

JAERI - M
85-059

漏洩量の繰返し計算による3次元中性子
拡散方程式の近似解法

1985年5月

内藤 俣孝

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1985

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷(株)

漏洩量の繰返し計算による 3 次元中性子拡散方程式の近似解法

日本原子力研究所東海研究所燃料安全工学部

内 藤 俣 孝

(1985 年 4 月 16 日受理)

大形原子炉内の中性子束分布を少ない計算機容量で短い時間に計算できるようにすることを目的として一つの新しい数値計算法「中性子漏洩量繰返し法」を考案した。この方法は、原子炉をいくつかのチャンネルと層に分割し、各チャンネルごと及び各層ごとに、中性子漏洩量を媒介として、1次元及び2次元中性子拡散計算を交互に繰返すことにより、炉内の3次元中性子束分布を求めるものである。基礎式を導出するとともに、交互繰返し計算の収束条件を求め、収束性に影響する因子を明らかにした。また、この方法を用いた標準的な計算コードとして、1次元チャンネル及び2次元層計算を詳細メッシュ有限差分法により行う3次元拡散コード **DIFFUSION - ACE** を開発した。さらに、この方法を応用して、軽水型発電用原子炉及び研究用原子炉の炉心特性解析コードを開発した。これらの計算コードによる計算結果を実測値及び詳細コードによる計算結果と比較することにより、本方法が上記の炉型の原子炉の解析に有効に適用できることを確認した。

A New approximation method for solving three dimensional neutron
diffusion equation by neutron leakage iteration technique

Yoshitaka NAITO

Department of Fuel Safety Research
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received May 16, 1983)

A new computation method named "Leakage Iteration Method" has been developed for calculating neutron flux in large nuclear reactors with small computer core memory and short computing time.

In this method, a reactor core is divided into channels and layers and three dimensional neutron flux in the core is obtained by iterating one dimensional channel and two dimensional layer calculations one after the other as intermediation of neutron leakage. For developing this method, fundamental equations, convergence criteria for the iteration were introduced and the factors affecting the convergence were cleared up.

By this method, a standard three dimensional diffusion code named DIFFUSION-ACE has been developed with one and two dimensional finite difference method, and a few computer codes have been also developed for analysing light water power reactors and research reactors. Comparing the computed results by this method with those of detail computer codes or measured data, the effectiveness of this method for analysing the above mentioned type reactors was shown.

Keywords: Computation Method, Leakage Iteration, Three Dimensional Neutron
Diffusion, Computer Code, DIFFUSION-ACE

目 次

1. 序 論	1
1.1 本研究の目的	1
1.2 従来の計算方法の概観と本研究の必要性	2
1.3 本研究で提案する数値解法の概要と特徴	4
1.4 本論文の構成	8
2. 中性子漏洩量繰返し法の基礎式	9
2.1 多群中性子拡散方程式の数値解法	9
2.2 基礎式と繰返し計算手順	11
2.3 基礎式の階差式表現	15
2.4 基礎式の行列表現	18
3. 中性子漏洩量繰返し計算の収束条件	23
3.1 収束条件の導出	23
3.2 収束性の具体的検討	27
4. 中性子漏洩量繰返し法による具体的な計算法の開発	31
4.1 開発した具体的な計算法の概要	31
4.2 軽水型発電用原子炉の炉心特性解析法の開発	32
4.3 船用原子炉の炉心特性解析法の開発	34
4.4 研究用原子炉の炉心特性解析法の開発	36
5. 中性子漏洩量繰返し法による原子炉炉心特性解析	38
5.1 軽水型発電用原子炉の炉心特性解析	38
5.2 船用原子炉の炉心特性解析	47
5.3 研究用原子炉の炉心特性解析	52
6. 結 論	56
謝 辞	57
参考文献	59
記号表	61
付録1 3次元中性子拡散方程式の差分近似	63
付録2 アイソパラメトリック法による2次元拡散方程式の解法	68

Contents

1. Introduction	1
1.1 Purpose of present research	1
1.2 Outline of former calculation methods and necessity of present work	2
1.3 Outline and characteristics of present numerical solution ..	4
1.4 Composition of this reprot	8
2. Fundamental equation for the leakage iteration method	9
2.1 Numerical solution for multi-group neutron diffusion equation	9
2.2 Fundamental equation and iteration scheme	11
2.3 Finite difference expression of the fundamental equation ..	15
2.4 Matrix expression of the fundamental equation	18
3. Convergence condition of the neutron leakage iteration method	23
3.1 Introduction of convergence condition	23
3.2 Concrete examination on convergence condition	27
4. Development of computer codes by neutron leakage iteration method	31
4.1 Outline of the computer codes	31
4.2 Development of the computer codes for analysing the properties of light water type nuclear power reactors	32
4.3 Development of the computer code for analysing the properties of ship reactors	34
4.4 Development of the computer code for analysing the properties of research reactors	36
5. Analyses of nuclear reactor core properties by the neutron leakage iteration method	38
5.1 Analyses of the properties of light water type nuclear power reactor	38
5.2 Analyses of the properties of ship reactors	47
5.3 Analyses of the properties of research reactors	52
6. Conclusion	56
Acknowledgement	57
References	59
Appendix 1 : Difference approximation of three dimensional neutron diffusion equation	63

Appendix 2 : A solution of two dimensional neutron diffusion
equation by isoparametric method 68

1. 序 論

1.1 本研究の目的

原子炉内の中性子束分布や熱出力分布を高い精度で求めることは原子炉の炉心設計や安全性の評価の上で重要である。近年、大型計算機の発達により、これらの分布を数値計算により求めることができる程度まで可能になってきている。しかしながら、計算機が大型化し、高速化した今日においても、この計算を効率よく行うためには多くの工夫が必要である。軽水型発電用原子炉(以下軽水型発電炉と略称)などの動力用原子炉では炉心の体積が大きく、かつ複雑な構造をしているために炉心内の中性子束分布も複雑な形状を呈している。さらに、炉心内の熱水力状態が中性子束分布に強く影響するため、中性子束分布の計算と熱水力計算とを交互に繰返して行う必要があり、計算の高速化と使用する計算機の容量を減少させる工夫が特に強く要求される。

体積が大きい炉心内の中性子束分布を厳密な輸送計算によって算出することは事実上不可能であって、多くの場合拡散近似式が用いられる。中性子拡散計算のために最も信頼されている数値計算法は空間を詳細なメッシュで分割した差分法であり、多くの計算コードが開発されてきた^{1)~5)}。この方法では、メッシュ内の中性子束は Taylor 展開され、その2次導関数までを用いて近似される。したがって、高次導関数が無視できない場合にはメッシュ幅を中性子の拡散距離以上にとると近似の精度が落ちる。中性子束分布や熱出力分布を数%の精度で求めたい場合には、拡散距離の0.5ないし1.0倍のメッシュ幅にする必要があるとされている⁶⁾。沸騰水型原子炉(BWR)や加圧水型原子炉(PWR)の炉心内における熱中性子の拡散距離は1.5ないし2.5 cmである。現在稼働中の熱出力3,000 MW級のこれらの軽水型発電炉は、炉心体積が約 $2 \times 10^7 \text{ cm}^3$ もあるため、炉心内の中性子束分布を差分法で求めようとする場合には、 $5 \sim 7 \times 10^6$ 個もの3次元メッシュが必要となり、最新の計算機をもってしても計算時間及び計算機容量とも許容限度を遙かに越してしまう。

計算機の使用時間及び容量を節約するための多くの近似計算法が開発されてきた。その代表的な方法は粗メッシュ法、ノード法及びシンセシス法である。しかし、これらの方法は詳細メッシュ差分法ほど汎用性がなく、また信頼性も乏しい。

差分法でメッシュ幅を広くすると拡散近似式の微分項の近似精度が悪くなり、原子炉内各領域からの中性子漏洩量の計算精度が落ちる。このため少ないメッシュ数で高い精度の中性子漏洩量を算出する数値計算法の開発が望まれてきた。

本研究は、詳細メッシュ差分法を基礎として、原子炉内各領域からの中性子漏洩量の計算精度をできるだけ落さずにメッシュ分割数を減少させることが可能な汎用性の高い数値計算法を開発することを目的としている。

1.2 従来の計算方法の概観と本研究の必要性

原子炉内の中性子束分布を求めるため現在使用されている計算方法を比較検討する。前節で述べたように、炉内の中性子束分布は拡散近似式を用いて計算される場合が多いが、そのための数値解法は種々開発されてきた。その代表的なものを表1に示す。

表1 3次元中性子拡散計算のための従来の主な方法の長所と短所

計 算 方 法	長 所	短 所
詳細メッシュ有限差分法	研究実績が豊富であり、多くの3次元コードが開発されている。	必要な計算機容量が多く、計算時間が長い。
有 限 要 素 法	複雑な幾何形状の炉心計算に適している。	必要な計算機容量が多く、計算時間が長い。
粗メッシュ法及びノード法	必要な計算機容量が少なく、計算時間が短い。	粗メッシュ内の解析解または拡散カーネルを用意する必要があり、汎用性のある3次元コードを作成するのが困難である。
変分フラックス・シンセシス法	必要な計算機容量が少なく、計算時間が短い。炉全体の積分量を算出するのに適している。	単純な体形での固有関数を基底関数として使用しているため、中性子束分布の局所的变化を表現することが困難である。
多チャンネル・フラックス・シンセシス法	中性子束分布の局所的变化を表現することができる。	計算結果が試行関数の精度に依存する。
バックリング反復法	必要な計算機容量が少なく、計算時間が短い。	通常2次元径方向と1次元軸方向の変数分離を仮定しており、3次元分布の計算精度は悪い。

詳細メッシュを用いた有限差分法は、炉心内中性子束分布の計算に最もしばしば使用されており、この方法に基づく拡散コードとしては PDQ - 7¹⁾, CITATION²⁾, 3 DB³⁾, VENTURE⁴⁾, ADC⁵⁾ 等がある。しかし、1.1節で述べたように、この方法は多くの計算機容量と計算時間を要し、大形原子炉内の中性子束分布の計算を行うことは困難である。

有限要素法は複雑な幾何形状の計算に適するが、詳細メッシュの有限差分法の場合と同様に大形原子炉内の中性子束の計算には多くの計算機容量と計算時間を要する。

これに対し、粗メッシュ法及びノード法は、計算するメッシュ数あるいはノード点の数を減少させ、使用計算機容量と計算時間の減少を図るために開発された方法である。メッシュ数を減少させるためにメッシュ幅を増大させると差分近似の精度が悪くなる。そこで、粗メッシュ法及びノード法ではメッシュ（またはブロック）内の中性子束を解析的に表わし、差分近似が悪くなる欠点をなくすことを試みている。その代表的なものとして、Aoki と Tsuiki の方法⁷⁾ 及び Kobayashi と Nishihara の方法^{8),9)}がある。前者の方法は、原子炉内各領域における中性子源分布を簡単な式で近似し、領域内の中性子束分布を解析的に求めるものである。後者の方法は、デ

ルタ関数状の中性子源に対する中性子束分布を与える Green 関数を求め、それを用いて各領域内の中性子束分布を算出するものである。両方法とも、各領域境界で中性子束と中性子流の連続条件を設定することにより、中性子束に関する階差式を得るとともに、外周境界条件を用いてその階差式を解くことにより炉内の中性子束分布を求めている。これらの方法は、各領域内の中性子束分布の解析解の形が容易に求められる場合には有効である。ところが逆に解析解の形を定めるのが困難な場合にはこれ等の方法を適用することができない。

シンセシス法には種々の計算方式があるが、試行関数を組合せて中性子束分布を表現するものと、各領域内で変数分離を仮定して、各座標軸ごとの解を求め、その積により中性子束分布を表現するものの2つが代表的なものである。試行関数を用いる方法としては、変分フラックス・シンセシス法¹⁰⁾と多チャンネル・フラックス・シンセシス法^{11), 12)}が3次元中性子束分布の計算には有効である。変分フラックス・シンセシス法は、多くの場合、単純な形状の固有関数を試行関数として用いるために、局所的に変動する中性子束分布をこの方法で表現するのは困難である。軽水型発電炉のように熱中性子による核分裂効果が重要な原子炉では、局所的な中性子束の分布を高精度で求めることが重要であり、この場合には変分フラックス・シンセシス法の使用は適切でない。Wachspress 等により開発された多チャンネル・フラックス・シンセシス法では、原子炉を $x-y$ 面に平行な幾つかの層と z 軸に平行な幾つかのチャンネルに分割し、各層ごとの2次元中性子束分布を詳細メッシュ差分法で求めて試行関数とし、チャンネルごとの1次元計算により展開係数を求めている。この方法では、試行関数を求める2次元計算及び展開係数を求める1次元計算を詳細メッシュ有限差分法で行うことができ、中性子束分布の局所の変動も算出できる。しかし、試行関数が完備な関数系で構成されていないので、3次元中性子束分布の精度は試行関数の精度に大きく依存する。試行関数の精度をいかに上げるかがこの方法の課題である。

変数分離を仮定して、全炉心の計算を簡便に行う方法としては、バックリング反復法がしばしば使用されてきた。しかし、多くの場合、全炉心に対して変数分離を仮定することは近似の精度が悪い。そこで、炉心内各分割領域内で変数分離を仮定して中性子束分布を算出する方法が Kobayashi 等により提案された⁹⁾。彼らは、各領域内の2次元中性子束分布を x と y に関し変数分離し Green 関数を用いて表現している。 x 座標に関する Green 関数の導出に際しては、 x 軸と垂直な方向への中性子の漏洩を考慮しなければならない。この中性子の漏洩量は y 座標に関して解かれた中性子束分布より求まる。すなわち、2次元中性子束分布は x 軸方向と y 軸方向の1次元計算を交互に繰返して解くことにより求まる。この方法では、領域内部の中性子束を Green 関数で表現しているので、中性子束に対する変数分離の仮定が正しければ得られる解は精度が高いものである。しかしながら、この方法を3次元に拡張して中性子束分布を求めたという報告は未だされていない。2次元計算に適用するためには、 x , y , z 軸に関して変数分離を仮定して領域内の中性子束分布を解くか、 z 軸と $x-y$ 面の変数分離を仮定して解く必要がある。原子炉の3次元問題に対して、 x , y , z の変数分離を仮定することは制限が厳しすぎるので、 z 軸と $x-y$ 面の変数分離が妥当な仮定と考えられる。この仮定のもとで Kobayashi 等の方法を適用するには2次元の Green 関数を求める必要がある。領域の幾何形状が単純で、しかも、領域内部の構成も単純な場合には Green 関数の解を得ることができるが、一般には困難である。

以上、従来の方法の現状と問題点の検討を行った結果、大形原子炉の中性子束分布を算出する

ために下記の要件を満たす計算法を新たに開発する必要があることを確認した。

- (1) 大形原子炉内の3次元中性子束分布の計算が計算機の使用容量及び計算時間の許容範囲内で行えること。
- (2) 研究が進んでいる詳細メッシュ差分法との対比が容易で、計算結果の精度評価及び繰返し計算の収束判定が容易に行えること。
- (3) 出力分布の局所的变化が計算できること。
- (4) 炉内を立方体ブロックのみで分割できない複雑な幾何形状を有する炉心にも適用できること。

1.3 本研究で提案する数値解法の概要と特徴

前節で大形原子炉内の中性子束分布を算出する方法が具備すべき要件について述べた。本研究では、この要件を満たす新しい数値解法を提案し、これを実用化した。この方法の概要と特徴について以下に記す。

まず、図1に示すように原子炉の炉心部を層とチャンネルに分割する。一つの層と一つのチャンネルの交わりで構成される領域をブロックとよぶ。このブロック内の中性子バランスをできるだけ短い計算時間で精度よく求める方法を考える。この際重要な点は、ブロックからの中性子漏洩量の計算精度を上げることである。特に、ブロック表面で積分された漏洩量の計算精度を上げることが重要である。このため、各層ごとにx-y2次元詳細メッシュ有限差分法または有限要素法を用いて径方向の漏洩量を求め、チャンネルごとにz軸1次元詳細メッシュ有限差分法を用いてz軸方向の漏洩量を求めることとする。この方法により、ブロック内の中性子バランスの計算精度をあまり落すことなく計算に用いる空間メッシュ数を減少させることができる。以下にこの方法の概要を述べる。

各層及び各チャンネルは、それぞれ2次元及び1次元の詳細な空間メッシュに分割される。計算の対象となる中性子束は式(1)に示す各層及び各チャンネルについての積分中性子束である。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_z &\equiv \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \phi dx dy, & \Psi_{xy} &\equiv \int_{\Delta Z} \phi dz, \\ \Theta_z &\equiv \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \theta dx dy, & \Theta_{xy} &\equiv \int_{\Delta Z} \theta dz, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、

- ϕ : ブロック内の3次元中性子束分布,
- θ : ブロック内の3次元中性子源分布,
- $\Delta X, \Delta Y$: ブロックの幅,
- ΔZ : ブロックの高さ

Ψ_z 及び Θ_z は各チャンネルごとにz軸方向に関する詳細メッシュ上で定義される量であり、 Ψ_{xy} 及び Θ_{xy} は各層ごとにx-y面に関する詳細メッシュ上で定義される量である。定義より明らかのように、 Ψ 及び Θ に関して下記の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Delta Z} \Psi_z dz &= \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Psi_{xy} dx dy, \\ \int_{\Delta Z} \Theta_z dz &= \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Theta_{xy} dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

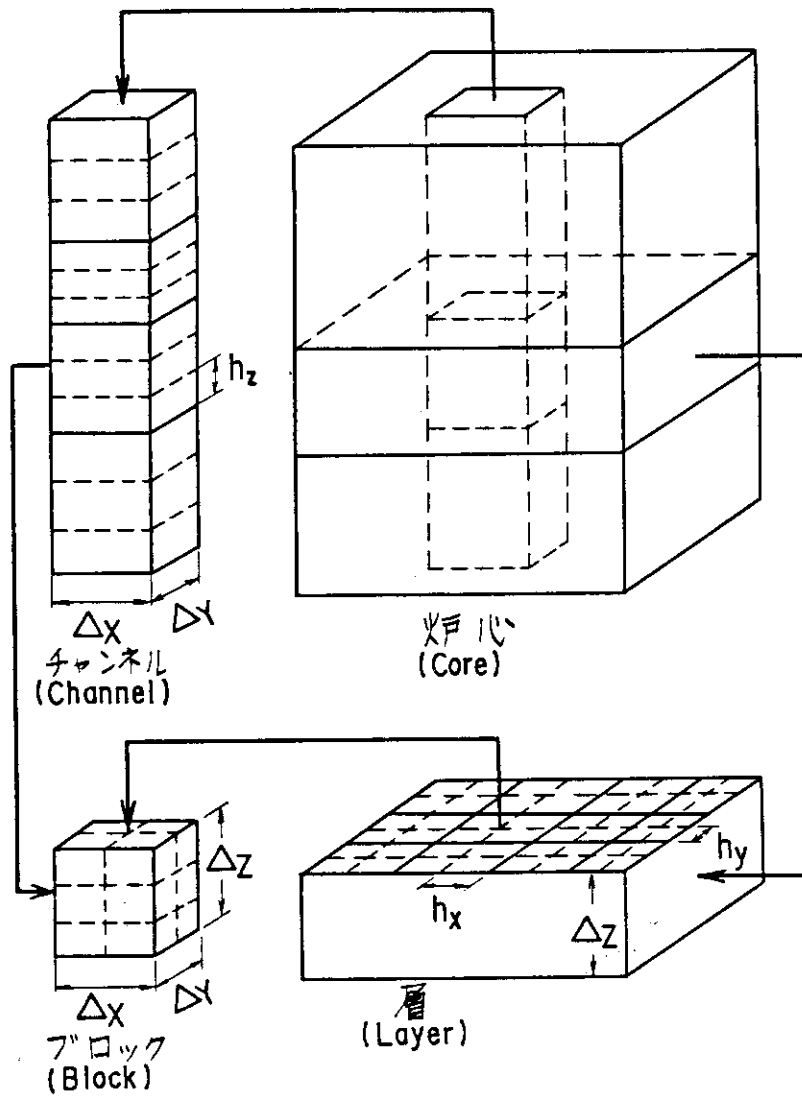


図 1 漏洩量繰返し法で使用するチャンネル,層及びブロックの概念図

以上のように定義した Ψ_z 及び Ψ_{xy} をブロックからの中性子漏洩量を仲介にして交互に繰り返す方法により算出する。この方法を新たに中性子漏洩量繰り返し法¹³⁾(Leakage Iteration Method) とよぶことにする。計算の流れを図2に示す。

まず、中性子源分布 θ_z と θ_{xy} を式(2)の条件を満たすように仮定する。この中性子源分布を用い、詳細メッシュ差分法または有限要素法によって各チャンネルごとの1次元計算及び各層ごとの2次元計算を行う。z軸方向1次元計算に必要な垂直方向への中性子漏洩量 I_{xy} は、2次元層計算の結果より求めたものを使用する。同様に、2次元計算に必要なz軸方向への中性子漏洩量 I_z は1次元チャンネル計算の結果求まる値を使用する。この1次元チャンネル計算の結果求まる中性子束の各ブロックでの積分値と2次元計算の結果求まるその値の差が許容範囲になるまで1次元計算と2次元計算を繰り返す。この繰り返し計算が収束した段階では、 Ψ_z と Ψ_{xy} は、収束判定条件以内で式(2)の関係を満たす。このように算出された中性子束 Ψ_z 及び Ψ_{xy} を用いて中性子源分布 θ_z 及び θ_{xy} を再計算する。 Ψ_z 及び Ψ_{xy} が式(2)の関係を満たしていれば、 θ_z 及び θ_{xy} も式(2)の関係を満たすことになる。新たに求められた中性子源分布の各ブロック内の積分値がそれまで用いた中性子源分布のブロック内の積分値と一致するかどうかを判定し、良い一致を示さないブロックがある場合には新たに求められた中性子源分布を用いてチャンネル計算と層計算を繰り返す。良い一致を示したら計算を終了する。この方法では、各ブロック内で中性子束がz及びx-y座標について変数分離の形で書かれると云う近似を用いている。

この方法は下記のような特徴を有している。

- (1) 詳細メッシュの差分法または有限要素法による計算はチャンネルと層についてのみ行われるので、全炉心を詳細メッシュで分割する場合に比べると計算するメッシュの数が大幅に減少する。例えば、もしブロックが1辺14cmの立方体であり詳細メッシュの幅が2cmであったとすると、通常の詳細メッシュ法ではブロック内の全メッシュ数は $7 \times 7 \times 7 = 343$ である。一方今回の方法では $7 + (7 \times 7) = 56$ と約1/6に減少する。したがって、少ない計算機容量及び短い計算時間で3次元計算が可能となる。
- (2) この方法で、1次元及び2次元計算をともに差分法で行い、ブロック内の差分点を1点だけとった場合には、通常の3次元7点階差式の計算と同じになる。この場合の本方法の繰り返し法は Peaceman と Rachford により提唱された交互繰り返し法 (ADI法 - Alternative Direction Iterative Method)¹⁵⁾ の一つの変形となっている。ADI法では x-y 面または z 軸方向の計算は7点階差を用いるが、本方法では x-y 面の計算は z 軸方法への漏洩係数を用いた5点階差式で行い、z軸方向の計算は x-y 方向への漏洩係数を用いた3点階差式で行う。計算方向に対し垂直な方向への漏洩量を1回前の繰り返し計算結果を用いて予め算出するところがADI法と異なる点であり、繰り返し計算が収束した時点では両方法による解は収束判定内で一致するものである。すなわち、本方法において、ブロック内に差分点を1点だけとった計算は通常の有限差分法の計算と同等になる。したがって、同一計算コードを用いて積分中性子束の計算も詳細メッシュの計算も可能で、積分中性子束計算における誤差評価が容易に行える。また、繰り返し計算の収束条件も有限差分法の場合と同じ論法で明示できる。
- (3) ブロックからの中性子漏洩量は詳細メッシュの差分法または同精度の有限要素法で計算さ

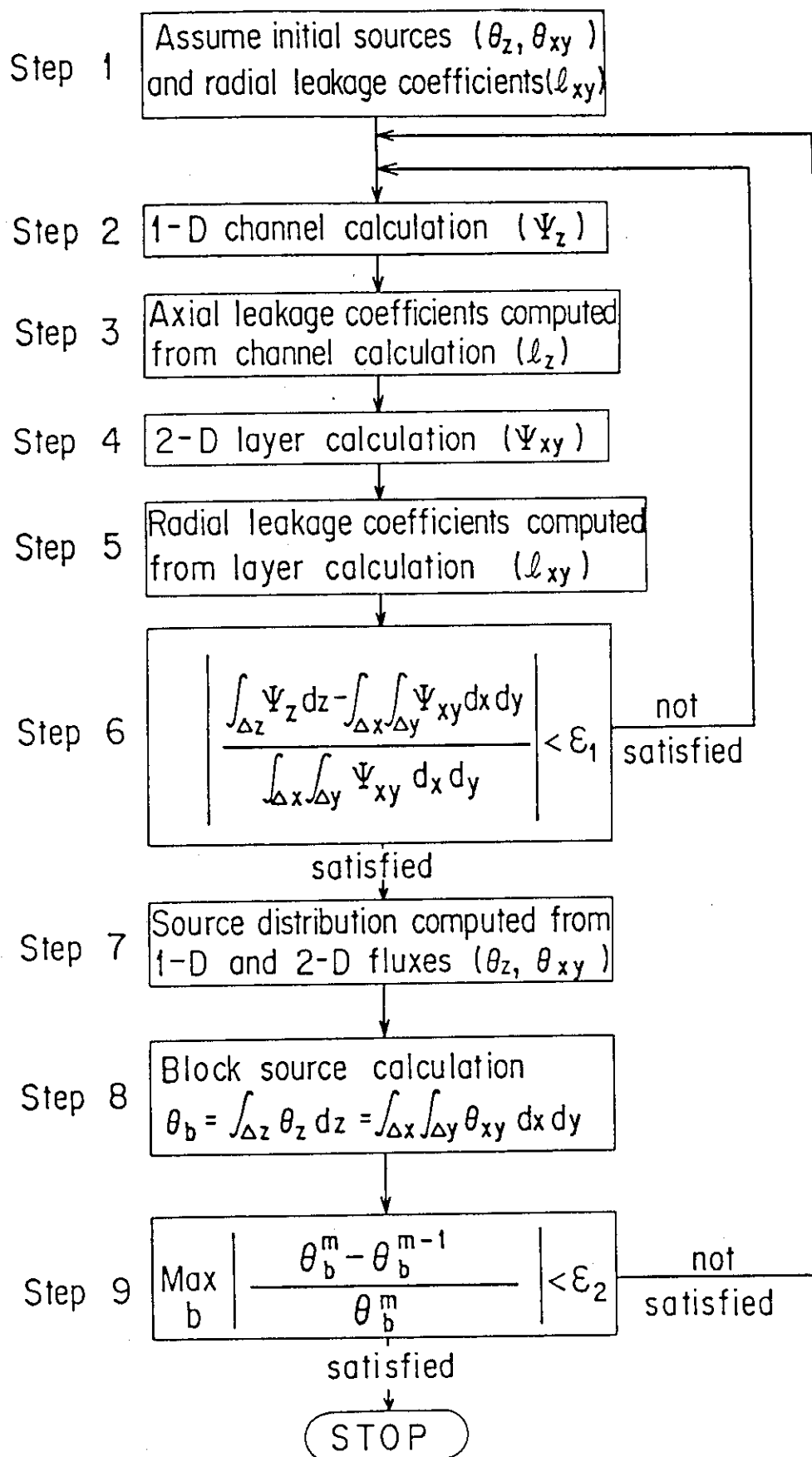


図2 漏洩量繰返し法による計算の流れ

れるので、中性子漏洩量の計算精度は高い。したがって、ブロック内の中性子バランスの計算精度も高い。また、チャンネル計算及び層計算を詳細メッシュ差分法または有限要素法により行うので、出力分布の局所的変化が計算できる。

- (4) 1次元チャンネル計算と2次元層計算を結びつけている量がブロック内での積分量であるので、1次元計算と2次元計算はそれぞれ独立の方法をとることも可能である。すなわち、原子炉の形状の特性を考慮して、1次元計算は差分法で行い、2次元計算は有限要素法で行って、両者の方法を結合し3次元計算とすることも可能である。実際に、この方法で3次元中性子拡散を計算する方法を確立し、それに基づく計算コード **FEDM** を新たに開発した¹⁴⁾。このことにより、炉内を直方体ブロックのみで分割できない相当複雑な幾何形状を有する炉心内の中性子拡散計算も可能となった。

以上、本研究で新たに提案する数値計算法の概要とその特徴を述べたが、このことにより、本方法が前節で記した大形原子炉の中性子束分布を計算する方法が満たすべき4つの要件を満足していることがわかる。

1.4 本論文の構成

本論文は、大形原子炉の中性子束分布を求めるために新しい数値計算法である中性子漏洩量繰返し法を提案し、この方法に基づいて作成したいくつかの計算コード及びそれらを実際の原子炉の計算に応用した結果についてまとめたものである。

第1章は序論として、原子炉内の中性子拡散を計算する従来の方法の問題点を検討し、それらを克服することが可能となる一つの新しい計算方法として、中性子漏洩量繰返し法を提案し、併せてその特徴について記した。第2章では、この中性子漏洩量繰返し法の中で使用する基礎式を導出する。第3章では、前章で導出した基礎式を、繰返し法を用いて解くための繰返し手順とその収束条件を示す。また、収束性が悪くなる具体例について検討しその改善策を示す。第4章では、実際の原子炉をいくつか選び、それぞれについて炉心構造を考慮しながら、中性子漏洩量繰返し法を用いて新たに作成したいくつかの計算コードの内容を紹介する。第5章では、前章で紹介した計算コードを用いて種々の実際の原子炉の炉心特性を解析し、標準的な詳細メッシュ有限差分法による解析結果及び実験値と比較して、中性子漏洩量繰返し法の有用性を明らかにする。第6章では本研究により得られた成果をまとめるとともに今後の課題について述べる。

2. 中性子漏洩量繰返し法の基礎式

2.1 多群中性子拡散方程式の数値解法

原子炉内の中性子束に対する多群拡散方程式は齊次連立2階微分固有値方程式である。以下にこの方程式の数値解法について記す。中性子束 $\phi(\vec{r}, E, t)$ は、空間 (\vec{r}) 、エネルギー (E) 、及び時間 (t) に対して連続な値を有する。本研究では定常状態における中性子束分布に着目しているので、時間変数を含まない方程式を取り扱う。中性子エネルギーを群分割した多群近似の拡散方程式は、よく知られているように下記の式で表現される。

$$\begin{aligned}
 & -\nabla D_g(\vec{r})\nabla\phi_g(\vec{r}) + \sum_{R,g}(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) \\
 & = \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \text{Sum}_{g'} \nu \sum_{f,g'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) + \text{Sum}_{g' \neq g} \sum_{s, g' \rightarrow g}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}), \quad (3) \\
 & \quad (g=1,2,\dots,G)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\phi_g(\vec{r}) : \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\vec{r}, E) dE,$$

D_g : 拡散係数,

$\sum_{R,g}$: g 群からの全除去断面積,

χ_g : 核分裂による放出中性子のエネルギー・スペクトル ($\sum_g \chi_g = 1$),

k_{eff} : 実効増倍係数,

\sum_{fg} : 核分裂断面積,

ν : 核分裂当りの平均中性子放出数,

$\sum_{s, g' \rightarrow g}$: g' 群から g 群への散乱断面積,

G : エネルギー群数。

多群拡散方程式は、式(3)からわかるように、齊次連立2階微分方程式で、 k_{eff} は固有値となっている。すなわち、式(3)は行列式表現をすると、

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) \vec{\phi} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F} \vec{\phi} \quad (4)$$

となる。ここで、中性子束ベクトル $\vec{\phi}$ は、

$$\vec{\phi} = \text{Col}[\phi_1(\vec{r}), \phi_2(\vec{r}), \dots, \phi_G(\vec{r})]$$

である。また、演算マトリックスは、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}
 -\nabla \cdot D_1 \nabla + \sum_{R1} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & -\nabla \cdot D_2 \nabla + \sum_{R2} & & \\
 \vdots & & \ddots & \\
 0 & \dots & \dots & -\nabla \cdot D_G \nabla + \sum_{RG}
 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{s,2 \rightarrow 1} & \dots & \Sigma_{s,G \rightarrow 1} \\ \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} & 0 & \Sigma_{s,3 \rightarrow 2} & \dots & \Sigma_{s,G \rightarrow 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma_{s,1 \rightarrow G} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \chi_1 \nu \Sigma_{f1} & \chi_1 \nu \Sigma_{f2} & \dots & \chi_1 \nu \Sigma_{fG} \\ \chi_2 \nu \Sigma_{f1} & \chi_2 \nu \Sigma_{f2} & \dots & \chi_2 \nu \Sigma_{fG} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_G \nu \Sigma_{f1} & \dots & \dots & \chi_G \nu \Sigma_{fG} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

となる。ここでの課題は式(4)の最大固有値と固有ベクトルを求める解法を示すことである。

式(4)は、空間 \vec{r} に関する微分方程式で、これを解く方法は種々ある。ここでは、大型計算機を用いた数値解法として発達し、本研究にも関連の深い差分近似式を用いた繰り返し計算法について記す。

まず、空間を詳細メッシュに分割し、各メッシュ代表点の近傍で中性子束を Taylor 展開し、メッシュ区間について積分することにより階差式を得る。この具体的方法を付録1に示す。この近似表現式を用いることにより、式(4)の演算行列 \mathbf{M} に含まれる微分演算子は数値に置き替えられ、式(4)は下記の行列方程式に近似される。

$$(\mathbf{M}(N,G) - \Sigma(N,G)) \vec{\phi}(N,G) = \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{F}(N,G) \vec{\phi}(N,G), \quad (6)$$

ここで、 N は空間分割数、 G はエネルギー群数である。また、 \mathbf{M} 、 Σ 、 \mathbf{F} は $N \cdot G$ 行 $N \cdot G$ 列の行列である。

式(6)の左より $(\mathbf{M}(N,G) - \Sigma(N,G))$ の逆行列を作用し、さらに $\mathbf{F}(N,G)$ を左より作用すると下記の式を得る。

$$k_{eff} \vec{\theta} = \mathbf{T} \vec{\theta} \quad (7)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \vec{\theta} &\equiv \mathbf{F}(N,G) \vec{\phi}(N,G) \\ \mathbf{T} &\equiv \mathbf{F}(N,G) (\mathbf{M}(N,G) - \Sigma(N,G))^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

である。すなわち、連立方程式(3)を差分近似で解くということは、行列 \mathbf{T} の固有値 k_{eff} と固有ベクトル $\vec{\theta}$ を求めることと等価である。必要とする解は最大固有値とその固有ベクトルである。他の固有値及び固有ベクトルは過渡状態の解析に使用されるが、定常状態の中性子束分布は最大固有値に属する固有ベクトルで表現される。

最大固有値は下記の繰り返し法により求められる。

$$k_{eff}^{(m)} \vec{\theta}^{(m+1)} = \mathbf{T} \vec{\theta}^{(m)}, \quad (9)$$

$$\vec{\theta}^{(m-1)} = \frac{1}{k_{eff}^{(m)}} \cdot \frac{1}{k_{eff}^{(m-1)}} \mathbf{T}^2 \vec{\theta}^{(m-1)} = \dots = \prod_{t=0}^{m-1} \left(\frac{1}{k_{eff}^{(t)}} \right) \mathbf{T}^{m+1} \vec{\theta}^{(0)}, \quad (10)$$

ここで、 $\vec{\theta}^{(0)}$ は中性子源分布 $\mathbf{F} \cdot \vec{\phi}$ の初期推定値であり、 (m) は計算の繰り返し数である。

いま、行列 \mathbf{T} の固有値 $\lambda_p (\lambda_0 = k_{eff})$ は、

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_p > 0 \quad (11)$$

であり、対応する固有ベクトルは $\vec{\varphi}_p (p=0, 1, \dots)$ とする。 $\vec{\varphi}_p$ は完備な空間を作るので、 $\vec{\theta}^{(0)}$ を $\vec{\varphi}_p$ で展開する。

$$\vec{\theta}^{(0)} = \sum_p a_p \vec{\varphi}_p \tag{12}$$

式 (9) と式 (12) より m 回の繰り返しの後は、

$$\left. \begin{aligned} \vec{\theta}^{(m)} &= Q^{(m)} \sum_p a_p \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_0}\right)^m \vec{\varphi}_p, \\ Q^{(m)} &= \lambda_0^m \prod_{t=0}^{m-1} \left(\frac{1}{k_{\text{eff}}^{(t)}}\right), \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

となる。m が十分大きいと $\lambda_p/\lambda_0 < 1.0 (p > 1)$ であるから

$$\vec{\theta}^{(m)} \rightarrow Q^{(m)} \cdot a_0 \vec{\varphi}_0, \tag{14}$$

となる。すなわちこの繰り返し法により最大固有値に属する固有ベクトル $\vec{\varphi}_0$ のみが残ってくる。m が十分大きくなり、繰り返し計算が収束した状態では、 $\vec{\theta}^{(m)}$ は式 (9) を満たすはずであるから、

$$k_{\text{eff}} \cdot Q^{(m)} a_0 \vec{\varphi}_0 = \mathbf{T} \cdot Q^{(m)} a_0 \vec{\varphi}_0 = \lambda_0 Q^{(m)} a_0 \vec{\varphi}_0$$

となり、下記の式で示す最大固有値が求まる。

$$k_{\text{eff}} = \lambda_0 \tag{15}$$

すなわち、式 (9) の繰り返しを行うと、最大固有値とそれに属する固有ベクトルが求められる。この繰り返しは、通常、中性子源繰り返し法と呼ばれている。この繰り返し計算を実行するためには、各繰り返しごとに中性子束分布 $\vec{\phi}$ を求める必要がある。中性子束分布は式 (6) を用いて下記の式より求まる。

$$\vec{\phi}^{(m+1)} = (\mathbf{M}(N, G) - \Sigma(N, G))^{-1} \cdot \vec{\theta}^{(m)} / k_{\text{eff}}^{(m)} \tag{16}$$

式 (16) の右辺の $\vec{\theta}^{(m)} / k_{\text{eff}}^{(m)}$ は m 回目の中性子源繰り返しの結果求められた中性子源ベクトル $\mathbf{F}\vec{\phi}^{(m)}$ を固有値で割ったものである。この値が与えられたものとして、行列 $(\mathbf{M} - \Sigma)$ の逆行列を求めることにより $\vec{\phi}^{(m+1)}$ が得られる。数値計算で $\vec{\phi}^{(m+1)}$ を求めるには通常繰り返し法が用いられる。この繰り返し計算は中性子束繰り返し計算とよばれる。すなわち、固定中性子源に対して繰り返し法を用いて中性子束分布を求め、その中性子束分布を用いて中性子源を再計算でる。中性子源を再計算する手順が中性子源繰り返し法である。

以上、拡散方程式の解法について簡単に記したが、この解法における最大の問題点は行列 $(\mathbf{M}(N, G) - \Sigma(N, G))$ の要素数が膨大になることである。この行列の要素の数を減少させ、 $\vec{\phi}^{(m+1)}$ を算出する時間を短縮する方法を開発することが本研究の課題である。

2.2 基礎式と繰り返し計算手順

前節で述べたように外部中性子源のない系の定常状態の中性子束の振舞を記述する方程式は固有値方程式で、通常これを解くには中性子源繰り返し法が用いられる。本研究の方法も通常の中性子源繰り返し法を用いており、その収束性については前節で記したのでここでは述べない。本節では、仮定された中性子源分布に対して中性子分布をいかに求めるかということが主要課題で

ある。

解くべき方程式 (3) を下記のように略記する。

$$\nabla \cdot D \nabla \phi - \sum_R \phi + \theta = 0, \quad (17)$$

ここで、D は拡散係数であり、 \sum_R は中性子除去断面積である。

式 (17) をブロック内で x-y 面につき積分する。

$$\begin{aligned} \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \left(\frac{\partial}{\partial Z} D \frac{\partial}{\partial Z} \phi \right) dx dy + \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \left(\frac{\partial}{\partial X} D \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} D \frac{\partial}{\partial Y} \right) \phi dx dy \\ - \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \sum_R \phi dx dy + \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \theta dx dy = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 ΔX , ΔY はブロックの幅である。

下記の記号を導入する。

$$\left. \begin{aligned} -l_{xy}(z) &\equiv \frac{\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \left(\frac{\partial}{\partial X} D \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} D \frac{\partial}{\partial Y} \right) \phi dx dy}{\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \phi dx dy}, \\ \Psi_z(z) &\equiv \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \phi dx dy, \\ \Theta_z(z) &\equiv \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \theta dx dy, \\ \Sigma_{Rz}(z) &\equiv \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \sum_R \phi dx dy / \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \phi dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式(19)の Ψ_z の微分を考える。

$$\frac{\partial}{\partial Z} D \frac{\partial}{\partial Z} \Psi_z \equiv \frac{\partial}{\partial Z} D \frac{\partial}{\partial Z} \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \phi dx dy. \quad (20)$$

閉区間 ΔX , ΔY , ΔZ で中性子束 $\phi(x, y, z)$ は微分可能であり、また、 $D\partial\phi/\partial z$ も微分可能であるので式 (20) の右辺の微分と積分の演算の順序を変更することができる。すなわち、式 (20) は、

$$\frac{\partial}{\partial Z} D \frac{\partial}{\partial Z} \Psi_z = \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \frac{\partial}{\partial Z} D \frac{\partial}{\partial Z} \phi dx dy. \quad (21)$$

となる。

式 (19) と式 (21) を用いて式 (18) を書き直すと、

$$\frac{\partial}{\partial Z} D \frac{\partial}{\partial Z} \Psi_z - (\Sigma_{Rz} + l_{xy}) \Psi_z + \Theta_z = 0 \quad (22)$$

となる。

同様にして、式 (17) を z 軸につきブロック内で積分した式を以下で定義する記号を用いて記す。

$$\left. \begin{aligned} -l_z(x, y) &\equiv \frac{\int_{\Delta z} \frac{\partial}{\partial Z} D \frac{\partial}{\partial Z} \phi dz}{\int_{\Delta z} \phi dz}, \\ \Psi_{xy}(x, y) &\equiv \int_{\Delta z} \phi dz, \\ \Theta_{xy}(x, y) &\equiv \int_{\Delta z} \theta dz, \\ \Sigma_{Rxy}(x, y) &\equiv \int_{\Delta z} \sum_R \phi dz / \int_{\Delta z} \phi dz. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial}{\partial y}\right) \Psi_{xy} - (\sum_{Rxy} + l_z) \Psi_{xy} + \Theta_{xy} = 0. \quad (24)$$

本方法では、式(17)を解く代りに式(22)及び(24)を解くことによりブロック内の積分中性子束を求める。式(22)は各チャンネルについて計算され、式(24)は各層について計算される。

以上で基礎式の導出を終り、次に繰り返し計算手順を示す。計算の流れは図2に示した通りである。

ステップ1

式(22)及び(24)で使用される中性子源 Θ_z 及び Θ_{xy} は下記の関係を満たすように定めておく。

$$\int_{dz} \Theta_z dz = \int_{dx} \int_{dy} \Theta_{xy} dx dy. \quad (25)$$

ステップ2

下記の式により \sum_{Rz} を求め、 l_{xy} を仮定して式(22)を解き Ψ_z を求める。

$$\sum_{Rz} = \int_{dx} \int_{dy} \sum_R(x, y, z) \Psi_{xy} dx dy / \int_{dx} \int_{dy} \Psi_{xy} dx dy. \quad (26)$$

ステップ3

ステップ2の結果を用いて、下記の式によりz軸方向漏洩係数 l_z を求める。

$$\bar{l}_z = \frac{-\int_{dz} \left(\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial}{\partial z} \Psi_z\right) dz}{\int_{dz} \Psi_z dz}. \quad (27)$$

この \bar{l}_z はブロック平均量であるので、これよりブロック内x-yメッシュに対する漏洩係数 l_z を求める。本方法では、z軸とx-y面の変数分離を仮定しているので、 l_z はブロック内で一定で \bar{l}_z に等しいとする。また、ステップ2で求められた Ψ_z を用いて下記の式で \sum_{Rxy} を求める。

$$\sum_{Rxy} = \int_{dz} \sum_R(x, y, z) \Psi_z dz / \int_{dz} \Psi_z dz. \quad (28)$$

ステップ4

ステップ3で求めた l_z 及び \sum_{Rxy} を式(24)に代入して Ψ_{xy} を求める。

ステップ5

ステップ4で求めた Ψ_{xy} を用いてx-y方向漏洩係数 l_{xy} を下記の式より求める。

$$\bar{l}_{xy} = \frac{-\int_{dx} \int_{dy} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial}{\partial y}\right) \Psi_{xy}\right] dx dy}{\int_{dx} \int_{dy} \Psi_{xy} dx dy}. \quad (29)$$

こうして求められた \bar{l}_{xy} はブロック平均量であるが、 l_z の場合と同様に、変数分離の仮定によりブロック内各zメッシュに対する漏洩係数 l_{xy} と等しいとする。また、ステップ4で求められた Ψ_{xy} を用いて下記の式により \sum_{Rz} を求める。

$$\sum_{Rz} = \int_{dx} \int_{dy} \sum_R(x, y, z) \Psi_{xy} dx dy / \int_{dx} \int_{dy} \Psi_{xy} dx dy. \quad (30)$$

ステップ6

ステップ2で求められた Ψ_z とステップ4で求められた Ψ_{xy} が下記の条件を満たすまで、ステ

ステップ2からステップ6を繰り返す。

$$\left| \frac{\int_{\Delta z} \Psi_z dz - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy}{\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy} \right| < \varepsilon_1 \quad (31)$$

ステップ7

中性子束分布が式(31)を満たしたら収束したとし、中性子源分布 θ_z 及び θ_{xy} を、収束した中性子束分布 Ψ_z 及び Ψ_{xy} を用いて求めなおす。中性子束分布が収束した時点では $\int_{\Delta z} \Psi_z dz$ と $\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy$ は同一の値となるべきであるが、数値計算上では収束判定因子 ε_1 は零でなく、その分だけ差が生ずる。

ステップ8

繰り返し計算ごとに $\int_{\Delta z} \theta_z dz$ と $\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \theta_{xy} dx dy$ が完全に一致するように規格化する。

ステップ9

ステップ8で求められたブロック内積分中性子源を前回算出の中性子源と比較し、どのブロックに対しても相対誤差が収束判定因子より小さくなるまでステップ2から9を繰り返す。

以上、繰り返し計算により中性子束分布を求める手順を説明したが、この繰り返し計算により漏洩係数も収束することを以下に示す。

1回前の繰り返し計算の結果求められた l_{xy} を l_{xy}^{old} とし、それを用いて今回求めた l_{xy} を l_{xy}^{new} とする。式(22)及び(24)をブロックにつき積分する。

$$\int_{\Delta z} \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial}{\partial z} \Psi_z dz - \int_{\Delta z} (\sum_{Rz} + l_{xy}^{old}) \Psi_z dz + \int_{\Delta z} \theta_z dz = 0 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \left(\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_{xy} dx dy - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} (\sum_{Rxy} + l_z) \Psi_{xy} dx dy \\ & + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \theta_{xy} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

式(28)及び(30)の \sum_{Rxy} 及び \sum_{Rz} をブロックについて積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \sum_{Rxy} \Psi_{xy} dx dy &= \frac{\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} dx dy \Psi_{xy} \left(\int_{\Delta z} \sum_R(x, y, z) \Psi_z dz \right)}{\int_{\Delta z} \Psi_z dz} \equiv \bar{\sum}_{Rxy} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy, \\ \int_{\Delta z} \sum_{Rz} \Psi_z dz &= \frac{\int_{\Delta z} dz \Psi_z \left(\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \sum_R(x, y, z) \Psi_{xy} dx dy \right)}{\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy} \equiv \bar{\sum}_{Rz} \int_{\Delta z} \Psi_z dz \end{aligned} \quad (34)$$

となる。ブロックの平均除去断面積を $\bar{\sum}_R$ とすると、

$$\bar{\sum}_R = \frac{\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \sum_R(x, y, z) \Psi_z \Psi_{xy} dx dy dz}{\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy \cdot \int_{\Delta z} \Psi_z dz} = \bar{\sum}_{Rz} = \bar{\sum}_{Rxy} \quad (35)$$

となる。この $\bar{\sum}_R$ を用いて式(32)及び(33)を書き直す。

$$-l_z \int_{\Delta z} \Psi_z dz - (\bar{\sum}_R + l_{xy}^{old}) \int_{\Delta z} \Psi_z dz + \int_{\Delta z} \theta_z dz = 0 \quad (36)$$

$$-l_{xy}^{new} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy - (\bar{\sum}_R + l_z) \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \Psi_{xy} dx dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \theta_{xy} dx dy = 0 \quad (37)$$

式 (36) に $\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Psi_{xy} dx dy$ を, 式 (37) に $\int_{\Delta Z} \Psi_z dz$ を乗じて式 (36) より (37) を引けば,

$$\begin{aligned} & (I_{xy}^{new} - I_{xy}^{old}) \left(\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Psi_{xy} dx dy \right) \left(\int_{\Delta Z} \Psi_z dz \right) \\ &= \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \int_{\Delta Z} \theta dx dy dz \left[\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Psi_{xy} dx dy - \int_{\Delta Z} \Psi_z dz \right] \end{aligned}$$

となり, 変形して下式を得る。

$$\begin{aligned} \left| I_{xy}^{new} - I_{xy}^{old} \right| &= \frac{\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \int_{\Delta Z} \theta dx dy dz}{\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Psi_{xy} dx dy} \left| \frac{\int_{\Delta Z} \Psi_z dz - \int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Psi_{xy} dx dy}{\int_{\Delta Z} \Psi_{xy} dz} \right| \\ &< \frac{\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \int_{\Delta Z} \theta dx dy dz}{\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \Psi_{xy} dx dy} \cdot \epsilon_1. \end{aligned} \quad (38)$$

式 (38) は中性子束が ϵ_1 の範囲内で収束すれば, 漏洩係数も同程度の範囲で収束していることを示している。

2.3 基礎式の階差式表現

基礎式 (22) 及び (24) を階差式で表現する。まず, 2次元層計算の基礎式 (24) を取り扱う。x-y 2次元面を x 軸方向に N_x 個, y 軸方向に N_y 個に分割し, 分割された長方形メッシュの中心座標を (X_i, Y_j) とし, その幅を $\Delta X_i, \Delta Y_j$ で表わす拡散方程式 (24) を x に関して $X_i - \Delta X_i/2$ から $X_i + \Delta X_i/2$, y に関して $Y_j - \Delta Y_j/2$ から $Y_j + \Delta Y_j/2$ まで積分する。式 (24) の左辺第 1 項を Green の定理を用いて書きなおす。

$$\begin{aligned} - \int_{\Delta X_i} \int_{\Delta Y_j} \nabla D_{i,j} \nabla \Psi dx dy &= - \int_{\Delta X_i} D_{i,j} \frac{\partial}{\partial y} \Psi dx - \int_{\Delta Y_j} D_{i,j} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dy \\ &= - \frac{\Delta X_i D_{i,j}}{\Delta Y_j/2} \{ (\Psi_{i,j} - \Psi_{sy+}) + (\Psi_{i,j} - \Psi_{sy-}) \} \\ &\quad - \frac{\Delta Y_j D_{i,j}}{\Delta X_i/2} \{ (\Psi_{i,j} - \Psi_{sx+}) + (\Psi_{i,j} - \Psi_{sx-}) \}, \end{aligned} \quad (39)$$

ここで, $D_{i,j}$ は (i, j) メッシュの拡散係数, Ψ_s は隣接メッシュとの境界の中性子束の値である。境界面で, 中性子束と中性子流は連続の条件を満たさなければならないので, Ψ_s は下記の関係を満たす。

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\Delta X_i D_{i,j}}{\Delta Y_j/2} (\Psi_{i,j} - \Psi_{sy+}) &= - \frac{\Delta X_i D_{i,j+1}}{\Delta Y_{j+1}/2} (\Psi_{sy+} - \Psi_{i,j+1}), \\ - \frac{\Delta Y_j D_{i,j}}{\Delta X_i/2} (\Psi_{i,j} - \Psi_{sx+}) &= - \frac{\Delta Y_j D_{i,j+1}}{\Delta X_{j+1}/2} (\Psi_{sx+} - \Psi_{i,j+1}). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

式 (40) を用いて式 (39) を書き直すと,

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Delta x_i} \int_{\Delta y_j} \Delta D_{i,j} \Delta \Psi dx dy \\
 & = \frac{2\Delta X_i}{\frac{\Delta Y_j}{D_{i,j+1}} + \frac{\Delta Y_{j+1}}{D_{i,j}}} (\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j+1}) + \frac{2\Delta X_i}{\frac{\Delta Y_j}{D_{i,j+1}} + \frac{\Delta Y_{j-1}}{D_{i,j}}} (\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1}) \\
 & + \frac{2\Delta Y_j}{\frac{\Delta X_i}{D_{i+1,j}} + \frac{\Delta X_{i+1}}{D_{i,j}}} (\Psi_{i,j} - \Psi_{i+1,j}) + \frac{2\Delta Y_j}{\frac{\Delta X_i}{D_{i-1,j}} + \frac{\Delta X_{i-1}}{D_{i,j}}} (\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j})
 \end{aligned}$$

となる。式 (24) の左辺の第 2 項目及び右辺は、

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta x_i} \int_{\Delta y_j} (\sum R_{i,j} + l_z) \Psi dx dy & = (\sum R_{i,j} + l_{z,i,j}) \Psi_{i,j} \Delta X_i \Delta Y_j, \\
 \int_{\Delta x_i} \int_{\Delta y_j} \theta dx dy & = \theta_{i,j} \Delta X_i \Delta Y_j
 \end{aligned} \tag{41}$$

となる。上記積分結果を用いて式 (24) を表現すると下記の 5 点階差式を得る。

$$\begin{aligned}
 & - (a_{i,j} \Psi_{i+1,j} + b_{i,j+1} \Psi_{i,j+1} + c_{i,j} \Psi_{i-1,j} + d_{i,j} \Psi_{i,j-1}) \\
 & + p_{i,j} \Psi_{i,j} + \tilde{r}_{i,j} \Psi_{i,j} + \tilde{l}_{i,j} \Psi_{i,j} = \tilde{\theta}_{i,j},
 \end{aligned} \tag{42}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} & = \frac{2\Delta Y_j}{\frac{\Delta X_i}{D_{i+1,j}} + \frac{\Delta Y_{i+1}}{D_{i,j}}}, & b_{i,j} & = \frac{2\Delta X_i}{\frac{\Delta Y_j}{D_{i,j+1}} + \frac{\Delta Y_{j+1}}{D_{i,j}}}, \\
 c_{i,j} & = \frac{2\Delta Y_j}{\frac{\Delta X_i}{D_{i-1,j}} + \frac{\Delta X_{i-1}}{D_{i,j}}}, & d_{i,j} & = \frac{2\Delta Y_j}{\frac{\Delta X_i}{D_{i-1,j}} + \frac{\Delta X_{i-1}}{D_{i,j}}}, \\
 p_{i,j} & = a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j} + d_{i,j}, \\
 \tilde{r}_{i,j} & = \sum R_{i,j} \Delta X_i \Delta Y_j, \\
 \tilde{l}_{i,j} & = l_{z,i,j} \Delta X_i \Delta Y_j, \\
 \tilde{\theta}_{i,j} & = \theta_{i,j} \Delta X_i \Delta Y_j.
 \end{aligned} \tag{43}$$

式 (42) が 2 次元拡散計算に使用される 5 点階差式である。式 (42) を行列表示する。

$$\mathbf{A}_{xy} \vec{\Psi}_{xy} = (\mathbf{D}_{xy} + \sum_{xy} + \tilde{\mathbf{L}}_z) \vec{\Psi}_{xy} = \vec{\theta}_{xy}, \tag{44}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \vec{\Psi}_{xy} & = \text{Col}(\vec{\Psi}_1, \vec{\Psi}_2, \dots, \vec{\Psi}_i, \dots), & \vec{\Psi}_i & = \text{Col}(\Psi_{i1}, \Psi_{i2}, \dots), \\
 \vec{\theta}_{xy} & = \text{Col}(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2, \dots, \vec{\theta}_i, \dots), & \vec{\theta}_i & = \text{Col}(\tilde{\theta}_{i1}, \tilde{\theta}_{i2}, \dots),
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & & & & \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -c_i & b_i & -a_i \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & -c_{Nx} & b_{Nx} \end{pmatrix}, \quad \sum_{xy} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 & & & & \\ & \tilde{r}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \tilde{r}_{Nx} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_z = \begin{pmatrix} \tilde{l}_1 & & & & \\ & \tilde{l}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \tilde{l}_{Nx} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

上記 $a_i, b_i, c_i, \tilde{r}_i$ 及び \tilde{l}_i は部分行列であり,

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \begin{pmatrix} a_{i,1} & & 0 \\ & a_{i,2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{i,N_y} \end{pmatrix}, & c_i &= \begin{pmatrix} c_{i,1} & & 0 \\ & c_{i,2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & c_{i,N_y} \end{pmatrix}, \\ b_i &= \begin{pmatrix} p_{i,1} - d_{i,1} & & 0 \\ -b_{i,2} & p_{i,2} & -d_{i,2} \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & -b_{i,N_y} & p_{i,N_y} \end{pmatrix}, & \tilde{r}_i &= \begin{pmatrix} \tilde{r}_{i,1} & & 0 \\ & \tilde{r}_{i,2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \tilde{r}_{i,N_y} \end{pmatrix}, \\ \tilde{l}_i &= \begin{pmatrix} \tilde{l}_{i,1} & & 0 \\ & \tilde{l}_{i,2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \tilde{l}_{i,N_y} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

である。ただし、 N_x 及び N_y は x 軸及び y 軸方向最大メッシュ番号である。

以上の階差行列式の作成手順よりわかるように、行列 $\mathbf{D}_{xy} + \Sigma_{xy}$ は次の4つの性質を有している。

- (1) 既約である。
- (2) 対角要素は全て正であり、他は零または負である。
- (3) 対角要素は、その行に属する残りの要素の絶対値の和より大である。
- (4) 対称である。

上記(2)及び(3)の性質から、行列 $\mathbf{D}_{xy} + \Sigma_{xy}$ は正定値行列であることがわかる。

次に、1次元チャンネル計算の基礎式(22)の階差形式を2次元の場合と同様に導く。 z 軸方向の N_z 個の分点に関する階差式は下記のようになる。

$$-(a_m \Psi_{m+1} + c_m \Psi_{m-1}) + p_m \Psi_m + \tilde{r}_m \Psi_m + \tilde{l}_m \Psi_m = \theta_m \quad (47)$$

ここで、 $a_m, c_m, p_m, \tilde{r}_m, \tilde{l}_m$ は2次元表示における式(42)の $a_{i,j}, c_{i,j}, p_{i,j}, \tilde{r}_{i,j}, \tilde{l}_{i,j}$ に対応するものである。また、 Ψ_m は1つのチャンネルの z 軸方向メッシュ番号 m の中性子束である。式(47)を行列表示する。

$$\mathbf{A}_z \vec{\Psi}_z = (\mathbf{D}_z + \tilde{\Sigma}_z + \tilde{\mathbf{L}}_{xy}) \vec{\Psi}_z = \vec{\theta}_z \quad (48)$$

ここで、

$$\vec{\Psi}_z = \text{Col}(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots, \Psi_{N_z}), \quad \vec{\theta}_z = \text{Col}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, \dots, \theta_{N_z})$$

$$\mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} p_1 - a_1 & & & \\ -c_2 & p_2 - a_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -c_m & p_m - a_m \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & -c_{N_z} & p_{N_z} \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{z1} & & & & & \\ & \tilde{r}_{z2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \tilde{r}_{zm} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tilde{r}_{zNz} \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}}_{xy} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{xy1} & & & & & \\ & \tilde{t}_{xy2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \tilde{t}_{xym} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tilde{t}_{xyNz} \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

式(49)よりわかるように、1次元チャンネル計算の階差式の演算子は3項行列である。したがって、連立方程式(48)は、体系の両端における中性子束、またはその1次微分係数が境界条件により与えられると、2点階差の循環公式によって解くことができる。

中性子束 Ψ_m に関する循環公式を、

$$\Psi_m = \frac{\Psi_{m+1} + \beta_m}{\alpha_m}, \quad (50)$$

とにおいて係数 α_m 及び β_m に関する循環公式を求める。式(50)が各分点において成立するならば、

$$\Psi_{m-1} = \frac{\Psi_m + \beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}},$$

となり、これを式(47)に代入すると

$$\Psi_{m+1} = \frac{1}{a_m} \left(p_m + \tilde{r}_m + \tilde{t}_m - \frac{c_m}{\alpha_{m-1}} \right) \Psi_m - \frac{1}{a_m} \left(\frac{c_m \beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}} + \theta_m \right) \quad (51)$$

となる。式(50)と(51)より

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{a_m} \left(p_m + \tilde{r}_{zm} + \tilde{t}_{zm} - \frac{c_m}{\alpha_{m-1}} \right), \\ \beta_m &= \frac{1}{a_m} \left(\frac{c_m \beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}} + \theta_m \right), \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

を得る。 α_m 及び β_m は、外周における境界条件を用いるとその出発値が与えられ、式(52)により m の大きい方へ逐次その値が求められる。次に最外端における中性子束の値が境界条件より定まると、式(50)により m の小さい方へ Ψ_m の値が逐次求められる。すなわち、1次元階差式(48)は内部繰返し法による繰返し計算は不要となる。後で述べる **FEDM** コードにおいて、 $x-y$ 2次元計算は有限要素法で行うが、チャンネル1次元計算は差分法で行っている理由の一つはここにある。

2.4 基礎式の行列表現

本方法における繰返し計算の収束条件を検討するにあたって、特に留意すべき点は下記の3項目である。

- (1) チャンネルまたは層について体積積分された中性子束に対する方程式を取扱う。
- (2) 繰返しは、軸方向と径方向の交互に行う。
- (3) 軸方向及び径方向の中性子漏洩係数が演算子の要素に含まれており、繰返しごとに演算

子の要素が変化する。

数値計算で取扱う基礎式は (44) と (48) である。

$$(\mathbf{D}_{xy} + \sum_{xy} + \mathbf{L}_z) \vec{\psi}_{xy} = \vec{\theta}_{xy} \quad (44)$$

$$(\mathbf{D}_z + \sum_z + \mathbf{L}_{xy}) \vec{\psi}_z = \vec{\theta}_z \quad (48)$$

これ等の行列の次元数を表現するために下記の記号を使用する。

- N_{ch} = チャンネル数,
- N_{fz} = チャンネルあたりの 1 次元詳細メッシュ数,
- N_{fzt} = 1 次元詳細メッシュ総数で $N_{fz} \cdot N_{ch}$ に等しい,
- N_{lay} = 層の数,
- N_{fxy} = 層あたりの 2 次元詳細メッシュ数,
- N_{fxyt} = 2 次元詳細メッシュの総数で $N_{fxy} \cdot N_{lay}$ に等しい,
- N_b = 全体系のブロック数で $N_{ch} \cdot N_{lay}$ に等しい。

積分中性子束を取扱うために、加算行列 \mathbf{S} と分配行列 \mathbf{R} を導入する。行列 \mathbf{S} はベクトルの各要素の部分和を作る演算子であり、行列 \mathbf{R} はその逆にベクトルの各要素をさらに細分する演算子である。すなわち、行列 \mathbf{S} を詳細メッシュの中性子束や、漏洩係数に作用することによりブロックで積分された量が得られる。また行列 \mathbf{R} をブロック内で積分された量に作用することにより詳細メッシュに関する情報を得る。これら行列演算子の機能を例で示す。

図 3 は、炉心を x-y 面に平行な 5 個の層と z 軸に平行な 9 個のチャンネルに分割した例である。この例では各チャンネルは 5 枚の層に分割され、z 軸方向 1 次元詳細計算の際には、各層はさらに 3 分割される。チャンネルごとの 1 次元詳細計算の結果求まる中性子束が図中 ψ_z^i である。第 m 番目の層に含まれる ψ_z^i を加算した量が Ψ_{zm} である。また、各層は 9 個のチャンネルに分割され、x-y 面 2 次元詳細計算の際には各チャンネルはさらに 4 分割される。層ごと 2 次元詳細計算の結果求まる中性子束が図中の ψ_{xy}^j である。この ψ_{xy}^j を第 n チャンネルにつき加算した量が Ψ_{xyn} である。第 m 層と第 n チャンネルで構成されるブロック $b(m, n)$ について考えると、 Ψ_{zm} も Ψ_{xyn} も共に同一ブロック b 内の積分中性子束である。それ故、以下 Ψ_{zb} 及び Ψ_{xyb} と表現する。

図 4 はチャンネルごとの 1 次元詳細計算に使用される連立方程式 (48) の係数行列と解ベクトルの関係を示している。ここで算出される 1 次元詳細中性子束 $\vec{\psi}_z^{ch}$ はチャンネル内 x-y 断面に関して積分された量であり、図 3 の $(\psi_z^1, \psi_z^2, \dots, \psi_z^5)^t$ に相当する。

繰り返し計算の収束の判定には、式 (31) に示したように、1 次元チャンネル計算結果求まる中性子束 ψ_z^i と ψ_{xy}^j を各ブロックごとに積分した Ψ_{zb} と Ψ_{xyb} の相対誤差を用いる。この積分を行う加算行列の例を図 5 に示す。

図 5 において、 \mathbf{S}_z^b はチャンネルごとの 1 次元詳細メッシュ計算結果の中性子束をブロックごとに空間積分する行列である。 \mathbf{S}_z^b の部分行列 Δ_{zb}^h は、ブロック b の中性子束を積分する行列で、図 5 の例では下記の 1 行行列である。

$$\Delta_{zb}^h = (h_{z1}, h_{z2}, h_{z3})_b \quad (53)$$

ここで、 h_z は z 軸方向の詳細メッシュ幅である。この行列を用いると、z 軸方向中性子束はブロック b について積分される。

第 n チャンネル

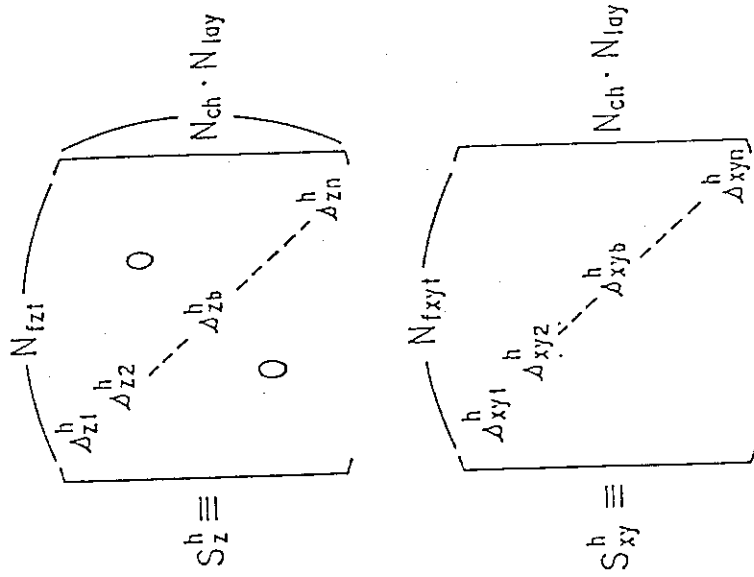
第 5 層	ΔZ	h_z	$\psi_z^{fz=15}$ ----- ψ_z^{14} ----- ψ_z^{13}	$\Psi_{N_{lay} = 5}$	Ψ_z^{nch}		
第 4 層	-----		ψ_z^{12} ----- ψ_z^{11} ----- ψ_z^{10}	Ψ_{Z4}			
	第 3 層	-----				ψ_z^9 ----- ψ_z^8 ----- ψ_z^7	Ψ_{Z3}
		第 2 層	-----			ψ_z^6 ----- ψ_z^5 ----- ψ_z^4	
第 1 層	-----		ψ_z^3 ----- ψ_z^2 ----- ψ_z^1	Ψ_{Z1}			

		ΔX						第 m 層					
		h_x											
h_y ΔY	ψ_{xy}^{27}	ψ_{xy}^{28}	ψ_{xy}^{31}	ψ_{xy}^{32}	ψ_{xy}^{35}	ψ_{xy}^{36}	Ψ_{xy7}	Ψ_{xy8}	Ψ_{xy9}	$\Psi_{xy}^{m_{laye}}$			
	ψ_{xy}^{25}	ψ_{xy}^{26}	ψ_{xy}^{29}	ψ_{xy}^{30}	ψ_{xy}^{33}	ψ_{xy}^{34}							Ψ_{xy4}
ψ_{xy}^{15}	ψ_{xy}^{16}	ψ_{xy}^{19}	ψ_{xy}^{20}	ψ_{xy}^{23}	ψ_{xy}^{24}	Ψ_{xy1}	Ψ_{xy2}	Ψ_{xy3}					
ψ_{xy}^{13}	ψ_{xy}^{14}	ψ_{xy}^{17}	ψ_{xy}^{18}	ψ_{xy}^{21}	ψ_{xy}^{22}								
ψ_{xy}^3	ψ_{xy}^4	ψ_{xy}^7	ψ_{xy}^8	ψ_{xy}^{11}	ψ_{xy}^{12}								
ψ_{xy}^1	ψ_{xy}^2	ψ_{xy}^5	ψ_{xy}^6	ψ_{xy}^9	ψ_{xy}^{10}								

$N_{ch} = 9, N_{lay} = 5, N_{fz} = 3 \times 5 = 15, N_{fxy} = 4 \times 9 = 36$

$N_{fzt} = N_{fz} \times N_{ch} = 135, N_{fxyt} = N_{fxy} \times N_{lay} = 180$

図3 詳細メッシュ中性子束と積分中性子束の相関図



$$\Delta_{zb} = (h_{z1}, h_{z2}, h_{zb})$$

$$\Delta_{xyb} = (h_{xy1}, h_{xy2}, h_{xyb})$$

$$\int_{\Delta_z} \psi_z dz = \int_{\Delta_{xy}} \psi_{xy} dx dy = \int_{\Delta_{xy}} \int_{\Delta_z} \phi dx dy dz$$

$$\vec{\psi}_z^{nch} = \Delta_{xy} \vec{\psi}_{xy}^{nch}$$

図5 加算行列 S_z 及び S_{xy} の説明図

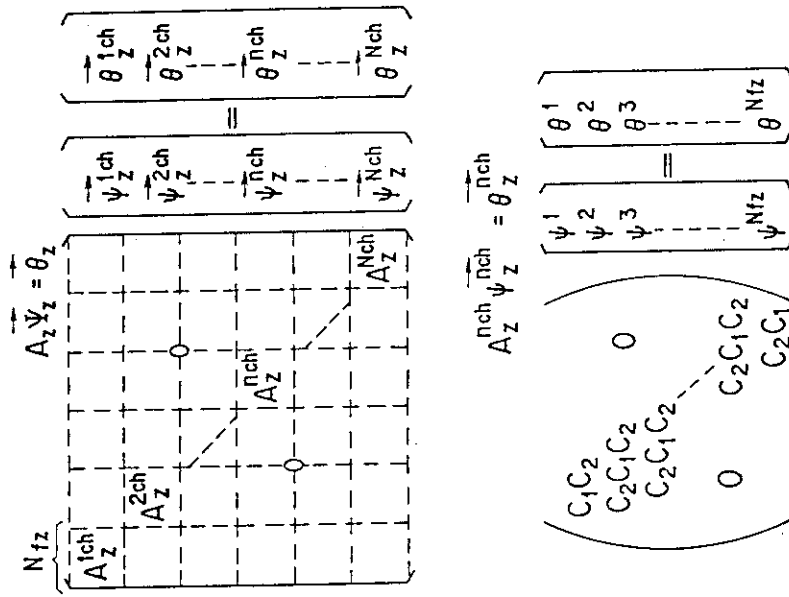


図4 繰り返し法で、各チャンネル1次元計算に使用される行列方程式の説明図

$$\Delta_{zb}^h(\Psi_z)_b \equiv (h_{xy1}, h_{xy2}, h_{xy3}, h_{xy4})_b \begin{pmatrix} \Psi_z^1 \\ \Psi_z^2 \\ \Psi_z^3 \\ \Psi_z^4 \end{pmatrix}_b = \Psi_{zb} . \quad (54)$$

各層ごとの2次元詳細計算結果 Ψ_{xy}^i も同様にしてブロック b について積分される。

$$\Delta_{xyb}^h(\vec{\Psi}_{xy})_b \equiv (h_{xy1}, h_{xy2}, h_{xy3}, h_{xy4})_b \begin{pmatrix} \Psi_{xy}^1 \\ \Psi_{xy}^2 \\ \Psi_{xy}^3 \\ \Psi_{xy}^4 \end{pmatrix} = \Psi_{xyb} , \quad (55)$$

ここで、 h_{xy} は x-y 面詳細メッシュの面積である。

以上示した加算行列は中性子束を空間積分するためのものであったが、単純和をとるための演算子も必要である。空間積分をする演算子を \mathbf{S}^h と記し、単純和をとる演算子を \mathbf{S} と記すと、 \mathbf{S} の要素は \mathbf{S}^h の要素で $h=1.0$ としたものである。

ブロックから軸方向及び径方向への漏洩量の加算には単純和の加算演算子 \mathbf{S} を用いる。基礎式を階差表現した式 (48) の左より加算行列 \mathbf{S}_z を作用する。

$$\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z + \mathbf{S}_z (\Sigma_z + \tilde{\mathbf{L}}_{xy}) \vec{\Psi}_z = \mathbf{S}_z \vec{\theta}_z . \quad (56)$$

式 (56) の右辺のベクトルの各要素はブロック内で積分された中性子源であり、左辺第2項のベクトルの各要素はブロック内で除去される中性子と径方向へ漏洩する中性子の量を表わしている。左辺の第1項はブロックからの軸方向中性子漏洩量を表わしている。

2次元層計算に用いる階差形式の基礎式 (44) の左より加算行列 \mathbf{S}_{xy} を作用する。

$$\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy} + \mathbf{S}_{xy} (\Sigma_{xy} + \tilde{\mathbf{L}}_z) \vec{\Psi}_{xy} = \mathbf{S}_{xy} \vec{\theta}_{xy} . \quad (57)$$

ここで使用している \mathbf{S}_{xy} の具体例は図5に示した加算行列で $h=1.0$ としたもので、その性質は前に示した \mathbf{S}_z と同じである。径方向へのブロックからの積分漏洩量は式 (57) より $\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}$ であることがわかる。

次に、ブロックからの中性子漏洩量を簡単に表現するために、漏洩係数を要素とする行列 \mathbf{L} を導入する。漏洩係数はブロック内積分中性子束に乗ずるとブロックからの積分中性子漏洩量が求まるように定義する。 \mathbf{Z} 軸方向への中性子漏洩係数を \mathbf{L}_z 、径方向への係数を \mathbf{L}_{xy} と記すと、定義より下記の関係を満たす。

$$\mathbf{L}_z \mathbf{S}_z^h \vec{\Psi}_z = \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z . \quad (58)$$

$$\mathbf{L}_{xy} \mathbf{S}_{xy}^h \vec{\Psi}_{xy} = \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy} . \quad (59)$$

上のように定義した漏洩係数はブロックごと与えられる量であるが、基礎式 (44) 及び (48) の $\tilde{\mathbf{L}}_z$ 及び $\tilde{\mathbf{L}}_{xy}$ の要素はブロック内の詳細メッシュに属し、メッシュ幅が乗せられている漏洩係数である。ブロックからの漏洩量の積分値は下記の式で表現できるから、この関係より \mathbf{L}_z と $\tilde{\mathbf{L}}_z$ 及び \mathbf{L}_{xy} と $\tilde{\mathbf{L}}_{xy}$ の関連がわかる。

$$\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z = \mathbf{L}_z \mathbf{S}_z^h \vec{\Psi}_z = \mathbf{S}_{xy} \tilde{\mathbf{L}}_z \vec{\Psi}_{xy} . \quad (60)$$

$$\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy} = \mathbf{L}_{xy} \mathbf{S}_{xy}^h \vec{\Psi}_{xy} = \mathbf{S}_z \tilde{\mathbf{L}}_{xy} \vec{\Psi}_z . \quad (61)$$

3. 中性子漏洩量繰返し計算の収束条件

3.1 収束条件の導出

前章で述べた繰返し法の収束性について検討する。収束の判定は各ブロック内の積分中性子束の前回繰返し時の値との差により行う。すなわち、繰返し計算において、積分中性子束が収束の判定条件式(31)を満足した場合に収束したとする。これは本方法がブロック内の積分量に注目していることに起因する。この積分量が従う式は(56)と(57)である。式(56)の $\mathbf{S}_z \tilde{\mathbf{L}}_{xy} \vec{\Psi}_z$ を式(61)の関係を用いて $\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}$ に置き換え、また、式(57)の $\mathbf{S}_{xy} \tilde{\mathbf{L}}_z \vec{\Psi}_{xy}$ を式(60)の関係を用いて $\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z$ に置き換えると、式(56)と式(57)は、

$$\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z + \mathbf{S}_z \sum_z \vec{\Psi}_z + \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy} = \mathbf{S}_z \vec{\theta}_z, \quad (62)$$

$$\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy} + \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \vec{\Psi}_{xy} + \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z = \mathbf{S}_{xy} \vec{\theta}_{xy}, \quad (63)$$

となる。

上記の式を、式(60)及び(61)の関係を用いて、漏洩量を仲介とした繰返し式に書きなおす。

$$\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z^m - \mathbf{S}_z \sum_z \vec{\Psi}_z^{m-1} + \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_z \vec{\Psi}_z^m = (\gamma - 1) \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m-1} + \mathbf{S}_z \vec{\theta}_z, \quad (64)$$

$$\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m+1} + \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m+1} - \gamma' \mathbf{L}_z^m \mathbf{S}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m+1} = (\gamma' - 1) \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z^m + \mathbf{S}_{xy} \vec{\theta}_{xy}. \quad (65)$$

上記の式において、 m は層計算とチャンネル計算の内部繰返しの回数を示しており、 γ 及び γ' は加速因子である。 \mathbf{L}_{xy}^{m-1} 及び \mathbf{L}_z^m は $m-1$ 回及び m 回目の繰返し計算時に求めた中性子束 $\vec{\Psi}_{xy}^{m-1}$ 及び $\vec{\Psi}_z^m$ を用いて算出された量で下記の関係を満たす。

$$\mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m-1} = \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m-1}, \quad (66)$$

$$\mathbf{L}_z^m \mathbf{S}_z \vec{\Psi}_z^m = \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \vec{\Psi}_z^m. \quad (67)$$

式(62)より式(64)を差し引くと、

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_z (\mathbf{D}_z + \sum_z) (\vec{\Psi}_z - \vec{\Psi}_z^m) + \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} (\vec{\Psi}_{xy} - \vec{\Psi}_{xy}^{m-1}) \\ &= \gamma (\mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_z \vec{\Psi}_z^m - \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m-1}) \\ &= \gamma [\mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_z \vec{\Psi}_z^m - \mathbf{L}_{xy}^{m-1} (\mathbf{S}_z \vec{\Psi}_z - \mathbf{S}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}) - \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}^{m-1}] \\ &= -\gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_z (\vec{\Psi}_z - \vec{\Psi}_z^m) - \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_{xy} (\vec{\Psi}_{xy} - \vec{\Psi}_{xy}^{m-1}), \end{aligned} \quad (68)$$

となる。但し、式(68)の導出には、 $\mathbf{S}_z \vec{\Psi}_z = \mathbf{S}_{xy} \vec{\Psi}_{xy}$ の関係と式(66)及び(67)を用いた。

収束判定は前に述べたように、ブロック内の積分中性子束の前回繰返し時の値との差により行うので、誤差ベクトルとして下記の量を定義する。

$$\vec{\mathbf{E}}_z^m = \mathbf{S}_z^h (\vec{\Psi}_z - \vec{\Psi}_z^m), \quad \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m-1} = \mathbf{S}_{xy}^h (\vec{\Psi}_{xy} - \vec{\Psi}_{xy}^{m-1}). \quad (69)$$

上記誤差ベクトルを詳細メッシュの誤差に戻す分配行列を導入する。

$$\bar{\mathbf{R}}_z^m \vec{\mathbf{E}}_z^m = (\vec{\Psi}_z - \vec{\Psi}_z^m), \quad \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m-1} = (\vec{\Psi}_{xy} - \vec{\Psi}_{xy}^{m-1}) \quad (70)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{R}}_z^m$ と $\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1}$ の性質を調べるために分配行列について記す。

分配行列はブロック内の積分量を積分以前の分布量に戻すものである。それゆえ、中性子束に関しては下記の関係が成立するように分配行列 \mathbf{R}_{xy} 及び \mathbf{R}_z を定める。

$$\mathbf{R}_{xy} \mathbf{S}_{xy}^h \vec{\Psi}_{xy} = \vec{\Psi}_{xy}, \quad \mathbf{R}_z \mathbf{S}_z^h \vec{\Psi}_z = \vec{\Psi}_z. \quad (71)$$

以下にこの分配行列の性質を調べる。分配行列 \mathbf{R} の例を図 6 に示す。ブロック b 内の積分量を I_b とし、2次元 $x-y$ 詳細メッシュへの分配行列 \mathbf{R}_{xy} の部分行列を r_{xyb} とする。 r_{xyb} は図 6 に示すように 1 列行列であり、その要素を a_{xyj} とすれば r_{xyb} の転置行列 r_{xyb}^t は、

$$r_{xyb}^t = (a_{xy1}, \dots, a_{xyj}, \dots, a_{xyJ})_b \quad (72)$$

となる。ここで、 J はブロック b 内の $x-y$ メッシュ数で、 a_{xyj} は分配率である。分配された軸方向中性子漏洩量を $x-y$ 2次元面で面積積分すると分配前の値になるべきである。すなわち、 r_{xyb} に加算行列の要素 Δ_{xyb}^h を作用すると以下のようになる。

$$\Delta_{xyb}^h \cdot r_{xyb} = (h_{xy1}, \dots, h_{xyJ})_b \cdot (a_{xy1}, \dots, a_{xyJ})^t = 1.0. \quad (73)$$

したがって、各ブロックごとの加算を表現する加算行列 \mathbf{S}_{xy}^h と分配を表現する分配行列 \mathbf{R}_{xy} は図 6 よりわかるように下記の関係を満たす。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{xy}^h \mathbf{R}_{xy} &= \begin{pmatrix} \Delta_{xy1}^h & & & \\ & \Delta_{xy2}^h & 0 & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \Delta_{xyNb}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{xy1} & & & \\ & r_{xy2} & 0 & \\ & & \dots & \\ 0 & & & r_{xyNb} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_{xy1}^h \cdot r_{xy1} & & & \\ & \Delta_{xy2}^h \cdot r_{xyNb} & & \\ & & \dots & \\ & & & \Delta_{xyNb}^h \cdot r_{xyNb} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \dots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (74)$$

すなわち、

$$\mathbf{S}_{xy}^h \mathbf{R}_{xy} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_z^h \mathbf{R}_z = \mathbf{I}. \quad (75)$$

\mathbf{S}_{xy}^h は図 5 に示したように、その要素 Δ_{xyb}^h は $\Delta_{xyb}^h = (h_{xy1}, \dots, h_{xyJ})_b$ であったから、行列 \mathbf{R}_{xy} の要素 r_{xyb} は、

$$(r_{xyb})^t = [a'_{xy1}/h_{xy1}, a'_{xy2}/h_{xy2}, \dots, a'_{xyJ}/h_{xyJ}] \quad (76)$$

で、 a'_{xyj} は下記の関係を満たさなければならない。

$$\sum_j a'_{xyj} = 1.0 \quad (77)$$

この a'_{xyj} を加算前の分布より作ることににより、式 (71) の関係を満たす分配行列を定めることができる。

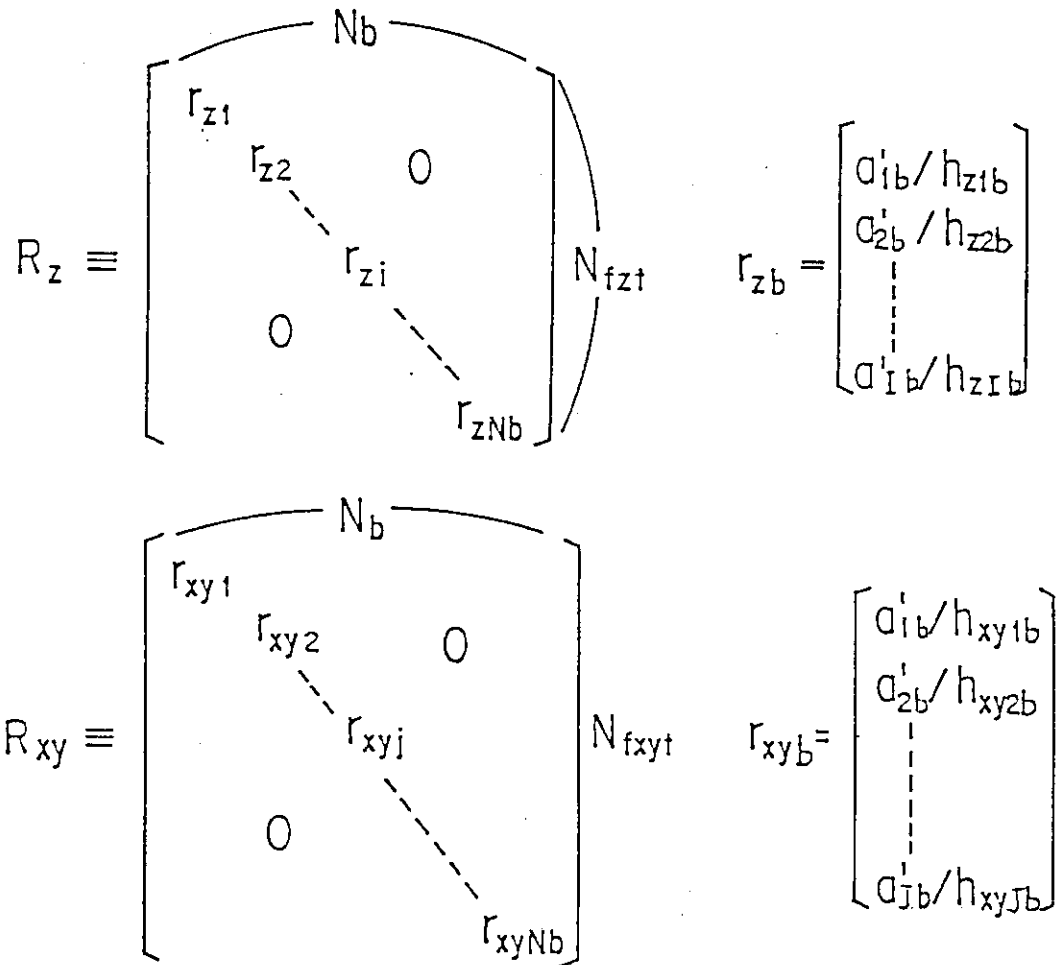
ここで、式 (69) の誤差ベクトルを詳細メッシュに戻す分配行列 $\bar{\mathbf{R}}_z^m$ 及び $\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1}$ について検討する。ブロック積分量 $\mathbf{S}_z^h \vec{\psi}_z^m$ を $\vec{\psi}_z^m$ へ戻す分配行列を \mathbf{R}_z^m とすると、

$$\vec{\psi}_z - \vec{\psi}_z^m = \mathbf{R}_z \mathbf{S}_z \vec{\psi}_z - \mathbf{R}_z^m \mathbf{S}_z^h \vec{\psi}_z^m \quad (78)$$

となり、ブロック積分誤差ベクトルを詳細誤差ベクトルへ戻す分配行列 $\bar{\mathbf{R}}_z^m$ は下記の関係を満たすことが式 (70) と (78) より容易に導かれる。

$$(\bar{\mathbf{R}}_z^m - \mathbf{R}_z) \mathbf{S}_z^h \vec{\psi}_z = (\bar{\mathbf{R}}_z^m - \mathbf{R}_z^m) \mathbf{S}_z^h \vec{\psi}_z^m. \quad (79)$$

すなわち、 $\bar{\mathbf{R}}_z^m$ は \mathbf{R}_z と \mathbf{R}_z^m の中間の分布を要素とする行列を意味する。 \mathbf{R}_z の要素は収束した



$$S_z r_{zi} = 1.0 \longrightarrow S_z R_z = I$$

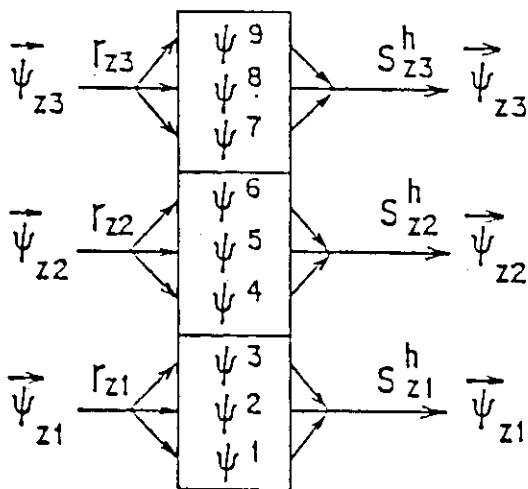


図6 分配行列 R_z 及び R_{xy} の説明図

中性子束 Ψ_z と、また \mathbf{R}_z^m の要素は m 回繰返して求められた中性子束 Ψ_z^m に比例するものである。それゆえ、 $\bar{\mathbf{R}}_z^m$ は $\vec{\Psi}_z$ と $\vec{\Psi}_z^m$ の各要素の中間の分布に比例した量を要素とした行列で、繰返し計算が収束の状態に近づいた場合には、 $\bar{\mathbf{R}}_z^m$ の要素は \mathbf{R}_z 及び \mathbf{R}_z^m の要素にほぼ等しくなる。また、 $\bar{\mathbf{R}}_z^m$ 及び $\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1}$ は式 (69) と (70) より下記の関係を満たすことが容易にわかる。

$$\mathbf{S}_z^h \bar{\mathbf{R}}_z^m = \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_{xy}^h \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} = \mathbf{I} \quad (80)$$

以上の加算行列と分配行列の性質を用いて式 (68) を変形し、1次元チャンネル計算に対応する繰返し行列を求める。

式 (70) を用いて式 (68) を書きなおす。

$$[\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z + \mathbf{S}_z \sum_z + \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_z^h] \bar{\mathbf{R}}_z^m \vec{\mathbf{E}}_z^m = [\gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} \mathbf{S}_{xy}^h \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy}] \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m-1} \quad (81)$$

同様に2次元層計算に対しても下記の関係が成立する。

$$[\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} + \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} + \gamma' \mathbf{L}_z^m \mathbf{S}_{xy}^h] \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m+1} = [\gamma' \mathbf{L}_z^m \mathbf{S}_z^h - \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z] \bar{\mathbf{R}}_z^m \vec{\mathbf{E}}_z^m \quad (82)$$

式 (81) と (82) より $\vec{\mathbf{E}}_z^m$ を消去する。

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m+1} &= [\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} - \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} + \gamma' \mathbf{L}_z^m]^{-1} \\ &\quad \times [\gamma' \mathbf{L}_z^m - \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z^m] \\ &\quad \times [\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z^m + \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m + \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1}]^{-1} \\ &\quad \times [\gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} - \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1}] \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m-1} \end{aligned} \quad (83)$$

新たに行列 \mathbf{H}_1 と \mathbf{H}_2 を導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &\equiv \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z^m + \frac{1}{2} \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z^m, \\ \mathbf{H}_2 &\equiv \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} \end{aligned} \quad (84)$$

式 (84) を用いて式 (83) を書き直す。

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m+1} &= [\mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} + \gamma' \mathbf{L}_z^m]^{-1} \\ &\quad \times [(\mathbf{H}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z^m) - \gamma' \mathbf{L}_z^m] \\ &\quad \times [(\mathbf{H}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m) + \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} - \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m]^{-1} \\ &\quad \times [(\mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1}) - \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} - \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} \\ &\quad + \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} (\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} - \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1})] \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m-1} \end{aligned} \quad (85)$$

ここで、表現形式を見通しのよいものにするために新たに4個の行列 \mathbf{F} , \mathbf{G} , α 及び β を導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} - \alpha &\equiv \gamma' \mathbf{L}_z^m, \\ \mathbf{F} - \alpha &\equiv \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} + \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m, \\ \mathbf{G} - \beta &\equiv \gamma' \mathbf{L}_z^m, \\ \mathbf{G} - \beta &\equiv \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} + \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} - \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} (\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} - \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1}) \end{aligned} \quad (86)$$

式 (86) より以下の表現が得られる。

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} (\gamma' \mathbf{L}_z^m + \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} - \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m),$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} (\gamma' \mathbf{L}_z^m - \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} - \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m), \\ \mathbf{G} &= \frac{1}{2} (\gamma' \mathbf{L}_z^m + \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} + \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} - \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} (\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} - \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1})), \\ \beta &= \frac{1}{2} (\gamma' \mathbf{L}_z^m - \gamma \mathbf{L}_{xy}^{m-1} - \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} + \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} (\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} - \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1})).\end{aligned}\tag{87}$$

さらに2個の行列 $\tilde{\mathbf{H}}_1$ と $\tilde{\mathbf{H}}_2$ を導入する。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}_1 &\equiv \mathbf{H}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m - \alpha, \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 &\equiv \mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} + \beta.\end{aligned}$$

これらの行列を用いると式(85)は下記のように表現できる。

$$\vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m+1} \equiv \mathbf{T} (\mathbf{L}^m) \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m-1},\tag{88}$$

ここで、繰り返し行列 \mathbf{T} は下記のものである。

$$\mathbf{T} \equiv (\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G})^{-1} (\tilde{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{F}) (\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{F})^{-1} (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G}).\tag{89}$$

以下の式で定義される \mathbf{T} と相似の行列 $\tilde{\mathbf{T}}$ を導入する。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}} &\equiv (\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G}) \mathbf{T} (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G})^{-1} \\ &= (\tilde{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{F}) (\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{F})^{-1} (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G}) (\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G})^{-1}.\end{aligned}\tag{90}$$

\mathbf{T} と $\tilde{\mathbf{T}}$ は相似であり、同じ固有値を有しスペクトル半径も同じである。また、一般にスペクトル半径 $\rho(\mathbf{T})$ はノルムより小さいという関係を用いると、

$$\rho(\mathbf{T}) = \rho(\tilde{\mathbf{T}}) \leq \|\mathbf{T}\| < \|(\tilde{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{F}) (\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{F})^{-1}\| \cdot \|(\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G}) (\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G})^{-1}\|$$

なので、

$$\rho(\mathbf{T}) < \|(\tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{I}) (\tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{I})^{-1}\| \cdot \|(\tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{I}) (\tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{I})^{-1}\|\tag{91}$$

となる。

もし、 $\tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{F}^{-1}$ と $\tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{G}^{-1}$ がともに正定値であれば下記の関係が満足される。

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{H}_1 \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{I}) (\mathbf{H}_1 \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{I})^{-1}\| &= \text{Max}_j \left| \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1} \right| < 1, \\ \|(\mathbf{H}_2 \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{I}) (\mathbf{H}_2 \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{I})^{-1}\| &= \text{Max}_i \left| \frac{\nu_i - 1}{\nu_i + 1} \right| < 1,\end{aligned}\tag{92}$$

ここに λ_j, ν_i は行列 $\tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{F}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{G}^{-1}$ の固有値である。したがって、もし $\tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{F}^{-1}$ 及び $\tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{G}^{-1}$ が正定値であれば繰り返し行列 \mathbf{T} のスペクトル半径は1以下となり繰り返し計算は収束する。この収束条件が実際の原子炉の計算においてはほとんどの場合満たされることを次節で示す。

3.2 収束性の具体的検討

前節で示した通り、行列 $\tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{F}^{-1}$ 及び $\tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{G}^{-1}$ が正定値であるということが本繰り返し計算が収束するための十分条件である。この条件について具体的に検討する。

誤差ベクトルの繰り返し式(85)において、繰り返し行列の最終項 $\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} (\bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m-1} - \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1}) \vec{\mathbf{E}}_{xy}^{m-1}$ は2次の微小量であるので以下では無視する。この条件のもとで、収束性に関連する行列 $\tilde{\mathbf{H}}_1, \tilde{\mathbf{H}}_2$

F, **G** は下記のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_1 &= (\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z + \frac{1}{2} \mathbf{S}_z \sum_z) \bar{\mathbf{R}}_z^m - \frac{1}{2} (r' \mathbf{L}_z^m - r \mathbf{L}_{xy}^{m-1}), \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 &= (\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy}) \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} - \frac{1}{2} (r' \mathbf{L}_z^m - r \mathbf{L}_{xy}^{m-1}), \\ \mathbf{F} &= \frac{1}{2} (r' \mathbf{L}_z^m + r \mathbf{L}_{xy}^{m-1} + \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m), \\ \mathbf{G} &= \frac{1}{2} (r' \mathbf{L}_z^m + r \mathbf{L}_{xy}^{m-1} + \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1}). \end{aligned} \tag{93}$$

行列 **F** 及び **G** が対角行列であることを図 7 に例で示す。式 (93) の **F** 及び **G** の右辺の \mathbf{L}_z と \mathbf{L}_{xy} は対角行列であり、 $\mathbf{S} \sum \mathbf{R}$ の項は図 7 に示すように各ブロックの平均除去断面積 (例えば、 $\lambda_{zb} \sum_{zb} r_{zb} = \langle \sum_z \rangle_b$) を要素とする対角行列である。このことにより、 \mathbf{F}^{-1} , \mathbf{G}^{-1} も対角行列であることがわかる。行列 \mathbf{F}^{-1} 及び \mathbf{G}^{-1} が正值であるためには式 (93) よりわかるように任意のブロックについて下記の条件を満たす必要がある。

$$\left. \begin{aligned} r' (\mathbf{L}_z^m)_b + r (\mathbf{L}_{xy}^{m-1})_b - \langle \sum_z \rangle_b > 0, \\ r' (\mathbf{L}_z^m)_b + r (\mathbf{L}_{xy}^{m-1})_b + \langle \sum_{xy} \rangle_b > 0, \end{aligned} \right\} \tag{94}$$

r 及び r' は 0 ~ 1 の値であるから上記条件は、流入する中性子量より除去される中性子量のほうが多いときには満たされる。すなわち、ブロック内に中性子源 (減速されてくる中性子も含む) が存在するときには満たされる。また、 $r' = r = 0$ の場合には常に満足される。このことは、中性子源のないブロックにおいては、 r 及び r' を小さな値にしておいたほうが収束性が保証され易いことを意味する。式 (64) 及び (65) よりわかるように、 $r = r' = 0$ という繰り返し法は、ブロックへの中性子の流入量を中性子源の中に含ませて計算することを意味する。すなわち、中性子源のないブロックを計算するときには、物理的に考えても流入中性子が中性子源の役割をするのであり、繰り返し計算法においても、中性子の流入量を中性子源の項に入れて行うことが望ましい。

行列 \mathbf{F}^{-1} 及び \mathbf{G}^{-1} がともに正值対角行列であるとき、 $\tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{F}^{-1}$ 及び $\tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{G}^{-1}$ が正定値となるためには $\tilde{\mathbf{H}}_1$ 及び $\tilde{\mathbf{H}}_2$ が正定値であればよい。以下に $\tilde{\mathbf{H}}_1$ 及び $\tilde{\mathbf{H}}_2$ が正定値となる条件を求める。

$\mathbf{S}_z \mathbf{R}_z$ 及び $\mathbf{S}_{xy} \mathbf{R}_{xy}$ は式 (75) に示したように単位行列である。したがって、 $\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \mathbf{R}_z$ 及び $\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \mathbf{R}_{xy}$ は \mathbf{D}_z 及び \mathbf{D}_{xy} とそれぞれ相似である。 \mathbf{D}_{xy} は式 (45) 及び (46) よりわかるように、 l 行目の行列要素は、

$$-a_{kl}, -b_{kl}, p_{kl}, -c_{kl}, -d_{kl} \tag{95}$$

である。ここで、 p_{kl} は対角要素でその値は式 (43) に示したように、

$$p_{kl} = a_{kl} + b_{kl} + c_{kl} + d_{kl} \tag{96}$$

である。すなわち、行列 \mathbf{D}_{xy} の非対角要素の絶対値の行和がちょうど対角要素と一致している。したがって式 (93) の $\tilde{\mathbf{H}}_1$ 及び $\tilde{\mathbf{H}}_2$ の対角要素である右辺第 2 項及び第 3 項の和が正であれば $\tilde{\mathbf{H}}_1$ と $\tilde{\mathbf{H}}_2$ は正定値となる。

すなわち、任意のブロックについて下記の式 (97) が成立することが正定値となる条件である。

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{2} \langle \sum_z \rangle_b - \frac{1}{2} \{ r' (\mathbf{L}_z^m)_b - r (\mathbf{L}_{xy}^{m-1})_b \} > 0, \\ \delta_2 &= \frac{1}{2} \langle \sum_{xy} \rangle_b + \frac{1}{2} \{ r' (\mathbf{L}_z^m)_b - r (\mathbf{L}_{xy}^{m-1})_b \} > 0, \end{aligned} \right\} \tag{97}$$

$$= \begin{matrix} S_z^h \Sigma_z R_z \\ N_{fzt} \\ \left[\begin{array}{ccc} \Delta_{z1}^h & & \\ & \Delta_{z2}^h & \\ & & \ddots \\ & & & \Delta_{zb}^h \\ & & & & \Delta_{zn}^h \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} N_{fzt} \\ \left[\begin{array}{ccc} \Sigma_{z1} & & \\ & \Sigma_{z2} & \\ & & \ddots \\ & & & \Sigma_{zb} \\ & & & & \Sigma_{zn} \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} N_b \\ \left[\begin{array}{ccc} r_{z1} & & \\ & r_{z2} & \\ & & \ddots \\ & & & r_{zb} \\ & & & & r_{zn} \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\Delta_{zb}^h = (h_{z1}, h_{z2}, h_{z3})_b \quad \Sigma_{zb} = \begin{pmatrix} \Sigma_{z1b} & & 0 \\ 0 & \Sigma_{z2b} & \\ & & \Sigma_{z3b} \end{pmatrix} \quad r_{zb} = \begin{bmatrix} a'_{1b}/h_{z1} \\ a'_{2b}/h_{z2} \\ a'_{3b}/h_{z3} \end{bmatrix}$$

$$S_z^h \Sigma_z R_z = \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} (h_{z1}, h_{z2}, h_{z3}) & & \\ & \ddots & \\ & & (h_{z1}, h_{z2}, h_{z3})_b \\ & & & \ddots \\ & & & & (h_{z1}, h_{z2}, h_{z3})_n \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} (&) & 0 \\ & \left(\begin{array}{c} \Sigma_{z1b} a'_{1b}/h_{z1} \\ \Sigma_{z2b} a'_{2b}/h_{z2} \\ \Sigma_{z3b} a'_{3b}/h_{z3} \end{array} \right) & (&) \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} (\Sigma_{z11} a'_{11} + \Sigma_{z21} a'_{21} + \Sigma_{z31} a'_{31}) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & (\Sigma_{z1b} a'_{1b} + \Sigma_{z2b} a'_{2b} + \Sigma_{z3b} a'_{3b}) \\ & & & \ddots \\ & & & & (&) \end{array} \right] \end{matrix}$$

図7 加算行列，対角行列及び分配行列の積演算例

式 (97) において $r=r'=0$ なら $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ となり $\tilde{\mathbf{H}}_1$ 及び $\tilde{\mathbf{H}}_2$ は正定値である。 r 及び r' が零でない場合には式 (97) の条件は除去断面積と漏洩係数の競争関係により定まる。最も条件が厳しくなるのは $r=r'=1$ で $(\mathbf{L}_z^m)_b$ と $(\mathbf{L}_{xy}^{m-1})_b$ の符号が異なるときである。すなわち、軸方向が漏洩で、径方向が流入の場合または、その逆の場合である。その際、漏洩及び流入中性子の量が除去中性子の量より大きい場合には繰り返し計算の収束の保証がなくなる。この現象は、原子炉の計算において、炉心と反射体の境界近傍のブロックで起こる可能性がある。

一般的にいて、この方法で $r=r'=1$ とした場合においては、ブロック内の除去中性子の量が漏洩中性子の量より大きいときは安定である。中性子束分布が極端に変化する場所は別として、なだらかな分布を仮定すると、ブロック内の中性子除去量はブロックの体積に比例し、漏洩量は表面積に比例する。すなわち、ブロックが大きいほうが比較的安定して収束する。この除去断面積の大きな系や大きなブロックに対して収束が良好であると云うことは我々の計算コードの使用経験と一致する。

以上は、収束のための十分条件に着目した検討であるが、これは必ずしも必要条件ではない。そこで、物理的観点から再度繰り返し行列を検討する。繰り返し行列 $\tilde{\mathbf{T}}$ のノルムは前に見た通り以下の式で表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} &= \| (\tilde{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{F})(\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{F})^{-1} \| \cdot \| (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G})(\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G})^{-1} \| \\ &\leq \| (\tilde{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{F}) \| \cdot \| (\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{F})^{-1} \| \cdot \| (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G}) \| \cdot \| (\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G})^{-1} \| . \end{aligned} \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{F}) &= \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z^m - r' \mathbf{L}_z^m , \\ (\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{F}) &= \mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z^m + \mathbf{S}_z \sum_z \bar{\mathbf{R}}_z^m + r \mathbf{L}_{xy}^{m-1} , \\ (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G}) &= \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} - r' \mathbf{L}_{xy}^{m-1} , \\ (\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G}) &= \mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} + \mathbf{S}_{xy} \sum_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}^{m+1} + r' \mathbf{L}_z^m . \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

上で問題とした $r=r'=1$ の場合について検討する。繰り返し計算において、解が収束に近づいたときには、 \mathbf{R}_z^m 、及び \mathbf{R}_{xy}^m は \mathbf{R}_z 及び \mathbf{R}_{xy} に近づき、 \mathbf{L}_z^m 及び \mathbf{L}_{xy}^{m-1} は \mathbf{L}_z 及び \mathbf{L}_{xy} に近づく。 $\mathbf{S}_z \mathbf{D}_z \bar{\mathbf{R}}_z$ 及び $\mathbf{S}_{xy} \mathbf{D}_{xy} \bar{\mathbf{R}}_{xy}$ は \mathbf{L}_z 及び \mathbf{L}_{xy} であるので、繰り返し計算で中性子束が収束に近づくにつれて $(\tilde{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{F})$ 及び $(\tilde{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{G})$ のノルムは小さくなるのが期待される。 $(\tilde{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{F})$ と $(\tilde{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{G})$ は各ブロックの全除去量を表わしており中性子源の量と一致する。したがって、繰り返し計算における漏洩係数の収束値との差が小さいか、またはその収束に与える影響の小さい (除去断面積に比して漏洩係数が小さい) ブロック及び中性子源の大きいブロックに対しては $r=r'=1$ とすると繰り返し行列 $\tilde{\mathbf{T}}$ のノルムが小さくなり速く収束する。

以上の検討結果より、加速因子 r の値としては、中性子源が多くまた除去断面積の大きな炉心の中のブロックに対しては $r=r'=1$ を使用し、反射体領域については $r=r'=0$ か、または小さい値を使用するとよいことがわかる。

4. 中性子漏洩量繰返し法による具体的な計算法の開発

4.1 開発した具体的な計算法の概要

本研究で提案する中性子漏洩量繰返し法の原理について前章までに述べてきた。本章では、この方法を実際の原子炉の炉心特性解析に適用するために新たに開発した具体的な計算法について述べる。対象となる原子炉の型式により計算法は少しずつ異なっているが、その中心となる中性子束分布を計算する部分は本研究の方法に基づいている。開発した計算コードの概要を図8に示す。

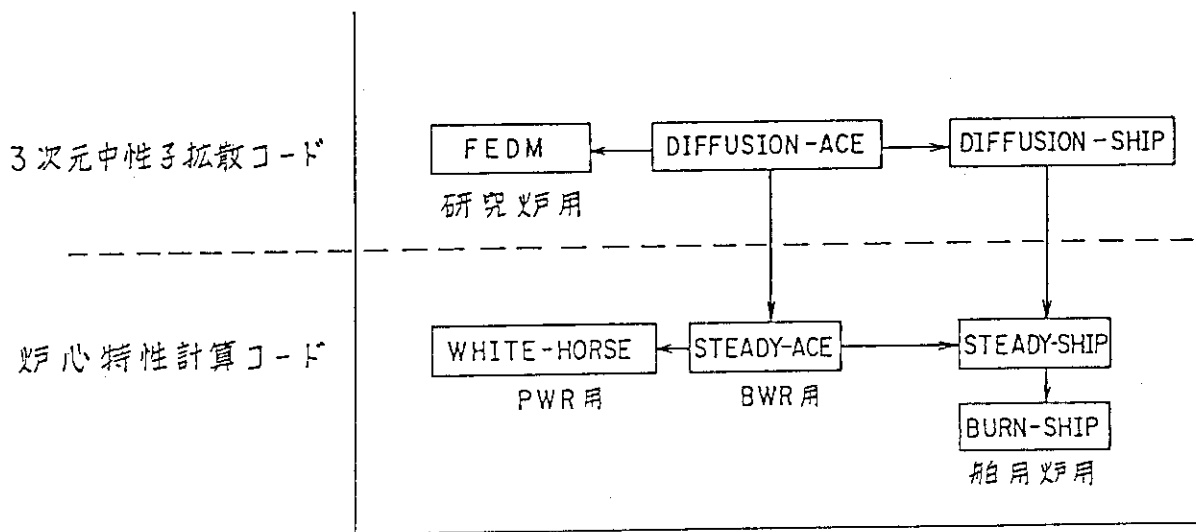


図8 漏洩量繰返し法を用いて作成した計算コード群の相関図

まず、基本的な計算法として本方法に基づく3次元中性子拡散コード **DIFFUSION-ACE**¹⁶⁾を開発した。この計算コードに炉内熱水力特性計算コードを結合し、BWRの炉心特性解析コード **STEADY-ACE**¹⁷⁾を作成した。これは、核定数の処理から核燃料の燃料計算までを含む総合システム **BWR-ACE**の一部をなすものである。このシステムの中の核定数処理コードは、他の炉型の中性子拡散計算のための組定数の算出にも使用される。次に、BWR炉心特性解析コードを基にPWRの炉心特性解析用コード **WHITE-HORSE**を開発した。また、**DIFFUSION-ACE**及び**STEADY-ACE**に修正と改良を加え船用原子炉の炉心特性解析コードシリーズ **DIFFUSION-SHIP**、**STEADY-SHIP**等を開発した。さらに幾何形状が複雑な研究用原子炉の解析に使用できる3次元中性子拡散コード **FEDM**を開発した。以下に作成した計算コードの概要を説明する。

4.2 軽水型発電炉炉心特性解析法の開発

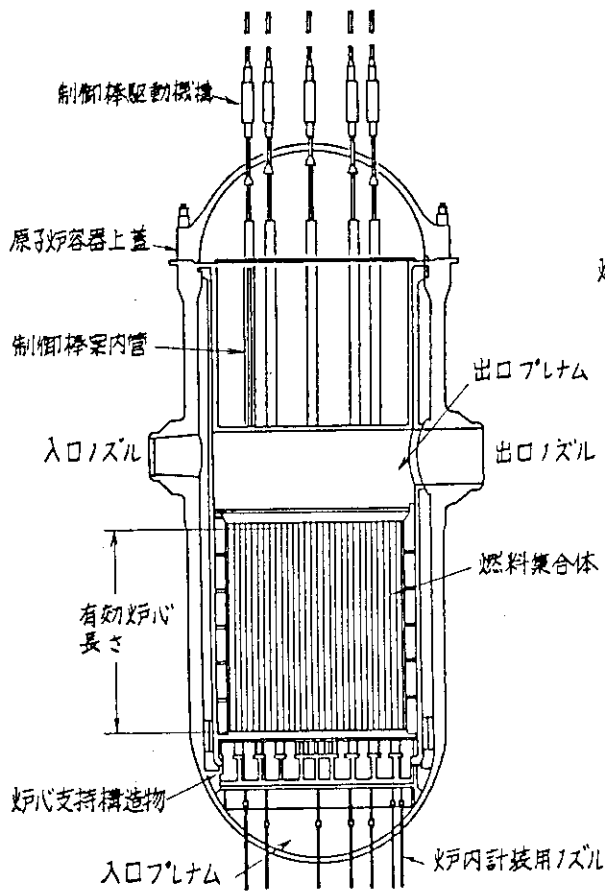
軽水型発電炉の炉心特性を解析するために、BWR 用と PWR 用の2つの計算コードを開発した。コード作成にさいし、それぞれの炉心構造の特徴を考慮した。計算法の説明上必要なので、両炉心の構造を図9-1)~9-4)に示す。図9-1)は PWR の垂直断面図である。冷却材は入口ノズルから入り、入口プレナムを経て、燃料集合体内を上昇し、出口ノズルから蒸気発生器へ行く。制御棒はクラスタ型で炉心上方より集合体内に挿入される。ただし、核的反応度の制御は冷却材中のホウ素化合物の濃度により行うので、原子炉運転時には一般に制御棒は引き抜きの状態になっている。図9-2)は原子炉容器の水平断面図で、燃料集合体は炉心シュラウドにより取り囲まれている。図9-3)は燃料集合体を示す。制御棒が挿入される集合体と挿入されない集合体の2種類があり、挿入されない集合体には可燃性毒物棒が装荷されている。BWR でも冷却材である軽水の流れはPWR と同様に、入口ノズルから入り、入口プレナムを経て炉心に入る。炉心に入った冷却材は、燃料棒により加熱されて沸騰し冷却材ボイドを発生する。また BWR においては、核的反応度の制御は制御棒により行われ、原子炉運転時には制御棒は炉心内に挿入されている。図9-4)は BWR の燃料集合体と十字型制御棒を示す。制御棒は PWR と異なり、燃料集合体間に炉心下部より挿入される。集合体は数種類の濃縮度の異なる燃料棒及びガドリニアウラニア燃料棒を含む。また、チャンネル、ボックスにより側面を覆われ、他の集合体と水力的に分離されている。

以上のような PWR 及び BWR の炉心の構成を考慮して、それぞれに適応した炉心特性解析コードを開発した。炉心を構成する燃料集合体は構成要素が単純でないので、予め燃料集合体内の中性子束分布を計算し、それを重みとして集合体平均の組定数を算出する。炉心を、図9-2)に示すように、燃料集合体を1つのチャンネルとして分割すれば、チャンネル内の組定数として集合体平均の組定数を用いることができる。また、燃料は集合体単位で取り扱われ、その燃焼管理も集合体毎に行われるので、1つの集合体を1つのチャンネルとして炉心を分割する計算モデルは、実際の原子炉の運転管理や燃焼管理の方式ともよく対応する。

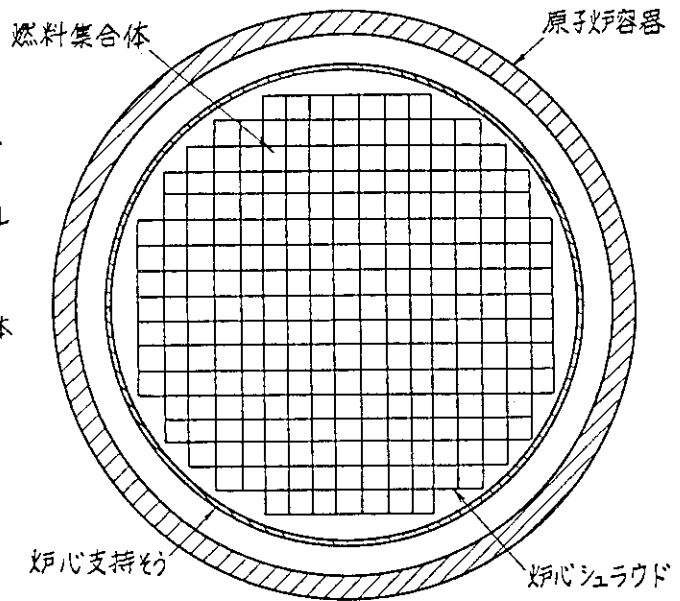
BWR では、運転中に炉心内に制御棒が挿入されていること、炉心の中に冷却材ボイド分布が発生することが特徴である。各チャンネルからの径方向への中性子漏洩量は制御棒の配置に強く左右されるので、制御棒挿入位置を考慮して、3次元拡散計算に用いる層分割を定める必要がある。また、炉内の中性子束分布及び熱出力分布は冷却材ボイド分布の影響を強く受ける。冷却材ボイド分布は熱出力分布を基に算出されるので、これら2つの量を求めるには交互に繰返し計算を行う必要がある。

PWR では、運転時には制御棒は一般に炉心から全引き抜きの状態にあり、また炉心は BWR より高い圧力まで加圧されているので、BWR の場合とは異なり冷却材ボイドの発生がない。したがって、PWR では熱水量と中性子束分布との関連は弱く、中性子束分布の計算では、炉心内冷却材温度及び燃料棒温度による反応度効果のみ考慮すればよい。これらの結果、各燃料集合体の軸方向出力分布は相似形に近い形状をし、その軸方向変化もなだらかである。このため軸方向漏洩係数の変化が小さく、少ない層分割数でよい近似計算ができる。

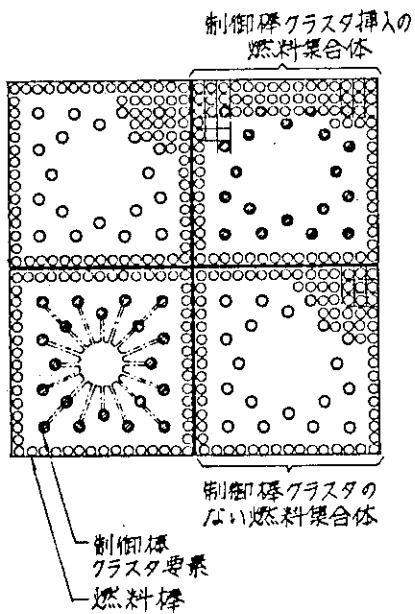
以上のような各炉心の特徴と本研究の方法の特徴を勘案して、BWR 炉心特性用コードとして



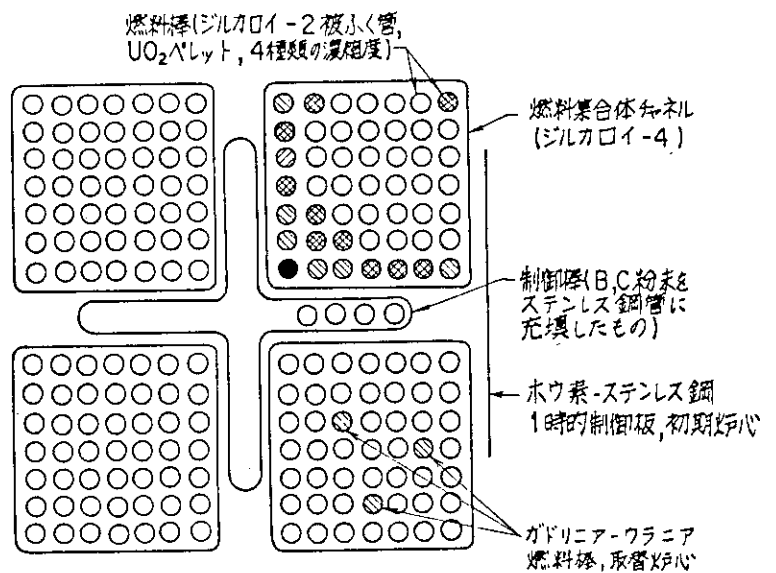
(1) PWR原子炉の垂直断面



(2) PWR原子炉容器の水平断面



(3) PWRの制御棒クラスタ挿入燃料集合体と制御棒クラスタ無し燃料集合体の断面



(4) BWRの代表的燃料基本単位

図9 軽水型発電炉の炉心構造

BWR-ACE を、また、PWR 用として WHITE-HORSE コードを開発した。

BWR-ACE の計算の流れを図 10 に示す。BWR-ACE は、評価済み核データファイル ENDF/B4 より多群定数ライブラリ MGCL を作成する MGCL-ACE、MGCL を用いてセル平均断面積を計算するコード CELL-ACE 及び炉内核熱水力特性を計算するコード STEADY-ACE¹⁷⁾ よりなる。STEADY-ACE は、CELL-ACE の結果を用いて炉心各部の中性子断面積を計算するコード CROSS-ACE、炉内 3 次元中性子束分布及び熱出力分布を計算するコード DIFFUSION-ACE、各流路チャンネルへの冷却材流量配分、冷却材の温度及びボイド量を計算するコード HYDRO-ACE 及び炉内燃焼度分布を計算するコード BURN-ACE よりなる。これらのコードのうち、本研究で新たに提案した漏洩量の繰返し計算手法は DIFFUSION-ACE の中に生かされている。このコードシステムの構成は、PWR の炉心特性解析コード及び船用原子炉の炉心特性解析コードにおいても同じである。

PWR の炉心特性解析コード WHITE-HORSE は上記 BWR-ACE の STEADY-ACE に相当するもので、基本部分は、本研究で導かれた DIFFUSION-ACE に、PWR の熱水力計算機能及び燃焼計算機能を追加したものである。

4.3 船用原子炉の炉心特性解析法の開発

現在わが国に設置されている船用原子炉は型式としては PWR であるが、その炉心構造は図 11 に示すように、発電用 PWR の場合とは異なり、十字型制御棒により核的反応度の制御を行っている。また、炉心体積は発電炉に比して遙かに小さく、炉心内の燃料集合体の数も少ない。しかも、燃料集合体中には可燃性毒物棒を含み、またその周囲は制御棒（または制御棒ホルダー）等を含む複雑な構成になっている。

以上の結果、炉心内の中性子束分布は、BWR に匹敵するように 3 次元的に複雑な分布をしており、集合体内の出力分布も炉心の全体的な中性子束分布の影響を強く受ける。この集合体内の出力ピーキングは局所出力ピーキングとよばれ、原子炉の熱出力を制限する重要な量であり高精度で計算することが要求される。しかし、集合体及びそれに隣接する構造材は複雑な構造をしており、局所出力ピーキングを全炉心計算の過程で算出することは従来の方法では困難であった。

このような特徴を持つ炉心の中性子束分布を計算するために DIFFUSION-ACE コードを船用炉の計算に便利なように修正し、DIFFUSION-SHIP コードを作成するとともに、このコードに船用炉の熱水力計算機能を追加して STEADY-SHIP コードを作成した。このコードでは、軸方向及び径方向はそれぞれ詳細メッシュ計算を行うので、燃料集合体セルを含むブロック境界の中性子束に関する境界条件を精度良く算出することができる。この境界条件を用いて注目ブロック内の中性子束分布及び出力分布を再度詳細に計算するコード LOCAL-FINE を開発し STEADY-SHIP コードに組込んだ。このことにより局所出力ピーキングが、全炉心の中性子束分布の影響を考慮に入れて高精度で計算できるようになった。

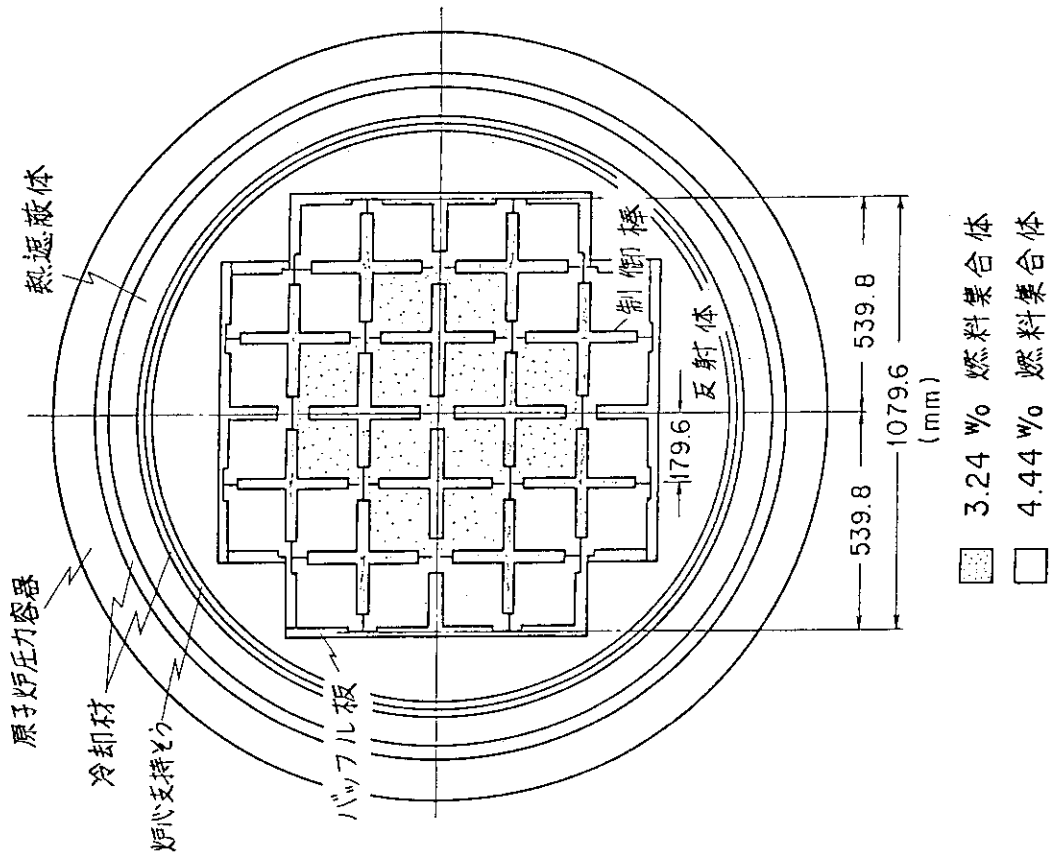


図 11 対象とした船用原子炉の水平断面図

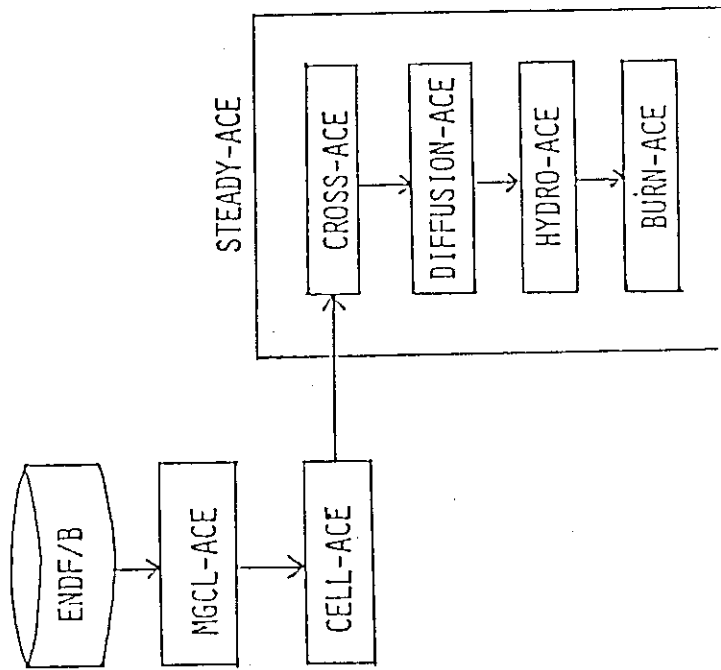


図 10 BWR の炉心特性解析のために漏洩量繰返し法を用いて開発した計算コードシステム BWR-ACE の概要

4.4 研究用原子炉の炉心特性解析法の開発

研究用原子炉は、通常軸方向については単純な幾何形状をしているが径方向については必ずしも単純ではないことが多い。その一例として、高中性子束の研究用原子炉として検討されている炉心の構造を図12に示す。この炉心は二つの円柱形状をした炉心よりなっているので、層計算を直交座標系を用いて行っても円柱座標系を用いて行っても近似の精度は悪い。Z軸方向1次元計算は差分法による階差式を用いて行うことができるが、径方向2次元計算は種々の幾何形状に対応できるように有限要素法を用いることが望ましい。本方法では、1次元チャンネル計算と2次元層計算を結びつけている量がブロック内で積分された中性子漏洩量と中性子源の大きさであり、ブロックの幾何形状が両者の結合方式に直接影響を与えない。この特徴を生かして、チャンネル計算を1次元差分法で行い、層計算を2次元有限要素法で行うことにより3次元中性子束分布を計算するコード **FEDM**¹⁴⁾を開発した。なお、**FEDM**の中で使用している2次元有限要素法は2次曲線を高精度で近似できるアイソパラメトリック法¹⁸⁾を用いている。この方法を中性子拡散計算に適用したのは本コードが初めてであり、その詳細については附録2に記す。

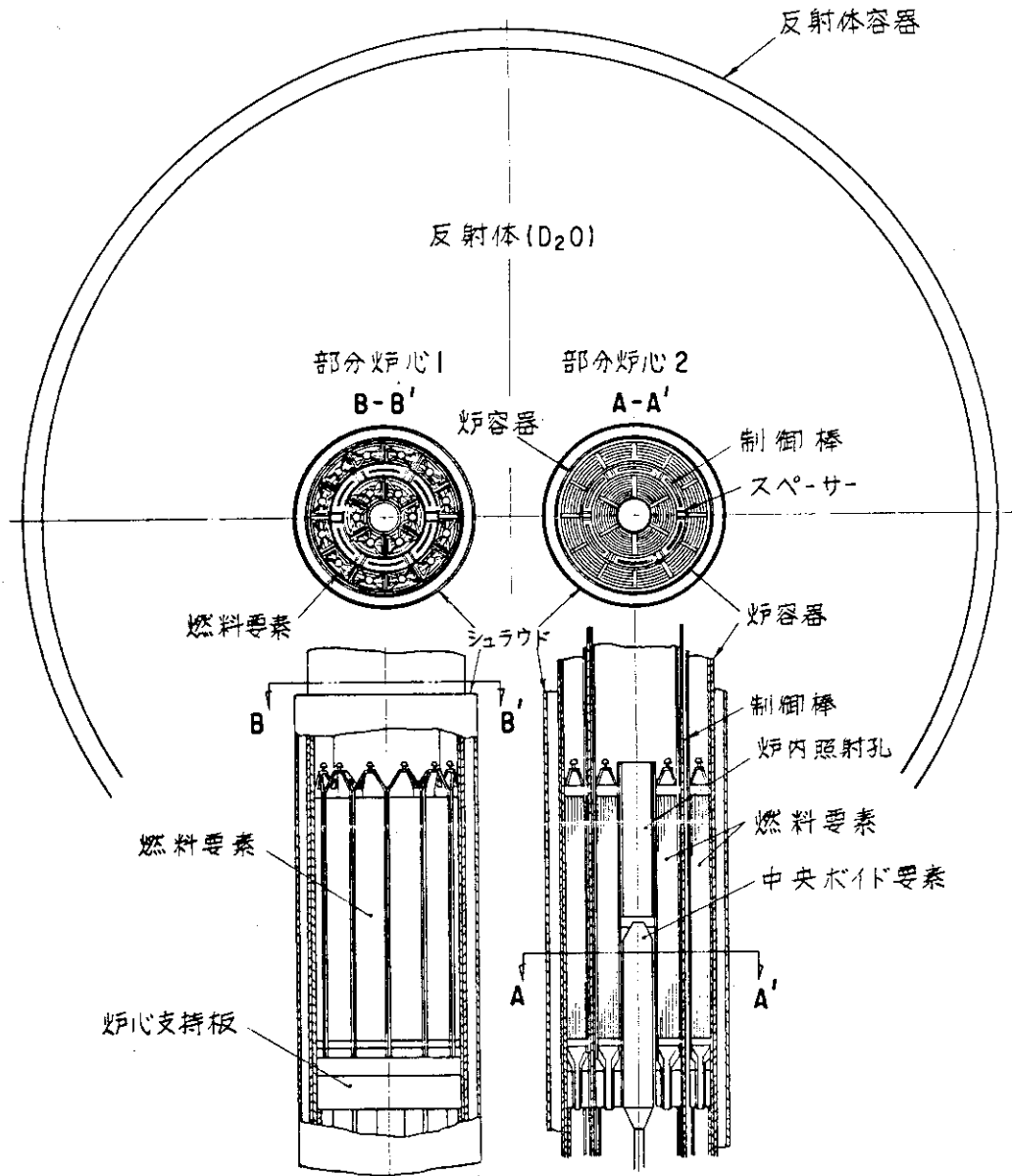


図 12 対象とした高中性子束炉の炉心概念図

5. 中性子漏洩量繰返し法による原子炉炉心特性解析

5.1 軽水型発電用原子炉の炉心特性解析

(1) DIFFUSION-ACE による計算とその結果

中性子漏洩量繰返し法を用いて新たに開発した3次元拡散コード **DIFFUSION-ACE** の計算性能を検証するために、小形の原子炉の炉心の中性子束分布及び中性子実効増倍率を計算し、従来の詳細メッシュ有限差分法による3次元拡散コード **ADC** の計算結果と比較した。

計算対象は図13に示すような小形のBWR炉心を模擬したもので、ブロックの大きさは1辺12cmの立方体とした。このブロックの断面積は通常のBWRの1燃料集合体の断面積に近いものである。炉心は2つの領域に分割され、周囲は軽水の反射体で取り囲まれている。炉心の第1領域には制御棒の挿入を模擬した強い吸収材が含まれており、第2領域にはBWRの燃料集合体と近い材質のものが含まれている。

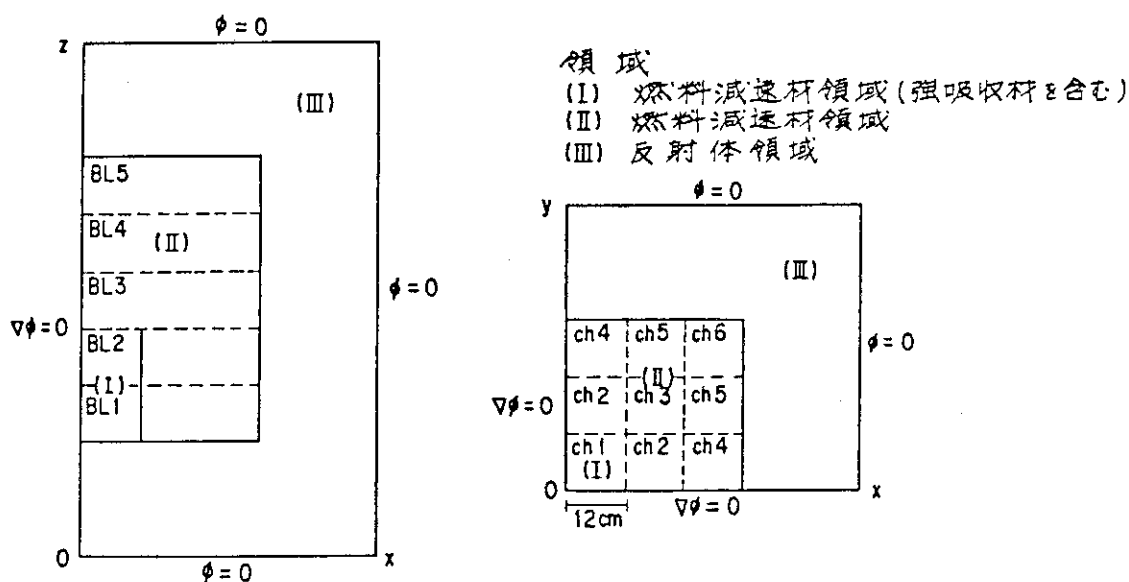


図13 DIFFUSION-ACEコードの検証計算に使用した小形軽水型発電炉模擬炉心

炉心の Z 軸方向を 5 個の層に分割し、x-y 面を 36 のチャンネルに分割した。ただし、拡散計算は炉心の対象性を仮定して 1/4 炉心について行った。炉心の軸方向と径方向をともに等間隔にメッシュ分割した。メッシュ幅 6, 4 及び 2 cm の 3 種類について計算した。中性子エネルギー群数は 3 とした。

この計算により下記のような結果が得られた。

- ① 表 2 にメッシュ幅 2 cm で計算したときの各ブロックからの中性子漏洩係数を示す。 L_z 及び L_{xy} はそれぞれ軸方向及び径方向の漏洩係数である。漏洩係数が負符号になっているものは中性子の流入を意味する。ブロック番号 1 及び 2 は反射体に接しているため、第 3 群 (熱中性子群) の軸方向漏洩係数 ($L_z - 3G$) は負符号になっている。また、4 番チャンネルも反射体に接しているため第 3 群の径方向漏洩係数 ($L_{xy} - 3G$) が負符号になっている。第 1 チャンネルのブロック 4 と 5 は強吸収材を含むため、第 2 群及び第 3 群の中性子の流入があり漏洩係数は負になっている。この表よりわかるように、漏洩係数は 3 次元的に大きく変化している。例えば、1 番チャンネルの Z 軸方向を計算するにあたっては、径方向の漏洩係数 L_{xy} を用いる必要があるが、 $L_{xy} - 1G$, $2G$ 及び $3G$ の値が各ブロック毎に大きく変化している。このことより、Z 軸方向の中性子束分布を精度よく求めるためには径方向の漏洩係数を高精度で求める必要があることが理解できる。従来の中性子束分布合成法による計算では、軸方向 1 次元計算は径方向漏洩係数を一定値として行われる場合が多かった。ところがこの計算例に示すような径方向漏洩係数の軸方向分布が顕著な体系では、漏洩係数を一定値とする計算は精度が悪いと考えられる。
- ② 種々のメッシュ幅に対する固有値の計算結果を表 3 に示す。3 次元詳細メッシュ計算コード ADC では、メッシュ幅が 2 cm の場合にはメッシュ数が膨大となりすぎて、使用計算機容量の制限値を越えるため計算が実行できなかった。DIFFUSION-ACE を開発した目的の 1 つは、使用する計算メッシュ数を減少させ、大形動力炉の中性子束分布の計算を拡散方程式の差分近似で求めることを可能にすることであり、この結果からみて、その目的は達成されているといえる。メッシュ幅が 4 cm の場合には、本計算法と ADC による中性子増倍率の計算の差は 0.3% とよく一致している。
- ③ DIFFUSION-ACE における中性子源繰返し計算毎の中性子束繰返し回数を表 4 に示す。第 1 回目の中性子源繰返し計算において、中性子束の繰返し計算数が多いのは初期中性子束分布の仮定がよくなかったためであり、それ以降の繰返し数は少ない。また、固有値はなめらかに収束していることがわかる。

以上の結果、本研究による計算方法を用いた DIFFUSION-ACE コードによって複雑な 3 次元体系中の中性子束分布を少ない計算機容量で精度よく計算することが可能であることがわかった。また、繰返し計算の収束も速やかで、3 次元拡散コードとして有効であることが確認できた。

(2) STEADY-ACE による計算とその結果

BWR 炉心のように中性子拡散計算と熱水力計算を交互に行う必要がある場合に STEADY-ACE によって安定して中性子束分布及び熱出力分布を算出することができることを検証するために、日本原子力研究所に設置されている動力試験炉 (JPDR-II) の炉心特性を解析した。

JPDR-II は熱出力 90 MW の BWR であるが、ここに解析した例は熱出力 45 MW で運転

表2 DIFFUSION - ACEコードによる小形軽水型発電炉模擬炉心内中性子漏洩分布の計算結果

第1番チャンネル						
ブロック番号	Lz-1G ^a	Lz-2G	Lz-3G	Lxy-1G ^c	Lxy-2G	Lxy-3G
5	0.83996E-02 ^b	0.18677E-02	-0.53751E-02	0.38970E-02	0.17654E-02	0.72240E-03
4	0.36950E-02	0.16729E-02	0.67087E-03	0.37650E-02	0.17073E-02	0.69995E-03
3	0.38938E-02	0.27806E-02	0.15437E-02	0.28502E-02	0.11370E-02	0.39226E-03
2	-0.51401E-03	-0.20132E-02	-0.18460E-02	0.50583E-03	-0.31031E-02	-0.29831E-02
1	0.46154E-02	-0.11543E-03	-0.58900E-02	-0.13801E-02	-0.43332E-02	-0.36464E-02
第2番チャンネル						
ブロック番号	Lz-1G	Lz-2G	Lz-3G	Lxy-1G	Lxy-2G	Lxy-3G
5	0.82919E-02	0.18228E-02	-0.53905E-02	0.39830E-02	0.18055E-02	0.76513E-03
4	0.35177E-02	0.16083E-02	0.65513E-02	0.39317E-02	0.17846E-02	0.72066E-03
3	0.31582E-02	0.15211E-02	0.67025E-03	0.41500E-02	0.38379E-02	0.82681E-03
2	0.12993E-02	0.45610E-03	0.10264E-03	0.49640E-02	0.38379E-02	0.22115E-02
1	0.53817E-02	0.53846E-03	-0.58008E-02	0.53652E-02	0.40200E-02	0.22991E-02
第4番チャンネル						
ブロック番号	Lz-1G	Lz-2G	Lz-3G	Lxy-1G	Lxy-2G	Lxy-3G
5	0.82184E-02	0.17770E-02	-0.48650E-02	0.96783E-02	0.18904E-02	-0.55048E-02
4	0.32815E-02	0.14869E-02	0.62615E-03	0.98003E-02	0.19745E-02	-0.60292E-02
3	0.27706E-02	0.12540E-02	0.50996E-03	0.10364E-01	0.22170E-02	-0.59758E-02
2	0.21418E-02	0.97196E-03	0.42223E-03	0.11055E-01	0.24923E-02	-0.59518E-02
1	0.61811E-02	0.89731E-03	-0.50590E-02	0.11767E-01	0.27714E-02	-0.53591E-02

a : Lz-1G = Z軸方向への第1群中性子漏洩係数,

b : 0.83996 x 10⁻² を意味する.

c : Lxy-1G = x-y方向への第1群中性子漏洩係数.

表3 漏洩量繰返し法による計算コード DIFFUSION-ACE と有限差分法によるADCコードで算出された固有値と計算時間の比較

メッシュ幅 (cm)	固有値		FACOM-230-75による 計算時間(sec)	
	DIFFUSION-ACE	ADC	DIFFUSION-ACE	ADC
2	1.1272	*	219	*
4	1.1285	1.1255	111	267
6	1.1302	1.1272	73	81

* 計算機の容量制限を越し実行できず

表4 DIFFUSION-ACEコードの計算における各中性子源繰返し毎の中性子束繰返し回数と固有値の推移

中性子源繰返し回数	中性子束繰返し回数			固有値
	エネルギー群			
	1群	2群	3群	
1	9	3	3	1.09721
2	4	3	2	1.13017
3	3	2	2	1.12849
4	2	2	2	1.12792
6	2	1	1	1.12740
8	2	1	1	1.12723
10	2	1	1	1.12719
15	1	1	1	1.12717
20	1	1	1	1.12718
25	1	1	1	1.12718
28	1	1	1	1.12718

した際に得られた実測値である。図 14 に示すように、燃料集合体は 72 体で、制御棒は 16 本中 4 本が運転中に炉心に挿入されている。出力分布の測定値は図中⑪～⑬に示される炉内中性子監視系の測定値より推定したものである。計算は炉心を 12 の層に分割し、また各集合体を 1 チャンネルとして行った。計算ではまず、熱出力分布を仮定しそれに対応する冷却材ボイド分布を算出する。次に、そのボイド分布に対応する熱出力分布を算出する。以下にこの手順を収束するまで繰返す。

表 5 に熱出力分布と冷却材ボイド分布計算の繰返し数を示す。最初の熱出力分布の計算には 8 回の中性子源繰返し計算を要しているが、2 回目以降は中性子源分布の出発値として前回の収束値が用いられること及び冷却材ボイド分布の繰返し毎の変化が小さくなることの 2 つの理由により、繰返し回数が減少している。また、各繰返し計算毎の固有値及び熱出力分布の相対誤差もなめらかに収束している。この計算例は、熱出力分布が大きく歪んでいる BWR のような原子炉の炉心計算においても、本方法による中性子束分布の計算がうまく収束していることを示すものである。

炉内熱出力分布の計算値を実測値と比較した例を図 14 に示す。この計算結果では、深く挿入された制御棒に近接した燃料集合体及び反射体と隣接した熱出力の小さい燃料集合体で計算値と実測値との間に 20 % 近い差異を生じているが、他の位置の集合体では 10 % 以下で一致している。

以上の結果より、本研究による計算方法を用いることによって、BWR 炉心内の中性子束分布及び出力分布の計算がなめらかに収束することが確認できた。なお、BWR の炉心特性解析が差分法による拡散コードを用いて行われたのはこの計算が世界で初めてである。

(3) WHITE-HORSE による計算とその結果

本研究の方法によって新たに開発した WHITE-HORSE コードが PWR 型発電炉の解析に使用できることを確認するために、ある PWR 型発電炉を定格出力で運転した状態での出力分布の解析を行った。

対象とした原子炉は電気出力 50 万 kW の PWR で、炉心に含まれる燃料集合体は 121 体である。また、炉心は燃焼初期のもので、定格出力運転状態にある。核分裂生成物のうち ^{135}Xe と ^{149}Sm の蓄積のみを考慮した。

計算は燃料集合体 1 体を 1 チャンネルとした。各チャンネルを軸方向に 24 のブロックに分割し、各ブロック毎にそのブロックの状態に対応した組定数を与えて、1 次元拡散計算を行った。制御棒は全部引き抜かれており軸方向中性子束分布はなだらかなので、層分割数は少なくてもよかった。しかし、核物裂生成物は軸方向に分布しているので、層計算に使用した組定数は、1 次元計算結果を用いて層毎に平均したものを用いた。

出力分布の計算結果を図 15 及び図 16 に示す。図 15 は代表チャンネルの Z 軸方向出力分布である。全体として正弦分布に近い形をしているが、冷却材の温度分布の影響により下方に少し歪んでいる。分布の途中でへこみが生じているのは燃料集合体のスペーサーの影響である。計算結果はこれらの傾向をすべてよく表わしている。また、実測値との一致も非常に良好である。図 16 は各燃料集合体の発熱割合を示している。実測値と計算値の差は 5 % 以内で一致は良好である。外周部で計算値が実測値より大きく算出されているのは、本計算では炉心外周を取り

---	実測値 (X)	○	インコアモニター
---	計算値 (Y)		
---	偏差 $\{(Y-X)/X\} \times 100$		
IFA	計装燃料集合体		

				0.96	0.95					
				1.06	1.07					
				10.4	12.6					
	0.66	0.91	1.10	1.26	1.10	1.10	0.91	0.66		
	0.73	0.97	1.15	1.22	1.22	1.19	1.01	0.77		
	10.6	6.6	4.5	-3.2	10.9	8.2	11.0	16.7		
	0.92	0.93	1.10	1.14	1.16	1.04	1.12	0.94		
	0.97	0.99	1.08	1.11	1.14	1.05	1.15	1.02		
	5.4	6.5	-1.8	-2.6	-1.72	0.96	2.7	8.5		
	1.12	1.11	0.66	0.60	0.69	0.80	1.19	1.17		
	1.15	1.08	0.79	0.69	0.75	0.89	1.16	1.20		
	27	-2.7	19.7	15.0	8.7	11.3	-2.5	2.6		
1.00	1.31	1.18	0.61	0.51	0.59	0.74	1.27	1.36	1.02	
1.06	1.21	1.11	0.69	0.54	0.57	0.75	1.15	1.23	1.08	
6.0	-7.6	-5.9	13.1	5.9	-3.4	1.3	-9.4	-9.6	5.9	
1.01	1.34	1.23	0.72	0.52	0.52	0.65	1.24	1.33	1.02	
1.07	1.23	1.14	0.74	0.54	0.53	0.69	1.11	1.21	1.07	
5.9	-8.2	-7.3	2.8	3.8	1.9	6.2	-10.5	-9.0	4.9	
	1.20	1.23	0.84	0.73	0.63	0.70	1.13	1.09		
	1.19	1.15	0.88	0.74	0.69	0.79	1.08	1.19		
	-0.8	-6.5	4.7	1.4	9.5	12.8	-4.4	9.2		
	1.01	1.22	1.24	1.27	1.22	1.15	0.91	0.87		
	1.02	1.15	1.09	-1.14	1.10	1.07	0.99	0.97		
	1.0	-5.7	-12.1	-10.2	-9.8	-7.0	8.8	11.5		
	0.74	1.02	1.22	1.38	1.35	1.14	0.91	0.63		
	0.76	1.02	1.19	1.22	1.21	1.15	0.97	0.73		
	2.7	0.0	-2.5	-11.6	-10.3	0.9	6.6	15.9		
				1.03	1.02					
				1.07	1.06					
				3.9	3.9					

図 14 BWR炉心特性解析コードSTEADY - ACEによる
JPDR - II 炉内発熱分布の計算結果と実測値との比較

表5 STEADY - ACEコードの核計算と熱水力計算における繰返し毎の中性子源繰返し回数，固有値及び相対誤差の推移

核と熱水力計算の繰返し数	中性子源繰返し回数	固有値	核と熱水力繰返し計算における相対誤差
1	1	1.00323	——
1	2	1.00550	——
1	3	1.00409	——
1	4	1.00364	——
1	5	1.00328	——
1	6	1.00303	——
1	7	1.00326	——
1	8	1.00317	——
2	2	1.00780	——
2	3	1.00844	——
2	4	1.00844	——
2	5	1.00842	——
3	2	1.00868	0.020602
4	2	1.00883	——
4	3	1.00894	0.022520
5	2	1.00900	0.006153
6	2	1.00899	0.002230
7	2	1.00899	0.000811

囲心厚さ約3 cmの不銹鋼製バックル板の効果を十分正確に組み込まなかったためと考える。この点を改良すれば，本計算の結果と実測値との差はさらに縮まるものと考えられる。

以上の結果，大形のPWR型発電炉の解析のためにも本方法が非常に有効であり，工学的に考えて十分正確な出力分布の結果を与えることが確認できた。

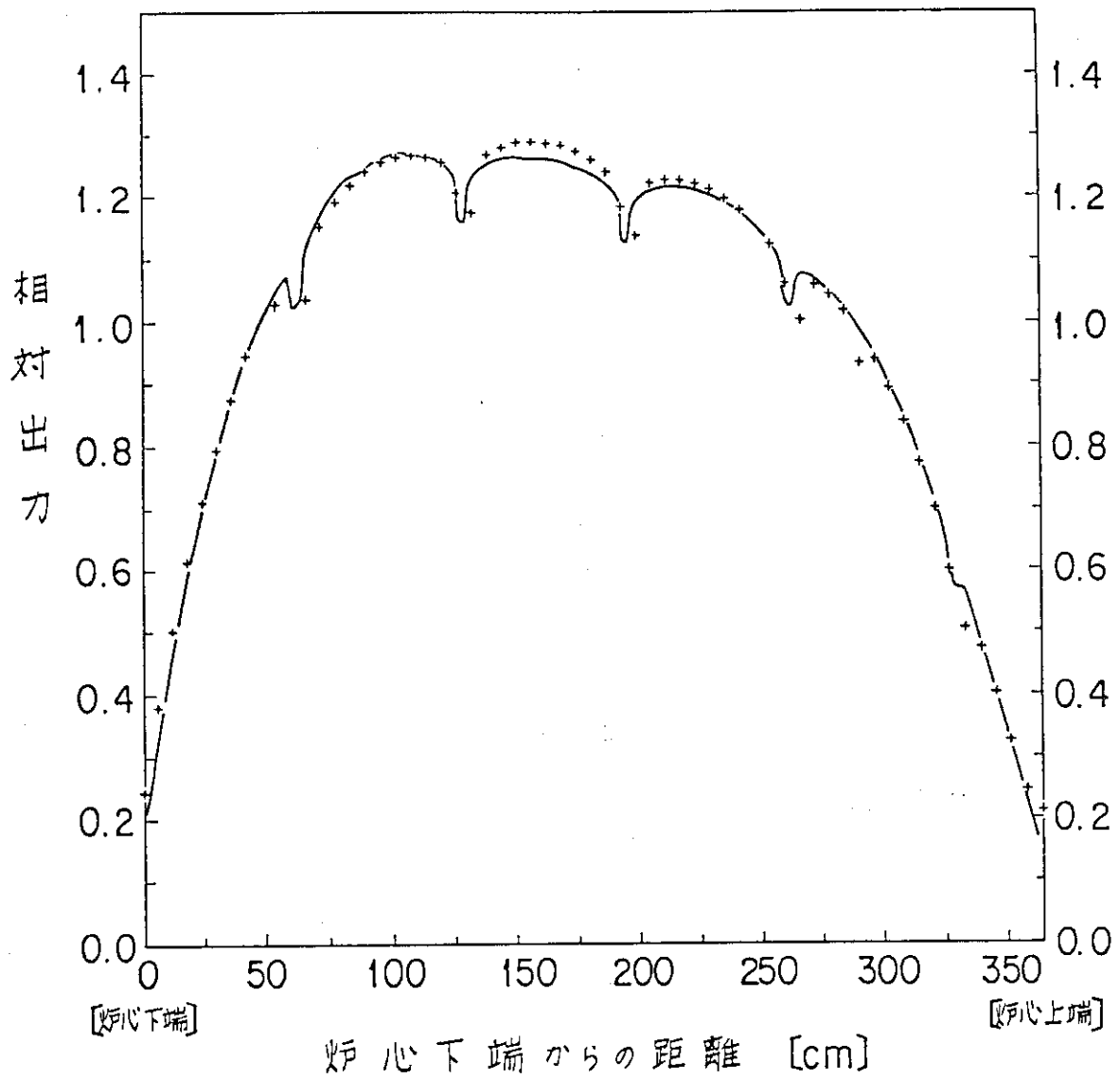


図 15 WHITE - HORSEコードによる PWR型発電炉の軸方向出力分布の
計算結果と実測値との比較

+++ 実測値, — 計算値

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A					0.620 0.642 -3.43	0.765 0.784 -2.48	0.629 0.642 -2.03						
B				0.585 0.592 -1.11	0.791 0.814 -2.77	1.049 1.074 -2.30	1.017 1.047 -2.86	1.063 1.074 -0.99	0.805 0.814 -1.05	0.591 0.592 -0.09			
C			0.655 0.664 -1.31	0.923 0.945 -2.37	1.009 1.027 -1.74	1.078 1.098 -1.85	1.102 1.128 -2.33	1.082 1.098 -1.49	1.030 1.037 0.31	0.936 0.945 -0.99	0.659 0.664 -0.71		
D		0.591 0.593 -0.29	0.933 0.946 -1.42	1.041 1.052 -1.08	1.111 1.123 -1.08	1.165 1.159 0.53	1.177 1.177 -0.02	1.173 1.159 1.22	1.127 1.123 0.34	1.056 1.052 0.34	0.934 0.946 -1.31	0.589 0.593 -0.62	
E		0.814 0.815 -0.18	1.036 1.029 0.63	1.113 1.126 -1.15	1.178 1.171 0.59	1.197 1.194 0.25	1.218 1.190 2.38	1.222 1.194 2.34	1.203 1.171 2.72	1.131 1.126 0.44	1.028 1.029 -0.14	0.806 0.815 -1.16	
F	0.620 0.644 -3.72	0.994 1.050 -5.36	1.078 1.103 -2.28	1.170 1.166 0.38	1.207 1.204 0.21	1.224 1.199 2.10	1.129 1.090 3.60	1.245 1.194 4.29	1.242 1.206 3.02	1.201 1.187 1.17	1.126 1.133 -0.64	1.034 1.050 -1.55	0.632 0.644 -1.86
G	0.630 0.644 -2.17	1.052 1.077 -2.33	1.083 1.103 -1.82	1.180 1.166 1.24	1.224 1.204 1.62	1.244 1.199 3.76	1.137 1.090 4.33	1.248 1.199 4.10	1.233 1.204 2.37	1.197 1.166 3.05	1.107 1.103 0.35	1.077 1.077 -0.01	0.631 0.644 -2.01
H		0.805 0.815 -1.29	1.023 1.029 -0.63	1.130 1.126 0.36	1.204 1.171 2.81	1.225 1.194 2.59	1.237 1.190 3.97	1.227 1.194 2.76	1.207 1.171 3.06	1.140 1.126 1.24	1.037 1.029 0.73	0.810 0.815 -0.67	
I		0.588 0.593 -0.79	0.930 0.946 -1.74	1.050 1.052 -0.23	1.127 1.027 0.34	1.186 1.159 2.35	1.193 1.177 1.34	1.189 1.159 2.60	1.134 1.123 0.96	1.056 1.052 0.34	0.937 0.946 -1.00	0.588 0.593 -0.79	
J		0.657 0.664 -1.01	0.926 0.945 -2.05	1.021 1.027 -0.57	1.114 1.128 -1.27	1.093 1.098 -0.49	1.114 1.128 -1.27	1.098 1.098 -0.03	1.033 1.027 0.60	0.937 0.945 -0.89	0.659 0.664 -0.71		
K		0.589 0.592 -0.43	0.804 0.814 -1.17	1.060 1.074 -1.27	1.023 1.047 -2.28	1.068 1.074 -0.53	1.023 1.047 -2.28	1.068 1.074 -0.53	0.813 0.814 -0.06	0.594 0.592 0.41			
L													
M					0.622 0.642 -3.12	0.761 0.784 -2.99	0.628 0.642 -2.18						

図 16 WHITE - HORSEコードによるPWR型発電炉の全炉心水平方向出力分布の計算結果と実測値との比較

5.2 船用原子炉の炉心特性解析

(1) DIFFUSION-SHIP による計算とその結果

本研究の方法を生かして作成した船用原子炉炉心特性解析コード **DIFFUSION-SHIP** による計算結果を標準的な計算コードによる計算結果及び実測値と比較しコードの性能を検証した。

計算対象は、わが国の船用原子炉の炉心特性を試験するために作られた模擬炉心である。その炉心構造は、図 11 に示した実際の船用炉の炉心とほぼ同様で、燃料集合体は 32 体、制御棒は 12 本である。燃料の有効長は 104 cm である。各燃料集合体には 9 本の可燃性毒物が含まれ、その有効長は 62.5 cm で炉心下方に配置されている。

まず、標準的な計算コードによる計算結果との比較のために、この模擬炉心について **DIFFUSION-SHIP** と従来の方法として詳細メッシュ有限差分法による **CITATION** コードを用いて中性子束分布を算出した。中性子のエネルギー群数は 3 群である。炉心の対称性を考慮して 1/4 炉心について計算を行った。1 チャンネルを 4×4 のメッシュに分割した。この炉心の 1 チャンネルの断面積は 18×18cm² で、メッシュ幅は 4.5 cm と大きいですが、これ以上の詳細なメッシュ分割の計算を **CITATION** コードで行うことは計算機の制約上できなかった。そこで比較計算はこの粗いメッシュについて行った。

この 1/4 炉心の中には 8 個のチャンネルが含まれているが、そのうち第 5 番目チャンネルの Z 軸方向中性子束分布の計算結果を図 17 に示す。**CITATION** コードではメッシュ点毎に中性子束が算出されるが、**DIFFUSION-SHIP** ではチャンネル平均中性子束が算出される。第 5 番目のチャンネルは 4×4 の 16 メッシュに分割されているが、そのうちの 4 点について **CITATION** の結果を図 17 に示してある。この図より、第 5 番チャンネルの中で中性子束が大きく変化していることがわかる。しかし、**CITATION** の結果を第 5 番チャンネルについて平均した値は **DIFFUSION-SHIP** の結果と図上で区別が困難なほど重なっている。このことは、チャンネル内で出力の変化が大きい場合でも **DIFFUSION-SHIP** はその平均量をよく算出できることを示している。なお、計算時間は **CITATION** が 480 秒であったのに対し、**DIFFUSION-SHIP** は 134 秒と前者の 1/4 弱であった。

次に、同一の対象について **DIFFUSION-SHIP** の結果と実測値の比較を行った。中央の 4 本の制御棒は炉心下部より 46 cm 引き抜かれ、測定位置は下部から 32 cm の位置であった。図 18 に示すように計算結果は実測値とよく一致した。ここに示した計算値は制御棒を含まない層の 2 次元計算の結果である。中央チャンネルの出力密度が低いのは、上部の層に含まれる制御棒の影響であり、計算はこの影響を正確に再現している。すなわち、軸方向の漏洩係数に上部層にある制御棒の効果が適切に組み込まれ、2 次元層の計算が高い精度で行われたことを示している。

以上の結果、本研究による計算方法を用いた **DIFFUSION-SHIP** コードは、従来の標準的な詳細メッシュ差分法による計算コードと比較して、短い計算時間と少ない計算機容量で同程度の精度の計算が可能であることがわかった。また、実測値との一致も良好であり、**DIFFUSION-SHIP** が船用炉の解析に極めて有効であることが確認された。

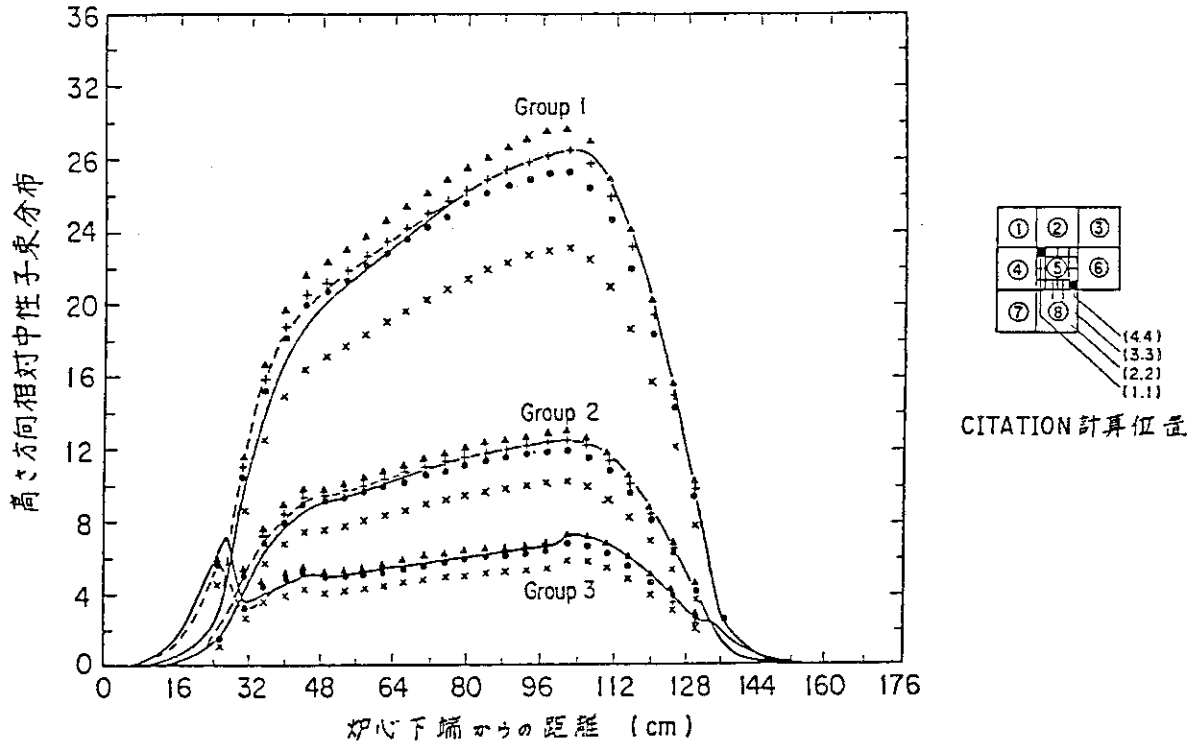


図 17 船用原子炉模擬炉心内中性子束分布の DIFFUSION-SHIP コードと CITATION コードの計算結果の比較

—— は DIFFUSION-SHIP の計算結果 - - - は CITATION の平均中性子束
 • CH(1.1), △ CH(2.2), + CH(3.3), × CH(4.4) は CITATION の計算結果

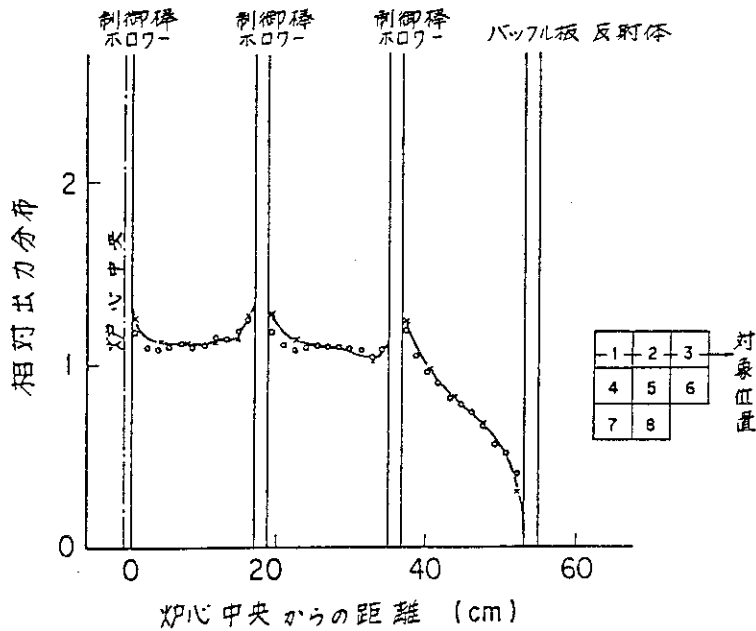


図 18 船用原子炉模擬炉心内出力分布の STEADY-SHIP コードの計算結果と実測値との比較

○ 実測値
 — による計算結果

(2) **STEADY-SHIP** による計算とその結果

わが国の船用原子炉は未だ出力上昇試験が行われておらず、温態(274°C)零出力までの実験データしかない。この中で、3次元効果が最も典型的に現われる制御棒反応度曲線に関する実験値を、本研究の方法を用いた **STEADY-SHIP** コードで解析することによりその性能を検証した。また、このコードに含まれる **LOCAL-FINE** コードの有効性も併せて検証した。

解析対象の炉心は、図 11 に示すように、12本の制御棒を含んでいる。温態零出力臨界時には中央の4本の制御棒(南北2本の制御棒を G1 グループ、東西2本の制御棒を G2 グループとよぶ)以外の制御棒は全部引き抜かれている。実験では G2 制御棒全挿入で G1 制御棒が 60.5 cm で臨界となった。その後、G1 制御棒を挿入するとともに G2 制御棒を引き抜き臨界とした。G1 制御棒が全挿入された状態で G2 制御棒を 60.3 cm まで引き抜いて臨界となった。

実験と同様の制御棒配置について、**STEADY-SHIP** コードで計算し臨界制御棒位置を求めた。計算に使用した層分割は、各グループの制御棒位置、可燃性毒物の配置、制御棒と同フォロワー接続部の位置を考慮して行った。チャンネル分割は各燃料集合体セルを1チャンネルとして行った。

G1 及び G2 グループの制御棒等価反応度曲線の実測値と計算値を図 19 に示す。計算値は等価反応度曲線の実験値をよく再現した。なお、同図に示すように、以前に出された設計値は G1 または G2 グループの制御棒の全挿入位置近傍で実験値の傾向と大きな差異を生じた。この主要な原因は、設計計算では3次元分布の効果を適切に考慮できなかったためと考えられる。

この実験データを解析するにあたり3次元計算の必要性が指摘され、**CITATION** コード等の7点階差差分方式の計算コードの使用が検討されたが、計算機容量が莫大となり空間メッシュ幅をあまり細かくとれないという難点があり、さらに計算時間もかかり過ぎるため実際上使用することができなかった。これに対し、本研究で開発した **STEADY-SHIP** コードでは上記解析計算に要した計算機容量は192キロワード以内と少なく、計算時間も5分前後であったため、上記解析計算が可能となった。また、計算結果と実測値の傾向はよい一致を示しており、本研究の計算方法を用いた **STEADY-SHIP** コードの優れた性能が確認できた。

次に **STEADY-SHIP** に組み込んだ **LOCAL-FINE** コードの計算結果について検討する。原子炉の出力ピーキング係数は、通常3次元炉心計算で求まるブロック平均出力の全炉心平均出力に対する割合(グロス出力ピーキング係数)とブロック内での出力ピーキング係数(局所出力ピーキング係数)の積として求められる。局所出力ピーキング係数は集合体内の微細構造を考慮して集合体セル計算により求められる。しかし、前に述べた船用原子炉では集合体の数が少なく、集合体内出力分布の計算に全炉心の計算結果が大きく影響する。そこで、この効果を検討するために、**LOCAL-FINE** コードで着目ブロック内の出力分布を計算し通常のセル計算により求めた出力分布と比較した。

計算対象は **STEADY-SHIP** の検証計算に使用した中央制御棒4本が46 cm まで引き抜かれた船用原子炉である。着目ブロックは第1チャンネルで制御棒を含まない領域のものである。このブロックは図 20 に示すように9本の可燃性毒物を含んでいる。

ブロックの境界条件として、**STEADY-SHIP** の計算値から求めた中性子束の対数微分値とセル計算で通常使用される微係数零の2つの値を用いてブロック内の中性子束分布を計算し比

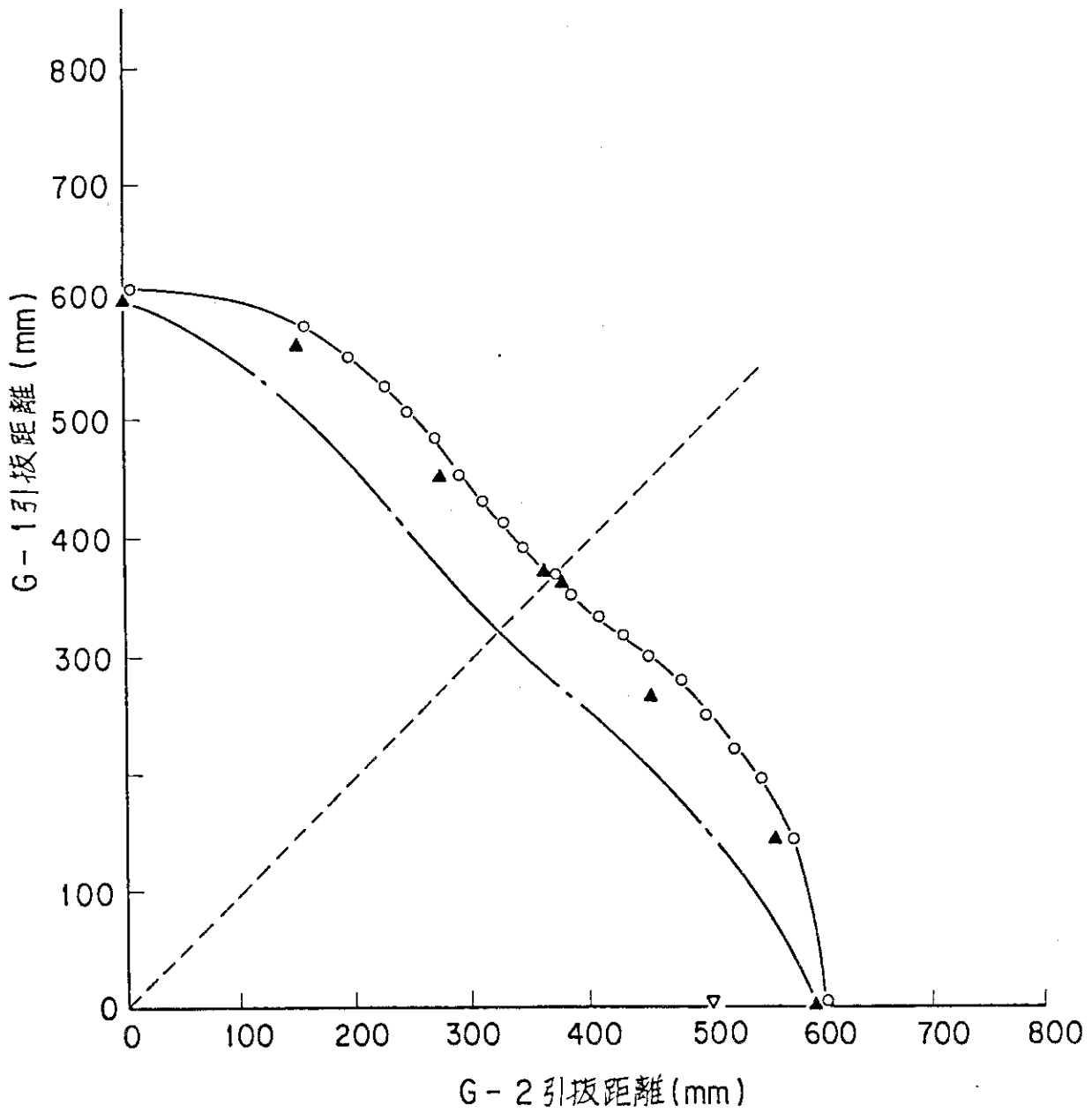


図 19 船用原子炉炉心零出力時臨界制御棒位置のSTEADY-SHIPコードによる解析値と実測値及び設計値との比較

—○— 測定値 , ▲ STEADY-SHIPによる解析値 ,
 - - - 設計値

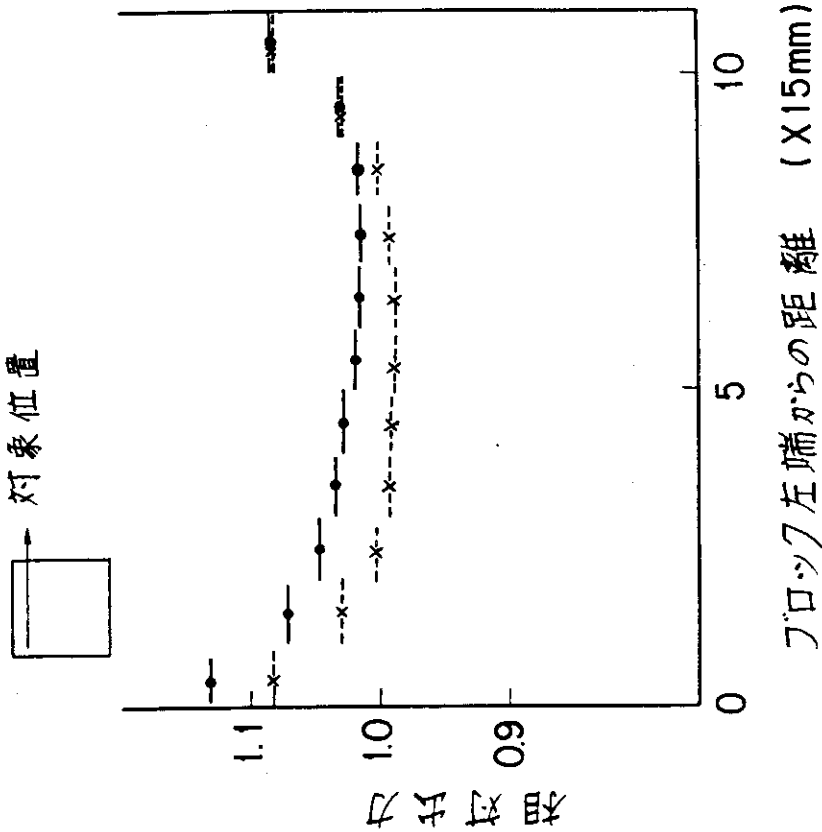


図 21 ブロック内出力分布の LOCAL-FINEコードによる計算結果と CITATIONコードによる集合体セル計算結果との比較

—●— $\phi' = \omega\phi$ STEADY-SHIP
 ---x--- $\phi' = 0$ CITATION

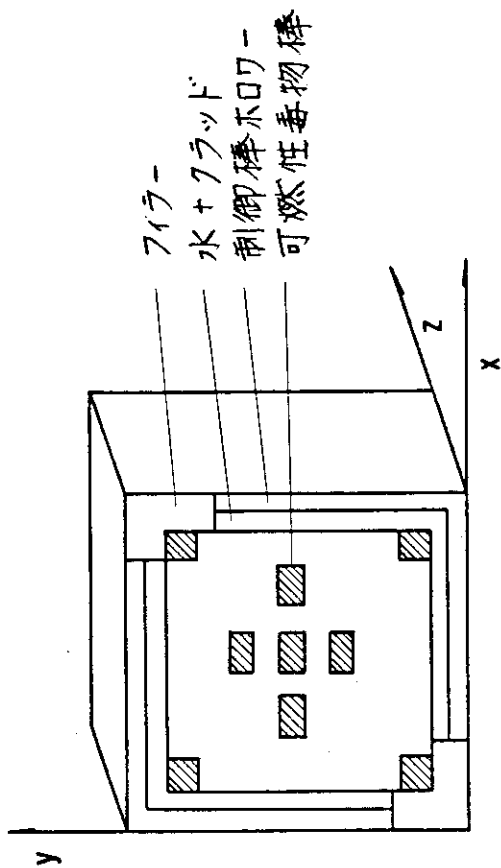


図 20 LOCAL-FINEコードのためのブロック内計算モデル図

較した。

計算結果を図 21 に示す。これは、集合体内で制御棒ホロー側から 2 行目の燃料棒の熱出力割合を示したものである。値は集合体内平均が 1.0 になるように規格化してある。STEADY-SHIP で求めた境界条件を用いて算出した場合の図中の熱出力割合の最大値は 1.13 で、微係数を零としたセル計算により求めた最大値は 1.08 であった。この 5% の差は出力制限値に直接影響する可能性がある量で設計上無視することはできない。

以上のように、少ない燃料集合体で構成される炉心の局所出力ピーキング係数の算出には、本研究の計算方法を用いた LOCAL-FINE コードの方法が有効であることが確認できた。この方法を可能にしたのは、本方法が軸方向計算及び層計算を詳細メッシュ差分法で行っており、ブロック境界での中性子束の境界条件が高精度で求まることによる。

5.3 研究用原子炉の炉心特性解析

本研究の計算方法を用いて研究用原子炉の炉心特性解析用として開発した FEDM コードの性能を検証するため 2 種類の計算を行った。その 1 つは従来の詳細メッシュ有限差分法による計算結果と比較するためのものであり、他の 1 つは差分法と有限要素法の結合計算の有効性を立証するためのものである。

有限差分法の計算結果と比較するために、図 13 に示す体系について FEDM コードで計算を行った。この計算に使用した Z 軸方向 1 次元計算のメッシュ幅は 2 cm で、各層毎の 2 次元有限要素法では 1 チャンネル 1 要素とした。すなわち、この計算では要素の形状は正方形である。

固有値計算の結果を、前出の表 3 に示した ADC コードによって求めた値とともに、表 6 に示す。FEDM コードによる計算時間は ADC コードの計算におけるメッシュ幅 4 cm と 6 cm の場合の中間の値であり、メッシュ幅 4 cm の DIFFUSION-ACE の計算時間の約 2 倍を要した。固有値についても ADC 計算のメッシュ幅 4 cm と 6 cm の計算結果の中間の値となった。図 22 に、第 1 チャンネルの Z 軸方向熱中性子束分布の計算結果を ADC の計算結果と併せて示す。図中記号で示した値は、図に示した第 1 チャンネル内各メッシュ点での ADC による計算結果である。FEDM ではチャンネル平均の中性子束を算出するので、FEDM の値は ADC による各メッシュ点の平均値と比較できるものである。

FEDM では DIFFUSION-ACE の場合と同様に、ブロック平均の径方向漏洩係数がブロック内では一定値として使用され、ブロック境界での漏洩係数が不連続に変化するため、吸収材領域(炉心下端から 24 cm まで)で ADC の結果より熱中性子の落ち込みが小さくなっている。これを解消するためには吸収材領域の層分割数を増大させる必要があるが、現状の分割数(層幅 12 cm)でも熱中性子束の ADC 計算との差は小さい。なお、この計算対象に対する DIFFUSION-ACE の熱中性子束分布の計算結果は FEDM の結果と図上で区別できない程度に一致した。以上の結果、FEDM により DIFFUSION-ACE と同程度の精度で計算が行えることがわかった。ただし、同程度の計算を行うのに、FEDM は DIFFUSION-ACE の約 2 倍の計算時間を要した。

次に、本計算コードの有効性を示す例として、図 11 に示すように、通常の x-y 直角座標や r- θ 円柱座標では取り扱うことが不可能な 2 つの円筒炉心からなる高中性子束研究炉について

表 6. 漏洩量繰返し法による計算コード FEDM と有限差分法による計算コード ADC とで算出した小形軽水炉模擬炉心の固有値とそれに要した計算時間の比較

ADCコードのメッシュ幅 (cm) $\Delta x = \Delta y = \Delta z$	固有値		計算機 FACOM-230-75 の計算時間 (sec)	
	ADC	FEDM	ADC	FEDM
4	1.1255	1.1260	267	195
6	1.1272		81	

FEDM コードは 1チャンネルを1要素とし、 $\Delta Z = 2\text{cm}$ で計算した。

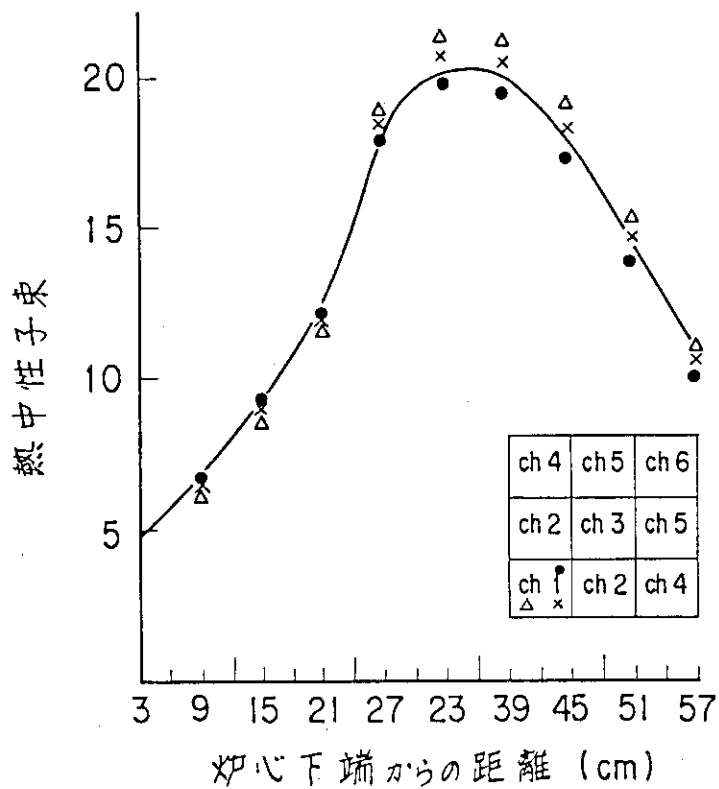


図 22 小形軽水型発電炉模擬炉心第 1 番チャンネルの Z 軸方向熱中性子束分布の FEDM コードによる計算結果と ADC コードによる結果との比較

— FEDM , • Δ × ADC

FEDM で計算した。この原子炉は 2 分割炉心より成るが、今回の計算では両炉心が同一の状態にあるとし、対称性を仮定して原子炉の 1/4 部分についてのみ計算を行った。炉心の高さ方向については 3 つの層に分割して計算した。中性子エネルギー群数は 3 とした。

1 番目の層における各エネルギー群の中性子束分布の計算結果を図 23 に示す。この結果は他の方法による計算結果や実験値と比較を行っていないので精度の検証はできないが、図 12 に示すような $x-y$ 直角座標系や $r-\theta$ 円柱座標系では取り扱えない体系についても本コードが有効に使用できることを示すものといえよう。なお、本計算コードでは原子炉の要素を 2 次曲線で近似しているので、通常の 3 角要素や 4 角要素で近似したものに比べて形状をより正確にモデル化ができていることが図 22 よりわかる。

以上の結果から、本研究の計算方法を用いた **FEDM** コードは、計算時間は **DIFFUSION - ACE** よりも少し長くかかるが、計算結果は **DIFFUSION - ACE** と同程度であり、また、従来の方法では計算が困難であった複雑な形状をした研究用原子炉の炉心の解析にも有効であることが確認できた。

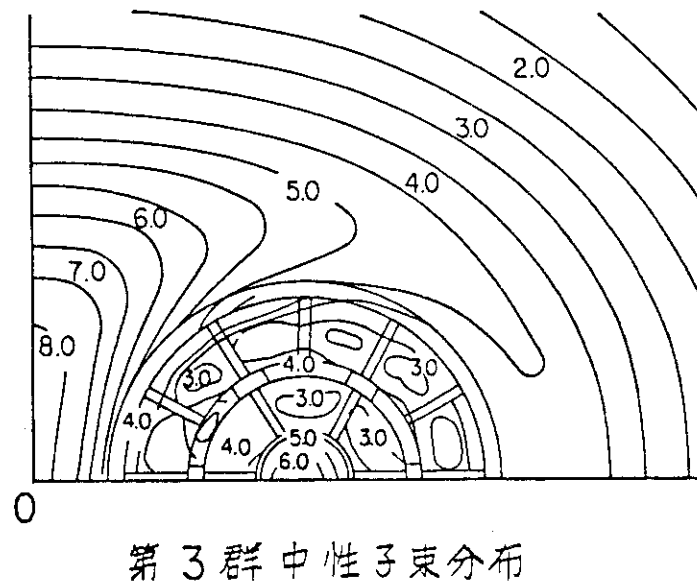
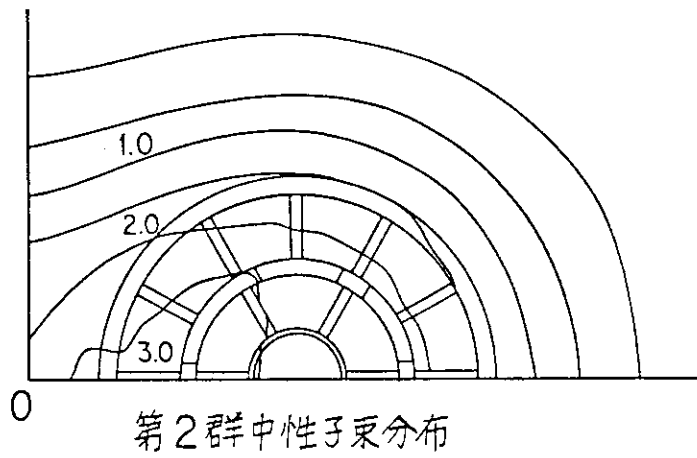
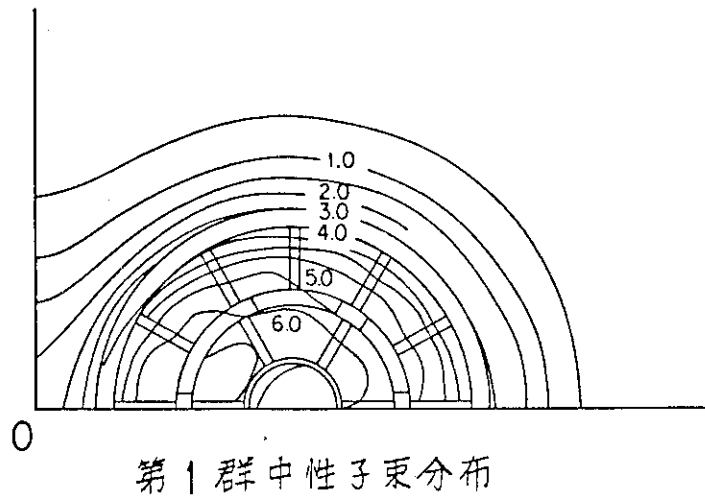


図23 高中性子束研究炉水平断面における中性束分布のFEDMコードによる計算結果

6. 結 論

複雑な構造をした大形原子炉内の中性子束分布を少ない計算機容量で短い時間に計算できる方法として、中性子漏洩量繰返し法を考案した。また、この方法を応用し各種の炉型の原子炉に適した数多くの具体的な計算法を開発した。そして、いくつかの実際の原子炉に対し、この方法の適応性を詳細に検討した。

本研究により得られた主な成果は次のようなものである。

- (1) 大形炉の中性子束分布計算法が具備すべき要件を検討し、それを満たす計算方法として中性子漏洩量繰返し法を考案した。この方法は、 x - y 面と z 軸方向の中性子束分布を交互に詳細メッシュ有限差分法で求めるものでシンセシス法の一つといえる。この方法によると、1つの領域ブロックが1つのメッシュに対応する場合の計算結果は詳細メッシュ有限差分法の計算結果と一致するので、作成された計算コードはシンセシス法による計算コードとしても、また詳細メッシュ有限差分法による計算コードとしても使用可能である。すなわち、この計算法は詳細メッシュ有限差分法を含むシンセシス法とすることができる。従来、シンセシス法と差分法とは独立の分野として研究されてきたが、本研究はそれらを初めて統合した一例を示したことになる。従来シンセシス法の近似誤差の評価は詳細メッシュ有限差分法による計算コードの結果と比較することにより行われてきたが、本方法においては、同一計算コードで差分法に相当する計算を行い比較することにより、容易に近似誤差の評価が行えるようになった。
- (2) 径方向と軸方向の交互繰返し計算の収束条件を導出した。従来の多チャンネル・フラックス・シンセシス法やバックリング反復法では、使用されている繰返し法の収束条件が不明確であったが、本研究において、径方向と軸方向の交互繰返し法の収束条件を明確に導出した。このことより、収束加速因子の選択の基準を定めることが可能となった。
- (3) 原子炉の型式に応じ、それぞれの炉心構成などを考慮して、本方法を生かした具体的な計算法を完成した。また、これら計算法を実際に用いて種々の原子炉内の中性子束分布を算出し、標準的な詳細メッシュ有限差分法による計算結果ならびに実験結果と比較することによって本方法の妥当性と有効性を示すことができた。以下にその概要を示す。
 - ① 軽水型発電炉の炉心特性解析コードとして **DIFFUSION-ACE**、**STEADY-ACE** 及び **WHITE-HORSE** コードを作成した。まず、3次元拡散コード **DIFFUSION-ACE** を用いて、小形軽水炉模擬炉心の中性子束分布を算出し、その結果を標準的な詳細メッシュ有限差分法による計算結果と比較し、本方法が少ない計算機容量で短い計算時間に差分法の結果と良い一致が得られることを確認した。次に、BWR 炉心特性解析コード **STEADY-ACE** を用いて、出力運転状態の BWR 炉心内熱出力分布を計算し、炉内熱水力計算と中性子拡散計算の交互繰返しが滑らかに収束することを示した。従来、BWR 炉心内の複雑な中性子束分布が差分法に基づく方法で計算された例はなく、この計算が初めてである。第3に、PWR 炉心特性解析コード **WHITE-HORSE** を用いて、PWR 型発電炉の炉内

熱出力分布を計算し実測値と比較し良く一致することを確認した。この結果、本方法が大形軽水型発電炉の炉心特性解析に非常に有効であることが示された。

- ② 船用原子炉の炉心特性解析コードとして **DIFFUSION-SHIP** 及び **STEADY-SHIP** コードを作成し、わが国で開発中の船用原子炉の実験結果の解析を行い満足する結果を得た。この原子炉は十字型制御棒を用いて臨界調整を行うため、炉内の中性子束は3次元的に複雑に分布する。しかし、従来の詳細メッシュ有限差分法では計算機の使用制限を越え、3次元計算はできなかった。本研究で **STEADY-SHIP** を作成したことにより、初めて高精度の解析が可能となった。
- ③ 研究用原子炉の炉心特性解析コードとして **FEDM** コードを作成した。このコードは $x-y$ 面 2次元計算は有限要素法で、 z 軸方向 1次元計算は差分法で行うものである。本方法では、1次元計算と2次元計算を結びつけている量は、ブロック内で積分された中性子漏洩量と中性子源の大きさであり、ブロックの幾何形状が両者の結合方式に直接影響を与えない。このことにより **FEDM** の作成が可能となった。この計算コードを用いて、直交座標系や円柱座標系では表現が困難な研究用原子炉の炉内中性子束分布を計算し本方法の有効性を示した。

本研究の成果は、既にわが国の大形軽水型発電炉の炉心特性解析に使用されるに至っているが、今後さらに以下のような項目について研究を進めたいと考えている。

- (1) 核燃料の燃焼計算までを考慮して、炉型別にチャンネルと層の最適な分割方法を検討するなど実用面での一層の改良を行う。
- (2) 本方法が1次元計算と2次元計算を組合せたシンセシス法であると言う特徴を生かし、概略計算や摂動計算にも有効に使用できるように計算コードの機能を拡充する。また、本方法は差分近似を行列演算を用いて解いているので、計算機のベクトル演算機能を有効に利用することができる。この特徴を生かして計算時間をさらに大幅に減少させることなど計算コードの改良を行う予定である。
以上の改良を行えば、大形原子炉の炉心管理や燃料取り換え計画等の多くのパラメータ・スタディを要する計算のためにも本方法が有効に使用できるようになると考える。
- (3) 本研究により、交互繰返し計算の収束速度を決定する因子が明らかになったので、計算コードの内部で最適加速因子を自動的に算出する論理を追求し計算時間の短縮を計る。
- (4) 中性子の拡散現象以外の種々の拡散現象の計算に対する本方法の適用の可能性を検討する。

謝 辞

本研究は筆者が長年に渡って行ってきた軽水型発電炉の炉心特性の研究の主要部をなすものである。この間、多くの方々の協力と援助を受けた。特に、本研究の計算手法を計算コードとして具体化する作業は多くの人々との共同作業として行われた。3次元拡散コード **DIFFUSION-ACE** の作成は、General Electric Technical Service Co. の前川充留氏及び富士通(株)の渋谷一男氏の協力のもとに行われた。BWR の炉心特性解析コード **STEDY-ACE** の作成及びその

熱出力分布を計算し実測値と比較し良く一致することを確認した。この結果、本方法が大形軽水型発電炉の炉心特性解析に非常に有効であることが示された。

- ② 船用原子炉の炉心特性解析コードとして **DIFFUSION-SHIP** 及び **STEADY-SHIP** コードを作成し、わが国で開発中の船用原子炉の実験結果の解析を行い満足する結果を得た。この原子炉は十字型制御棒を用いて臨界調整を行うため、炉内の中性子束は3次元的に複雑に分布する。しかし、従来の詳細メッシュ有限差分法では計算機の使用制限を越え、3次元計算はできなかった。本研究で **STEADY-SHIP** を作成したことにより、初めて高精度の解析が可能となった。
- ③ 研究用原子炉の炉心特性解析コードとして **FEDM** コードを作成した。このコードは $x-y$ 面 2次元計算は有限要素法で、 z 軸方向 1次元計算は差分法で行うものである。本方法では、1次元計算と2次元計算を結びつけている量は、ブロック内で積分された中性子漏洩量と中性子源の大きさであり、ブロックの幾何形状が両者の結合方式に直接影響を与えない。このことにより **FEDM** の作成が可能となった。この計算コードを用いて、直交座標系や円柱座標系では表現が困難な研究用原子炉の炉内中性子束分布を計算し本方法の有効性を示した。

本研究の成果は、既にわが国の大形軽水型発電炉の炉心特性解析に使用されるに至っているが、今後さらに以下のような項目について研究を進めたいと考えている。

- (1) 核燃料の燃焼計算までを考慮して、炉型別にチャンネルと層の最適な分割方法を検討するなど実用面での一層の改良を行う。
- (2) 本方法が1次元計算と2次元計算を組合せたシンセシス法であると言う特徴を生かし、概略計算や摂動計算にも有効に使用できるように計算コードの機能を拡充する。また、本方法は差分近似を行列演算を用いて解いているので、計算機のベクトル演算機能を有効に利用することができる。この特徴を生かして計算時間をさらに大幅に減少させることなど計算コードの改良を行う予定である。
以上の改良を行えば、大形原子炉の炉心管理や燃料取り換え計画等の多くのパラメータ・スタディを要する計算のためにも本方法が有効に使用できるようになると考える。
- (3) 本研究により、交互繰返し計算の収束速度を決定する因子が明らかになったので、計算コードの内部で最適加速因子を自動的に算出する論理を追求し計算時間の短縮を計る。
- (4) 中性子の拡散現象以外の種々の拡散現象の計算に対する本方法の適用の可能性を検討する。

謝 辞

本研究は筆者が長年に渡って行ってきた軽水型発電炉の炉心特性の研究の主要部をなすものである。この間、多くの方々の協力と援助を受けた。特に、本研究の計算手法を計算コードとして具体化する作業は多くの人々との共同作業として行われた。3次元拡散コード **DIFFUSION-ACE** の作成は、General Electric Technical Service Co. の前川充留氏及び富士通(株)の渋谷一男氏の協力のもとに行われた。BWR の炉心特性解析コード **STEDY-ACE** の作成及びその

検証作業は、前川充留氏、日本原子力研究所安全解析部の阿部清治氏及び同所動力試験炉部の中村竹夫氏の協力のもとに行われた。PWRの炉心特性解析コード **WHITE-HORSE** は筆者の技術指導のもとに四国電力株式会社で作成されたもので、同社原子燃料管理部の辻本巖氏等の努力により完成したものである。船用原子炉の炉心特性解析コード **STEADY-SHIP** も筆者の技術指導のもとに日本原子力船研究開発事業団で作成及びその検証作業が行われたもので、この作業は同事業団技術部の板垣正文氏を中心になって行った。研究用原子炉の炉心特性解析コード **FEDM** は、筆者の協力のもとに京都大学原子炉実験所で作成したものであり、その作成にあたっては同所の林正俊氏及び日本情報サービス(株)の鶴田新一郎氏の努力に負う所が大である。また、作成された計算コードを実用炉に適用した際の問題点の検討にあたっては電力中央研究所原子力部の三村昌弘氏、日本原子力発電(株)技術部の片山昇氏等多くの方々からの協力を受けた。以上、計算コードの作成及び検証作業に参加していただいた方々に深く感謝するとともに、成果を本論文に掲載することを許可してくださいました方々ならびに関係会社、事業団に対して深甚の謝意を表します。

本論文を作成するにあたり、懇切丁寧な指導と励ましを頂きました日本原子力研究所原子炉工学部朝岡卓見部長に感謝いたします。また、本論文をとりまとめるに際し、詳細な検討と適切な助言を与えて下さいました京都大学工学部西原宏教授、同大学原子炉実験所木村逸郎教授、同大学工学部小林啓裕助教授ならびに同大学原子炉実験所神田啓治助教授に対し心から感謝しております。

最後に、日本原子力研究所において筆者が所属していた動力試験炉部の開発室長を歴任された小山内正男、石塚信、松浦祥次郎及び小林岩夫の四氏、ならびに、現在筆者が所属している安全解析部の石川迪夫部長の本研究への支持と励ましに対し深く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) BROWN, A.W., Mc CLURE, J.A. and WAGNER, R.J., : "Summary of PDQ (IBM-360-370 Version) Input Data Requirements and Operating Procedures", *ANCR-1061*, Aerojet Nuclear Company (1972).
- 2) FOWLER, T.B. and VONDY, D.R. : "Nuclear Reactor Core Analysis Code CITATION", *ORNL-TM-2496* (1969).
- 3) HARDIE, R.W. and LITTLE, W.W. : "3DB, A Three-Dimensional Diffusion Theory Burn-Up Code", *BNWL-1264*, Pacific Northwest Laboratories (1970).
- 4) VONDY, D.R., FOWLER, T.B. and CUNNZNHAM, G.W. : "VENTURE, A Code Block for Solving Multigroup Neutronic Problems Applying the Finite-Difference Diffusion-Theory Approximation to Neutron Transport", *ORNL-5062*, Oak Ridge National Laboratory (1975).
- 5) AKIMOTO, M. and NAITO, Y. : "A General Dimensional Neutron Diffusion Calculation Code : ADC", *JAERI 1260* (1979).
- 6) FRÖHLICH, R. : "Flux Synthesis Method versus Difference Approximation Methods for the Effective Determination of Neutron Flux Distribution in Fast and Thermal Reactors", *IAEA-SM-154/14* (1972).
- 7) AOKI, K. and TUSIKI, M. : "A New Method for the Numerical Solution of 2-Dimensional Neutron Diffusion Equation", *Nucl. Sci. Eng.* 57, 53 (1975).
- 8) KOBAYASYI, K. and NISHIHARA, H. : " Solution of Group-Diffusion Equation Using Green's Function", *Nucl. Sci. Eng.* 28, 93 (1976).
- 9) KOBAYASHI, K. : "Flux Synthesis Using Green's Function in Two-Dimensional Group Diffusion Equations", *Nucl. Sci. Eng.* 31, 91 (1968).
- 10) KAPLAN, S. : "Synthesis Method in Reactor Analysis", *Advances in Nucl. Sci. Tech.* Vol. III, P.R. GREEBLER, Ed., Academic Press, NY (1966).
- 11) WACHSPRESS, E.L., BURGESS, R.D. and BARON, S. : "Multichannel Flux Synthesis", *Nucl. Sci. Eng.* 12, 381 (1962).
- 12) WACHSPRESS, E.L. and BECKER, M. : " Variational Synthesis with Discontinuous Trial Functions", *Proc. Conf. Application of Computing methods to Reactor Problems*, *ANL-7050*, p.191 (1965).
- 13) NAITO, Y., MAEKAWA, M. and SHIBUYA, K. : "A Leakage Iterative Method for Solving the Three-Dimensional Neutron Diffusion Equation", *Nucl. Sci. Eng.* 58, 182 (1975).
- 14) NAITO, Y. TSURUTA, S. and HAYASHI, M. : "A New Mixed Method with

- Finite Difference and Finite Element Method for Neutron Diffusion Calculation", *J. of Nucl. Sci. Tech.* 18, 571 (1981).
- 15) PEACEMAN, D.W. and RACHFORD, H.H. : "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", *J. of Soc. Indust.*, 3 (1955).
 - 16) NAITO, Y. : " A Three-Dimensional Neutron Diffusion Calculation Code : DIFFUSION-ACE" *JAERI 1262* (1979).
 - 17) NAITO, Y., ABE, K. and MAEKAWA, M. : " A Computer Program for the Three-Dimensional Nuclear and Thermal-Hydraulics Analysis of BWR Core : STEADY-ACE", *JAERI 1264* (1979).
 - 18) STRANG, G. and FIX, G.J. : "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice Hall, Inc. (1973).

記 号 表

ϕ	: 3次元中性子束分布
θ	: 3次元中性子源分布
$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$: ブロック長
Ψ_z	: $\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \phi \, dx \, dy$
Ψ_{xy}	: $\int_{\Delta Z} \phi \, dz$
θ_z	: $\int_{\Delta X} \int_{\Delta Y} \theta \, dx \, dy$
θ_{xy}	: $\int_{\Delta Z} \theta \, dz$
D_g	: 第 g 群の拡散係数
Σ_{Rg}	: 第 g 群からの全除去断面積
λ_g	: 核分裂による放出中性子のエネルギー・スペクトル
k_{eff}	: 実効増倍係数
Σ_{fg}	: 核分裂断面積
ν	: 核分裂あたりの平均中性子放出数
G	: エネルギー群数
$\phi_g(\vec{r})$: $\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\vec{r}, E) \, dE$
$\mathbf{M}(N, G)$: 空間分割数 N , エネルギー群数 G の $N \cdot G$ 行 $N \cdot G$ 列の除去行列
$\Sigma(N, G)$: $N \cdot G$ 行 $N \cdot G$ 列の散乱行列
$\mathbf{F}(N, G)$: $N \cdot G$ 行 $N \cdot G$ 列の核分裂行列
$\vec{\phi}(N, G)$: $N \cdot G$ 行の中性子束ベクトル
$\vec{\theta}(N, G)$: $N \cdot G$ 行の中性子源ベクトル
$\vec{\phi}_p$: 固有値 λ_p に対応する固有ベクトル
$l_{xy}(z)$: 径方向中性子漏洩係数
$\Sigma_{Rz}(z)$: ブロック内 $x-y$ 面につき平均した除去断面積
$l_z(x, y)$: z 軸方向中性子漏洩係数
$\Sigma_{Rxy}(x, y)$: ブロック内 z 軸方向につき平均した除去断面積
\bar{I}_z	: z 軸方向平均中性子漏洩係数
\bar{I}_{xy}	: 径方向平均中性子漏洩係数
$\bar{\Sigma}_R$: ブロック内平均除去断面積
$D_{i,j}$: (i, j) メッシュにおける拡散係数
Ψ_s	: メッシュ境界の中性子束
$\Sigma_{Ri,j}$: (i, j) メッシュの除去断面積
$l_{zi,j}$: (i, j) メッシュの z 軸方向漏洩係数
$r_{i,j}$: $\Sigma_{Ri,j} \Delta X_i \Delta Y_j$
$\tilde{l}_{i,j}$: $l_{zi,j} \Delta X_i \Delta Y_j$
$\tilde{\theta}_{i,j}$: $\theta_{i,j} \Delta X_i \Delta Y_j$
\tilde{r}_z	: $\Sigma_{Rz} \Delta Z$

- \tilde{l}_z : $l_z \Delta X \Delta Y$
 $\vec{\Psi}_{xy}$: Ψ_{xy} をメッシュ分割して並べたベクトル
 $\vec{\Theta}_{xy}$: Θ_{xy} をメッシュ分割して並べたベクトル
 $\vec{\Psi}_z$: Ψ_z をメッシュ分割して並べたベクトル
 $\vec{\Theta}_z$: Θ_z をメッシュ分割して並べたベクトル
 D_{xy} : x-y 面中性子拡散差分近似行列
 Σ_{xy} : $\tilde{r}_{i,j}$ を要素とする行列
 \tilde{L}_z : \tilde{l}_z を要素とする行列
 D_z : z 軸中性子拡散差分近似行列
 Σ_z : \tilde{r}_z を要素とする行列
 \tilde{L}_{xy} : $\tilde{l}_{i,j}$ を要素とする行列
 Ψ_z^i : $\vec{\Psi}_z$ の要素で i 番目の値
 Ψ_{xy}^j : $\vec{\Psi}_{xy}$ の要素で j 番目の値
 $\Psi_{xy n}$: 第 n チャンネルにつき Ψ_{xy}^j を加算した値
 Ψ_{zb} : ブロック b 内の Ψ_z の積分中性子束
 Ψ_{xyb} : ブロック b 内の Ψ_{xy} の積分中性子束
 $\vec{\Psi}_z^{nch}$: 第 n チャンネルの詳細メッシュ中性子束ベクトル
 \mathcal{A}_z^h : ブロック b につき体積積分する演算子
 \mathcal{A}_{xyb}^h : ブロック b につき体積積分する演算子
 h_{zi} : z 軸方向 i 番目の詳細メッシュ巾
 h_{xyi} : x-y 面 j 番目の詳細メッシュ巾
 S_z^h : \mathcal{A}_z^h を要素とする行列
 S_{xy}^h : \mathcal{A}_{xyb}^h を要素とする行列
 S_z : z 軸方向詳細メッシュに属する量をブロック毎に単純和する行列
 S_{xy} : x-y 面詳細メッシュに属する量をブロック毎に単純和する行列
 L_z : \bar{l}_z を要素とする行列
 L_{xy} : \bar{l}_{xy} を要素とする行列
 \bar{R}_z^m : ブロック積分誤差ベクトルを軸方向詳細メッシュの誤差ベクトルにする分配行列
 \bar{R}_{xy}^m : ブロック積分誤差ベクトルを径方向詳細メッシュの誤差ベクトルにする分配行列
 R_z : 体積積分された軸方向中性子束をもとの中性子束分布に戻す分配行列
 R_{xy} : 体積積分された径方向中性子束をもとの中性子束分布に戻す分配行列
 r_{xyb} : ブロック b に属する R_{xy} の要素

付録1 3次元中性子拡散方程式の差分近似

多群3次元中性子拡散方程式の差分近似式を導出する。中性子エネルギーを群分割した多群近似の拡散方程式は、よく知られているように下記の式で表現される。

$$\begin{aligned}
 & -\nabla \cdot D_g(\vec{r}) \nabla \phi_g(\vec{r}) + \sum_{R, g}(\vec{r}) \phi_g(\vec{r}) \\
 & = \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{\nu} \sum_{f, g}(\vec{r}) + \sum_{g' \neq g} \sum_{S, g'-g}(\vec{r}) \phi_{g'}(\vec{r}) \quad g=1, 2, \dots, G \quad (A1.1)
 \end{aligned}$$

ここで、

- $\phi_g(\vec{r})$: $\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(r, E) dE$
- D_g : 拡散係数
- $\sum_{R, g}$: g 群からの全除去断面積
- χ_g : 核分裂による放出中性子エネルギー・スペクトル ($\sum_g \chi_g = 1$)
- k_{eff} : 実効増倍係数
- $\sum_{f, g}$: 核分裂断面積
- ν : 核分裂当りの平均中性子放出数
- $\sum_{S, g'-g}$: g' 群から g 群への散乱断面積
- G : エネルギー群数

多群拡散方程式は、式(A1.1)よりわかるごとく、斉次連立2階微分方程式で、 k_{eff} は固有値となっている。式(A1.1)を行列表示すると、

$$(\mathbf{M} - \sum) \vec{\phi} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F} \vec{\phi} \quad (A1.2)$$

となる。ここで中性子束ベクトル $\vec{\phi}$ は、

$$\vec{\phi} = \text{col}[\phi_1(\vec{r}), \phi_2(\vec{r}), \dots, \phi_G(\vec{r})]$$

である。また、演算マトリックスは、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot D_1 \nabla + \sum_{R1}, 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\nabla \cdot D_2 \nabla + \sum_{R2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \nabla \cdot D_G \nabla + \sum_{RG} \end{pmatrix}$$

$$\sum = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \sum_{S2-1} & \dots & \dots & \sum_{SG-1} \\ \sum_{S1-2}, & 0 & \sum_{S3-2} & \dots & \dots & \dots & \sum_{SG-1} \\ \vdots & & & & & & \\ \sum_{S1-G1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \chi_{1\nu} \sum f_{11}, \chi_{2\nu} \sum f_{21}, \dots, \chi_{1\nu} \sum f_{1G} \\ \chi_{2\nu} \sum f_{11}, \chi_{2\nu} \sum f_{21}, \dots, \chi_{2\nu} \sum f_{1G} \\ \vdots \\ \chi_{G\nu} \sum f_{11}, \dots, \chi_{G\nu} \sum f_{1G} \end{pmatrix} \quad (A1.3)$$

となる。

式 (A1.1) または (A1.2) の差分近似式を導出する。3次元体系を x-y-z 直角座標を用いて直方体に分割し、その番号を I(i, j, k) で表わす。直方体の中では物質組成は一定とする。図 A1.1 に示すように直方体 I は 6 つの直方体と隣接する。I の中心の座標を I(x_i, y_j, z_k) とし直方体

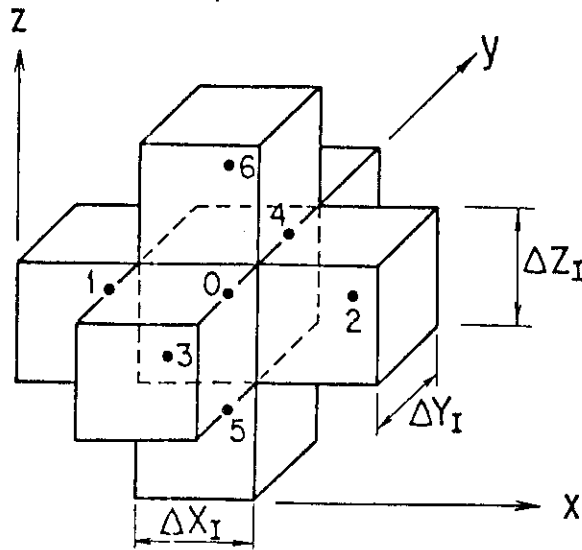


図 A1.1 3次元メッシュ分割図

の辺の長さを ΔX_I, ΔY_I, ΔZ_I と表現する。式 (A1.1) を直方体 I につき積分すると左辺第一項は、Green の定理を用いて、

$$\int_{\Delta X_I} \int_{\Delta Y_I} \int_{\Delta Z_I} \nabla D_g \nabla \phi_g dx dy dz = \int_{\Delta Y_I} \int_{\Delta Z_I} D_g \frac{\partial}{\partial X} \phi_g |_{x_{\pm}} dy dz - \int_{\Delta Z_I} \int_{\Delta X_I} D_g \frac{\partial}{\partial Y} \phi_g |_{y_{\pm}} dz dx - \int_{\Delta X_I} \int_{\Delta Y_I} D_g \frac{\partial}{\partial Z} \phi_g |_{z_{\pm}} dx dy \quad (A1.3)$$

となる。

式 (A1.3) の右辺を差分近似する。

$$\int_{\Delta Y_I} \int_{\Delta Z_I} D_g \frac{\partial}{\partial X} \phi_g |_{x_{\pm}} dy dz = \frac{D_i}{\Delta X_I / 2} (\phi_1 - \phi_5) \Delta Y_I \Delta Z_I \quad (A1.4)$$

ここで、φ_s は直方体 I の中心点と隣接する直方体の中心点を結ぶ線上の両直方体の境界の中性子束の値である。中性子束と中性子流の連続条件が境界面で成立することが物理的に要請されるので φ_s は下記の関係を満たさなければならない。

$$D_i [\phi_1 - \phi_s] \frac{\Delta Y_I \Delta Z_I}{\Delta X_I / 2} = D_{i-1} [\phi_s - \phi_{i-1}] \frac{\Delta Y_I \Delta Z_I}{\Delta X_{i-1} / 2}$$

それ故、以下のように書ける。

$$\int_{\Delta Y_1} \int_{\Delta Z_1} D_g \frac{\partial}{\partial X} \phi_g |_{X_1} dydz = \frac{2\Delta Y_1 \Delta Z_1}{\frac{\Delta X_1}{D_{i+1}} + \frac{\Delta X_{i+1}}{D_i}} (\phi_i - \phi_{i+1})$$

$$\equiv C_{ix+} (\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (A1.5)$$

以下同様にして、左右前後上下方向への直方体 I からの中性子漏洩量が下式で求まる。

$$L(X-) + (X+) + L(Y-) + L(Y+) + L(Z-) + L(Z+)$$

$$= \phi_{ijk} (C_{i,x-} + C_{i,x+} + C_{i,y-} - C_{i,y+} + C_{i,z-} + C_{i,z+})$$

$$- C_{i,x-} \phi_{i-1,j,k} - C_{i,x+} \phi_{i+1,j,k} - C_{i,y-} \phi_{j,j-1,k} - C_{i,y+} \phi_{j,j+1,k}$$

$$- C_{i,z-} \phi_{i,j,k-1} - C_{i,z+} \phi_{i,j,k+1} \quad (A1.6)$$

式 (A1.1) の左辺の第 2 項及び右辺も直方体 I について空間積分する。

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Delta X_1} \int_{\Delta Y_1} \int_{\Delta Z_1} \sum_{Rg} \phi_g dx dy dz &= \sum_{Rg} V_i \phi_{i,j,k} \\ \int_{\Delta X_1} \int_{\Delta Y_1} \int_{\Delta Z_1} \theta_g dx dy dz &= \theta_{gi} V_i \end{aligned} \right\} \quad (A1.7)$$

ここで、

$$\theta_g = \chi_g \sum_{g'} \nu \sum_{i g'} \phi_{g'}(\vec{r}) / keff + \sum_{g' \neq g} \sum_{s, g'} (\vec{r}) \phi_{g'}(\vec{r})$$

外部境界に接している直方体についての差分式は境界条件を満すように組立てる。例えば、対数微分境界条件の場合には、以下の条件を満足しなければならない。

$$-\frac{D_i}{\phi_b} \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_b = \alpha \quad (A1.8)$$

ここで、 α は一定値で、 b は境界を意味する。

式 (A1.8) を差分表現すると、

$$-\frac{D_i}{\phi_b} \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_b = -\frac{D_i}{\phi_b} \cdot \frac{\phi_i - \phi_b}{\Delta X_i / 2} = \alpha$$

となり、境界中性子束 ϕ_b は

$$\phi_b = \frac{D_i \phi_i}{D_i + \Delta X_i \cdot \alpha / 2}$$

となる。境界の直方体から X_- 方向への中性子漏洩量 $L_b(X_-)$ は

$$L_b(X_-) = -\Delta Y_1 \Delta Z_1 D_i \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_b = \Delta Y_1 \Delta Z_1 \alpha \phi_b = \frac{\Delta Y_1 \Delta Z_1 \alpha D_i}{D_i + \Delta X_i \cdot \alpha / 2} \phi_i \quad (A1.9)$$

となる。すなわち、外部境界に接している場合には式 (A1.6) の C_{ix-} の値として式 (A1.9) 右辺の ϕ_i の係数が使用される。

以上の手順により式 (A1.1) の差分近似式が作成される。この差分式は下記のように行列表示される。

$$M_g \vec{\phi}_g = \vec{\theta}_g \quad (A1.10)$$

$$\vec{\phi}_g = \begin{pmatrix} \phi_{g,1,1,1} \\ \phi_{g,2,1,1} \\ \vdots \\ \phi_{g,N_x,1,1} \\ \phi_{g,1,2,1} \\ \vdots \\ \phi_{g,N_x,2,1} \\ \vdots \\ \phi_{g,N_x,N_y,N_z} \end{pmatrix} \quad \vec{\theta}_g = \begin{pmatrix} \theta_{g,1,1,1} \\ \theta_{g,2,1,1} \\ \vdots \\ \theta_{g,N_x,1,1} \\ \theta_{g,1,2,1} \\ \vdots \\ \theta_{g,N_x,2,1} \\ \vdots \\ \theta_{g,N_x,N_y,N_z} \end{pmatrix} \quad (A1.11)$$

ここで、 N_x, N_y, N_z は x 軸、y 軸及び z 軸についての分割数を示す。上記ベクトル配列に対応する行列 M_g の要素の配列は以下ようになる。

$$\begin{aligned} M_{m,m} &= -C_{7,1} \\ M_{m,m-1} &= C_{1,1} \\ M_{m,m+1} &= C_{2,1} \\ M_{m,m+N_x} &= C_{3,1} \\ M_{m,m-N_x} &= C_{4,1} \\ M_{m,m+N_x N_y} &= C_{5,1} \\ M_{m,m-N_x N_y} &= C_{6,1} \\ m &= i + (j-1)N_x + (k-1)N_x N_y \end{aligned} \quad (A1.12)$$

ここで、係数 $C_{n,1}$ は下記の 7 点階差式の係数であり、式 (A1.6) 及び (A1.7) を用いて求めることができる。

$$\begin{aligned} C_{7,1} \phi_{i,j,k} + C_{1,1} \phi_{i-1,j,k} + C_{2,1} \phi_{i+1,j,k} + C_{3,1} \phi_{i,j-1,k} + C_{4,1} \phi_{i,j+1,k} + C_{5,1} \phi_{i,j,k-1} \\ + C_{6,1} \phi_{i,j,k+1} = \theta_i V_i \end{aligned} \quad (A1.13)$$

以上の近似表現形式を用いることにより、式 (A1.2) で使用した演算行列 M の要素に含まれている微分演算子が数値に置き換えられ、式 (A1.2) は下記の行列方程式により境界条件も含めて近似される。

$$(M(N,G) - \Sigma(N,G)) \vec{\phi}(N,G) = \frac{1}{k_{eff}} F(N,G) \vec{\phi}(N,G) \quad (A1.14)$$

ここで、 N は空間分割数で、上記例では $N_x N_y N_z$ に等しい。

$$\vec{\phi}(N,G) = \text{Col} [\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_g, \dots, \vec{\phi}_G]$$

$\vec{\phi}_g$ は式 (A1.11) で示したものである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}(N, G) &= \begin{pmatrix} 0, & \bar{\Sigma}_{s_2-3}, & \dots, & \bar{\Sigma}_{s, G-1} \\ \bar{\Sigma}_{s_1-2}, & 0, & \dots, & \bar{\Sigma}_{s, G-2} \\ \vdots & & & \\ \bar{\Sigma}_{s_1-G}, & \dots, & \dots, & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}(N, G) &= \begin{pmatrix} \chi_1 \nu \bar{\Sigma}_{f_1}, \chi_1 \nu \bar{\Sigma}_{f_2}, \dots, \chi_1 \nu \bar{\Sigma}_{f_G} \\ \chi_2 \nu \bar{\Sigma}_{f_1}, \\ \vdots \\ \chi_G \nu \bar{\Sigma}_{f_1}, \dots, \dots, \chi_G \nu \bar{\Sigma}_{f_G} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.16})$$

$\bar{\Sigma}(N, G)$ 及び $\mathbf{F}(N, G)$ の要素行列 $\bar{\Sigma}_{s, g'-g}$, $\chi_g \nu \bar{\Sigma}_{f_g}$ は中性子断面積 $\Sigma_{s, g'}(r)$ 及び $\nu \Sigma_f(r)$ を直方体について中性子束を重みに平均した値を要素とする N 行 N 列の対角行列である。

式 (A1.14) が数値計算で解くべき差分方程式である。右辺の中性子源が与えられたと仮定すると、中性子束は下記の式により求められる。

$$\vec{\phi}(N, G) = [\mathbf{M}(N, G) - \bar{\Sigma}(N, G)]^{-1} \left\{ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F}(N, G) \vec{\phi}(N, G) \right\} \quad (\text{A1.17})$$

付録2 アイソパラメトリック法による2次元拡散方程式の解法

3次元中性子拡散計算を中性子漏洩量繰返し法により行う計算コード **FEDM** では、2次元層計算はアイソパラメトリック法による有限要素法を用いて行われる。アイソパラメトリック法とは、有限要素法において使用する形状関数を座標変換にも使用するものである。以下に **FEDM** コードの中で使用されている有限要素法による2次元拡散コード **2 DFEM** の概要を記す。

2次元中性子束分布を ψ_{xy} とし、形状関数 $G(x, y)$ を用いて下記のごとく近似する。

$$\psi_{xy} = \sum_{j=1}^n \varphi_j G_j(x, y) \quad (A2.1)$$

ここで φ_j はノード j における中性子束の値である。

Galerkin 法により基礎式を表現する。

$$\iint G_i(x, y) \left[- \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial y} \right) \right\} + (\Sigma_T + l_z) \psi_{xy} - \theta_{xy} \right] dx dy \quad (A2.2)$$

ここで、 l_z は1次元垂直方向への漏洩係数である。

式(A2.1)を式(A2.2)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[D^k \iint \left(\frac{\partial G_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_j}{\partial x} + \frac{\partial G_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial G_j}{\partial y} \right) dx dy + (\Sigma_T + l_z)^k \iint G_i G_j dx dy \right] \varphi_j \\ & = \iint G_i \theta_{xy}^k dx dy + \oint G_i D^k \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial n} ds, \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (A2.3)$$

となる。ここで、 k は要素番号を表わし、また右辺には境界条件を付加した。

式(A2.3)は $x-y$ 座標から $\xi-\eta$ 座標に図 A2.1 のように変換してから積分が実行される。即ち、式(A2.3)の積分は以下の関係式を用いて実行される。

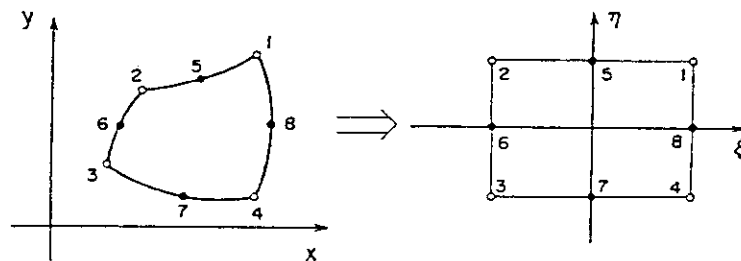


図 A 2.1 $(x-y)$ 座標から $(\xi - \eta)$ 座標への変換図

$$\iint F(G(x,y)) dx dy = \iint F'(S(\xi,\eta)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right| d\xi d\eta \quad (A2.4)$$

ここで、 $S(\xi,\eta)$ は $\xi-\eta$ 座標における形状関数であり $\partial(x,y)/\partial(\xi,\eta)$ は Jacobian である。

2DFEM コードでは $S(\xi,\eta)$ として下記の 2 次式を用いている。この結果、2 次曲線を辺にもつ要素を精度良く近似できる。

$$\begin{aligned} 4S_1 &= -1 - \xi\eta - \xi^2 + \eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2 \\ 4S_2 &= -1 - \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 + \xi^2\eta - \xi\eta^2 \\ 4S_3 &= -1 + \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2 \\ 4S_4 &= -1 - \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 - \xi^2\eta + \xi\eta^2 \\ 2S_5 &= 1 + \eta - \xi^2 - \xi^2\eta \\ 2S_6 &= 1 - \xi - \eta^2 + \xi\eta^2 \\ 2S_7 &= 1 - \eta - \xi^2 + \xi^2\eta \\ 2S_8 &= 1 + \xi - \eta^2 - \xi\eta^2 \end{aligned} \quad (A2.5)$$

式 (A2.5) を用いて式 (A2.4) を書くと、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^8 \left[D^k \iint \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial \xi} \right) \frac{|J|}{J^2} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + (\sum_r + l_z)^k \iint S_i S_j |J| d\xi d\eta \right] \\ & = \iint G_i \theta_{xy}^k dx dy + \oint G_i D^k \frac{\partial \Psi_{xy}}{\partial \eta} d\omega, \quad (i=1, \dots, 8) \end{aligned} \quad (A2.6)$$

となる。ここで

$$\theta_{xy}^k = \iint_{E_k} \sum_{g=1}^G (\sum_{g'=g}^G \Psi_{xyg'}) dx dy + \iint_{E_k} \frac{1}{\lambda} \chi_g \sum_{g=1}^G (\nu \sum_{f=1}^G \Psi_{xyg'}) dx dy \quad (A2.7)$$

である。なお、 E_k は k 番目要素の領域であり、

$$\begin{aligned} \sum_g \iint G_i \sum_{g'=g}^G \Psi_{xyg'} dx dy &= \sum_g \sum_{g'=g}^G \left[\sum_j \left\{ \iint S_i S_j |J| d\xi d\eta \right\} \varphi_j^{g'} \right] \\ \iint G_i \frac{1}{\lambda} \chi_g \sum_{g=1}^G (\nu \sum_{f=1}^G \Psi_{xyg'}) dx dy &= \frac{1}{\lambda} \chi_g \sum_{g=1}^G (\nu \sum_{f=1}^G \Psi_{xyg'}) \left[\sum_j \left\{ \iint S_i S_j |J| d\xi d\eta \right\} \varphi_j^{g'} \right] \end{aligned} \quad (A2.8)$$

である。

この行列方程式 (A2.6) を大型計算機で解くコードが **2DFEM** である。