

JAERI - M
85-155

鈍い物体まわりの非粘性流れに及ぼす
流路幅の影響・Ⅱ

(円柱の場合)

1985年10月

権 名 保 顕

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）
あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城
県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department
of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun,
Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1985

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 山田軽印刷所

鈍い物体まわりの非粘性流れに及ぼす流路幅の影響・II
(円柱の場合)

日本原子力研究所東海研究所高温工学部

椎 名 保 顕

(1985年9月18日受理)

流路中央に円柱が置かれた場合の非粘性流れに及ぼす流路壁の影響を、写像空間に1つのわき出しを置くモデルを用いて求め、亜臨界及び超臨界の実験結果との比較を行った。円柱の場合には背圧係数と剥離角の経験値を必要とするが、亜臨界の場合には h/d が0から0.667まで理論と実験の一致は良好である。超臨界の場合にははく離点付近で多少のずれが見られるが、理論と実験の一致は比較的良い。

Effect of channel width on inviscid flow past a bluff body
(Pt. II Circular cylinder)

Yasuaki SHIINA

Department of High Temperature Engineering
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received September 18, 1985)

Effect of channel walls on inviscid flow around a circular cylinder placed in the midstream is evaluated by a model with a source in a mapping plane. Comparison is made between the present theory and experimental data of several investigators in subcritical and supercritical regions. The present theory requires empirical values of back pressure coefficient and separation angle for a circular cylinder. In subcritical region, the present theory agrees well with the experimental data for $h/d=0$ to $h/d=0.667$.

In supercritical region, a slight difference was observed in the vicinity of the separation point. Generally, agreement between the present theory and experiments is well.

Keywords: Potential Flow, Separation Streamline, Circular Cylinder, Drag Coefficient, Parallel Flow, Subcritical Region, Supercritical Region

目 次

1. はじめに	1
2. 円柱の場合の理論	1
3. 剥離角及び背圧係数の経験値	9
4. h/d 小の場合における近似解	10
5. 結果と考察	14
6. 結 論	15

Contents

1. Introduction	1
2. Theory for flow past a circular cylinder	1
3. Empirical values of separation angle and base pressure coefficient	9
4. Approximate solution in the case of small h/d	10
5. Results and discussion	14
6. Conclusions	15

1. はじめに

鈍い物体回りの時間平均流れをポテンシャル流を用いて求める理論は Helmholtz⁽¹⁾ や Kirchhoff⁽¹⁾ により始められたが、古典的な彼らの不連続流理論は実験と合わないため、経験的に得られる事実を理論に取り入れようとする試みが Roshko⁽²⁾, Wu⁽³⁾, Parkinson & Jandali⁽⁴⁾ らにより行われてきており、実験結果との一致も良好である。

これらの理論は無限に広い一様流中に置かれた鈍い物体、回りの流れを取り扱ったものであるが、実際の流れは、流路壁、流連分布、乱れなど、様々な因子の影響を受けるものと考えられる。著者はこれらの影響因子の中で流れに及ぼす壁の影響のみを取り上げ、平行流路中に垂直平板が置かれた場合の流れをポテンシャル流を仮定して検討し、前報⁽⁵⁾で報告した。本報告は前報に引き続いて、平行流路中に円柱が置かれた場合の検討結果について取り扱ったものである。

2. 円柱の場合の理論

Fig. 1 に平行流路中央に円柱が置かれた場合の物理平面 (z -plane), 及び写像平面を示す。流れは無限上流で一様流速 U_∞ をもつ, C_∞ からの流れは $C_\infty - D_\infty$ 線に沿って下流に動き E 点でよどみ点となる。その後, F 点ではく離した後はく離流線を形成する。

流れは $C_\infty - D_\infty$ に関して対称なので, $C_\infty - D_\infty$ から上半分のみを検討すれば良い。 z -plane は上半面のみを示したものである。前報と同様に z -平面を, ζ -平面の上半平面に写像する関数を求めることが本理論の主目的である。 Fig. 1 の記号から z -平面では流路半値幅 d , かく離角 β_s , 円柱半径 h とする。

写像関数,

$$t = -\frac{2}{\alpha_2} \left(\alpha_1 + e^{\frac{Z}{d}\pi} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで,} \quad \alpha_1 &= -e^{-\frac{h}{d}\pi \cos \beta_s} \cos\left(\frac{h}{d}\pi \sin \beta_s\right) \\ \alpha_2 &= -e^{-\frac{h}{d}\pi \cos \beta_s} \sin\left(\frac{h}{d}\pi \sin \beta_s\right) \end{aligned}$$

を用いると, z -平面から t -平面上半面に写像される。ここでは, F 点が t -平面で $(0, 2i)$ にくるようにした。 Fig. 2 に $\beta_s \sim 80^\circ$ 及び 125° の場合の t -平面の写像を示す。平行平板内円弧は t -平面では

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{2}{\alpha_2} \left\{ \alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi \cos \theta} \cos\left(\frac{h}{d}\pi \sin \theta\right) \right\} \\ t_y &= -\frac{2}{\alpha_2} e^{-\frac{h}{d}\pi \cos \theta} \sin\left(\frac{h}{d}\pi \sin \theta\right) \end{aligned} \quad (2)$$

なる図形を表す。ここで, θ は Fig. 2 に示される z -平面内の円弧の角度を表している。平行流

1. はじめに

鈍い物体回りの時間平均流れをポテンシャル流を用いて求める理論は Helmholtz⁽¹⁾ や Kirchhoff⁽¹⁾ により始められたが、古典的な彼らの不連続流理論は実験と合わないため、経験的に得られる事実を理論に取り入れようとする試みが Roshko⁽²⁾, Wu⁽³⁾, Parkinson & Jandali⁽⁴⁾ らにより行われてきており、実験結果との一致も良好である。

これらの理論は無限に広い一様流中に置かれた鈍い物体、回りの流れを取り扱ったものであるが、実際の流れは、流路壁、流連分布、乱れなど、様々な因子の影響を受けるものと考えられる。著者はこれらの影響因子の中で流れに及ぼす壁の影響のみを取り上げ、平行流路中に垂直平板が置かれた場合の流れをポテンシャル流を仮定して検討し、前報⁽⁵⁾で報告した。本報告は前報に引き続いて、平行流路中に円柱が置かれた場合の検討結果について取り扱ったものである。

2. 円柱の場合の理論

Fig. 1 に平行流路中央に円柱が置かれた場合の物理平面 (z -plane), 及び写像平面を示す。流れは無限上流で一様流速 U_∞ をもつ, C_∞ からの流れは $C_\infty - D_\infty$ 線に沿って下流に動き E 点でよどみ点となる。その後, F 点ではく離れた後はく離流線を形成する。

流れは $C_\infty - D_\infty$ に関して対称なので, $C_\infty - D_\infty$ から上半分のみを検討すれば良い。 z -plane は上半面のみを示したものである。前報と同様に z -平面を, ζ -平面の上半平面に写像する関数を求めることが本理論の主目的である。 Fig. 1 の記号から z -平面では流路半値幅 d , はく離角 β_s , 円柱半径 h とする。

写像関数,

$$t = -\frac{2}{\alpha_2} \left(\alpha_1 + e^{\frac{z}{d} \pi} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで,} \quad \alpha_1 &= -e^{-\frac{h}{d} \pi \cos \beta_s} \cos \left(\frac{h}{d} \pi \sin \beta_s \right) \\ \alpha_2 &= -e^{-\frac{h}{d} \pi \cos \beta_s} \sin \left(\frac{h}{d} \pi \sin \beta_s \right) \end{aligned}$$

を用いると, z -平面から t -平面上半面に写像される。ここでは, F 点が t -平面で $(0, 2i)$ にくるようにした。 Fig. 2 に $\beta_s \sim 80^\circ$ 及び 125° の場合の t -平面の写像を示す。平行平板内円弧は t -平面では

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{2}{\alpha_2} \left[\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d} \pi \cos \theta} \cos \left(\frac{h}{d} \pi \sin \theta \right) \right] \\ t_y &= -\frac{2}{\alpha_2} e^{-\frac{h}{d} \pi \cos \theta} \sin \left(\frac{h}{d} \pi \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (2)$$

なる図形を表す。ここで, θ は Fig. 2 に示される z -平面内の円弧の角度を表している。平行流

路内一様流は t -平面では点 B (C) からのわき出し流れに変換される。 t -平面の $A \infty B$ (C) E F G $D \infty$ を Z -平面上半面に写像するためにまず EFG を Z -平面の単位円に写す写像関数を考える。

高さ 2 の垂直平板を単位円に写す写像関数は、

$$t = Z - \frac{1}{Z} \tag{3}$$

と表される。従って、垂直平板からずれた図形の写像関数は、

$$t = Z - \frac{1}{Z} + B_{-1} Z + B_0 + \frac{B_1}{Z} + \frac{B_2}{Z^2} + \dots \tag{4}$$

の形を持つと考えられる。

(4)式を

$$t = A_{-1} Z + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z^{-n} \tag{5}$$

のように表し、木谷、有江⁽⁶⁾と類似の方法で係数 A_n を求める。

A_n に対する第零近似解として、(3)式を採用する。すなわち、垂直平板を t -平面の図形の第零近似形とすると、

$$\begin{aligned} A_{-1}^{(0)} &= 1, & A_0^{(0)} &= 0, & A_1^{(0)} &= -1 \\ A_n^{(0)} &= 0 & (n &= 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{6}$$

となる。

このとき、 $t_x^{(0)} = 0$, $t_y^{(0)} = 2 \sin \phi$ と表される。

$t_y^{(0)}$ は Z 平面上の単位円の角 ϕ により表されるので、 t -平面の図形 EFG の t_x 座標も ϕ の関数として表すことができる。これを改めて $t_x^{(0)}$ と記し、 ϕ に関して偶関数になることに着目してフーリエ級数で展開すると

$$t_x^{(0)} = C_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} \cos n \phi \tag{7}$$

と表される。

ここで、

$$C_0^{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t_x^{(0)} d\phi$$

$$C_n^{(0)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t_x^{(0)} \cos n \phi d\phi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。

(5)式で $Z = e^{i\phi}$ とすると、

$$\begin{cases} t_x = A_0 + (A_{-1} + A_1) \cos \phi + A_2 \cos 2\phi + A_3 \cos 3\phi + \dots & (8-1) \\ t_y = (A_{-1} - A_1) \sin \phi - A_2 \sin 2\phi - A_3 \sin 3\phi \dots & (8-2) \end{cases}$$

が得られる。(8-1)と(7)式との対応から、

$$\int A_0^{(0)} = C_0^{(0)}$$

$$\begin{cases} A_{-1}^{(1)} + A_1^{(1)} = C_1^{(0)} \\ A_n^{(1)} = C_n^{(1)} \end{cases} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (9)$$

が成り立つ。

また、 t_y は第 0 近似の $2 \sin \phi$ と一致するので、

$$(A_{-1}^{(1)} - A_1^{(1)}) \sin \phi - A_2^{(1)} \sin 2\phi - A_3^{(1)} \sin 3\phi - \dots = 2 \sin \phi \quad (10)$$

となる。

$$\sin n\phi = \sin \phi \cdot I_n \text{ と表すと,}$$

I_n は漸化式、

$$I_n = \cos(n-1)\phi + \cos \phi \cdot I_{n-1}$$

で表され、これは

$$I_n = 2 \cos(n-1)\phi + 2 \cos(n-3)\phi + \dots + 2 \cos(n-2m-1)\phi + \frac{1}{2} \{1 + (-1)^{n-1}\} \quad (11)$$

と表すことができる。

ここで、右辺第 3 項の $\cos(n-2m-1)\phi$ は n が偶数のとき $\cos \phi$ を表し、 n が奇数のとき $\cos 2\phi$ を表すものとする。

$n = 7$ までの I_n は、

$$\begin{aligned} I_1 &= 1 \\ I_2 &= 2 \cos \phi \\ I_3 &= 2 \cos 2\phi + 1 \\ I_4 &= 2 \cos 3\phi + 2 \cos \phi \\ I_5 &= 2 \cos 4\phi + 2 \cos 2\phi + 1 \\ I_6 &= 2 \cos 5\phi + 2 \cos 3\phi + 2 \cos \phi \\ I_7 &= 2 \cos 6\phi + 2 \cos 4\phi + 2 \cos 2\phi + 1 \end{aligned}$$

となる。

従って、(10)式は(9)式を考慮して、

$$A_{-1}^{(1)} - A_1^{(1)} = 2 + 2 \cos \phi \cdot C_2^{(0)} + (2 \cos 2\phi + 1) \cdot C_3^{(0)} + (2 \cos 3\phi + 2 \cos \phi) \cdot C_4^{(0)} + \dots \quad (10')$$

のように変形される。

上式と(9)式を組み合わせると、第 1 近似の係数 $A_n^{(1)}$ は、

$$\begin{cases} A_{-1}^{(1)} = 1 + \frac{1}{2} [C_1^{(0)} + 2 \cos \phi \cdot C_2^{(0)} + (2 \cos 2\phi + 1) \cdot C_3^{(0)} + (2 \cos 3\phi + 2 \cos \phi) \cdot C_4^{(0)} \\ \hspace{15em} + (2 \cos 4\phi + 2 \cos 2\phi + 1) \cdot C_5^{(0)} + \dots] \\ A_0^{(1)} = C_0^{(0)} \\ A_1^{(1)} = C_1^{(0)} - 1 - \frac{1}{2} [C_1^{(0)} + 2 \cos \phi \cdot C_2^{(0)} + (2 \cos 2\phi + 1) \cdot C_3^{(0)} + (2 \cos 3\phi + 2 \cos \phi) \cdot C_4^{(0)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n^{(1)} = C_n^{(0)} \quad (n = 2, 3, \dots) \\ + (2 \cos 4\phi + 2 \cos 2\phi + 1) \cdot C_5^{(0)} + \dots \end{array} \right. \quad (12)$$

と求められる。

第2近似の係数も同様の手法により求められる。(12)式の $A_n^{(1)}$ を用いて求められた t -平面の y 座標を $t_y^{(1)}$ とし、それに対する x 座標を $t_x^{(1)}$ として、 ϕ についてフーリエ展開すると、

$$t_x^{(1)} = C_0^{(1)} + \sum C_n^{(1)} \cos n\phi$$

が得られる。同様に Z 平面の単位円上の x , z 座標を比べると、

$$A_0^{(2)} = C_0^{(1)}, \quad A_{-1}^{(2)} + A_1^{(2)} = C_1^{(1)}, \quad A_n^{(2)} = C_n^{(1)} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

及び

$$\begin{aligned} (A_{-1}^{(2)} - A_1^{(2)}) \sin\phi - A_2^{(2)} \sin 2\phi - A_3^{(2)} \sin 3\phi - \dots - A_n^{(2)} \sin n\phi &= (A_{-1}^{(1)} - A_1^{(1)}) \sin\phi \\ - A_2^{(1)} \sin 2\phi - A_3^{(1)} \sin 3\phi - \dots - A_n^{(1)} \sin n\phi & \end{aligned}$$

が得られる。

後者の式は前者の式および(12)式を用いると、

$$A_{-1}^{(2)} - A_1^{(2)} = 2 + 2 \cos\phi \cdot C_2^{(1)} + (2 \cos\phi + 1) C_3^{(1)} + (2 \cos 3\phi + 2 \cos\phi) C_4^{(1)} + \dots$$

が得られる。これは、(10)'式と全く同じ形であり、第 ℓ 近似の係数を求めるときと同じ式の構成となる。

従って、この手順で次々と近似を進めていくと、第 ℓ 近似は、

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{-1}^{(\ell)} - 1 + \frac{1}{2} [C_1^{(\ell-1)} + 2 \cos\phi \cdot C_2^{(\ell-1)} + (2 \cos 2\phi + 1) C_3^{(\ell-1)} + (2 \cos 3\phi + 2 \cos\phi) \cdot \\ C_4^{(\ell-1)} + (2 \cos 4\phi + 2 \cos 2\phi + 1) C_5^{(\ell-1)} + \dots] \\ A_0^{(\ell)} = C_0^{(\ell-1)} \\ A_1^{(\ell)} = C_1^{(\ell-1)} - 1 - \frac{1}{2} [C_1^{(\ell-1)} + 2 \cos\phi \cdot C_2^{(\ell-1)} + (2 \cos 2\phi + 1) \cdot C_3^{(\ell-1)} + (2 \cos 3\phi \\ + 2 \cos\phi) \cdot C_4^{(\ell-1)} + (2 \cos 4\phi + 2 \cos\phi + 1) \cdot C_5^{(\ell-1)} + \dots] \\ A_n^{(\ell)} = C_n^{(\ell-1)} \quad (n = 2, 3, \dots) \end{array} \right. \quad (13)$$

と書くことができる。

(12)及び(13)式から明らかなように、係数 A_n は ϕ を含むため、 Z 平面の単位円周上で、値が変化することになる。これは計算上不便であり、また実際上は計算機を用いるため(12), (13)式中の ϕ を固定して、許容し得る誤差範囲にはいる A_n を求めることができる。例えば、 $\phi = 0$ とすると、(13)式中の A_{-1} 及び A_1 は、

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{-1}^{(\ell)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} n C_n^{(\ell-1)} \\ A_1^{(\ell)} = C_1^{(\ell-1)} - 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} n C_n^{(\ell-1)} \end{array} \right. \quad (13)'$$

と表すことができる。

これは、木谷・有江⁽⁶⁾が用いた計算式である。

$\phi = \frac{\pi}{2}$ とすると,

$$A_{-1}^{(\ell)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} C_n^{(\ell-1)} \quad (13)$$

$$A_1^{(\ell)} = C_1^{(\ell-1)} - 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} C_n^{(\ell-1)}$$

が得られる。

ϕ による収束速度の違いを Fig. 3 に示す。図で縦軸は前回との最大誤差を示している。図から明かなように $\phi = 0$ は最も収束が遅く $\phi = \pi/3$ が最も収束が早い。この解法は第 0 近似として、垂直平板から出発しているために、垂直平板からのずれの大きい図形の近似写像係数は求めることができない。どの程度の図形まで写像できるかを調べるために

$$t_y = \sqrt{1 + a \cdot t_x}$$

の第 3 象限の図形を Z-平面単位円に写像する近似係数 A_n を求めた。本図形の y 切片は 1, x 切片は $-1/a$ であり、垂直平板からのずれは $1/a$ で比較される。その結果、 $\phi = 0$ の場合 $a = 2$ は収束し、 $a = 1.818$ では A_n は求まらないが、 $\phi = \pi/3$ の場合は $a = 1.667$ でも収束することが分かった。($a = 1.538$ では収束しなかった。)

以上の結果から $\phi = \pi/3$ としたときの (13) 式を用いると最も収束が良いことが分かった。

t-平面の図形が垂直平板からある程度以上ずれている場合には (13) 式では写像係数が求まらない。そこで最初、垂直平板に近い図形の A_n を求め、それを用いて垂直平板からのずれが少し大きい図形の係数を求め、同様の手順で実際の図形の近似写像係数を求めるという手法を用いた。
すなわち

$$\begin{cases} t_x = f(\phi) \\ t_y = g(\phi) \end{cases} \quad (14)$$

と表されるとき、上式の写像係数を直接求めるのではなく t_x 代わりに

$$t'_x = r \cdot f(\phi) \quad 0 < r < 1$$

を用いた写像係数を求める。そのときの係数を $A_n^{(r)}$ とすると、

$$t'_x = (r + \Delta r) \cdot f(\phi), \quad 0 < r + \Delta r \leq 1$$

の写像係数を求めることが可能である。 $r + \Delta r = 1$ のときは $t'_x = t_x$ の写像係数を求めることになる。 t_y に対する $t'_x = (r + \Delta r) \cdot f(\phi)$ をフーリエ展開すると、

$$t'_x = C_0^{(r+\Delta r)} + \sum_1^{\infty} C_n^{(r+\Delta r)} \cos n\phi$$

となり、(13) 式を求めたときと同様の手順で、

$$\left\{ \begin{aligned} A_{-1}^{(r+\Delta r)} &= \frac{1}{2} A_{-1}^{(r)} - \frac{1}{2} \{ (A_1^{(r)} - C_1^{(r+\Delta r)}) + 2 \cos \phi (A_2^{(r)} - C_2^{(r+\Delta r)}) + (2 \cos 2\phi + 1) (A_3^{(r)} - C_3^{(r+\Delta r)}) \\ &\quad + (2 \cos 3\phi + 2 \cos \phi) (A_4^{(r)} - C_4^{(r+\Delta r)}) + \dots \} \\ A_0^{(r+\Delta r)} &= A_0^{(r)} \\ A_1^{(r+\Delta r)} &= C_1^{(r+\Delta r)} - \frac{1}{2} A_{-1}^{(r)} + \frac{1}{2} \{ (A_1^{(r)} - C_1^{(r+\Delta r)}) + 2 \cos \phi (A_2^{(r)} - C_2^{(r+\Delta r)}) \\ &\quad + (2 \cos 2\phi + 1) (A_3^{(r)} - C_3^{(r+\Delta r)}) + (2 \cos 3\phi + 2 \cos \phi) (A_4^{(r)} - C_4^{(r+\Delta r)}) + \dots \} \\ A_n^{(r+\Delta r)} &= A_n^{(r)} \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right. \quad (15)$$

が求められる。(15)式の係数 $A_n^{(r+dr)}$ は $r \rightarrow r + \Delta r$ となった場合にのみ用いられ、他は(13)式が用いられる。

Z-平面から ζ -平面上半面への写像は

$$\zeta = Z + \frac{1}{Z} \quad (16)$$

により得られる。

各平面のB(C)座標をそれぞれ b_t (t平面), b_z (Z平面), b_ζ (ζ -平面)とする。ここで、 $b_t = -2 \cot\left(\frac{h}{d} \pi \sin \beta_s\right)$ と表される。

z-平面の一樣流れは ζ -平面のB(C)点のわき出しに変換される。はく離点Fを過ぎるはく離流線を形成するために、前報と同様に Fig. 2; ζ 平面S点にわき出しを配置する。

複素速度ポテンシャルは

$$f(\zeta) = \frac{U_\infty d}{\pi} \ln(\zeta - b_\zeta) + m \cdot \ln(\zeta - 2 \cos \sigma) \quad (17)$$

と表すことができる。ここで $2 \cos \sigma$ は ζ -平面S点の座標を表す。

すなわち、F点をはく離点とする流れは、 ζ -平面では、もともとあったわき出し以外に1つのわき出しを付け加えることにより表される。

(17)式で未知数は m と σ である。

ζ -平面の複素速度は、

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{U_\infty d}{\pi} \frac{1}{\zeta - b_\zeta} + m \frac{1}{\zeta - 2 \cos \sigma} \quad (18)$$

となる。 ζ -平面でF点はよどみ点となるので $(df/d\zeta)_F = 0$ から次の式が得られる。

$$2 \cos \sigma = s_\zeta + \frac{m\pi}{U_\infty d} (s_\zeta - b_\zeta) \quad (19)$$

ここで s_ζ はF点の ζ -平面での実座標を示す。 m, σ を定めるためにはもう1つの関係式を必要とする。Jandali & Parkinson⁽⁴⁾と同様に、はく離点における圧力は背圧 P_b に等しいものとし、 P_b は経験的に与えられる値を用いる。

ベルヌーイの定理を用いて圧力係数 C_p は

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left| \frac{df}{dz} \right|^2 \quad (20)$$

ここで P_∞ は無限上流における圧力を意味する。はく離点における P_b が経験的に与えられるとすると、背圧係数 C_{p_b} は、

$$C_{p_b} = \frac{P_b - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left| \frac{df}{dz} \right|_F^2 \quad (21)$$

と書ける。

(21)式からもう一つの m と σ の関数が導かれる。そこでその関係を導いてみよう。

z-平面の複素速度は次のように表される。

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \quad (22)$$

(22)式の右辺各項は,

$$\frac{df}{d\zeta} = \left(\frac{U_\infty d}{\pi} + m \right) \cdot \frac{(\zeta - s_\zeta)}{(\zeta - b_\zeta)(\zeta - 2 \cos \sigma)}$$

$$\frac{d\zeta}{dZ} = 1 - \frac{1}{Z^2}$$

$$\frac{dZ}{dt} = 1 / (dt/dZ) = 1 / (A_{-1} - \sum_1^\infty n A_n Z^{-n-1})$$

$$\frac{dt}{dZ} = -\frac{2}{\alpha_2} \cdot \frac{\pi}{d} \cdot e^{\frac{\pi}{d} Z} = \frac{\pi}{d} \left(t + 2 \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)$$

となるから(22)式は

$$\frac{df}{dZ} = \left(\frac{U_\infty d}{\pi} + m \right) \frac{(\zeta - s_\zeta)}{(\zeta - b_\zeta)(\zeta - 2 \cos \sigma)} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \frac{1}{A_{-1} - \sum_1^\infty n A_n Z^{-n-1}} \cdot \frac{\pi}{d} \left(t + \frac{2 \alpha_1}{\alpha_2} \right) \quad (23)$$

t - 平面から Z - 平面への写像は EFG で非等角となり, F 点是一位の特異点となるから (dt/dZ)_F = 0 である。従って,

$$g(Z) = A_{-1} Z + A_0 + \sum_1^\infty A_n Z^{-n} \text{ とすると,}$$

$$\frac{dt}{dZ} = g'(Z)$$

をなく離点 s_z 近傍でテイラー展開した式,

$$g'(Z) = g'(s_z) + (Z - s_z) g''(s_z) + \frac{1}{2} (Z - s_z)^2 g'''(s_z) + \dots$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \lim_{Z \rightarrow s_z} \frac{\zeta - s_\zeta}{g'(Z)} &= \lim_{Z \rightarrow s_z} \frac{(Z - s_z) \left(1 - \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{s_z} \right)}{(Z - s_z) g''(s_z) + \frac{1}{2} (Z - s_z)^2 g'''(s_z)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{s_z^2}}{g''(s_z)} \end{aligned}$$

と表されるから, はく離点の複素速度は,

$$\left(\frac{df}{dZ} \right)_F = U_\infty \left(1 + \frac{m\pi}{U_\infty d} \right) \frac{\left(1 - \frac{1}{s_z^2} \right)^2}{(s_\zeta - b_\zeta)(s_\zeta - 2 \cos \sigma)} \cdot \frac{(2i + 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2})}{g''(s_z)} \quad (24)$$

となる。

Z - 平面でのなく離角を β とすると $s_z = e^{i\beta}$

$$g''(s_z) = \sum n(n+1) A_n e^{-i(n+2)\beta} \quad (25)$$

$$= C_\beta$$

として

$$\left| \frac{df}{dZ} \right|^2 = U_\infty^2 \left(1 + \frac{m\pi}{U_\infty d} \right)^2 \cdot \frac{64 \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2}{(s_\zeta - b_\zeta)^2 (s_\zeta - 2 \cos \sigma)^2} \cdot \frac{\sin^4 \beta}{C_\beta \bar{C}_\beta} \quad (26)$$

が得られる。ここで、 \bar{C}_β は共役複素数を表す。

(26)式と(19)式から、

$$\frac{m\pi}{U_\infty d} = \frac{1}{\frac{k}{8} (s_\zeta - b_\zeta)^2 \sin \left(\frac{h}{d} \pi \sin \beta_s \right) \frac{\sqrt{C_\beta \bar{C}_\beta}}{\sin^2 \beta} - 1} \quad (27)$$

が求められる。(27)式で、

$$k = \sqrt{1 - C_{p_b}} \quad (28)$$

を表す。

圧力係数 C_p は(23)式に $Z = e^{i\phi}$ を用い、(5)式、(16)式を組み合わせると、

$$\frac{df}{dZ} = U_\infty \left(1 + \frac{m\pi}{U_\infty d} \right) \frac{(2 \cos \phi - s_\zeta)}{(2 \cos \phi - b_\zeta)(2 \cos \phi - 2 \cos \sigma)} \cdot \frac{e^{2i\phi} - 1}{e^{2i\phi}} \cdot \frac{D_\phi}{C_\phi}$$

と表すことができる。ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} C_\phi = A_{-1} - \sum_1^\infty n A_n e^{-(n+1)i\phi} \\ D_\phi = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} + A_{-1} e^{i\phi} + A_0 + \sum_1^\infty A_n e^{-in\phi} \end{array} \right.$$

である。

従って、(20)式より

$$C_p = 1 - 4 \left(1 + \frac{m\pi}{U_\infty d} \right)^2 \frac{(2 \cos \phi - s_\zeta)^2}{(2 \cos \phi - b_\zeta)^2 (2 \cos \phi - 2 \cos \sigma)^2} \cdot \sin^2 \phi \frac{D_\phi \bar{D}_\phi}{C_\phi \bar{C}_\phi} \quad (29)$$

と表される。

円柱が圧力により受ける力は

$$D_p = 2h \int_0^{\beta_s} (P - P_b) \cos \theta d\theta \quad (30)$$

従って抵抗係数は

$$C_D = \frac{D_p}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot 2h\beta_s} = \frac{1}{\beta_s} \int_0^{\beta_s} C_p \cos \theta d\theta - C_{p_b} \frac{\sin \beta_s}{\beta_s} \quad (31)$$

より求められる。ここで、 θ は z -平面における角度を表す。

はく離流線は、

$$\text{Im}(f(\zeta)) = m\pi$$

から求められる。

$Z = X + iY$ とすると、

$$f(\zeta) = \frac{U_\infty d}{\pi} \ln \left(Z + \frac{1}{Z} - b\zeta \right) + m \ln \left(Z + \frac{1}{Z} - 2 \cos \sigma \right)$$

従って,

$$\pi m = \frac{U_\infty d}{\pi} \phi_1 + m \phi_2 \quad (32)$$

を満足する X , Y がはく離流線を構成する。ここで,

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2}}{X - b\zeta + \frac{X}{X^2 + Y^2}}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2}}{X - 2 \cos \sigma + \frac{X}{X^2 + Y^2}}$$

を表す。

$$R = X^2 + Y^2$$

$$\tan \phi = Y/X \quad \text{とすると,}$$

$$t = t_x + i t_y$$

$$t_x = A_{-1} R \cos \phi + A_0 + \sum_1^\infty \frac{A_n}{R^n} \cos n\phi$$

$$t_y = A_{-1} R \sin \phi - \sum_1^\infty \frac{A_n}{R^n} \sin n\phi$$

となり

$$\frac{z}{h} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{h} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} \cdot t_x \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2} t_y \right)^2 \right\} + i \psi \right\}$$

$$\tan \psi = \frac{\frac{\alpha_2}{2} t_y}{\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} t_x} \quad (33)$$

が z -平面のはく離流線を表す。

3. 剥離角及び背圧係数の経験値

前章で平行流路内に円柱が置かれた場合のはく離流に関する理論を展開した。本理論では、あらかじめ経験的に得られた、はく離角 β_s と背圧係数 C_{p_0} を必要としている。そこで、本章では、これまで得られた各研究者による β_s 及び C_{p_0} の値をまとめて示す。

無限平面内の一様流中の円柱回りの流れに関する研究は数多く行われている。⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾しかし、それに比較すると、壁に囲まれた流路内の円柱回りの流れに関する研究は少ない。

流路幅が円柱回りの流れに与える影響について調べたものに、岡本、竹内⁽¹⁰⁾、松和田、丹羽ら⁽¹¹⁾、

$$f(\zeta) = \frac{U_\infty d}{\pi} \ln \left(Z + \frac{1}{Z} - b\zeta \right) + m \ln \left(Z + \frac{1}{Z} - 2 \cos \sigma \right)$$

従って,

$$\pi m = \frac{U_\infty d}{\pi} \phi_1 + m \phi_2 \quad (32)$$

を満足する X, Y がはく離流線を構成する。ここで,

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2}}{X - b\zeta + \frac{X}{X^2 + Y^2}}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2}}{X - 2 \cos \sigma + \frac{X}{X^2 + Y^2}}$$

を表す。

$$R = X^2 + Y^2$$

$$\tan \phi = Y/X \quad \text{とすると,}$$

$$t = t_x + i t_y$$

$$t_x = A_{-1} R \cos \phi + A_0 + \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{R^n} \cos n\phi$$

$$t_y = A_{-1} R \sin \phi - \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{R^n} \sin n\phi$$

となり

$$\frac{z}{h} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{h} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} t_x \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2} t_y \right)^2 \right\} + i\psi \right\}$$

$$\tan \psi = \frac{\frac{\alpha_2}{2} t_y}{\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} t_x} \quad (33)$$

が z -平面のはく離流線を表す。

3. 剥離角及び背圧係数の経験値

前章で平行流路内に円柱が置かれた場合のはく離流に関する理論を展開した。本理論では、あらかじめ経験的に得られた、はく離角 β_s と背圧係数 C_{p_b} を必要としている。そこで、本章では、これまで得られた各研究者による β_s 及び C_{p_b} の値をまとめて示す。

無限平面内の一様流中の円柱回りの流れに関する研究は数多く行われている。⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾しかし、それに比較すると、壁に囲まれた流路内の円柱回りの流れに関する研究は少ない。

流路幅が円柱回りの流れに与える影響について調べたものに、岡本、竹内⁽¹⁰⁾、桧和田、丹羽ら⁽¹¹⁾、

鈴木・平野⁽¹²⁾、桧和田・馬淵⁽¹³⁾らの研究がある。

岡本・竹内⁽¹⁰⁾、桧和田・丹羽ら⁽¹¹⁾の研究は比較的低い h/d について行われており、($h/d < 0.438$)、鈴木・平野⁽¹²⁾、桧和田・馬淵⁽¹³⁾の研究は高い h/d について行われている ($h/d \leq 0.8$)。

背圧係数 C_{pb} と流路幅の関係を Fig. 4 に示す。

亜臨界のデータは各研究者により多少異なっているが h/d 大となるに伴って、 $|C_{pb}|$ は急激に増加する。超臨界のデータは鈴木・平野⁽¹²⁾らの結果以外、見出せなかった。 $h/d=0$ の実験は数多く行われているが代表的なものを図に示した。 $h/d=0$ の場合、ほとんどの結果が C_{pb} は -0.95 から -1.05 の間に収まるが、Achenbach⁽⁹⁾の C_{pb} は -1.225 とかなりかけ離れている。これは Achenbach が使用した円柱の縦横比が小さいためと考えられる。鈴木、平野⁽¹²⁾の超臨界の場合の結果を見ると、 $|C_{pb}|$ は亜臨界の場合よりも急激に h/d と共に増大する傾向が示されている。

次に、はく離角と h/d の関係を Fig. 5 に示す。図から亜臨界で h/d が $0.2 \sim 0.3$ 以下の場合には、はく離角 β_s は $76 \sim 80^\circ$ の範囲に入る。 $h/d > 0.2 \sim 0.3$ で、 β_s は増加し、 $h/d \geq 0.7$ で β_s は 90° を超える。図から分かるように、鈴木・平野⁽¹²⁾が求めたはく離角は他の研究者が求めた値よりも幾分大きくなっている。

超臨界において、 β_s と h/d を系統的に調べた研究は見当らなかった。 $h/d=0$ の超臨界の場合には $\beta_s \approx 120^\circ$ 程度とされている。

本理論で用いた C_{pb} および β_s は、これらの実験結果に基づく値を用いた。

4. h/d 小の場合における近以解

h/d 小の場合には取り扱いが容易になる。Fig. 2 に z -平面から t -平面への写像を示したが、図からも推測されるように、 h/d 小のときの t -plane のスリットは円弧に近くなる。

t -平面で、

$$(t_x - t_{x_0})^2 + t_y^2 = r_0^2 \quad (34)$$

$$t_{x_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}} - \frac{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}}{\alpha_2}$$

$$r_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}} + \frac{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}}{\alpha_2}$$

を考える。これは t -平面の x, y 切片をとる円弧を表す。 t -平面でこの円弧の中心角を Ω とすると、

$$\Omega = \tan^{-1} (2/t_{x_0}) \quad (35)$$

と表される。

2章と同様に t -平面を無限平面の上半面に写像する関数を求める。

鈴木・平野⁽¹²⁾、桧和田・馬淵⁽¹³⁾らの研究がある。

岡本・竹内⁽¹⁰⁾、桧和田・丹羽ら⁽¹¹⁾の研究は比較的低い h/d について行われており、($h/d < 0.438$)、鈴木・平野⁽¹²⁾、桧和田・馬淵⁽¹³⁾の研究は高い h/d について行われている ($h/d \leq 0.8$)。

背圧係数 C_{pb} と流路幅の関係を Fig. 4 に示す。

亜臨界のデータは各研究者により多少異なっているが h/d 大となるに伴って、 $|C_{pb}|$ は急激に増加する。超臨界のデータは鈴木・平野⁽¹²⁾らの結果以外、見出せなかった。 $h/d=0$ の実験は数多く行われているが代表的なものを図に示した。 $h/d=0$ の場合、ほとんどの結果が C_{pb} は -0.95 から -1.05 の間に収まるが、Achenbach⁽⁹⁾の C_{pb} は -1.225 とかなりかけ離れている。これは Achenbach が使用した円柱の縦横比が小さいためと考えられる。鈴木、平野⁽¹²⁾の超臨界の場合の結果を見ると、 $|C_{pb}|$ は亜臨界の場合よりも急激に h/d と共に増大する傾向が示されている。

次に、はく離角と h/d の関係を Fig. 5 に示す。図から亜臨界で h/d が $0.2 \sim 0.3$ 以下の場合には、はく離角 β_s は $76 \sim 80^\circ$ の範囲に入る。 $h/d > 0.2 \sim 0.3$ で、 β_s は増加し、 $h/d \geq 0.7$ で β_s は 90° を超える。図から分かるように、鈴木・平野⁽¹²⁾が求めたはく離角は他の研究者が求めた値よりも幾分大きくなっている。

超臨界において、 β_s と h/d を系統的に調べた研究は見当らなかった。 $h/d=0$ の超臨界の場合には $\beta_s \approx 120^\circ$ 程度とされている。

本理論で用いた C_{pb} および β_s は、これらの実験結果に基づく値を用いた。

4. h/d 小の場合における近以解

h/d 小の場合には取り扱いが容易になる。Fig. 2 に z -平面から t -平面への写像を示したが、図からも推測されるように、 h/d 小のときの t -plane のスリットは円弧に近くなる。

t -平面で、

$$(t_x - t_{x_0})^2 + t_y^2 = r_0^2 \quad (34)$$

$$t_{x_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}} - \frac{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}}{\alpha_2}$$

$$r_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}} + \frac{\alpha_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}}{\alpha_2}$$

を考える。これは t -平面の x, y 切片をとる円弧を表す。 t -平面でこの円弧の中心角を Ω とすると、

$$\Omega = \tan^{-1}(2/t_{x_0}) \quad (35)$$

と表される。

2章と同様に t -平面を無限平面の上半面に写像する関数を求める。

写像関数,

$$s = - \frac{2}{\tan(\frac{1}{2}\varrho)} \cdot \frac{t - t_{x_0} + r_0}{t - t_{x_0} - r_0} \quad (36)$$

を用いると、 t -平面は s -平面に変換され、Fig. 6に示すように t -平面上の円弧スリットEFGは、 s -平面の原点上の $2i$ の垂直スリットに写像される。 t -平面の A, D, ∞ 点および円弧の中心 O 点は s -平面ではそれぞれ実軸上の $-2/\tan(\frac{1}{2}\varrho)$ 、 $2/\tan(\frac{1}{2}\varrho)$ に写像される。また、 t -平面の O' 点に関するE(G)の対称な点 E' 点が s 平面の無限遠点に対応する。

前と同様に,

$$s = Z - \frac{1}{Z} \quad (37)$$

$$\zeta = Z + \frac{1}{Z}$$

とすると、B(C)点及びA(D)点の ζ -平面での座標 b_ζ 、 a_ζ は実軸上の

$$b_\zeta = \frac{2 e^{-\frac{h}{d} \pi \cos \beta_s}}{\alpha_1 \sin(\frac{1}{2}\varrho) + \alpha_2 \cos(\frac{1}{2}\varrho)} \quad (38)$$

$$a_\zeta = - \frac{2}{\sin(\frac{1}{2}\varrho)}$$

に対応する。(Fig. 6)

ζ -平面では無限遠点がわき出し、若しくは吸い込みに対応しない。そこで

$$\omega = \frac{\zeta - b_\zeta}{\zeta - a_\zeta} \quad (39)$$

により、 ω -平面に写像する。(Fig. 6)

(39)の変換によりA(D)点は無限遠点となり E' 点は座標1にくる。また、E, F, G, O' 点は ω -平面では0と1の間に写像される。 ω 平面の原点はB(C)点に対応する。それぞれの平面の各点の座標をTable 1に示す。

このようにして、もとの流れは ω 平面での原点に1つのわき出しのある流れに帰着された。第2章に行った手順と同様にはく離流線を伴う流れを実軸上にもう1つのわき出しを置くことにより構成すると、 ω 平面の複素速度ポテンシャルは

$$f = \frac{U_\infty d}{\pi} \ln \omega + m \ln(\omega - p_\omega) \quad (40)$$

と表される。

ここで、 p_ω はわき出しの置かれる実軸上の座標を示す。

F点上で流速=0より,

$$p_\omega = \frac{b_\zeta}{a_\zeta} \left(1 + \frac{m\pi}{U_\infty d} \right) \quad (41)$$

(41)式の $\frac{m\pi}{U_\infty d}$ は、はく離点における背圧係数 C_{p_b} が与えられれば定まる。 z -平面の複素速度

は,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{df}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dZ} \cdot \frac{dZ}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \\ &= U_{\infty} \cdot \frac{8r_0}{\alpha_2} \cot\left(\frac{1}{2}\varrho\right) \left(1 - \frac{b_{\zeta}}{a_{\zeta}}\right) \left(1 + \frac{m\pi}{U_{\infty}d}\right) \frac{\omega - 1}{\omega(\omega - p\omega)} \frac{Z - \frac{1}{Z}}{(\zeta - a_{\zeta})^2} \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{e^{\frac{\pi}{d}Z}}{(r_0 + t_{x_0} - t)^2} \end{aligned} \quad (42)$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{ここで,} \quad a_1 &= 2 \cot\left(\frac{1}{2}\varrho\right) \\ a_2 &= 2 e^{-\frac{h}{d}\pi} \cdot \cot\left(\frac{1}{2}\varrho\right) \\ a_3 &= a_1 + \frac{\alpha_2^2}{a_1 + e^{-\frac{h}{d}\pi}} \end{aligned}$$

と置いて、Z-平面の単位半円上で考える。すなわち、

$$Z = e^{i\varphi} \text{ とすると,}$$

$$\left| \frac{df}{dz} \right|^2 = B^2 U_{\infty}^2 \frac{(1 + \bar{m})^2 \sin^2 \varphi (a_2^2 + 4 a_3^2 \sin^2 \varphi) (a_1^2 + 4 \sin^2 \varphi)}{(2 \cos \varphi - b_{\zeta})^2 (2 \cos \varphi - a_{\zeta})^2 [2 \cos \varphi \left\{ 1 - \frac{b_{\zeta}}{a_{\zeta}} (1 + \bar{m}) \right\} + b_{\zeta} \bar{m}]^2} \quad (43)$$

と表される。上式で、

$$\begin{aligned} B &= 4 \alpha_2 r_0 \cot\left(\frac{1}{2}\varrho\right) \frac{(a_{\zeta} - b_{\zeta})^2}{a_{\zeta}} \cdot \frac{1}{(a_2 + a_1 a_3)^2} \\ \bar{m} &= \frac{m\pi}{U_{\infty}d} \end{aligned}$$

である。

はく離点は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ であるから(43)式を用いて、

$$\bar{m} = \frac{1}{\frac{a_{\zeta}^2 b_{\zeta}^2 k \sin\left(\frac{h}{d}\pi \sin \beta_s\right)}{4(a_{\zeta} - b_{\zeta})^2} - 1} \quad (44)$$

が得られ(41)式から $p\omega$ が定まる。

はく離流線は ω 平面で、

$$\text{Im}(f) = m\pi$$

で表される。 ω を Z 平面の座標 (X, Y) で表し、それを z-平面に逆写像すれば良い。

(X, Y) は次式を満たす。

$$\bar{m}\pi = \phi_1 + \bar{m}\phi_2 \quad (45)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left[\frac{(b_\zeta - a_\zeta) \left(Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)}{\left(X + \frac{X}{X^2 + Y^2} - b_\zeta \right) \left(X + \frac{X}{X^2 + Y^2} - a_\zeta \right) + \left(Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)^2} \right]$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left[\frac{(b_\zeta - a_\zeta) \left(Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)}{\left(X + \frac{X}{X^2 + Y^2} - b_\zeta \right) \left(X + \frac{X}{X^2 + Y^2} - a_\zeta \right) + \left(Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)^2} \right]$$

$$p_\omega \left\{ \left(X + \frac{X}{X^2 + Y^2} - a_\zeta \right)^2 + \left(Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)^2 \right\}$$

あるいは、 ω 平面では、

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_y}{\omega_x} \right)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_y}{\omega_x - p_\omega} \right)$$

と表され、 ω 平面での流線は無限遠で、

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \tan \left(\frac{\bar{m}\pi}{1 + \bar{m}} \right) \quad (46)$$

に漸近する。

z -平面のはく離流線は(33)式で表される。 z 平面の無限遠での2本のはく離流線の間隔を $2H$ とすると、

$$\frac{H}{h} = \frac{d}{h} \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} \quad (47)$$

と表される。

ここで、この近似解法は h/d 小の場合に成立するが、第2章に示した解法を補助する点で2つの利点があると考えられる。

第1は h/d 小の場合、 t 平面の写像図形は円弧に近くなり、 h/d が比較的大きい場合と比べて、垂直スリットからのずれが大きい。従って、 $t = A^{-1}Z + A_0 + \sum_1^{\infty} A_n Z^{-n}$ を用いて写像関数を求める計算は容易に収束しないためである。

第2に、超臨界の場合、はく離角が 120° 程度になるが、この場合Fig. 3にも示されているように、 h/d 小で t -平面では x に関して2価関数になる場合が生じる。2価関数になった場合、2章で用いた解法では写像関数を求めることができない。しかし、この近似解法は1価関数、2価関数にかかわらず解を求めることができる。

5. 結果と考察

本理論により求めた亜臨界、及び超臨界域における円柱表面圧力分布と実験結果との比較を、Fig. 7～12に示す。Fig. 7は $h/d = 0$ の場合の結果で、はく離角、背圧係数、および実験点は鈴木・平野⁽¹²⁾の結果を用いている。 $h/d = 0$ の場合には亜臨界域、超臨界域とも理論と実験は、良く一致する。

h/d 小の場合の亜臨界領域における円柱表面圧力分布をFig. 8に示す。実線、及び破線はそれぞれ $h/d = 0.075$ と $h/d = 0.2$ の結果である。一点鎖線は第4章で述べた近似解を用いた結果である。 $h/d = 0.075$ の場合には近似解と厳密解の差は小さいが、 $h/d = 0.2$ の場合は少し大きくなる。実験値は鈴木・平野⁽¹²⁾の結果を示したものであるが、理論と実験は良く一致している。

Fig. 9, 10に $h/d = 0.268$, 及び $h/d = 0.385$ の場合の亜臨界と超臨界域における円柱回りの圧力分布を示す。実験値はいずれも鈴木・平野⁽¹²⁾の結果を用いた。亜臨界域における理論値と実験値の一致は良いが、超臨界域では極小値を示す付近で理論値の方が上にずれる。

Fig. 11に $h/d = 0.5$ の場合の結果を示す。この場合も同様に、亜臨界域では理論値と実験値は良く一致するが、超臨界域で両者のずれが現われる。

$h/d = 0.6$ 及び 0.667 の結果をFig. 12に示す。この場合、超臨界の実験結果はなかったので、亜臨界の結果のみを示した。 $h/d = 0.6$ の場合と比べ $h/d = 0.667$ の場合の方が理論値と実験値の差は大きい。また、実験値の方が理論値の上にくることが分かる。

圧力分布の結果を見ると、亜臨界域では h/d の広い範囲にわたって理論と実験の一致は良い。一方、超臨界域においては両者の一致は比較的良いが、はく離点近くで理論値の方が低い値を示す。しかし、比較すべき実験結果が鈴木・平野⁽¹²⁾のものに限られていたため十分な検討はできなかった。更に詳細な実験が望まれる。

Fig. 13は各研究者の実験から得られた C_{p_0} , β_s を用いて本理論から求められたはく離流線を示す。垂直平板の場合には前報で示したように h/d により流線の広がり大きく変化するが、円柱の場合には亜臨界、超臨界の場合とも h/d による差異は小さい。 h/d が大きくなるとはく離流線の広がり幅 H は小さくなるが、亜臨界の場合 $h/d \leq 0.667$ で H/h は1.0と1.3の間に、また、超臨界の場合には $h/d \leq 0.5$ で H/h は0.49と0.58の間にくる。

Fig. 14に抵抗係数 C_D と h/d の関係を示す。各研究者の C_{p_0} , β_s の測定値のばらつきのために、それらを用いて本理論から求めた C_D の値もばらつく。実線は亜臨界域におけるそれらの結果の最小二乗曲線を表す。破線は超臨界域における鈴木・平野⁽¹²⁾の実験結果から求められた抵抗係数である。亜臨界域の結果で $h/d = 0$ の場合の実験値($C_D = 1.17$)と理論値($C_D = 1.06$)の間にはずれがあるが、全体として両者は良く一致している。超臨界の場合、圧力係数分布では h/d 大ではく離点近くで理論値と実験値の間に若干の差が見られたが C_D は両者とも良く一致している。

6. 結 論

平行流中の鈍い物体回りのポテンシャル流理論を円柱の場合に適用し、円柱表面圧力分布、はく離流線、抵抗係数の h/d 依存性を調べ、実験結果と比較した。

その結果、亜臨界域では圧力係数は実験と良く一致することが示された。超臨界域でははく離点近くで圧力分布にずれを生じるが、全体としては比較的良い一致を示す。はく離流線は流路幅の影響をあまり受けないことが示された。抵抗係数も亜臨界の $h/d \rightarrow 0$ の場合を除いて良い一致を示した。

References

- (1) Lamb, S.H., "Hydrodynamics", Cambridge University press, (1932).
- (2) Roshko, A., "On the wake and drag of bluff bodies", J. Aero. Sci., 22, pp124 (1955).
- (3) Wu, T. Y., "A wake model for free-streamline flow theory", J. Fluid Mech., 13, pp161 (1962).
- (4) Parkinson, G. V. & Jandali, T., "A wake source model for bluff body potential flow", J. Fluid Mech., 40, pp577 (1970).
- (5) 椎名 "鈍い物体まわりの非粘性流れにおよぼす流路壁の影響・I (垂直平板の場合) JAERI-M-85-154 (1985).
- (6) 木谷, 有江, "平面上のにおい物体をよぎる非粘性せん断流れの理論 (第2報, 半だ円柱および任意形状物体への適用)" 機論, 41-349, pp2656 (1975).
- (7) Roshko, A., "On the development of turbulent wakes from vortex street", NACA Rep. 1191 (1954).
- (8) Roshko, A., "Experiment on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number", J. Fluid Mech., 10, pp345 (1961).
- (9) Achenbach, E., "Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re=5 \times 10^6$ ", J. Fluid Mech., 34, pp625, (1968).
- (10) 岡本・竹内, "風洞側壁が二次元円柱のまわりの流れおよびその後流に及ぼす影響", 機論, 41-341, pp181 (1975).
- (11) 桧和田・丹羽, "円柱からの局所物質伝達に対するブロッキング比効果に関する研究", 機論 42-360, pp2481 (1976).
- (12) 鈴木・平野 "円柱まわりの流れにおよぼす流路壁の影響 (臨界付近について)", 機論 44-385, pp3044 (1978).
- (13) 桧和田・馬淵, "高ブロッキング比における円柱まわりの流動と熱伝達", 機論, 46-409, pp1750 (1980).

Table 1 Positions on real axis of $A \sim E'$ in physical and mapping planes

	$A_\infty(A)$	$B_\infty(B)$	$C_\infty(C)$	$D_\infty(D)$	E	F	G	O'	E'
z -plane	$-\infty + di$	$-\infty + di$	$-\infty$	$+\infty$	$-h$	$\frac{h \sin \beta_s - i h \cos \beta_s}{i h \cos \beta_s}$	$-h$		
t -plane	$-\infty$	$-2 \cot(\frac{h}{d} \pi \sin \beta_s)$	"	$+\infty$	$\frac{h}{2} \frac{\pi}{\alpha_2} (e^{\frac{h}{d} \pi} - \alpha_1)$	$2i$	$\frac{h}{2} \frac{\pi}{\alpha_2} (e^{\frac{h}{d} \pi} - \alpha_1)$	$\cot(\frac{1}{2} \varrho) - \tan(\frac{1}{2} \varrho)$	$2 \cot(\frac{1}{2} \varrho)$
S -plane	$-\frac{2}{\tan(\frac{1}{2} \varrho)}$	$2 \left\{ \frac{\alpha_2 \tan(\frac{1}{2} \varrho) - \alpha_1}{\alpha_1 \tan(\frac{1}{2} \varrho) + \alpha_2} \right\}$	"	$-\frac{2}{\tan(\frac{1}{2} \varrho)}$	0	$2i$	0	$\frac{2}{\tan(\frac{1}{2} \varrho)}$	$\pm \infty$
ζ -plane	$-\frac{2}{\sin(\frac{1}{2} \varrho)} = a_\zeta$	$\frac{\frac{h}{2e} \pi \cos \alpha}{\alpha_1 \sin(\frac{1}{2} \varrho) + \alpha_2 \cos(\frac{1}{2} \varrho)} = b_\zeta$	"	$-\frac{2}{\sin(\frac{1}{2} \varrho)}$	-2	0	2	$\frac{2}{\sin(\frac{1}{2} \varrho)}$	$\pm \infty$
ω -plane	$-\infty$	0	0	$+\infty$	$\frac{b_\zeta + 2}{a_\zeta + 2}$	$\frac{b_\zeta}{a_\zeta}$	$-\frac{2 - b_\zeta}{2 - a_\zeta}$	$\frac{a_\zeta + b_\zeta}{2 a_\zeta}$	1

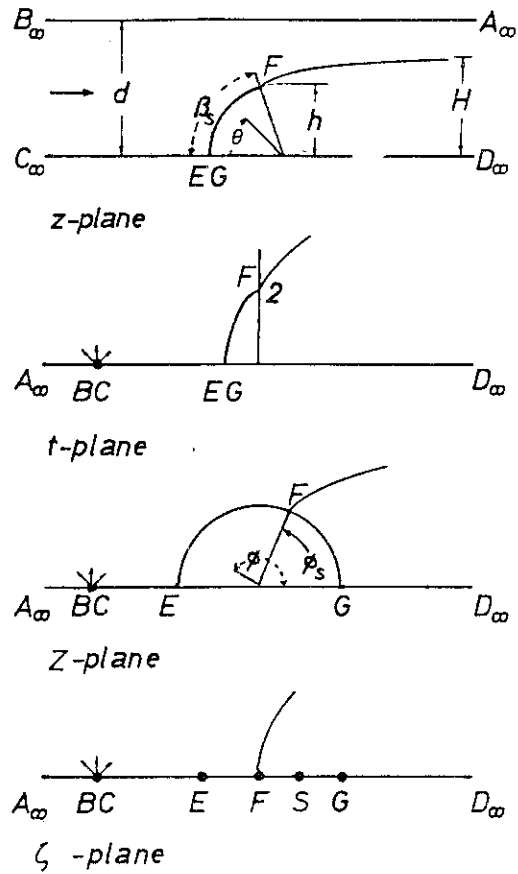


Fig. 1 Separation streamline model for flow past a circular cylinder in a parallel channels and its conformal mapping planes

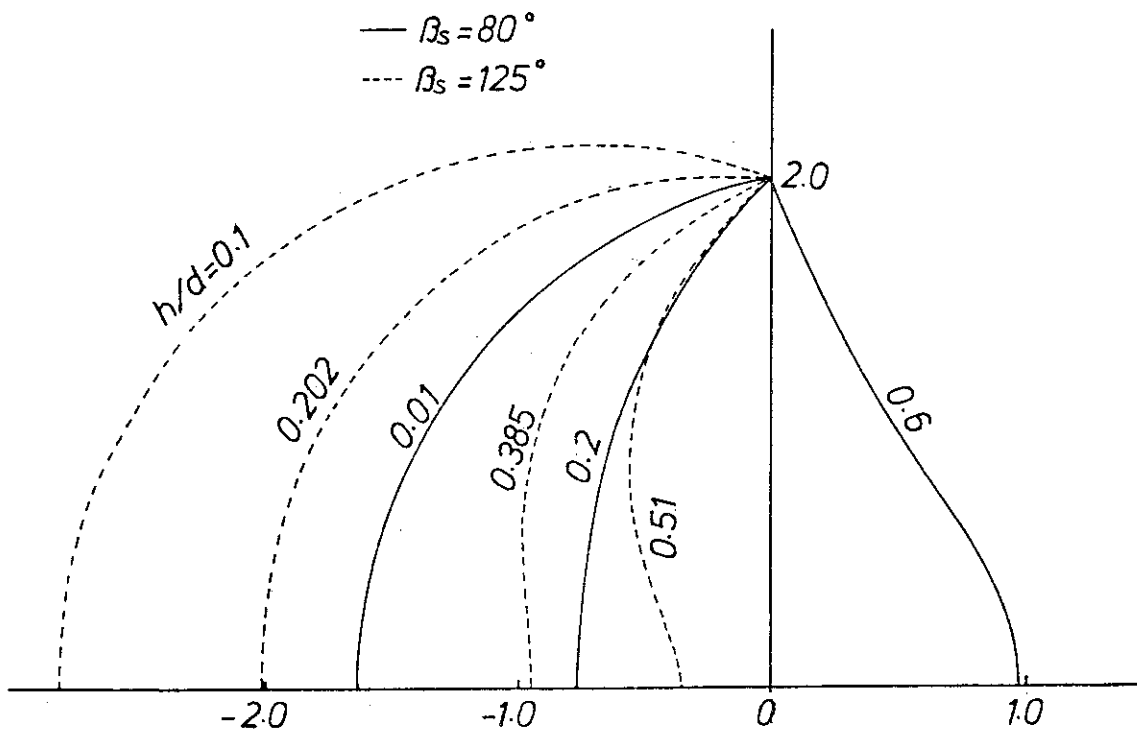


Fig. 2 Configuration of the slit EFG in the t-plane

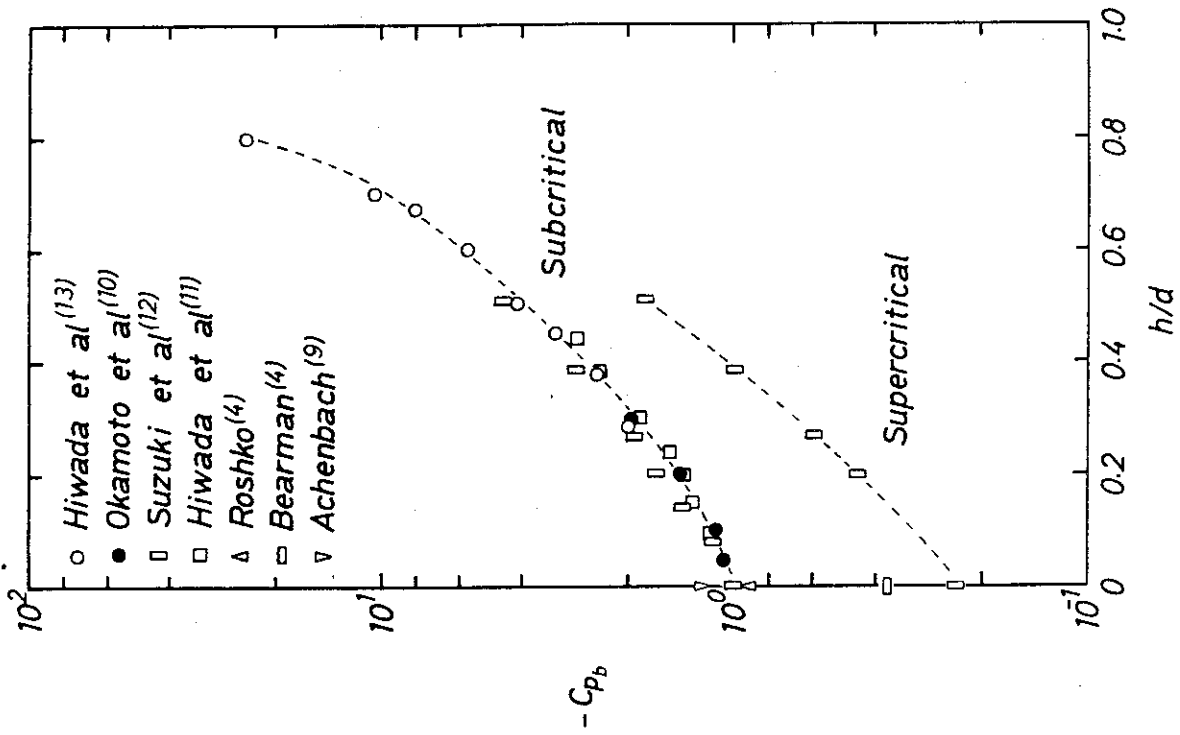


Fig. 4 Experimental values of back pressure coefficient as a function of h/d

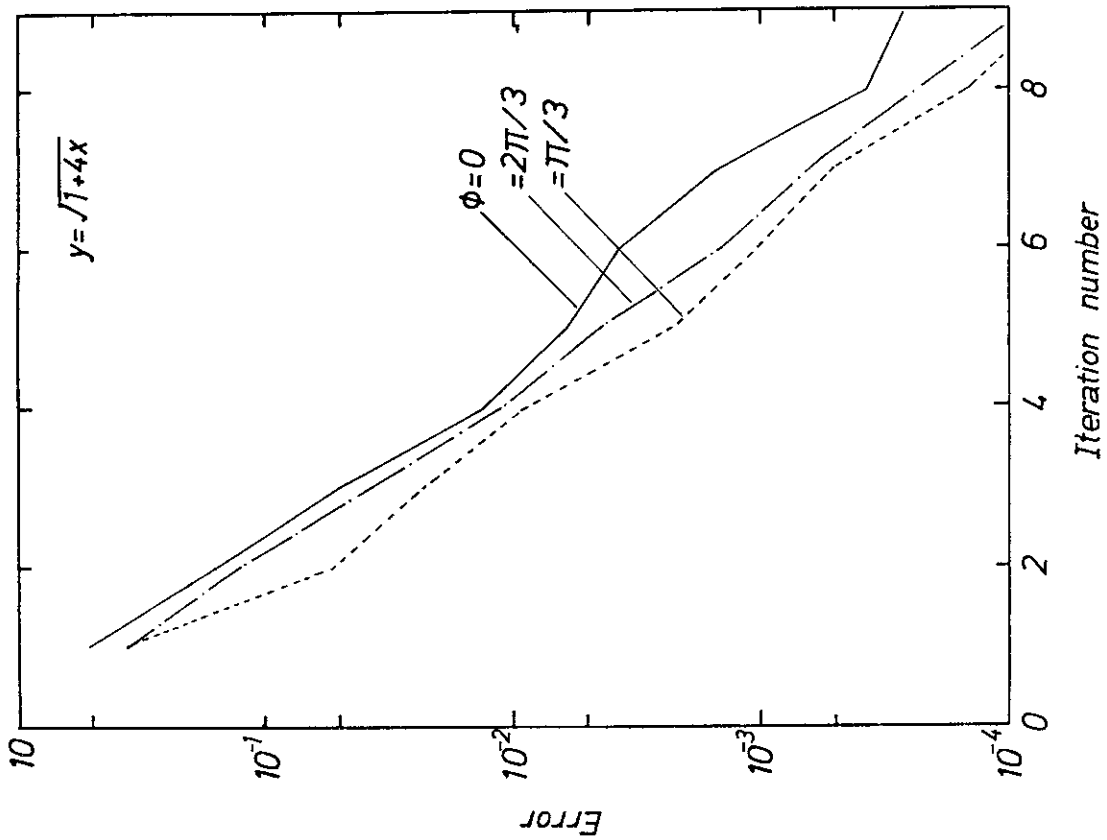


Fig. 3 Dependence of ϕ on the convergence of mapping function

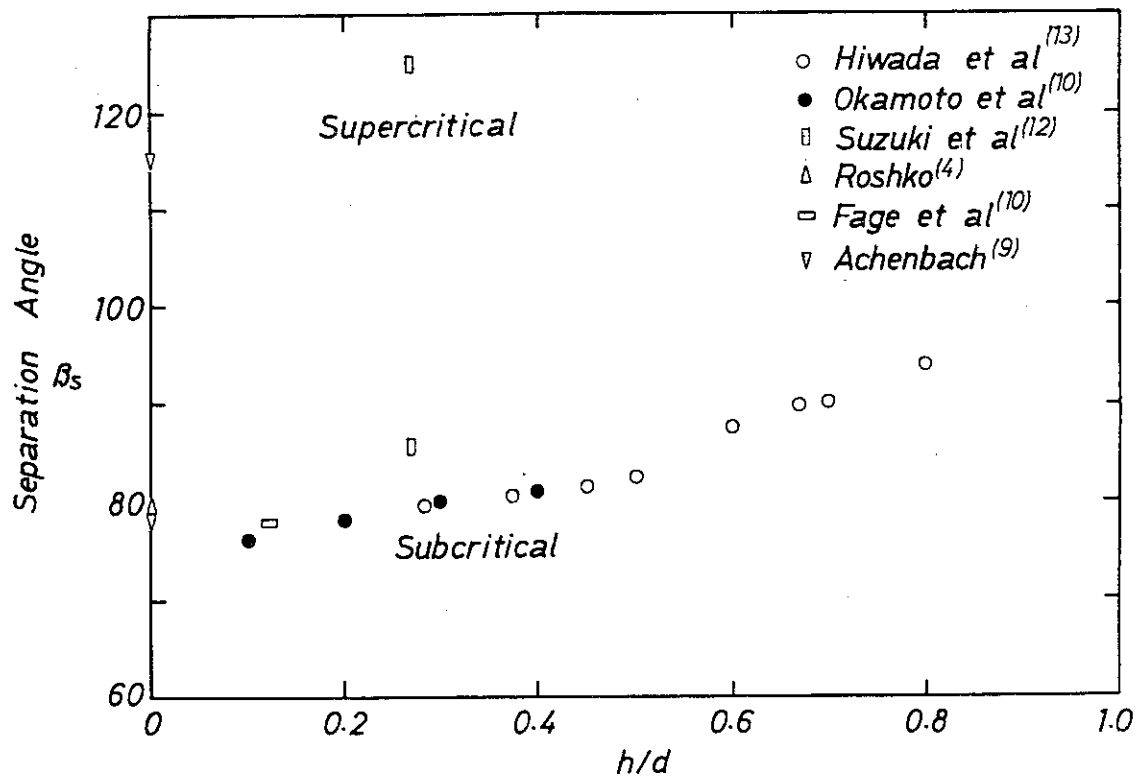


Fig. 5 Experimental values of separation angle as a function of h/d

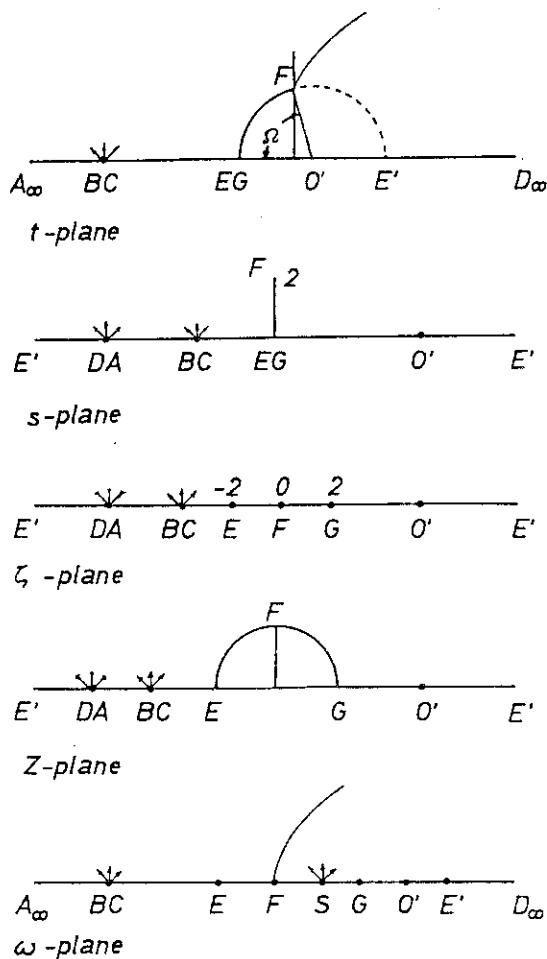


Fig. 6 Conformal mapping planes with small h/d . Slit EFG in the t -plane is close to a circular arc

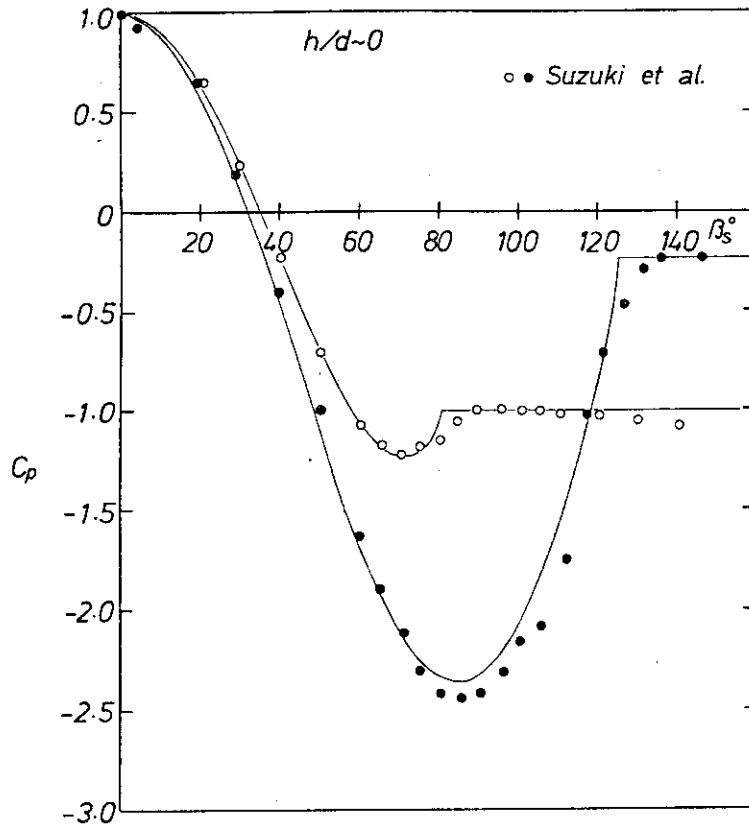


Fig. 7 Pressure distributions on circular cylinder for $h/d=0$ (subcritical - open circle - and supercritical - solid circle - regions)

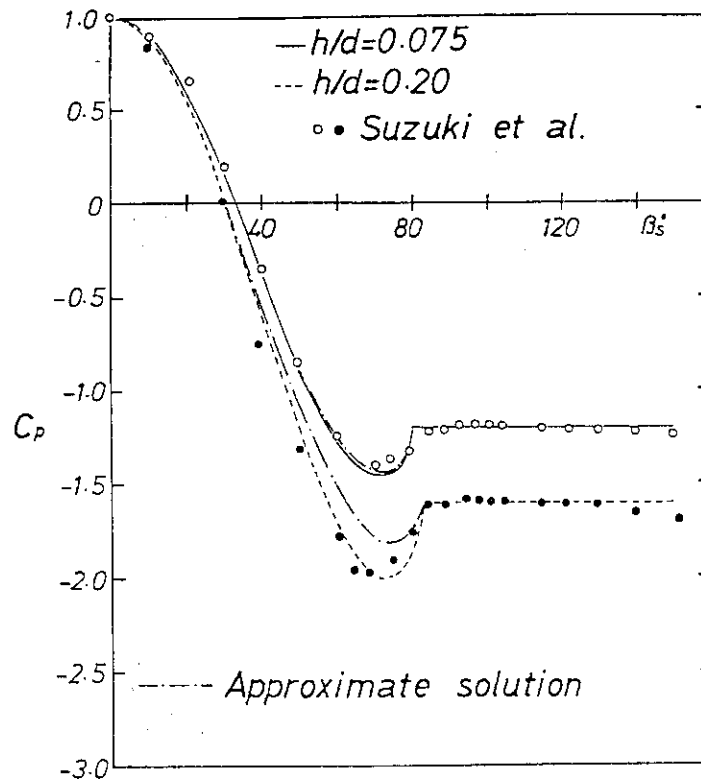


Fig. 8 Pressure distributions on circular cylinder (subcritical region) for $h/d=0.075$ and 0.2 . Dotted chain line is the results of approximate solution

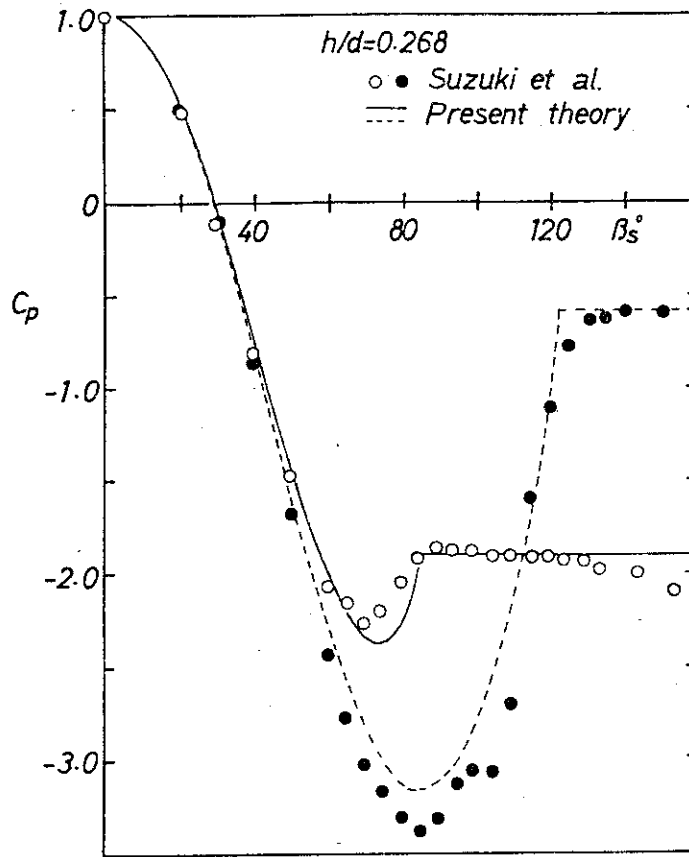


Fig. 9 Pressure distributions on circular cylinder for $h/d=0.268$ (subcritical-solid line- and supercritical-broken line- regions)

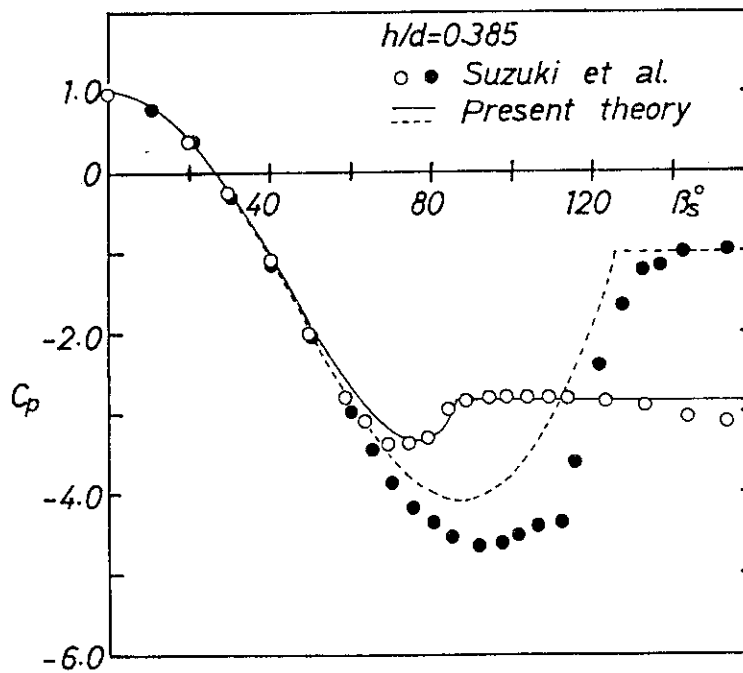


Fig. 10 Pressure distributions on circular cylinder for $h/d=0.385$ (subcritical-solid line - and supercritical- broken line- regions)

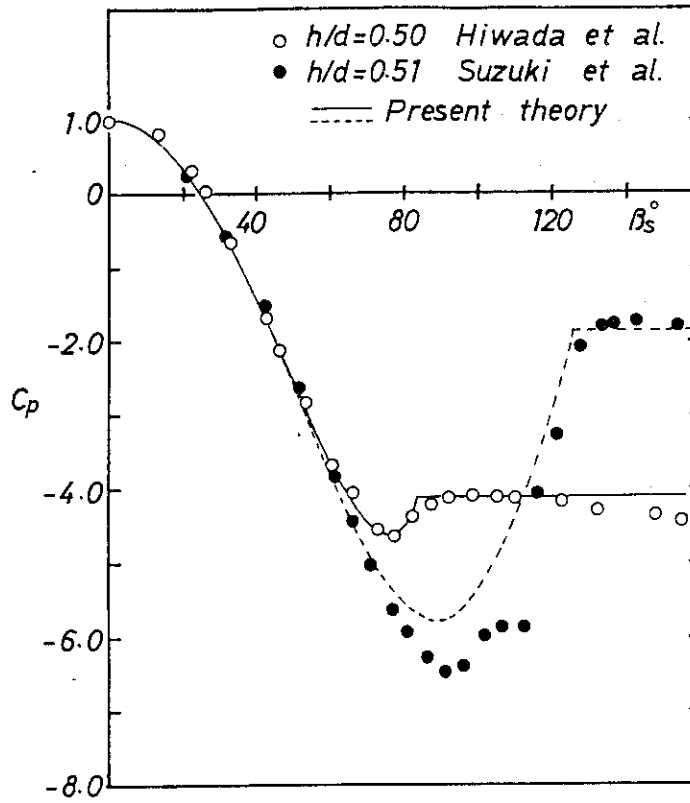


Fig. 11 Pressure distributions on circular cylinder for $h/d \approx 0.5$ (subcritical-solid line- and supercritical-broken line-regions)

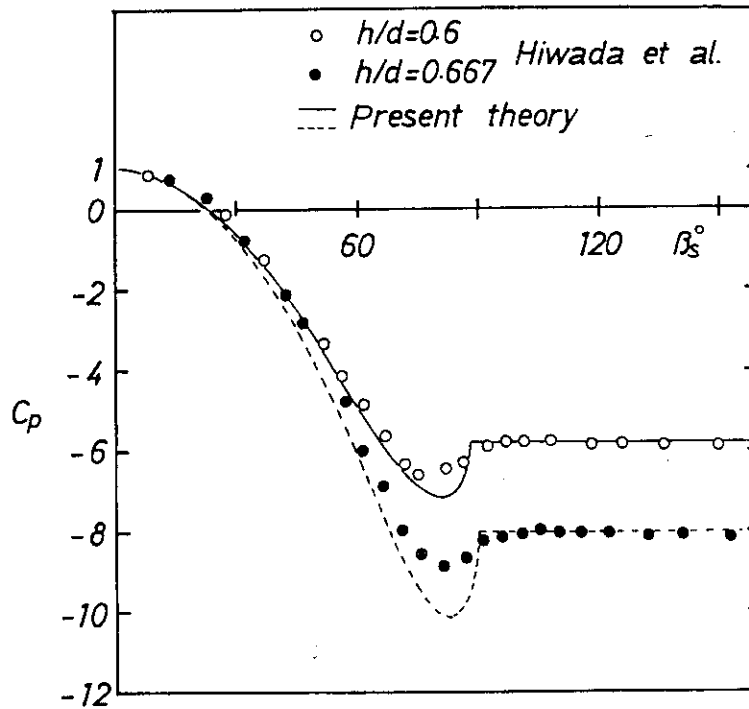


Fig. 12 Pressure distributions on circular cylinder for $h/d=0.6$ and 0.667 (subcritical region)

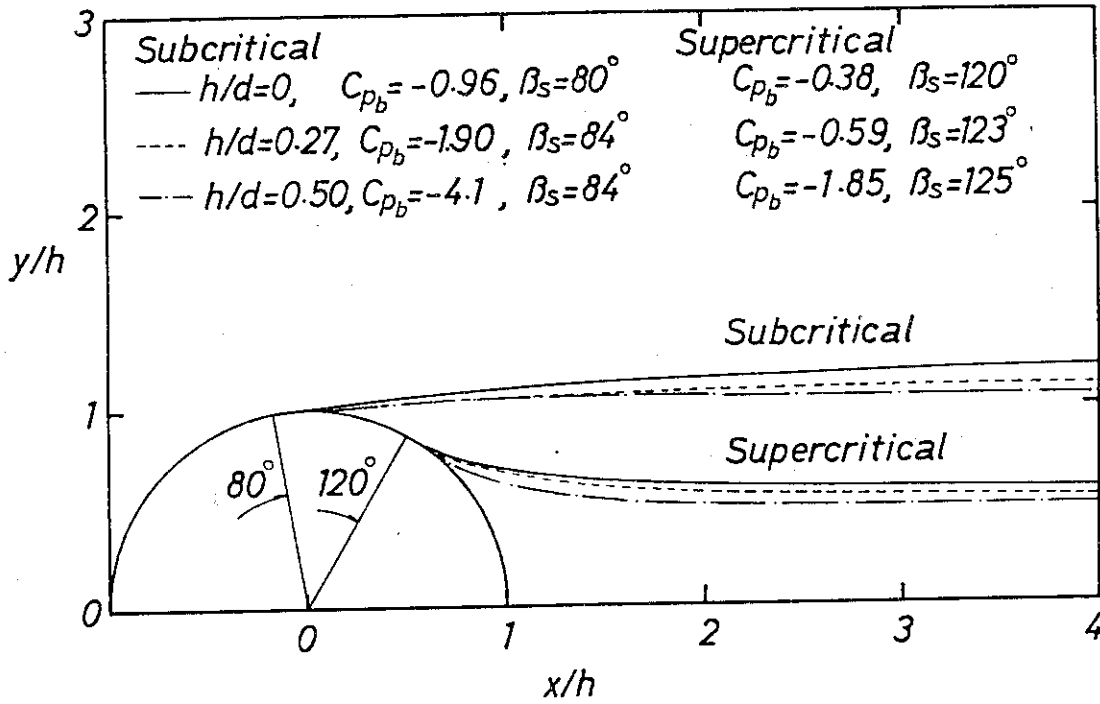


Fig. 13 Separation streamlines for circular cylinder by the present theory for subcritical and supercritical regions

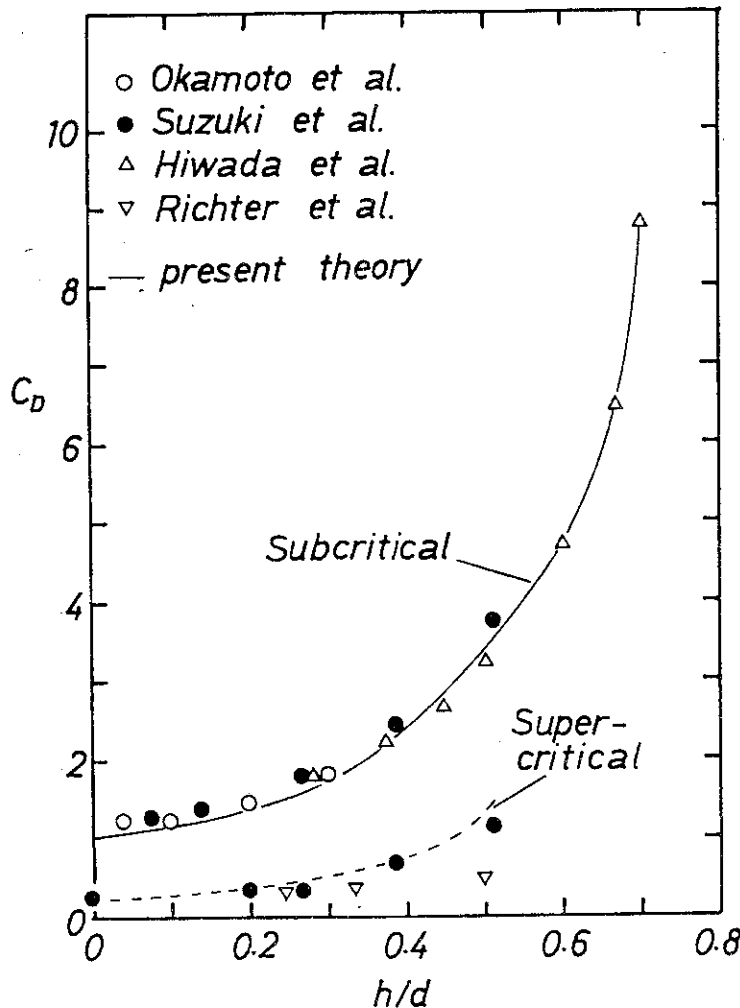


Fig. 14 Plot of drag coefficient as a function of h/d