

JAERI - M  
85-052

ICRF波のトカマク内励起に関する研究現状の調査

1985年5月

福山 淳\*

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division  
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1985

編集兼発行 日本原子力研究所  
印刷 いばらき印刷(株)

ICRF 波のトカマク内励起に関する研究現状の調査

福 山 淳\*

(1985年3月19日受理)

本報文は、トカマクに於けるイオンサイクロトロン周波数帯ラジオ波伝播についての理論解析の現状を述べたものである。ICRF 波の伝播解析について提案された多種の伝播方程式のモデルや、その解法を調査し、本報告では、各モデルの原理や近似法について述べる。解析例をあげて、適用範囲や問題について論ずる。

---

この報告書は、昭和59年度に日本原子力研究所より岡山大学に委託した調査の報告書を改めてまとめたものである。

\* 岡山大学工学部電子工学科

Present Status of Studies on Excitation of ICRF Wave in Tokamaks

Atsushi FUKUYAMA\*

(Received March 19, 1985)

This article is a review on the present status of the theoretical studies on propagation of ICRF wave in tokamaks. Model equations of the ICRF wave propagation and examples of solution are reviewed. Models, principles, numerical method and examples of solution are presented. Application boundary is also discussed.

Keywords: Review, Excitation, ICRF Wave, Tokamak, Propagation, Model, Numerical Method

---

This work was supported by a research contract of Japan Atomic Energy Research Institute with Okayama University in fiscal year 1984.

\* Okayama University

## 目 次

1. 序 論 .....	1
2. 伝播方程式 .....	2
2.1 局所理論 .....	2
2.1.1 冷たいプラズマ中の分散式 .....	2
2.1.2 運動論的プラズマ中の分散式 .....	4
2.1.3 分散関係 .....	6
2.2 幾何光学近似 .....	9
2.2.1 光線追跡法 .....	9
2.2.2 トカマクにおける解析例 .....	10
2.2.3 問題点 .....	12
2.3 流体的伝播方程式 .....	13
2.3.1 基礎方程式 .....	13
2.3.2 2イオン混成共鳴層における伝播 .....	13
2.4 運動論的伝播方程式 .....	14
2.4.1 基礎方程式 .....	14
2.4.2 エネルギー束と吸収パワー .....	16
2.4.3 簡略化された方程式 .....	17
3. 数値計算法 .....	19
3.1 流体的1次元解析 .....	19
3.1.1 無衝突モデル .....	19
3.1.2 衝突を含むモデル .....	22
3.1.3 問題点 .....	23
3.2 運動論的1次元解析 .....	23
3.2.1 モデル .....	23
3.2.2 多層分割法 .....	24
3.2.3 解析例 .....	25
3.2.4 問題点 .....	31
3.3 流体的2次元解析 .....	31
3.3.1 差分法による解析 .....	31
3.3.2 有限要素法 .....	33
3.3.3 モデル .....	34
3.3.4 解析例 .....	34
3.3.5 問題点 .....	38
3.4 運動論的2次元解析 .....	38
3.4.1 モデル .....	38

3.4.2	解析例	39
3.4.3	問題点	41
4.	結論	42
	参考文献	43

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Propagation Equation .....	2
2.1 Local Theory .....	2
2.1.1 Dispersion Equation in Cold Plasma .....	2
2.1.2 Dispersion Equation in Hot Plasma .....	4
2.1.3 Dispersion Relation .....	6
2.2 Application based on Geometrical Optics .....	9
2.2.1 Ray Tracing Method .....	9
2.2.2 Application to Tokamaks .....	10
2.2.3 Discussion .....	12
2.3 Fluid Model Propagation Equation .....	13
2.3.1 Basic Equation .....	13
2.3.2 Propagation in the Two-Ion Hybrid Resonance Layer ....	13
2.4 Kinetic Model Propagation Equation .....	14
2.4.1 Basic Equation .....	14
2.4.2 Energy Flux and Absorbed Power .....	16
2.4.3 Reduced Set of Equations .....	17
3. Method for Numerical Calculation .....	19
3.1 One-Dimensional Fluid Model Analysis .....	19
3.1.1 Collisionless Model .....	19
3.1.2 Model with Collision .....	22
3.1.3 Discussion .....	23
3.2 One-Dimensional Kinetic Model Analysis .....	23
3.2.1 Model Equation .....	23
3.2.2 Multiple Layer Method .....	24
3.2.3 Example of Solution .....	25
3.2.4 Discussion .....	31
3.3 Two-Dimensional Fluid Model Analysis .....	31
3.3.1 Analysis with Difference Method .....	31
3.3.2 Finite Element Method .....	33
3.3.3 Plasma Model .....	34
3.3.4 Example of Solution .....	34
3.3.5 Discussion .....	38
3.4 Two-Dimensional Kinetic Model Analysis .....	38
3.4.1 Plasma Model .....	38
3.4.2 Example of Solution .....	39
3.4.3 Discussion .....	41
4. Acknowledgements .....	42
References .....	43

## 1. 序 論

トカマクプラズマの加熱における ICRF 波の有効性が、近年の大パワー加熱実験によって確かめられつつある<sup>1)-3)</sup>。入力パワーに対する温度上昇率の点においても、中性粒子ビーム入射加熱に比べて同程度かあるいはそれを上回っている。しかしその加熱機構に関しては、中性粒子ビーム入射加熱が古典的なクーロン衝突過程で説明できるのに対して、ICRF 加熱は十分に解明されているとはいえない。その複雑さの原因としては、i) トカマクプラズマ内の ICRF 波の伝播がアンテナの構造を含めたプラズマの配位に強く依存すること、ii) 波のエネルギーのプラズマによる吸収が運動論的過程であり、波の特性、粒子の分布関数に強く依存すること、iii) 吸収されたエネルギーの熱化および輸送に対する波の影響が十分解析されていないこと等があげられる。これらは RF 加熱に共通の問題であるが、特に波長の長い低周波領域の ICRF 波には、i) の問題は解析をとりわけ複雑にしている。i), ii) の問題を解決するためには、現実的なプラズマ配位の下で微視的な運動論的效果を取り入れつつ巨視的な波の空間的構造を解析する必要がある。

有限の大きさをもつプラズマ内の ICRF 波の伝播に関する最も初期の解析は、Stix の教科書 [4] にみられるような一様円柱プラズマをモデルにしたアンテナの負荷インピーダンスの計算であろう。その後、しばらくは主に一様プラズマ中の運動論的解析や不均一プラズマをモデル化した簡単な伝播方程式の解析的研究が進められていた。1970 年代後半に入ると、電子計算機の進歩に伴って不均一プラズマ中の波動伝播の解析が急速に発展してきた。まず、高周波数で短波長である電子サイクロトロン波や低域混成波の解析に有効であった光線追跡法 (Ray Tracing) をイオンサイクロトロン周波数帯に適用した解析がなされた<sup>5)</sup>。一方、2 イオン混成共鳴を含む不均一プラズマ中の波動方程式の境界値問題を解く手法が、まず不均一が 1 次の冷たいプラズマに適用され<sup>6)</sup>、さらに運動論的效果を取り入れた解析<sup>7)-9)</sup> が進められるようになった。実際のトカマクは 2 次元的不均一性を持っており、その場合の冷たいプラズマの解析も行われ<sup>10), 11)</sup>、最近では運動論的效果を含む場合への拡張もなされている<sup>12)</sup>。

この報告書では ICRF 波のトカマク内励起の研究について、プラズマのモデル化、波動方程式の定式化およびその数値解法の進展の現状について報告する。まず第 2 章ではトカマクプラズマ中の ICRF 波の局所理論から出発して、幾何光学近似について簡単にふれ、伝播方程式の定式化について流体近似の場合と運動論的效果を取り入れた場合のそれぞれについて述べる。第 3 章では伝播方程式の数値解法を、流体的 1 次元モデル、運動論的 1 次元モデル、流体的 2 次元モデル、運動論的 2 次元モデルのそれぞれについて述べる。結論を第 4 章にまとめる。



## 2. 伝播方程式

### 2.1 局所理論

#### 2.1.1 冷たいプラズマ中の分散式

この節では冷たいプラズマ中の電磁波の分散式を求め、トカマクプラズマ中の ICRF 波の性質を議論する。

角周波数  $\omega$  で振動する定常電磁界を記述する波動方程式は電界  $\mathbf{E}$  に対して

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで  $c$  は光速、 $\mu_0$  は真空中の透磁率、 $\mathbf{J}_{\text{ext}}$  はアンテナ等の励起系を流れる外部電流である。誘電率テンソル  $\vec{\epsilon}$  の形は対象とする媒質によって異なるが、ここでは  $z$  方向に静磁界  $B_0$  が加えられた冷たい一様プラズマを考える。プラズマを構成する  $s$  種の粒子の質量を  $m_s$ 、電荷を  $q_s$ 、密度を  $n_s$ 、とすると誘電率テンソル  $\vec{\epsilon}$  は<sup>4)</sup>

$$\epsilon = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$S = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2} \quad (2.3)$$

$$D = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 \Omega_s}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)} = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 \omega}{\Omega_s(\omega^2 - \Omega_s^2)} \quad (2.4)$$

$$P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (2.5)$$

となる。ここでプラズマ周波数  $\omega_{ps} = (n_s q_s^2 / m_s \epsilon_0)^{1/2}$ 、サイクロトロン周波数  $\Omega_s = q_s B_0 / m_s$  を導入した。(2.4) 式の変形にあたっては全電荷の中性条件  $\sum_s n_s q_s = 0$  を用いた。

外部電流のない一様プラズマ中を伝播する電磁波の性質を調べるために、平面波解 ( $\propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ) の分散関係を調べてみよう。直角座標  $(x, y, z)$  を用い、波数ベクトルを  $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel)$  とおき、平面波解を (2.1) 式に代入すると

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - N_\perp^2 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} + N_\perp N_\parallel \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} - N_\perp^2 - N_\parallel^2 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} + N_\perp N_\parallel & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} - N_\perp^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

となる。ここで、 $\mathbf{N} = (N_\perp, 0, N_\parallel)$  は真空中の波長  $c/\omega$  で規格化された波数、すなわち屈折率である。(2.6) 式が  $\mathbf{E} \neq 0$  の解を持つ条件、すなわち行列式 = 0 は分散式を与える。冷たいプ

ラズマの誘電率テンソル (2.2) を用いると

$$SN_{11}^2 - [(P+S)(S-N_{11}^2) - D^2]N_{11}^2 + [(S-N_{11}^2)^2 - D^2]P = 0 \quad (2.7)$$

となる。

ここでイオンサイクロトロン周波数帯における係数 S, D, P の大きさを評価してみよう。この周波数帯では  $\Omega_e^2 \gg \Omega_i^2 \sim \omega^2$  が成立し、トカマクプラズマでは通常  $\omega_{pe}^2 \sim \Omega_e^2$  であることを用いると、近似式

$$S \sim -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \quad D \sim \frac{\omega_{pi}^2 \omega}{\Omega_i(\omega^2 - \Omega_i^2)} \quad P \sim -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (2.8)$$

が成立し、 $|S| \sim |D| \sim 10^3$ ,  $|P| \sim 10^6$  程度の大きさである。そこで (2.7) 式の第2項を  $-P(S - N_{11}^2)N_{11}^2$  で近似し、 $S - N_{11}^2$  が余り小さくないことを仮定すると  $N_{11}^2$  に関する2つの分枝を表わす近似式

$$N_{11}^2 \sim \frac{(S+D-N_{11}^2)(S-D-N_{11}^2)}{S-N_{11}^2} \quad (2.9)$$

$$N_{12}^2 \sim \frac{P(S-N_{11}^2)}{S} \quad (2.10)$$

を得る。通常  $N_{11}^2$  の方が小さく、速進波 (fast wave) と呼ばれ、 $N_{12}^2$  の分枝は遅進波 (slow wave) と呼ばれる。波が磁界方向に伝搬する場合、すなわち  $N_{11} = 0$  の場合には (2.9) 式は2つの分枝

$$N_{11}^2 \sim S + D \equiv R \quad (2.11)$$

$$N_{11}^2 \sim S - D \equiv L \quad (2.12)$$

を与える。これらはそれぞれ圧縮性アルフベン波 (磁気音波) およびねじれアルフベン波に対応する。この (2.11)(2.12) の分枝についてもそれぞれ速進波および遅進波と呼ばれることが多いので注意を要する。

さて2イオン混成共鳴に垂直方向の伝搬、すなわち  $N_{11} = 0$  の場合には  $S = 0$  で  $N_{11}^2 \rightarrow \infty$  すなわち共鳴を起こす。イオンが1成分の場合には、この共鳴は低域混成共鳴 (Lower Hybrid Resonance), 高域混成共鳴 (Upper Hybrid Resonance) に対応するが、イオンが2成分の場合には新たに2イオン混成共鳴 (Two-Ion Hybrid Resonance 又は Ion-Ion Hybrid Resonance) が現われる。2種類のイオンの質量, 電荷, 密度をそれぞれ  $m_1, q_1, n_1$  および  $m_2, q_2, n_2$  とすると、2イオン混成共鳴の条件は

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - \frac{2\eta}{1+2\eta} (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \quad (2.13)$$

$$\eta = n_1 q_1^2 m_2 / n_2 q_2^2 m_1 \quad (2.14)$$

で与えられる。 $N_{11}^2 \neq 0$  の斜め伝播の場合には、 $N_{11}^2 = S$  となる付近で  $N_{11}^2$  が大きくなり、遅進

波 (2.10) へのモード変換が起こる。一方  $N^2=R$  又は  $N^2=L$  では  $N^2_{\perp}$  が 0 となり遮断が起こる。

図 2.1 および図 2.2 にトカマク配位におけるモード構造の 1 例を示す。図 2.1 は主半径方向に磁界が  $1/R$  で減少する場合に  $N^2_{\perp}$  の局所的な値を計算したものである。計算には温度効果が取り入れられているが、モード変換が  $N^2=S$  を満たす点近傍で、遮断が  $N^2=L$  を満たす点で起きていることがわかる。図 2.2 は、ポロイダル断面の上半面に対して  $N^2=S$ ,  $N^2=R$ ,  $N^2=L$  を満たす線を描いたものである。(2.9) 式で表わされる速進波は、 $N^2=R$  を満たす円の内側では  $N^2=S$  と  $N^2=L$  の線ではさまれた三ヶ月形の部分を除いて伝播することができ、 $N^2=R$  の円の外側では  $N^2=S$  と  $N^2=L$  ではさまれた狭い領域でのみ伝播可能である。 $N^2=R$  より内側の波は圧縮性アルフベン波(磁気音波)に、外側の波はねじれアルフベン波(イオンサイクロトロン波)に対応している。 $N^2$  が大きくなると  $N^2=R$  の円の半径は小さくなり、遮断領域が広がることに留意する必要がある。

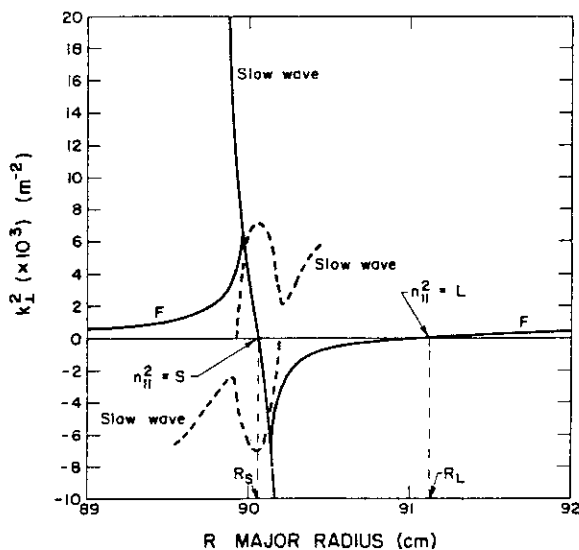


図 2.1) Two-ion hybrid resonance zone,  $n_e^{peak} = 5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_h/n_d = 0.25$ ,  $\nu = 61 \text{ MHz}$ ,  $T_e = T_h = 0.5 \text{ keV}$ ,  $T_c = 1.5 \text{ keV}$ ,  $R_c = 100 \text{ cm}$ ,  $k_{\parallel} = 15 \text{ m}^{-1}$ ;  $\text{Re}(k_{\perp}^2)$ , solid line;  $\text{Im}(k_{\perp}^2)$ , dashed line. [13]

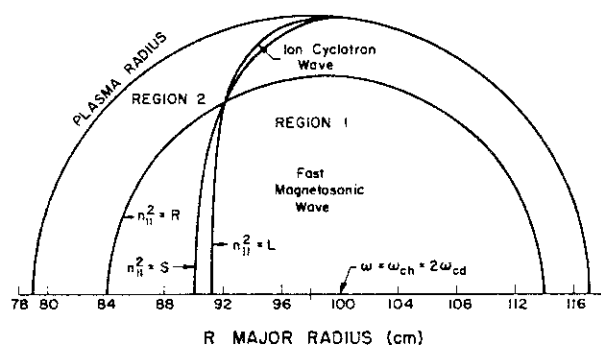


図 2.2) TFR tokamak cross section (same parameters as 図 2.1) [13]

### 2.1.2 運動論的プラズマの分散式

高温プラズマでは、波-粒子共鳴相互作用や有限ラーモア半径効果のような運動論的効果が波の伝播に大きな影響を与え、波のエネルギーのプラズマによる吸収に本質的な役割を果たしている。この節では一様プラズマ中で運動論的効果を取り入れた分散式について要約する。

運動論的現象を記述するために、ブラソフ方程式から出発して粒子の無摂動軌道に沿って時間積分を行い、誘電率テンソルの形でプラズマの応答を表現する。ここでは  $z$  方向に静磁界  $B_0$  が加えられた一様プラズマを考え、速度分布として磁界方向にドリフトした 2 温度マクスウェル分布

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \left(\frac{m}{2\pi T_{\parallel}}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi T_{\perp}}\right) n \exp\left[-\frac{m(v_{\parallel}-u)^2}{2T_{\parallel}} - \frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}}\right] \quad (2.14)$$

を仮定する。ここで  $u$  はドリフト速度、 $T_{\parallel}$  は磁場に平行方向の温度、 $T_{\perp}$  は垂直方向の温度である。計算の結果、誘電率テンソル  $\vec{\epsilon}$  は  $s$  種の粒子の電気感受率  $\vec{\chi}_s$  を用いて [14]

$$\vec{\epsilon} = \vec{I} + \sum_s \vec{\chi}_s \quad (2.15)$$

$$\vec{\chi} \equiv -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1, & 0, & -\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) \\ 0, & \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1, & 0 \\ -\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right), & 0, & \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) + \frac{\omega^2 m}{k_{\parallel}^2 T_{\parallel}} \end{array} \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_n D_n \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

$$\vec{H}_n \equiv \begin{pmatrix} \frac{n^2 A_n}{\lambda}, & inA'_n, & \frac{\omega - n\Omega}{\Omega} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \frac{nA_n}{\lambda} \\ -inA'_n, & \frac{n^2 \lambda_n}{\lambda} - 2\lambda A'_n, & -i \frac{\omega - n\Omega}{\Omega} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} A'_n \\ \frac{\omega - n\Omega}{\Omega} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \frac{nA_n}{\lambda}, & i \frac{\omega - n\Omega}{\Omega} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} A'_n, & \left(\frac{\omega - n\Omega}{\Omega}\right)^2 \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \frac{A_n}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$D_n \equiv \frac{\omega - n\Omega \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right) - k_{\parallel} u}{\sqrt{2} |k_{\parallel}| v_{T_{\parallel}}} \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega - n\Omega - k_{\parallel} u}{\sqrt{2} |k_{\parallel}| v_{T_{\parallel}}}\right)$$

と表わされる。ここで、 $A_n \equiv I_n(\lambda) e^{-\lambda}$  で  $I_n(\lambda)$  は第1種変形ベッセル関数  $\lambda = k_{\perp}^2 T_{\perp} / m\Omega^2$ ,  $v_{T_{\parallel}}^2 \equiv T_{\parallel} / m$ ,  $Z(\xi)$  はプラズマ分散関数である。

(2.16) 式で表わされる電気感受率は、無限個のサイクロトロン高調波の影響を含み厳密ではあるが、数値的取扱いは困難である。そのため i) ICRF 波加熱ではサイクロトロン2倍高調波までを用いることが多い (イオンバーンシュタイン波励起の場合には3倍、ないし4倍の高調波を用いることがある), ii) エネルギーの吸収は  $(k_{\perp} \rho)^2 \lesssim 1$  の程度で起こることが多い ( $\rho = v_{T_{\perp}} / \Omega$ ), iii) マクスウェル方程式 (2.1) が電界の2階の空間微分を含んでおり、計算が複雑化しない等の理由により有限ラーモア半径効果を  $(k_{\perp} \rho)^2$  まで残す近似が有効である。この近似を用いると電気感受率 (2.16) は

$$\vec{\chi} = \vec{\chi}^{(0)} + \vec{\chi}^{(1)} \frac{k_{\perp} c}{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\chi}^{(2)} \left(\frac{k_{\perp} c}{\omega}\right)^2 \quad (2.17)$$

$$\chi_{xx}^{(0)} = \chi_{yy}^{(0)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) + \frac{1}{2} (D_1 + D_{-1}) \right]$$

$$\begin{aligned}
\chi_{xy}^{(0)} &= -\chi_{yx}^{(0)} = -i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{2} (D_1 - D_{-1}) \\
\chi_{zz}^{(0)} &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} \frac{m}{T_{\parallel}} (1 + D_0) \\
\chi_{xz}^{(1)} &= \chi_{zx}^{(1)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega}{k_{\parallel} c} \frac{\omega}{\Omega} \left[ -\left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) \frac{\Omega}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \Omega}{\omega} D_1 - \frac{\omega + \Omega}{\omega} D_{-1}\right) \right] \\
\chi_{yz}^{(1)} &= -\chi_{zy}^{(1)} = -i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega}{k_{\parallel} c} \frac{\omega}{\Omega} \left[ D_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \Omega}{\omega} D_1 + \frac{\omega + \Omega}{\omega} D_{-1}\right) \right] \\
\chi_{xx}^{(2)} &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{T_{\perp}}{mc^2} \frac{\omega^2}{\Omega^2} [-(D_1 + D_{-1}) + (D_2 + D_{-2})] \\
\chi_{yy}^{(2)} &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{T_{\perp}}{mc^2} \frac{\omega^2}{\Omega^2} [4D_0 - 3(D_1 + D_{-1}) + (D_2 + D_{-2})] \\
\chi_{xy}^{(2)} &= -\chi_{yx}^{(2)} = -i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{T_{\perp}}{mc^2} \frac{\omega^2}{\Omega^2} [-2(D_1 - D_{-1}) + (D_2 - D_{-2})] \\
\chi_{zz}^{(2)} &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 c^2} \frac{\omega^2}{\Omega^2} \left[ 2\left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 2D_0 + \left(\frac{\omega - \Omega}{\omega}\right)^2 D_1 + \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega}\right)^2 D_{-1} \right]
\end{aligned}$$

で表わされる。この他の係数はすべて0である。

このようにして得られた誘電率テンソル

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}^{(0)} + \vec{\epsilon}^{(1)} \frac{k_{\perp} c}{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\epsilon}^{(2)} \left(\frac{k_{\perp} c}{\omega}\right)^2 \quad (2.18)$$

を平面波の波動方程式 (2.6) に代入すると

$$\begin{pmatrix}
(\epsilon_{xx}^{(0)} - N_{\parallel}^2) + \frac{1}{2} \epsilon_{xx}^{(2)} N_{\parallel}^2, & \epsilon_{xy}^{(0)} + \frac{1}{2} \epsilon_{xy}^{(2)} N_{\parallel}^2, & (\epsilon_{xz}^{(1)} + N_{\parallel}) N_{\perp} \\
\epsilon_{yx}^{(0)} + \frac{1}{2} \epsilon_{yx}^{(2)} N_{\parallel}^2, & (\epsilon_{yy}^{(0)} - N_{\parallel}^2) + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{yy}^{(2)} - 1\right) N_{\perp}^2, & \epsilon_{yz}^{(1)} N_{\perp} \\
(\epsilon_{zx}^{(1)} + N_{\parallel}) N_{\perp}, & \epsilon_{zy}^{(1)} N_{\perp}, & \epsilon_{zz}^{(0)} + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{zz}^{(2)} - 1\right) N_{\perp}^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
E_x \\
E_y \\
E_z
\end{pmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

が得られ、その行列式は分散関係を、固有ベクトルは電界の偏波ベクトルを与える。

### 2.1.3 分散関係

有限ラーモア半径効果の2次までを取り入れた運動論的分散関係 (2.19) を用いてトカマクプラズマ内に励起される ICRF 波の局所的性質を調べてみよう。

モデルとして考えるトカマクプラズマのパラメータは、JFT-2M に準拠して

$$\begin{aligned}
\text{大半径} \quad R &= 1.31 \text{ m} \\
\text{小半径} \quad a &= 0.35 \text{ m} \\
\text{中心磁界} \quad B_0 &= 1.4 \text{ T}
\end{aligned}$$

中心密度  $n_{e0} = 10^{20} \text{ m}^{-3}$

とし、静磁界プラズマ密度および温度の空間分布はそれぞれ

$$B_z(x) = \frac{B_0}{1+x/R} \tag{2.20}$$

$$n(x) = n_0(1-x^2/a^2) \tag{2.21}$$

$$T(x) = T_0 \exp(-3x^2/a^2) \tag{2.22}$$

と仮定した。

図 2.3 から図 2.5 は異なったプラズマに対して、 $y=0$  すなわち赤道面上での規格化された垂直方向の波数  $N_{\perp} (\equiv k_{\perp}c/\omega)$  を描いた図である。 $x=0$  はプラズマ中心に対応している。実線は  $N_{\perp}^2$  の実数部、破線は  $N_{\perp}^2$  の虚数部を表わしている。実数部が負であることは遮断領域であることを示し、複素共役の解も振動しながら減衰又は増大する領域を示し、いずれも伝播不能領域 (evanescent region) である。

図 2.3 に、2 成分イオンプラズマ (多数イオン：重水素、少数イオン：水素) における 2 イオン混成共鳴の場合の分散関係を示す。密度比  $n_H/n_D=0.1$ 、中心温度 1.5 keV、周波数  $\omega/2\pi=20$  MHz、磁場方向の波数  $k_{\parallel}R=10$ 、の場合である。F と書かれた曲線は速進波 (fast wave), B と書かれた曲線は遅進波であるイオンバーンシュタイン波を表わす。 $x$  が負の強磁界側から入射された速進波は表面付近の狭い遮断領域を通り抜けてプラズマ中心部に伝播し、 $x \sim 0$  のモード変換点でイオンバーンシュタイン波のモードと合流する。一方  $x$  が正の弱磁界側から入射された速進波もやはり表面近傍の遮断領域を通り抜けて中心部へ伝播し、遮断点に達する。2 イオン混成共鳴層の幅、すなわちモード交換点から遮断点までの距離が波長に比べて長い場合には、波は共鳴層を通り抜けることはできない (詳しくは 2.3.2 参照)。このパラメータでは  $x=0.09$  m に水素のサイクロトロン共鳴および重水素のサイクロトロン 2 倍高調波共鳴があり、速進波の吸収が起こる。一方、イオンバーンシュタイン波はモード変換点より強磁界側のみ伝播でき、電子のランダウ減衰により吸収を受ける。

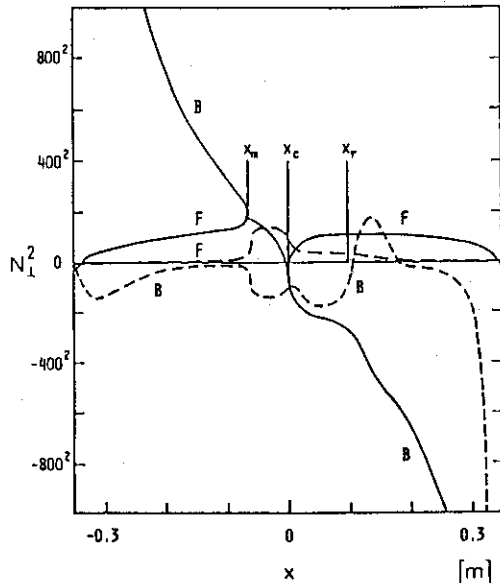


図 2.3 2 イオン混成共鳴の場合の分散曲線

図 2.4 は、水素プラズマにおけるサイクロトロン 2 倍高調波共鳴の場合の分散関係を示す。周波数  $\omega/2\pi = 40$  MHz で他のパラメータは図 2.3 と同じである。  $x = 0.09$  m に水素のサイクロトロン 2 倍高調波共鳴があり、その強磁界側で速進波とイオンバーンシュタイン波との結合が生じている。イオンバーンシュタイン波との結合が 2 倍高調波共鳴の比較的近くで生じており、速進波は遮断点を経ずに伝播不能領域につながっている。イオンバーンシュタイン波の減衰が比較的弱い等が 2 イオン混成共鳴の場合と異なる点である。

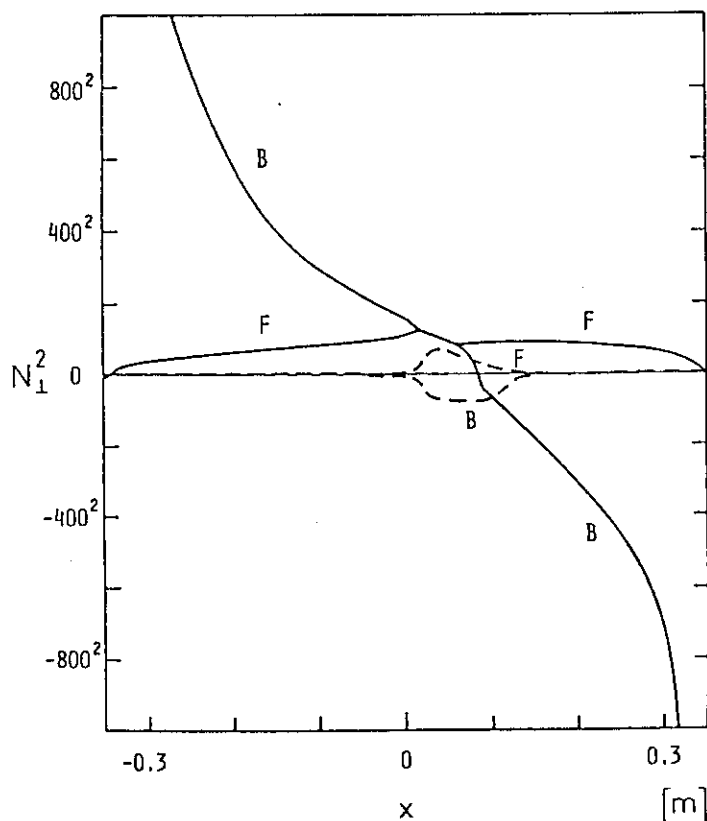


図 2.4 サイクロトロン 2 倍高調波共鳴の場合の分散曲線

図 2.5 は水素プラズマに 5% の  $^3\text{He}$  を混入し、イオンバーンシュタイン波の直接励起を目指したパラメータである。中心温度 0.5 keV, 周波数  $\omega/2\pi = 33$  MHz で他のパラメータは図 2.3 と同じである。このパラメータでは水素のサイクロトロン共鳴は、基本周波数も 2 倍高調波もプラズマ内部には存在しない。  $x$  が正の弱磁界側から入射されたイオンバーンシュタイン波は  $x = -0.17$  m にある  $^3\text{He}$  のサイクロトロン 2 倍高調波共鳴で減衰を受ける。この温度では速進波とイオンバーンシュタイン波との結合は非常に弱い。

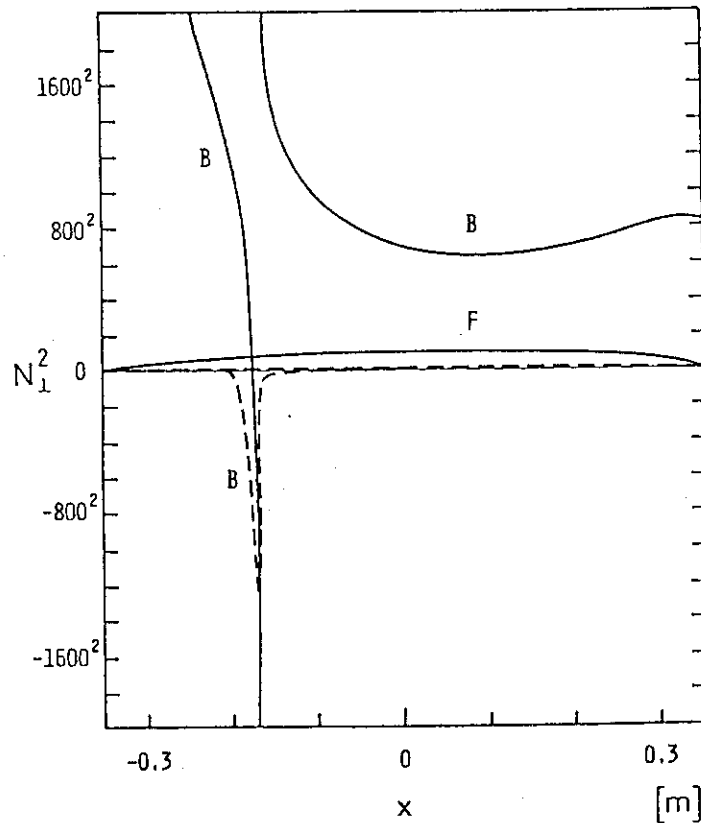


図 2.5 イオンバーンシュタイン波励起の場合の分散曲線

## 2.2 幾何光学近似

### 2.2.1 光線追跡法

幾何光学近似を用いる光線追跡法 (Ray tracing) は波長に比べてゆるやかに変化する媒質中の波動伝播を記述する手法である。RF 加熱においては、電子サイクロトロン共鳴加熱や低域混成波加熱の解析にしばしば用いられている。この節ではまずその原理を要約する[16]。

幾何光学近似では、ゆるやかに変化する媒質中の波動を

$$\mathbf{E} \propto \exp[i\psi(\mathbf{r}, t)] \quad (2.23)$$

とおき、波数および周波数を

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \partial\psi/\partial\mathbf{r}, \quad \omega(\mathbf{r}, t) = -\partial\psi/\partial t \quad (2.24)$$

で定義する。媒質の空間変化の特性長および  $\mathbf{k}$  自身の空間変化の特性長がいずれも波長  $2\pi/k$  に比べて十分長いと仮定して、(2.23) 式を波動方程式に代入すると、最低次の方程式として局所理論で得られた分散式

$$D(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r}) = 0 \quad (2.25)$$



を得る。この方程式を  $\omega$  について解き、 $\omega = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  と書く。(2.25) 式を  $\mathbf{k}$  および  $\mathbf{r}$  で微分すると

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (2.26)$$

となる。一方 (2.24) 式より

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (2.27)$$

の関係が成立し、これに  $\omega = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  を代入して (2.26) 式の関係を用いると

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial D}{\partial \omega} \quad (2.28)$$

が成立する。そこで光線の軌跡を

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} = - \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} / \frac{\partial D}{\partial \omega} \quad (2.29)$$

で定義すると、波数の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial D}{\partial \omega} \quad (2.30)$$

が成立する。(2.29) 式と (2.30) 式は  $\Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  をハミルトニアンとする運動方程式となっており、波数および軌跡の発展を記述する。

もし分散式が小さな虚数部を含んでいる場合には、波数  $\mathbf{k}$  を実部  $\mathbf{k}_r$  と小さな虚部  $\mathbf{k}_i$  にわけ、

$$D(\mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i, \omega) = \text{Re}D(\mathbf{k}_r, \omega) + i \text{Im}D(\mathbf{k}_r, \omega) + i\mathbf{k}_i \cdot \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}_r} = 0 \quad (2.31)$$

の関係において実部、虚部をそれぞれ 0 とおくことにより

$$\text{Re}D(\mathbf{k}_r, \omega) = 0, \quad k_i = |\mathbf{k}_i| = \frac{|\text{Im}D(\mathbf{k}_r, \omega)|}{\left| \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}_r} \right|} \quad (2.32)$$

がそれぞれ分散関係および軌跡に沿っての減衰率を与える。

### 2.2.2 トカマクにおける解析例<sup>5)</sup>

光線追跡法の長所の 1 つは、3 次元的不均一性を持つような複雑な配位のプラズマに対しても波動の伝播が容易に計算できることである。この節では、軸対称トカマクにおける計算例を示す。

円筒座標系  $(x, y, \theta)$  を用い、 $x = y = 0$  はプラズマの小半径の中心を表わす。プラズマは  $\theta$  方向に一様で密度、温度は放物分布、中心密度および中心温度はそれぞれ  $4 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $4 \text{ keV}$  である。トロイダル磁界は  $R^{-1}$  の依存性を持ち、ポロイダル磁界は安全係数  $q$  の逆数が放物分布となるようにとられ、中心での  $q$  が 1.07, 表面での  $q$  が 2.58 に選ばれている。プラズマの大きさは主半径が 1.25 m である。

光線追跡法のもう 1 つの長所は運動論的效果を容易に取り入れることができる点である。(2.6) 式から得られる分散式に (2.15), (2.16) 式を代入すると運動論的效果を完全に取り入れることができる。しかし、実際の数値計算にあたっては簡略化された分散式を用いることが多い。文献

[5]においても、サイクロトロン高調波について、電子は  $n=0$  のみ、イオンは  $\epsilon_{xx}$  を除いて、 $n=1, 2$  のみを考え、さらに  $\epsilon_{xz}, \epsilon_{zx}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zy}$  を無視し、 $\epsilon_{zz}$  が非常に大きいという近似を用いており、 $0.5 \lesssim \omega/\Omega_i \lesssim 2.5$  の範囲でのみよい近似であるとしている。

図 2.6 に、D-T プラズマにおける 2 イオン混成共鳴の場合の強磁場励起の計算例を示す。計算の初期値としては  $x=-1.25$  m において  $k_\theta = 10 \text{ m}^{-1}$ 、 $k_y = 0 \text{ m}^{-1}$  と選び、分散関係から  $k_x$  を求めて追跡を開始している。軌跡上の目盛り線は (2.32) 式の減衰率  $k_i$  を用いて計算されるパワーの吸収割合を示す。ポロイダル磁界の影響によって軌跡が複雑な振る舞いをしていることがわかる。

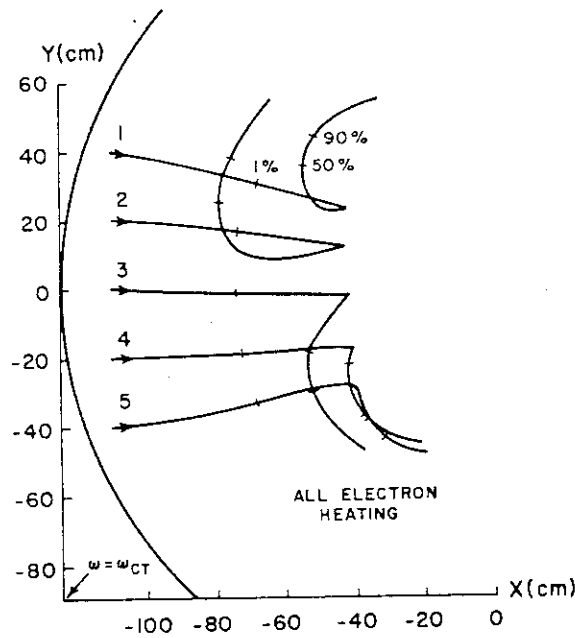


図 2.6 Two-ion hybrid resonance heating, minor-cross-sectional view, 50%T - 50%D plasma, Section-2 profiles and parameters, initial  $k_\theta = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_y = 0$ ,  $\omega = \omega_{CT}$  at  $x = -125 \text{ cm}$ . [5]

図 2.7, 2.8 は D プラズマにおけるサイクロトロン 2 倍高調波共鳴の場合の強磁場側励起の計算例である。速進波がイオンバーンシュタイン波に変換された後、減衰が弱いためプラズマ表面まで伝播し、トロイダル方向にもかなり広がることわかる。

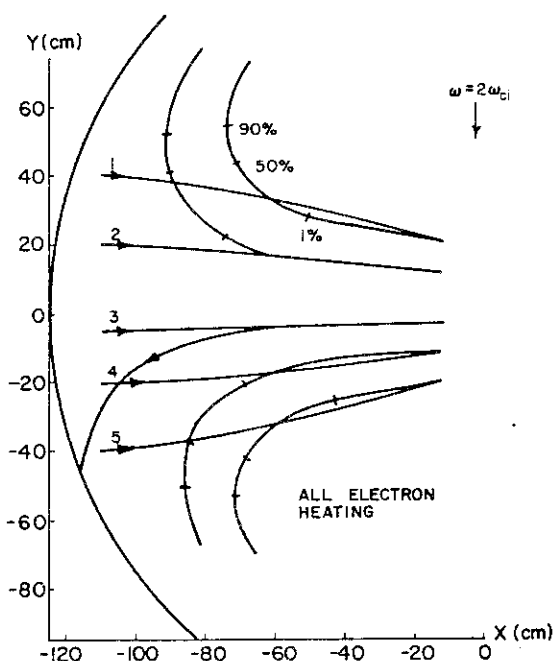


図 2.7 Second-harmonic heating, minor-cross-sectional view, deuterium plasma, Section-2 profiles and parameters, initial  $k_y = 1 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_x = 0$ ,  $\omega = 2\omega_{CD}$  at  $x = 0$ . [5]

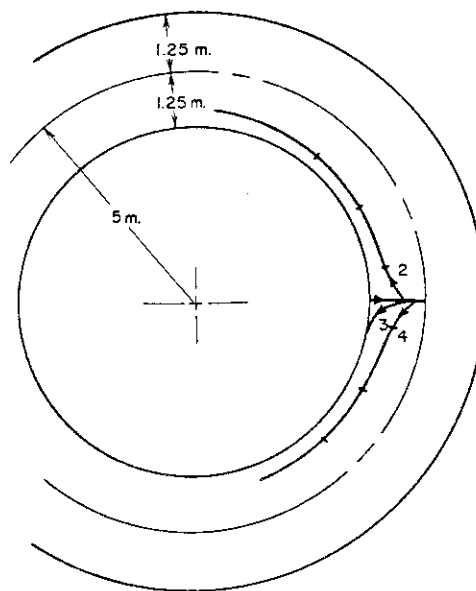


図 2.8 Second-harmonic heating, toroidal view, deuterium plasma, Section-2 profiles and parameters, initial  $k_y = 1 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_x = 0$ ,  $\omega = 2\omega_{CD}$  at  $x = 0$ . [6]

### 2.2.3 問題点

幾何光学近似を用いた光線追跡法の長所は先に述べたように、三次元的不均一性を持つ複雑なプラズマ配位に対しても容易に適用できる点と運動論的効果を容易に取り入れることができる点である。しかしながら、ICRF 加熱の解析に用いる場合、以下のような問題点がある。

- 1) 幾何光学近似では、不均一の特徴長に比べて波長が十分短いことを仮定している。ICRF 周波数帯の速進波の場合、この条件は満たされていない。したがってその近似の妥当性が明確でない。
- 2) 幾何光学近似は波数が実数であることを仮定しており、プラズマ周辺部の低密度領域や、2イオン混成共鳴層で波数が複素数となる伝搬不能領域の解析ができない。したがって伝搬不能領域のトンネル効果による波の透過は取り扱うことができない。
- 3) 吸収が非常に強くなるサイクロトロン共鳴、2倍高調波共鳴では波数の虚数が大きくなるため、(2.31) 式の近似がなりたたなくなり計算が困難になる。
- 4) 光線追跡法では、初期値として位置および波数を与える必要がある。有限サイズのアンテナによって励起される波の場合、連続的な位置、波数を離散化する必要がある。
- 5) 光線追跡法では波の位相を無視しており、波の干渉効果は記述できない。このため、定在波の形成による空洞共鳴等の現象は解析できない。
- 6) 問題点 2), 4), 5) のため、アンテナとの結合を解析するのは困難である。

## 2.3 流体的伝播方程式

### 2.3.1 基礎方程式

冷たいプラズマにおいて、波動光学的解析を行うための基礎方程式は、定常電磁界に対する波動方程式 (2.1) に冷たいプラズマの誘電率テンソル (2.2) を代入して得られる

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} S, & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + i \frac{\omega^2}{c^2} D, & -ik_z \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - i \frac{\omega^2}{c^2} D, & -k_z^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} S, & -ik_z \frac{\partial}{\partial y} \\ -ik_z \frac{\partial}{\partial x}, & -ik_z \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (2.33)$$

である。ここで直角座標 (x, y, z) を用い、z 方向には媒質が一様であるとして波数  $k_z$  の周期性を仮定した。

実際の数値計算や解析的取り扱いにあたっては、(2.33) 式をさらに簡略化した式を用いることがある。それは 2.1.1 で述べたようにトカマクプラズマでは、S や D に比べて P が  $10^3$  程度大きいことを用いて、 $E_z$  を 0 とする近似である。この近似は遅進波を無視することに対応している。得られる方程式は、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} S, & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - i \frac{\omega^2}{c^2} D \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - i \frac{\omega^2}{c^2} D, & -k_z^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega\mu_0 J_{\text{ext},x} \\ -i\omega\mu_0 J_{\text{ext},y} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

となる。

### 2.3.2 2イオン混成共鳴層における伝播

トカマクプラズマにおける 2イオン混成共鳴加熱においては、図 2.1 に示したように  $k_z^2$  の共鳴と遮断が近接している。この節ではこの共鳴—遮断層における速進波の透過、反射、吸収を流体的伝播方程式を用いて議論する<sup>13), 15)</sup>。

モデル計算にあたって (2.34) 式で y 依存性を無視して 1 次元的に解析することにする。 $\partial/\partial y = 0$  とおき、 $E_x$  を消去すると

$$\frac{d^2}{dx^2} E_y(x) + k_1^2(x) E_y(x) = 0 \quad (2.35)$$

$$k_1^2(x) \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(S+D-N_{||}^2)(S-D-N_{||}^2)}{S-N_{||}^2} \quad (2.36)$$

を得る。ここで  $N_{||} = k_z c / \omega$  である。 $k_1^2(x)$  は  $S = N_{||}^2$  を満たす共鳴点で発散し、 $L \equiv S - D = N_{||}^2$  を満たす遮断点で 0 になる (図 2.1 参照)。そこで共鳴点を原点にとり、遮断点位置を  $x = x_c$

にとると (2.35) 式は

$$-\frac{d^2}{dx^2} E_y(x) + k_{\infty}^2 \left(1 - \frac{x_c}{x}\right) E_y(x) = 0 \quad (2.37)$$

と近似できる。この方程式は、Budden の方程式と呼ばれる<sup>17)</sup>。  $k_{\infty}$  は波数の  $x \pm \infty$  での漸近値である。S, D およびそれらの勾配を共鳴点で評価すると

$$k_{\infty}^2 = \frac{(d/dx)[(S+D-N_0^2)(S-D-N_0^2)]}{(d/dx)[S-N_0^2]} \quad (2.38)$$

$$x_c = \frac{(S+D-N_0^2)(S-D-N_0^2)}{(d/dx)[(S+D-N_0^2)(S-D-N_0^2)]} \quad (2.39)$$

で近似できる。

Budden の方程式 (2.37) の漸近解の性質はよく調べられており<sup>17)</sup>、共鳴側 ( $x < 0$ , 強磁界側) から入射した場合には反射はなく、一部は透過して残りは吸収される。一方、遮断側 ( $x > 0$ , 弱磁界側) から入射した場合には一部は透過し、一部は吸収され、残りは反射される。その割合は

共鳴側入射	反射率 = 0	
	透過率 = $e^{-\eta}$	(2.40)
	吸収率 = $1 - e^{-\eta}$	

遮断側入射	反射率 = $(1 - e^{-\eta})^2$	
	透過率 = $e^{-\eta}$	(2.41)
	吸収率 = $e^{-\eta} - e^{-2\eta}$	

となる。ここで  $\eta = \pi |k_{\infty} x_c|$ 。この吸収は共鳴点の特異性に起因するものであり、無限小の損失であっても振幅が無限大になるため、吸収パワーが有限になるとして理解できるが、物理的には遅進波、言いかえるとイオンバーンシュタイン波へモード変換するパワーとみなすことができる。したがってサイクロトロン減衰等の影響とは別であり、そのような運動論的な吸収が加わると吸収率は変化する。

以上の解析から、2イオン混成共鳴層が非常に狭い場合は透過するが、波長に比べて共鳴層の幅が広がると、強磁界側から入射した場合にほとんど短波長のイオンバーンシュタイン波にモード変換し、弱磁界側から入射した場合にはほとんど反射されることがわかる。

## 2.4 運動論的伝播方程式

### 2.4.1 基礎方程式

微視的な運動論的効果を取り入れて、波動光学的に電磁波の伝播を解析するためには、運動論的な波動方程式を導くことが必要である。一様プラズマにおいては、(2.15), (2.16) 式の誘電率テンソルにおいて波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を空間微分演算子  $-i\mathcal{D}$  におきかえることによって、容易に波動方程式を書き下すことができる。ただし、誘電率が波数の有限項の多項式で表わされていなく

れば微積分方程式になってしまい、解を得ることは容易ではない<sup>18)</sup>。一方、不均一プラズマにおいては、誘電率を波数で展開したときの係数が場所の関数であるために  $-i\eta$  と可換でなくなり、問題は複雑になる。この節では、不均一分散性媒質中の波動を記述する伝播方程式を導く一般的な手法を述べる<sup>19)</sup>。

不均一媒質中で電界と誘起電流とを結びつける電気伝導度テンソル  $\hat{\sigma}$  は一般的に

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' dt' \hat{\sigma} \left( \mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'; \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \frac{t + t'}{2} \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t') \quad (2.42)$$

で表わされる。不均一が弱い場合には  $\hat{\sigma}$  の初めの2つの引数は媒質の分散性を表わし、後の2つは媒質の不均一性および非定常性を表わす。以下では簡単のために定常問題を扱うことにし、時間依存性を

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (2.43)$$

とおく。このとき、(2.42) 式は

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma} \left( \mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega; \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} \right) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (2.44)$$

と簡単化される。ここで  $\hat{\sigma}$  を最初の引数に関してフーリエ変換し、

$$\hat{\sigma}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{r}_1 \hat{\sigma}(\mathbf{r}_1, \omega; \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} \quad (2.45)$$

を定義する。この  $\hat{\sigma}$  を用いて (2.44) 式を書きかえると、

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma} \left( \mathbf{k}, \omega; \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (2.46)$$

となる。

さらに簡単のために、不均一は1方向のみであると仮定し、不均一の方を  $x$  軸にとる。誘電率テンソル  $\hat{\sigma}$  を  $x$  方向の波数  $k_x$  で展開できると仮定し、

$$\hat{\sigma}(k_x, k_y, k_z, \omega; x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sigma^{(l)}(x) k_x^l \quad (2.47)$$

とおく。展開係数  $\sigma^{(l)}(x)$  は  $k_y, k_z, \omega$  の関数であるが引数は省略した。次に  $\sigma^{(l)}(x)$  を  $x$  について対称な形でテイラー展開を行い、

$$\sigma^{(l)}\left(\frac{x+x'}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(x'-x)^n}{n! 2^n} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \sigma^{(l)}(x) + \frac{(x-x')^n}{n! 2^n} \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \sigma^{(l)}(x') \right\} \quad (2.48)$$

を得る。(2.47) 式、(2.48) 式を (2.46) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+l} l! n!} \left[ \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{r}'}{(2\pi)^3} k_x^l e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} (x' - x)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \sigma^{(l)}(x) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right. \\ & \left. + \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{r}'}{(2\pi)^3} k_x^l e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} (x - x')^n \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \sigma^{(l)}(x') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right] \quad (2.49) \end{aligned}$$

となる。ここで、デルタ関数  $\delta(x)$  についての恒等式

$$\int \frac{dk}{2\pi} k^n e^{ik(x-x')} = (i)^n \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \delta(x-x') \quad (2.50)$$

を用い、部分積分を繰り返すと最終的に

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n-l}}{2^{n+1}(l-n)!n!} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^{l-n} \left( \frac{\partial^n \bar{\sigma}^{(l)}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \right. \\ & \left. + (-1)^n \frac{\partial^n \bar{\sigma}^{(l)}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^n} \cdot \frac{\partial^{l-n} \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}^{l-n}} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

となる。もし  $\bar{\sigma}$  が反エルミートであれば (2.51) 式は自己随伴であることは容易に示される。今、(2.17) 式のように不均一方向に関する空間的分散の2次までをとることにすると、誘起電流は

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\alpha(\mathbf{r}) = & \sum_\beta \left[ \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{x}) \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}) - i \left\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}) \right\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

で表わされる。ここで  $\alpha, \beta$  は  $x, y, z$  を表わす。マクスウェル方程式 (2.1) を

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{J}_{\text{ind}} = i\omega\mu_0 \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (2.53)$$

と書き改め、誘起電流  $\mathbf{J}_{\text{ind}}$  として (2.51) あるいは (2.52) を用いると運動論的伝播方程式が得られる。

#### 2.4.2 エネルギー束と吸収パワー

冷たいプラズマのように非分散性媒質において、波によって運ばれるエネルギー束  $\mathbf{S}$  はポインティングベクトルによって

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) \quad (2.54)$$

と表わされる。ここで  $\frac{1}{2}$  の因子は時間平均から生ずる。一方、吸収パワー  $P_{\text{abs}}$

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}_{\text{ind}}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \bar{\sigma}_{\text{H}} \cdot \mathbf{E} \quad (2.55)$$

で表わされ、 $\bar{\sigma}_{\text{H}}$  は電気伝導度テンソルのエルミート部分である。エネルギー保存則により、エネルギー束と吸収パワーは

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + P_{\text{abs}} = -\frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}_{\text{ext}}) \quad (2.56)$$

の関係を満たしている。

運動論の効果が含まれた分散性媒質におけるエネルギー束は、粒子が電磁界と同じ周波数で振動する運動エネルギーが付け加わって、

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) - \frac{i}{4} \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}_\Lambda}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} \quad (2.57)$$

となる。ここで  $\vec{\sigma}_\Lambda$  は  $\vec{\sigma}$  の反エルミート部分である<sup>20)</sup>。

不均一で分散性の媒質においては、(2.51) 式より  $\operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J})$  を計算することによって、エネルギー束および吸収パワーを計算することができる。その結果、不均一方向へのエネルギー束として<sup>19)</sup>、

$$S_x = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B})_x + \sum_{\alpha\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-n-1} \frac{(-i)^l (-1)^{n-m}}{n!(l-n)!2^{n+3}} \\ \times \left\{ \frac{\partial^m \mathbf{E}_\alpha^*}{\partial x^m} \frac{\partial^{l-1-m}}{\partial x^{l-1-m}} (\sigma_{\alpha\beta}^{(l)} \mathbf{E}_\beta) - (-1)^l \frac{\partial^{l-1-m}}{\partial x^{l-1-m}} (\mathbf{E}_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{\dagger(l)}) \frac{\partial^m \mathbf{E}_\beta}{\partial x^m} \right\} \quad (2.58)$$

吸収パワーとして

$$P = \sum_{\alpha\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l \frac{(-i)^l}{n!(l-n)!2^{n+2}} \frac{\partial^n \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}}{\partial x^n} \left\{ \mathbf{E}_\alpha^* \frac{\partial^{l-n} \mathbf{E}_\beta}{\partial x^{l-n}} + (-1)^l \frac{\partial^{l-n} \mathbf{E}_\alpha^*}{\partial x^{l-n}} \mathbf{E}_\beta \right\} \quad (2.59)$$

の表式を得る。均一プラズマにおいて平面波を考えると (2.58), (2.59) 式がそれぞれ (2.57), (2.55) 式に帰着することは容易に証明することができる。

不均一方向の分散が比較的小さく、(2.52) 式と同様に 2 次の分散までで打ち切ると、

$$S_x = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B})_x + \sum_{\alpha\beta} \left[ -\frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta\Lambda}^{(1)} \mathbf{E}_\alpha^* \mathbf{E}_\beta - \frac{1}{4} \sigma_{\alpha\beta\Lambda}^{(2)} \left( \mathbf{E}_\alpha^* \frac{\partial \mathbf{E}_\beta}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_\alpha^*}{\partial x} \mathbf{E}_\beta \right) \right] \quad (2.60)$$

$$P = \sum_{\alpha\beta} \left[ \sigma_{\alpha\beta H}^{(0)} \mathbf{E}_\alpha^* \mathbf{E}_\beta - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta H}^{(1)} \left( \mathbf{E}_\alpha^* \frac{\partial \mathbf{E}_\beta}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_\alpha^*}{\partial x} \mathbf{E}_\beta \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left\{ \sigma_{\alpha\beta H}^{(2)} \left( \mathbf{E}_\alpha^* \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\alpha^*}{\partial x^2} \mathbf{E}_\beta \right) + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta H}^{(2)}}{\partial x} \left( \mathbf{E}_\alpha^* \frac{\partial \mathbf{E}_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_\alpha^*}{\partial x} \mathbf{E}_\beta \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta H}^{(2)}}{\partial x^2} \mathbf{E}_\alpha^* \mathbf{E}_\beta \right\} \right] \quad (2.60)$$

の表式を得る。

### 2.4.3 簡略化された方程式

2.4.1 においては、不均一分散性媒質中の伝播方程式を一般的に導いた。分散が弱い場合には 2 次までの分散を残すと (2.52) 式に帰着するが、それでもかなり複雑である。さらに簡略化された方程式を用いた解析についてこの節でふれておく。

Chiu and Mau<sup>9)</sup> は運動論的解析により、(2.52) 式において電子の運動のみに影響を及ぼす  $E_z$  を小さいとして無視し、 $\partial^2 \sigma / \partial x^2$  の項も落としたことに対応する、 $E_x$  と  $E_y$  に対する波動方程式を導いた。そしてサイクロトロン 2 倍高調波共鳴近傍の伝搬不能領域における波の透過、反射、吸収を数値的に解析すると共に、解析的な評価を行った。



一方, Colestock and Kashuba<sup>7)</sup> はさらにサイクロトロン基本調波共鳴における有限ラーモア半径効果を見捨てる一方,  $k_y$  の効果, ポロイダル磁界の効果を見部分的に取入れて波動方程式を導いた。そしてやはり, プラズマ中心部の2イオン混成共鳴層や2倍高調波共鳴層における透過, 反射, 吸収を見数值的に解析した。

これらの研究はいずれも  $E_z=0$  とおいているため, 電子のランダウ減衰の効果が見取入れられておらず, 又プラズマ表面の低密度領域ではその近似が成立しないため, プラズマ中心部のみを見扱うといった制約がある。それに対して3.2で述べる解析は  $E_z$  の効果も見取入れ, プラズマ全体にわたる解析である。

### 3. 数値計算法

#### 3.1 流体的1次元解析

##### 3.1.1 無衝突モデル<sup>6)</sup>

この節および次節では、トカマクプラズマ中のICRF波励起を解析するために、不均一が1次元のスラブプラズマをモデルにし、冷たいプラズマ近似を用いた数値解析について述べる。この節では、吸収機構として摩擦項を用いず2イオン混成共鳴における共鳴吸収を解析的に取り扱った方法について述べる。

基礎となる方程式は流体的伝播方程式において、 $E_z=0$ とおき、 $y$ 方向の波数も0とした(2.35)式である。この方程式を図3.1に示すスラブ配位で解く。 $x \pm d$ に $y$ 方向の電流が流れる幅 $l$ のアンテナがあり、 $-a < x < a$ にプラズマがある。 $z$ 方向に静磁界が加えられ、磁界分布は(2.20)、(2.21)式で与えられる。

不均一プラズマ中で(2.35)式を解くために、解析的な関数  $A(x)$ ,  $B(x)$  を用いて

$$A(x) \frac{d^2}{dx^2} f + B(x) f = 0 \quad (3.1)$$

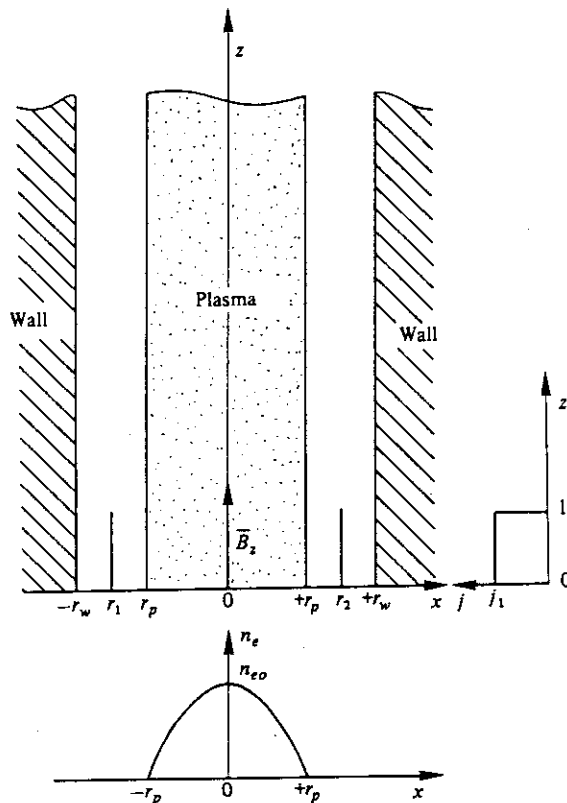


図3.1 Schematic description of the waveguide. Density profile and current profile. [6]

と書きかえ、プラズマ中を  $[x_i, x_{i+1}]$  の小区間に分割して、その区間内で係数  $A(x)$ ,  $B(x)$  を線形化する。その結果、各区間に対して次の方程式を得る。

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2} f + k_\xi^2 (\xi - \xi_c) f = 0 \quad (3.2)$$

ここで

$$\xi = \frac{A(x_{i+1}) - A(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_{i+\frac{1}{2}}) + A(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$k_\xi^2 = \frac{B(x_{i+1}) - B(x_i)}{A(x_{i+1}) - A(x_i)}$$

$$\xi_c = \frac{A(x_{i+1}) - A(x_i)}{B(x_{i+1}) - B(x_i)} B(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1})$$

である。(3.2) 式は (2.37) 式と原点のとり方が異なるだけで同じ方程式である。 $\xi = 0$  を含まない区間に対しては、級数展開により解析解を求めることができる。すなわち、テイラー展開

$$f = \sum \alpha_n [\xi - A(x_{i+\frac{1}{2}})]^n \quad (3.3)$$

を行うと  $\alpha_n$  に対する漸化式

$$\alpha_{n+2} = \frac{-k_\xi^2 \alpha_{n-1} + k_\xi^2 (\xi_c - A(x_{i+\frac{1}{2}})) \alpha_n - n(n+1) \alpha_{n+1}}{(n+1)(n+2) A(x_{i+\frac{1}{2}})} \quad (3.4)$$

が得られる。そして  $\alpha_0$  および  $\alpha_1$  は積分定数となる。

次に  $\xi = 0$  すなわち、2イオン混成共鳴を含む区間を考える。この場合の解析解は

$$f_1 = \xi \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \xi^n \quad (3.5 a)$$

$$f_2 = g_s \xi \left( \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \xi^n \right) \ln \xi + \left( -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \xi^n \right) \quad (3.6 b)$$

で与えられ、係数に対する漸化式は

$$\phi_{n+1} = k_\xi^2 (\xi_c \phi_n - \phi_{n-1}) / (n+1)(n+2)$$

$$\theta_{n-1} = [k_\xi^2 (\xi_c \theta_n - \theta_{n-1}) - (2n+1) g_s \phi_n] / n(n+1)$$

となり、又  $g_s = -k_\xi^2 \xi_c / \phi_0$  である。そして  $\phi_0$  と  $\theta_1$  が積分定数となる。(3.5 b) 式の対数項に対しては、因果律を満たすように正の虚数部を周波数に付け加えて解析する必要がある。

各区間で得られた解を、境界面で連続かつ1階微分も連続という条件で接続することにより、積分定数を求めることができ、電界が計算できる。 $\xi = 0$  の特異点においてパワー吸収が存在し、その値はエネルギー束 (2.54) のとびから計算することができる。

以下に計算例を示す。TFR トカマクのパラメータに準拠し、 $R = 0.98 \text{ m}$ ,  $a = 0.21 \text{ m}$ ,  $b =$

0.25 m,  $\omega/2\pi = 60\text{MHz}$ ,  $B_0 = 4.4\text{T}$ ,  $n_{e0} = 10^{20}\text{m}^{-3}$ ,  $\eta = n_H/n_D = 0.20$  とする。図 3.2 は、アンテナ位置における電界の波数スペクトルである。(a) は強磁界側励起, (b) は弱磁界側励起であって, A は虚数部, R は負荷抵抗に対応する実数部である。強磁界側励起の場合は比較的幅の広い吸収スペクトルであるのに対して, 弱磁界側励起の場合は, ある波数において鋭いピークが生じる。これは導体壁とプラズマ中の遮断層との間に定在波がたち, 空洞共鳴が起こるためである。この様子は電界の2次元分布を示した図 3.3 をみれば明らかである。これも (a) は強磁界側励起, (b) は弱磁界側励起の場合を示す。強磁界側励起の場合は2イオン混成共鳴における吸収が強く, 波がz方向に余り広がっていないのに対して, 弱磁界側励起の場合にはほとんど減衰を受けずにz方向に伝搬している。

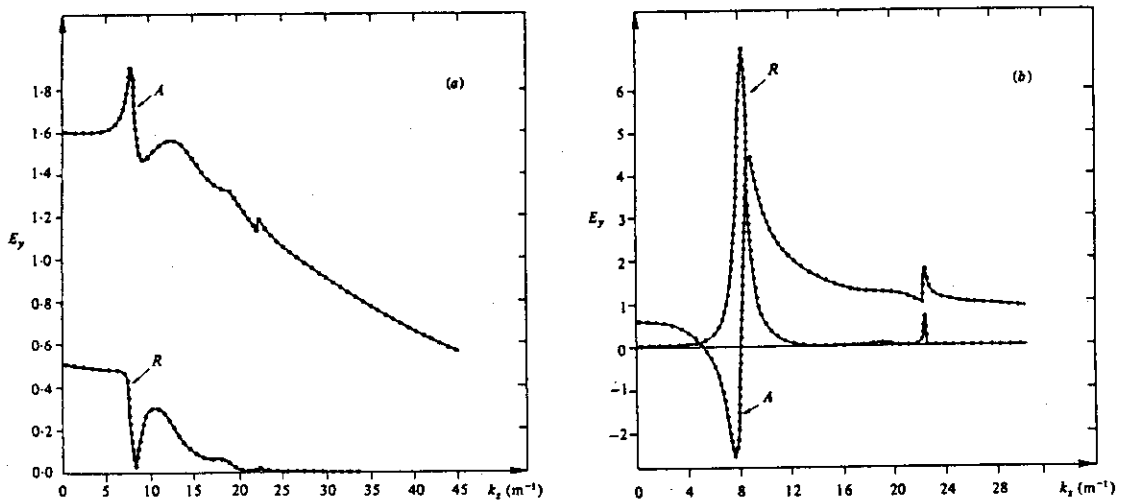


図 3.2 Fourier spectrum of the electric field at the antenna location.  $n_e = 10^{14}\text{cm}^{-3}$ ,  $B_0 = 4.4\text{T}$ ,  $n_H/n_D = 0.2$ . A is the imaginary part, R the real part of the spectrum. The antenna is located at (a)  $x = -22\text{cm}$ , (b)  $x = +22\text{cm}$ . [6]

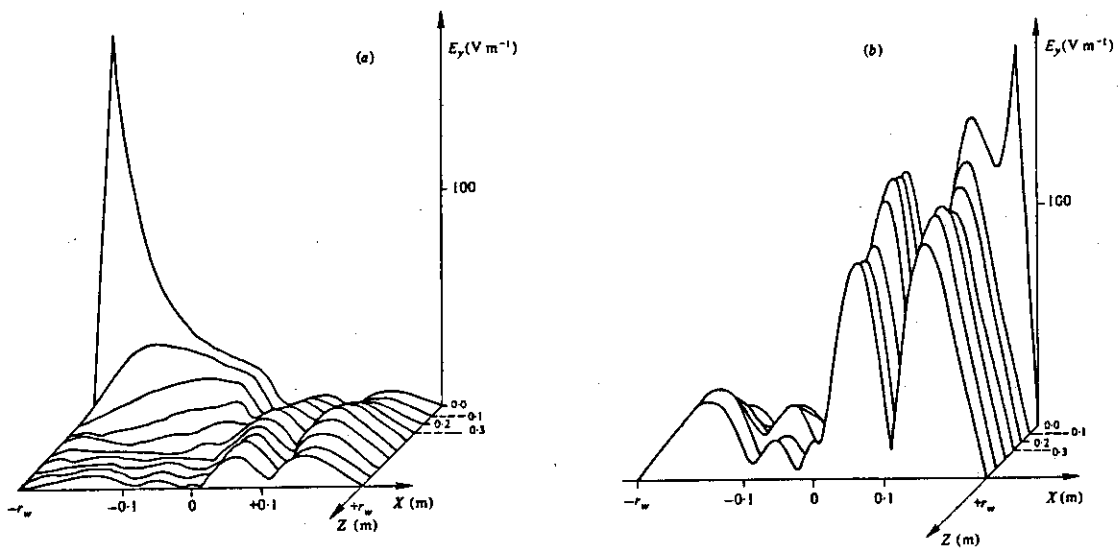


図 3.3 Electric field distribution after inverse Fourier transform with the same parameters as 図 3.2 (a) High field side antenna, (b) low field side antenna. [6]

### 3.1.2 衝突を含むモデル

3.1.1で説明したモデルは、2イオン混成共鳴における吸収を解析的に取り扱って吸収パワーを求めている。この方法は、吸収を任意性なしに計算することができる点で秀れているが、2次元不均一性への拡張を考えると解析は容易ではない。この節では、衝突周波数 $\nu$ に比例する摩擦項を導入することによって、共鳴点における発散を避ける手法について簡単に説明する<sup>21)</sup>。

荷電粒子の運動方程式に摩擦項 $-\nu v$ を付加した場合、冷たいプラズマ中のテンソルを(2.2)式から変化させずにおくと、プラズマ周波数やサイクロトロン周波数の定義に含まれる質量 $m$ を複素数の実効質量

$$m^* \equiv m + \left(1 + i \frac{\nu}{\omega}\right) \quad (3.6)$$

に置き換えたのと等価である。この実効質量を用いると、イオン混成共鳴点における発散を取り除くことができ、数値解析が容易になる。共鳴点における吸収も $\nu/\omega$ を適切に選ぶことによって前節のモデルで得られた値に一致させることができる。

前節の解析に用いたのと同じ(2.35)式を、摩擦項を付加した誘電テンソルを用いて数値解析した例を図3.4に示す。パラメータは前節のモデルと同じであるが、 $k_z = 4m^{-1}$ の成分だけを描き、 $\nu/\omega$ は0.01に選んだ。図(a), (b)は電界 $E_y$ の絶対値の $x$ 分布、図(c), (d)はエネルギー束を示す。電界分布は図3.3とかなりよく一致している。エネルギー束の方は共鳴点の近くで比較的ゆるやかに減少しており、前節の解析では階段状であるのに比べると広い範囲で吸収されていることがわかる。

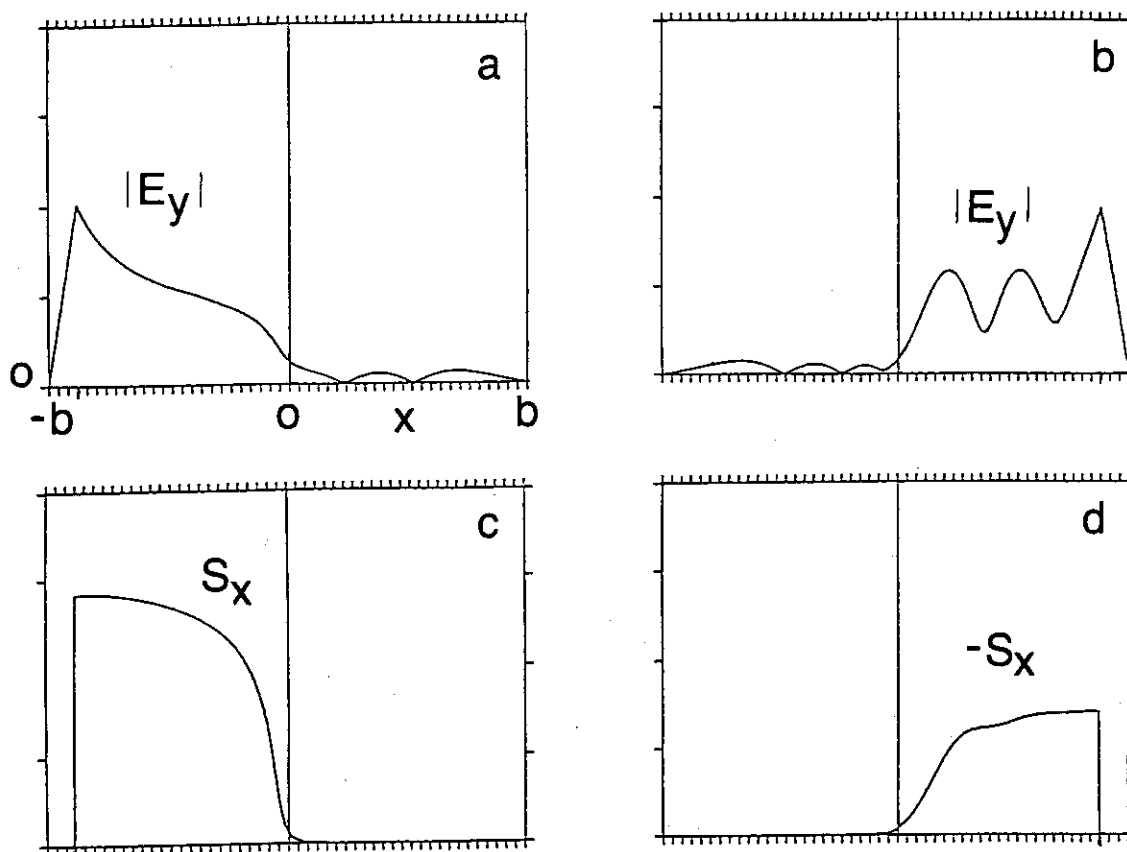


図3.4 衝突を含むモデルによる解析例  $k_z = 4m^{-1}$ ,  $\nu/\omega = 0.01$

問題になるのは吸収パワーの $\nu/\omega$ 依存性であるが、 $\nu/\omega$ を0.01から1まで変化させたが、吸収パワーの変動は±20%でほぼ平坦であった。 $\nu/\omega$ が0.001よりも小さくなるとほぼ $\nu/\omega$ に比例した吸収パワーが減少したが、これは共鳴の幅が数値解析上の区間幅よりも小さくなったためである。以上の解析から $\nu/\omega$ を適切に選ぶと、共鳴点における吸収が模擬できることが確かめられた。

### 3.1.3 問題点

冷たいプラズマ近似を用いた流体的伝播方程式を1次元的不均一性を持つスラブプラズマに適用することにより、光線追跡法では解析できないいくつかの現象が解析された。すなわち、2イオン混成共鳴層における波の透過、反射、吸収を含めた解析が行われ、導体壁間あるいは遮断層と導体壁との間に定在波が形成され、空洞共鳴を起こすことが示された。アンテナの負荷インピーダンスも計算された。しかし、モデルが簡単であるためにいくつかの問題点を抱えている。

- 1) 流体的解析における共鳴点での吸収は、運動論的解析においてはイオンバーンシュタイン波へのモード変換に対応し、プラズマ粒子への吸収とはならない。プラズマ粒子への吸収パワーの空間分布を得るためには、ランダウ減衰、サイクロトロン減衰等を含めた解析が必要である。
- 2) 1次元解析においては、空洞共鳴の効果が強く出る。 $y$ 方向の不均一性があると $k_y$ が変化し、 $k_y$ によって共鳴条件がずれるために、全体として共鳴が広がる。また、 $y$ 方向にずれるにつれて共鳴—遮断層の幅が狭くなるため透過が増加し、やはり空洞共鳴が弱められる。
- 3) 摩擦項をいれたモデルでは、 $\nu/\omega$ の値を適切に選ぶと、吸収パワーの値は $\nu/\omega$ の値によらないが、その空間分布は $\nu/\omega$ の値によって変化する。したがって、吸収パワーの空間分布については定性的な議論しかできない。

## 3.2 運動論的1次元解析

### 3.2.1 モデル

この節では、加熱に本質的でありながら3.2の流体的解析には含まれていなかった運動論的解析について、その特徴、プラズマモデル、基礎方程式と境界条件について述べる<sup>8)</sup>。

運動論的効果としては、静磁界に平行方向の波粒子共鳴相互作用をプラズマ分散関数によって記述し、垂直方向の運動による有限ラーモア半径効果は $(k_{\perp}\rho)^2$ までを取り入れる。その結果、イオンバーンシュタイン波へのモード変換や電子のランダウ減衰、イオンのサイクロトロン基本調波減衰、第2高調波減衰等が記述できる。さらにクーロン衝突による減衰や導体壁を流れる渦電流による損失も含まれている。

解析に用いる配位は図3.1とほぼ同じである。強磁界側( $x=-d$ )と弱磁界側( $x=d$ )におかれたアンテナは $y$ 方向だけでなく $z$ 方向の電流を流すことによって、イオンバーンシュタイン波の励起も可能にしてある。また、 $x=\pm b$ における導体壁は完全導体ではなく抵抗率 $\eta$ とし、抵抗損を取り入れている。プラズマ中の温度分布は、ガウス分布

$$T_{\parallel}(x) = (T_{\parallel 0} - T_{\parallel s}) \exp\left(-3 \frac{x^2}{a^2}\right) + T_{\parallel s} \quad (3.7 a)$$

$$T_{\perp}(x) = (T_{\perp 0} - T_{\perp s}) \exp\left(-3 \frac{x^2}{a^2}\right) + T_{\perp s} \quad (3.7 b)$$

と仮定している。粒子間のクーロン衝突の影響は、プラズマ周波数とサイクロトロン周波数とに含まれる粒子質量を(3.6)式の実効質量で置き換えることによって擬似的に取り入れられている。ここで衝突周波数は、

$$\nu [\text{rad/s}] = 4.43 \times 10^3 Z^2 A^{1/2} n_e [10^{20} \text{m}^{-3}] T^{-3/2} [\text{keV}]$$

で与えた。ここで  $Z$  は粒子の電荷数、 $A$  は質量数、 $T = (T_{\parallel} + 2T_{\perp})/3$  である。

運動論的解析の基礎方程式は2次の分散までを残した(2.52), (2.53)式である。電気伝導度テンソルは(2.17), (2.18)式の誘電率テンソルを変形して用いる。

(2.52), (2.53)式を解いて得られるプラズマ中の解は、プラズマ-真空境界  $x = \pm a$  で真空解と接続される(接続条件は次節参照)。真空中の電界はアンテナ位置  $x = \pm d$  においてアンテナ電流  $J_A$  による磁界のとびに対応して

$$\left. \frac{dE_y}{dx} \right|_{\pm d-0}^{+d+0} = -i\omega\mu_0 J_{Ay} \quad (3.8 a)$$

$$\left. \frac{dE_z}{dx} \right|_{\pm d-0}^{+d+0} = i\omega\mu_0 J_{Az} \quad (3.8 b)$$

を満たす。また抵抗率  $\eta$  の導体壁  $x = \pm b$  においては、境界条件

$$\frac{1}{E_y} \left. \frac{dE_y}{dx} \right|_{\pm b} = \frac{1}{E_z} \left. \frac{dE_z}{dx} \right|_{\pm b} = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\omega\mu_0}{\eta}} \quad (3.9)$$

を満足している。 $\eta = 0$  の場合には電界の接線成分、 $E_y = E_z = 0$  に帰着する。

### 3.2.2 多層分割法

方程式(2.52), (2.53)を解くために、プラズマを薄い均一層に分割して各層内で解を求め、それを順次接続する多層分割法を用いた。以下にその計算法を示す。

- 1) まず、不均一なプラズマ領域 ( $-a < x < a$ ) を薄い均一層に分割する。均一層内で平面波解を仮定すると、(2.52), (2.53)式は分散式(2.19)に帰着する。(2.19)式の行列式は  $N_{\perp}$  に関する6次式であるので、その6つの解を  $N_{\perp j}$  ( $j=1, 6$ ) とすると各均一層内の電界は6つの独立な解の線形結合

$$\mathbf{E}(x) = \sum_{j=1}^6 C_j \mathbf{P}_j \exp\left(i N_{\perp j} \frac{\omega}{c} x\right) \quad (3.10)$$

で表わされる。ここで  $\mathbf{P}_j$  は分散式の固有ベクトル、すなわち偏波ベクトルである。任意定数  $C_j$  は各層間の接続条件によって決定される。

- 2) 同様にして、真空中の解も TE, TM モードに対応する 2 つの固有モードと、アンテナによって励起される振幅の定まった TE, TM モードの和で表わされる。
- 3) プラズマ中の各層間の接続条件は (2.52), (2.53) 式を境界面を含む微小区間にわたって積分することによって得られ、

$$\begin{aligned}
 & E_x, E_y, E_z, \\
 & -i \frac{\mu_0}{2} \sum_{\beta} \left[ \sigma_{x\beta}^{(1)} E_{\beta} - i \sigma_{x\beta}^{(2)} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} \right], \\
 & B_z - i \frac{\mu_0}{2} \sum_{\beta} \left[ \sigma_{y\beta}^{(1)} E_{\beta} - i \sigma_{y\beta}^{(2)} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} \right], \\
 & B_y - i \frac{\mu_0}{2} \sum_{\beta} \left[ \sigma_{z\beta}^{(1)} E_{\beta} - i \sigma_{z\beta}^{(2)} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} \right]
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

の 6 つの物理量の連続条件で表わされる。[ ] の項は境界面を流れる面電流が作る磁界に対応する。

- 4) プラズマと真空との境界における接続条件は (3.11) 式に示した 6 つの物理量の内、 $E_x$  を除いた 5 つの物理量が連続となる条件で与えられる。この条件は、エネルギー束が連続となる条件に対応している。すなわち、(3.11) 式の第 4 項は真空中では 0 となることから、エネルギー束は  $E_x$  の値によらなくなるため、 $E_x$  の値が連続である必要がないからである [(3.12) 式参照]。
- 5) 3), 4) で与えた接続条件を課することにより、1), 2) に含まれる任意定数間の関係が連立 1 次方程式で与えられる。この方程式の係数は幅 17, 長さ (分割層数)  $\times$  6 + 4 の複素帯行列で与えられる。この方程式を帯行列に対するガウスの消去法により解く。
- 6) 得られた線形結合の係数から、各点における電界およびその微係数を求める。アンテナ位置の電界から負荷インピーダンスを計算する。プラズマ中の各点におけるエネルギー束  $S$  および吸収パワー密度  $P_s$  を、(2.60), (2.61) 式を均一層内に適用して

$$S_x = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left[ E_y^* B_z - E_z^* B_y - \sum_s \sum_{\alpha\beta} \frac{i\mu_0}{2} E_{\alpha}^* \left\{ \sigma_{s\Lambda\alpha\beta}^{(1)} E_{\beta} - i \sigma_{s\Lambda\alpha\beta}^{(2)} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} \right\} \right] \tag{3.12 a}$$

$$\begin{aligned}
 S_z = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left[ E_x^* B_y - E_y^* B_x - \sum_s \sum_{\alpha\beta} \frac{i\mu_0}{2} E_{\alpha}^* \left\{ \frac{\partial \sigma_{s\Lambda\alpha\beta}^{(0)}}{\partial k_z} E_{\beta} - i \frac{\partial \sigma_{s\Lambda\alpha\beta}^{(1)}}{\partial k_z} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{s\Lambda\alpha\beta}^{(2)}}{\partial k_z} \frac{\partial^2 E_{\beta}}{\partial x^2} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{3.12 b}$$

$$P_s = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \operatorname{Re} \left[ E_{\alpha}^* \left\{ \sigma_{sH\alpha\beta}^{(0)} E_{\beta} - i \sigma_{sH\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma_{sH\alpha\beta}^{(2)} \frac{\partial^2 E_{\beta}}{\partial x^2} \right\} \right] \tag{3.12 c}$$

により計算する。ここでは  $s$  は、粒子の種類を表わす。

### 3.2.3 解析例<sup>23)</sup>

この節では、運動論的 1 次元解析の例を示す。詳細な解析結果は文献 8), 22) を参照のこと。図 3.5 から図 3.7 は、磁界方向の波数を  $k_z R = 10$  に選んだ場合の電界、エネルギー束、吸収



パワーの空間分布を示す。プラズマのパラメータは図 2.3 から図 2.5 において分散関係を求めたときと同じで、JFF-2M のパラメータに準拠している。電界の分布で実線は絶対値、□を含む線は実数部、×を含む線は虚数部を表わす。

図 3.5 は  $n_H/n_D=0.1$  の 2 イオン混成共鳴の場合の解析例を示す。弱磁界側の y 方向のアンテナによって励起された速進波が、遮断点で一部が反射されて定在波となり、一部は透過して反対側の壁で反射され、一部は短波長で  $E_x$  の大きなイオンバーンシュタイン波にモード変換し、残りは水素のサイクロトロン基本調波減衰および重水素のサイクロトロン高調波減衰によって吸収されている。イオンバーンシュタイン波に変換されたパワーの一部は電子のランダウ減衰によって吸収されている。イオンの吸収パワーの 2 連ピークは、定在波になっているためである。

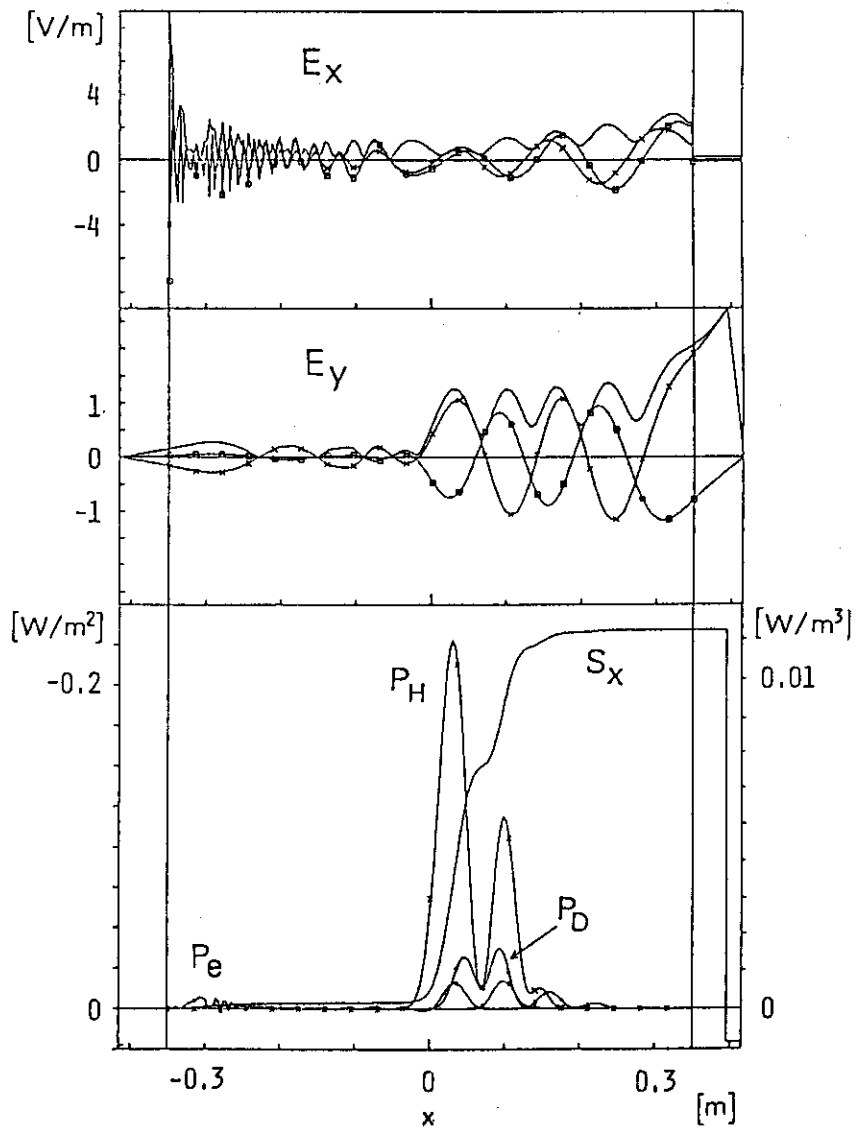


図 3.5 2 イオン混成共鳴の解析例 [ $J_{Ay}=1A/m$ ]  
(パラメータは図 2.3 に同じ)

図3.6は水素プラズマにおけるサイクロトロン2倍高調波共鳴の解析例である。共鳴層近くに速進波の遮断点がないため、比較的反射が少なく、透過、吸収が大きい。イオンバーンシュタイン波への変換も起きているが、その吸収は小さい。ほとんどのパワーは、水素の2倍高調波減衰によって吸収されている。

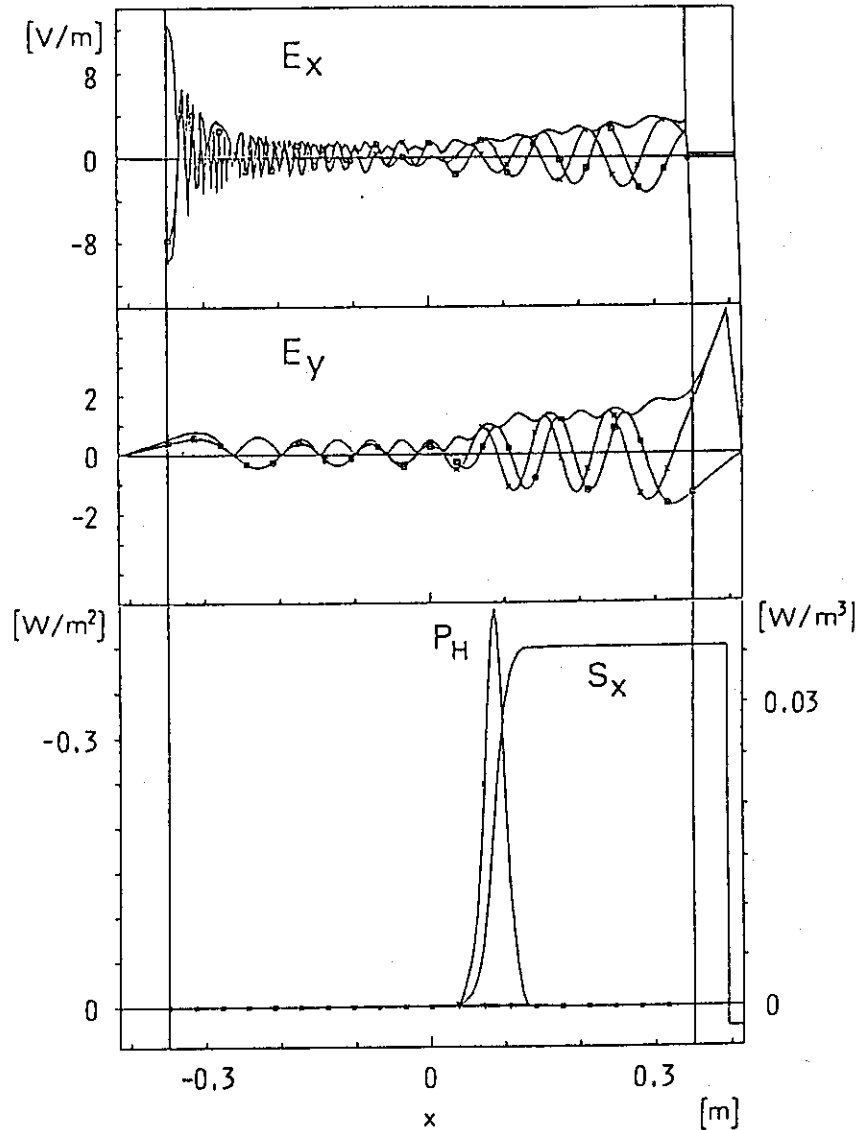


図3.6 サイクロトロン2倍高調波共鳴の解析例 ( $J_{Ay}=1\text{A/m}$ )  
(パラメータは図2.4に同じ)

図3.7はz方向の電流によって、イオンバーンシュタイン波を直接励起した場合の解析例である。小振幅の速進波も励起されているが、ほとんどのパワーがイオンバーンシュタイン波として伝搬され、 $^3\text{He}$ のサイクロトロン2倍高調波共鳴で吸収されている。このパラメータでy方向の電流によって速進波を励起しても、プラズマにはほとんど吸収されずに、壁の抵抗損として吸収されてしまう。なお、このイオンバーンシュタイン波励起の場合、アンテナ直前の電界  $E_x$  が非常に強くなり、またプラズマ表面の密度、温度に敏感である。

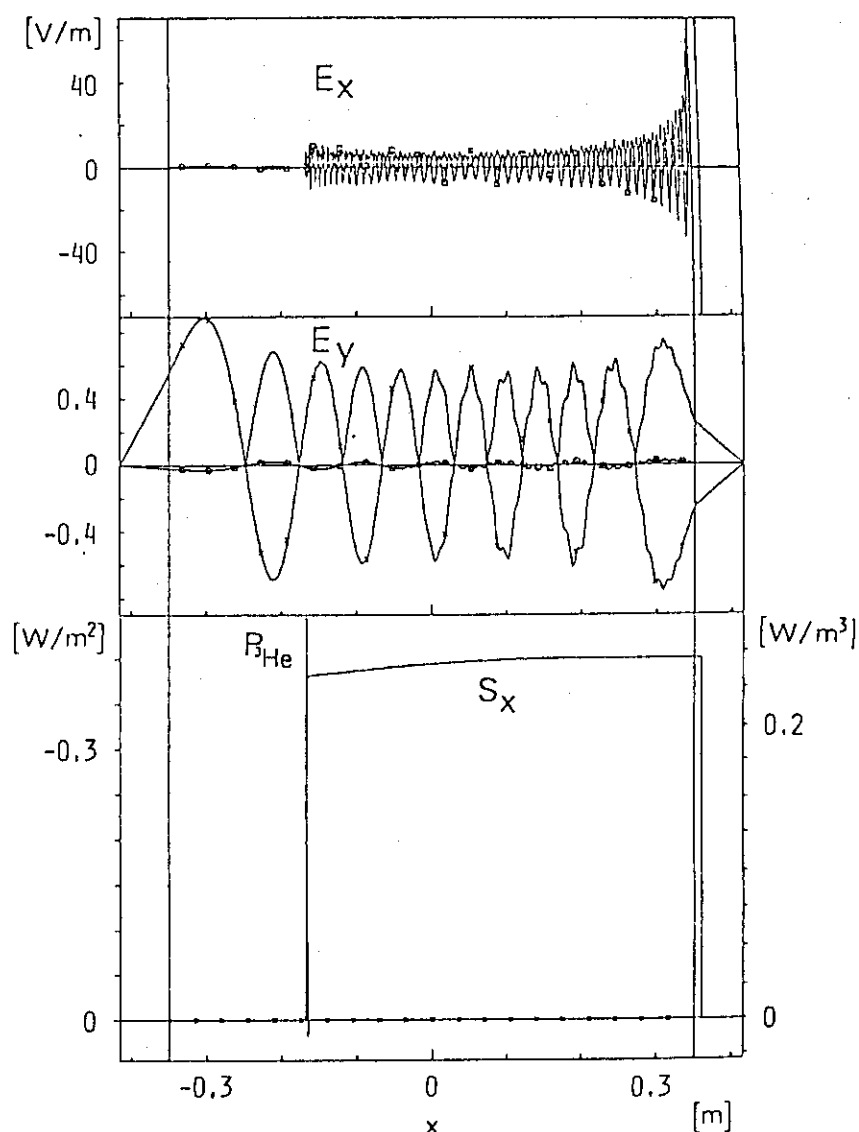


図3.7 イオンバーンシュタイン波励起の解析例 ( $J_{A2}=1\text{ A/m}$ )  
(パラメータは図2.5に同じ)

これまでの解析は波数を決めた解析であったが、 $z$ 方向に周期性を仮定してアンテナ電流をフーリエ分解し、各波数ごとに計算した結果を重ね合わせることによって2次元分布を求めることができる。その解析例を図3.8, 3.9に示す。いずれもJFT-2のパラメータを用いて  $n_H/n_D = 0.1$  の2イオン混成共鳴の場合の強磁界側励起(図3.8)と弱磁界側励起(図3.9)である。速進波はほぼ直進しているが、モード変換されたイオンバーンシュタイン波はトロイダル方向( $z$ 方向)に広がっていることがわかる。弱磁界側励起の場合には、ある  $k_z$  に対して空洞共鳴が生じ定在波が形成されていることがわかる。

以上の数値解析においては  $x$  方向の分割数 200 ないし 400 (図3.7) を使用し、 $z$  方向のモード数は  $\pm 32$  までを計算した。

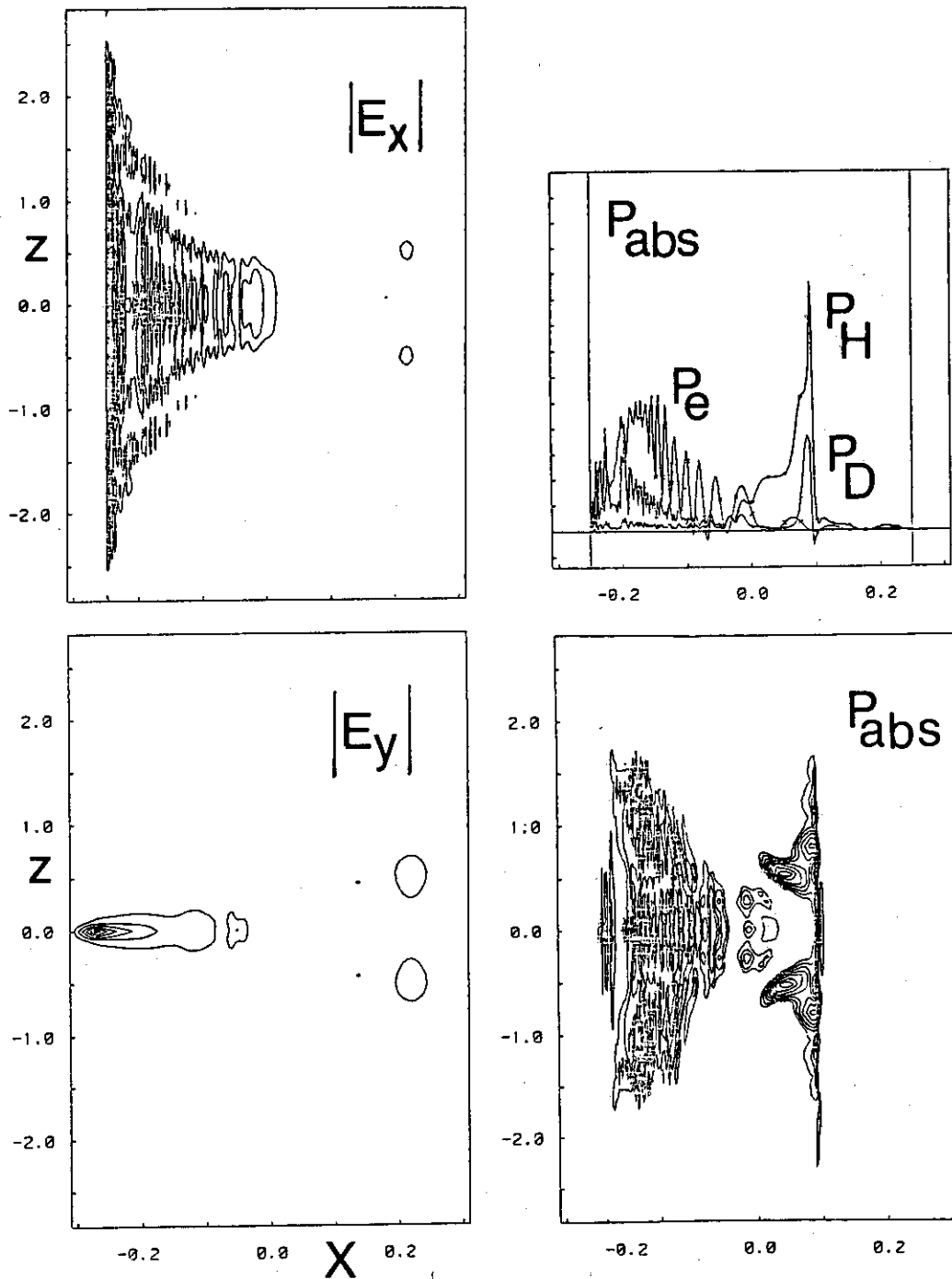


図3.8 2イオン混成共鳴の強磁界側励起の2次元解析例

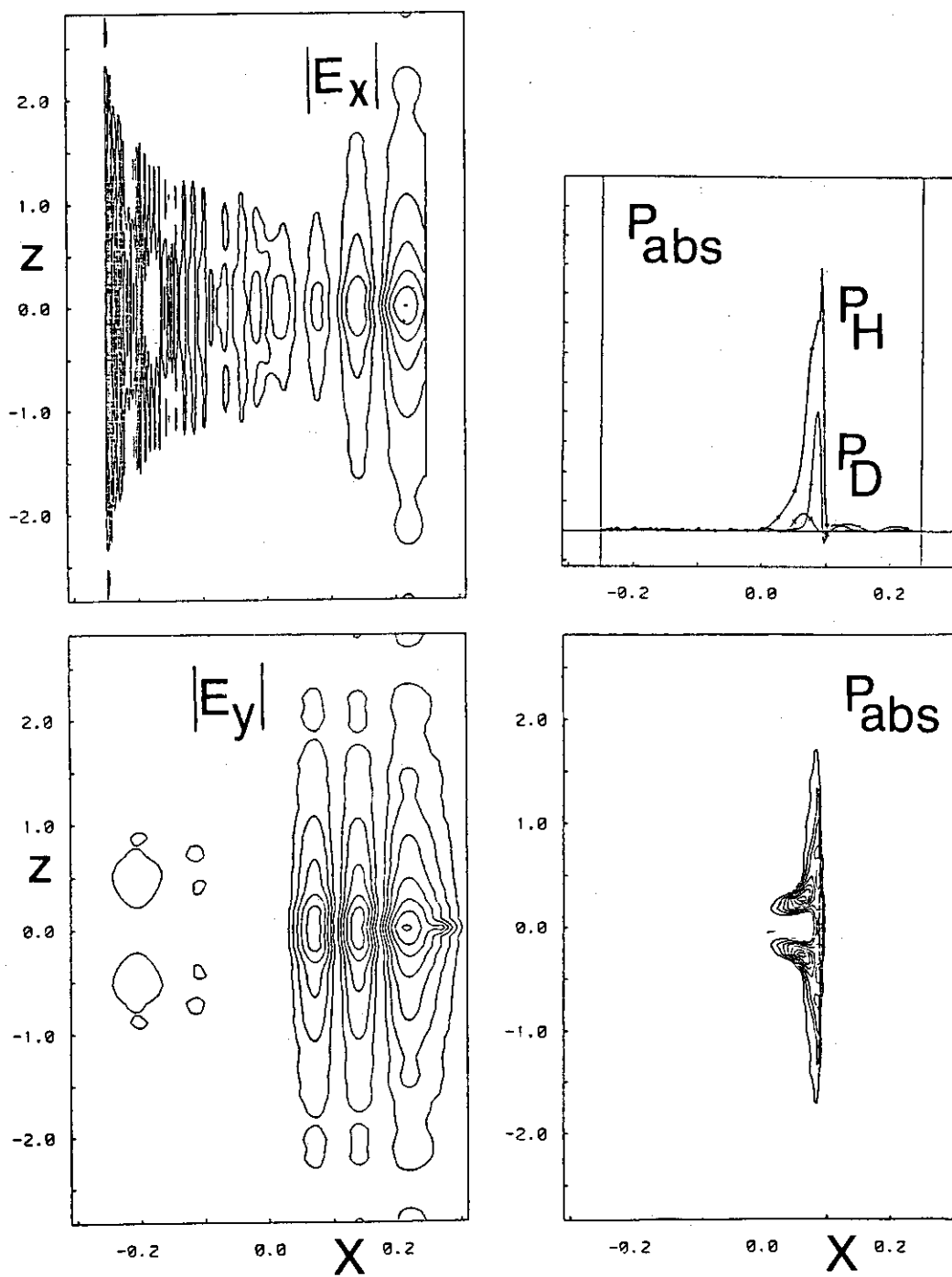


図 3.9 2 イオン混成共鳴の弱磁界側励起の 2 次元解析例

### 3.2.4 問題点

この運動論的1次元解析によって、アンテナによる励起、伝搬不能層の透過、定在波の形成等の波動的現象を含めた運動論的解析が初めて可能になった。この手法によってICRF加熱の吸収過程のかなりの部分が解析できるようになったといえるが、まだ残されているいくつかの問題点を以下に示す。

- 1) 不均一方向が1次元であるので、y方向のアンテナの構造、密度勾配による速進波の集束現象等が解析できない。
- 2) 静磁界の大きさは空間的に変化するが、その方向はz方向で一定である。そのため、ポロイダル磁界の効果が含まれていない。ポロイダル磁界がないと磁界方向の波数が変化しないため、イオンバーンシュタイン波の電子による吸収が現実とは異なっている可能性がある。
- 3) 有限ラーモア半径効果の2次までしか残していないので、 $k_{\perp\rho}$ の大きなモードに対しては正確に記述できない。しかし、定性的な振舞いはそれほど変化しないと考えられる。
- 4) 粒子の速度分布はマクスウェル分布(2.14)を仮定しているため、高エネルギー粒子の影響はマクスウェル分布の重ね合せで表現する必要がある。

## 3.3 流体的2次元解析

### 3.3.1 差分法による解析

この節と次節では、冷たいプラズマ近似を用いた2次元解析について説明する。まずこの節では、差分法を用いた数値解析について述べる<sup>10)</sup>。

比較的簡単なモデルとして円柱プラズマを考え、 $E_z=0$ とおいた基礎方程式(2.34)式を用いる。円筒座標を使うことにすると(2.34)式は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} S, & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + i \frac{\omega^2}{c^2} D \\ -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\omega^2}{c^2} D, & \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega\mu_0 J_{\text{ext},r} \\ -i\omega\mu_0 J_{\text{ext},\theta} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

となる。境界条件としては $r=0$ で $rE_r=rE_\theta=0$ とし、導体壁 $r=b$ 上では $E_\theta=0$ の条件を課した。また、 $\theta$ 方向のアンテナ電流が流れる $r=d$ では

$$B_z \Big|_{d-0}^{d+0} = \frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} E_r \right) \Big|_{d-0}^{d+0} = -\mu_0 J_\theta \quad (3.14)$$

を満たしている。数値計算にあたっては、 $\theta$ に関する偶関数部分と奇関数部分にわけ、それぞれについて $\theta$ 方向と $r$ 方向のメッシュに分割して差分方程式を導いた。詳細は文献10)の付録にある。

プラズマのモデルとしては、磁界、密度分布は(2.20)、(2.21)式を用い、パラメータは、 $\omega_{pb}^2(0)/\Omega_b^2(0)=10^3$ 、 $a^2\Omega_b^2/c^2=0.05$ 、 $\omega/\Omega_b(0)=1.75$ 、 $k_{\parallel}R=10$ 、 $a/R=0.2$ 、 $b/a=1.5$ と選り、重水素と水素からなる2イオンプラズマ( $m_H/m_p=0.1$ )における2イオン混成共鳴を解析

した。なお共鳴における吸収は、(3.6)式の実効質量を用い、 $\nu/\omega = 0.01$  とすることによって計算した。

図3.10に弱磁界側励起における解析例を示す。アンテナ電流は  $r=d$  に

$$J_\theta(\theta) = J_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\theta - 2n\pi}{0.2\pi}\right)^2\right] \quad (3.15)$$

の分布で与えた。図(a)は吸収パワー、(b)はエネルギー束、(c)は  $\text{Re}E_x$ 、(d)は  $\text{Im}E_x$ 、(e)は  $\text{Re}E_y$ 、(f)は  $\text{Im}E_y$  の空間分布を示している。パワー吸収はほぼ2イオン混成共鳴で生じているが、エネルギー流はかなり複雑な振舞いをしていることがわかる。

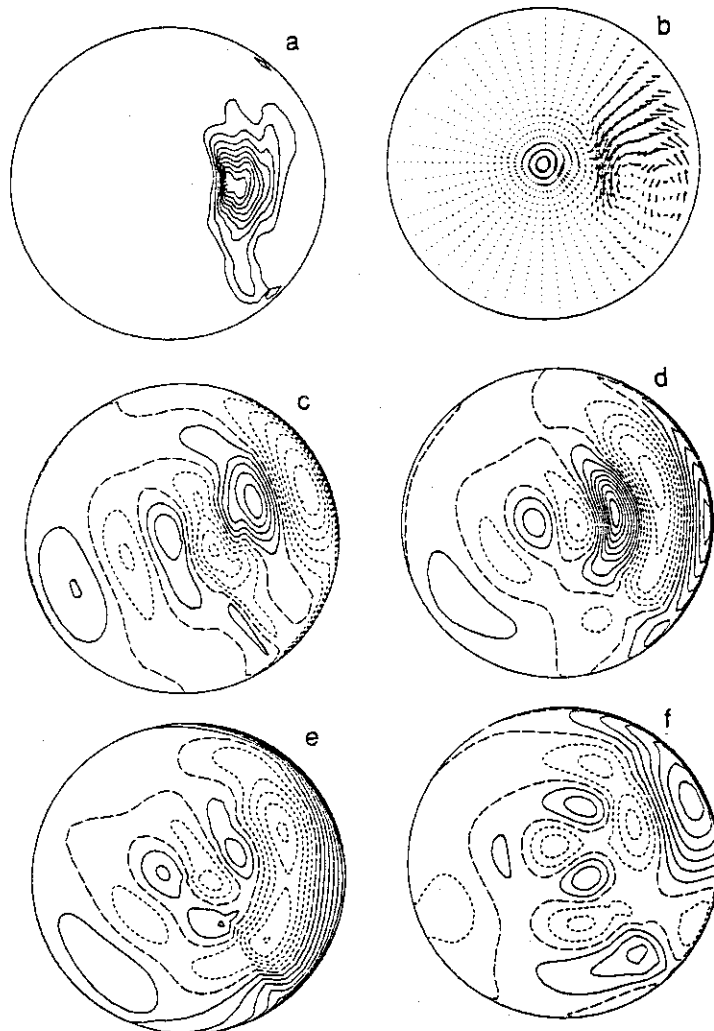


図3.10 2イオン混成共鳴（弱磁界側励起）の差分法による2次元解析例（プラズマ内だけを表示）

### 3.3.2 有限要素法

現実のトカマクにおいては真空容器が複雑な形状をしている場合が多く、そのような場合には前節で述べた差分法を適用すると境界条件が非常に複雑になってしまう。このような境界適合法に秀れ、かつ汎用性の高い有限要素法を用いた解析について説明する。

まず、重みつき残差法を用いた定式化について述べる。基礎方程式は(2.1)式である。この方程式は2階の微分を含んでいるがこれを弱形式にするために、十分なめらかな任意関数  $\mathbf{W}^*$  を重み関数として左から内積をとり、考えている全領域  $V$  にわたって積分を行なう。さらにベクトル公式  $\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$  を用いて部分積分を行うと、1階微分しか含まない弱形式

$$\int_V dV \left[ (\nabla \times \mathbf{W}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{W}^* \cdot \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \right] + \int_S dS [-\mathbf{W}^* \times (\nabla \times \mathbf{E})] \cdot \mathbf{n} = \int_V dV i\omega\mu_0 \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (3.16)$$

が得られる。ここで  $S$  は領域  $V$  を囲む閉曲面で、 $\mathbf{n}$  はその外向き法線ベクトルである。境界面がすべて完全導体壁であるとする、 $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  が成立し、さらに重み関数  $\mathbf{W}$  も同じ境界条件を満たしていると考え、 $\mathbf{W}^* \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  となるため、(3.16)式の表面積分は0となる。

次に(3.16)式を近似解を用いて表現しよう。考えている領域  $V$  を小さな要素に分割し、要素内の関数値を要素境界上の節点の値を用いて近似する。すなわち、電界  $\mathbf{E}$  を  $N$  個の節点上での値を用いて近似し

$$\mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_{\beta j} L_j(\mathbf{r}) \quad (3.17a)$$

で表わす。ここで基底関数  $L_i(\mathbf{r})$  は1次独立な関数系である。同様に  $W_\alpha^*$  および  $\epsilon_{\alpha\beta}$  も同じ基底関数を用いて近似する ( $\alpha, \beta = x, y, z$ )。

$$W_\alpha^*(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N W_{\alpha i}^* L_i(\mathbf{r})$$

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \epsilon_{\alpha\beta k} L_k(\mathbf{r})$$

これらの近似式を(3.16)式に代入すると

$$\sum_{\alpha\beta} \sum_{ij} W_{\alpha i}^* K_{\alpha\beta ij} E_{\beta j} = \sum_{\alpha} \sum_i W_{\alpha i}^* f_{\alpha i} \quad (3.18)$$

$$K_{\alpha\beta ij} \equiv \int_V dV \left[ (\nabla \times \mathbf{e}_\alpha L_i(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_\beta L_j(\mathbf{r})) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_k \epsilon_{\alpha\beta k} L_i(\mathbf{r}) L_j(\mathbf{r}) L_k(\mathbf{r}) \right]$$

$$f_{\alpha i} \equiv \int_V dV i\omega\mu_0 \mathbf{J}_{\text{ext}, \alpha} L_i(\mathbf{r})$$

となる。結局、(3.16)式が任意の重み関数  $\mathbf{W}^*$  に対して成立することは

$$\sum_{\beta} \sum_j K_{\alpha\beta ij} E_{\beta j} = f_{\alpha i} \quad (3.19)$$



という連立1次方程式を解くことに帰着する。この方法をガラーキン法と呼ぶ。

さらに基底関数  $L_i(\mathbf{r})$  として区分的多項式を用いる方法が有限要素法である。要素の形状、基底関数の選び方にはいくつかの方法があるが、以下の解析においては、最も簡単で、境界に対する適合性の良い3角形要素を用い、基底関数としても簡単な1次関数を用いて  $K_{\alpha\beta ij}$  を求める積分は厳密に行った。

### 3.3.3 モデル

有限要素法を用いた解析においては、なるべく現実のトカマク配位に近づけるために i) 円筒座標を用いてトロイダル効果を取り入れ、ii) ポロイダル磁界を含め、iii)  $E_{||} \approx 0$  とした。

座標系は  $(X, Y, \varphi)$  を用い、これは通常円筒座標系  $(R, \theta, Z)$  と

$$X=R, Y=-Z, \varphi=\theta$$

の関係にある。トカマクの軸対称性により電界を  $\varphi$  方向にフーリエ分解し、 $\exp(in\varphi)$  に比例するとした。 $n$  はトロイダル方向のモード番号である。トロイダル磁界  $B_t$ 、ポロイダル磁界  $B_p$ 、安全係数  $q$ 、プラズマ密度  $n$  はそれぞれ

$$B_t = B_0 \frac{R_0}{X}, \quad B_p = \frac{r}{qR} B_t, \quad (3.20 \text{ ab})$$

$$q(r) = q_0 + (q_s - q_0) \frac{r^2}{a^2}, \quad (3.20 \text{ c})$$

$$n(r) = (n_0 - n_s) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + n_s \quad (3.20 \text{ d})$$

とした。ただし、 $r^2 = (X - R_0)^2 + Y^2$  である。誘電率テンソルは冷たいプラズマ近似から得られる(2.2)式を用いるが、静磁界が  $z$  方向ではないので任意方向磁界に対する誘電テンソル

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} S + \alpha^2(P - S) & -i\gamma D + \alpha\beta(P - S) & i\beta D + \alpha\beta(P - S) \\ i\gamma D + \alpha\beta(P - S) & S + \beta^2(P - S) & -i\alpha D + \beta\gamma(P - S) \\ -i\beta D + \alpha\beta(P - S) & i\alpha D + \beta\gamma(P - S) & S + \gamma^2(P - S) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

を用いた。ここで  $(\alpha, \beta, \gamma)$  は静磁界の方向余弦である。

### 3.3.4 解析例

有限要素法を使った解析例として、まず非円形断面の真空容器をもつ JFT-2M トカマクに対する計算結果を示す。パラメータは

$$\begin{array}{ll} R_0 = 1.31 \text{ m} & a = 0.35 \text{ m} \\ n_{e0} = 10^{20} \text{ m}^{-3} & B_0 = 1.3 \text{ T} \\ q_0 = 1 & q_s = 3 \\ n_H/n_D = 0.1 & \nu/\omega = 0.01 \\ \omega/2\pi = 18 \text{ MHz} & n = k_{||}R = 12 \end{array}$$

と選んだ。真空容器とアンテナの形状を図3.11に示す。図3.12は得られた電界、吸収パワーおよびエネルギー流の空間分布を示す。アンテナによって励起された速進波がプラズマ中心に向か

って集束しながら伝播し、一部は遮断層で反射されて定在波となり、一部は透過して反対側の壁で反射されて定在波となり、残りは2イオン混成共鳴層で吸収されている。このときのアンテナの負荷インピーダンスは、抵抗分が $0.182 \Omega$ リアクタンス分が $-0.973 \Omega$ であった。

上の計算は1つのトロイダルモード数に対する計算であったが、いくつかのモードを重ね合わせることにより、トロイダル方向に有限の幅をもつアンテナによって励起されたICRF波の3次元構造が解析できる。図3.13はINTORのパラメータ

$$\begin{array}{lll} R_0 = 5.3 \text{ m} & a = 1.52 \text{ m} & b = 1.82 \text{ m} \\ n_{e0} = 5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3} & n_{es} = 5 \times 10^{17} \text{ m}^{-3} & B_0 = 5.4 \text{ T} \\ q_0 = 1 & q_a = 3 & \nu/\omega = 0.01 \\ \omega/2\pi = 85 \text{ MHz} & & \end{array}$$

を用いて計算した例である。本来はD+Tプラズマであるが、少量のHを混ぜ  $n_H:n_D:n_T=0.1:0.45:0.45$  とすることによって、イオン混成共鳴で吸収させた。アンテナは上下に2本、トロイダル方向に2組計4本あり、トロイダル方向の幅は $0.25 \text{ m}$ 、中心間隔は $0.6 \text{ m}$ 、ポロイダル角は $-40^\circ \sim 1^\circ$ と $1^\circ \sim 40^\circ$ である。アンテナの位相は隣り合うアンテナの位相差を $\pi$ となるように選んだ。図3.13はアンテナ直下の電界、アンテナから $0.3 \text{ m}$ 離れた位置での電界、吸収パワーの空間分布を示す。アンテナから離れるにつれてプラズマ内部に波が伝播している。このパラメータの場合、アンテナからトロイダル方向に $1 \text{ m}$ 伝播するまで90%以上のパワーが吸収されている。アンテナの全抵抗は $8.07 \Omega$ であったが上下のアンテナで大きな差があり、上のアンテナは $6.81 \Omega$ となった。このことは上下のアンテナ間で強い結合があることを示唆している。図3.14は放射パワーのトロイダルモード番号依存性を示しており、モード番号の上限がプラズマ周返部の遮断領域の幅によって決まることが確かめられた。

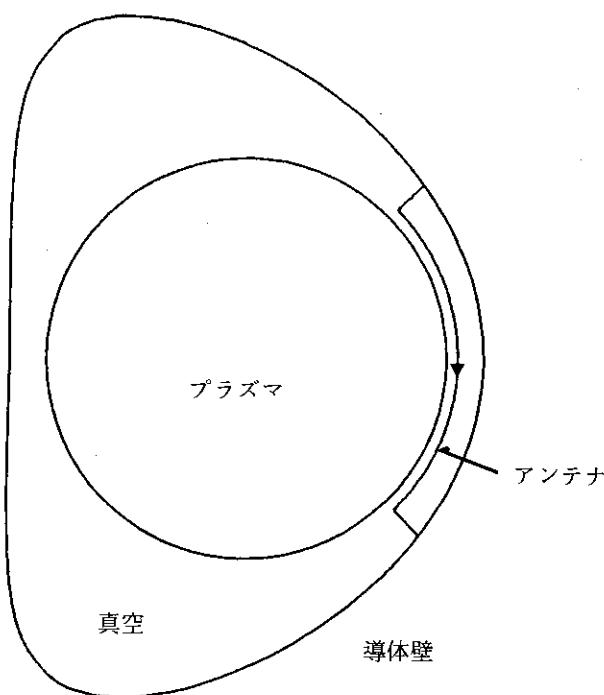


図3.11 モデルの配位

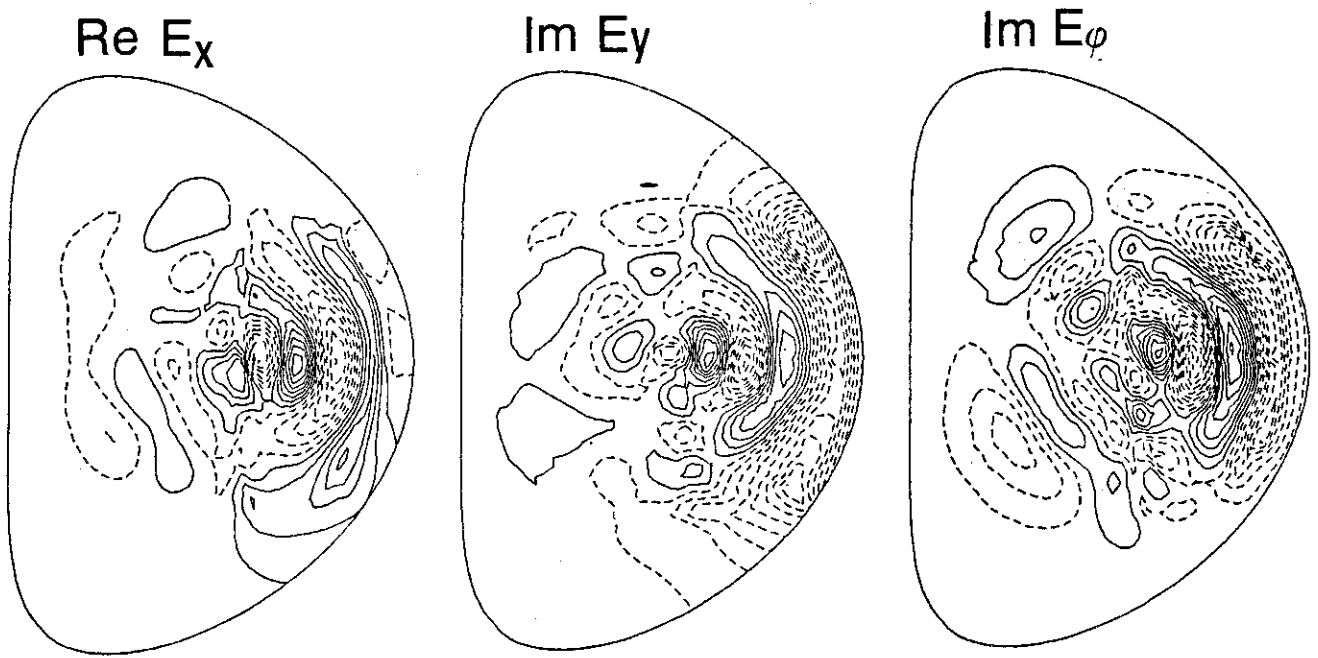


図3.12(a) 有限要素法による解析例 (JFT-2M)

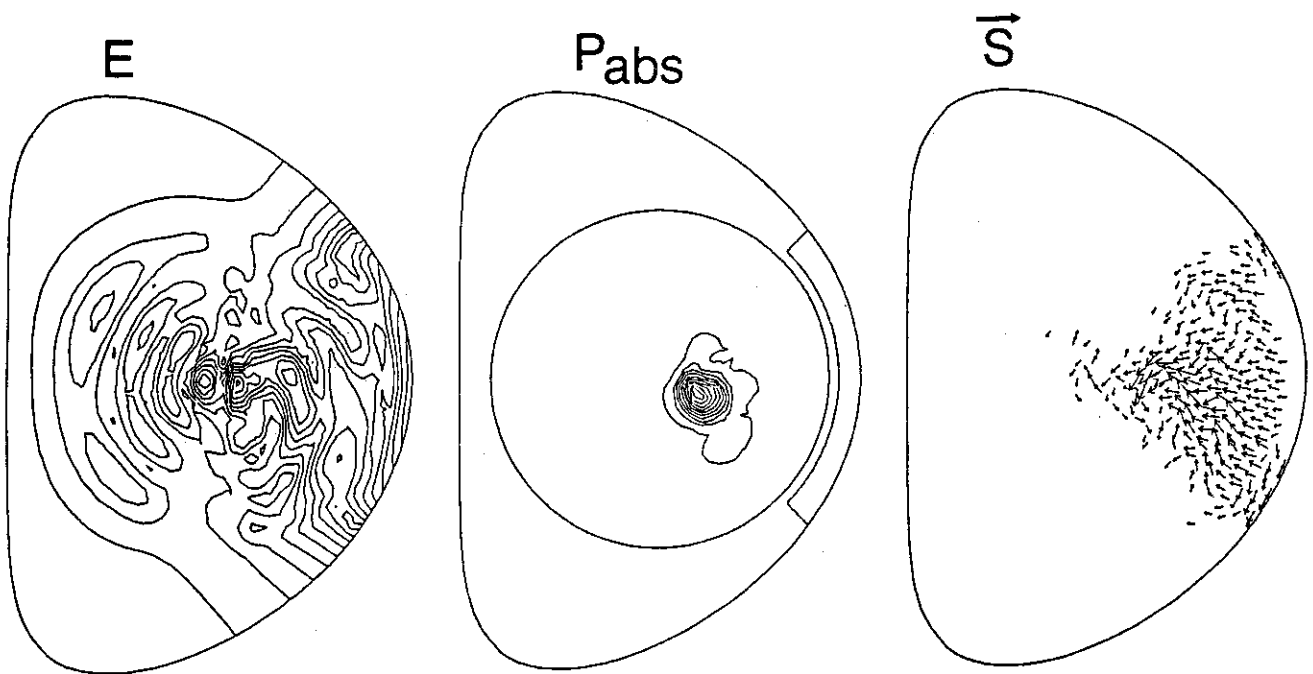


図3.12(b) 有限要素法による解析例 (JFT-2M)

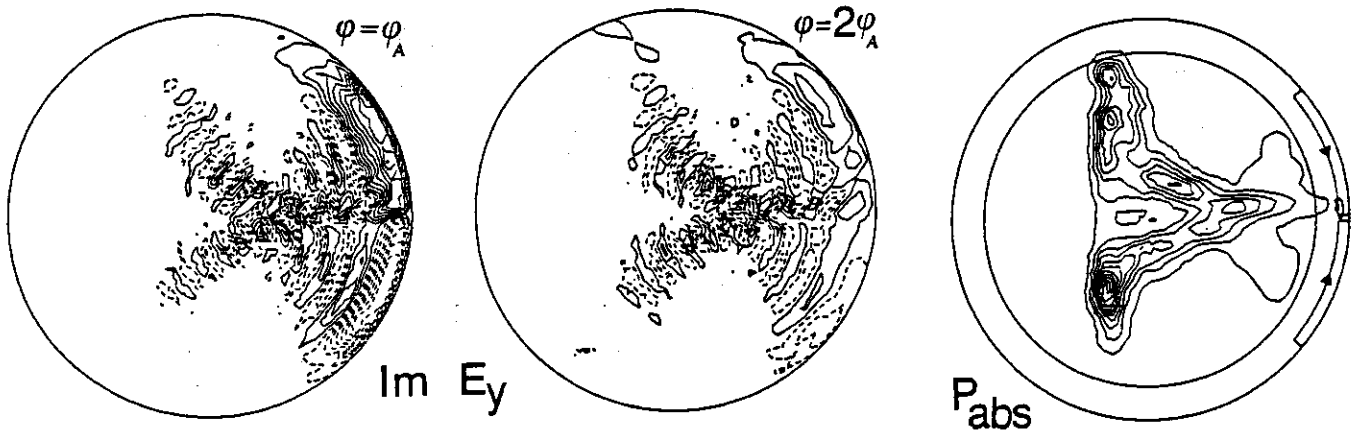


図 3.13 有限要素法による解析例 (INTOR)

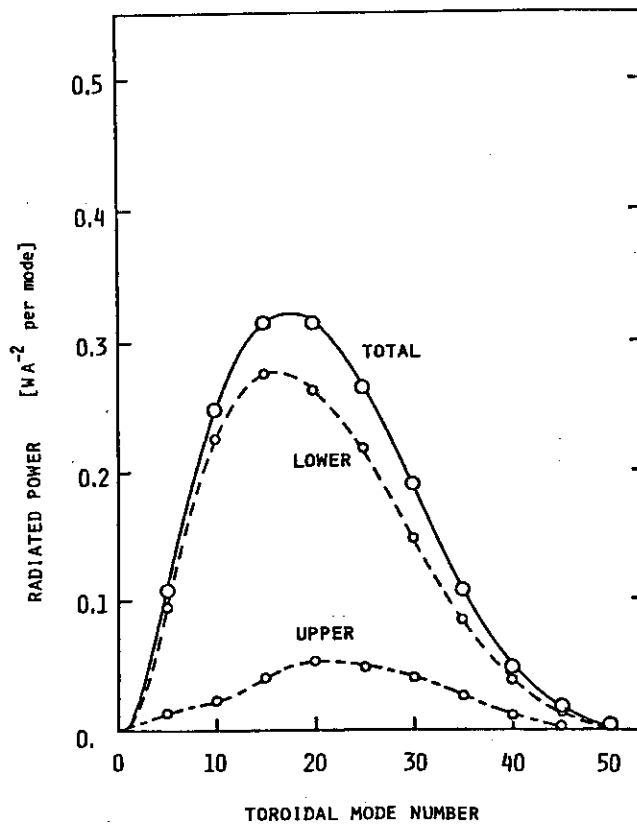


図 3.14 放射パワーの n 依存性

### 3.3.5 問題点

有限要素法を用いた解析によって、冷たいプラズマ近似の下ではあるが、ほぼ現実的な配位における ICRF 波の伝播が解析可能となった。2次元解析の結果、高密度領域における速進波の集束、アンテナの負荷インピーダンスの上下非対称性、吸収パワーの2次元分布等が初めて明らかになった。

残された問題は

- 1) 運動論の効果すなわちイオンバーシュタイン波へのモード変換、微視的減衰機構等が含まれていないため、各粒子の吸収パワー等、吸収機構の解析ができない。
- 2) 密度が高くなるとアルフベン波の波長が短くなるため、速進波の1波長に十分な数の節点をとろうとすると、多数の節点が必要となる。同じ精度を保つためには、密度が2倍になると節点数が2倍となり計算時間も約  $2\sqrt{2}$  倍に増加する。特に大型装置の解析の場合は深刻である。
- 3) アンテナ周辺の電界は特に複雑であるので、アンテナ構造への依存性を精度よく解析するためには、その周辺の節点数を多くとる必要がある。

## 3.4 運動論的2次元解析

### 3.4.1 モデル

この節では、有限要素法を用いて運動論的效果を取り入れた2次元解析について説明する。

基礎となる方程式は1次元解析の場合と同じ(2.53)式であるが、誘起電流として(2.52)式を2次元に拡張した

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{\beta} \left[ \sigma_{\alpha\beta}^{(0,0)} E_{\beta} - i \left\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(1,0)} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(1,0)}}{\partial x} E_{\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^{(0,1)} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(0,1)}}{\partial y} E_{\beta} \right\} \right. \\
 - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(2,0)} \frac{\partial^2 E_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(2,0)}}{\partial x} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta}^{(2,0)}}{\partial x^2} E_{\beta} \right\} \\
 - \left\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(1,1)} \frac{\partial^2 E_{\beta}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(1,1)}}{\partial x} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(1,1)}}{\partial y} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta}^{(1,1)}}{\partial x \partial y} E_{\beta} \right\} \\
 \left. - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(0,2)} \frac{\partial^2 E_{\beta}}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(0,2)}}{\partial y} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial y} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta}^{(0,2)}}{\partial y^2} E_{\beta} \right\} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

を用いる。ここで、 $\sigma_{\alpha\beta}(k_x, k_y) = \sum_{mm} \sigma_{\alpha\beta}^{(0,m)} k_x^m k_y^m / n! m!$  である。電気伝導率テンソル  $\sigma_{\alpha\beta}$  としては  $(k_{\perp\rho})^2$  までを残した電気感受率(2.17)から導く。なお(2.17)式は静磁界をz方向にとっているため、任意方向磁界に対しては(3.21)式を  $k_x, k_y$  を含む分散性媒質に拡張した表式を必要とする。

この運動論的解析においては、3.3の流体的解析の場合とは異なり、簡単のため直角座標  $(x, y, z)$  を用い、トロイダル効果は無視する。磁界および密度の空間分布は(3.20)とし、温度分布も(3.20 d)と同様に放物型分布とした。定式化にあたっては、重みつき残差法を用いて弱形

式化を行い、3 角形 1 次要素を用いて離散化した。手法は 3.3.2 と同様であるので、詳細は省略する。

### 3.4.2 解析例

この節では JFT-2 M のプラズマ配位において、ICRF 波の運動論的解析を行った結果を示す。

パラメータは

$$R_0 = 1.31 \text{ m} , \quad a = 0.35 \text{ m}$$

$$n_{e0} = 10^{20} \text{ m}^{-3} , \quad B_0 = 1.3 \text{ T}$$

とし、配位は図 3.11 に示す。なお、ポロイダル磁界は 0 とした。

まず 2 イオン混成共鳴について、パラメータを

$$n_H/n_D = 0.1 , \quad T_0 = 3 \text{ keV}$$

$$\omega/2\pi = 18 \text{ MHz} , \quad k_{\parallel}R_0 = 12$$

に選んだときの電界分布および吸収パワー分布を図 3.15 に示す。アンテナによって励起された

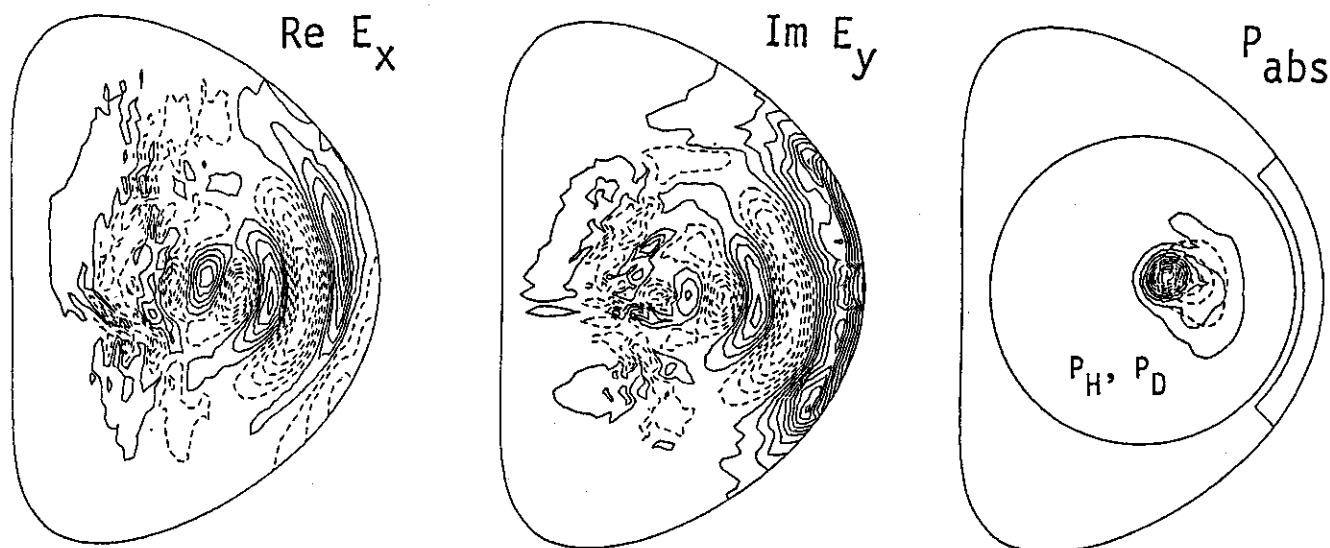


図 3.15 2 イオン混成共鳴における運動論的解析

速進波が、プラズマ中心付近の 2 イオン混成共鳴面より左の強磁界側で短波長のイオンバーンシュタイン波にモード変換していることがわかる。比較のため、同じパラメータで冷たいプラズマ近似を用いた解析結果を図 3.16 に示した。混成共鳴より右側での速進波の振舞いは非常によく似ていることがわかる。図 3.15 に示した吸収パワーは、実線がサイクロトロン基本調波共鳴による水素の吸収、破線がサイクロトロン 2 倍高調波共鳴による重水素の吸収を表す。このパラメータの場合、電子と重水素と水素の吸収パワー比はほぼ 1 : 2 : 6 で、負荷インピーダンスは  $0.22 + i1.18 \Omega$  であった。負荷インピーダンスについては、流体的解析と 2% しか違わなかった。

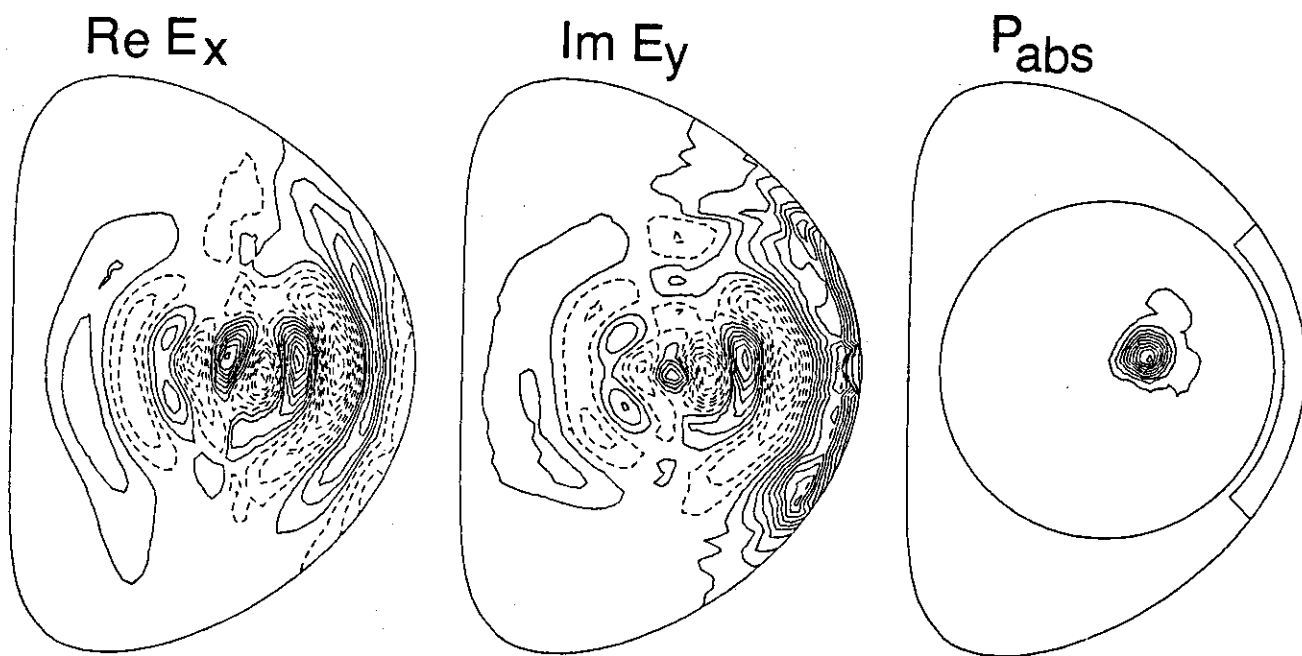


図 3.16 図 3.15 と同じパラメータにおける流体的解析

図 3.17 に水素プラズマにおけるサイクロトロン 2 倍高調波共鳴の解析例を示す。

$$\omega/2\pi = 40 \text{ MHz}, \quad k_{\perp}R_0 = 12, \quad n_{e0} = 3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}, \quad T_0 = 5 \text{ keV}$$

にパラメータを選んだ。2 イオン混成共鳴の場合と比べて吸収が悪いため、速進波が共鳴層を透過し、反対側の壁で反射されて定在波を形成している。図 3.17 に示した吸収パワーは、実線が水素の吸収パワー、破線が電子の吸収パワーである。電子のランダウ減衰による吸収は、プラズマ中心の高温部で電界の強い定在波の腹の部分で起きていることがわかる。

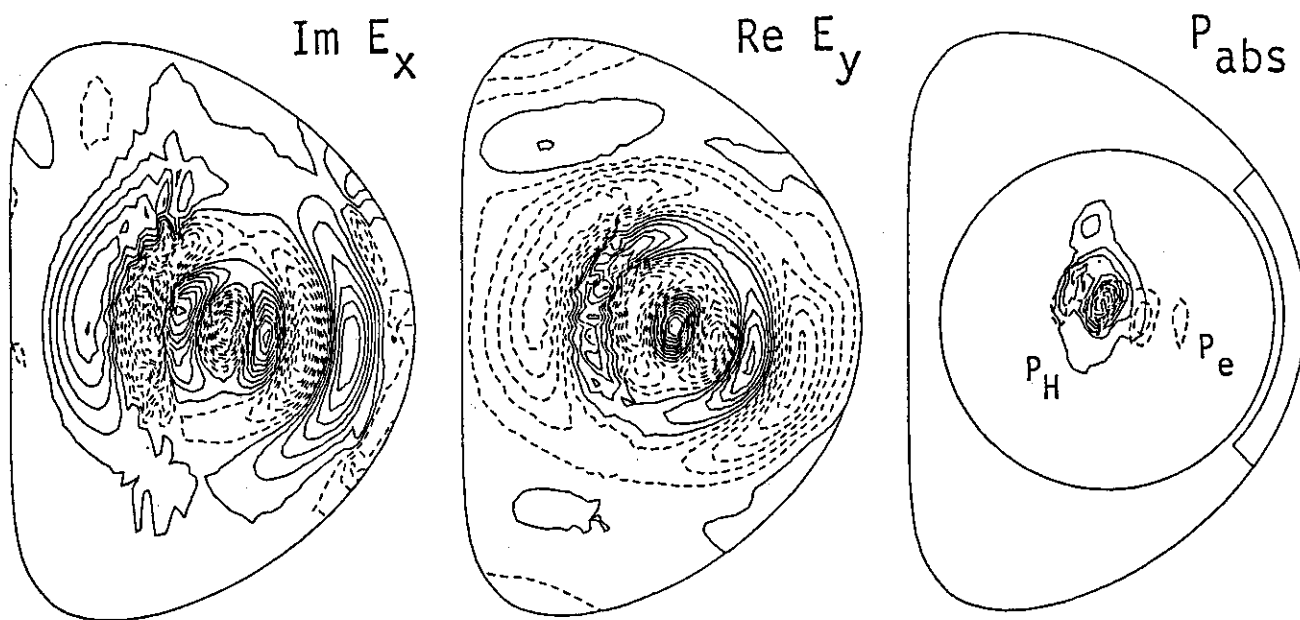


図 3.17 サイクロトロン 2 倍高調波共鳴における運動論的解析

### 3.4.3 問題点

運動論的2次元解析によって、現実的なプラズマ配位において微視的過程を含めた ICRF 波の励起、伝播、吸収の解析が可能になった。しかし、まだいくつかの問題が課題として残されている。

- 1) 現在のところ、ポロイダル磁界の効果を入れることができない。ポロイダル磁界を入れると不安定な短波長の波が励起されるからである。この原因はポロイダル磁界の効果によって静磁界方向の波数  $k_{||}$  が空間的に変化するようになり、その取扱いに問題があるためではないかと考えられる。現在の解析ではポロイダル磁界の効果を摂動として取り扱っているが、波数の大きなイオンバーンシュタイン波に対しては妥当ではないためであろう。この磁力線に沿って不均一がある場合の波動伝播の解析は、特にミラー配位プラズマにおいて重要であるが、今後の課題として残されている。
- 2) 精度の高い計算を行うためには、イオンのラーモア半径に数個の節点を必要とする。大型装置や温度の低いプラズマではこの条件は非常に多数の節点を必要とし、記憶容量および計算時間の面で数値計算可能なパラメータに制約を受ける。



## 4. 結 論

ICRF 波のトカマク内励起の研究について、伝播方程式の定式化およびその数値解法の進展の現状を述べてきた。現実的なプラズマ配位において微視的運動論的效果を取り入れた波動解析を行う上で、不均一分散性媒質中の波動方程式 (2.53), (2.52) が非常に有効であることが示された。媒質を特徴づける誘電率あるいは電気伝導率テンソルとしては、静磁界方向の波-粒子共鳴相互作用を取り入れ、 $(k_{\perp\rho})^2$  までの有限ラーモア半径効果を残した (2.17) 式が、ICRF 加熱の多くの場合に有効であることがわかった。3 倍以上のサイクロトロン高調波共鳴や半整数次の非線形サイクロトロン共鳴を用いた加熱の場合には、それに応じた誘電率が必要であろう。数値解法としては運動論的效果を取り入れた 1 次元解析および 2 次元解析が強力である。1 次元解析は短波長のモードの記述が容易であるのに対して、2 次元解析は実際のトカマク配位に近いモデルに対して解析ができる。ただ 2 次元解析ではポロイダル磁界の効果が入れられない、短波長のモードが記述できない、多くの計算時間を要する等の問題が残されている。

ここで計算時間の比較を行っておくと、富士通 VP-100 を用いた場合、運動論的 1 次元解析が分割数 300 に対して約 2 秒、流体的 2 次元解析が節点数 2049 に対して約 17 秒、運動論的 2 次元解析が節点数 2049 に対して約 60 秒であった。いずれも 1 つのフーリエ成分に対してである。なお記憶容量はいずれも 4 MB 程度に抑え、2 次元解析においては巨大配列をディスクに貯えている。

最後に実験結果と比較を行う上での問題点をあげておこう。実験で得られる物理量の時間発展、空間分布と比較を行うためには、波の伝播、吸収の解析で得られた吸収パワーの空間分布をもとにして、速度分布関数に変化する緩和過程、空間分布が変化する輸送過程を記述しなければならない。最も簡単な方法は既存のトカマク輸送コードのエネルギー源として、吸収パワーの磁気面平均を用い、得られた温度分布等をもとに波の伝播を解く方法である。しかしこの方法では、波の吸収に深く関係する速度分布関数の高エネルギーテールの生成、輸送現象への RF 波の影響は記述されない。フォッカー-プランク方程式によって速度分布関数の準定常状態を求め、光線追跡法や輸送コードと結びつけた解析<sup>24)</sup>も行われているが、光線追跡法自身の問題、分布関数の非等方性、高エネルギー粒子の振舞い等多くの問題が残されている。さらに、実際の実験条件においては微量の不純物がプラズマ中に存在しているが、イオンバーンシュタイン波の吸収にはその不純物イオンのサイクロトロン共鳴が重要な役割を果たしうることが指摘されている<sup>25)</sup>。これらの複雑な実験状況を踏まえて、本質的な現象を見出すことが、今後、ICRF 加熱の解析を進めていく上で必要であると思われる。

## 謝 辞

この調査を進めるにあたり、有意義な討論および御協力を頂いた日本原子力研究所核融合研究センター 伊藤公孝博士ならびに広島大学核融合理論研究センター 伊藤早苗博士に深く感謝いたします。

## References

- 1) D. Hwang, M. Bitter, R. Budny, A. Cavallo, R. Chrien, et al. : Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1982 (Proc. 9th Int. Conf. Baltimore, 1982) Vol.2, IAEA, Vienna (1983) 3.
- 2) Equipe TFR : Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1982 (Proc. 9th Int. Conf. Baltimore, 1982) Vol.2, IAEA, Vienna (1983) 17.
- 3) H. Kimura, H. Matsumoto, K. Odajima, S. Konoshima, T. Yamamoto, et al. : Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1982 (Proc. 9th Int. Conf. Baltimore, 1982) Vol.2, IAEA, Vienna (1983) 113.
- 4) T.H. Stix : The Theory of Plasma Waves (McGraw-Hill, New York, 1962).
- 5) B.D. McVey : Nucl. Fusion 19 (1979) 461.
- 6) Y. Lapierre : J. Plasma Phys. 29 (1983) 223.
- 7) P.L. Colestock, R.J. Kashuba : Nucl. Fusion 23 (1983) 763.
- 8) A. Fukuyama, S. Nishiyama, S.-I. Itoh, K. Itoh : Nucl. Fusion 23 (1983) 1005.
- 9) S.C. Chiu, T.K. Mau : Nucl. Fusion 23 (1983) 1613.
- 10) K. Itoh, S.-I. Itoh, A. Fukuyama : Nucl. Fusion 24 (1984) 13.
- 11) A. Fukuyama, A. Goto, S.-I. Itoh, K. Itoh : Jpn. J. Appl. Phys. 23 (1984) L613.
- 12) S.-I. Itoh, A. Fukuyama, A. Goto, K. Itoh, K. Sakai, et al. : Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1984 (Proc. 10th Int. Conf. London, 1984) IAEA-CN-44/F-III-4.
- 13) J. Jacquinet, B.D. McVey, J.E. Scharer : Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 88.
- 14) A. Fukuyama, S.-I. Itoh, K. Itoh : J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 1010.
- 15) D.G. Swanson : Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 316.
- 16) I.B. Bernstein : Phys. Fluids 18 (1975) 320.
- 17) K.G. Budden : Radio Waves in the Ionosphere (Cambridge Univ. Press, London, 1961) Chap. 17.
- 18) T. Watanabe, H. Sanuki, M. Watanabe : J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 286.
- 19) S.-I. Itoh, A. Fukuyama, K. Itoh : Differential Form of Wave Propagation Equation in Inhomogeneous Plasma, HIFT-92 (July, 1984).

- 20) V.D. Shafranov : Electromagnetic Waves in a Plasma (Reviews of Plasma Physics, Vol.3).
- 21) 妹尾和洋, 福田光司 : “不均一プラズマ中のイオンサイクロトロン波の伝搬”, 岡山大学工学部電子工学科特別研究報告書 (1982年3月).
- 22) A. Fukuyama, S.-I. Itoh, K. Itoh : Study of ICRF Waves in Second Cyclotron Resonance and Two-Ion-Hybrid Resonance Heatings, HIFT-86 (Dec., 1983).
- 23) A. Fukuyama, K. Itoh, S.-I. Itoh : Proc. Int. Conf. on Plasma Phys. (Lausanne, 1984).
- 24) J. Hosea, N. Bretz, A. Cavallo, P. Colestock, C. Daughney, et al. : Heating in Toroidal Plasmas (Proc. Int. School of Plasma Phys., Varenna, 1982) 213.
- 25) 小川雄一, 渡利徹夫, 天野恒雄, 福山 淳, JIPPT-II Uグループ : 日本物理学会 1984年秋の分科会 (富山, 1984) 2a-G-12.