

JAERI - M

86-006

磁場測定に基づくJT-60のMHD平衡解析法

1986年2月

辻 俊二・林 和夫<sup>\*</sup>・吉田 英俊・細金 延幸  
菊池 満・芳野 隆治・二宮 博正・関 省吾

日本原子力研究所  
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の問合せは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1986  
編集兼発行 日本原子力研究所  
印 刷 桑島野高速印刷

磁場測定に基づく JT - 60 の MHD 平衡解析法

日本原子力研究所那珂研究所臨界プラズマ研究部  
辻 俊二・林 和夫<sup>\*</sup>・吉田 英俊・細金 延幸  
菊池 満・芳野 隆治・二宮 博正・関 省吾

(1986年1月21日受理)

磁気プローブ信号、プラズマ電流、外部コイル電流値から JT - 60 の MHD 平衡配位を計算する計算コードを開発した。

平衡配位を調べるために、測定磁場と一致する Grad-Shafranov 方程式の解を見つけなければならない。プラズマ電流を位置固定の離散的フィラメント電流で近似し、プラズマ境界を高速に計算する方法は、JT - 60 のダイバータ配位においても有効である。フィラメント近似によるプラズマ境界計算の結果を活用して、固定境界問題として MHD 平衡計算を行なうと、反復計算は速く収束する。電流分布を定める未知パラメータを効率よく修正する方法を考察し、非線形最小二乗解が得られるようにした。

ほぼ円形断面の JT - 60 の配位においても、ポロイダル・ベータ値と内部インダクタンスは分離可能である。入力磁場データが 1 % の誤差を持つ時、 $\beta_p$  の値の推定誤差は  $\pm 0.05$  以下である。

---

那珂研究所： 311-02 茨城県那珂郡那珂町大字向山

\* 外来研究員：(株) 東芝

MHD equilibrium analysis method of JT-60 based on magnetic measurements.

Shunji TSUJI, Kazuo HAYASHI\*, Hidetoshi YOSHIDA,  
Nobuyuki HOSOGANE, Mitsuru KIKUCHI, Ryuji YOSHINO  
Hiromasa NINOMIYA and Shogo SEKI

Department of Large Tokamak Research  
Naka Fusion Research Establishment,  
Japan Atomic Energy Research Institute,  
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received January 21, 1986)

A code has been developed to calculate MHD equilibrium configuration in JT-60 from magnetic pick-up signals, plasma current, and external coil currents.

To investigate equilibrium configuration, we must seek out a solution of Grad-Shafranov equation which reproduces experimental magnetic data. Fast boundary identification using discrete filaments at pre-specified locations proved to be effective in the JT-60 divertor configuration. When we solve the MHD equilibrium as a fixed boundary problem incorporating results of the fast boundary identification, iterative calculations converge rapidly. We derived an efficient method of modifying unknown parameters which specify plasma current profile to obtain nonlinear least-squares solutions.

Poloidal  $\beta$  value and internal inductance can be separated in the JT-60 configuration with nearly circular cross-section. The estimation error of  $\beta_p$  is less than  $\pm 0.05$  when input magnetic data contains 1% error.

Keyword: Tokamak, MHD equilibrium, JT-60, Nonlinear least-squares fitting.

---

\* On leave from Toshiba Research and Development Center, Kawasaki, Kanagawa, Japan

## 目 次

1. はじめに .....	1
2. フィラメント近似によるプラズマ境界計算 .....	4
2.1 JT-60 装置 .....	4
2.2 フィラメント近似最小二乗法 .....	4
2.3 テストラン及び誤差解析 .....	8
3. Grad-Shafranov 方程式による平衡計算 .....	17
3.1 問題の定式化 .....	17
3.2 数値解法 .....	19
3.3 測定誤差の影響及び $\beta_p$ と $\ell_i$ の推定 .....	21
3.4 電流分布形と $q_{axis}$ の推定 .....	22
4. 考 察 .....	39
4.1 実験放電の計算例 .....	39
4.2 まとめ .....	39
謝 辞 .....	43
参考文献 .....	43
付録A. フィラメント近似計算のサブルーチンと変数 .....	44
付録B. Coggins 法 .....	45
付録C. Grad-Shafranov 方程式による平衡計算コード FEI の入力パラメータ .....	46
付録D. パラメータ・スキャン用コモン変数 .....	48

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Boundary Identification based on filament approximation .....	4
2.1 JT-60 device .....	4
2.2 Least-squares fitting based on filament approximation .....	4
2.3 Test runs and error analysis .....	8
3. Full Equilibrium Code based on Grad-shafranov equation .....	17
3.1 Formulation of the problem .....	17
3.2 Numerical procedure .....	19
3.3 Measurement error effects and $\beta_p, \ell_i$ estimation .....	21
3.4 Estimation of current profile and qaxis .....	22
4. Discussions .....	39
4.1 Examples of the magnetic fitting using experimental data .....	39
4.2 Conclusions .....	39
Acknowledgements .....	43
References .....	43
Appendix A: Subroutines and variables of filament approximation .....	44
Appendix B: Coggins method .....	45
Appendix C: Input parameters of magnetic fitting based on Grad-Shafranov equation .....	46
Appendix D: Common variables for parameter scan .....	48

## 1. はじめに

J T - 6 0 はポロイダル・ダイバータを備えついている大型トカマクである<sup>1)</sup>。そのダイバータ配位は、ダイバータ・セパラトリックスがトーラス外側に位置した特徴的なものとなっている。実験放電においては、プラズマの位置やダイバータ部のスロート幅等を実時間でフィードバック制御しているが、制御目標の平衡諸量は計算時間の制約から簡単な近似式を用いている<sup>2)</sup>。従ってそれらの平衡諸量がうまく制御され目標通りのダイバータ配位が実現されているかどうか、実験的に確認する必要がある。

トカマク実験の計測データは線積分として得られるものが多く、こうしたデータを物理量に変換するためにはリミター配位においても、プラズマ断面の形状と位置を正確に知ることが大切である。また、磁気面やプラズマ電流分布が分れば、MHD 安定性の議論を行なうことが可能となる。プラズマの内部インダクタンス  $\ell_i$  が求まれば、磁束の消費やプラズマ中への磁場の浸透を調べることもできる。温度分布や密度分布のデータも得られれば、不純物量の指標として  $Z_{eff}$  の分布を評価できる。追加熱実験においては、加熱効果を見るのにポロイダル・ベータ値  $\beta_p$  の変化がよい指標となる。

こうした必要性から、MHD 理論に基づいた JT - 6 0 の平衡配位を求める計算コードを開発した。実験データと計算値とを客観的に比較するために、最小二乗法を採用した。実験データとしては、プラズマ圧力のデータも加わればより正確な計算が可能となるが、初期実験においてルーチン・データとして得られるのは、電流と磁場のデータだけである。そこで、電磁気的データで閉じた形で平衡配位を求ることとし、逆に電磁気的データからどの程度まで分るのか調べてみた。

実験では、プラズマ電流  $I_p$ 、外部コイル電流  $I_c$ 、真空ポロイダル磁場  $b_i$  が測定されるが、プラズマ電流分布  $j_\phi$  は未知である。問題は  $j_\phi$  の関数形を適当に仮定して、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R j_\phi \quad (1-1)$$

のGrad-Shafranov 方程式を解き、磁場データに一致する解を見つけることに帰着する。方程式は非線形なので、解は一意的に存在するとは限らないし、最小二乗解が存在する保証もない。実験上はプラズマ境界位置は未知であり、それ自体を問題の一部として解かなければならない。自由境界問題となると計算の自由度が大きく、Doublet III のようにフラックス・ループのデータから外部磁束が与えられるのでなければ、計算時間上 (1-1) 式を最初から自由境界問題として解くのは得策ではない。

プラズマ断面の形状と位置だけなら、反復法を必要とせず線形計算により速く計算するいくつかの方法が提案されている。その一つとして、プラズマ外部のポロイダル磁場をポロイダル角についてフーリエ解析し、その成分から解析式を使って電流モーメントを算出するいわゆるモーメント法がある。これは最も簡単な計算で、物理的に意味のある量として、電流中心位置、楕円成分、三角成分等を引き出すことができる。ただし、フーリエ解析する時にプラズマを囲む円周上で理想的な線積分が行える時は外部磁場の成分は打消されるが、限られた個数の磁気プローブのデータから計算する時は、外

部磁場の構造に依存する成分が乗るのでそれを差し引く事が必要である。従ってこの方法は、サドルコイル等を使ってフーリエ成分が簡単に正しく求まる時に有効である。しかしアスペクト比が小さくなると、プラズマ断面形状は電流分布に依存して電流モーメントだけでは定められない難点がある。モーメント法に近いものとして、トロイダル座標での Grad-Shafranov 方程式の真空解の固有関数を有限な項数で打ち切り、磁場データからその係数を定めて外部磁気面を求める方法<sup>5)</sup>もある。これは断面が円形に近い程有効であるが、計算はやや複雑である。

プラズマ電流を 6 本の位置固定のフィラメント電流で近似し、磁場データから最小二乗法によりそのフィラメント電流を決定すると、プラズマ断面形状を高速に計算することができる<sup>6)</sup>。これは直接的計算法であり、ISX-B や Doublet III の非円形断面トカマクのデータ解析に採用されている。しかし、プラズマ断面が小さくなつた時は離散的なフィラメントの影響を受けて偽の微細形状が現われたりするので、その場合はフィラメント位置を置き換える必要がある。また鉄芯を用いている時は、プラズマ電流や外部コイル電流の鏡像電流の影響を取り入れた計算が必要である。フィラメント近似的拡張として、プラズマ電流を多数のフィラメントで近似し、分布がなめらかであるという条件の下に電流分布を求める計算法<sup>7)</sup>も提案されている。ただしこの方法だと計算時間は犠牲となる。

JET のように複雑な鉄芯構造を持つトカマクにおいて、鉄芯の影響を含めて解析するために、プラズマ電流及び外部磁場を作る電流を面電流で近似し、その面電流のフーリエ成分を最小二乗法で計算する方法<sup>8)</sup>がある。プラズマ電流を連続的な面電流で近似しているので、その面電流位置を固定したままでもプラズマ位置変化の影響は受けにくくなっている。外部面電流を決定するのに、JETにおいてはフラックス・ループのデータを活用している。

さて、JT-60 のプラズマ断面形状を高速に計算するにはいずれの方法が最適であろうか。JT-60 のダイバータ配位においては、ボロイダル磁場がダイバータ・セパラトリックス部だけ局所的に歪んでいるので、モーメント法など限られたフーリエ成分で解析する方法は、JT-60 のダイバータ配位を正確に表現し得ない。それから、JT-60 は空芯トカマクなので、鉄芯の影響を考慮する必要もない。このような観点から、JT-60 ではフィラメント近似計算を採用することにした。この方法は、JT-60 のダイバータ配位においても有効であることが確認されている。フィラメント位置を固定したままで、プラズマ小半径が最大半径からその 6 割程度に変化した場合について解析しても、結果に影響がないことも確かめられている。

今述べたフィラメント近似によるプラズマ境界計算の結果を活用して、プラズマ位置を固定して Grad-Shafranov 方程式を解くと MHD 平衡解を速く計算できる。無限の可能性のある平衡配位から磁場データと一致する解を見つける時に、プラズマ位置が決まったものにしばって計算すれば見当はずれの無駄な計算をしなくて済むからである。

プラズマ電流分布は依然として未知なので、プラズマ電流分布を定める関数形を適当に仮定して最小二乗解を求める。その時、電流分布の未知パラメータに対して、磁場の計算値と測定値の差の二乗和は非線形なので、試行錯誤により未知パラメータ空間上をスキャンすることになる。我々は効率よくパラメータを修正して最小値を求める方法を考察して、最小二乗解が得られるようにした。

図 1.1 に JT-60 の磁場データ解析コードを示す。フィラメント近似によるプラズマ境界計算が Fast Boundary Identification Code (FBI) に相当する。この FBI コードにより、プラズマ境界と  $\beta_p + \ell_i / 2$  等のマクロな平衡諸量が得られる。この段階では、プラズマの内部構造は未知のままである。プラズマ電流や圧力の分布を解析するのが次の Equilibrium Code (FEI)

である。円形断面トカマクの場合、磁場データのみでは  $\beta_p$  と  $\ell_i$  は分離できないと言われているが、JT-60 のダイバータ配位について厳密なMHD 平衡計算を行えばそれらは分離可能である。このようにして定まった平衡配位を入力データとし、2 次元の輸送解析してプラズマの閉込め特性を調べたり、MHD 安定性を解析し実験と比較したりするのが最終目標である。<sup>3)</sup>

第二章において、フィラメント近似によるプラズマ境界計算コード FBI のレビューを行い、JT-60 への適用例と測定誤差の影響を述べる。第三章において、Grad-Safranov 方程式による平衡計算コード FEI の計算手法を解説し、 $\beta_p$  と  $\ell_i$  の分離や電流分布の推定について述べる。第四章で、初期実験のデータ解析を示し、まとめと考察を行う。

### MAGNETIC DATA ANALYSIS SYSTEM IN JT-60

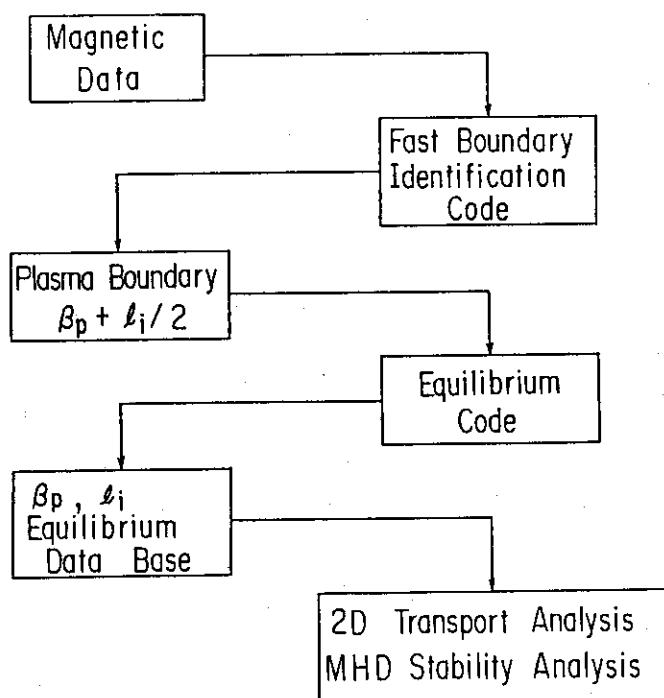


図 1.1 JT-60における、磁場データ解析コード。

## 2. フィラメント近似によるプラズマ境界計算

J T - 6 0 のプラズマ断面形状とその位置を高速に計算するコード FBI (Fast Boundary Identification Code) について述べる。2.1において、J T - 6 0 のポロイダル磁場コイル構成及び磁場測定法について簡単に触れる。2.2ではフィラメント近似最小二乗法による計算手法を説明する。2.3ではテストデータを用いて計算した結果及びその誤差解析について述べる。

### 2.1 J T - 6 0 装置

J T - 6 0 は、主半径 3.04 m, 小半径 0.93 m, トロイダル磁場最大 4.5 T のトカマク装置である。ポロイダル磁場コイルは、トロイダル磁場コイルの内側に置かれ、5種類の機能別コイルから構成されている。その配置を図 2.1 に示す。各コイルの名称と機能は以下のようになっている。

F - コイル：ジュール加熱用一次側コイル

V - コイル：垂直磁場コイル

M - コイル：磁気リミター（ダイバータ）コイル

Q - コイル：四重極磁場コイル

H - コイル：水平磁場コイル

プラズマ電流はリミター配位の時最大 2.7 MA, ダイバータ配位の時最大 2.1 MA である。磁場プローブは、 $(B_\phi, B_\rho)$  の 2 成分を測定するものが #6 セクターに 30 度置きに 11 対, #7 セクターに 60 度置きに 6 対 (図 2.1 参照) 設置されている。フィードバック制御のために全系制御計算機でデータ収集されるのは後者のデータである。磁気リミターコイルを真空容器内に設置しているために、赤道面上のトーラス外側の位置には磁気プローブは配置されていない。磁気プローブは、保護のためにステンレスのシースの中に入っている、そのシールド効果のために応答性は数 K Hz 以下となっている。真空容器内にはワントーンループが上下に設置されているが、現時点ではそれをフラックスループとしては使用していない。

### 2.2 フィラメント近似最小二乗法

ISX - B の例<sup>6)</sup>にならって、プラズマ電流を 6 本のフィラメント電流で近似し、J T - 6 0 のプラズマ断面形状と位置を高速に求める。プラズマ電流を離散的なフィラメント電流としているので内部構造は求まらないが、フィラメントから離れたプラズマ境界より外の真空磁場を正確に近似することができる。断面形状が円に近い時は 1 本の等価的なフィラメント電流で置き換えることもできるが、この場合はそのフィラメントの位置を未知として解かなければならない。その位置を正確に推定するには反復法を用いなければならないので、計算はあまり容易ではない。一方、6 本のフィラメントで近似する場合は、その位置は固定しておきフィラメント電流値を未知として解くので、線形計算で解が求まる。フィラメントの位置がプラズマ境界に近過ぎない限り結果にはほとんど影響しないので、位置を固定したままでも、プラズマが多少シフトしても十分解析できる。J T - 6 0 では外部コイル電流

値が全て 1 %以下の精度で測定されているが、渦電流等の影響を調べるために、外部コイル電流のうちのいくつかを未知としても解けるようにしている。

以下計算法を簡単に説明する。

i) フィラメントの位置を与える。

通常正六角形上に配置

ダイバータ配位 (3.6, 0), (3.4, ±0.346), (3.0, ±0.346), (2.8, 0)

リミター配位 (3.5, 0), (3.3, ±0.346), (2.9, ±0.346), (2.7, 0)

ダイバータ配位だとプラズマ柱が 0.1 m程度外側にシフトしているのを考慮して使い分けているが、プラズマ断面が小さくなっている限り、ダイバータ配位のつもりでリミター配位になっていたり、あるいはその逆でも支障はない。一応の目安として、フィラメントの位置がプラズマ主半径の 8割以内にあればよい。

ii) 磁場の応答行列  $q_{ij}$  を計算する。

$$b_i = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^p I_j^p + \sum_k q_{ik}^c I_k^c \quad (2-1)$$

$b_i$  : i 番目の磁気プローブの位置での磁場の計算値

$I_j^p$  : フィラメント電流値

$I_k^c$  : 外部コイル電流値

鉄芯を用いていなければ、応答行列は完全橋円積分で計算できる。

iii) 未知の電流値  $I_1^p, \dots, I_6^p, I_1^c, \dots, I_\ell^c$  を条件付き最小二乗法で求める。

$$\chi^2 = \sum_i w_i (\hat{b}_i - b_i)^2 - 2 \lambda (I_p - \sum_{j=1}^6 I_j^p) \quad (2-2)$$

$\hat{b}_i$  : 磁場の測定値 ( $B_\omega$  or  $B_\rho$ )

$w_i$  : 重み

磁場  $\hat{b}_i$  から、既知の外部磁場コイル電流  $I_{\ell+1}^c, \dots, I_m^c$  の作る磁場成分を引いたものを  $\hat{b}_{xi}$  とすると、

$$\hat{b}_{xi} \equiv \hat{b}_i - \sum_{k=\ell+1}^m q_{ik}^c I_k^c \quad (2-3)$$

$$\chi^2 = \sum_i w_i (\hat{b}_{xi} - \sum_{j=1}^6 q_{ij}^p I_j^p - \sum_{k=1}^\ell q_{ik}^c I_k^c)^2 - 2 \lambda (I_p - \sum_{j=1}^6 I_j^p) \quad (2-4)$$

と書き表わせる。未知の電流  $I_n^p$  と  $I_0^c$  が最小二乗解となるためには  $\frac{\partial \chi^2}{\partial I_n^p} = 0$ ,  $\frac{\partial \chi^2}{\partial I_0^c} = 0$

でなければならないので、

$$\sum_i w_i \sum_j q_{in}^p q_{ij}^p I_j^p + \sum_i w_i \sum_k q_{in}^p q_{ik}^c I_k + \lambda = \sum_i w_i \hat{b}_{xi} q_{in}^p \quad (2-5)$$

$$\sum_i w_i \sum_j q_{io}^c q_{ij}^p I_j^p + \sum_i w_i \sum_k q_{io}^c q_{ik}^c I_k = \sum_i w_i \hat{b}_{xi} q_{io}^c \quad (2-6)$$

の方程式が得られる。これを行列に書き改めると、

$$\begin{pmatrix} \sum_i w_i q_{in}^p q_{ij}^p & \sum_i w_i q_{in}^p q_{ik}^c \\ \sum_i w_i q_{io}^c q_{ij}^p & \sum_i w_i q_{io}^c q_{ik}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_j^p \\ I_k^c \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i w_i \hat{b}_{xi} q_{in}^p \\ \sum_i w_i \hat{b}_{xi} q_{io}^c \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

となる。左辺の行列を  $S$ 、左辺第二項と右辺のベクトルをそれぞれ  $\vec{a}$ 、 $\vec{t}$  と表わして、第  $k$  行に注目すると、

$$\sum_j S_{kj} I_j + \lambda a_k = t_k \quad (2-8)$$

となる。 $\lambda = 0$  すなわち条件無しの場合の未知電流の推定値  $I_{junc}$  は、行列  $S$  の逆行列  $S^{-1}$  を (2-8) 式の両辺にかけることから簡単に求まる。

$$I_{junc} = \sum_k (S^{-1})_{jk} t_k \quad (2-9)$$

(2-8) 式で  $\lambda \neq 0$  として、(2-9) 式を代入すると

$$I_j = I_{junc} - \lambda \sum_k (S^{-1})_{jk} a_k \quad (2-10)$$

であり、フィラメント電流の合計がプラズマ電流であるという条件

$$I_p = \sum_{j=1}^6 \{ I_{junc} - \lambda \sum_k (S^{-1})_{jk} a_k \} \quad (2-11)$$

から、ラグランジ未定定数  $\lambda$  が求まる。

$$\lambda = (\sum_{j=1}^6 a_j I_{junc} - I_p) / \sum_{j=1}^6 \sum_k (S^{-1})_{jk} a_k \quad (2-12)$$

$a_j$  の値を代入して

$$\lambda = (\sum_{j=1}^6 I_{junc} - I_p) / \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 (S^{-1})_{jk} \quad (2-13)$$

となり、これを (2-10) 式に代入すると条件付き最小二乗解が得られる。

$$I_j = I_{junc} - \sum_{k=1}^6 (S^{-1})_{jk} (\sum_{\ell=1}^6 I_{\ell unc} - I_p) / \sum_{\ell=1}^6 \sum_{m=1}^6 (S^{-1})_{\ell m} \quad (2-14)$$

## IV) フラックスの計算を行なう。

外部コイル電流とフィラメント電流の作るポロイダル・フラックス $\psi$ を空間の各点でたし合わせる。 $\psi$ をプラズマ内部で負になるようにとった時、リミター表面での最小値を $\psi_{1im}$ とすると、 $\psi(R, Z) = \psi_{1im}$ となる曲線がリミター配位の最外殻磁気面の形状を与える。ダイバータ配位の時は、セパラトリックス面での値を $\psi_{sep}$ とすると、 $\psi_{sep} < \psi_{1im}$ の時 $\psi(R, Z) = \psi_{sep}$ が最外殻磁気面である。もしこの不等式が成立しない時は、リミター配位となっている。

## V) マクロ平衡諸量を求める。

- $I_{junc}$  の和から  $I_p$  の推定値が得られる。これはロゴスキーコイルによる測定のチェックに使える。

- 最外殻磁気面の座標の最大値、最小値から

$$\begin{aligned} \text{プラズマの中心} \quad R_p &= (R_{IN} + R_{OUT}) / 2 \\ Z_p &= (Z_{MAX} + Z_{MIN}) / 2 \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$\text{非円形度} \quad K = (Z_{MAX} - Z_{MIN}) / (R_{OUT} - R_{IN}) \quad (2-16)$$

が求まる。その他、三角度や、リミターと最外殻磁気面との間隔  $\delta_{30}, \delta_{52}$  (図 2.2 参照) も計算可能である。

- フィラメント電流の重心  $R_J, Z_J$  も容易に求まる。この値は磁気軸の座標の近似値として用いることがある。なお  $R_J$  は電流値を重みとした座標平均でありトロイダル効果を取り入れた 1 本の等価的なフィラメント位置を与えるものではない。

- $\psi$  の微分からプラズマ境界での  $B_p$  を求め

$$q_a = B_{TO} R_0 \oint \frac{ds}{R^2 B_p} \quad (2-17)$$

の式より表面での安全系数が計算できる。

- $\beta_p + \ell_i / 2$  の値を二通りの方法で評価する。

Shafranov によるとプラズマを囲む任意の曲線上の線積分  $S_1, S_2$  により

$$\beta_p + \ell_i / 2 = S_1 / 2 + S_2 \quad (2-18)$$

と表される<sup>9)</sup>。プラズマ境界をこの曲線にとると磁場の法線成分がなくなるので、積分の式は簡単となり次のようになる。

$$S_1 = \frac{\pi}{V \langle B_p \rangle^2} \oint R [B_p(s)]^2 \hat{n} \cdot \vec{\rho} ds \quad (2-19)$$

$$S_2 = \frac{\pi R_T}{V \langle B_p \rangle^2} \oint [B_p(s)]^2 \hat{n} \cdot \hat{e}_R ds \quad (2-20)$$

ここで  $\langle B_p \rangle$  は  $B_p$  の線平均を表わし、 $\hat{n}, \hat{e}_R$  はそれぞれ法線と主半径方向の単位ベクトルである。 $R_T$  はプラズマ圧力中心位置であるが、プラズマ電流重心  $R_J$  で近似する。 $\vec{\rho}$  は  $(R_J, Z_J)$

$Z_J$ ) を原点とした時の動径ベクトルである。

あるいは平衡に必要な垂直磁場を与える Shafranov の式を拡張した

$$K^{1/4} \frac{B_v}{I_p} = \frac{\mu_0}{4\pi R_p} \left[ \ell_n - \frac{8R_p}{a} + \beta_p + \frac{\ell_i}{2} - \frac{3}{2} \right] \quad (2-21)$$

から  $\beta_p + \ell_i / 2$  の値を算出する<sup>6)</sup>。JT-60 のダイバータ配位は少し横長となっており、非円形度 K を入れた方がより正確に評価できる。

以上の計算は逆行列  $S^{-1}$  を求めるところだけ倍精度として、それ以外は单精度としている。フィラメント電流値を求めるのに上下対称の条件を入れていないので、上下非対称な配位も計算できる。上下対称なデータを入力すると、計算の精度の範囲内で上下対称な解が得られる。

計算時間は、応答行列と逆行列の計算も含めて M 380 の C P U 時間で 1 ケース 180 ms 程度となっている。なお外部コイルの作るポロイダル・フラックスはデータファイルから読み出している。フィラメント位置固定のままなら、行列や各フィラメントの作るポロイダル・フラックスは同じなので、それらをテーブル化しておけば計算時間はさらに速くなる。

外部コイル電流値のいくつかは未知としてもよいが、データ数と未知数の兼ね合いから、3つ以上を未知とすると数値的に不安定となる場合がある。コイル電流を未知として解くとその値と実測値との比較から、測定誤差や渦電流の影響等を調べることが可能である。

### 2.3 テストラン及び誤差解析

フィラメント近似計算のテストランのために、MHD 平衡計算で得られた JT-60 の平衡配位の各磁気プローブ位置での磁場の計算値をテストデータとして FBI コードを試験した。その例を図 2.3, 図 2.4 に示す。この 2 つの例は  $\beta_p \sim 2$  でプラズマ電流分布に圧力の影響が強く効いている場合であり、同図上部がテスト平衡配位、同図下部が FBI コードにより求めた磁気面である。後者の内部の磁気面は離散的なフィラメントの影響で六角形の変形を受けているが、最外殻磁気面については図の線の幅程度の精度で再現している。この 2 つはプラズマ断面が真空容器断面いっぱいと大きい場合(図 2.3)と、トーラス外側にシフトして小さい場合(図 2.4) のダイバータ配位であるが、フィラメントの位置は同じである。これより、フィラメント位置を固定したままでも、JT-60 のダイバータ配位の最外殻磁気面は高ベータプラズマにおいても精度良く求まることがわかる。

以上は計算に用いるデータが理想的な場合であるが、実際に適用する時の実験データには誤差が含まれている。磁気プローブについては、その実効的鎖交面積の較正誤差、真空容器内への取り付けの位置や向きの精度による誤差が考えられる。フラックス・ループはトーラス方向の平均量を見ることになるので誤差は小さいが、それに比べて磁気プローブは局所的な磁場を測っているので、装置の対称性の精度による誤差も考えられることに注意しなければならない。磁気プローブ信号を磁場に直すための積分器のドリフトや利得の較正誤差、測定系に乗るノイズの影響も考えられる。外部コイルの作る磁場については、コイル設定位置の精度、コイル電流値の測定誤差の影響がある。また、プラズマ電流上昇時等の過渡期においては、真空容器などの金属構造物に誘起される渦電流の作る磁場も誤差の

原因となる。プラズマ電流値についても、ロゴスキーコイルの較正誤差、積分器ドリフト等の信号処理上の誤差が与えられる<sup>10)</sup>。

このような誤差の影響を見るために、理想的データに人为的な誤差を加えて FBI の計算を行った。磁場測定誤差として、標準偏差が磁場  $\hat{b}_i$  の二乗平均  $\sqrt{\sum_i \hat{b}_i^2 / N}$  の 1% と 5% でありガウス分布に従う乱数を採用した。磁場の接線成分  $B_\omega$  と法線成分  $B_\rho$  はオーダーが違うので、分けて二乗平均を計算している。このようにして、10通りの乱数列を加えて Magnetic Fitting を行い、得られた平衡量  $x$  の推定値  $\hat{x}_i$  の二乗平均誤差の相対値

$$\sqrt{\frac{1}{10} \sum_{\ell=1}^{10} (\hat{x}_\ell - x)^2 / x} \times 100 \quad (\%) \quad (2-22)$$

を調べた。入力データとする磁気プローブは、 $r = 0.996\text{ m}$  の円周上に理想的に配置された以下の 5 種類とした。

- A. 30度置きの  $B_\omega$  12個
- B. 30度置きの  $B_\omega$ ,  $B_\rho$  24個
- C. A から  $\omega = 0$  の磁気プローブを除いた 11 個
- D. B から  $\omega = 0$  の磁気プローブを除いた 22 個
- E. 60度置きの  $B_\omega$ ,  $B_\rho$  12個

B の場合が理想的な最善のデータとなるが、実験上は C~E の場合しか有り得ない。なお、60度置きの  $B_\omega$  のみの場合は、フィラメントの数と入力データの数が同じとなり、最小二乗解とはならず線形一次方程式解となり誤差の影響を直接受けるので除外した。

プラズマ電流、外部コイル電流を正確な値とし、磁場に乱数を加えて計算した例を表 1 に示す。このテストデータは、 $R_p \sim 3.22$ ,  $\beta_p \sim 1$  のダイバータ配位である。表の数値は、(2-22) 式により真の値に対する相対推定誤差を % の単位で表している。入力データの誤差が 0% の時は 1 通りなので符号を付いているが、1%, 5% の場合は 10 通りの入力誤差に対する二乗平均誤差なので正值だけとなっている。

この他、以下に示すようにプラズマ位置と  $\beta_p$  を変えた計 18 種の平衡配位についても調べた。

ダイバータ配位  $R_p \sim 3.11, 3.22, 3.42\text{ m}$

$\beta_p \sim 0.001, 1, 2$

リミター配位  $R_p \sim 2.84, 3.04, 3.24\text{ m}$

$\beta_p \sim 0.001, 1, 2$

入力の磁気プローブの数を A~E の 5 種変えて FBI 計算をした結果を比較してみると、A, C の  $B_\omega$  だけのデータでは誤差に弱いことがわかった。A と E の場合を比較すると同じ 12 個のデータでも、E の 2 成分有る方が位置に関する推定値の誤差は若干小さくなっている。 $B_\rho$  は  $B_\omega$  と比べると絶対値としては小さく (2-2) 式の残差の二乗和への寄与は少ないが、2 成分のデータがあると磁気プローブの位置での磁気面の向きを定めることになるので誤差に強くなると思われる。

実際のデータで解析可能な D と E の場合について、18 種の配位を使って試験した結果をまとめると、表 2 のようになっている。データ数の少ない E の方が全体的に少し精度が落ちる。位置については、E の場合でも測定誤差が無ければ絶対値に換き換えて 1 cm 以下の精度で推定できる。磁場データの誤

差が5%ある場合は、位置推定誤差は2cm程度である。ダイバータ配位の $R_{OUT}$ すなわちセパラトリックスのX点の位置は誤差の影響を受けにくい。リミターとのクリアランス $\delta_{30}, \delta_{52}$ は、測定誤差が無ければ5mm以下の精度で求まり、磁場データに5%誤差がある時は1cm程度の誤差となる。 $\beta_p + \ell_i / 2$ の値は、リミター配位では線積分による(2-18)式で計算した方が精度が良くなっている。ダイバータ配位ではいずれの方法でも精度は落ちるが、平衡に必要な垂直磁場から計算する(2-21)式の方が若干よい。

次に外部コイル電流の測定誤差の影響を調べる。表1と同じ平衡配位例について、コイル電流を $\pm 1\%, \pm 5\%$ 変化させた時の計算結果を表3に示す。Fコイルは真空容器内にはほとんど磁場を作らないのでほとんど影響がないが、VコイルやMコイル電流値に誤差があると位置に影響が出る。特にVコイル電流値の誤差の影響は、当然のことながら $\beta_p + \ell_i / 2$ の値に直接表われる。

通常プラズマ電流値は正しいとして、それを拘束条件としてフィラメント電流を計算しているが、プラズマ電流に測定誤差があり磁場データとコンシスティントとならなくなると、プラズマ断面形状が不自然に歪むことがある。プラズマ電流値に2%以上の誤差があり得る時は、プラズマ電流を未知として解いた方がよい。

表1 フィラメント近似によるプラズマ境界計算で算出される平衡諸量への磁場データの測定誤差の影響を調べた例。試験に使った平衡は、 $\beta_p \sim 1$  のダイバータ配位でその平衡諸量の正確な値を一番上の段に示している。 $X_p$  はセバラトリックス面がダイバータ板と交わる位置を表わしている。A～E は本文で説明しているように、入力データ数を変えており、各数値は真の値に対する相対推定誤差を%の単位で表わしている。

	$I_p$	$R_p$	$R_{IN}$	$R_{OUT}$	$\delta_{s_2}$	$\delta_{s_0}$	$\delta_t$	$X_p$	$q_a$	BPL0*	BPL1*	
	1.900 MA	3.220 m	2.332 m	4.109 m	7.90 cm	4.35 cm	5.42 cm	3.27 cm	3.08	1.508	1.508	
入力誤差												
0 %	A	0.07	0.02	0.06	-0.003	-2.61	3.99	-0.21	-0.32	-0.20	5.18	0.51
	B	0.03	0.006	0.02	-0.004	-1.66	5.12	-0.29	-0.38	-0.03	5.18	0.56
	C	0.33	0.19	0.53	-0.003	3.78	8.47	1.57	-11.9	-0.37	4.39	-0.046
	D	0.07	0.05	0.13	-0.005	-0.21	6.17	-0.66	-0.89	-0.23	4.98	0.42
	E	0.31	0.13	0.36	-0.004	-0.74	8.46	-0.80	-4.05	-0.78	4.83	0.25
1 %	A	0.28	0.10	0.28	0.007	5.03	5.88	0.56	3.35	0.64	5.26	0.75
	B	0.26	0.05	0.15	0.005	2.78	5.70	0.35	0.49	0.29	5.19	0.65
	C	0.54	0.41	1.13	0.006	12.7	13.5	3.69	18.1	3.73	4.04	1.15
	D	0.28	0.09	0.24	0.004	2.72	7.86	0.90	8.04	0.32	4.82	0.44
	E	0.55	0.16	0.44	0.003	2.05	7.63	1.07	9.59	0.86	4.54	0.30
5 %	A	1.38	0.54	1.48	0.003	19.7	22.5	2.80	20.2	3.20	6.08	2.29
	B	1.28	0.28	0.77	0.01	10.2	12.3	1.40	5.64	1.53	5.39	1.35
	C	1.68	1.71	4.37	0.25	55.6	39.9	11.8	69.3	18.8	6.24	5.81
	D	1.30	0.34	0.94	0.02	13.8	18.2	2.45	14.6	2.51	4.34	1.31
	E	1.95	0.41	1.12	0.02	12.3	21.2	2.25	15.4	3.18	4.41	1.35

\* BPL 0 : (2-18) 式による  $\beta_p + \ell_i / 2$

BPL 1 : (2-21) 式による  $\beta_p + \ell_i / 2$

表2 18種の平衡配位例について、フィラメント近似計算により推定した平衡諸量への、測定磁場誤差の影響のまとめ。ダイバータ配位とリミター配位で差がある時は、前者を表の左側、後者を右側に記入している。各数値は相対推定誤差を%の単位で表わしている。Dは30度置き磁気プローブ22個、Eは60度置き12個のデータを入力としている。

		ダイバータ配位			リミター配位		
磁場データ誤差		0%	1%	5%	0%	1%	5%
平衡諸量	入力データ	相対推定誤差(%)					
$I_p$	D	0.1	0.3	1.4			
	E	0.4		2.1			
$R_p$	D	0.2	0.2	0.6			
	E	0.3	0.3	0.5			
$R_{IN}$	D	0.2	0.3	0.7			
	E	0.3	0.4	1.5			
$R_{OUT}$	D	0.02	0.08	0.2	0.2	0.2	0.5
	E	0.03	0.1	0.2	0.2	0.2	0.7
$\delta_{52}$	D	1	3	25	4	5	10
	E	2	5	25	5	5	10
$\delta_{30}$	D	8	10	20	3	6	30
	E	8	10	20	3	6	30
$\delta_t$	D	1	2	3			
	E	1	2	3			
$X_p$	D	1	10	15			
	E	2	10	15			
$q_a$	D	1.5	2	5			
	E	2	4	7			
BPL 0*	D	10	10	10	2	2	5
	E	10	10	10	2	2	5
BPL 1*	D	8	8	8	10	10	10
	E	8	8	8	10	10	10

\* BPL 0: (2-18) 式による  $\beta_p + \ell_i / 2$

BPL 1: (2-21) 式による  $\beta_p + \ell_i / 2$

表3 表1と同じ平衡配位について、コイル電流の測定誤差の影響を個別に変えて調べた例。  
 最初に各コイル電流値の真の値を示し、それを±1%，±5%変えて入力データとしてフィラメント近似計算をした時の平衡諸量の相対推定誤差を%の単位で示している。

		$I_p$	$R_p$	$R_{IN}$	$R_{OUT}$	$\delta_{s_2}$	$\delta_{s_0}$	$\delta_t$	$X_p$	$q_a$	BPL0*	BPL1*
		19.000MA	3.220m	2.332m	4.109m	7.90cm	4.35cm	5.42cm	3.27cm	3.08	1.508	1.508
<b>入力誤差</b>												
		$I_F = -68.04\text{KA}$										
1%	D	0.07	0.04	0.13	-0.006	-0.10	6.26	-0.64	-0.86	-0.28	4.98	0.42
	E	0.32	0.12	0.36	-0.008	-0.74	4.95	-0.78	-3.48	-1.15	4.81	0.24
-1%	D	0.07	0.05	0.14	-0.004	-0.34	6.05	-0.68	0.94	-0.08	-0.002	0.43
	E	0.30	0.13	0.36	-0.004	-0.75	4.99	-0.84	-4.93	-0.73	-0.003	0.25
5%	D	0.07	0.04	0.13	-0.02	0.38	6.70	-0.46	-0.69	-0.99	4.93	0.39
	E	0.33	0.12	0.36	-0.01	-0.72	4.91	-0.64	-0.99	-1.72	4.78	0.21
-5%	D	0.06	0.06	0.14	0.009	-0.83	5.60	-0.75	-1.70	1.08	5.06	0.46
	E	0.29	0.14	0.36	0.02	-0.79	4.97	-0.95	-7.45	1.29	4.88	0.29
		$I_v = 32.67\text{KA}$										
1%	D	0.30	-0.09	-0.26	-0.002	-1.02	5.20	-1.50	-1.50	2.72	7.45	2.61
	E	0.49	-0.04	-0.11	-0.006	-2.24	3.53	-1.50	-1.75	1.69	7.37	2.49
-1%	D	-0.16	0.18	0.52	-0.004	0.55	7.08	0.27	1.17	-2.42	2.55	1.00
	E	0.13	0.29	0.81	-0.001	0.76	6.40	-0.03	0.45	-2.99	2.28	0.29
5%	D	1.21	-0.70	-1.93	-0.007	-4.11	1.51	-4.83	-4.01	1.20	17.4	11.3
	E	1.23	-0.77	-2.11	-0.010	-8.02	-2.13	-4.21	-3.90	1.60	17.8	11.5
-5%	D	-1.07	0.70	1.93	-0.003	3.70	10.9	3.48	3.84	-1.02	-7.01	-10.5
	E	-0.60	0.91	2.51	-0.002	6.81	12.2	2.71	3.65	-1.15	-7.71	-11.0
		$I_M = 110\text{KA}$										
1%	D	0.12	0.10	0.28	-0.004	2.48	9.75	0.60	2.11	-1.97	5.20	0.62
	E	0.34	0.18	0.50	-0.007	2.60	9.23	0.38	1.57	-2.67	4.99	0.44
-1%	D	0.01	-0.005	-0.01	-0.002	-2.93	2.49	-1.85	-3.81	2.46	4.81	-0.61
	E	0.29	0.08	0.22	-0.001	-4.07	0.67	-1.93	-4.09	1.81	4.66	0.05
5%	D	0.33	0.30	0.84	-0.005	1.32	2.39	4.96	4.26	-7.05	6.16	4.25
	E	0.44	0.37	1.04	-0.006	1.59	2.60	4.46	4.17	-7.67	5.80	4.15
-5%	D	-0.20	-0.21	-0.58	-0.003	-1.34	-1.22	-6.78	-4.44	2.48	-6.80	-4.45
	E	0.18	-0.12	-0.33	-0.006	-1.70	-1.66	-6.56	-4.43	2.50	-6.58	-4.44
		$I_Q = 25\text{KA}$										
1%	D	0.07	0.04	0.13	-0.004	0.09	6.52	-0.33	-0.30	-0.38	4.90	0.34
	E	0.32	0.13	0.37	-0.005	-0.63	5.12	-0.47	-0.69	-1.19	4.73	0.15
-1%	D	0.07	0.05	0.14	-0.006	-0.53	5.78	-0.90	-6.72	-0.01	5.07	0.51
	E	0.29	0.13	0.35	-0.004	-0.86	4.81	-1.05	-1.16	-0.39	4.91	0.34
5%	D	0.08	0.04	0.11	-0.003	1.32	8.01	0.59	2.24	-1.39	4.56	-0.02
	E	0.38	0.14	0.39	-0.005	-0.20	5.67	0.51	1.86	-2.47	4.38	-0.24
-5%	D	0.06	0.05	0.15	-0.002	-1.78	4.26	-1.82	-3.88	1.81	5.44	0.87
	E	0.24	0.12	0.33	-0.005	-1.29	4.27	-2.05	-4.27	1.30	5.27	0.73

\* BPL0 : (2-18)式による  $\beta_p + \ell_i / 2$ BPL1 : (2-21)式による  $\beta_p + \ell_i / 2$

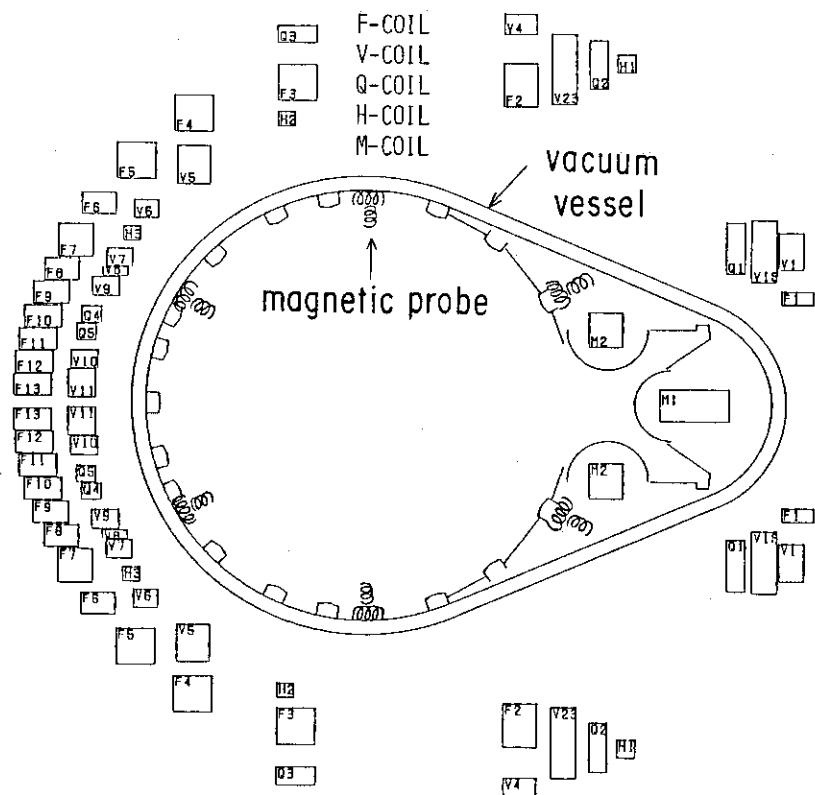


図 2.1 JT - 6 0 のポロイダル磁場コイル及び磁気プローブ (# 7 セクター)

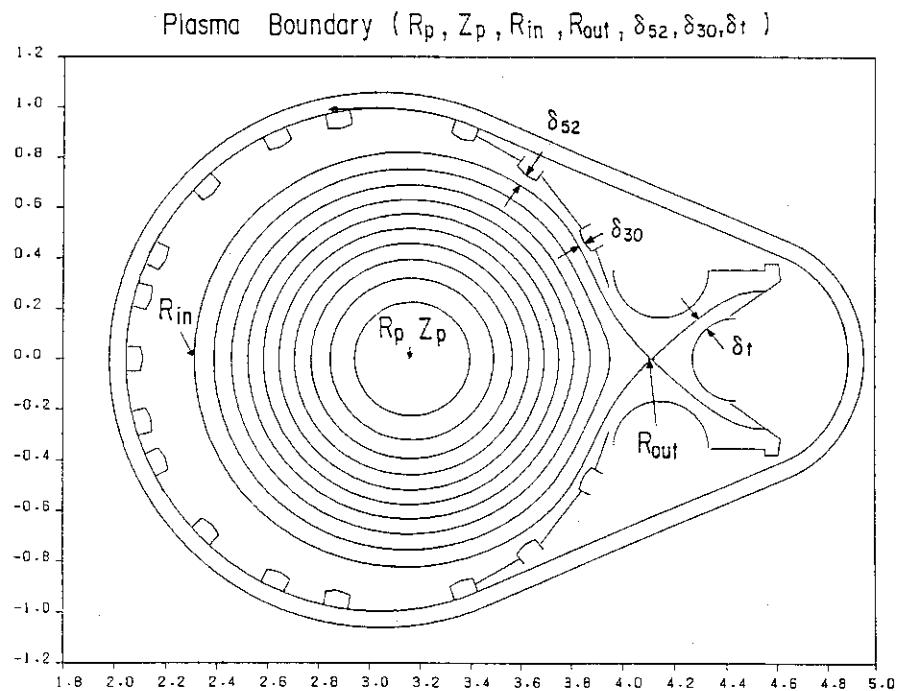
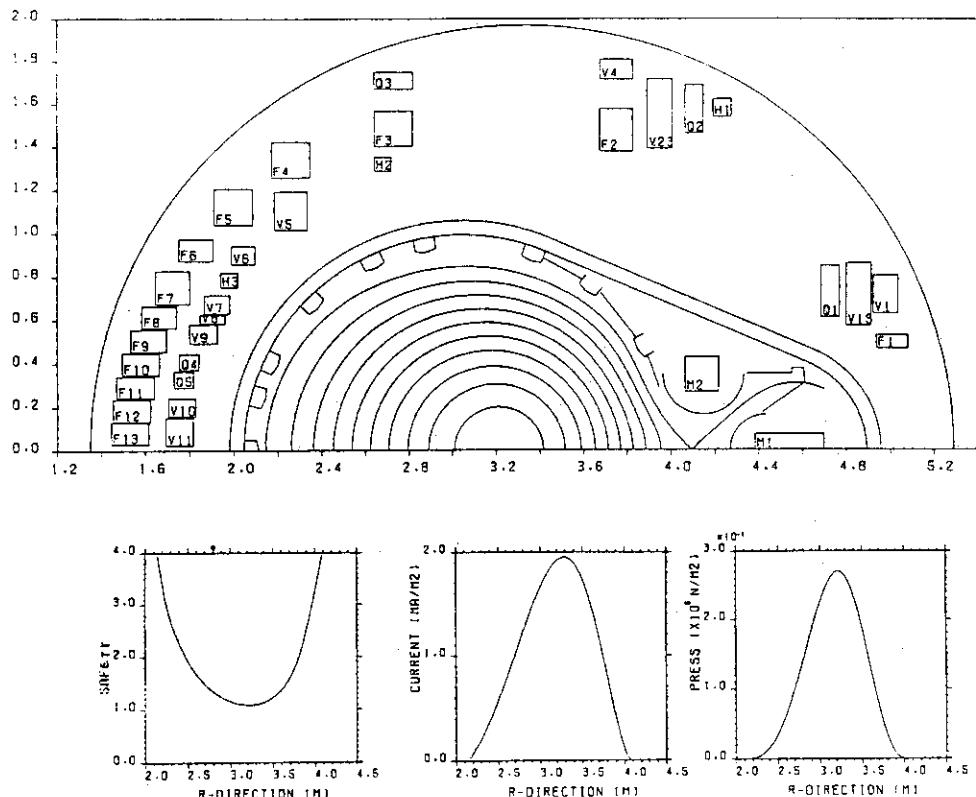


図 2.2 JT - 6 0 のダイバータ配位のプラズマ境界位置を指定するパラメータ。  
30 度リミター, 52 度リミターとセパラトリックス面との間隔を, それ  
ぞれ  $\delta_{30}$ ,  $\delta_{52}$  と名づけ, ダイバータのスロート幅を  $\delta_t$  と呼んで  
いる。

## Test Configuration



## Plasma Boundary Calculated by Fast Boundary Identification Code

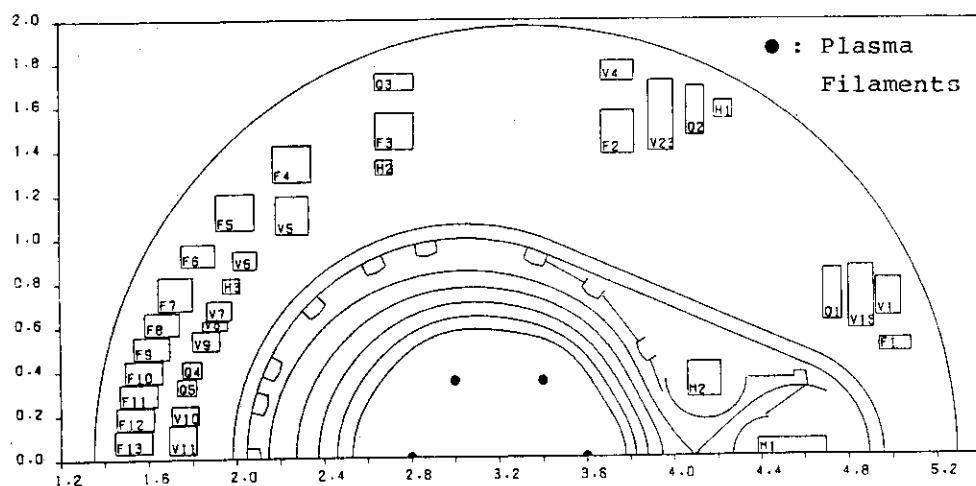
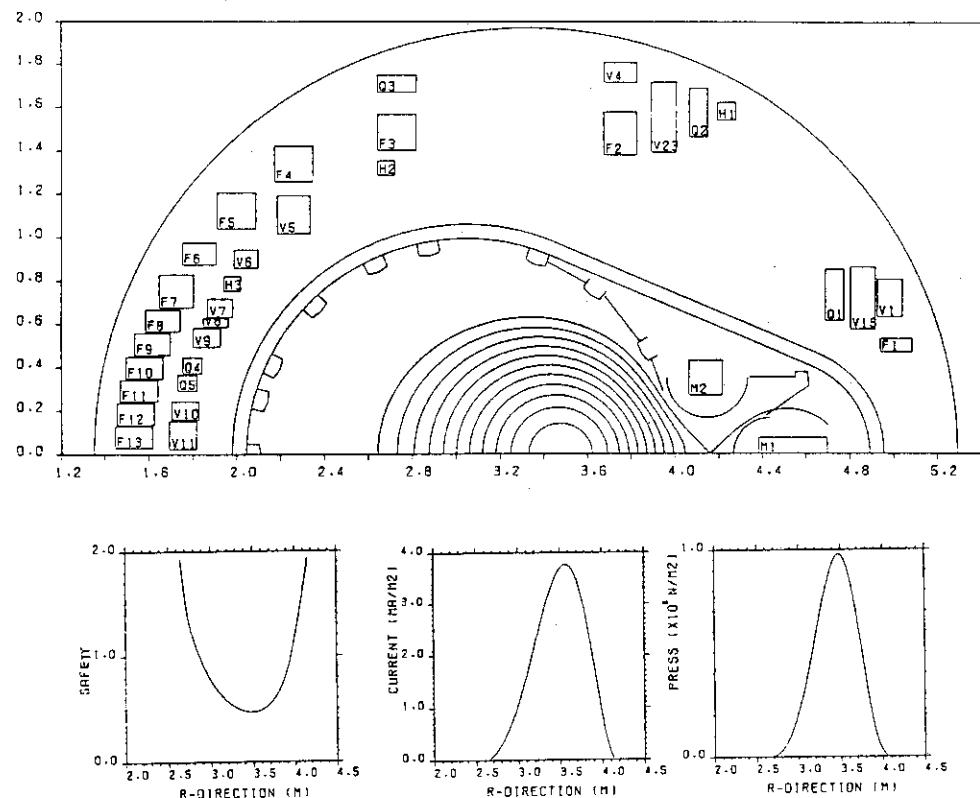


図 2.3 フィラメント近似によるプラズマ境界計算の解析例。上部にテストデータに用いた平衡配位の磁気面と、安全係数、プラズマ電流、プラズマ圧力の赤道面上での分布を示している。プラズマ断面が真空容器いっぱいに大きい場合で、 $\beta_p \sim 2$ である。下部が 6 本のフィラメント近似計算により得られた磁気面である。

## Test Configuration



## Plasma Boundary Calculated by Fast Boundary Identification Code

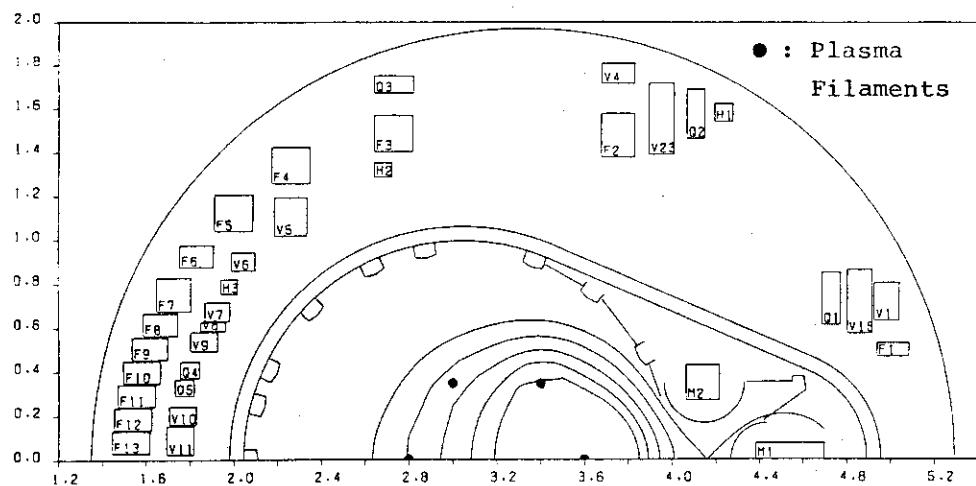


図 2.4 フィラメント近似によるプラズマ境界計算の解析例。プラズマ断面が小さくなつた場合で、 $\beta_p \sim 2$ である。

### 3. Grad-Shafranov 方程式による平衡計算

磁場データに最もよく一致するMHD平衡解を計算するための計算コード FEI (Full Equilibrium Identification)について述べる。これは図1の Equilibrium Code に当たるものである。まず3.1で問題の定式化を行い、その計算手法を3.2で説明する。この方法により、 $\beta_p$ と $\ell_i$ がどれくらいの精度で分離できるかについて3.3で述べる。磁場データだけから、電流分布や $q_{axis}$ の値がどの程度推定できるかについて3.4で調べる。

#### 3.1 問題の定式化

軸対称な系でプラズマ圧力が等方なMHD平衡配位を与えるポロイダル・フラックス $\psi$ は、次のGrad-Shafranov方程式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R j_\varphi \quad (3-1)$$

ここで $j_\varphi$ はプラズマ電流密度であり、MHD理論から圧力項と反磁性項からなる次の関数形で表される。

$$j_\varphi = R \frac{dp(\psi)}{d\psi} + \frac{1}{\mu_0 R} f(\psi) - \frac{df(\psi)}{d\psi} \quad (3-2)$$

$p(\psi)$ と $f(\psi)$ は $\psi$ について任意の関数であってよい。従って(3-1)式の右辺が $\psi$ の一次関数となる場合を除いて、方程式としては非線形である。

さらに、(3-1)式の解はプラズマ境界 $\Gamma_p$ 上で連続の条件を満たさなければならない。

$$\psi^p \Big|_{\Gamma_p} = \psi^v \Big|_{\Gamma_p}, \quad \frac{\partial \psi^p}{\partial n} \Big|_{\Gamma_p} = \frac{\partial \psi^v}{\partial n} \Big|_{\Gamma_p} \quad (3-3)$$

ここで $p$ と $v$ は、 $\Gamma_p$ に関してそれぞれプラズマ側、真空側の解であることを示すラベルである。 $\psi^v$ は(3-1)式の右辺をゼロとした齊次方程式を満たす。一般的にはプラズマ境界 $\Gamma_p$ は未知であり、それ自体を問題の一部として解かなければならない(自由境界問題)。

電磁気の測定データによる制約条件として、フラックス・ループの測定点 $(R_k, Z_k)$ 、あるいは磁気プローブの測定点 $(R_i, Z_i)$ で解は以下の条件を満たさなければならない。

$$\psi^v(R_k, Z_k) = \psi_k \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial \psi^v(R_i, Z_i)}{\partial Z} = -R B_R^i \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial \psi^v(R_i, Z_i)}{\partial R} = R B_Z^i$$

プラズマ電流が測定値と一致する条件として次の式を満たさなければならない。

$$\int j_\varphi dv = I_p \quad (3-6)$$

実験ではプラズマ電流分布は未知であり、それはプラズマ内部の磁気面の完全な幾何学的形状の情報が得られた時のみ同定可能である<sup>11)</sup>。従って真空側だけの測定では限界があり、(3-2)式の右辺は適当な関数形を仮定し、その範囲内で解を求ることになる。

以上が数学的定式化であるが、これは well-posed の問題ではなく解は一意的には定まらない。なぜなら、(3-4), (3-5)式を計算領域境界上での境界条件と考えると、それらは連続点上ではなく限られた位置での値を指定するに過ぎなく、解は測定点以外で任意の値を取ってもよいからである。この数学的困難を回避するために、プラズマ電流分布を定める自由パラメータは必要最小限にし、物理的にあまり意味のない細かい構造は考慮の対象外とする。

前章で述べたように実験データには誤差が含まれているので、数値計算上は(3-4), (3-5)式を厳密に満たす解ではなく、それらに最もよく一致する解(最小二乗解)を計算する。それには、まず未知パラメータを適当に仮定してMHD平衡解を計算し、その結果を見てはパラメータを修正して計算し直すことを繰り返して最小二乗解を見つけ出す作業をすることになる。Dirichlet型の境界条件(3-4)式が与えられると、真空磁気面が抑えられることになるので短時間で計算できる。しかしながらJT-60の真空容器内には上下を除いてフラックスループが無く、Neuman型の境界条件(3-5)式のみで自由境界問題を解かなければならない。

ところで前章で見たように、フィラメント近似によるFBIコードによりプラズマ境界がかなり正確に求まる。この結果を活用して、プラズマの水平方向の位置を固定した固定境界問題に持ち込んで解くと効率よく計算できる。具体的には次の条件を加える。

$$\begin{aligned} \psi^p(R_{IN}, 0) &= \psi^v(R_{OUT}, 0) = 0 \\ \psi^p(R_{OUT}, 0) &= \psi^v(R_{OUT}, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3-7)$$

ボロイダル・フラックスは、プラズマ電流の作るもの( $\psi^{pls}$ )と外部コイル電流の作るもの( $\psi^{ext}$ )の和として書き下せる。

$$\psi^p \text{ or } v = \psi^{pls} + \psi^{ext} \quad (3-8)$$

計算の過程で常に(3-7)式を満たすように $\psi^{ext}$ を調整するために、外部コイル電流のうち2種を未知とする。2種のコイルとして通常FコイルとVコイルを使っている。電流分布や $\beta_p$ を変化させてパラメータ・スキャンする時に、その平衡に必要な垂直磁場は変化するので、Vコイル電流値は未知とした方が速く収束解が得られる。Fコイルは真空容器内にほとんど一様なフラックスしか発生

しないので、その電流値が少々ふらついてもプラズマ断面形状にはあまり影響がない。

さて、 $p'$  と  $f f'$  が同じ関数形で表現できると仮定すると (3-2) 式は

$$j_\varphi = j_0 + \beta_p^* R / R_p + (1 - \beta_p^*) R_p / R \cdot F(\tilde{\psi}) \quad (3-9)$$

$$\tilde{\psi} = (\psi - \psi_{\text{axis}}) / (\psi_{\text{sur}} - \psi_{\text{axis}}) \quad (3-10)$$

と書きうる。ここで  $j_0$  は規格化定数であり、 $\beta_p^*$  は  $\beta_p$  を定めるパラメータで近似的に  $\beta_p$  の値である。 $R_p$  はフィラメント近似計算で求めたプラズマ中心位置である。関数  $F(\tilde{\psi})$  は任意のものでよいが、本コードにおいては次に示す二重のべき関数とした。

$$F(\tilde{\psi}) = (1 - \tilde{\psi}^\alpha)^\gamma \quad (3-11)$$

指数  $\alpha$  と  $\gamma$  により広い範囲の電流分布を表せるようにしておき、物理量に置き換えて言えば  $q_{\text{axis}}$  と  $\ell_i$  の値を独立に与えることが可能になっている。

こうして電流分布を定めるパラメータとして ( $j_0$ ,  $\beta_p^*$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ) の 4 つのものが未定となっているが、これらの値は物理量 ( $I_p$ ,  $\beta_p$ ,  $q_{\text{axis}}$ ,  $\ell_i$ ) と関連している。 $I_p$  の値はロゴスキーコイルを使って測定される。あるいは FBI コードから算出した値を用いてもよい。もし軟 X 線信号等に sawtooth 振動が現われていれば、 $q_{\text{axis}} \sim 1$  である。FBI コードにより  $\beta_p + \ell_i / 2$  の推定値は得られるが、 $\beta_p$  と  $\ell_i$  は分離できない。プラズマの温度と密度の分布が測定されている場合、または反磁性ループが備っている場合は  $\beta_p$  の値を計算できるが、磁気プローブだけのデータからは今試みようとしている MHD 平衡計算により測定データに最もよく一致する値を検索することになる。その最もよく一致するという客観的判断規準として最小二乗法を採用する。

### 3.2 数値解法

(3-1) 式の Grad-Shafranov 方程式は非線形なので、反復法で数値的に解くことになる。本計算コードは、自由境界 MHD 平衡計算コード SELENE 4.0<sup>12)</sup> を元にしており、(3-1) 式は直接差分解法である Buneman 法を用いて解いている。現在のところ上下対称を仮定し、計算領域は  $R = 1.8 \sim 4.7$  m,  $Z = 0 \sim 1.2$  m の範囲で、格子点数は  $129 \times 65$  としている。未知の電流分布パラメータのうち ( $j_0$ ,  $\beta_p^*$ ,  $\alpha$ ) の 3 つは、計算ループの途中で指定した ( $q_{\text{axis}}$ ,  $\beta_p$ ,  $I_p$ ) の値になるように調整する。そのフローチャートを図 3.1 a, b に示す。収束判定の  $\epsilon$  は  $5 \times 10^{-5}$  としている。計算メモリ領域の節約の観点より、境界条件を与える部分を含めて Grad-Shafranov 方程式を Buneman 法で解くところだけを倍精度として、残りは单精度としている。プラズマ電流の作るポロイダル・フラックス  $\psi^{pl}$  は倍精度であるが、外部コイル電流の作る  $\psi^{ext}$  は单精度となっているので、それを数値微分して磁場を計算すると精度が落ちる。そこで、磁気プローブの位置での外部コイル電流の作る磁場は、グリーン関数を用いて直接計算している。

最小二乗法を適用するにあたり問題は非線形なので、結局 ( $I_p$ ,  $I_c$ ,  $R_{\text{IN}}$ ,  $R_{\text{OUT}}$ ,  $\beta_p$ ,  $q_{\text{axis}}$ ,  $\gamma$ ) の値を与えて得られた平衡解から磁気プローブ位置での磁場  $b_i$  を計算し、測定値  $\hat{b}_i$  との重みつき残差の二乗和

$$\chi^2 = \sum_i w_i (\hat{b}_i - b_i)^2 \quad (3-12)$$

が最小になるように未知のパラメータ値を修正する。 $q_{axis}$  の値も未知の時は  $(\beta_p, q_{axis}, \gamma)$  の3次元上を、また  $q_{axis} = 1.0$  としてよい場合には  $(\beta_p, \gamma)$  の2次元上をパラメータ・スキャンすることになる。前部で述べたように磁場データだけでは情報不足で、電流分布について  $\ell_i$  以上のことを調べようとすると困難を伴うので、ここでは  $q_{axis}$  の値は既知とする。 $q_{axis}$  の値が未知の時どの程度までそれが推定できるかについては次節で調べる。

計算方法の試験のために、次の3種のダイバータ配位をテストデータに使う。

CASE. A :  $q_{axis} = 1.0, \beta_p = 0.5, \ell_i = 0.95$

CASE. B :  $q_{axis} = 1.0, \beta_p = 2.0, \ell_i = 0.95$

CASE. C :  $q_{axis} = 1.0, \beta_p = 0.5, \ell_i = 1.50$

CASE. A は、電流分布がほぼ放物形であり標準的な配位である。CASE. B は高ベータ・プラズマの平衡例である。CASE. C は電流分布がややピーフィングした例である。図3.2に CASE. A の平衡配位を示す。この平衡例をテストデータに使い、 $q_{axis} = 1.0$  として  $(\ell_i, \beta_p)$  の2次元上で  $\chi^2$  の値がどのようにになっているかを見たのが図3.3である。縦軸は  $\beta_p$  であり横軸は  $\gamma$  の代りに物理量  $\ell_i$  の値でプロットしている。重み  $w_i = 1$  として計算しているので  $\chi^2$  の値の単位は磁場の二乗  $T^2$  であり、統計理論に基づいて規格化された値ではない。 $\ell_i$  の値として 0.7 ~ 1.2 の範囲しかないので、それ以外では (3-11) 式の関数形を仮定する限り平衡解が存在しないことに対応している。等高線は  $(\ell_i, \beta_p)$  の平面上で斜めに走っており、ほぼ  $\beta_p + \ell_i / 2 = \text{一定}$  の傾きとなっている。これは円形断面では  $\beta_p$  と  $\ell_i / 2$  が縮退していることに対応しているが、中心付近に  $\chi^2$  の小さい細長い領域があり、これは最小二乗解が存在することを示している。同じような等高線図を CASE. B の平衡配位 (図3.4) と CASE. C の平衡配位 (図3.6) について調べた結果が図3.5、図3.7である。これらの等高線は定性的に図3.3と同じであり、 $\beta_p$  と  $\ell_i$  は完全には独立ではないが、 $\beta_p$  が高くなった場合や電流分布が少し peaking した場合にも最小二乗解が存在することを示している。しかも、いずれの場合も最小値を与える点以外に極小となる停留点が無いので最小二乗問題としては扱いやすい。

最小二乗解が存在することが分れば、後は効率よく2次元上をスキャンして最小値にたどり着くようすればよい。 $\chi^2$  を最小化する目的関数とした時の引数は  $\beta_p$  と  $\gamma$  であるが、問題は非線形でありしかも  $\beta_p$  と  $\gamma$  の解析的な式では表されない。従って偏導関数を用いる Newton 法や Gauss - Newton 法<sup>13)</sup> は使えない。目的関数の値だけを用いて最小化するいくつかの方法<sup>14)</sup> を試みたが、効率よく最小値にたどり着かない。 $\chi^2$  の等高線は  $(\ell_i, \beta_p)$  平面上で斜めの深い谷となっており、谷に行き着いたあたりで停滞してしまい谷に沿って最小値をスキャンするのが、いずれの方法でもうまくできなかった。そこで、こうした独特の等高線を持つ目的関数を最小化するのに相応しい方法を考案した。まず縦の方向すなわち  $\beta_p$  について  $\chi^2$  を最小化して谷にたどり着く。谷は  $\beta_p + \ell_i / 2 = \text{一定}$  の直線に沿って伸びているので、次にその直線に沿って  $\chi^2$  の最小値を求める。 $\gamma$  は  $\ell_i$  を定めるパラメータであるが、 $\beta_p + \ell_i / 2$  が一定となるような  $\gamma$  の値は計算してみないと分らない。そこで  $\gamma$  の値を適当に与えて計算し収束解の  $\ell_i$  を調べることを繰り返し、必要な  $\ell_i$  をはさむ  $\gamma$  の2つの値が得られれば、はさみ打ち法で  $\gamma$  を調整する。具体的には  $\ell_i$  と  $\ell_n \gamma$  の値に局所的には線

形の関係があるので、 $\ell_i$ について内挿している。

図3.8に概念的フローチャート、図3.9にプログラムに即したフローチャートを示す。図3.9には、それぞれの計算に対応したサブルーチン名を右側に記入している。変数LSはスキャンの方法を決めるパラメータであり、LS=1の時は $(\gamma, \beta_p)$ の2次元上で $\chi^2$ を最小化する。LS=0の場合には $\beta_p$ =一定の条件下で $\gamma$ の一次元上で最小化する。後者はプラズマの温度と密度のデータから $\beta_p$ の値が推定できる場合に、電流分布形だけを速くスキャンするためのものである。直線上の最小化についてはcoggins法<sup>15)</sup>を採用している。これは初期値が最小値を与えるパラメータ値から相当ずれていても、効率よく最小値に近づく。その方法については付録B参照のこと。

CASE. Aのテストデータについて最小値を求めた例を図3.10に示す。図に書き入れている数値がステップ番号を示し、パラメータ・スキャンの打ち切り判定条件をESRCH=0.001として、 $\beta_p$ の1次元上のスキャンに9回の平衡計算をしている。結局16種の $(\ell_i, \beta_p)$ の値について平衡計算して最小値（黒丸の位置）が得られている。 $\beta_p + \ell_i / 2 =$ 一定の直線上をスキャンする時は、各点について所望の $\ell_i$ を得るために3~5回程度 $\gamma$ を変えた平衡計算をしている。全体の計算時間としてM380のCPU時間で5分弱となっている。なお場合によっては、五分経っても最小値が得られない時がある。計算機のCPU時間制限の観点から、現在プログラムはCPU時間が5分に近づくと、それまでスキャンした中で一番小さい $\chi^2$ の値を与える $(\gamma, \beta_p)$ の値で平衡を計算し直して終了するようにしている。

### 3.3 測定誤差の影響及び $\beta_p$ と $\ell_i$ の推定

Grad-Shafranov方程式に基づいたFEIコードにより、磁場データから最小二乗MHD平衡解が得られるようになったが、測定データに誤差があると解がどのようにずれて求まり、平衡諸量がどのくらいの精度で算出されるかを調べた。2.3節と同様な方法で入力データに乱数を加えて解析して、誤差の影響をみた。図3.11はCASE. Aのテストデータについて、磁場データの二乗平均の0.5%を標準偏差とする乱数を誤差として加えるのを10通り行なって求まった最小二乗解の $(\ell_i, \beta_p)$ 分布を示している。10個の点はほぼ $\chi^2 = 0.001$ の領域に収っている。入力データの誤差を2%とすると図3.12のようになり、今度は最小となる点が $\chi^2 = 0.01$ の領域まで分布する。当然のことながら測定誤差が大きくなると、平衡諸量の推定誤差が大きくなっている。それでも、それぞれの誤差の程度に応じた領域に $(\ell_i, \beta_p)$ の値が限られるということは、磁場データからだけでも、 $\beta_p$ と $\ell_i$ の分離がある推定誤差内で可能であることを示唆している。図3.11から、測定誤差が $\pm 0.5\%$ なら $\ell_i$ は最大 $\pm 0.1$ 程度の誤差で測定可能だと解釈できる。 $\beta_p$ については最大 $\pm 0.06$ 程度の推定誤差と読みとれる。図3.12の測定誤差が $\pm 2\%$ となると、 $\ell_i$ については最大 $\pm 0.2$ 、 $\beta_p$ は最大 $\pm 0.1$ の推定誤差となる。

CASE. A, CASE. B, CASE. Cの3つのテスト平衡配位について、磁場測定誤差の標準偏差が $\pm 0.5\%$ 、 $\pm 1\%$ 、 $\pm 2\%$ となるようにそれぞれ10通りの乱数を加えて最小二乗平衡解を求めた。そしてそれらの解から平衡諸量を算出し、10通りの結果の平均値と分散値をまとめたのが表4である。フィラメント近似によるFBIコードで求めた $R_{IN}$ 、 $R_{OUT}$ の位置を固定境界として平衡計算しているので、位置の精度はフィラメント近似計算の精度となっており、2%誤差の時 $\pm 1\text{ cm}$ で $R_{IN}$ が求まり、 $R_{OUT}$ については $\pm 1\text{ mm}$ 以下となっている。リミターと最外殻磁気面とのクリアランス

$\delta_{30}$  は  $\pm 2$  mm 程度で、スロート幅  $\delta_t$  は  $\pm 1$  mm 程度の精度で算出できる。テスト計算では一般に  $\beta_p$  は真値より少し大きめに、 $\ell_i$  は若干小さめに求まる傾向がある。測定誤差が 2 % あると  $\beta_p$ ,  $\ell_i$  の推定誤差は 1 割程度となっている。しかし  $\beta_p + \ell_i / 2$  については、誤差の影響をほとんど受けることなく真値が求まる。CASE. B の高ベータの場合では、測定誤差があっても  $\beta_p$  の値がかなり正確に推定できる。ほぼ円形断面であっても  $\beta_p$  と  $\ell_i$  が分離できるのは、トロイダル効果のためと考えられる。

測定誤差のために内部インダクタンス  $\ell_i$  がある範囲内の不確定性をもつと、電流分布がどの程度変りうるかを調べたのが、図 3.13 (CASE. A), 図 3.14 (CASE. B), 図 3.15 (CASE. C) である。これらには、測定誤差が 1 % である 10 通りの乱数を加えた入力データで最小値を与える点を等高線上に示している。上部の電流分布は、 $\chi^2 = 0.001$  の曲線上で  $\ell_i$  が最大と最小になる点での平衡配位の電流分布形を示している。これらの図から分ることは、測定誤差が 1 % 程度でも、電流分布形については磁場データのみではおおよそのことしか言えないということである。

以上の誤差解析においては、ランダムな入力データ誤差について調べたが、実際の測定データについては磁気プローブの位置の設定精度等による誤差が系統誤差となって、常に同じ偏りを持った平衡諸量を算出する可能性があることに注意しなければならない。

### 3.4 電流分布形と $q_{axis}$ の推定

CASE. A ~ CASE. C のテスト例は、元の平衡配位の電流分布を定める関数形が、最小二乗解を求めるのに仮定している関数形 (3-11) 式と同じであった。だから最小二乗解が存在するとも考えられる。もしテストデータを与える電流分布の関数形が違っていたら、最小二乗解が存在しないかもしれない。あるいは、存在したとしても別の関数形で電流分布がどの程度再現されるかは興味のある点である。そこで関数形を 4 通り違えて試験した。その結果を図 3.16 に示す。同図の右側に、テスト配位の電流分布を定める関数と、FEI コードにより推定された関数を記入している。実線が真的電流分布、破線が FEI コードにより得られた電流分布である。上から一番目は、電流分布が指数関数で与えられる場合である。二番目は比較のために、(3-11) 式と同じ関数形でどの程度再現できるかを見たものである。三番目は電流分布にげたをはかせて、プラズマ境界で電流がゼロとならないようにした場合である。四番目は hollow 成分を持った電流分布となっている。一番と二番目の例のように関数形が近いかまたは同じ場合は、電流分布はかなり一致しているが、残りの二つの例のように電流分布が細かい構造を持つものは大雑把にしか再現できていない。図 3.16 の右側に  $\beta_p$  と  $\ell_i$  の値も示しているが、それらのマクロなパラメータについては電流分布の関数形が違っていてもかなり正確に再現されていることは注目すべきことである。

今までの計算ではすべて  $q_{axis}$  の値が既知としてその正確な値を入力データに使っていったが、実験で  $q_{axis}$  が推定できるとは限らない。軟 X 線信号等に sawtooth 振動が現れていれば  $q_{axis} \sim 1$  と仮定できるが、もしそれが現れていないければ  $q_{axis}$  の値は未知となる。こうした場合に備えて、最小二乗を得るために仮定する  $q_{axis}$  の値の影響を調べたのが、図 3.17 と図 3.18 である。前者は図 3.15 の上から一番目のテスト配位、後者は二番目のテスト配位について、横軸に  $q_{axis}$  の値を取り、 $\chi^2$ ,  $\beta_p$ ,  $\ell_i$ ,  $\beta_p + \ell_i / 2$  の値の変化を見たものである。今まで  $(\ell_i, \beta_p)$  の 2 次元上をパラメータ・スキャンしていたが、ここではさらに  $q_{axis}$  を加えて  $(\ell_i, \beta_p, q_{axis})$

の3次元上をパラメータ・スキャンしているのに相当している。

その結果を見ると、 $q_{axis}$  の値が真値から 50% 程度違っていても  $\chi^2$  の値はほとんど違わない。と言うことは、磁場データのみでは 3 つの未知パラメータについて最小化するのは困難であることを示している。 $\chi^2$  の値から判断する限り、 $q_{axis}$  の値については 50% 程度の精度でしか推定できない。 $\beta_p$  と  $\ell_i$  の値については、 $q_{axis}$  の値が未知でも  $\chi^2$  が最小となる領域で 10% 未満の精度で求まっている。内部インダクタンス  $\ell_i$  の値がほとんど変化しない今まで、 $q_{axis}$  の値が 2 割以上真値よりずれると、電流分布は不自然に中心部で peaking したり、flat になったりしている。従って電流分布についての客観的判断基準を何らかの方法で導入することができれば、 $q_{axis}$  の推定誤差を小さくできる可能性がある。

表4 Grad-Shafranov 方程式による平衡計算から算出される平衡諸量への磁場測定誤差の影響。  
CASE・A, B, Cのそれぞれについて、上段に真の値を示し、10通りの誤差を持つ入力データからの計算結果の平均と標準偏差を二段目以降に示している。

ERROR	RIN	ROUT	$\delta_{3_0}$	$\delta_t$	X_p	q_a	$\beta_p$	$\ell_i$	$\beta_p + \frac{\ell_i}{2}$
	2.362m	4.087m	0.0536m	0.0662m	0.0887m	2.91	0.500	0.950	0.975
0.5 %	2.364 ±0.002	4.088 ±0.005	0.0540 ±0.009	0.0660 ±0.003	0.0883 ±0.005	2.95 ±0.13	0.512 ±0.021	0.924 ±0.044	0.974 ±0.007
1 %	2.365 ±0.004	4.087 ±0.007	0.0536 ±0.015	0.0661 ±0.005	0.0885 ±0.013	3.02 ±0.24	0.502 ±0.036	0.946 ±0.075	0.975 ±0.014
2 %	2.364 ±0.011	4.087 ±0.008	0.0539 ±0.023	0.0661 ±0.013	0.0892 ±0.062	3.07 ±0.32	0.499 ±0.058	0.943 ±0.105	0.971 ±0.029
	2.241m	4.132m	0.0319m	0.0370m	-0.0374m	3.96	2.000	0.950	2.475
0.5 %	2.245 ±0.003	4.133 ±0.005	0.0321 ±0.006	0.0366 ±0.003	-0.0378 ±0.004	4.30 ±0.47	2.009 ±0.015	0.936 ±0.024	2.478 ±0.006
1 %	2.247 ±0.006	4.133 ±0.004	0.0325 ±0.010	0.0363 ±0.005	-0.0381 ±0.005	4.37 ±0.37	2.020 ±0.016	0.918 ±0.033	2.479 ±0.011
2 %	2.247 ±0.012	4.133 ±0.006	0.0338 ±0.013	0.0360 ±0.009	-0.0400 ±0.009	4.34 ±0.44	2.034 ±0.025	0.875 ±0.039	2.471 ±0.028
	2.334m	4.109m	0.0297m	0.0478m	0.0060m	5.58	0.500	1.500	1.250
0.5 %	2.342 ±0.002	4.109 ±0.001	0.0305 ±0.005	0.0467 ±0.003	0.0063 ±0.007	5.45 ±0.03	0.553 ±0.025	1.396 ±0.055	1.251 ±0.007
1 %	2.342 ±0.004	4.109 ±0.002	0.0306 ±0.010	0.0466 ±0.006	0.0063 ±0.007	5.44 ±0.05	0.564 ±0.051	1.378 ±0.110	1.253 ±0.013
2 %	2.342 ±0.011	4.109 ±0.005	0.0312 ±0.017	0.0465 ±0.012	0.0067 ±0.011	5.44 ±0.12	0.585 ±0.082	1.332 ±0.174	1.251 ±0.026

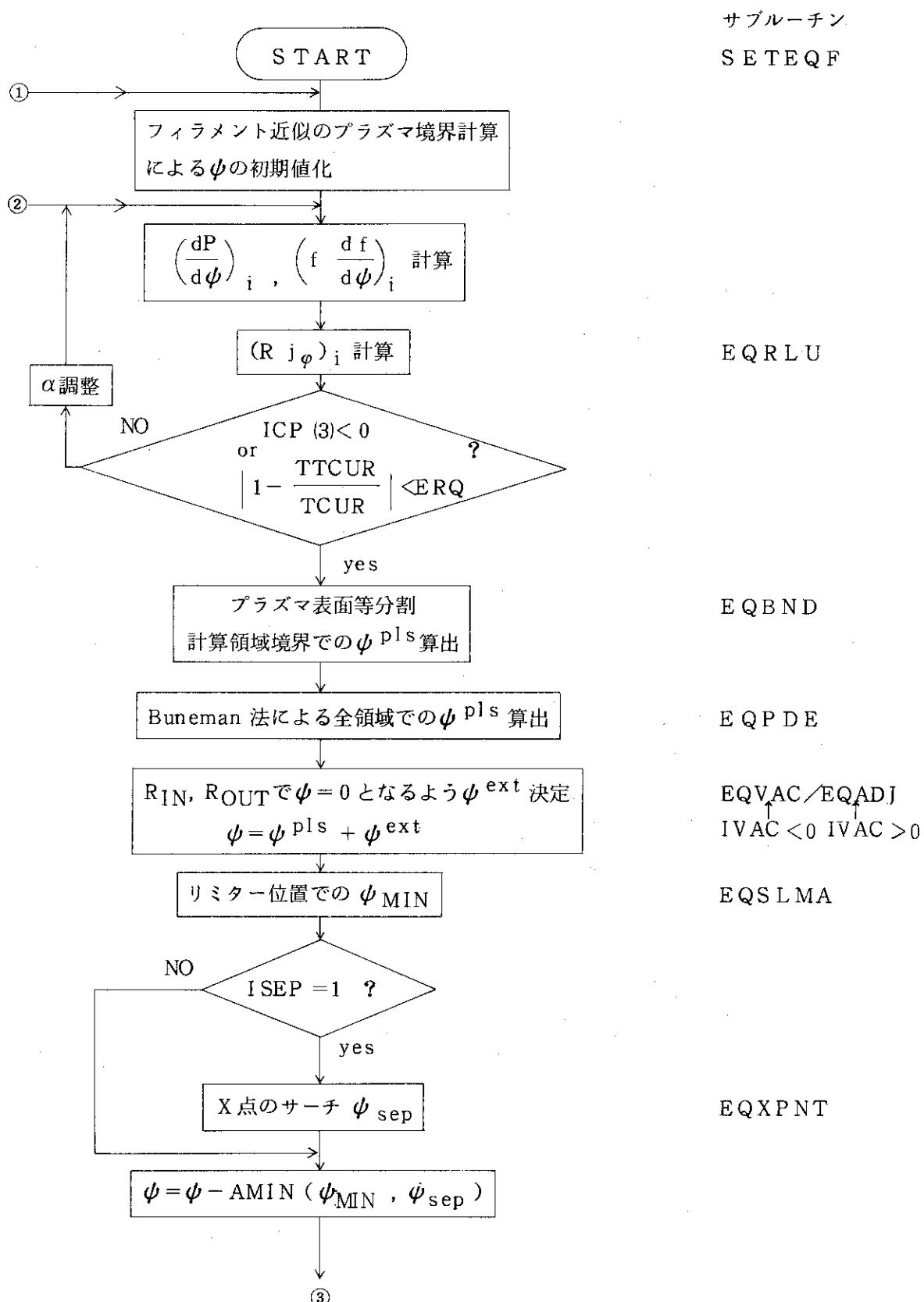


図 3.1 Grad-Shafranov 方程式を解くためのサブルーチンのフローチャート。  
IL I = 0 の時  $\gamma$  の値は固定のままであるが、IL I = 1 とすると  $\beta_p + \ell_i / 2$  の値が一定となるように  $\gamma$  を調整する。

サブルーチン

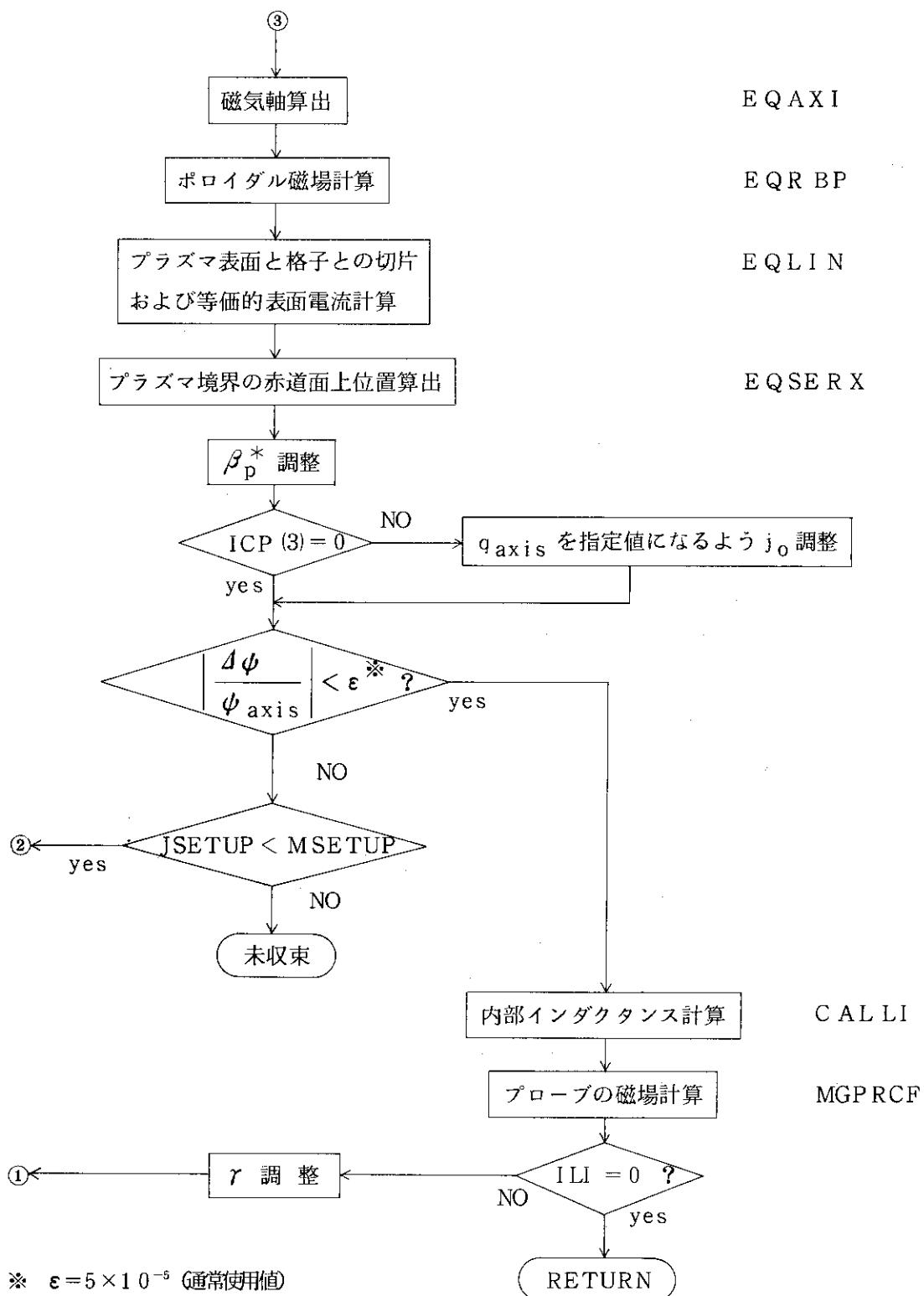
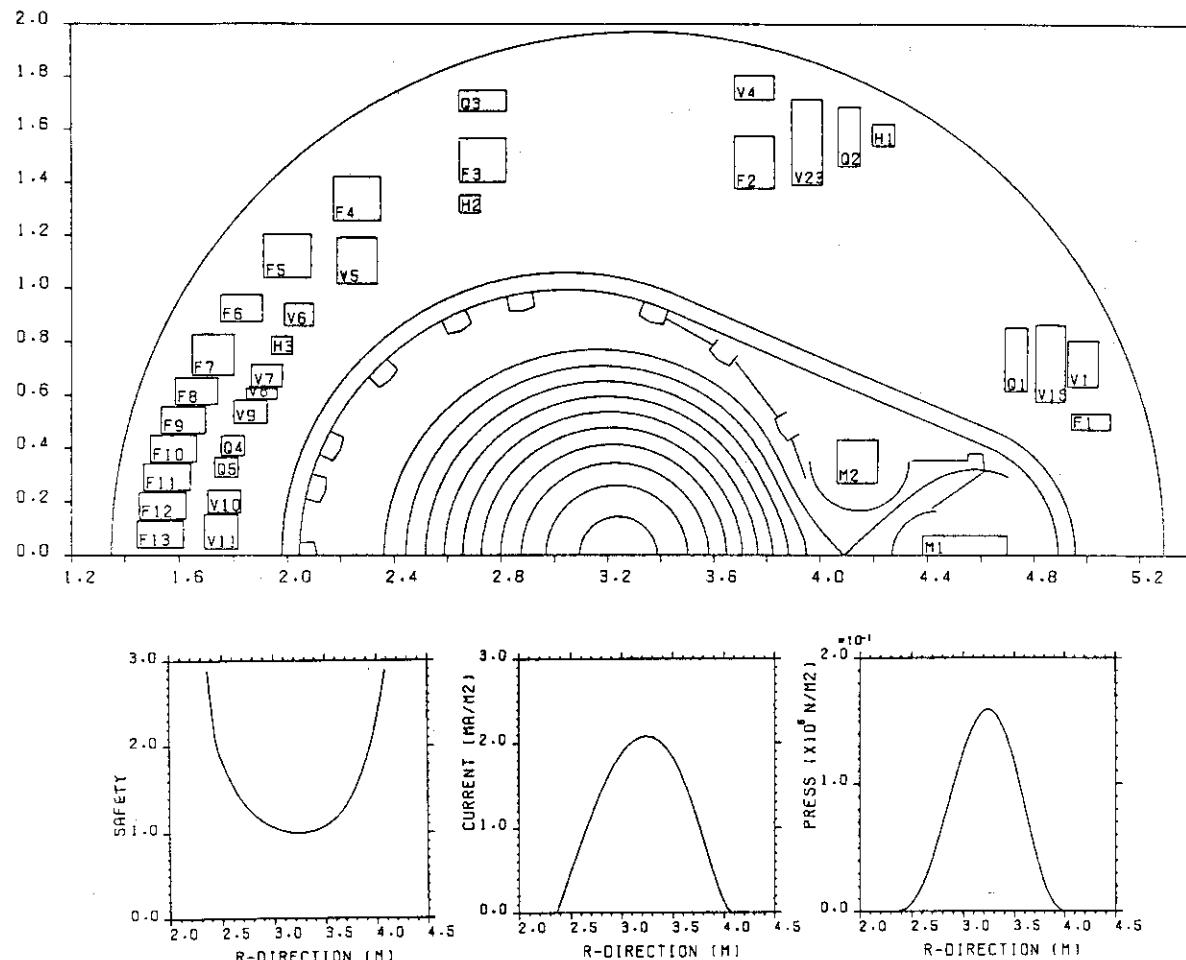
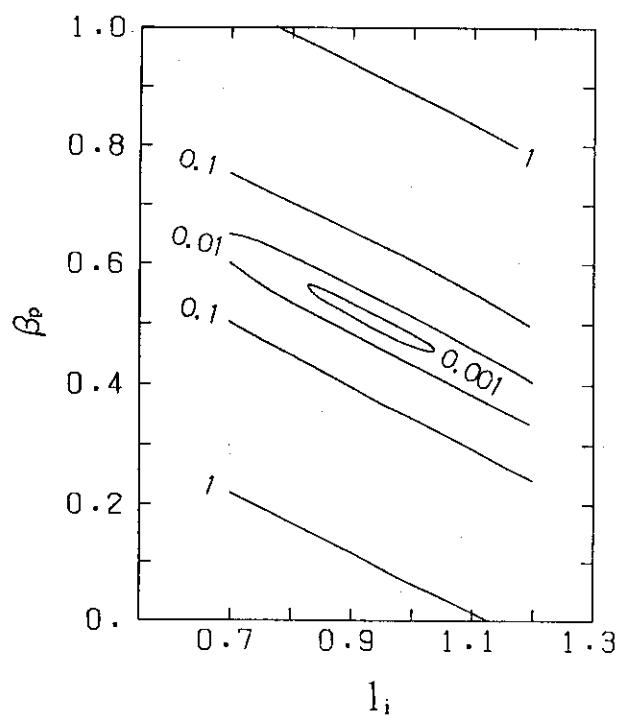
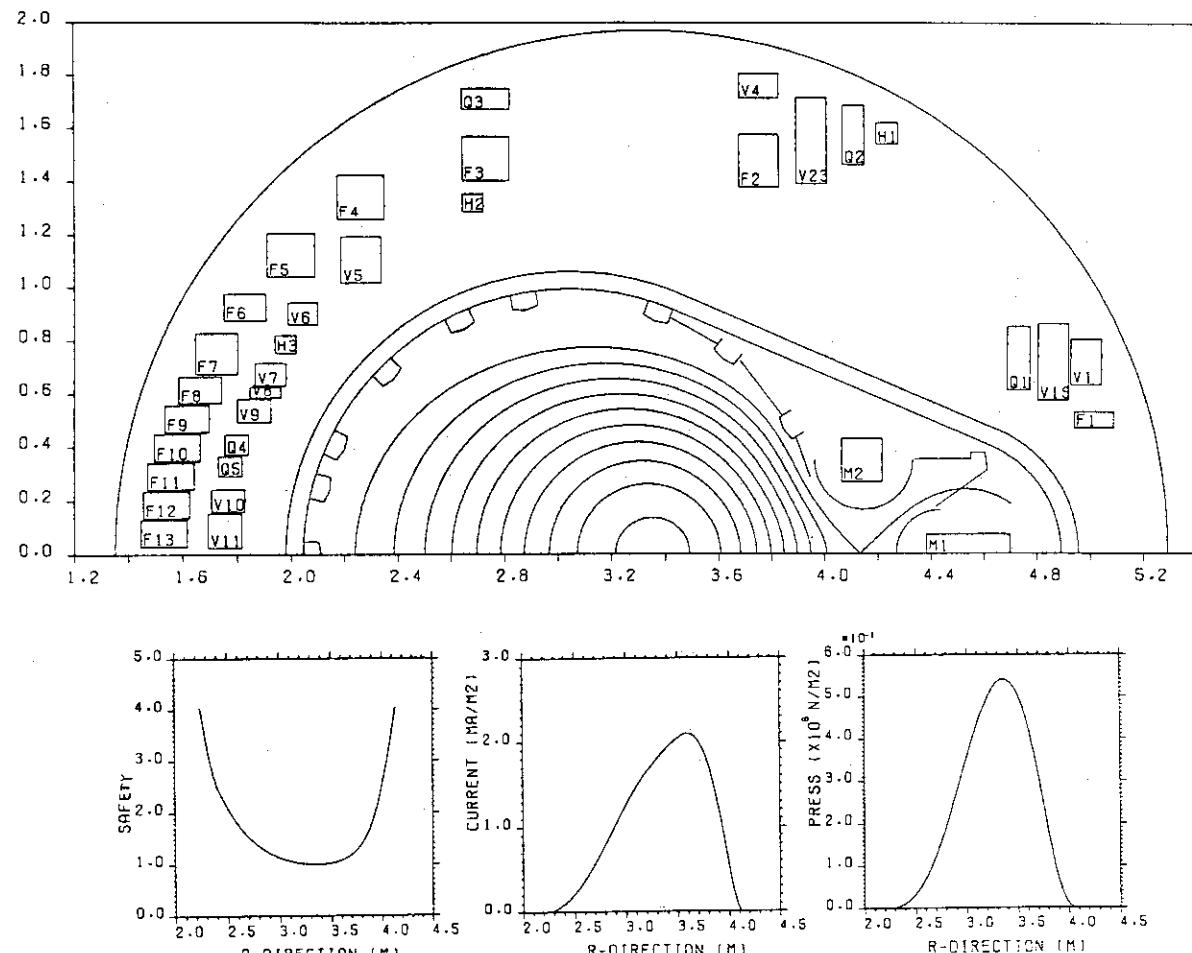
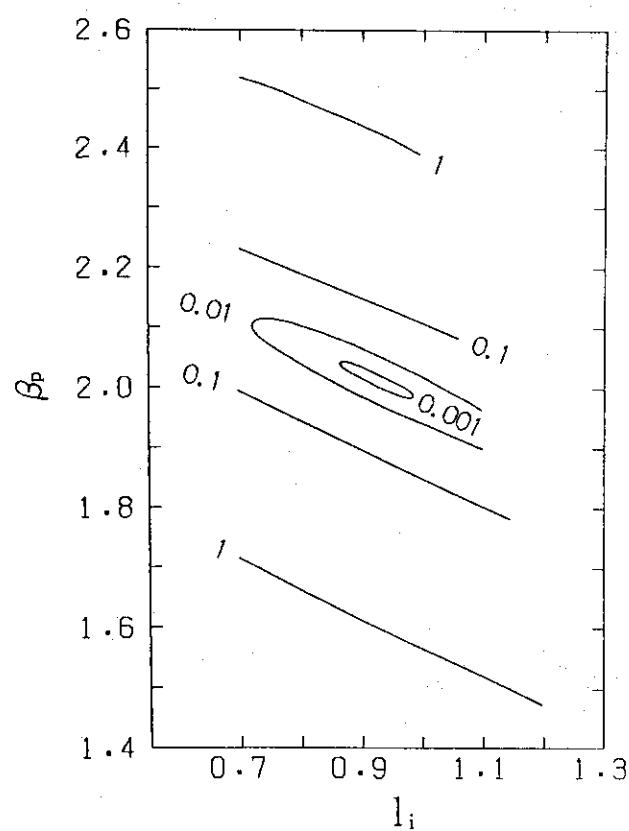
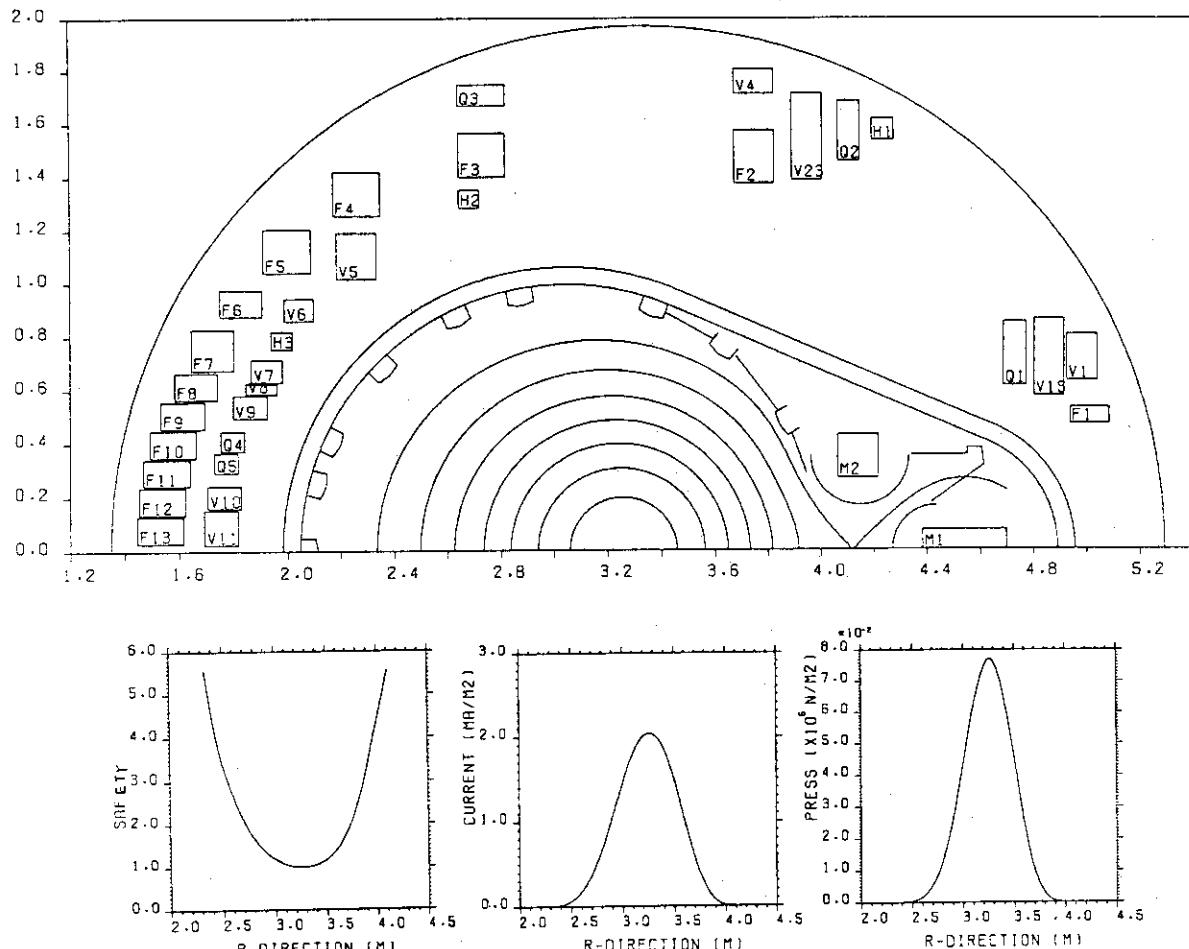
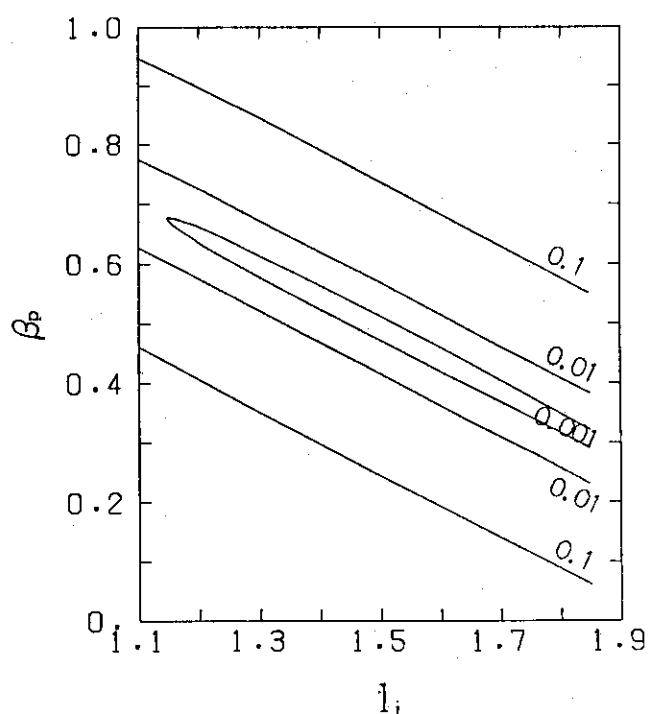


図 3.1 (続き) Grad-Shafranov 方程式を解くためのサブルーチンのフローチャート。

$\text{ILI} = 0$  の時  $\gamma$  の値は固定のままであるが、 $\text{ILI} = 1$  とすると  $\beta_p + \ell_i / 2$  の値が一定となるように  $\gamma$  を調整する。

図3.2 平衡配位 CASE. A。  $\beta_p = 0.5$ ,  $\ell_i = 0.95$ 図3.3 CASE. Aの場合の、 $(\ell_i, \beta_p)$  2次元上での $\chi^2$ の値の等高線図。

図 3.4 平衡配位 CASE. B。  $\beta_p = 2.0$ ,  $\ell_i = 0.95$ 図 3.5 CASE. B の場合の,  $(\ell_i, \beta_p)$  2 次元上での  $\chi^2$  の値の等高線図。

図 3.6 平衡配位 CASE.C。  $\beta_p = 0.5$ ,  $\ell_i = 1.50$ 図 3.7 CASE.C の場合の、 $(\ell_i, \beta_p)$  2 次元上での  $\chi^2$  の値の等高線図。

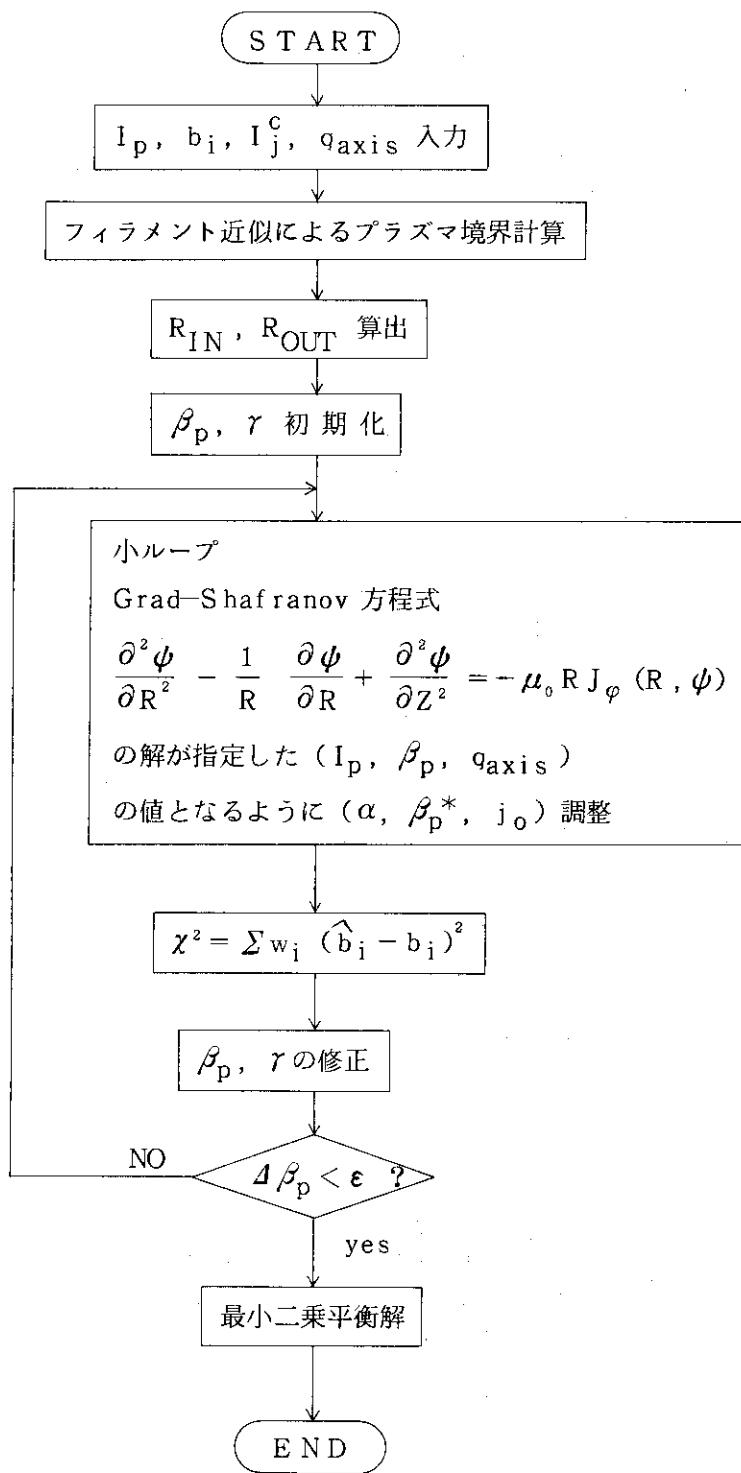


図3.8 Grad-Shafranov 方程式による平衡計算コード F E I の概念的フローチャート。小ループは図3.1で示したルーチンである。

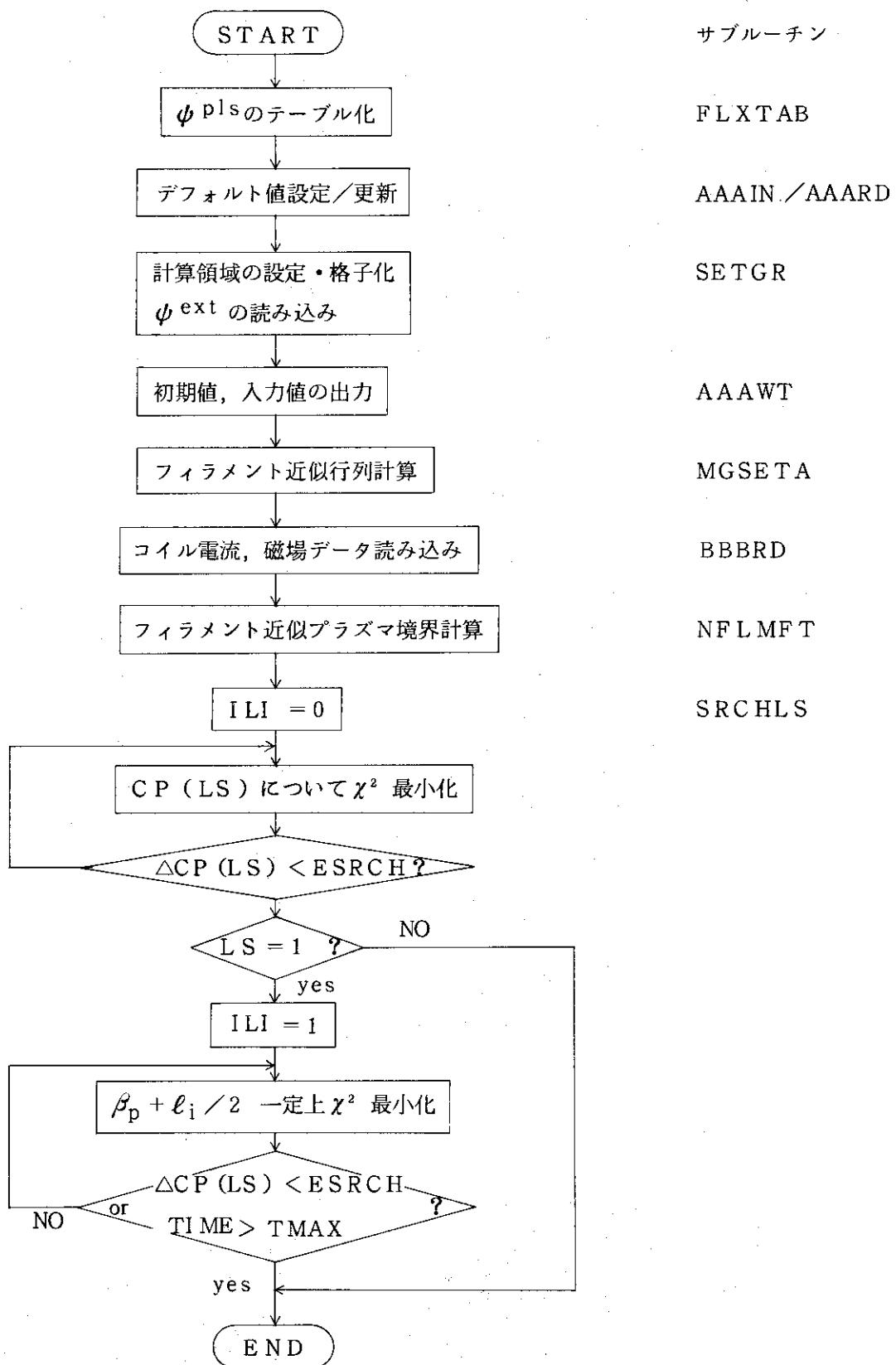


図 3.9 FEI コードのプログラムに即したフローチャート。

## ITERATION STEP BY COGGINS METHOD

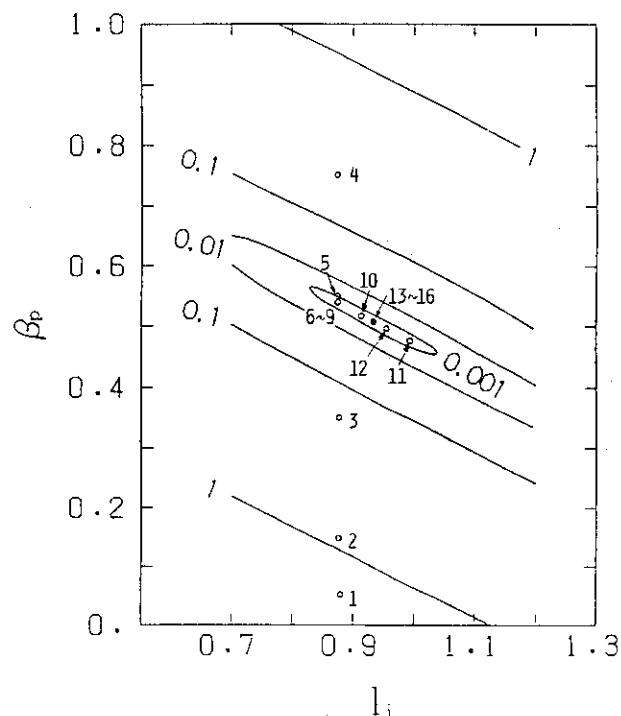


図 3.10 CASE. A のテストデータについて、最小二乗解を求めてパラメータ・スキャンした例。図中の丸印で計算ステップを示している。

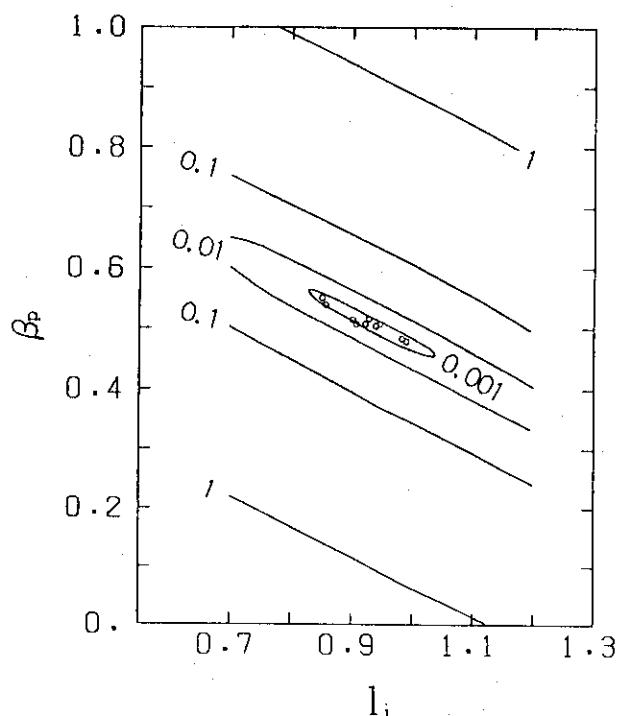


図 3.11 CASE. A の入力磁場データに、10通りの0.5%誤差を持たせた時の収束点。

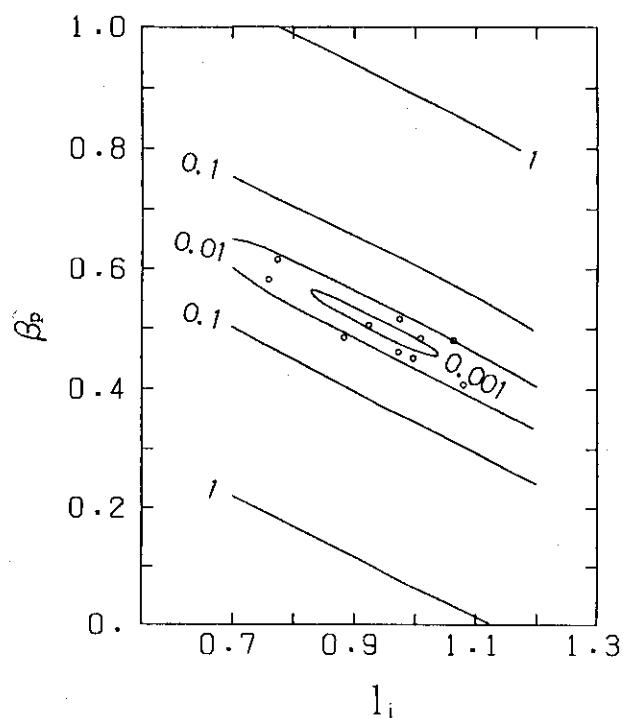


図3.1.2 CASE. Aの入力磁場データに、10通りの2%誤差を持たせた時の収束点。

## CASE A

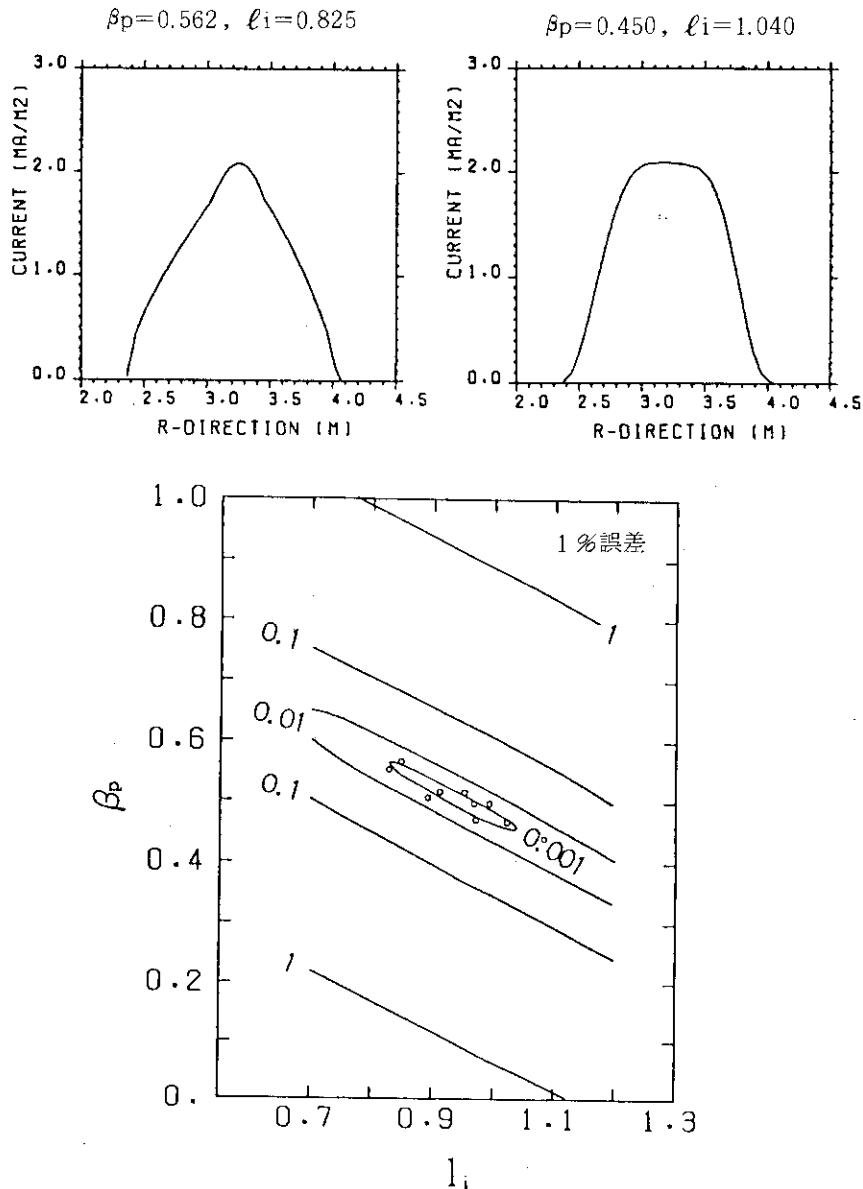


図3.1.3 CASE. Aの入力磁場データに、10通りの1%誤差を持たせた時の収束点。  
上側に  $\chi^2 = 0.001$  の曲線上で  $\ell_i$  が最大と最小となる点での平衡配位の  
電流分布形を示す。

CASE B

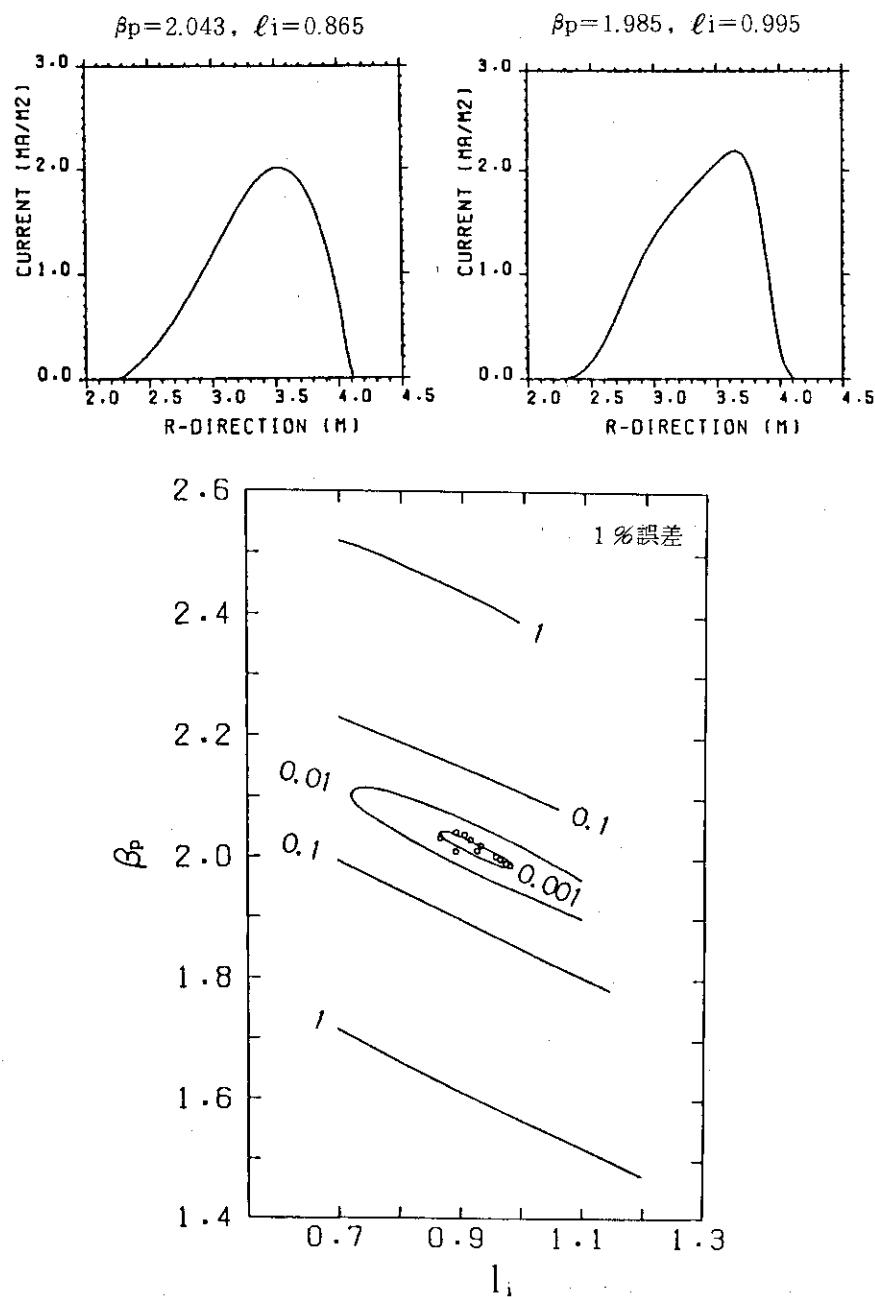


図 3.14 CASE. B の入力磁場データに、10通りの1%誤差を持たせた時の収束点。  
上側に  $\chi^2 = 0.001$  の曲線上で  $\ell_i$  が最大と最小となる点での平衡配位の  
電流分布形を示す。

## CASE C

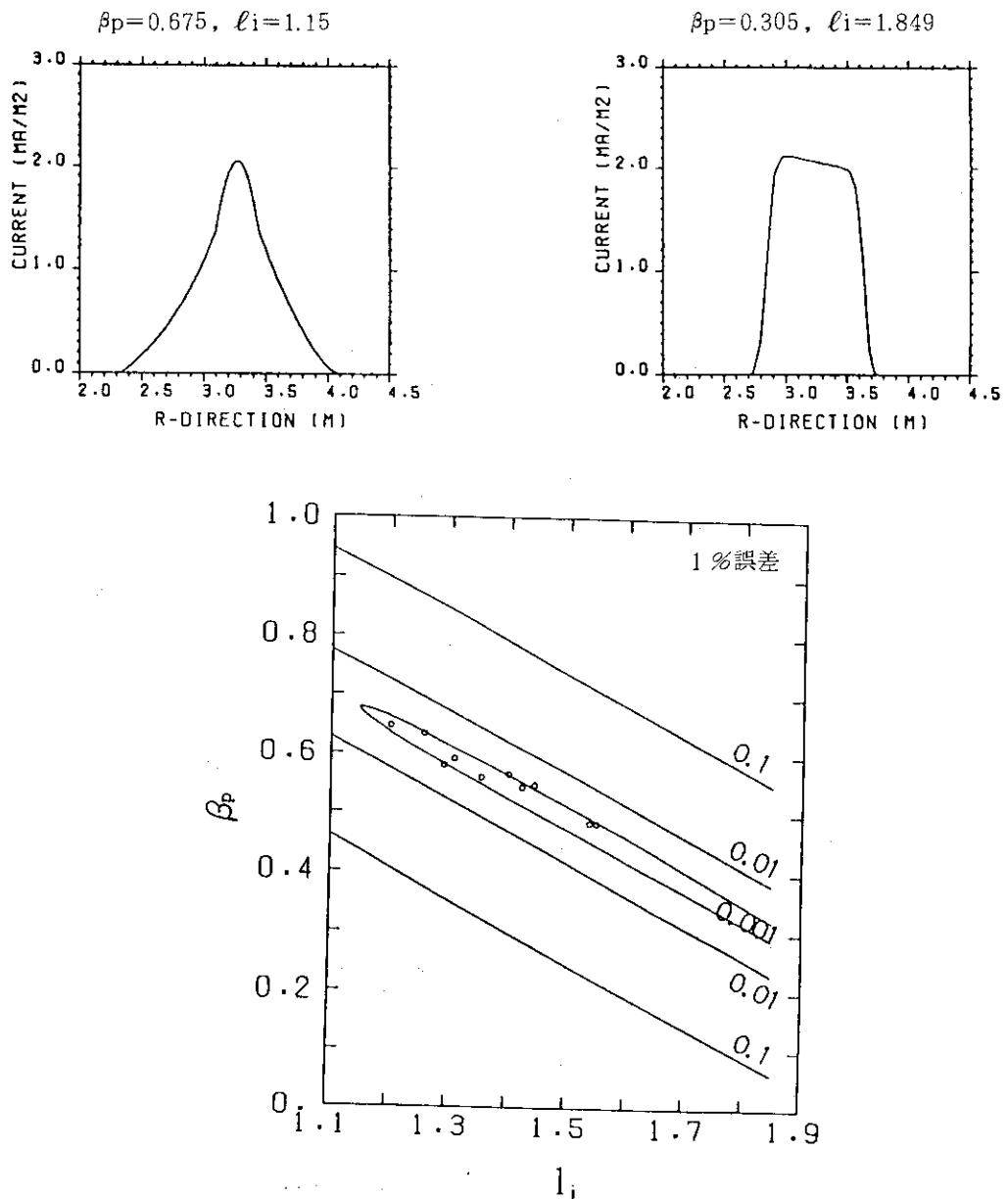


図 3.1.5 CASE. C の入力磁場データに、10通りの1%誤差を持たせた時の収束点。  
上側に  $\chi^2 = 0.0001$  の曲線上で  $\ell_i$  が最大となる点と最小となる点での  
平衡配位での電流分布形を示す。 $\ell_i \geq 1.85$  の領域では収束解が得られない。

## SENSITIVITY TO THE PLASMA CURRENT PROFILE

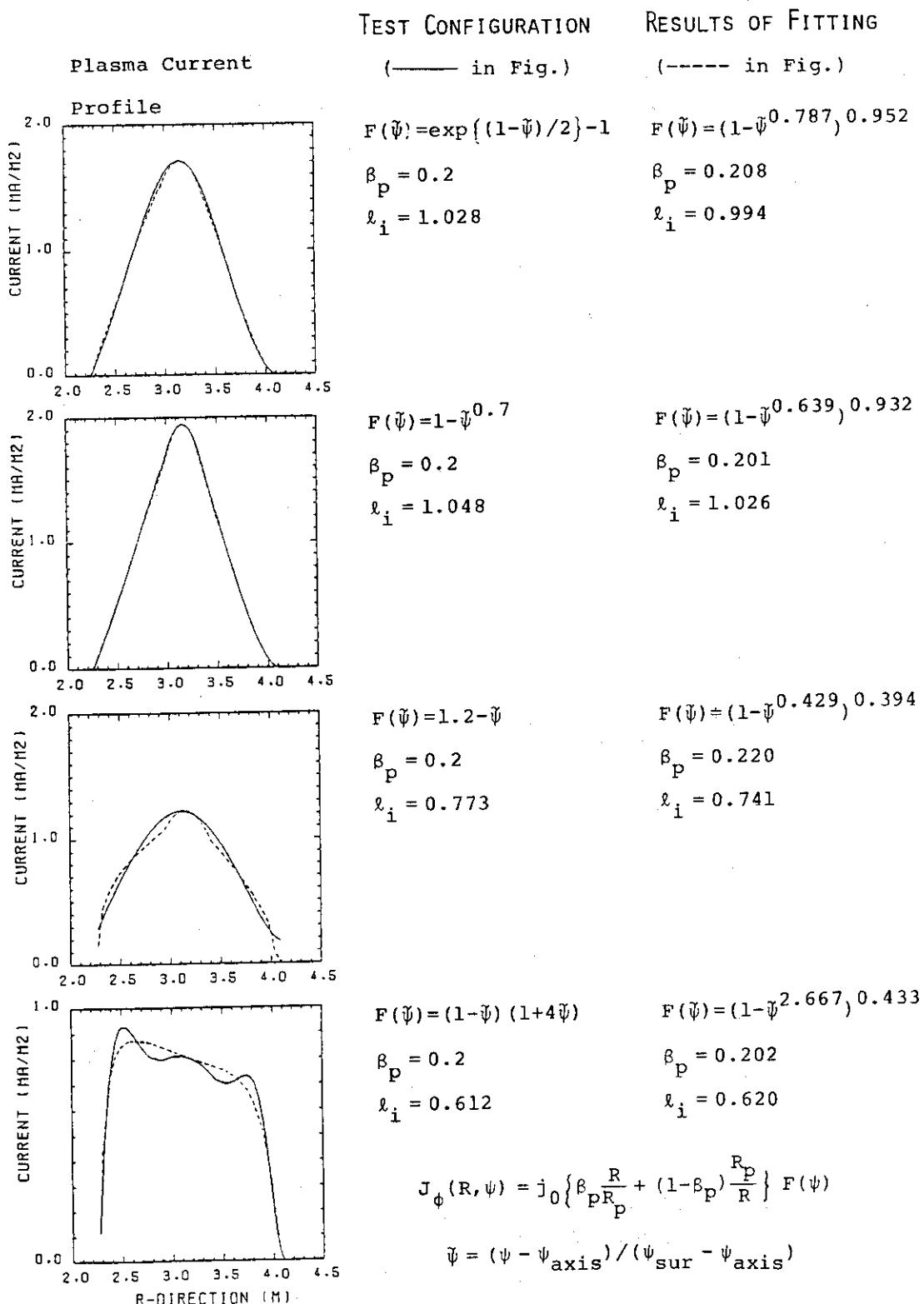


図 3.1.6 電流分布を定める関数形を変えた平衡配位をテストデータを使って平衡計算した例。右側に得られた結果を真のものと並べて記入している。

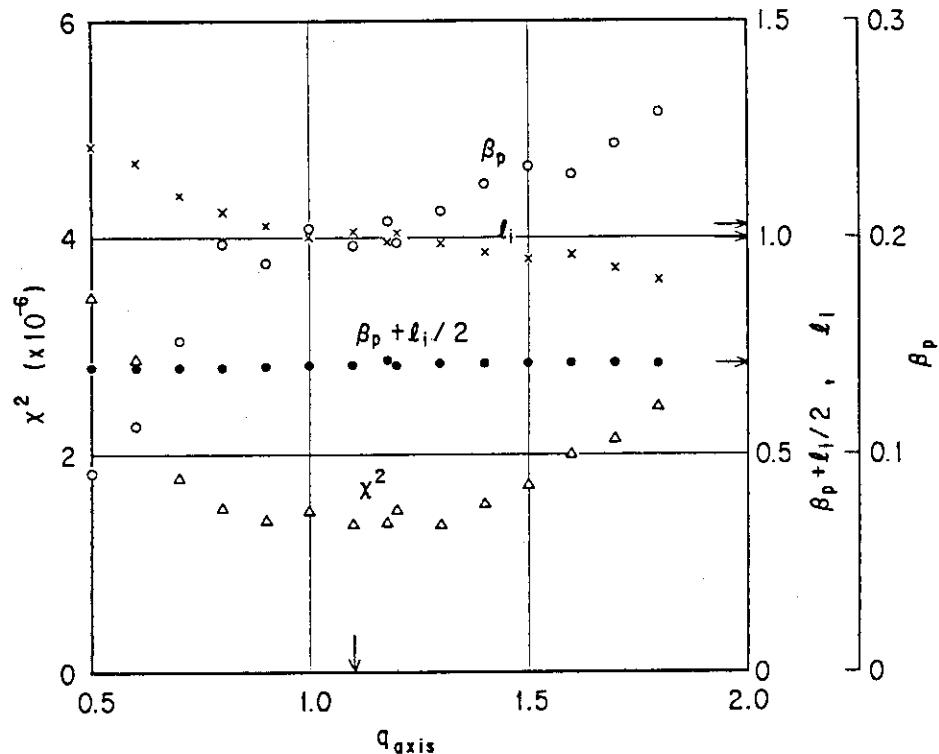


図 3.17 図 3.16 の上から一番目のテスト配位について、 $q_{axis}$  の関数として、最小二乗解を与える  $\ell_i$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_p + \ell_i/2$ ,  $\chi^2$  の値をプロットした例。横軸、縦軸上の矢印は、それぞれ真の  $q_{axis}$ ,  $\ell_i$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_p + \ell_i/2$  の値を示している。

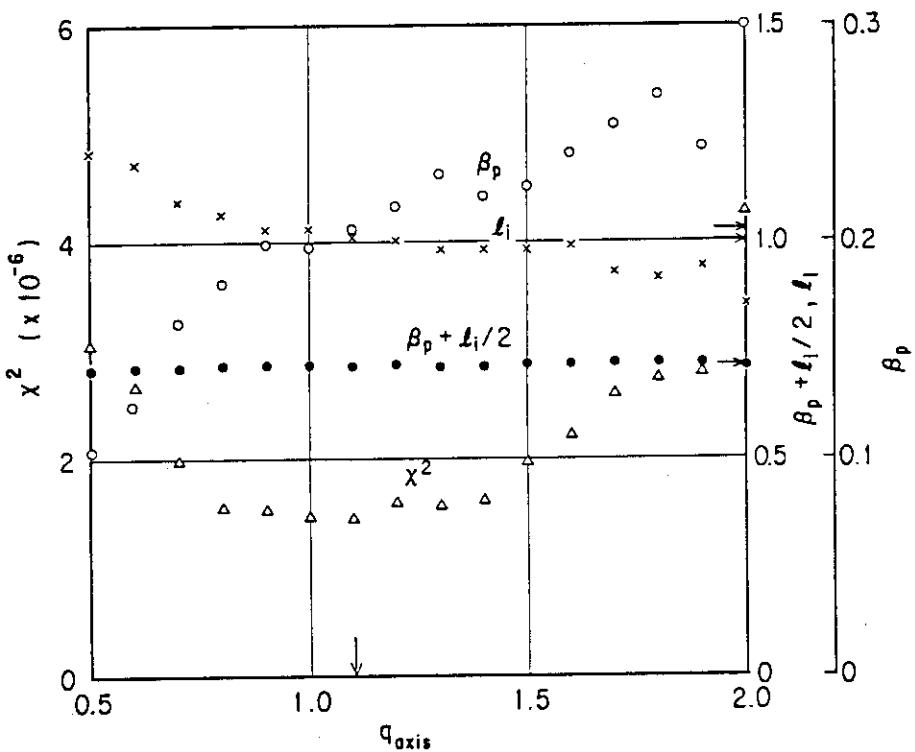


図 3.18 図 3.16 の上から二番目のテスト配位について、 $q_{axis}$  の関数として、最小二乗解を与える  $\ell_i$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_p + \ell_i/2$ ,  $\chi^2$  の値をプロットした例。

## 4. 考 察

J T - 6 0 の実験放電のデータを使って、計算した例を 4.1 で示す。そして、まとめと考察を 4.2 で行う。

### 4.1 実験放電の計算例

ダイバータ放電について<sup>17)</sup>、フィラメント近似によるプラズマ境界計算 FBI コードを用いた計算例を図 4.1 に示す。初めリミター配位でプラズマが生成され、ダイバータ配位に移行する様子が描き出されている。

J T - 6 0 の放電では、電流のフラットトップ時に軟 X 線信号に sawtooth 振動が観測されていない。従って  $q_{axis}$  の値が未知で MHD 平衡解を求めなければならない。このため  $q_{axis}$  の値を適当に仮定して Grad-Shafranov 方程式を用いた計算を行うと、最小二乗解を与える  $\beta_p$  の値が負となったりして、 $(\ell_i, \beta_p)$  の 2 次元上をパラメータ・スキャンするのは必ずしもうまく機能していない。そこで、プラズマ中心近くの電子温度のデータと電子密度の線積分値を用いて磁気軸上でのプラズマや圧力を見積り、 $\ell_i$  の 1 次元上のスキャンにとどめた最小二乗解の磁気軸上の圧力がそれに一致するように  $\beta_p$  と  $q_{axis}$  の値を試行錯誤で調整した。このようにして求めた平衡配位例 ( $q_{axis} = 1.4$ ,  $\beta_p = 0.16$ ,  $\ell_i = 0.86$ ) を図 4.2 に示す。3.4 節で見たように、 $q_{axis}$  の値を少々ずらしても  $\chi^2$  の値はほとんど変化しない。従って最小二乗解は一意的に定まらず、本例はそれらの中から最も自然な電流分布という判断で選択したものである。なお、本例のケースを  $q_{axis} = 1.0$  という条件をつけて最小二乗解を求めるとき、中心部だけ不自然に peaking した電流分布となる。

### 4.2 まとめ

フィラメント近似計算と MHD 平衡計算を組み合わせて、磁気プローブ信号、プラズマ電流、外部コイル電流値から、効率よく J T - 6 0 の MHD 平衡配位を計算する手法が確立した。

フィラメント近似によるプラズマ境界計算は、プラズマ断面形状を高速に求めるのに有効であり、ダイバータ配位の制御性能の確認及びダイバータ・プラズマの特性解析に威力を発揮する。この方法により、 $\beta_p + \ell_i / 2$  の値はリミター配位では 2 %、ダイバータ配位では 8 % 以内の誤差で推定可能である。

プラズマ内部の分布について議論するには、Grad-Shafranov 方程式による計算を行わなければならない。その場合、J T - 6 0 のようにフランクス・ループのデータが得られない時は、フィラメント近似によるプラズマ境界計算の結果を使って固定境界問題として計算すると速く収束解が求まる。プラズマ電流分布を定める未知パラメータは、非線形最小二乗法により決定する。このようにして得られた最小二乗解は、テストデータを用いて試験した結果によると、元の平衡配位をほぼ正確に再現する。円形断面に近い J T - 6 0 の配位においても、磁場データのみで  $\beta_p$  と  $\ell_i$  の値は分離可

能である。入力磁場データが1%の誤差を持つ時、 $\beta_p$ の値の推定誤差は±0.05以下である。高ベータになるとトロイダル効果が強まるので、 $\beta_p$ と $\ell_i$ の分離精度は高まる。

実験データの解析にあたっては、Grad-Shafranov方程式による計算では上下対称を仮定している。フィラメント近似によるプラズマ境界計算等の解析から、プラズマ中心の垂直位置は $Z_p = 0 \sim 1 \text{ cm}$ であることが明らかになっている。磁気プローブの設置位置の不確定により、 $Z_p$ は1 cm以下の精度では求められないので、上下対称としても問題は生じていない。

今後の改良点としては以下のような点がある。

- 1) 実験データを解析すると $\beta_p$ の値が負となったりするのは磁気プローブの系統的誤差が効いている可能性がある。 $\chi^2$ の計算において、現在のところ残差の二乗和の重みをすべて1としている。磁気プローブの設定精度の評価等を反映させた重みづけをする必要がある。その時、各磁気プローブの測定誤差の二乗偏差の逆数を重みとすれば、統計理論から $\chi^2$ の最小値はデータ数と未知パラメータ数の差と見積られるようになる。
- 2) プラズマ電流を定める関数として、圧力項と反磁性項が同じ関数としたが、実験放電の平衡配位がそうした関数形でうまく表現できるとは限らない。二つの項を独立な関数として仮定することも可能だが、分布に関する情報が加わらない限り、自由度（未知パラメータ数）を増やさないような工夫が必要であろう。
- 3) 磁場データのみではプラズマ内部の分布形について調べるのに限界があり、 $q_{axis}$ の値を推定するのにも50%程度の誤差があり得る。電流分布を正しく求めるには、電流の浸透や輸送計算と組み合わせて物理的に意味のある範囲内で計算する必要がある。プラズマの温度と密度の空間分布に関するデータが得られれば、それをプラズマ圧力データとして取り入れてMHD平衡計算した方が、計算の精度が向上するはずである。さらに軟X線信号等から $q = 1$ 面の位置が分れば、それも入力データとするべきである。MHD安定性を議論するには電流分布の微妙な違いが効いてくるので、こうした高精度化への改良が望まれる。
- 4) 追加熱プラズマにおいてはプラズマ圧力が等方であるという近似が使えなくなるので、その場合に備えて非等方プラズマのMHD平衡<sup>16)</sup>も計算できるように拡張しておく必要もある。

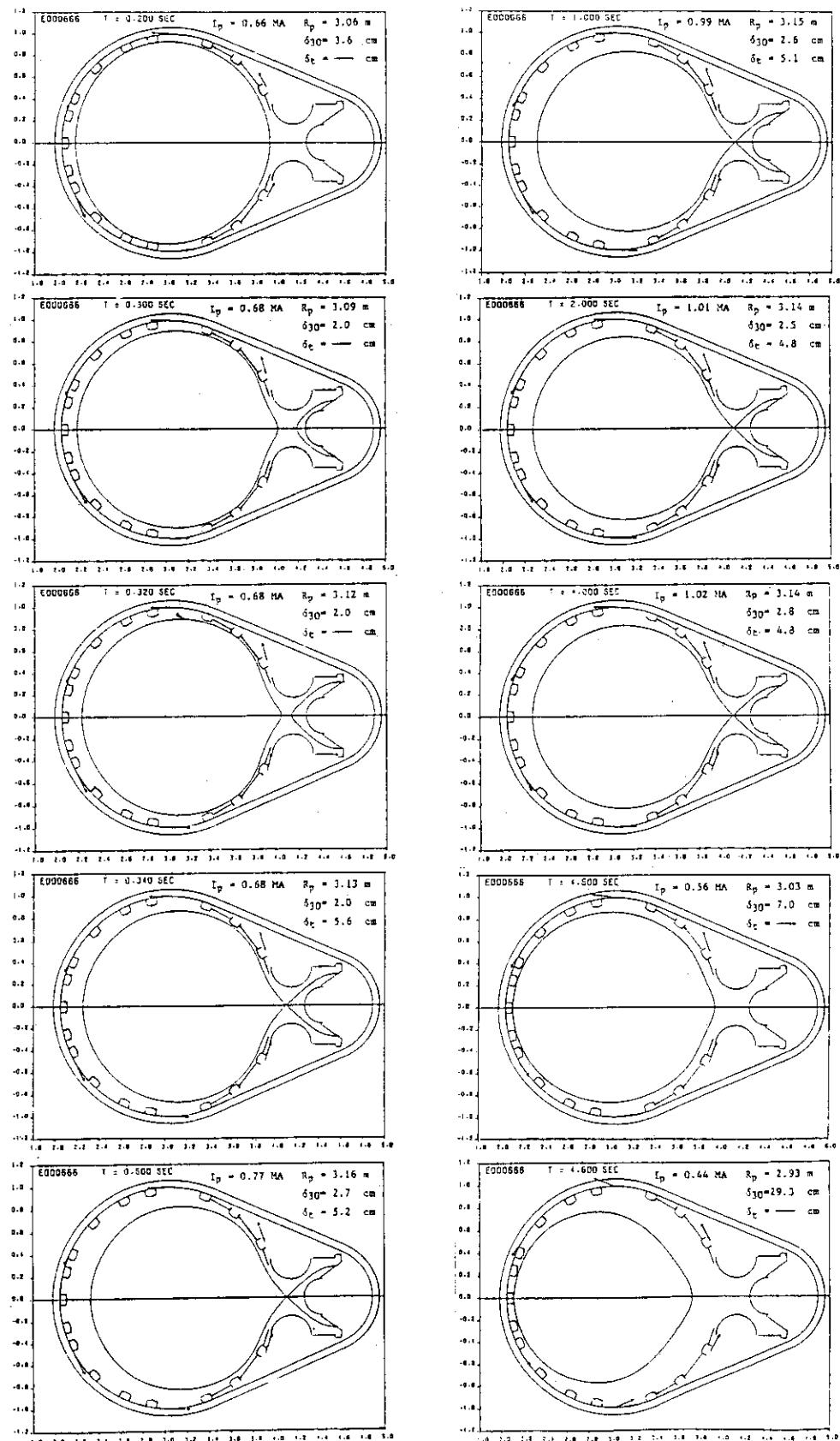


図 4.1 フィラメント近似によるプラズマ境界計算を用いて実験放電のプラズマ断面形状の時間変化を調べた例。

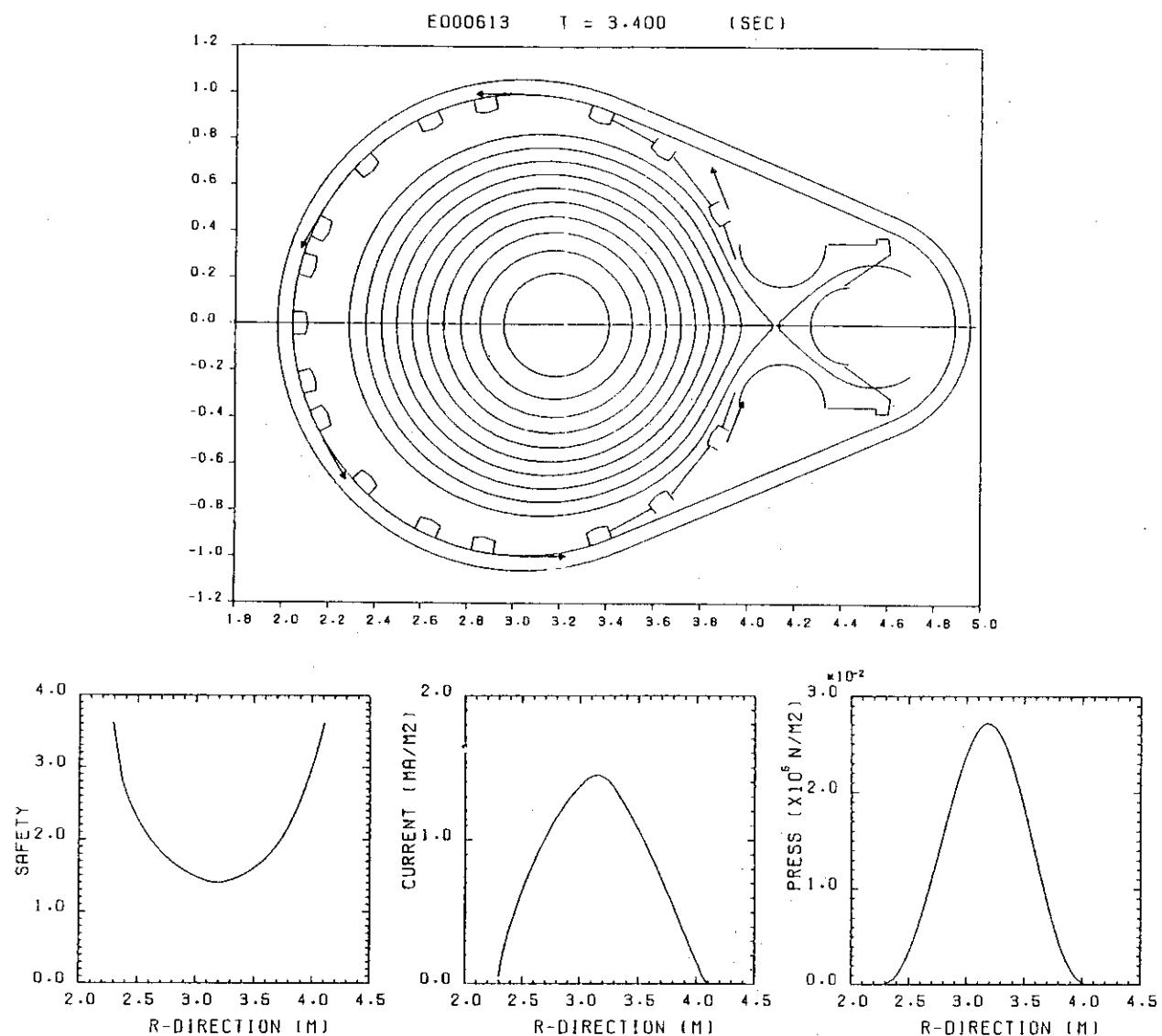


図 4.2 Grad-Shafranov 方程式による計算コードを用いて実験放電の平衡配位を解析した例。

$$q_{\text{axis}} = 1.4, \beta_p = 0.16, \ell_i = 0.86.$$

## 謝 辞

本計算コードの開発にあたって有益な議論をしていただいた安積正史解析グループ・リーダ、下村安夫実験グループ・リーダをはじめ、臨界プラズマ実験室の各氏に感謝いたします。さらに、プログラムの整備を協力していただいたNDCの永瀬寛氏と鈴木光博氏に感謝します。それから本コードを核融合研究部のJFT-2M装置に適用するにあたり、プログラムの誤りを見つけていただいた三菱原子力(株)の柳沢一郎氏にお礼申し上げます。

また、4.1節に於ける実験データの利用にあたりJT-60チームの各氏に感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) Y. Shimomura, et al., J. Nucl. Mater. 128&129 (1984) 19.  
S. Seki, et al., J. Nucl. Mater. 121 (1984) 422.
- 2) H. Ninomiya, et al., "Discharge optimization in JT-60" in Proc. 11th Symp. Fusion Eng. (1985).
- 3) J. L. Luxon, B. B. Brown, Nucl. Fusion 22 (1982) 813.
- 4) L. E. Zakharov, V. D. Shafranov, Sov. Phys. Tech. Phys. 18 (1973) 151.  
A. J. Wootton, Nucl. Fusion 19 (1979) 987.
- 5) D. K. Lee, Y-K. M. Peng, J. Plasma Phys. 25 (1981) 161.
- 6) D. W. Swain, G. H. Neilson, Nucl. Fusion 22 (1982) 1015.
- 7) 桜井桂一, 他, 核融合研究 45 (1981) 588.
- 8) W. Feneberg, et al., Comput. Phys. Commun. 31 (1984) 143.  
M. Brusati, et al., Comput. Phys. Rep. 1 (1984) 345.
- 9) V. D. Shafranov, Plasma Phys. 13 (1971) 757.
- 10) 細金延幸, private communication.
- 11) J. P. Christiansen, J. B. Taylor, Nucl. Fusion 22 (1982) 111.
- 12) M. Azumi et al., in "Computing Methods in Applied Science and Engineering", P. 335, North-Holland, Amsterdam / New York / Oxford, 1980.
- 13) 中川 徹, 小柳義夫, 「最小二乗解法による実験データ解析」東京大学出版会.
- 14) 堀上邦彦, 他, 「非線形最適化プログラム・パッケージ使用説明書」JAERI-M 9154.
- 15) G. F. Coggins, "Univariate Search Method" Central Instruments Laboratory, I. C. I. Research Note 64/11 (1964).
- 16) W. A. Cooper, et al., Nucl. Fusion 20 (1980) 985.
- 17) JT-60 Team, "Initial Experiments in JT-60" in 12th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (1985).

## 付録A. フィラメント近似計算のサブルーチンと変数

## サブルーチン

MTXSET	応答行列 $q_{ij}$ , 逆行列 $S^{-1}$ を計算
LSTSQF	ベクトル $t_k$ , $I_{junc}$ , $I_j$ を計算
EQMCRO	平衡諸量の計算, 出力

## 変数

/LST0/	BPT, BPN	未知電流 $I_j^p$ , $I_j^c$ の応答行列
	BPTC, BPNC	既知の電流 $I_j^c$ の応答行列
	BMTX1	逆行列 $S^{-1}$
/LST1/	RFLM, ZFLM	6本のフィラメントの座標
	SFL	フィラメントが作る $\psi$
/LST2/	BPTMS, BPNMS	測定値 $b_i$
	XUNC	条件無し電流値解 $I_{junc}$
	CFLM	条件付き電流値解 $I_j$
	BPTXU, BPNXU	$I_{junc}$ による $b_i$ の計算値
	BPTX, BPNX	$I_j$ による $b_i$ の計算値
	BPTMSP, BPNMSP	ベクトル $\hat{b}_{xi}$
	BPTE, BPNE	既知の外部コイル電流による $b_i$ 成分
	BPTPU, BPNPU	$I_{junc}$ による $\hat{b}_{xi}$ の計算値
	BPTP, BPNP	$I_j$ による $\hat{b}_{xi}$ の計算値
	TB	ベクトル $t_k$
	SIA	ベクトル $\sum_k (S^{-1})_{jk}$

## 付録B. Coggins 法

直線上の変数を  $x$  として関数  $F(x)$  を最小化する手順を以下箇条書きにして説明する。

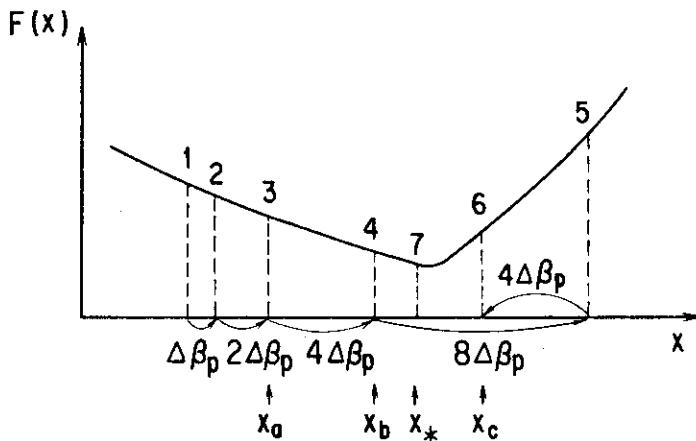
- (i)  $F(x_0), F(x_0 + \Delta x)$  を計算し,  $F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0)$  ならばステップ(ii)へ進み,  $F(x_0 + \Delta x) > F(x_0)$  ならが  $\Delta x = -\Delta x$  として(ii)へ進む。
- (ii)  $x_{k+1} = x_k + \Delta x$  として  $F(x_{k+1})$  を計算する。
- (iii)  $F(x_{k+1}) \leq F(x_k)$  ならば  $\Delta x$  を2倍にして  $k = k+1$  として(ii)へ戻る。 $F(x_{k+1}) > F(x_k)$  ならば  $x_{k+1}$  を  $x_m, x_k$  を  $x_{m-1}$  と見なし,  $\Delta x$  を半分にして  $x_{m+1} = x_k + \Delta x$  における関数値  $F(x_{m+1})$  を計算する。
- (iv)  $x_{k-1}$  を  $x_{m-2}$  と見なせば, 4点  $\{x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m+1}, x_m\}$  は等間隔に並ぶ。両端の2点  $x_{m-2}$  と  $x_m$  のうち, 最小値を与える点から遠い方の点を除いた残りの3点を  $x_a, x_b, x_c$  とする。
- (v) 3点  $x_a, x_b, x_c$  を通る放物線が最小値を与える点  $x_*$  を次式から計算する。

$$x_* = \frac{1}{2} \frac{(x_b^2 - x_c^2) F(a) + (x_c^2 - x_a^2) F(b) + (x_a^2 - x_b^2) F(c)}{(x_b - x_c) F(a) + (x_c - x_a) F(b) + (x_a - x_b) F(c)}$$

- (vi)  $x_*$  と  $x_a, x_b, x_c$  のうちで最小値を与える点とを比較し, その値が  $\epsilon$  以内であれば収束とみなす。未収束のときは,  $x_a, x_b, x_c$  のうちで最大値を与える点を捨て去り, 残りの2点と  $x_*$  を保存して(vi)へ戻る。

付図B.1に(vi)までのステップを模式的に示す。

## Coggins Method



$$x_* = \frac{1}{2} \frac{(x_b^2 - x_c^2) F(x_a) + (x_c^2 - x_a^2) F(x_b) + (x_a^2 - x_b^2) F(x_c)}{(x_b - x_c) F(x_a) + (x_c - x_a) F(x_b) + (x_a - x_b) F(x_c)}$$

付図B.1 Coggins 法による一次元上の最小化の図解。

## 付録C. Grad-Shafranov 方程式による平衡計算

## コード FEI の入力パラメータ

J T - 60 の磁場データを用いて、Grad-Shafranov 方程式による平衡計算をする時の JCL 文は下段に示すようになっている。ショット番号や時刻の指定はデータファイルで行う。その入力パラメータについて以下に簡単に説明しておく。

& MMF	N SH	ショット番号	例	" E 0 0 0 6 6 6 "
	T 0	時刻(秒単位)		3.0
	I DE BG	虫取りのためのパラメータ	通常	0
	I FLM	初期値を得るためのフィラメント近似計算のフィラメントの数	常に	6
& AAF	Q AX I	磁気軸上の安全系数 $q_0$	I C P(3)=3 の時のみ有効	
	I C P(1)	電流分布を決める関数形を指定	通常	3
	I C P(3)	$q_0$ 固定で解くために調査するパラメータを指定	通常	3
		$q_0$ を固定しない時	0	
	C P(1)	$\beta_p$ の初期値 (L S = 1 の時)		
		$\beta_p$ の固定値 (L S = 2 の時)		
	C P(2)	$\ell_i$ を決めるパラメータの初期値	通常	1
	C P(3)	$q_0$ を決める	"	" 0.5
	C P(4)	I C P(1) ≠ 3 の時電流分布を決めるパラメータ		
	C P(5)	"		
IVAC (K)	{ 0 外部コイルK 不使用 - 1 " 使用	コイル電流 { F, V Q, M	未知として計算 与えた値を使用	
I SEP	{ 0 リミター配位 1 ダイバータ配位			
IPBF	使用する磁気プローブ数	60 度置き : 6, 30 度置き : 11		
IPBN	{ 0 N プローブ不使用 1 " 使用	i PBF = 6 の時	不可	
IPCN	{ 1 $I_p$ の値未知として解く - 1 $I_p$ の値としてロゴスキーの実測値使用			
LS	{ 1 ( $\ell_i$ , $\beta_p$ ) の二次元上で最小二乗解を求める 2 $\beta_p$ を一定として $\ell_i$ の一次元上で "			

## 付録D. パラメータ・スキャン用コモン変数

		default
／SRCH／	II 1 内点、外点固定で平衡を求めるため未知とする外部コイルを指定 II 2 " "	1 (F) 2 (V)
CI 1	CVAC (II 1) を保存	
CI 2	CVAC (II 2) "	
WI 1	重み 外部コイル II 1 の電流に対する重み	2
WI 2	" II 2 "	1.0
WBT	T 磁気プローブの磁場 "	1
WBN	N " "	1
LS	最小値をサーチするために変化させる電流分布パラメータと指定	1
DCPU	C P (LS) のステップ巾の初期値	0.01
ESRCH	C P (LS) の変下量の下限値	0.01
SGB	磁場の実測値と計算値の差の重みつき二乗和	
SGC	未知とした外部コイル電流の "	
SGM	SGBと同じ（当初 SGB + SG C としたが同じ外部コイル電流でもたくさんの解が有り得るので SG C はあまり変化しないので、最小二乗解を求めるためには含めない方がよい）	
CPS(4)	CP (LS) の履歴	
FSR(4)	S G M "	
KSR	C P S , F S R の引数を指定	
SGMM	S G M の最小値	
CP 1M	S G M が最小となった時の外部コイル II 1 の電流値	
CP 2M	" II 2 "	
TLMT	計算を打ち切る時間制限。秒単位	250
TTIME	計算時間、TLMT を越すと SG MM を与えるパラメータでスキャンを終了	

／SRLI /	BBETAP : $\beta_p$
ELI	: $\ell_i$
BPLI	: $\beta_p + \ell_i / 2$
ILI	: LS = 1 の時有効 $\begin{cases} 0 & \gamma \text{を const で } \beta_p \text{だけ変化させる} \\ 1 & \beta_p + \ell_i / 2 \text{が一定となるように } \beta_p, \gamma \text{を変化させる} \end{cases}$
NEIG	: ILI = 1 の時 $\gamma$ の振り巾の初期を決めるパラメータ
CP 20	: C P (2) の初期値