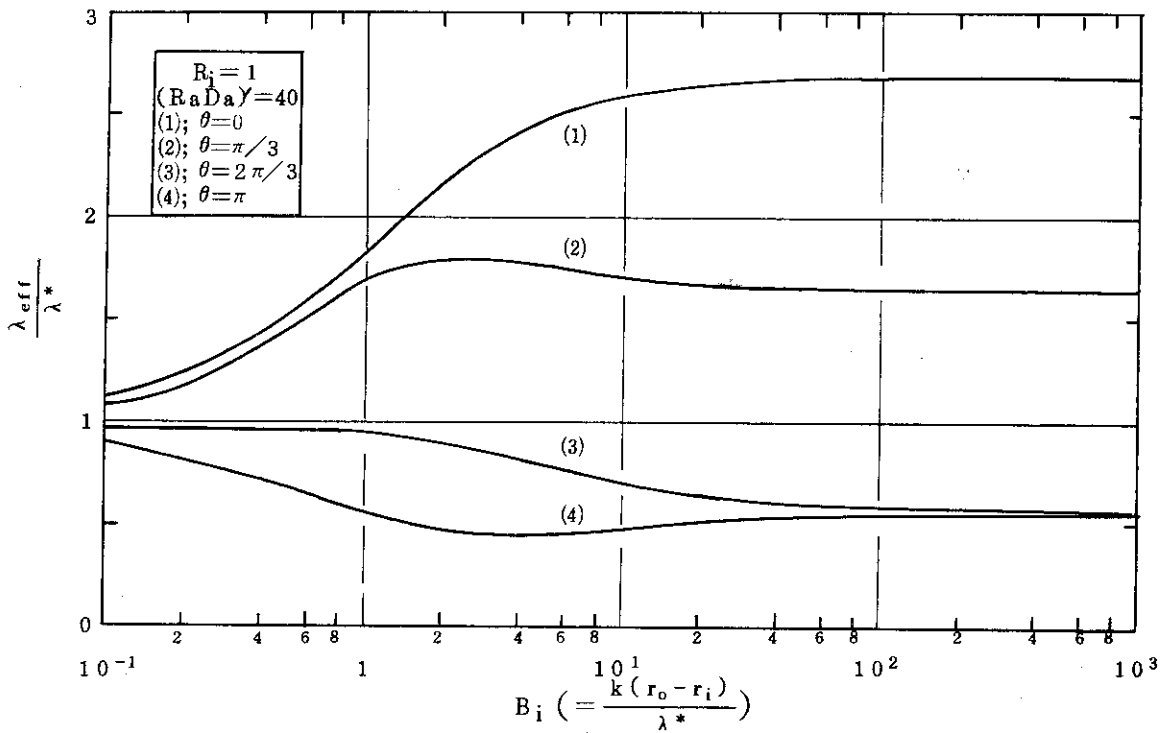


図 4.10 外管表面一様熱通過率の場合, Bi 数と各周方向 $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi$ における実効熱伝導率の関係 ($R_i = 1, (RaDa)' = 40$)

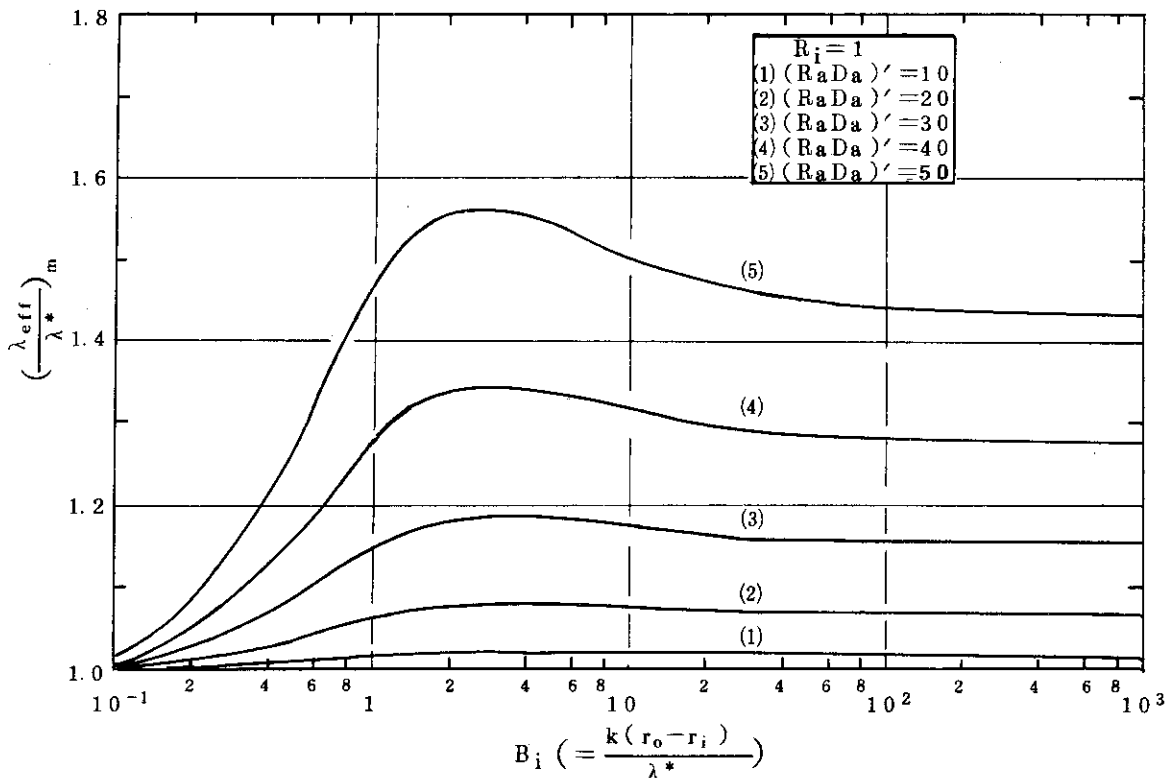


図 4.11 外管表面一様熱通過率の場合, 各 $(RaDa)'$ に対する Bi 数と $\left(\frac{\lambda_{eff}}{\lambda^*} \right)_m$ の関係 ($R_i = 1$)

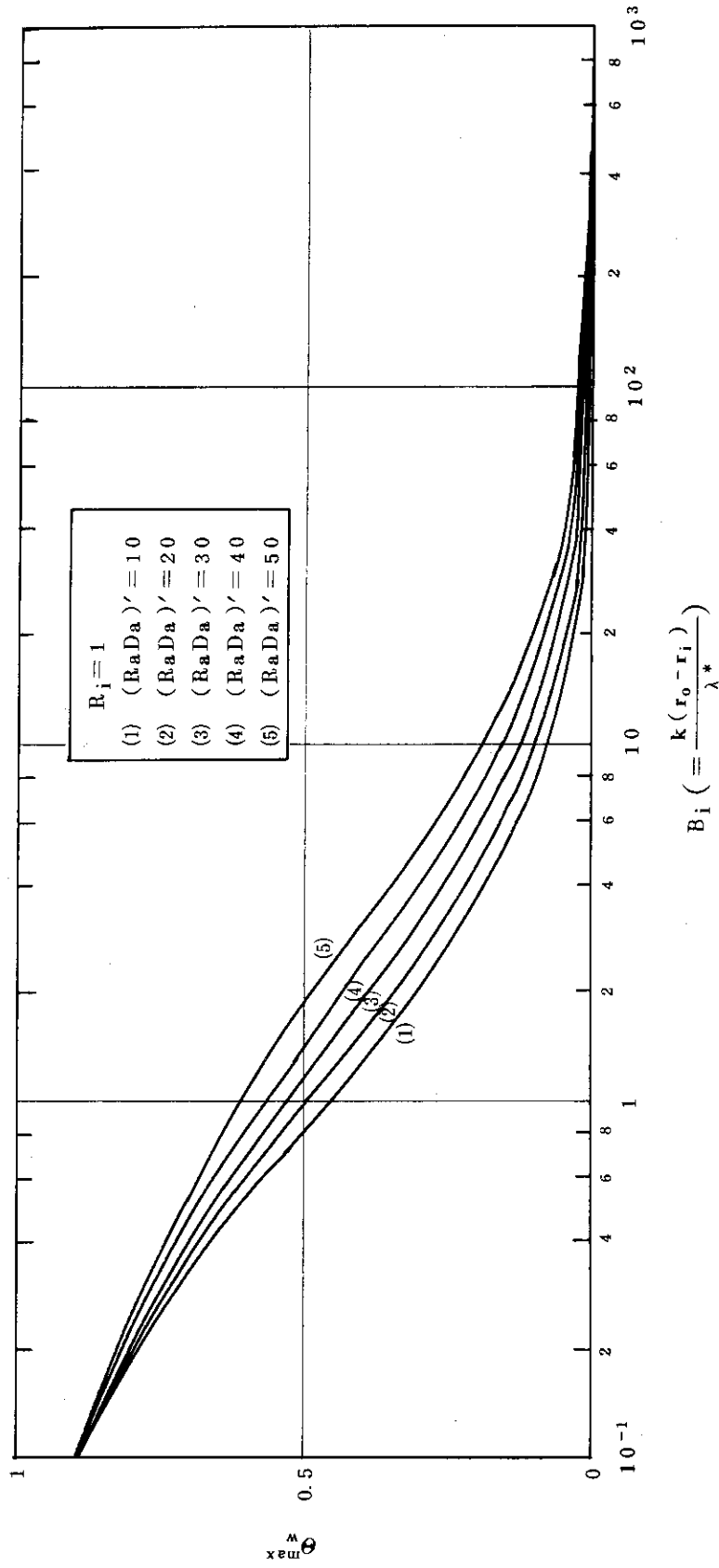


図 4.1.2 外管表面一様熱通過率の場合, 各 $(RaDa)'$ に対する B_i 数と
外壁最高温度 Θ_w^{\max} との関係 ($R_i = 1$)

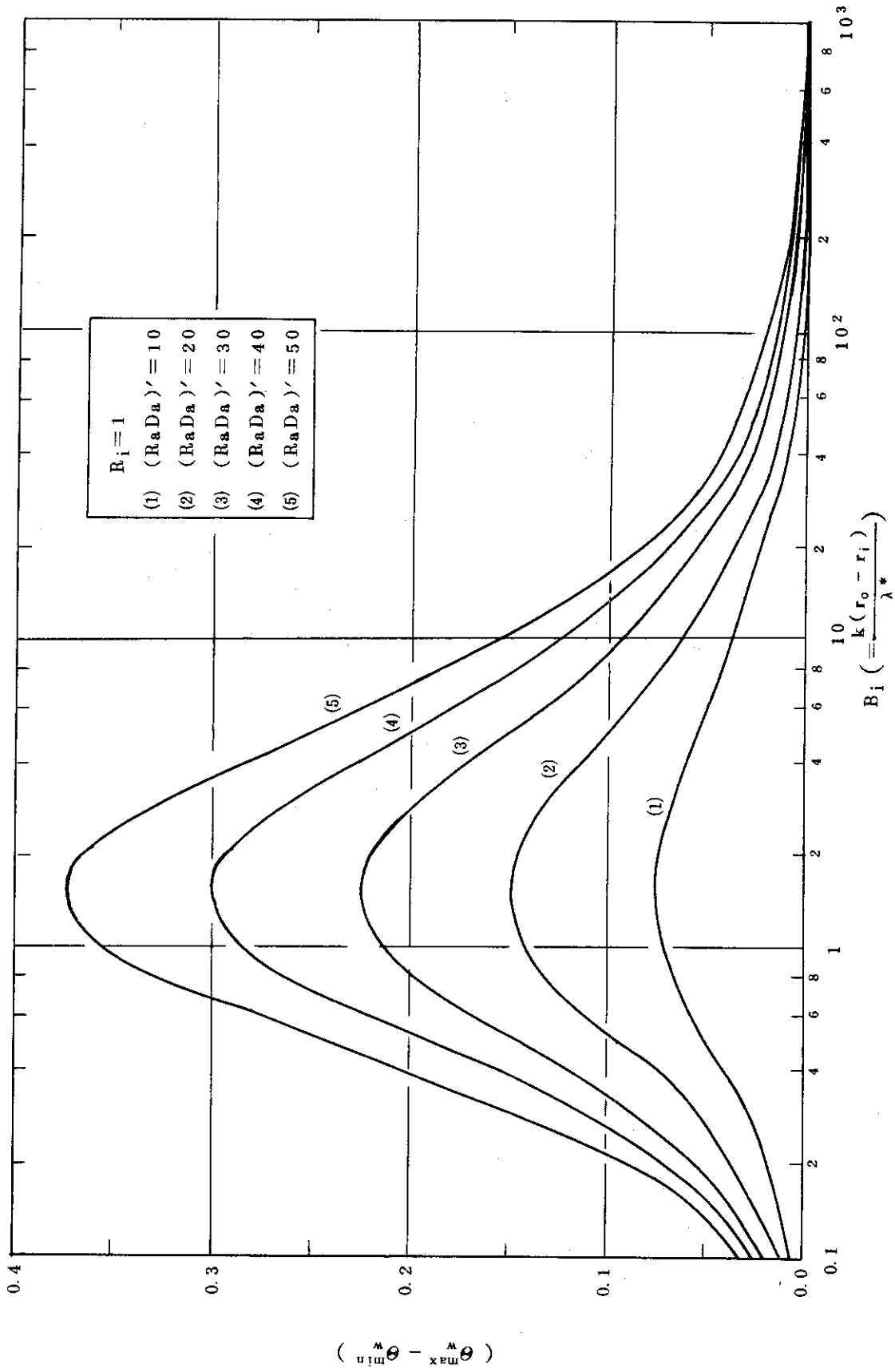


図 4.1.3 外管表面一様熱通過率の場合，各 $(RaDa)'\prime$ に対する Bi 数と $(\theta_w^{\max} - \theta_w^{\min})$ の関係 ($R_i = 1$)