

JAERI - M
85-171

流れの安定性に関する数値解法

1985年11月

藤 村 薫

日 本 原 子 力 研 究 所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1985

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 (株)高野高速印刷

流れの安定性に関する数値解法

日本原子力研究所東海研究所高温工学部

藤村 薫

(1985年10月9日受理)

流れの安定性問題の基礎方程式である Orr-Sommerfeld 方程式を数値的に取り扱うための種々の方法に対するレビューを行い、代表的な流れ場に適用して結果の比較を行う。取り上げる方法は、漸近解法、差分法、初期値解法及び直交多項式展開である。

Numerical Methods for Hydrodynamic Stability Problems

Kaoru FUJIMURA

Department of High Temperature Engineering
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received October 8, 1985)

Numerical methods for solving the Orr-Sommerfeld equation, which is the fundamental equation of the hydrodynamic stability theory for various shear flows, are reviewed and typical numerical results are presented. The methods of asymptotic solution, finite difference methods, initial value methods and expansions in orthogonal functions are compared.

Keywords: Hydrodynamic Stability, Orr-Sommerfeld Equation,
Numerical Methods, Eigenvalue Problems

目 次

1. はじめに	1
2. Orr-Sommerfeld 方程式の $\alpha R \gg 1$ での漸近解法	2
2.1 非粘性方程式の Tollmien 解	2
2.2 粘性解	3
2.2.1 局所転移点近似	3
2.2.2 Tollmien の改良粘性近似	4
2.3 固有値問題	5
3. 差分法	7
4. 初期値解法	8
4.1 Shooting 法	8
4.2 Riccati (Factorization) 法	10
4.3 Compound matrix 法	11
5. 直交関数展開	13
5.1 Hermite 多項式	14
5.2 Chebyshev 多項式	15
6. 各種解法による結果の比較	16
6.1 2次元 Poiseuille 法	16
6.2 Bickley のジェット	17
7. まとめ	19
参考文献	20

Contents

1. Introduction	1
2. Methods of Asymptotic Solution of the Orr-Sommerfeld Equation for large αR	2
2.1. Tollmien's Solutions of the Inviscid Equation	2
2.2. Viscous Solutions	3
2.2.1. Local Turning Point Approximations	3
2.2.2. Tollmien's Improved Viscous Approximations	4
2.3. Eigenvalue Problems	5
3. Finite Difference Methods	7
4. Initial Value Methods	8
4.1. Shooting Method	8
4.2. Riccati(Factorization) Method	10
4.3. Method of Compound Matrices	11
5. Expansions in Orthogonal Functions	13
5.1. Hermite Polynomials	14
5.2. Chebyshev Polynomials	15
6. Numerical Results	16
6.1. Plane Poiseuille Flow	16
6.2. Bickley's Jet	17
7. Conclusion	19
References	20

1. はじめに

2次元定常平行流に加えられた2次元攪乱波を考えると、流れ場は流れ関数 $\psi(t, x, y)$ を用いて完全に記述される。主流を $\bar{\psi}(y)$ 、攪乱を $\hat{\psi}(t, x, y)$ とすると、 $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}$ は渦度方程式

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - J(\psi, \Delta \psi) - R^{-1} \Delta^2 \psi = 0,$$

に支配される。ここで、 $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$, R は Reynolds 数である。この式から $\bar{\psi}$ の満たす式を引き去ると非線形攪乱方程式

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} - J(\bar{\psi}, \Delta \hat{\psi}) - J(\hat{\psi}, \Delta \bar{\psi}) - R^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} = J(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi}),$$

を得るが、ここで攪乱 $\hat{\psi}$ について線形化し、平行流の条件 $\partial \bar{\psi} / \partial y = U(y)$, $\partial \bar{\psi} / \partial x = 0$ を代入すると、平行流に対する線形攪乱方程式

$$[(\partial / \partial t + U \partial / \partial x) \Delta - U'' \partial / \partial x - R^{-1} \Delta^2] \hat{\psi} = 0$$

が求まる。ここで、プライムは y についての微分を表す。さて、 $\hat{\psi}$ を Fourier 分解

$$\hat{\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(y) e^{im\alpha(x-ct)}$$

すると、ノーマルモード $\phi(y) e^{i\alpha(x-ct)}$ の振幅 $\phi(y)$ について Orr-Sommerfeld 方程式

$$i\alpha(U-c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - i\alpha U'' \phi - R^{-1}(\phi^{iv} - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi) = 0$$

が得られる。ここで、 α は攪乱の波数、 $c = c_r + ic_i$ は複素位相速度である。 c_r は位相速度、 αc_i は線形増幅率を意味し、 i は虚数単位である。 ϕ についての境界条件としては固体壁上で粘着条件 $\phi = \phi' = 0$ 、若しくは無限遠方で無攪乱条件 $\phi = \phi' = 0$ が課せられる。Orr-Sommerfeld 方程式はこの境界条件と共に固有値問題を構成しており、波数 α と Reynolds 数 R を決めれば複素位相速度 c が線形固有値として定まる。

1960年代まで、Orr-Sommerfeld 方程式の固有値問題を解くためには $\alpha R \gg 1$, $\alpha R \ll 1$, $\alpha \ll 1$ などでの漸近解を用いた取り扱い(漸近解法)が行われてきた¹⁾。有名な Tollmien-Schlichting 波も漸近解法によって見い出されている。

しかし、1950年代に入ってから電子計算機の発展と普及は目覚ましく、1953年に Thomas²⁾は2次元 Poiseuille 流の固有値と固有関数を差分法を用いて解くことに成功した。それ以来、特に1960年代に入ってから流れの安定性理論の分野でも数値計算が飛躍的に進歩、発展し、1960年代後半以後今日に至るまで、数値計算が漸近解法に完全に取って代わっている。今日では、Orr-Sommerfeld 方程式の漸近解は数学的興味か、若しくは解の漸近的性質を調べる目的で

のみ求められており、線形安定性の問題のみならず弱非線形安定理論でも数値計算は不可欠となっている。

ところが、いざ Orr-Sommerfeld 方程式を数値的に取り扱おうとすると、数々の困難に遭遇する。その主な原因は 2. で述べる臨界層での解の激しい変化にある。従って、Thomas の研究以来今日に至るまで Orr-Sommerfeld 方程式の数値解法に関して行われてきた研究は、臨界層での特異性回避法の研究であるといっても過言ではない。

差分法については、Thomas が用いたスキームが既に完成の域にあり、Hughes³⁾ が若干の拡張を施した以外目立った進展はない。

初期値解法では RKG 法による Shooting 法が Gram-Schmidt の正規直交化の併用によって強力な武器となった¹⁾が、その他にも Invariant Imbedding の思想による Riccati 法⁵⁾と compound matrix 法⁶⁾が考案されている。

直交関数展開では、従来、Jacobi の多項式や Bessel 関数、Chandrasekhar-Reid 関数、Dolph-Lewis 関数などが用いられてきたが、1971年に Orszag⁷⁾が Chebyshev 多項式を用いて 2次元 Poiseuille 流の臨界状態を $\alpha_c = 1.02056$, $R_c = 5772.22$ と定めて以来、Chebyshev 多項式の重要性が認識され、多くの線形、非線形問題に用いられてきた。

本レポートでは、以上にのべた漸近解法、差分法、初期値解法及び直交多項式展開のレビューを行い、各種解法を用いた計算結果を比較検討する。

なお、巽と後藤⁴⁾、Drazin と Reid⁸⁾、Platten と Legros⁹⁾ に数値解法についての同様の解説があるので参照されたい。

2. Orr-Sommerfeld 方程式の $\alpha R \gg 1$ での漸近解法^{1,4,8,10,11,12)}

2次元 Poiseuille 流をはじめとして、良く知られている代表的な平行流は Reynolds 数が大きくなると微小攪乱に対して不安定となる。しかも、2次元 Poiseuille 流では αR が臨界点で 5800 程度であり、また、Hagen-Poiseuille 流や 2次元 Couette 流では $\alpha R \rightarrow \infty$ が問題となる。従って $\alpha R \gg 1$ での漸近解が重要になる。(2次元自由流では $\alpha R \ll 1$ の漸近解が重要であるが、この場合には臨界層特異性が生じないので漸近解は uniformly valid である)

2.1 非粘性方程式の Tollmien 解

Orr-Sommerfeld 方程式の解を $(\alpha R)^{-1}$ 展開

$$\varphi(y) = \varphi_0 + (\alpha R)^{-1} \varphi_1 + (\alpha R)^{-2} \varphi_2 + \dots$$

で求めると、最低次の近似で Rayleigh 方程式

$$(U - c)(\varphi_0'' - \alpha^2 \varphi_0) - U'' \varphi_0 = 0$$

が得られる。Rayleigh 方程式の解法としては α^2 展開 $\varphi_0 = \sum_{n=0} \alpha^{2n-2} \varphi_{0n}$ の形で求める

のみ求められており、線形安定性の問題のみならず弱非線形安定理論でも数値計算は不可欠となっている。

ところが、いざ Orr-Sommerfeld 方程式を数値的に取り扱おうとすると、数々の困難に遭遇する。その主な原因は 2. で述べる臨界層での解の激しい変化にある。従って、Thomas の研究以来今日に至るまで Orr-Sommerfeld 方程式の数値解法に関して行われてきた研究は、臨界層での特異性回避法の研究であるといっても過言ではない。

差分法については、Thomas が用いたスキームが既に完成の域にあり、Hughes³⁾ が若干の拡張を施した以外目立った進展はない。

初期値解法では RKG 法による Shooting 法が Gram-Schmidt の正規直交化の併用によって強力な武器となった¹⁾が、その他にも Invariant Imbedding の思想による Riccati 法⁵⁾と compound matrix 法⁶⁾が考案されている。

直交関数展開では、従来、Jacobi の多項式や Bessel 関数、Chandrasekhar-Reid 関数、Dolph-Lewis 関数などが用いられてきたが、1971年に Orszag⁷⁾が Chebyshev 多項式を用いて 2次元 Poiseuille 流の臨界状態を $\alpha_c = 1.02056$, $R_c = 5772.22$ と定めて以来、Chebyshev 多項式の重要性が認識され、多くの線形、非線形問題に用いられてきた。

本レポートでは、以上にのべた漸近解法、差分法、初期値解法及び直交多項式展開のレビューを行い、各種解法を用いた計算結果を比較検討する。

なお、巽と後藤⁴⁾、Drazin と Reid⁸⁾、Platten と Legros⁹⁾ に数値解法についての同様の解説があるので参照されたい。

2. Orr-Sommerfeld 方程式の $\alpha R \gg 1$ での漸近解法^{1,4,8,10,11,12)}

2次元 Poiseuille 流をはじめとして、良く知られている代表的な平行流は Reynolds 数が大きくなると微小攪乱に対して不安定となる。しかも、2次元 Poiseuille 流では αR が臨界点で 5800 程度であり、また、Hagen-Poiseuille 流や 2次元 Couette 流では $\alpha R \rightarrow \infty$ が問題となる。従って $\alpha R \gg 1$ での漸近解が重要になる。(2次元自由流では $\alpha R \ll 1$ の漸近解が重要であるが、この場合には臨界層特異性が生じないので漸近解は uniformly valid である)

2.1 非粘性方程式の Tollmien 解

Orr-Sommerfeld 方程式の解を $(\alpha R)^{-1}$ 展開

$$\varphi(y) = \varphi_0 + (\alpha R)^{-1} \varphi_1 + (\alpha R)^{-2} \varphi_2 + \dots$$

で求めると、最低次の近似で Rayleigh 方程式

$$(U - c)(\varphi_0'' - \alpha^2 \varphi_0) - U'' \varphi_0 = 0$$

が得られる。Rayleigh 方程式の解法としては α^2 展開 $\varphi_0 = \sum_{n=0} \alpha^{2n-2} \varphi_{0n}$ の形で求める

Heisenberg 解や、 α 展開をして Miles 変換に持ち込む方法などがあるが、解の局所的性質を最も良く表すものとして確定特異点回りの級数解がある。

中立安定の状態を考えると、 c は実数であるので、定義域内に $U(y) = c$ となる点が存在するであろう。この点を $y = y_c$ と名付ける。(通常、 $y = y_c$ を critical level, $|y - y_c| \sim O(\alpha R)^{-1/2}$ を critical layer と呼ぶ) さて、 $y = y_c$ での U を U_c , U' を U'_c , U'' を $U''_c \dots$ とする。 $U'_c \neq 0$ であれば $y = y_c$ は Rayleigh 方程式にとって確定特異点 (指数 0, 1) になっているので Frobenius の方法を用いて確定特異点回りの級数解を求めることができる:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_A = (y - y_c) \phi^A (y - y_c), \\ \phi_B = \phi^B (y - y_c) + \frac{U''_c}{U'_c} (y - y_c) \phi^A (y - y_c) \cdot \log (y - y_c), \\ \phi^A (y - y_c) = 1 + \frac{U''_c}{2U'_c} (y - y_c) + \frac{1}{6} \left(\frac{U'''_c}{U'_c} + \alpha^2 \right) (y - y_c)^2 + \dots, \\ \phi^B (y - y_c) = 1 + \left(\frac{U'''_c}{2U'_c} - \frac{U''_c{}^2}{U'_c{}^2} + \frac{\alpha^2}{2} \right) (y - y_c)^2 + \dots. \end{array} \right.$$

当然のことながら、このようにして求められた独立な Frobenius 解は $y = y_c$ 近傍では収束が良いが、定義域全域でこの級数解を用いることは収束性の悪さから言って賢明ではない。そこで、 $y = y_c$ の適当な $\epsilon (\ll 1)$ 近傍 $y = y_c \pm \epsilon$ での ϕ_A , ϕ_B と ϕ'_A , ϕ'_B を初期値として、 $y = y_1, y_2$ まで数値積分を行う。その際特異性は critical level 以外には存在しないので実軸上で RK G 法を用いた数値積分ができる。

大切な点は $y = y_c$ に Rayleigh 方程式の解が対数特異性を有することであり、 $y = y_c$ を境にして位相に跳びが生じる。この位相の決定は、粘性解との接続によって行われる。

2.2 粘性解

前節で見たように、Rayleigh 方程式は中立状態では主流速度と波の位相速度の一致する臨界層で特異性を有する。しかし、Orr-Sommerfeld 方程式についてみれば、 $U = c$ となる点は $R^{-1} \phi^{iv}$ のために正則点でしかない。すなわち、 $|y - y_c| \ll 1$ の臨界層では粘性が本質的な役割を演じる。他方、それ以外の領域では、もともと Orr-Sommerfeld 方程式が 4 階の式であり、境界条件が 4 つ課せられるのに対し、Rayleigh 方程式は 2 階の式なので、あと 2 つ独立解が必要である。それは WKB 法によって得られる。

2.2.1 局所転移点近似

Orr-Sommerfeld 方程式の WKB 解は $\phi = e^{\int g(y) dy}$ を代入して $g(y)$ を $(\alpha R)^{-1/2}$ 展開することにより、

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_3(y) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} (U-c)^{-5/4} \exp \{ -(\alpha R)^{1/2} Q(y) \}, \\ \phi_4(y) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} (U-c)^{-5/4} \exp \{ (\alpha R)^{1/2} Q(y) \}, \\ Q(y) = \int_{y_c}^y \{ i(U-c) \}^{1/2} dy \end{array} \right.$$

のように得られる。

さて、WKB法の立場から見ると、 $y = y_c$ は1位の転移点になっている。従って、転移点近傍の解とWKB解を接続する中央接続法を用いることによって全領域で解が求められる。

転移点近傍 $|y - y_c| \sim O(\alpha R)^{-1/3}$ での解は、 $\zeta = (y - y_c) / \epsilon$, $\epsilon = (i \alpha R U'_c)^{-1/3}$ という独立変数のひきのぼしをすることにより、最低次の近似で次のように求められる：

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1(\zeta) = \epsilon \zeta, \\ \chi_2(\zeta) = 1, \\ \chi_3(\zeta) = (\epsilon U'_c)^{-5/4} \int_{\infty_1}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty_1}^{\zeta} Ai(\zeta) d\zeta, \\ \chi_4(\zeta) = (\epsilon U'_c)^{-5/4} \int_{\infty_2}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty_2}^{\zeta} P_2(\zeta) d\zeta, P_2(\zeta) = Ai(e^{2\pi i/3} \zeta) \end{array} \right.$$

但し、 ∞_1, ∞_2 は2.3で述べる sector S_1, S_2 内で無限遠に及ぶ積分路をとるものとする。 $Ai(\zeta)$ は Airy 関数である。

$|\epsilon| \ll |y - y_c| \ll 1$ では

$$\chi_3 \sim \phi_3, \chi_4 \sim \phi_4$$

が成り立ち、転移点近傍の解はWKB解と自動的に接続している。

2.2.2 Tollmien の改良粘性近似

前小節の局所転移点近似では、転移点近傍で成り立つ局所解を求め、WKB解と接続するという中央接続法が用いられた。これに対し、Orr-Sommerfeld 方程式のような転移点を含む方程式を、全領域にわたってその挙動が良く知られているある標準方程式に変換し、uniformly valid な解を求める標準方程式法をこの小節では用いる。

粘性による臨界層特異性の解消は

$$R^{-1} \phi^{IV} = i \alpha (U - c) \phi''$$

で達成される。この式に対し Langer 変換

$$\phi''(y) = y' \frac{1}{2} F(\zeta)$$

を施すと

$$F'' = [i\alpha R(U-c) y'^2 - \frac{1}{2} \{y, \zeta\}] F$$

を得る。ここで, Schwarz 微分 $\{y, \zeta\} = \frac{y'''}{y'} - \frac{3y''^2}{2y'^2}$ を無視すると, 上式 $F'' =$

$i\alpha R(U-c) y'^2 F$ は $\phi^{iv} - i\alpha R(U-c) \phi'' = 0$ の標準方程式になっていることが分かる。

さて, $i\alpha R(U-c) y'^2 = \zeta$ すなわち, $\zeta = (i\alpha R)^{1/3} \left[\frac{3}{2} \int_{y_c}^y (U-c)^{1/2} dy \right]^{2/3}$ と置くと, 標準方程式は

$$F'' = \zeta F$$

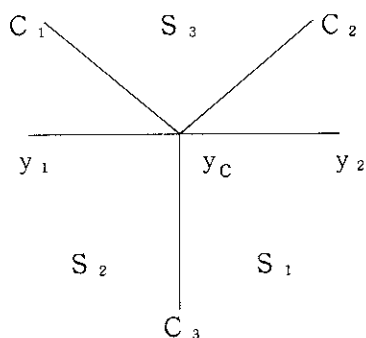
と書けるので, 結局

$$\begin{cases} \phi_3(y) = \left(\frac{\zeta}{U-c}\right)^{5/4} \int_{\infty_1}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty_1}^{\zeta} Ai(\zeta) d\zeta, \\ \phi_4(y) = \left(\frac{\zeta}{U-c}\right)^{5/4} \int_{\infty_2}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty_2}^{\zeta} P_2(\zeta) d\zeta \end{cases}$$

を得る。

2.3 固有値問題

さて, WKB 解は転移点から $\text{Re}Q(y) = 0$ となる $2\pi/3$ の等角度間隔で放射状に伸びる anti-Stokes lines に挟まれた sector 毎に異なる挙動を示す。



C_1 は $\arg(y - y_c) = -7\pi/6$, C_2 は $\pi/6$, C_3 は $-\pi/2$ である。 ϕ_3 は sector S_1 では $y \rightarrow y_2$ と共に指数関数的に減少, S_2 及び S_3 では指数関数的に増大するが, ϕ_4 は S_1 と S_3 で増大し, S_2 で $y \rightarrow y_1$ と共に減少する。

例として2次元 Poiseuille 流に対する固有値問題を取り上げよう。このとき, 偶関数攪乱 (反対称攪乱) は奇関数攪乱 (対称攪乱) よりも一般に大きい増幅率を有することが期待され, 実験的にも確認されている。そこで, 境界 $(y_1, y_2) = (-1, 0)$ で課せられる境界条件 $\phi(-1) =$

$\phi'(-1) = \phi'(0) = \phi'''(0) = 0$ は、

$$\begin{vmatrix} \phi_1(-1) & \phi'_1(-1) & \phi'_1(0) & \phi'''_1(0) \\ \phi_2(-1) & \phi'_2(-1) & \phi'_2(0) & \phi'''_2(0) \\ \phi_3(-1) & \phi'_3(-1) & \phi'_3(0) & \phi'''_3(0) \\ \phi_4(-1) & \phi'_4(-1) & \phi'_4(0) & \phi'''_4(0) \end{vmatrix} \equiv E(\alpha, R; c) = 0$$

という固有値方程式を構成する。

通常2次元 Poiseuille 流での位相速度 c の値は0.2~0.3程度であるので、臨界層は固体壁近くにへばり付いており、粘性の効果は流路中央には及ばないと考えられる。従って、 $y=0$ での境界条件は、WKB解が自然消滅して、非粘性解だけで満たされていると考えるのが妥当である。すなわち、sector S_1 内で指数関数的に $y \rightarrow y_2$ と共に発散する ϕ_4 が解の構成から除外される。

$y=0$ での境界条件を満足する非粘性解として

$$\phi(y) = \frac{\phi_A(y)}{\phi'_A(0)} - \frac{\phi_B(y)}{\phi'_B(0)}$$

が得られる。 $y=-1$ での境界条件を満足するためには

$$\frac{\phi'(-1)}{\phi(-1)} = \frac{\phi'_3(-1)}{\phi_3(-1)}$$

が成り立てば良い。

結局、

$$w = [1 + U'_1 \phi(-1) / c \phi'(-1)]^{-1}, \quad U'_1 = U'(y_1)$$

と置くと、局所転移点近似の場合特性方程式が

$$(w-1) / (1+\lambda) w = F(z),$$

Tollmien の改良粘性近似の場合は特性方程式が

$$(w-1) / (1+\bar{\lambda}) w = F(\bar{z})$$

と得られる。但し、

$$1+\lambda = \frac{U'_1}{c} (y_c - y_1), \quad 1+\bar{\lambda} = \frac{3U'_1}{2c^{3/2}} \left[\int_{y_1}^{y_2} |U-c|^{1/2} dy \right],$$

$$z = (\alpha R U'_1)^{1/3} (y_c - y_1), \quad \bar{z} = (\alpha R)^{1/3} \left[\frac{3}{2} \int_{y_1}^{y_2} |U-c|^{1/2} dy \right],$$

$$F(z) = \frac{\int_{\infty_1}^{\xi_1} d\xi \int_{\infty_1}^{\xi} \text{Ai}(\xi) d\xi}{\xi_1 \int_{\infty_1}^{\xi_1} \text{Ai}(\xi) d\xi}, \quad \xi_1 = ze^{-5\pi i/6}$$

であり、 $F(z)$ は Tietjens 関数である。具体的に上の特性方程式を解いて位相速度を求めるためには図式解法が用いられる。

3. 差 分 法

1953年に Thomas²⁾が2次元 Poiseuille 流の固有値と固有関数の計算に成功して以来、Thomas のスキームが広く用いられてきた。このスキームは非常に精度も良く、それ以後ほとんど改良されていない。これについては巽と後藤⁴⁾の優れた解説があるので、ここでは簡単にその本質的な部分に言及するに止める。

Thomas は補助関数として

$$g(y) = \phi(y) - \frac{h^2}{6} \phi''(y) + \frac{h^4}{90} \phi^{iv}(y)$$

を導入した。ここで、 h は差分のキザミ幅である。この g を用いると

$$\phi(y) = \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2 + \frac{1}{360} \delta^4\right) g + \left[\frac{67}{907200} h^8 \phi^{(8)}\right],$$

$$\phi''(y) = \frac{1}{h^2} \left(\delta^2 + \frac{1}{12} \delta^4\right) g + \left[\frac{1}{6048} h^6 \phi^{(8)}\right],$$

$$\phi^{iv}(y) = \frac{1}{h^4} \delta^4 g + \left[\frac{1}{240} h^4 \phi^{(8)}\right],$$

を得る。但し、 δ^m は m 階中心差分を意味する。

さて Orr-Sommerfeld 方程式を

$$\phi^{iv} + p\phi'' + q\phi = 0$$

と書けば、この式は $g(y)$ を用いると

$$K_n g_{n+2} + L_n g_{n+1} + M_n g_n + L_n g_{n-1} + K_n g_{n-2} = 0,$$

$$K_n = 1 + \frac{h^2}{12} p_n + \frac{h^4}{360} q_n, \quad L_n = -4 + \frac{2}{3} h^2 p_n + \frac{7}{45} h^4 q_n,$$

$$F(z) = \frac{\int_{\infty_1}^{\xi_1} d\xi \int_{\infty_1}^{\xi} \text{Ai}(\xi) d\xi}{\xi_1 \int_{\infty_1}^{\xi_1} \text{Ai}(\xi) d\xi}, \quad \xi_1 = ze^{-5\pi i/6}$$

であり、 $F(z)$ は Tietjens 関数である。具体的に上の特性方程式を解いて位相速度を求めるためには図式解法が用いられる。

3. 差分法

1953年に Thomas²⁾が2次元 Poiseuille 流の固有値と固有関数の計算に成功して以来、Thomas のスキームが広く用いられてきた。このスキームは非常に精度も良く、それ以後ほとんど改良されていない。これについては巽と後藤⁴⁾の優れた解説があるので、ここでは簡単にその本質的な部分に言及するに止める。

Thomas は補助関数として

$$g(y) = \phi(y) - \frac{h^2}{6} \phi''(y) + \frac{h^4}{90} \phi^{iv}(y)$$

を導入した。ここで、 h は差分のキザミ幅である。この g を用いると

$$\phi(y) = \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2 + \frac{1}{360} \delta^4\right) g + \left[\frac{67}{907200} h^8 \phi^{(8)}\right],$$

$$\phi''(y) = \frac{1}{h^2} \left(\delta^2 + \frac{1}{12} \delta^4\right) g + \left[\frac{1}{6048} h^6 \phi^{(8)}\right],$$

$$\phi^{iv}(y) = \frac{1}{h^4} \delta^4 g + \left[\frac{1}{240} h^4 \phi^{(8)}\right],$$

を得る。但し、 δ^m は m 階中心差分を意味する。

さて Orr-Sommerfeld 方程式を

$$\phi^{iv} + p\phi'' + q\phi = 0$$

と書けば、この式は $g(y)$ を用いると

$$K_n g_{n+2} + L_n g_{n+1} + M_n g_n + L_n g_{n-1} + K_n g_{n-2} = 0,$$

$$K_n = 1 + \frac{h^2}{12} p_n + \frac{h^4}{360} q_n, \quad L_n = -4 + \frac{2}{3} h^2 p_n + \frac{7}{45} h^4 q_n,$$

$$M_n = 6 - \frac{3}{2} h^2 p_n + \frac{4}{60} h^4 q_n,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

と表される。

$$\phi(1) = 0 \text{ という境界条件は } \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2 + \frac{1}{360} \delta^4 \right) g_N = 0 \text{ と同一であるので}$$

$$g_{N+2} + 56g_{N+1} + 246g_N + 56g_{N-1} + g_{N-2} = 0$$

で与えられ、 $\phi'(1) = 0$ は $\phi'_N = g_N^{(1)} + \frac{h^2}{6} g_N^{(3)} + \frac{h^4}{60} g_N^{(5)} + \dots$ を用いて

$$g_{N+1} - g_{N-1} = 0$$

となる。最大増幅攪乱は偶関数攪乱であるので、

$$g_1 = g_{-1}, \quad g_2 = g_{-2}$$

がその条件となる。

要点は補助関数 g を用いることによって、7点差分の式をその精度を維持して5点差分の式に帰着させたことである。

4. 初期値解法

4.1 Shooting 法^{4), 9)}

ある (α, R) に対して適当な c の値を initial guess として与えて、 $y = y_1$ から y_2 まで数値積分を行う。一般に $y = y_2$ では境界条件を満足しないから、 c の値に修正を加え、 $y = y_2$ での境界条件が設定した誤差の範囲内で成立するまで反復を行う。この方法は shooting 法と呼ばれている。

$y = y_1$ での初期条件の設定は Blasius 境界層や自由流のように半無限若しくは無限に広がった領域の問題と、2次元 Poiseuille 流のような固体壁に挟まれた領域の問題とで異なる。前者は $|y| \gg 1$ で $U'' = 0$ が成立し、 U は一定値になるので、 $|y| \gg 1$ での漸近解が容易に求められる。従って、適当に大きな $y_{\infty \pm}$ を取って、そこでの漸近解を初期条件に用いて $y = 0$ まで数値積分すればよい。(自由境界層のように非対称(反対称でなく)な主流の場合には攪乱の対称性が期待できない。従って、その場合、 $y = y_{\infty \pm}$ での漸近解を初期値として $y = 0$ まで積分し、 $y = 0$ で両者の解を接続するという方法を用いる)

後者の場合、初期条件としては、4つの一次独立解 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$:

$$M_n = 6 - \frac{3}{2} h^2 p_n + \frac{4}{60} h^4 q_n,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

と表される。

$$\phi(1) = 0 \text{ という境界条件は } \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2 + \frac{1}{360} \delta^4 \right) g_N = 0 \text{ と同一であるので}$$

$$g_{N+2} + 56g_{N+1} + 246g_N + 56g_{N-1} + g_{N-2} = 0$$

で与えられ、 $\phi'(1) = 0$ は $\phi'_N = g_N^{(1)} + \frac{h^2}{6} g_N^{(3)} + \frac{h^4}{60} g_N^{(5)} + \dots$ を用いて

$$g_{N+1} - g_{N-1} = 0$$

となる。最大増幅攪乱は偶関数攪乱であるので、

$$g_1 = g_{-1}, \quad g_2 = g_{-2}$$

がその条件となる。

要点は補助関数 g を用いることによって、7点差分の式をその精度を維持して5点差分の式に帰着させたことである。

4. 初期値解法

4.1 Shooting 法^{4), 9)}

ある (α, R) に対して適当な c の値を initial guess として与えて、 $y = y_1$ から y_2 まで数値積分を行う。一般に $y = y_2$ では境界条件を満足しないから、 c の値に修正を加え、 $y = y_2$ での境界条件が設定した誤差の範囲内で成立するまで反復を行う。この方法は shooting 法と呼ばれている。

$y = y_1$ での初期条件の設定は Blasius 境界層や自由流のように半無限若しくは無限に広がった領域の問題と、2次元 Poiseuille 流のような固体壁に挟まれた領域の問題とで異なる。前者は $|y| \gg 1$ で $U'' = 0$ が成立し、 U は一定値になるので、 $|y| \gg 1$ での漸近解が容易に求められる。従って、適当に大きな $y_{\infty \pm}$ を取って、そこでの漸近解を初期条件に用いて $y = 0$ まで数値積分すればよい。(自由境界層のように非対称(反対称でなく)な主流の場合には攪乱の対称性が期待できない。従って、その場合、 $y = y_{\infty \pm}$ での漸近解を初期値として $y = 0$ まで積分し、 $y = 0$ で両者の解を接続するという方法を用いる)

後者の場合、初期条件としては、4つの一次独立解 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_1' & \phi_1'' & \phi_1''' \\ \phi_2 & \phi_2' & \phi_2'' & \phi_2''' \\ \phi_3 & \phi_3' & \phi_3'' & \phi_3''' \\ \phi_4 & \phi_4' & \phi_4'' & \phi_4''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を採用する。RKG法を用いて数値積分すると、特性方程式は

$$E = \begin{vmatrix} \phi_1(-1) & \phi_1'(-1) & \phi_1'(0) & \phi_1'''(0) \\ \phi_2(-1) & \phi_2'(-1) & \phi_2'(0) & \phi_2'''(0) \\ \phi_3(-1) & \phi_3'(-1) & \phi_3'(0) & \phi_3'''(0) \\ \phi_4(-1) & \phi_4'(-1) & \phi_4'(0) & \phi_4'''(0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \phi_1'(0) & \phi_1'''(0) \\ 0 & 1 & \phi_2'(0) & \phi_2'''(0) \\ 0 & 0 & \phi_3'(0) & \phi_3'''(0) \\ 0 & 0 & \phi_4'(0) & \phi_4'''(0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \phi_3'(0) & \phi_3'''(0) \\ \phi_4'(0) & \phi_4'''(0) \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

で与えられる。従って、 $|E| < \epsilon$ (ϵ は当初設定した許容誤差、 $10^{-10} \sim 10^{-12}$ 程度)となるまで、反復的に c の値を修正していけば (α, R) に対する固有値が求められる。反復法としては、初期に全く固有値の予測できない場合には2点法を用いればよいが、予測できる場合にはMuller法が極めて有用であり、これを用いれば通常6~7回の反復で固有値が $|E| < 10^{-10}$ 程度の精度で求まる。

ところで、一般にこのような方法で実際に解いてみると、 $\alpha R \geq 100$ 程度で収束が得られなくなる。その原因は、もともと存在していた丸め誤差が、臨界層を境に急激に増大する解に混入して成長して、解 ϕ_3 と ϕ_4 の直交性(一次独立性)が失われてしまうことにある。この種の誤差はparasitic errorと呼ばれるが、Gram-Schmidtの直交化法を用いることによって避けることができる。すなわち、数ステップ積分する都度直交化を施し、その y の位置での直交性を保証する。こうすると $y = y_2$ にいきついたときにも ϕ_3 と ϕ_4 は直交しているので $E(\alpha, R; c) = 0$ から固有値が求められる。

このGram-Schmidtの直交化の併用によって、Shooting法を用いた非常に高いReynolds数までの計算が可能になった。RKG法のスキームを高精度化すれば固有値は更に高精度に求まる。しかし、固有関数を求める際には、直交化の履歴を記憶しておいて、いちいち直交化を解きほぐしてやらなければならない。

4.2 Riccati (Factorization) 法^{5, 13, 14, 15, 16)}

ここでは、欠落境界条件に対する方程式を導き、2点境界値問題を初期値問題に変換するという invariant imbedding の考え方をを用いる。この操作により、線形 Orr-Sommerfeld 方程式は Riccati 型の非線形方程式に変換されるので、指数関数的な解の激増が抑制され、parasitic error は生じない。

まず、Orr-Sommerfeld 方程式を

$$Y' = F Y, \quad Y: \text{複素 4-ベクトル}, \\ F: 4 \times 4 \text{ マトリックス} \\ ' : x \text{ についての微分}$$

と書く。4つの境界条件のうちの2つは $x=0$ で

$$G Y = 0, \quad G: 2 \times 2 \text{ マトリックス。}$$

となる。

ここで、 $G Y = U$ ($U: 2$ -ベクトル) と置く。更に $Y' = F Y$ を

$$U' = A U + B V \\ V' = C U + D V$$

と書き換える。但し、 A, B, C, D は 2×2 マトリックス、 V は 2 -ベクトルである。 $x=0$ での境界条件は $U=0$ である。すなわち、 $x=0$ での境界条件を満たす解を U 、それ以外を V と書く。

さて、欠落境界条件に関する方程式を求めるために Riccati マトリックス R (今の場合 2×2 マトリックス) を導入すると、

$$U = R V \quad (\text{Riccati 変換})$$

となる。

この $U = R V$ を元の式に代入すると

$$R' V + R V' = A R V + B V, \\ V' = (C R + D) V$$

から

$$R' = B + A R - R (D + C R)$$

がすべての V について成り立つ。 $x=0$ では V によらず $U=0$ であるので、 $R=0$ が初期条件となる。 $x=1$ まで RKG 法で積分したとすると、 $x=1$ ではもともと U, V に関する境界条件が

$$H U + J V = 0$$

の形で与えられるので、

$$\det(H R + J) = 0$$

が成立しなければならない。

この関係式を満足するように、与えられた (α, R) の値に対する複素位相速度 c を反復解法によって決定すれば、固有値問題が解けたことになる。

次に固有関数を求めるために

$$V(0) = q(x) V(x), \quad q: 2 \times 2 \text{ マトリックス}$$

と置く。上式より明らかなように $x=0$ で $q=1$ である。 q については直ちに

$$-q' = q (C R + D)$$

の成り立つことが分かる。そこで、RKG法で $x=1$ までこの式を積分すると、 $x=1$ では

$$V(0) = q(1) V(1) = q(x) V(x)$$

が成立しているので結局

$$\begin{aligned} V(x) &= q^{-1}(x) q(1) V(1), \\ U(x) &= R(x) V(x) \end{aligned}$$

を用いて固有関数を求めることができる。

非同次の方程式を解く際には次のように Riccati 変換を拡張する。まず非同次 Orr-Sommerfeld 方程式を

$$\begin{aligned} U' &= A U + B V + E, \\ V' &= C U + D V + F, \end{aligned}$$

(A, B, C, D : 2×2 マトリックス, U, V, E, F : 2-ベクトル) の形に書き、境界条件は、

$$U(0) = \alpha, V(1) = \beta, \quad (\alpha, \beta \text{ は } 2\text{-ベクトル})$$

であるとする。

Riccati 変換に代わって変形 Riccati 変換

$$U(x) = r_1(x) V(x) + r_2(x),$$

(r_1 : 2×2 マトリックス, r_2 : 2-ベクトル) を導入する。 r_1, r_2 の満足する方程式として、

$$\begin{aligned} r_1' &= B + A r_1 + r_1 D + r_1 C r_1, \\ r_2' &= E + A r_2 + r_1 F + r_1 C r_2 \end{aligned}$$

が得られる。 r_1, r_2 の初期条件は

$$r_1(0) = 0, r_2(0) = \alpha$$

である。次に recovery transformation として

$$V(0) = q_1 V(x) + q_2, \quad q_2 : 2\text{-ベクトル}$$

を導入すると、 q_1, q_2 は

$$\begin{aligned} q_1' &= q_1 (C r_1 + D), \\ q_2' &= q_1 (C r_2 + F), \end{aligned}$$

$q_1(0) = 1, q_2(0) = 0$ をみたく。さて、

$$V(0) = q_1(1) V(1) + q_2(1) = q_1(x) V(x) + q_2(x)$$

であるから、

$$\begin{cases} V(x) = q_1^{-1}(x) [q_1(1) V(1) + q_2(1) - q_2(x)], \\ U(x) = r_1(x) V(x) + r_2(x), \\ V(1) = \beta \end{cases}$$

によって $U(x), V(x)$ が得られる。

4.3 Compound Matrix 法^{6,17)}

前節の方法を少し記号を変えて説明する。 $x=x_1$ で境界条件 $\phi = \phi' = 0$ を満足する2つの独立な解を ϕ_1, ϕ_2 とする。すなわち $\phi_1 = \phi_1' = \phi_2 = \phi_2' = 0$ ($x=x_1$ で)。この2つの解の線形結合で任意の x における解が次のように得られる。

$$\begin{cases} f = \lambda \phi_1 + \mu \phi_2 \\ f' = \lambda \phi_1' + \mu \phi_2' \\ f'' = \lambda \phi_1'' + \mu \phi_2'' \\ f''' = \lambda \phi_1''' + \mu \phi_2''' \end{cases}$$

更に, Riccati 変換を

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'' \\ f''' \end{pmatrix}$$

のように定義する。f に上の表式を代入すると,

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' \\ \phi_1''' & \phi_2''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

となり Riccati マトリックスが

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' \\ \phi_1''' & \phi_2''' \end{pmatrix}^{-1}$$

と与えられる。

ここで,

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2, & y_4 &= \phi_1' \phi_2'' - \phi_1'' \phi_2' \\ y_2 &= \phi_1 \phi_2'' - \phi_1'' \phi_2, & y_5 &= \phi_1' \phi_2''' - \phi_1''' \phi_2' \\ y_3 &= \phi_1 \phi_2''' - \phi_1''' \phi_2, & y_6 &= \phi_1'' \phi_2''' - \phi_1''' \phi_2'' \end{aligned}$$

と置くと,

$$r_1 = y_3 / y_6, \quad r_2 = -y_2 / y_6, \quad r_3 = y_5 / y_6, \quad r_4 = -y_4 / y_6$$

が得られる。これは 4.2 節でマトリックス R を RKG 法で解く手順に対応している。さて, $y_6 = \phi_1'' \phi_2''' - \phi_1''' \phi_2''$ の零点が定義域内に存在していれば, R は発散する。この困難は Riccati 法の欠点であり, y_6 の零点は "characteristic length" と呼ばれる。この困難の回避のためには, $U = R V$ の代わりに $V = S U$ という変換を施せばよい。 y_6 の零点で R と S が同時に発散することはないからである。

しかし, もっと根本的な解決策は, $y_1 \sim y_6$ に対する方程式を独立にたてて解くことである。

$\phi_1(x_1) = [0, 0, 1, 0]^T$, $\phi_2(x_1) = [0, 0, 0, 1]^T$ となる ϕ_1, ϕ_2 を用いて上のように $y_1 \sim y_6$ を定めると,

$$Y' = B(x) Y, \quad Y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]^T,$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & -a_4 & 0 & -a_3 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

但し, $a_1 \sim a_4$ は Orr-Sommerfeld 方程式を

$$\phi^{iv} - a_1 \phi''' - a_2 \phi'' - a_3 \phi' - a_4 \phi = 0$$

と書いた場合の係数である。

$Y(x_1) = [0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$ という初期条件の下に $Y' = B Y$ を $x = x_2$ まで数値積分して、 $x = x_2$ での境界条件 $F Y = 0$ の成立如何を条件に、反復的に複素位相速度 c を決定すればよい。

逆に、固有関数を求めるには、

$$\begin{cases} \phi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 & \phi'' = c_1 \phi_1'' + c_2 \phi_2'' \\ \phi' = c_1 \phi_1' + c_2 \phi_2' & \phi''' = c_1 \phi_1''' + c_2 \phi_2''' \end{cases}$$

において係数 c_1, c_2 を消去して得られる式

$$\begin{cases} y_1 \phi'' - y_2 \phi' + y_4 \phi = 0 \\ y_1 \phi''' - y_3 \phi' + y_5 \phi = 0 \\ y_2 \phi''' - y_3 \phi'' + y_6 \phi = 0 \\ y_4 \phi''' - y_5 \phi'' + y_6 \phi' = 0 \end{cases}$$

のうち、いずれか1つの式を用いて数値積分すればよい。

5. 直交関数展開

Orr-Sommerfeld 方程式を

$$L \phi + c M \phi = 0, \quad L = i \alpha U (D^2 - \alpha^2) - i \alpha U'' - R^{-1} (D^4 - 2 \alpha^2 D^2 + \alpha^4) \\ M = i \alpha (D^2 - \alpha^2), \quad D \equiv d/dy$$

と書く。 $\phi(y)$ を何らかの多項式系 $\phi_n(y)$ で展開すると

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(y),$$

適当な操作の下に、係数 a_n についての式が

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} + c B_{mn}) a_n = 0$$

の形で得られるであろう。 n の上限を N で打ち切ると、上式は $N \times N$ マトリックス A, B を用いて

$$A a = -c B a$$

と表すことができるから、

$$B^{-1} A a = -c a$$

から固有値 c を求めることができる。関数列 ϕ_n として直交関数系を用いるのが一般的であるが、通常次のようなものが試行関数 ϕ_n として用いられる。

べき級数： $\phi_n = y^n$

Fourier 級数

Dolph-Lewis 関数： $(D^2 - \alpha^2)^2 \phi_n = \lambda_n (D^2 - \alpha^2) \phi_n$

Grosch-Salwen 関数： $(D^2 - \alpha^2)^2 \phi_n = \lambda_n \phi_n$

Chandrasekhar-Reid 関数： $D^4 \phi_n = \lambda_n \phi_n$

Legendre 多項式

と書いた場合の係数である。

$Y(x_1) = [0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$ という初期条件の下に $Y' = B Y$ を $x = x_2$ まで数値積分して、 $x = x_2$ での境界条件 $F Y = 0$ の成立如何を条件に、反復的に複素位相速度 c を決定すればよい。

逆に、固有関数を求めるには、

$$\begin{cases} \phi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 & \phi'' = c_1 \phi_1'' + c_2 \phi_2'' \\ \phi' = c_1 \phi_1' + c_2 \phi_2' & \phi''' = c_1 \phi_1''' + c_2 \phi_2''' \end{cases}$$

において係数 c_1, c_2 を消去して得られる式

$$\begin{cases} y_1 \phi'' - y_2 \phi' + y_4 \phi = 0 \\ y_1 \phi''' - y_3 \phi' + y_5 \phi = 0 \\ y_2 \phi''' - y_3 \phi'' + y_6 \phi = 0 \\ y_4 \phi''' - y_5 \phi'' + y_6 \phi' = 0 \end{cases}$$

のうち、いずれか1つの式を用いて数値積分すればよい。

5. 直交関数展開

Orr-Sommerfeld 方程式を

$$L \phi + c M \phi = 0, \quad L = i \alpha U (D^2 - \alpha^2) - i \alpha U'' - R^{-1} (D^4 - 2 \alpha^2 D^2 + \alpha^4) \\ M = i \alpha (D^2 - \alpha^2), \quad D \equiv d/dy$$

と書く。 $\phi(y)$ を何らかの多項式系 $\phi_n(y)$ で展開すると

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(y),$$

適当な操作の下に、係数 a_n についての式が

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} + c B_{mn}) a_n = 0$$

の形で得られるであろう。 n の上限を N で打ち切ると、上式は $N \times N$ マトリックス A, B を用いて

$$A a = -c B a$$

と表すことができるから、

$$B^{-1} A a = -c a$$

から固有値 c を求めることができる。関数列 ϕ_n として直交関数系を用いるのが一般的であるが、通常次のようなものが試行関数 ϕ_n として用いられる。

べき級数： $\phi_n = y^n$

Fourier 級数

Dolph-Lewis 関数： $(D^2 - \alpha^2)^2 \phi_n = \lambda_n (D^2 - \alpha^2) \phi_n$

Grosch-Salwen 関数： $(D^2 - \alpha^2)^2 \phi_n = \lambda_n \phi_n$

Chandrasekhar-Reid 関数： $D^4 \phi_n = \lambda_n \phi_n$

Legendre 多項式

Chebyshev 多項式

Laguerre 多項式

Hermite 多項式

Bessel 関数

これらの ϕ_n を用いて係数行列 A, B を作るには、4とおりの方法がある。まず最初から $y = y_1, y_2$ での境界条件を満たす関数列 ϕ_n を用い、 ϕ_n の直交性から A, B を決定していく Galerkin 法、境界条件を満足しない ϕ_n を用い、Galerkin 的に直交条件を用いるが、行列の中に境界条件そのものを付加する Lanczos の tau 法、直交性は使わず、例えば ϕ_N が極値をとる点で辺々のつじつまを合わせる選点法、tau 法と併用した tau 選点法の 4とおりである。どの方法を用いるかは、実際に対象としている問題によって決まる。(固体境界の場合には tau 法を使っても使わなくてもそれ程差はないが、自由境界の場合、tau 法を使わないと自由面での境界条件が入れられない。)

5.1 Hermite 多項式¹⁸⁾

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

の解が Hermite 多項式である。 H_n は

$$H_n = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}, \quad [n/2] = \begin{cases} n/2 & n: \text{偶数} \\ \frac{n-1}{2} & n: \text{奇数} \end{cases}$$

で定義されるが、

$$\begin{cases} H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1} \\ H_n' = 2nH_{n-1} \end{cases}$$

という漸化式が成り立つ。最初の 3 項は

$$H_0 = 1, H_1 = 2x, H_2 = 4x^2 - 2.$$

さて、直交関係は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{mn} \cdot 2^n n! \sqrt{\pi},$$

(δ_{mn} は Kronecker のデルタ) で与えられる。実際の展開には正規化された Hermite 多項式を用いて

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{H}_n(x), \quad \hat{H}_n(x) = e^{-x^2/2} \pi^{-1/4} H_n(x) / \sqrt{2^n n!}$$

例えば Simpson 則で直交関係を実際に確かめようとする、 $n < 10, m < 10$ 程度では直交性が高精度に得られる。しかし、それ以上 n, m を大きくしていくと、直交性の精度は急激に低下していく。その理由は、この種の直交性が選点直交性でないことにある。連続空間での積分操作は Gauss-Hermite 積分によって高精度に評価できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n,$$

$x_k^{(n)}$ は $H_n(x_k^{(n)}) = 0$ なる零点, $\alpha_k^{(n)} = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} / [H_n'(x_k^{(n)})]^2$, $k = 1, 2, \dots, n$,

$$R_n = n! \sqrt{\pi} f^{(2n)}(\xi) / 2^n n!, \quad -\infty < \xi < \infty$$

である。

5.2 Chebyshev 多項式^{18,19)}

Chebyshev 多項式は

$$(1-x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} - x \frac{dT_n}{dx} + n^2 T_n = 0$$

を満たし,

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x),$$

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x, T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$$

である。更に

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \\ T_n' = 2xT_{n-1}' - T_{n-2}' + 2T_{n-1} \end{cases}$$

の漸近式を満足する。次の直交関係

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

を満たす。更に, Gauss-Chebyshev 積分は

$$\int_{-1}^1 p(x) dx / \sqrt{1-x^2} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(n)} p(\xi_j^{(n)}),$$

で与えられる。ここで

$$\lambda_j^{(n)} = \pi/n, \quad \xi_j^{(n)} = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

である。Chebyshev 多項式はこの関係式のため選点直交性を示す。

6. 各種解法による結果の比較

以上に述べた各種解法にはそれぞれ一長一短がある。本節では2次元 Poiseuille 流と Bickley jet について行った固有値の比較を、これまでに得られている結果を含めて行う。

6.1 2次元 Poiseuille 流

$U = 1 - y^2$, 境界条件は $y = \pm 1$ で $\phi = \phi' = 0$ である。通常偶関数攪乱が最大増幅モードを与える。まず、臨界条件に関する結果は以下のとおりである。

局所転移点近似	: $R_c = 5397.1$, $\alpha_c = 1.022$, $c_c = 0.2672^{8)}$
標準方程式法	: $R_c = 5697.3$, $\alpha_c = 1.010$, $c_c = 0.2607^{8)}$
差分(100ステップ)	: $R_c = 5780$, $\alpha_c = 1.026$, $c_c = 0.2646^{2)}$
Shooting法(1200ステップ)	: $R_c = 5772.22$, $\alpha_c = 1.02055$, $c_c = 0.264001$
Shooting法	: $R_c = 5772.2218$, $\alpha_c = 1.020547$, $c_c = 0.2640003^{8)}$
Riccati法	: $R_c = 5772.222$, $\alpha_c = 1.020545$, $c_c = 0.264000^{13)}$
Grosch-Salwen関数	: $R_c = 5750$, $\alpha_c = 1.025$, $c_c = \text{---}^{20)}$
Chebyshev多項式	: $R_c = 5772.22$, $\alpha_c = 1.02056$, $c_c = 0.264002^{7)}$
			($c_c = 0.2640017396$)

但し、臨界条件で計算精度の比較を行うのは実は極めて危険である。それは、各手法を用いて臨界条件を求めた際の動機がさまざまであり、決して各数値解法の比較を目的としていないことが原因である。

各法の比較のためにはある (α, R) の値に対する固有値を用いるのが合理的である。代表的な (α, R) としては $\alpha = 1, R = 10^4$ が挙げられる。この (α, R) については Thomas の差分法の計算以来各種の解法により固有値が計算されている。その値を以下に示す：

Shooting法(1200ステップ)	$c = 2.37526476 \times 10^{-1} + 3.7396728 \times 10^{-3} i$
Compound matrix(1200ステップ)	$c = 2.37526344 \times 10^{-1} + 3.7397009 \times 10^{-3} i$
Riccati法(—)	$c = 2.375262 \times 10^{-1} + 3.7397 \times 10^{-3} i^{16)}$
”(—)	$c = 2.375259 \times 10^{-1} + 3.7404 \times 10^{-3} i^{13)}$
差分法(100ステップ)	$c = 2.375243 \times 10^{-1} + 3.7312 \times 10^{-3} i^{2)}$
Chebyshev展開(N=100)	$c = 2.375264888 \times 10^{-1} + 3.7396706 \times 10^{-3} i$

但し、最後の Chebyshev 展開による値は Orr-Sommerfeld 方程式と adjoint 方程式の両者から求めた固有値に共通の桁数分を表示してあり、厳密な値と考えられる。この表によると、Shooting法が Chebyshev 多項式展開に続いて精度が良いことが分かる。

次に、 $(\alpha, R) = (1, 10^4)$ の場合の固有関数の値を $y = 0.5$ で比較する。ここで、 $\phi(0) = 1$ の規格化が行われている。

差分法 (100ステップ)	$\phi = 0.785190$	$+0.001662i^{23}$
Compound matrix (1200ステップ)	$\phi = 0.7851871$	$+0.001667702i$
Riccati 法 (1200ステップ)	$\phi = 0.7851876$	$+0.001667715$
Chebyshev (N=80と100)	$\phi = 0.78518749504 + 0.00166770155i$	

但し、最後の値は N=80 と N=100 による結果に共通した有効桁分を表示したものである。

歴史的に見ると、Orszag が Chebyshev 多項式展開を用いて、高精度の臨界条件 ($\alpha_c = 1.02056$, $R_c = 5772.22$) を求めて以来数値解法の高精度化は飛躍的に進展したと言える。直交関数展開に関して面白いのは、かつて、もともとの Orr-Sommerfeld 方程式の固有関数とできるだけ近い性質を持った関数列で展開するのが良いとされ、Dolph-Lewis 関数、Grosch-Salwen 関数、Chandrasekhar-Reid 関数などが提案され、用いられてきたが、その際の誤差は $N \rightarrow \infty$ と共に Dolph-Lewis 関数が N^{-4} で減少するのに対し、あと2つは N^{-5} で減少する。ところが、Chebyshev 多項式は N のいかなる逆べきよりも速く減少することが知られている。従って、機械的に Chebyshev 多項式展開を行うのが最も少ない項数で誤差を小さくすることができるのである。このことは、攪乱の非線形発展を数値シミュレーションする際にも同様に言える。従って、単に数値シミュレーションが目的であるのなら、Orr-Sommerfeld 方程式の固有関数で展開を行うより、Chebyshev 多項式展開を行う方が簡単でしかも精度が良い。このような理由で、現在では Chebyshev 多項式が非常に有望視されている。

6.2 Bickley のジェット

$U = \text{sech}^2 y$, $-\infty \leq y \leq \infty$, 境界条件は $y = \pm\infty$ で $\phi = \phi' = 0$ である。4 で既にふれたように、このような流れの場合、 $|y| \gg 1$ での漸近解を初期値として用いるのが一般的であるが、ここでは $|y| = y_\infty$, $y_\infty < +\infty$ で定義域を打ち切って、 $|y| = y_\infty$ で $\phi = \phi' = 0$ とした場合、 $|y| = y_\infty$ での漸近解を初期条件に用いた場合、更に、Hermite 多項式と Chebyshev 多項式展開による結果の比較を行う。

(1) $|y| = y_\infty$, $y_\infty < +\infty$ で $\phi = \phi' = 0$ とした場合、2次元ジェットの臨界点 $\alpha = 0.174$, $R = 4.017$ では

$$y_\infty = 1.25 : c = 8.4356 \times 10^{-3} - 4.825 \times 10^{-2} i$$

$$y_\infty = 2.0 : c = 4.2393 \times 10^{-2} - 6.0706 \times 10^{-3} i$$

$$y_\infty = 2.5 : c = 4.3880 \times 10^{-2} - 1.326 \times 10^{-3} i$$

$$y_\infty = 3.0 : c = 4.3906 \times 10^{-2} - 2.506 \times 10^{-4} i$$

$$y_\infty = 3.5 : c = 4.3848 \times 10^{-2} - 4.024 \times 10^{-5} i$$

が得られる。これに対し、 $|y| = y_\infty$ での漸近解を初期条件に用いて数値積分した結果は同じ $\alpha = 0.174$, $R = 4.017$ で

$$y_\infty = 6 : c = 4.37279 \times 10^{-2} + 3.3548 \times 10^{-5} i$$

$$y_\infty = 10 : c = 4.38195 \times 10^{-2} - 5.476 \times 10^{-7} i$$

$$y_\infty = 25 : c = 4.38195 \times 10^{-2} - 5.518 \times 10^{-7} i$$

$$y_\infty = 62.5 : c = 4.381957 \times 10^{-2} - 8.334 \times 10^{-7} i$$

となり、 y_∞ の小さい値に対してうまく固有値が求められることが分かる。

(2) さて、もともと問題が無限領域で設定されているので、Hermite 多項式展開が適していると考えられる。そこで Hermite 多項式を用いた Galerkin 法によって $\alpha = 1.369$, $R = 26.2952$ という中立点で行った計算結果を示すと、

$$N = 20 \text{ では } c = 5.06890395 \times 10^{-1} - 2.656 \times 10^{-5} i$$

$$N = 30 \text{ では } c = 5.0686467 \times 10^{-1} - 1.108 \times 10^{-6} i$$

$$\text{Shooting 法 } c = 5.06870512 \times 10^{-1} + 5.267 \times 10^{-7} i$$

が得られる。従って、一見この方法でうまくいくように思われるが、実は、この程度の (α, R) のときたまたまうまく固有関数の性質と規格化された Hermite 多項式の性質が一致しただけであり、例えば臨界点 $\alpha = 0.174$, $R = 4.017$ では、項数をいくら大きくとっても c は 2 桁分だけ実部が N を替えても一致する程度で $N \rightarrow \infty$ と共に収束せず計算不能である。

次に、 $-\infty \leq y \leq \infty$ を $\eta = \tanh(\delta \alpha y)$ という stretching を用いて $-1 \leq \eta \leq 1$ に変換した上で chebyshev 多項式を用いる。 $\delta = 0.6$ とすると

$$\alpha = 0.174, R = 4.017 \text{ で } c = 4.38195888 \times 10^{-2} - 8.3 \times 10^{-7} i$$

$$\alpha = 1.369, R = 26.2952 \text{ で } c = 5.06870577 \times 10^{-1} + 5.614 \times 10^{-7} i$$

となる。但し、これら 2 つの値は Orr-Sommerfeld 方程式と adjoint 方程式の固有値で共通している桁数分表示したものである。この手法の要点は $\eta = \tanh(\delta \alpha y)$ の変換にある。まず、 $\alpha \rightarrow 0$ では攪乱は長波長の波であり、固有関数の台は $\alpha \sim 1$ の場合と比較して遥かに遠方 ($|y| \rightarrow \infty$) まで及ぶ。この効果を取り込むために単に $\eta = \tanh y$ とする代わりに $\eta = \tanh(\alpha y)$ と置くことが必要である。($\eta = \tanh y$ として Chebyshev 多項式展開を用いる方法は 1960 年に既に Clenshaw と Elliot によって行われたが、²¹⁾ 項数を大きくとっても臨界点のような低 α 領域での計算はできなかった) ただ、 $\eta = \tanh(\alpha y)$ という変換を Chebyshev 多項式に用いるということは、固有関数 ϕ の性質が $\tanh(\alpha y)$ の多項式で近似されることになり、すべての (α, R) に対して必ずしもうまく近似できるわけではない。そこで、 $\eta = \tanh(\delta \alpha y)$ として、定数 δ 分の自由度をここでは残し、 δ は試行錯誤的に定める。その結果、比較的低 R ($\lesssim 10^3$) で $\alpha \geq 0.15$ では $\delta = 0.6$ 、高 R ($\gtrsim 10^3$) で $\alpha \geq 0.9$ では $\delta = 1$ 、 $0.15 \leq \alpha \leq 0.9$ では $\delta = 0.6$ が最適であることが分かるが、残念なことに $\alpha < 0.15$ については現在のところこの方法では満足な結果が未だ得られていない。この困難はジェットに限らず、ウェークや自由境界層でも全く同様に $\alpha \lesssim 0.15$ で生じる。改善策として $\eta = \tanh(\delta \alpha y)$ をもっと別の形の変換に置き換えることが考えられる。例えば $\eta = \tanh[(\alpha y)^{2n+1}]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ のようなものを用いて、 n を決める方法なども可能であろう。

7. ま と め

本節前半では2次元 Poiseuille 流に対する各種数値解法による比較を行ったが、現時点では極端に高い R の値 ($R \geq 10^5$) を除くと Chebyshev 多項式が最も精度も良く扱い易い。それに対し初期値解法は $R \geq 10^5$ でも信頼できる計算が可能で、 10^9 程度まで実際に計算されているが、2次元 Poiseuille 流で大切な臨界点 $R = 5772.22$ での計算をする際にはプログラムの煩雑さを考えると初期値解法は chebyshev 多項式展開よりも扱いにくいと言える。

これに対し、差分法は本来非常に有力であり、メッシュサイズを可変にして臨界層にメッシュを集中させることにより Hughes³⁾ は2次元 Poiseuille 流の中立曲線上のコブ ($R \sim 10^8$) を見事に再現した。しかし、それ以後、高精度化のための改良はほとんど行われていない。

次に、ジェットのような無限領域の流れの場合には、低 α ($\alpha < 0.01$) の場合にも初期値解法は有効であるが、逆に直交関数展開は低 α で計算不能になる。その理由は直交関数展開の場合、もともと多項式の形、若しくは独立変数の stretching が固有関数 $\phi(y)$ とどれだけ近いかが非常に重要になるからである。例えば Hermite 展開をする場合には $\hat{H}_n \propto e^{-y^2/2} H_n(y)$ であるが Chebyshev 展開では $T_n = T_n[\tanh(\delta \alpha y)]$ となっており、Orr-Sommerfeld 方程式は $|y| \rightarrow \infty$ で $\phi \sim e^{-\alpha y} ; e^{-\beta y}$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - i \alpha R c}$ (ジェットの場合) の性質を有する。

さて、このようにして精度の高い数値計算法がこの20年位の間開発されてきたが、このような精度は果たして有用だろうか? Platten と Legros⁹⁾ は、その著書の中で例えば臨界 Reynolds数が5800であろうが5772.22であろうが、その誤差は実験家の立場から見ると計測器の分解能以下である。いたずらに高精化するのには単に数学的遊戯に過ぎないと自ら反省している。しかし、今日のように遷移の数値シミュレーションが活発に行われてくると遷移の初期段階である攪乱の線形成長過程における増幅率を求めて、Orr-Sommerfeld 方程式から求めたそれと完全に一致していることをまず確認することが必要不可欠である。従って、実験に代わって数値実験との対比上、Orr-Sommerfeld 方程式の高精度数値解法は今後も発展していく必要があるだろう。更に、従来の精度では見い出せなかった Orr-Sommerfeld 方程式固有の種々の重要な性質が高精度化することによって明らかにされていく可能性も残されている。

参 考 文 献

- 1) C. C. Lin : The Theory of Hydrodynamic Stability (Cambridge, 1955).
- 2) L. H. Thomas : Phys. Rev. (2) 91 (1953) 780.
- 3) T. H. Hughes : Phys. Fluids 15 (1972) 725.
- 4) 巽-後藤 : 流れの安定性理論 (産業図書, 1976).
- 5) M. R. Scott : Invariant Imbedding and its Application to Ordinary Differential Equations - an Introduction (Addison-Wesley, 1973).
- 6) B. S. Ng & W. H. Reid : J. Comput. Phys. 30 (1979) 125.
- 7) S. Orszag : J. Fluid Mech. 50 (1971) 689.
- 8) P. G. Drazin & W. H. Reid : Hydrodynamic Stability (Cambridge, 1981).
- 9) J. K. Platten & J. C. Legros : Convection in Fluids (Springer, 1984).
- 10) 巽 : 乱流 (槇書店, 1962).
- 11) W. H. Reid : in Basic Developments in Fluid Dynamics (Academic Press, 1966).
- 12) D. Mekysin : The New Method of Laminar Boundary Layers (Pergamon, 1961).
- 13) D. M. Sloan : J. Comput. Phys. 24 (1977) 320.
- 14) G. Wilks & J. S. Bramley : J. Comput. Phys. 24 (1977) 303.
- 15) A. Davey : J. Comput. Phys. 24 (1977) 331.
- 16) L. Kleiser : in Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics (Springer, 1979).
- 17) A. Davey : J. Comput. Phys. 30 (1979) 137.
- 18) 犬井 : 特殊関数 (岩波書店, 1962).
- 19) T. J. Rivlin : The Chebyshev Polynomials (John Willey, 1974).
- 20) C. E. Grosch & H. Salwen : J. Fluid Mech. 34 (1968) 177.
- 21) C. W. Clenshow & D. Elliott : Q. J. Mech. Appl. Math. 13 (1960) 300.