

JAERI - M
86-171

逆平衡解法によるFCT平衡の数値計算

1986年11月

徳田 伸二・常松 俊秀・竹田 辰興

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1986

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 然高野高速印刷

逆平衡解法による FCT 平衡の数値計算

日本原子力研究所那珂研究所核融合研究部

徳田 伸二・常松 俊秀・竹田 辰興

(1986年10月17日受理)

FCT (Flux Conserving Tokamak) 平衡を逆平衡解法で数値的に求めた。FCT 平衡に対する境界条件を陽に表わすため高ベータ・トカマク近似 (High Beta Tokamak ordering) を用い、モーメント法で偏微分方程式を連立準線形常微分方程式に簡約した。これによって、方程式の特異点での解の正則条件を正確に表わすことができ、また、解くべき問題が扱いやすい準線形常微分方程式の境界値問題に帰着する。この境界値問題を射撃法 (Shooting method) の一種である準線形化法で解いた。テスト計算の結果、MHD 安定性解析で要求される高い精度をもつ高ベータ・トカマク平衡が得られることが示された。

Numerical Computation of FCT Equilibria
by Inverse Equilibrium Method

Shinji TOKUDA, Toshihide TSUNEMATSU and Tatsuoki TAKEDA

Department of Thermonuclear Fusion Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 17, 1986)

FCT (Flux Conserving Tokamak) equilibria were obtained numerically by the inverse equilibrium method. The high-beta tokamak ordering was used to get the explicit boundary conditions for FCT equilibria. The partial differential equation was reduced to the simultaneous quasi-linear ordinary differential equations by using the moment method. The regularity conditions for solutions at the singular point of the equations can be expressed correctly by this reduction and the problem to be solved becomes a tractable boundary value problem on the quasi-linear ordinary differential equations. This boundary value problem was solved by the method of quasi-linearization, one of the shooting methods. Test calculations show that this method provides high-beta tokamak equilibria with sufficiently high accuracy for MHD stability analysis.

Keywords: MHD Equilibrium, FCT, Inverse Equilibrium Method, Tokamak,
MHD Stability Analysis, Boundary Value Problem, Shooting Method

目 次

1. 序 論	1
2. F C T平衡の高ベータ・トカマク近似	2
2.1 グラッド・シャフラノフ方程式の高ベータ・トカマク近似	2
2.2 高ベータ・トカマク近似での F C T 条件	4
3. 常微分方程式に対する境界値問題への帰着	7
3.1 モーメント法	7
3.2 連立常微分方程式への簡約	8
3.3 境界条件	10
4. 解に対する正則条件	11
4.1 正則条件とポロイダル角との関係	11
4.2 (A)の証明	12
4.3 近軸展開による ρ_0 , A_2 , ρ_2 , κ_2 の決定	15
5. 準線形化法による境界値問題の解法	18
5.1 解の追跡	18
5.2 準線形化法	18
6. 円形断面トカマク・プラズマの場合のテスト計算	22
6.1 平衡諸量および積分関係式	22
6.2 自明解および近似解	24
6.3 高ベータ・トカマク近似平衡の特性	26
7. 要約および議論	28
謝 辞	29
文 献	29
付録A 作用素 $\Delta_{\perp}\Psi$ の近軸展開	36
付録B 積分関係式 (6-6) 式の導出	39

Contents

1. Introduction	1
2. High beta tokamak ordering for FCT equilibria	2
2.1 High beta tokamak ordering of the Grad-Shafranov equation	2
2.2 High beta tokamak ordering of FCT conditions	4
3. Reduction to the boundary value problem on ordinary differential equations	7
3.1 The moment method	7
3.2 Reduction to simultaneous ordinary differential equations	8
3.3 Boundary conditions	10
4. Regularity conditions for solutions	11
4.1 Relation between the regularity conditions and the poloidal angle	11
4.2 Proof of (A)	12
4.3 Determination of ρ_0, Δ_2, ρ_2 and κ_2 by the near axis expansion	15
5. Quasi-linearization for the boundary value problem	18
5.1 Trace of solutions	18
5.2 The method of quasi-linearization	18
6. Test calculations for circular tokamak plasma	22
6.1 Equilibrium quantities and integral conditions	22
6.2 Trivial solution and approximate solution	24
6.3 Characteristic properties of high beta tokamak ordered equilibria	26
7. Summary and discussion	28
Acknowledgments	29
References	29
Appendix A Near axis expansion of the operator $\Delta_{\perp}\Psi$	36
Appendix B Derivation of the integral condition (6-6)	39

1. 序 論

軸対称トロイダル配位におけるプラズマのMHD平衡はグラッド・シャフラノフ方程式¹⁾として知られている半線形（微分作用素は線形で非斉次項が非線形な）偏微分方程式で記述される。特殊な場合を除いて、この方程式を解析的に解くことは不可能であるため、数値計算法で解かれる。特に、MHD安定性解析では、磁気面が座標軸の一つになっている磁束座標系を用い、その座標系で計算された平衡量を必要とする²⁾。そのため、平衡の数値解法において、磁束座標系がグラッド・シャフラノフ方程式の解として与えられる、いわゆる、逆平衡解法が有力である^{3,4,5)}。また、トカマク・プラズマのMHD安定性の対象となる平衡は

圧力分布 p 、安全係数 q 、およびプラズマの形状（プラズマ表面での楕円度、三角度など）が前もって指定できること（FCT平衡⁶⁾）、さらに高ベータ平衡が容易に求まること
が望ましい。しかしながら、FCT平衡では境界条件を陽に与えることができないため、グラッド・シャフラノフ方程式をFCT平衡条件のもとで逆平衡法で解くことはきわめて困難である。

本論文では、高ベータ・トカマク近似⁷⁾（High Beta Tokamak ordering）を用いたFCT平衡の逆平衡解法について述べる。高ベータ・トカマク近似は高ベータ・トカマク・プラズマのMHD平衡に適した近似計算法であり、またFCT平衡条件のもとで境界条件を陽に与えることができるため、逆平衡解法の一つであるモーメント法⁵⁾によって平衡方程式に対する境界値問題が準線形な常微分方程式の境界値問題に帰着する。この境界値問題を射撃法（Shooting法）⁸⁾で解けば、MHD安定性解析で精度を確保するのが困難なプラズマの半径方向の微分の精度が保障されるため、採用している近似の範囲内で高精度の平衡の数値計算が可能になる。

本論文の第2章で、高ベータ・トカマク近似によってグラッド・シャフラノフ方程式とFCT平衡条件を近似し、高ベータ・トカマク近似平衡に対する基礎方程式を導き、第3章でモーメント法を用いて解くべき問題を準線形常微分方程式に対する境界値問題に帰着させる。導かれた方程式は原点で特異であり、したがって境界値問題を解くには特異点での解の正則条件が必要である。第4章で逆平衡解法に対して適切な正則条件を導き、同時に正則条件とポロイダル角との関係を論じる。

第5章では、帰着した準線形常微分方程式に対する境界値問題を射撃法で解くことを論じる。FCT平衡の性質を利用してニュートン法の手順に従えば平衡を特徴づけるパラメータ空間で境界値問題の解を構成できることも示す。次に、この手順に適した射撃法である準線形化法について論じる。

第6章では、円形断面プラズマの場合のテスト計算結果を示し、また、高ベータ・トカマク近似平衡の特性について解析する。

第7章で本論文の要約と本論文で展開した近似解法の議論を行なう。

2. FCT平衡の高ベータ・トカマク近似

2.1 グラッド・シャフラノフ方程式の高ベータ・トカマク近似

軸対称トロイダル・プラズマのMHD平衡は、トーラスの対称軸をZ軸とする円柱座標系 (R, Z, φ) を用いて (φ:トロイダル角), グラッド・シャフラノフ方程式 (以下 G-S eq. と略す)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = - (R^2 - R_0^2) \frac{dp}{d\psi} - \left(R_0^2 \frac{dI}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} \right) \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

で記述される。ここで、ψはポロイダル磁束関数 (B_p = ∇ψ/R, B_p:ポロイダル磁場) であり、pはプラズマ圧力、Iはポロイダル電流関数でいずれもψだけの関数である¹⁾。また、上下対称な平衡 (ψ(R, -Z) = ψ(R, Z)) を仮定し、R₀はトーラスの大半径である。また、安定係数 q = q(ψ) はψ=一定の等高線に沿った線積分

$$q = \frac{I}{2\pi} \oint_{\psi=\text{一定}} \frac{d\ell}{R |\nabla\psi|} \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

で与えられる。FCT平衡は関数の組 (p, I) を与えるかわりに (p, q) を与えて、G-S eq. を解いて得られる平衡である⁶⁾。この時、Iは関係式(2.2)から逆に決定される。

プラズマ半径をa、トロイダル磁場の特徴的な強さをB₀、プラズマ表面での安全係数をq_sとし、アスペクト比εをε = a/R₀で定義すれば、トカマク・プラズマでは

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon < 1, \\ q_s \approx \frac{a B_0}{R_0 B_p} = O(1), \\ \frac{B_p}{B_0} = O(\varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2-3)$$

である。そこでε ≪ 1 (実際のトカマクではε⁻¹ = 3~5) として G-S eq. をεで展開する (アスペクト比展開)。そのため、G-S eq. を変数の規格化によって無次元化する。まず、

$$R B_p = |\nabla\psi| \sim \psi/a, \quad B_p \sim \varepsilon B_0$$

より ψ ~ a² B₀ であるので、ψを

$$\psi = \frac{a^2 B_0}{\alpha} \Psi, \quad (0 \leq \Psi \leq 1) \quad \dots\dots\dots (2-4)$$

と規格化する。ここで α はプラズマ表面での ψ の値を与える無次元数である。

次に、座標系を

$$R = R_0 (1 + \epsilon x), \quad Z = R_0 \epsilon y$$

と無次元化すると、プラズマ内部では $x, y = O(1)$ であり、

$$\text{G. S eq. の左辺} = \frac{B_0}{\alpha} \left(\Delta_{\perp} \psi - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2-5)$$

を得る。ここで

$$\Delta_{\perp} \psi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \quad \dots\dots\dots (2-6)$$

である。次に圧力 p と関数 I を

$$p = \epsilon^n B_0^2 P(\psi)$$

$$I^2 = R_0^2 B_0^2 (1 + \epsilon^n T(\psi))$$

と無次元化すると (n : これから決める次数)

$$(2-1) \text{ 右辺第1項} \times \frac{\alpha}{B_0} = \alpha^2 \epsilon^{n-2} \epsilon x (2 + \epsilon x) \frac{dP}{d\psi}$$

$$(2-1) \text{ 右辺第2項} \times \frac{\alpha}{B_0} = \alpha^2 \epsilon^{n-2} \left(\frac{dP}{d\psi} + \frac{1}{2} \frac{dT}{d\psi} \right)$$

を得るので、G-S eq. の両辺が釣り合う n の次数として次の2つの場合が可能である⁷⁾。すなわち、

(i) $n = 2$ (低ベータ・トカマク近似) : この場合、プラズマの β 値と β_p 値は、それぞれ、

$$\beta = O(\epsilon^2), \quad \beta_p = O(1)$$

で、また、 $I/R_0 B_0 = 1 + O(\epsilon^2)$ である。そして、プラズマは、トロイダル電流およびポロイダル電流の両方の磁気力によって閉じ込められる。

(ii) $n = 1$ (高ベータ・トカマク近似) : この場合、G-S eq. の両辺が釣り合うためには

$$\frac{dF}{d\psi} \equiv \frac{dP}{d\psi} + \frac{1}{2} \frac{dT}{d\psi} = O(\epsilon) \quad \dots\dots\dots (2-7)$$

であることが必要で、したがって

$$I^2 = R_0^2 B_0^2 \{ 1 - 2 \epsilon P(\psi) + 2 \epsilon^2 [F(\psi) - F(1)] \} \quad \dots\dots\dots (2-8)$$

が成り立つ。高ベータ近似では

$$\beta = O(\epsilon), \quad \epsilon \beta_p = O(1)$$

であり、プラズマは主としてポロイダル電流による磁気力で閉じ込められ、(2-8)式より、強い反磁性効果が現われることが分る。

以上の考察から、高ベータ・トカマク・プラズマの平衡に対するアスペクト比展開は高ベータ・トカマク近似を用いることになるが、その近似でのG-S eq. は

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\perp} \Psi - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -\alpha^2 (2 + \epsilon x) x \frac{dP}{d\Psi} - \alpha^2 \left(\frac{dF_1}{d\Psi} + \epsilon \frac{dF_2}{d\Psi} + \dots \right) \\ \frac{dF}{d\Psi} &= \epsilon \frac{dF_1}{d\Psi} + \epsilon^2 \frac{dF_2}{d\Psi} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-9)$$

と表わせ、特に、第ゼロ近似の方程式は

$$\Delta_{\perp} \Psi = -2\alpha^2 x \frac{dP}{d\Psi} - \alpha^2 \frac{dF_1}{d\Psi} \dots\dots\dots (2-10)$$

であり⁷⁾、以下、この方程式を解くことを考える。方程式(2-10)はG-S eq. と同様、二次元の半線形偏微分方程式であるため、高ベータ近似が特に数値計算を容易にするようには見えないが、(2-8)式に示されているように、 ϵ 展開において、関数Iが関数 Ψ より、1つ先のオーダーまで既知であるので、後で述べるようにFCT平衡を逆平衡法で求める場合に計算を容易にする。

FCT平衡では、安全係数qを固定して圧力Pを変化させ、その際、ポロイダル磁束関数 ψ の値は不変であり、したがって、式(2-4)の定数 α も不変である(FCT過程)。したがって、磁気軸($x = y = 0$)のまわりをまわる角度(ポロイダル角 θ)と

$$s = \sqrt{\Psi}, \quad 0 \leq s \leq 1$$

を導入して磁束座標系(s, θ)を定義すれば、 s, θ を独立変数にとって高ベータ・トカマク近似G-S eq. (2-9)を解くことができる。この時、方程式の解は

$$\left. \begin{aligned} x &= x(s, \theta) = x^{(0)}(s, \theta) + \epsilon x^{(1)}(s, \theta) + \dots \\ y &= y(s, \theta) = y^{(0)}(s, \theta) + \epsilon y^{(1)}(s, \theta) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-11)$$

で与えられる(逆平衡)。ここで、 x, y はともに θ について周期 2π の周期関数である。

2.2 高ベータ・トカマク近似でのFCT条件

以下、 $X = X(\theta)$ を θ の周期関数とする時、 θ についての平均を $\langle X \rangle$ で表わす：

$$\langle X \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X d\theta \quad \dots\dots\dots (2-12)$$

また座標変換 (2-11) のヤコビアンを J とすると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\psi=\text{一定}} X \frac{d\ell}{|\nabla s|} = \langle JX \rangle \quad \dots\dots\dots (2-13)$$

が成立する。ここで

$$J = J[x, y] \equiv \partial_s x \partial_\theta y - \partial_\theta x \partial_s y \quad \dots\dots\dots (2-14)$$

したがって、q の定義式 (2-2) および (2-8) 式より

$$q = \frac{\alpha}{2s} (1 - \epsilon P(\psi) + \dots\dots) \left\langle \frac{J}{1 + \epsilon x} \right\rangle \quad \dots\dots\dots (2-15)$$

を得る。

(2-15) 式は x, y に対する制約条件になっている。ヤコビアン J も

$$J = J^{(0)} + \epsilon J^{(1)},$$

$$J^{(0)} \equiv J[x^{(0)}, y^{(0)}],$$

$$J^{(1)} \equiv J[x^{(0)}, y^{(1)}] + J[x^{(1)}, y^{(0)}],$$

と ϵ 展開して、(2-15) 式を $J^{(0)}, J^{(1)}$ について解くと

$$\langle J^{(0)} \rangle = \frac{2s}{\alpha} q, \quad \dots\dots\dots (2-16a)$$

$$\langle J^{(1)} \rangle = \frac{2s}{\alpha} qP + \langle x^{(0)} J^{(0)} \rangle, \quad \dots\dots\dots (2-16b)$$

を得る。すなわち、高ベータ・トカマク近似では FCT 条件は、解 x, y から作られるヤコビアンに対する制約条件として与えられる。また、第ゼロ近似では β が上がってもプラズマの体積は変化せず、その変化は次の近似 (2-16b) 式で与えられ、それは、体積の変化が β に比例することを示している。

方程式 (2-16) は積分できる。 θ に関する部分積分により

$$\langle J[x, y] \rangle = \frac{d}{ds} \langle x \partial_\theta y \rangle,$$

$$\langle x J[x, y] \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle x^2 \partial_\theta y \rangle,$$

であるので

$$\langle x^{(0)} \partial_{\theta} y^{(0)} \rangle = \frac{2}{\alpha} \int_0^1 s q ds, \quad \dots\dots\dots (2-17a)$$

$$\langle x^{(1)} \partial_{\theta} y^{(0)} \rangle + \langle x^{(0)} \partial_{\theta} y^{(1)} \rangle = \frac{1}{2} \langle (x^{(0)})^2 \partial_{\theta} y^{(0)} \rangle + \frac{2}{\alpha} \int_0^1 s q P ds, \quad \dots\dots\dots (2-17b)$$

を得る。ここで、ヤコビアンが磁気軸でゼロになることを使った。

3. 常微分方程式に対する境界値問題への帰着

3.1 モーメント法

第ゼロ次の高ベータ・トカマク近似 G-S eq

$$\Delta_{\perp} \Psi = -2 \alpha^2 x \frac{dP}{d\Psi} - \alpha^2 \frac{dF_1}{d\Psi}, \quad \dots\dots\dots (2-10)$$

の解は上下対称性を仮定して

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta + s X(s, \theta) = \Delta + s \rho \cos \theta + s \sum_{m \geq 2} X_m \cos m \theta, \\ y &= s Y(s, \theta) = s \kappa \sin \theta + s \sum_{m \geq 2} Y_m \sin m \theta, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-1)$$

とフーリエ展開できる（以下、第ゼロ次近似であることを表わす添字⁽⁰⁾を省略する）。（3-1）式における各フーリエ係数はsだけの関数であり、この論文では、以後、 Δ をトロイダル・シフト、 ρ をプラズマ半径、 κ を楕円度とよぶ。次式で定義される関数 G, Θ, A :

$$\left. \begin{aligned} G &\equiv \partial_s x \cdot \partial_{\theta} Y - \partial_{\theta} X \cdot \partial_s y, \\ \Theta &\equiv (\partial_{\theta} X)^2 + (\partial_{\theta} Y)^2, \\ A &\equiv \partial_s x \cdot \partial_{\theta} X + \partial_s y \cdot \partial_{\theta} Y, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-2)$$

を用いると、(s, θ) 座標系における作用素 $\Delta_{\perp} \Psi$ は

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \Psi &= \frac{1}{J} \partial_s \left[\frac{d\Psi}{ds} J |\nabla s|^2 \right] + \frac{1}{J} \frac{d\Psi}{ds} \partial_{\theta} [J (\nabla s \cdot \nabla \theta)] \\ &= -\frac{2\Theta}{G^3} s \partial_s G + \frac{2}{G^2} (2\Theta + s \partial_s \Theta) - \frac{2}{G} \partial_{\theta} \left(\frac{A}{G} \right) \dots\dots\dots (3-3) \end{aligned}$$

と表わせる。

展開 (3-1) を有限の $m=M$ で打ち切り（以下、Mをモーメントの次数とよぶ）、方程式 (2-10) の $\cos m \theta$ ($m=1, 2, \dots, 2M$) との平均をとると、2M個の常微分方程式

$$\langle \Delta_{\perp} \Psi \cos m \theta \rangle = -2 \alpha^2 \frac{dP}{d\Psi} \langle x \cos m \theta \rangle \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

を得る。これと、制約条件

$$\langle x \partial_\theta y \rangle = \frac{2}{\alpha} \int_0^1 s g ds \quad \dots\dots\dots (2-17a)$$

とで、(2M+1)個の未知関数

$$\mathbf{x} = (\Delta, \rho, \kappa, X_2, Y_2, \dots, X_M, Y_M)^T \quad \dots\dots\dots (3-5)$$

についての(2M+1)個の常微分方程式を得る(添字^Tはベクトルの転置を表わす)。FCT平衡に適応した境界条件が設定できれば、2階常微分方程式の境界値問題として閉じた形式になり、数値計算で解くことができる。境界値問題が解ければ、(2-10)式の平均

$$\langle \Delta_\perp \Psi \rangle = -2 \alpha^2 \Delta \frac{dP}{d\Psi} - \alpha^2 \frac{dF_1}{d\Psi} \quad \dots\dots\dots (3-6)$$

から、容易に F_1 を積分することができる。FCT過程では真空でのトロイダル磁場の強さは不変($I(\Psi=1) = \text{一定}$)であるので、 F_1 に対する適切な境界条件は

$$F_1(\Psi=1) = 0 \quad \dots\dots\dots (3-7)$$

である。すなわち、高ベータ近似でのFCT平衡では、磁気面の構造(すなわち、 $\Delta, \rho, \kappa, X_m, Y_m$)を決定する方程式とポロイダル電流関数 F_1 を決定する方程式が完全に分離される。また、 θ についての部分積分を使うと

$$\begin{aligned} \langle \Delta_\perp \Psi \cos m\theta \rangle = & -2 \left\langle \frac{\theta}{G^3} s \partial_s G \cos m\theta \right\rangle + 2 \left\langle \frac{1}{G^2} (2\theta + s \partial_s \theta) \cos m\theta \right\rangle \\ & - 2m \left\langle \frac{A}{G^2} \sin m\theta \right\rangle - 2 \left\langle \frac{A}{G^3} \partial_\theta G \cos m\theta \right\rangle \quad \dots\dots\dots (3-8) \end{aligned}$$

を得る。

3.2 連立常微分方程式への簡約

ベクトル $\vec{\mu}_x, \vec{\nu}_x, \vec{\nu}_y$ を

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mu}_x &= (1, s \cos \theta, 0, s \cos 2\theta, 0, \dots, s \cos M\theta, 0), \\ \vec{\nu}_x &= (0, \cos \theta, 0, \cos 2\theta, 0, \dots, \cos M\theta, 0), \\ \vec{\nu}_y &= (0, 0, \sin \theta, 0, \sin \theta, \dots, 0, \sin M\theta), \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3-9)$$

で定義し、(3-5)式で導入した解ベクトル \mathbf{x} を用いると(3-1)式はベクトルの内積形式で

$$\left. \begin{aligned} x &= \vec{\mu}_x \cdot \mathbf{x}, \quad X = \vec{\nu}_x \cdot \mathbf{x}, \\ y &= s \vec{\nu}_y \cdot \mathbf{x}, \quad Y = \vec{\nu}_y \cdot \mathbf{x}, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3-10)$$

と表わせる。(3-10)式を(3-8)式に代入すると、方程式(3-4)は

$$A \cdot \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{x} = \vec{c} + \alpha^2 s \underbrace{\frac{dP}{d\psi} (\rho, X_2, \dots, X_M, 0, \dots, 0)^T}_{M \text{個}}, \quad \dots\dots\dots (3-11)$$

と表わせる。ここで、 $2M \times (2M+1)$ 行列Aと $2M$ 次元ベクトル \vec{c} はそれぞれ以下のように表わされる。

$$A = 2s \left\langle \frac{\Theta}{G^3} \cos m\theta \vec{a} \right\rangle, \quad \dots\dots\dots (3-12)$$

$$\vec{a} = \partial_\theta Y \vec{\mu}_x - s \partial_\theta X \vec{\nu}_y, \quad \dots\dots\dots (3-13)$$

$$\begin{aligned} \vec{c} = & 2 \left\langle \frac{1}{G^2} (2\Theta + s \partial_s \Theta) \cos m\theta \right\rangle - 2s \left\langle \frac{\Theta}{G^3} r \cos m\theta \right\rangle \\ & - 2 \left\langle \frac{A}{G^3} \partial_\theta G \cos m\theta \right\rangle - 2m \left\langle \frac{A}{G^2} \sin m\theta \right\rangle, \quad \dots\dots\dots (3-14) \end{aligned}$$

$$r = 2(\partial_s X \partial_\theta Y - \partial_\theta X \partial_s Y) + \partial_s x \partial_s \partial_\theta Y - \partial_s \partial_\theta X \partial_s y. \quad \dots\dots\dots (3-15)$$

次に、FCT平衡条件(2-17a)で

$$2 \langle x \partial_\theta y \rangle = s^2 (\rho \kappa + \sum_{m=2}^M m X_m Y_m)$$

を使うと

$$\rho \kappa + \sum_{m=2}^M m X_m Y_m = \frac{4}{\alpha} \frac{1}{s^2} \int s q ds \quad \dots\dots\dots (3-16)$$

を得る。この条件式の2階微分より

$$\mathbf{Q} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{x} = - \frac{d}{ds} \mathbf{Q} \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{x} + \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{R}, \quad \dots\dots\dots (3-17a)$$

$$\mathbf{Q} = (0, \kappa, \rho, 2Y_2, 2X_2, \dots, MY_M, MX_M), \quad \dots\dots\dots (3-17b)$$

$$\mathbf{R} = \frac{4}{\alpha} \frac{1}{s^2} \int s q ds, \quad \dots\dots\dots (3-17c)$$

を得る。方程式(3-11)と(3-17)で方程式は閉じ、適切な境界条件のもとで解くことができる。これらの方程式は準線形である。プラズマ表面での適切な境界条件は容易に設定でき、これに

については次節で述べる。また、方程式(3-11)は磁気軸($s=0$)で特異であるので解に正則条件が必要である。第4章で解の正則条件を導く。

3.3 境界条件

方程式(3-11)を制約条件(3-16)のもとで解くには、プラズマ表面での ψ の値を与える定数 α と未知関数(3-5)に対する境界条件が必要である。制約条件(3-16)式はプラズマの β 値が変化しても成立し、かつ未定定数 α があるため、プラズマ表面の形状を任意に(形状が位相的に単純であることが成立するかぎり)指定することができる。したがって、境界条件を

$$\rho = 1, \quad \kappa = \kappa_s, \quad X_m = X_{m,s}, \quad Y_m = Y_{m,s} \quad \text{at} \quad s = 1 \quad \dots\dots\dots (3-18)$$

で与えることができる。そして、未定定数 α は、制約条件(3-16)より

$$\alpha = \frac{4}{\kappa_s + \sum_{m=2}^M m X_{m,s} Y_{m,s}} \int_0^1 sq \, ds \quad \dots\dots\dots (3-19)$$

で与えられる。

方程式(3-11)および(3-16)にトロイダル・シフト Δ は陽には現われず、その微分だけが現われる。これは(x, y)座標の原点の選び方が任意であることを反映しており、したがって、 Δ 自身の境界条件は任意である。本論文では境界条件

$$\Delta = 0 \quad \text{at} \quad s = 1 \quad \dots\dots\dots (3-20)$$

を採る。

4. 解に対する正則条件

4.1 正則条件とポロイダル角との関係

方程式 (3-11) は原点で特異であるため、解の原点付近での挙動を与える条件 (正則条件) が必要である。この条件が正しく設定されないと、数値的に方程式を解く時に原点で発散する解が混在する。この解は一般に減衰解であるので境界値問題を数値的に解くには影響しないという主張がある。しかし方程式は線形でないので、発散解が混在すると全領域 ($0 \leq s \leq 1$) で解けなくなる場合があり、また、原点付近の解の精度が失なわれる。そのため、解に正則条件を正確に課することが重要である。

解の正則条件は、逆平衡解法の定式化の途中で背後に隠れてしまったポロイダル角の定義と関係があり、以下のように要約される。

(A) 逆平衡解

$$x(s, \theta) = A(s) + s \rho(s) \cos \theta + s \sum_{m=2} X_m(s) \cos m\theta,$$

$$y(s, \theta) = s \kappa(s) \sin \theta + s \sum_{m=2} Y_m(s) \sin m\theta,$$

において、正則条件

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= A_2 s^2 + \dots, \\ \rho(s) &= \rho_0 + \rho_2 s^2 + \dots, \quad \kappa(s) = \kappa_0 + \kappa_2 s^2 + \dots, \\ X_m(s) &= \xi_m s^{m-1} + \dots, \quad Y_m(s) = \zeta_m s^{m-1} + \dots \end{aligned} \right\} \dots (4-1)$$

を与えるポロイダル角 θ は無限にあり、 $(\kappa_0, \xi_m, \zeta_m)$ ($m \geq 2$) を、特定の例外を除いて、任意に与えることができる。そして、一組の $(\kappa_0, \xi_m, \zeta_m)$ を与えることはポロイダル角 θ を決めることになっている。また、与えることのできる初期値の数と境界条件 (3-18) の数は一致しているので境界値問題が解ける形式になっている。

(B) 境界条件 (3-18) はプラズマ表面でのポロイダル角 θ を設定することになっており、境界値問題を解くことは同時に、任意に選べるポロイダル角 θ のうちからプラズマ表面で、設定したポロイダル角に一致するものを選ぶことになる。したがってポロイダル角について制約条件は不要である。また、制約条件を課すこと、たとえば、各磁気面上で磁力線が直線になるという条件を課することは一般に不可能である。

(C) 磁気軸から方程式 (3-11), (3-17) を初期値問題 (射撃法) として解くには, ρ_0 , Δ_2 , ρ_2 , κ_2 の値が必要である。それらは, 一組の $(\kappa_0, \xi_m, \zeta_m)$ を与えれば一意的に決定され, それらを定める一次方程式は近軸展開によって得られる。

4.2 節で(A)の証明を与え, 4.3 節で近軸展開を実行して, ρ_0 , Δ_2 , ρ_2 , κ_2 に対する一次方程式を導く。

4.2 (A) の証明

与えられた関数 $\Psi(x, y)$ を原点で楕円点をもつ上下対称 ($\Psi(x, -y) = \Psi(x, y)$) な関数とし, さらに原点での値はゼロとする。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \Psi(0, 0) &= 0, \\ D_x \equiv \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_0 &= 0, \quad D_y \equiv \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_0 &= 0, \\ D_x^2 &> 0, \quad D_y^2 &> 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-2)$$

ここで

$$D_x^m \equiv \left. \frac{\partial^m \Psi}{\partial x^m} \right|_0, \quad D_y^m \equiv \left. \frac{\partial^m \Psi}{\partial y^m} \right|_0, \quad D_x^m D_y^n \equiv \left. \frac{\partial^{m+n} \Psi}{\partial x^m \partial y^n} \right|_0, \dots\dots\dots (4-3)$$

で添字 '0' は原点で評価することを表わす。上下対称条件より奇数の n に対して

$$D_y^n = D_x^m D_y^n = 0$$

である。

ここで, 原点の近傍で座標変換

$$x = x(s, \theta), \quad y = y(s, \theta), \dots\dots\dots (4-4)$$

を条件

$$\Psi(x(s, \theta), y(s, \theta)) = s^2, \dots\dots\dots (4-5)$$

$$x(s=0, \theta) = y(s=0, \theta) = 0, \dots\dots\dots (4-6)$$

のもとで行なうことを考える。ただし, $x(s, \theta)$, $y(s, \theta)$ はともに θ について周期 2π の周期関数である。

条件 (4-5) 式は θ をパラメータとみて

$$\left. \frac{d^2 f}{ds^2} \right|_0 = 2, \quad \dots\dots (4-7a)$$

$$\left. \frac{d^n f}{ds^n} \right|_0 = 0, \quad \dots\dots (4-7b)$$

と同値である。条件 (4-2), (4-6) より $f(s=0) = \left. \frac{d}{ds} f \right|_0 = 0$ は自動的に満たされる。

ここで $x(s, \theta), y(s, \theta)$ を s について展開する:

$$\left. \begin{aligned} x(s, \theta) &= s x_1(\theta) + s^2 x_2(\theta) + \dots, \\ y(s, \theta) &= s y_1(\theta) + s^2 y_2(\theta) + \dots. \end{aligned} \right\} \dots\dots (4-8)$$

$\Psi(x, y)$ は原点で楕円点をもつので

$$x_1(\theta) = \rho_0 \cos \theta, \quad y_1(\theta) = \kappa_0 \sin \theta \quad \dots\dots (4-9)$$

と書くことができる。(4-9) 式を (4-7a) に代入すると,

$$D_x^2 \left(\frac{dx}{ds} \right)_0^2 + D_y^2 \left(\frac{dy}{ds} \right)_0^2 = 2$$

より

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{2}{D_x^2}}, \quad \kappa_0 = \sqrt{\frac{2}{D_y^2}} \quad \dots\dots (4-10)$$

を得る。これは $\Psi(x, y)$ が与えられた時, $\theta(s)$ に対して角度 θ は一意的に決まることを意味している。

$n=3$ に対する方程式 (4-7b) は

$$\begin{aligned} &6 D_x^2 \rho_0 \cos \theta \cdot x_2(\theta) + 6 D_y^2 \kappa_0 \sin \theta \cdot y_2(\theta) \\ &+ \frac{3}{4} \rho_0 [(\rho_0)^2 D_x^3 + (\kappa_0)^2 D_x D_y^2] \cos \theta + \frac{\rho_0}{4} [(\rho_0)^2 D_x^3 - 3(\kappa_0)^2 D_x D_y^2] \\ &\times \cos 3\theta = 0 \quad \dots\dots (4-11) \end{aligned}$$

になる。この方程式からだけでは $x_2(\theta)$ および $y_2(\theta)$ の関数形は決まらず一般に x_2 は \cos の, y_2 は \sin の任意の三角級数が可能である。そして, x_2, y_2 を

$$\left. \begin{aligned} x_2(\theta) &= \Delta_2 + \rho_1 \cos \theta + \xi_2 \cos 2\theta \\ y_2(\theta) &= \kappa_1 \sin \theta + \zeta_2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (4-12)$$

とおくことが可能である。(4-12)式を(4-11)式に代入して、

$$\rho_1 = \kappa_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (4-13a)$$

および

$$\left. \begin{aligned} 3D_x^2 \rho_0 (2\Delta_2 + \xi_2) + 3D_y^2 \kappa_0 \zeta_2 &= -\frac{3}{4} \rho_0 [(\rho_0)^2 D_x^3 + (\kappa_0)^2 D_x D_y^2] \\ 3D_x^2 \rho_0 \xi_2 - 3D_y^2 \kappa_0 \zeta_2 &= -\frac{1}{4} \rho_0 [(\rho_0)^2 D_x^3 - 3(\kappa_0)^2 D_x D_y^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-13b)$$

を得る。したがって $O(s^2)$ までの範囲では条件(4-5), (4-6)式を満たし、

$$x_2(\theta) = \Delta_2 + \xi_2 \cos 2\theta,$$

$$y_2(\theta) = \zeta_2 \sin 2\theta,$$

である座標系 (s, θ) は無限にあり、 Δ_2, ξ_2, ζ_2 は制約条件(4-13b)を満たす範囲で任意にとれる。ただし、 $\xi_2 = \zeta_2 = 0$ や $\xi_2 / \zeta_2 = \rho_0 / \kappa_0$ は一般に(4-13b)式と両立しない。

一般に $n \geq 2$ に対する $\left(\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} f \right)_0 = 0$ は次のようになる：

$$\begin{aligned} & D_x^2 \cos \theta \cdot x_n(\theta) + D_y^2 \sin \theta \cdot y_n(\theta) \\ & + \sum_{\substack{p_1, i_1, \dots \\ q_1, j_1, \dots}} \alpha(p_1, i_1; p_2, i_2; \dots; q_1, j_1; q_2, j_2; \dots) \left(\frac{d^{p_1} x}{ds^{p_1}} \right)^{i_1} \left(\frac{d^{p_2} x}{ds^{p_2}} \right)^{i_2} \dots \\ & \times \left(\frac{d^{q_1} y}{ds^{q_1}} \right)^{j_1} \left(\frac{d^{q_2} y}{ds^{q_2}} \right)^{j_2} \dots = 0, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4-14a)$$

$$\sum_{\ell} i_{\ell} p_{\ell} + \sum_m j_{\ell} q_{\ell} = n+1. \quad \dots\dots\dots (4-14b)$$

ここで係数 $\alpha(p_1, i_1; p_2, i_2; \dots; q_1, j_1; q_2, j_2; \dots)$ は D_x^p, D_y^q ($p \leq n+1, q \leq n+1$) および $D_x^p D_y^q$ ($p+q \leq n+1$) から作られる。そこで、各 k ($k=1, 2, \dots, n-1$) について、 $x_k(\theta), y_k(\theta)$ を高々 $(k-1)$ 次までの三角多項式：

$$\left. \begin{aligned} x_k(\theta) &= \Delta_k + \sum_{\ell=1}^k x_k^{\ell} \cos \ell \theta, \\ y_k(\theta) &= \sum_{\ell=1}^k y_k^{\ell} \sin \ell \theta, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-15)$$

と仮定すると、(4-14 a) 左辺の和をとる各項は高々 $(n+1)$ 次の三角多項式になる。したがって $x_n(\theta)$, $y_n(\theta)$ に対しても $k=n$ とおいた (4-15) 式を選ぶことが可能で、その時、 $(2n+1)$ 個の未知数 Δ_n , x_n^ℓ , y_n^ℓ ($\ell=1, 2, \dots, n$) に対する $(n+2)$ 本の一次方程式を得る。

以上の議論から次の結論を得る：

与えられた $\psi(x, y)$ に対して条件 (4-5), (4-6) 式を満足する座標変換 $x(s, \theta)$, $y(s, \theta)$ を

$$\left. \begin{aligned} x(s, \theta) &= \Delta(s) + s \rho(s) \cos \theta + s \sum_{m \geq 2} X_m(s) \cos m \theta, \\ y(s, \theta) &= s \kappa(s) \sin \theta + s \sum_{m \geq 2} Y_m(s) \sin m \theta, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-16)$$

と表わした時、原点近傍で Δ , ρ , κ , X_m , Y_m の挙動がそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \Delta_2 s^2 + \dots\dots, \\ \rho &= \rho_0 + \rho_2 s^2 + \dots\dots, \\ \kappa &= \kappa_0 + \kappa_2 s^2 + \dots\dots, \\ X_m &= \xi_m s^{m-1} + \dots\dots, \\ Y_m &= \zeta_m s^{m-1} + \dots\dots, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-1)$$

になるような角度 θ を選べる。そして、特定の例外を除いてそのような角度 θ は無限にある。

逆に、逆平衡解法で条件 (4-5), (4-6) 式を満足する平衡解 $\psi(x, y)$ を (4-16) 式で与えられる形式で求める場合、(4-1) 式を解の正則条件として採用することができる。また、次節で示すように、 $(2M-1)$ 個の $(\kappa_0, \xi_m, \zeta_m)$ ($m \geq 2$) を初期値として与えれば方程式 (3-11), (3-17) を初期値問題として解くことができる (特定の例外を除いて)。そして全領域 ($0 \leq s \leq 1$) にわたって方程式が解ければ、一組の $(\kappa_0, \xi_m, \zeta_m)$ に対して、平衡が1つ求められるとともにポロイダル角 θ も一意に決定されることになる。この時、与えられた境界条件の数と初期条件の数と一致しており、境界値問題が解ける形式になっている。しかしながら、境界値問題の解の存在および一意性については、特にモーメント数 M を有限で打ち切った場合、自明ではない。もし境界値問題が解けた場合は、同時に、任意に設定できるポロイダル角 θ が1つに規定されたことになっている。

4.3 近軸展開による ρ_0 , Δ_2 , ρ_2 , κ_2 の決定

正則条件 (4-1) のもとで二階常微分方程式系 (3-11), (3-17) が与えられた初期値 $(\kappa_0, \xi_m, \zeta_m)$ ($m \geq 2$) に対して初期値問題として解けるためには ρ_0 , Δ_2 , ρ_2 , κ_2 の値が必要である。それらは、方程式 (3-11), (3-17) の $O(s^2)$ までの展開 (近軸展開) から決定される。

解(4-16)式の各フーリエ係数を次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta &= \Delta_2 s^2 + \Delta_3 s^3 + \dots, \\
 \rho &= \rho_0 + \rho_2 s^2 + \dots, \\
 \kappa &= \kappa_0 + \kappa_2 s^2 + \dots, \\
 X_2 &= \xi_2 s + X_2^2 s^2 + \dots, \\
 Y_2 &= \zeta_2 s + X_2^2 s^2 + \dots, \\
 X_3 &= \xi_3 s^2 + \dots, \\
 Y_3 &= \zeta_3 s^2 + \dots,
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-17)$$

$m > 3$ の X_m, Y_m は $\rho_0, \Delta_2, \rho_2, \kappa_2$ を決める方程式に寄与しない。また $\Delta_0 = \Delta(s=0)$ は任意なので以下 $\Delta_0 = 0$ とおく。(4-17)式を用いて(3-2)式で定義した G, θ, A を $O(s^2)$ まで展開し、それらを(3-3)式に代入して

$$\Delta \perp \Psi = N_0 + s N_1 \cos \theta + s^2 N_2(\theta) + \dots, \dots\dots\dots (4-18)$$

を得る。ここで N_0, N_1 は θ に対して独立、すなわち $\Delta \perp \Psi$ の $O(s)$ は $\cos \theta$ 成分のみを含む。この詳細は付録Aに示す。

ここで、安全係数 q および圧力 P は磁気軸近傍で

$$q = q_0 + q_2 s^2 + \dots,$$

$$- \frac{dP}{d\Psi} = P_0 + P_2 s^2 + \dots$$

と展開できると仮定する ($P_0 \geq 0$)。

FCT平衡条件(3-11)の展開から

$$O(1) : \rho_0 \kappa_0 = \frac{2}{\alpha} q_0, \dots\dots\dots (4-19a)$$

$$O(s^2) : \kappa_0 \rho_2 + \rho_0 \kappa_2 = -2 \xi_2 \zeta_2 + \frac{1}{\alpha} q_2, \dots\dots\dots (4-19b)$$

を得、(4-19a)から ρ_0 が求まる。

次に平衡方程式(2-10)の展開および(4-18)式より、

$$O(s) : N_1 = 2 \alpha^2 P_0 \rho_0, \dots\dots\dots (4-20a)$$

$$O(s^2) : \langle N_2(\theta) \cos m \theta \rangle = \alpha^2 P_0 \xi_2 \delta_{m,2}, \dots\dots\dots (4-20b)$$

を得る ($\delta_{i,j}$: クロネッカーの δ 記号)。(4-20 a), (A-1) および (A-4) から Δ_2 に対する一次方程式

$$a \Delta_2 = -2 \alpha^2 P_0 \rho_0 + \gamma, \quad \dots\dots\dots (4-21 a)$$

$$a = \frac{4 \kappa_0}{(g_0)^3} [3(\kappa_0)^2 + (\rho_0)^2], \quad \dots\dots\dots (4-21 b)$$

$$\gamma = -\frac{4}{(g_0)^3} \{ \kappa_0 [3(\kappa_0)^2 - (\rho_0)^2] \xi_2 + 2(\rho_0)^3 \zeta_2 \},$$

が得られる ($g_0 = \rho_0 \kappa_0$)。(4-21 a) 式の右辺第一項は圧力によるトロイダル・シフトを与えている。

ρ_2, κ_2 に対する一次方程式は1つは (4-19 b) であり, 残りの1つは (4-20 b) で $m=2$ に対応する方程式であり, それは (A-6) 式より

$$a_{21} \rho_2 + a_{22} \kappa_2 = 2 \alpha^2 P_0 \xi_2 - r_2, \quad \dots\dots\dots (4-22 a)$$

$$a_{21} = -\frac{2 \kappa_0}{(g_0)^3} [5(\kappa_0)^2 + (\rho_0)^2],$$

$$a_{22} = \frac{2 \rho_0}{(g_0)^3} [5(\rho_0)^2 + (\kappa_0)^2],$$

$$r_2 = \frac{8}{(g_0)^2} [3(\kappa_0 \zeta_3 + \rho_0 \xi_3) + 2 \Delta_2 \xi_2]$$

$$- \frac{4}{(g_0)^3} \{ 3 \omega_0^0 [3(\kappa_0 \xi_3 + \rho_0 \zeta_3) + 4 \Delta_2 \zeta_2] + 4 \omega_0^2 \xi_2 \zeta_2 \}$$

$$- \frac{g_1}{(g_0)^3} (7 \omega_1^1 + 2 \omega_1^3 - 3 \lambda_1^1)$$

$$+ \frac{3 (g_1)^2}{(g_0)^4} (3 \omega_0^0 + \omega_0^2)$$

..... (4-22 b)

と表わせる。ここで $\omega_0^0, \omega_0^1, g_1, \omega_1^1, \omega_1^3$ および λ_1^1 は (A-1) 式に与えられている。なお, 近軸展開から一次方程式が得られるのは, もとの方程式 (3-11), (3-17) が準線形であることが反映している。

5. 準線形化法による境界値問題の解法

5.1 解の追跡

FCT平衡の場合、プラズマの圧力Pが変化しても境界条件(3-18)は不変であるので常微分方程式(3-11), (3-17)に対する境界値問題の解は圧力Pに対する非線形応答とみなせる。そして、圧力分布は固定されていてβ値だけが変化する場合、境界値問題の解の初期値 κ_0 , ξ_m , ζ_m はβの関数である:

$$\kappa_0 = \kappa_0(\beta), \quad \xi_m = \xi_m(\beta), \quad \zeta_m = \zeta_m(\beta). \quad \dots\dots\dots (5-1)$$

この場合、あるβの値(たとえばβ=0)に対する境界値問題の解から出発し、βを少しずつ変化させて解を追跡することによって一連の境界値問題の解を構成することができる(解の追跡)。追跡する時の最初の解は初期値問題として解いた解を使ってもよい。この場合、初期値問題の解の境界値が以後の境界条件になる。

次に、β値が同じで境界条件が異なる解を求める場合も、境界条件を少しずつ変化させて解を追跡する方法が考えられる。したがって、解の追跡によってFCT平衡を特徴づけるパラメータ空間(β; $\kappa_s, X_{m,s}, Y_{m,s}$)内にFCT平衡解を構成することができる。この場合の境界値問題の数値解法として準線形化法が有力である。

5.2 準線形化法

非線形常微分方程式の境界値問題を解く一群の射撃法の中で準線形化法として知られている数値解法は非線形作用素方程式に対するNewton法と等価である^{8),9)}。

常微分方程式(3-11), (3-17)に対する境界値問題を非線形作用素方程式

$$A(x) = 0 \quad \dots\dots\dots (5-2)$$

とみなし、この方程式をニュートン法

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [DA(x^{(n)})]^{-1} \cdot A(x^{(n)}) \quad \dots\dots\dots (5-3)$$

あるいは修正ニュートン法

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [DA(x^{(0)})]^{-1} \cdot A(x^{(n)}) \quad \dots\dots\dots (5-4)$$

で解くことを考える($x^{(n)}$ はn回目の反復解)。ここで線形作用素DAは作用素Aのフレッシュ微分(強微分)で、その常微分方程式(3-11)式からの寄与は、その線形化から得られる⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \rightarrow \Delta + \delta \Delta, \quad \rho \rightarrow \rho + \delta \rho, \quad \kappa \rightarrow \kappa + \delta \kappa, \\ X_m \rightarrow X_m + \delta X_m, \quad Y_m \rightarrow Y_m + \delta Y_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-5)$$

と変化させると、G, θ , Aの一次の変化 $G^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $A^{(1)}$ は

$$\left. \begin{aligned} G^{(1)} &= \vec{a} \cdot \frac{d}{ds} \vec{y} + \vec{g}_0 \cdot \vec{y} \quad , \\ \theta^{(1)} &= \vec{\theta}_0 \cdot \vec{y} \quad , \\ A^{(1)} &= \lambda_1 \cdot \frac{d}{ds} \vec{y} + \vec{\lambda}_0 \cdot \vec{y} \quad , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-6)$$

と表わされる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \vec{y} &= (\delta \Delta, \delta \rho, \delta \kappa, \delta X_2, \delta Y_2, \dots, \delta X_m, \delta Y_m)^T \quad , \\ \vec{g}_0 &= \partial_s X \partial_\theta \vec{\nu}_y - \partial_s Y \partial_\theta \vec{\nu}_x + \partial_\theta Y \vec{\nu}_x - \partial_\theta X \vec{\nu}_y \quad , \\ \vec{\theta}_0 &= 2 (\partial_\theta X \partial_\theta \vec{\nu}_x + \partial_\theta Y \partial_\theta \vec{\nu}_y) \quad , \\ \vec{\lambda}_1 &= \partial_\theta X \vec{\mu}_x + s \partial_\theta Y \vec{\nu}_y \quad , \\ \vec{\lambda}_0 &= \partial_s X \partial_\theta \vec{\nu}_x + \partial_s Y \partial_\theta \vec{\nu}_y + \partial_\theta X \vec{\nu}_x + \partial_\theta Y \vec{\nu}_y \quad , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-7)$$

であり、 $\vec{\mu}_x, \vec{\nu}_x, \vec{\nu}_y$ は(3-9)式に、また、 \vec{a} は(3-13)式で与えられている。

$\langle \Delta \perp \psi \cos m\theta \rangle$ の第一変分 $\langle (\Delta \perp \psi)^{(1)} \cos m\theta \rangle$ は直接の計算から

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \perp \psi)^{(1)} \cos m\theta \rangle &= \langle L_m^s \partial_s G^{(1)} \rangle + \langle L_m^\theta \partial_\theta G^{(1)} \rangle + \langle L_m G^{(1)} \rangle \\ &\quad + \langle M_m^s \partial_s \theta^{(1)} \rangle + \langle M_m \theta^{(1)} \rangle + \langle N_m A^{(1)} \rangle \quad \dots\dots\dots (5-8) \end{aligned}$$

および

$$\left. \begin{aligned} L_m^s &= -2s \frac{\theta}{G^3} \cos m\theta \quad , \\ L_m^\theta &= -2 \frac{A}{G^3} \cos m\theta \quad , \\ L_m &= \frac{6}{G^4} (s \theta \partial_s G + A \partial_\theta G) \cos m\theta \quad , \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4}{G^3} [(2\theta + s \partial_s \theta) \cos m\theta - m A \sin m\theta], \\
 M_m^s &= \frac{2s}{G^2} \cos m\theta, \\
 M_m &= 2 \left(\frac{2}{G^2} - \frac{s \partial_s G}{G^3} \right) \cos m\theta, \\
 N_m &= -2 \left(\frac{\partial_\theta G}{G^3} \cos m\theta + \frac{2}{G^2} \sin m\theta \right),
 \end{aligned}
 \tag{5-9}$$

と表わせる。

したがって、常微分方程式 (3-11) の準線形化から得られる線形方程式は次のようになる：

$$-A \cdot \frac{d^2}{ds^2} \vec{y} + E \cdot \frac{d}{ds} \vec{y} + [F + 2\alpha^2 s \frac{dP}{d\psi} \langle \vec{v}_x \cos m\theta \rangle] \vec{y} = 0
 \tag{5-10}$$

ここで、E および F は次式で与えられる $2M \times (2M+1)$ 行列である：

$$\begin{aligned}
 E &= \left\langle L_m^s \cdot \left(\frac{d}{ds} \vec{a} + \vec{g}_0 \right) \right\rangle + \left\langle L_m^\theta \cdot \partial_\theta \vec{a} \right\rangle + \langle L_m \cdot \vec{a} \rangle \\
 &+ \langle M_m \cdot \vec{\theta}_0 \rangle + \langle N_m \cdot \vec{\lambda}_1 \rangle, \\
 F &= \left\langle L_m^s \cdot \frac{d}{ds} \vec{g}_0 \right\rangle + \langle L_m^\theta \cdot \partial_\theta \vec{g}_0 \rangle + \langle L_m \cdot \vec{g}_0 \rangle \\
 &+ \left\langle M_m^s \cdot \frac{d}{ds} \vec{\theta}_0 \right\rangle + \langle M_m \cdot \vec{\theta}_0 \rangle + \langle N_m \vec{\lambda}_0 \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{5-11}$$

また、行列Aは (3-12) 式で与えられている。行列A, E, F はn回目の反復解 $\mathbf{x}^{(n)}$ から (Newton法の場合), あるいは, 最初の推測解 $\mathbf{x}^{(0)}$ から (修正Newton法の場合) 作られる。線形方程式 (5-10) も磁気軸で特異である。その場合の解の正則条件は (4-1) 式と同じである。すなわち,

$$\begin{aligned}
 \delta A &= \delta A_2 s^2 + \dots, \\
 \delta \rho &= \delta \rho_0 + \delta \rho_2 s^2 + \dots, & \delta \kappa &= \delta \kappa_0 + \delta \kappa_2 s^2 + \dots, \\
 \delta X_m &= \delta \xi_m s^{m-1} + \dots, & \delta Y_m &= \delta \zeta_m s^{m-1} + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{5-12}$$

そして、 $\delta \rho_0$, $\delta \Delta_2$, $\delta \rho_2$, $\delta \kappa_2$ に対する方程式は、それぞれ、 ρ_0 , Δ_2 , ρ_2 , κ_2 に対する方程式 (4-19 a), (4-21), (4-19 b) および (4-22) の線形化よりただちに導かれる。

線形常微分方程式 (5-10) に対する境界条件は Newton 法のアルゴリズム (5-3) および (5-4) より、

$$\left. \begin{aligned} \delta \kappa_s &= \kappa_s - \kappa_t^{(n)} , \\ \delta X_{m,s} &= X_{m,s} - X_{m,t}^{(n)} , \\ \delta Y_{m,s} &= Y_{m,s} - Y_{m,t}^{(n)} , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-13)$$

で与えられる。ここで、 $\kappa_t^{(n)}$, $X_{m,t}^{(n)}$, $Y_{m,t}^{(n)}$ ($m \geq 2$) は、 n 回目の反復解の境界値である。方程式 (5-10) を境界条件 (5-12) のもとで射撃法で解くのは容易である⁸⁾。

この境界値問題の解の初期値を、 $\delta \kappa_0$, $\delta \xi_m$, $\delta \zeta_m$ とすると、 $(n+1)$ 回目の反復の初期値 $\kappa_0^{(n+1)}$, $\xi_m^{(n+1)}$, $\zeta_m^{(n+1)}$ は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0^{(n+1)} &= \kappa_0^{(n)} + \delta \kappa_0 , \\ \xi_m^{(n+1)} &= \xi_m^{(n)} + \delta \xi_m , \\ \zeta_m^{(n+1)} &= \zeta_m^{(n)} + \delta \zeta_m , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-14)$$

で与えられる。

6. 円形断面トカマク・プラズマの場合のテスト計算

6.1 平衡諸量および積分関係式

高ベータ・トカマク近似平衡の解析で有益な平衡諸量および積分関係式を以下に示す。

体積V

磁気面 $\psi = \text{const.}$ に囲まれた体積を V とすると

$$\frac{dV}{d\psi} = 2\pi \int \frac{d\ell}{B_p}$$

および (2-13), (2-16a) 式より

$$\frac{dV}{d\psi} = (2\pi)^2 (R_0 a^2) \frac{q}{\alpha},$$

$$V_t \equiv V(\psi=1) = (2\pi)^2 (R_0 a^2) \frac{2}{\alpha} \int_0^1 s q ds.$$

..... (6-1)

したがって $O(1)$ ではポロイダル磁束 ψ (また, トロイダル磁束 χ) の関数として体積 V は不変である。また, P を与えて解くことと断熱条件式 $P \left(\frac{dV}{d\chi} \right)^\Gamma$ (Γ : 比熱比) を与えて解くことは $O(1)$ の範囲では同じである。

トロイダル電流 I_P

$$I_P = \oint B_p d\ell = 4\pi \frac{B_0}{R_0} \frac{a^2}{\alpha} \left\langle \frac{\theta}{G} \right\rangle_{s=1} \dots\dots\dots (6-2)$$

β, β_P および β_J

高ベータ・トカマク近似では $p = \epsilon B_0^2 P(\psi)$ であり, プラズマ圧力の体積平均 \hat{P} は

$$\hat{P} \equiv \frac{1}{V_t} \int_0^{V_t} p dV = \epsilon B_0^2 \frac{\int_0^1 s q P ds}{\int_0^1 s q ds}$$

であるのでベータ β , ポロイダル・ベータ β_P および電流ベータ β_J は以下のように表わされる:

$$\frac{\beta}{\epsilon} = 2 \frac{\int_0^1 s q P ds}{\int_0^1 s q ds}, \quad \dots\dots\dots (6-3 a)$$

$$\epsilon \beta_P \equiv 2 \epsilon \frac{\hat{P}}{[B_P^2]} = \frac{\alpha}{2} q_s \frac{\beta}{\epsilon} \left\langle \frac{\theta}{G} \right\rangle_{s=1}^{-1}, \quad \dots\dots\dots (6-3 b)$$

$$\epsilon \beta_J \equiv \epsilon \frac{8 \pi^2 a^2 \langle P \rangle}{I_P^2} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\beta}{\epsilon} \left\langle \frac{\theta}{G} \right\rangle_{s=1}^{-1}, \quad \dots\dots\dots (6-3 c)$$

ここで

$$[B_P^2] \equiv 2 \pi \oint_{\psi=1} B_P d\ell / \frac{dV}{d\psi} = 2 \pi I_P / \frac{dV}{d\psi}$$

で q_s はプラズマ表面での安全係数である。

積分関係式

軸対称トロイダル配位での平衡には、平衡関係式として知られている有用な積分関係式がいくつかある。その中でよく用いられるのは次の二次である¹⁰⁾：

$$\int \frac{1}{R} \left[p + \frac{1}{2} (B_P^2 + B_{te}^2 - B_t^2) \right] dV = \frac{1}{2} \int B_P^2 \mathbf{e}_R \cdot d\mathbf{S}, \quad \dots\dots\dots (6-4)$$

$$\int \left[3p + \frac{1}{2} (B_P^2 + B_t^2 - B_{te}^2) \right] dV = \frac{1}{2} \int B_P^2 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}, \quad \dots\dots\dots (6-5)$$

ここで、 $B_{te} = I_0 / R$ (I_0 ：真空中でのポロイダル電流関数の値) は、プラズマがない場合のトロイダル磁場で、したがって、 $B_t^2 - B_{te}^2$ はプラズマの反磁性効果を表わしている。また、 \mathbf{e}_R はR方向の単位ベクトル、 \mathbf{r} はトーラスの中心から測った位置ベクトル ($\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R + Z \mathbf{e}_z$)、 $d\mathbf{S}$ は磁気面の面積素である。特に、方程式 (6-5) は平衡方程式に対するビリアル定理としてよく知られている。ところが高ベータ・トカマク近似では、

$$p \sim O(\epsilon), \quad B_t^2 - B_{te}^2 \sim O(\epsilon), \quad B_P^2 \sim O(\epsilon^2), \quad \mathbf{r} \sim R_0 \mathbf{e}_R$$

であるので、2本の関係式 (6-4)、(6-5) は $O(1)$ の範囲では同一の関係式：

$$\frac{1}{2} \int |\nabla \psi|^2 \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} = 2 \alpha^2 \int P dV \quad \dots\dots\dots (6-6)$$

に帰着する。この関係式は高ベータ・トカマク近似平衡方程式 (2-10) から直接導くことができる (付録B参照)。また、これはモーメント法から得られた平衡解の妥当性を検討する上で有力な手段になる。(3-2) 式および (6-3 a) 式を用いると (6-6) 式は

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \frac{\theta}{G^2} \partial_{\theta} y \right\rangle_{s=1} &= \frac{\beta}{2 \epsilon} \alpha^2 \hat{V}_t, \\ \hat{V}_t &= \frac{2}{\alpha} \int_0^1 s q ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6-7)$$

と表わせる。

6.2 自明解および近似解

テスト計算として、xとyの展開を

$$x = \Delta + s \rho \cos \theta, \quad y = s \kappa \sin \theta \quad \dots\dots\dots (6-8)$$

にとどめ、円形断面

$$\rho_s = \kappa_s = 1, \quad \Delta_s = 0 \quad \dots\dots\dots (6-9)$$

の境界条件のもとで方程式 (3-11) および (3-17) を解く。

条件 (6-8), (6-9) のもとで $\frac{dP}{d\psi} \equiv 0$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} \rho(s) = \kappa(s) &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{s} \left[\int_0^1 s q ds \right]^{1/2}, \\ \Delta(s) &\equiv 0, \\ \alpha &= 4 \int_0^1 s q ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6-10)$$

で表わせる厳密解がある。したがって、(5.1) 節で述べたように、(6-10) 式を自明解として解を追跡することができる。また、 β が小さい時、摂動法によって方程式 (3-11), (3-17) を近似的に解くことができる。

x, yが(6-8)式で表わせる場合、各関数G, θ , Δ , r は、それぞれ、次のようになる ($' \equiv \frac{d}{ds}$) :

$$\left. \begin{aligned} G &= \left[\rho \kappa + \frac{S}{2} (\rho \kappa)' \right] + \kappa \Delta' \cos \theta + \frac{S}{2} (\rho' \kappa - \rho \kappa') \cos 2 \theta, \\ \theta &= \frac{1}{2} (\kappa^2 + \rho^2) + \frac{1}{2} (\kappa^2 - \rho^2) \cos 2 \theta, \\ \Delta &= -\rho \Delta' \sin \theta + \frac{1}{2} [\kappa(s \kappa)' - \rho(s \rho)'] \sin 2 \theta, \\ r &= \left[\frac{3}{2} (\rho \kappa)' + s \rho' \kappa' \right] + \Delta' \kappa' \cos \theta + \frac{1}{2} (\rho' \kappa - \rho \kappa') \cos 2 \theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6-11)$$

簡単のため,

$$q(\psi) \equiv 1 \quad \dots\dots\dots (6-12)$$

とすると自明解 (6-10) 式は

$$\rho(s) = \kappa(s) = 1, \quad \Delta(s) = 0, \quad \alpha = 2 \quad \dots\dots\dots (6-13)$$

になる。そこで, $\beta \ll 1$ の時,

$$\Delta = O(\beta), \quad \delta \equiv \kappa - 1 = O(\beta^2) \quad \dots\dots\dots (6-14)$$

を仮定すると, FCT 条件 $\rho \kappa = 1$ より

$$\rho = 1 - \delta + O(\beta^3) \quad \dots\dots\dots (6-14)$$

を得る。式 (6-14), (6-14)' のオーダーリングに従って (6-11) 式に与えられている G, θ, A および r を Δ および δ で表わして方程式 (3-11) に代入すると, 長い計算のあと, Δ と δ に関する微分方程式

$$\left. \begin{aligned} s \Delta'' + 3 \Delta' &= \alpha^2 s \frac{dP}{d\psi} \\ s^2 \delta'' + 5 s \delta' &= -\frac{3}{4} s [(\Delta')^2]' - \frac{3}{2} (\Delta')^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6-15)$$

を得る。これらの方程式は初等的な積分によって解ける。

数値計算のテストとして, 圧力 P を

$$\frac{dP}{d\psi} = -P_0 (1-\psi), \quad P = \frac{P_0}{2} (1-\psi)^2 \quad \dots\dots\dots (6-16)$$

として境界値問題を解いた。 P_0 と β との関係は, (6-3 a) および (6-12) より

$$\frac{\beta}{\epsilon} = \frac{P_0}{3} \quad \dots\dots\dots (6-17)$$

であり, (6-15) 式の解で正則条件 (4-1) を満たすものは

$$\Delta' = -3 \frac{\beta}{\epsilon} s \left(1 - \frac{2}{3} s^2 \right), \quad \dots\dots\dots (6-18 a)$$

$$\delta' = -\frac{9}{2} \left(\frac{\beta}{\epsilon} \right)^2 s \left(1 - \frac{3}{2} s^2 + \frac{8}{15} s^4 \right), \quad \dots\dots\dots (6-18 b)$$

で与えられる。境界条件 (6-9) より磁気軸におけるトロイダル・シフト Δ_0 と楕円度 κ_0 として

$$\Delta_0 = \frac{\beta}{\epsilon}, \quad \dots\dots\dots (6-19 a)$$

$$\kappa_0 - 1 = 0.9625 \left(\frac{\beta}{\epsilon} \right)^2, \quad \dots\dots\dots (6-19b)$$

を得る。

図1は $\beta/\epsilon = 10^{-2}$ の時の $\Delta'(s)$ と $\kappa'(s)$ を示している。曲線①および②は、それぞれ、(6-18a)式および(6-18b)式を表わしており、●印および○印は数値計算の結果を示している。なお、常微分方程式(3-11)、(3-17)は4次のルンゲ・クック法で解き、その時の分点数は201である。この場合、近似解(6-18)式との一致は良い。

図2および図3に、それぞれ、 $\beta/\epsilon \leq 0.1$ および $\beta/\epsilon \leq 1$ の範囲での Δ_0 と κ_0 の β 値依存性を示す。 $\beta/\epsilon \leq 0.1$ の範囲では Δ_0 も κ_0 も(6-19)式に従っている。(6-19a)式では $\beta/\epsilon = 1$ でトロイダル・シフトが $\Delta_0 = 1$ (=プラズマ半径) になって平衡がなくなる。しかし、実際は Δ 、 $\kappa - 1$ が有限であることによる非線形項が有力になって、図3に示すように Δ_0 も κ_0 も(6-19)式から下側にずれ、同時に $\Delta'(s)$ 、 $\kappa'(s)$ も(6-18)式に合わなくなる(図4)。そして、 $\beta/\epsilon = O(1)$ の高ベータ平衡が得られる。

6.3 高ベータ・トカマク近似平衡の特性

前節では、 $\beta/\epsilon = 0$ の自明解をもとに $\beta/\epsilon \ll 1$ の解を摂動法で求めた。しかしながら、主たる関心は $\beta/\epsilon = O(1)$ の平衡にあり、摂動近似解との比較は数値計算プログラムのチェック以上の意味はない。常微分方程式(3-11)、(3-17)の境界値問題は(6-8)式の条件下でも解析的にはまとまらない。しかし、平衡の特徴は積分関係式(6-7)を利用してとらえることができる。

円形断面の場合、(6-7)式の左辺は

$$(6-7) \text{ 式の左辺} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\left[\frac{2}{\alpha} q_s + \Delta'_s \cos \theta + \frac{1}{2} (\rho'_s - \kappa'_s) \cos 2\theta \right]^2} d\theta$$

となる。特に $q_s \equiv 1$ ($\alpha = 2$) で $\beta/\epsilon \ll 1$ の時、(6-7)式は

$$-\Delta'_s = \frac{\beta}{\epsilon}$$

になり、これは(6-18a)式で $s = 1$ を代入したものに一致する。次に、 Δ'_s は有限値であるが ρ'_s 、 κ'_s は無視できる β/ϵ の範囲では(6-7)式は

$$\frac{-\Delta'_s}{[1 - (\Delta'_s)^2]^{3/2}} = \frac{\beta}{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (6-20)$$

となる。ここで、プラズマ境界で $\Theta = 1$ を使った。また、

$$\left\langle \frac{1}{G} \right\rangle_{s=1} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\Delta'_s)^2}}$$

を (6-2), (6-3) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \hat{I}_P &\equiv I_P / \left(\frac{4\pi a^2 B_0}{R_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - (\Delta'_S)^2}} , \\ \epsilon \beta_P &= \frac{\beta}{\epsilon} \sqrt{1 - (\Delta'_S)^2} , \\ \epsilon \beta_J &= \frac{\beta}{\epsilon} (1 - (\Delta'_S)^2) , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6-21)$$

を得る。(6-20) 式を β/ϵ が大きい場合に Δ'_S について解くと

$$-\Delta'_S \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\epsilon} \right)^{-2/3}$$

となるので, Clarke と Sigmar¹¹⁾ が得た FCT 平衡に対するスケーリング則

$$\left. \begin{aligned} \hat{I}_P &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\epsilon} \right)^{1/3} , \\ \epsilon \beta_P &\approx \left(\frac{\beta}{\epsilon} \right)^{2/3} , \\ \epsilon \beta_J &\approx \left(\frac{\beta}{\epsilon} \right)^{1/3} , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6-22)$$

を高ベータ・トカマク近似から導くことができる。

図5に β/ϵ に対する Δ'_S (●印) と κ'_S (○印) の依存性を示す。図で一点鎖線および破線は(6-18)より求めた Δ'_S と κ'_S の近似式

$$-\Delta'_S = \frac{\beta}{\epsilon} , \dots\dots\dots (6-22a)$$

$$-\kappa'_S = 0.15 \left(\frac{\beta}{\epsilon} \right)^2 , \dots\dots\dots (6-22b)$$

であり, 実線は(6-20)式を示している。 $\beta/\epsilon > 0.6$ になると κ'_S (および ρ'_S) が有限である効果が現われるが, トロイダル・シフトは(6-20)式に従っていることがよく分る。

図6は数値計算から求めた磁気面を示している ((a): $\beta/\epsilon = 0.1$, (b): $\beta/\epsilon = 0.5$, (c): $\beta/\epsilon = 0.8$)。 $\beta/\epsilon = 0.1$ の時はトロイダル・シフトも磁気面の楕円変形も小さく, ポロイダル角 θ も円の回転角に近い。 β/ϵ が大きくなるとトロイダル・シフトが大きくなるとともに磁気軸近傍での楕円変形も顕著になり高ベータ・トカマクプラズマの特徴がよくとらえられている。それにもなつてポロイダル角 θ は円の回転角から著しくずれることが分る。

7. 要約および議論

本論文では FCT 平衡を逆平衡解法で求める方法の定式化および数値解法について述べ、簡単なテスト計算から、この方法で高ベータ・トカマク・プラズマの平衡が高精度で求まることを示した。定式化の過程で境界条件を陽に表わすため、高ベータ・トカマク近似を用いた。逆平衡解法から導かれる偏微分方程式は磁気軸で特異になるため、解の正則条件が必要である。本論文ではモーメント法を使って偏微分方程式を連立常微分方程式に帰着させた。これによって適切な正則条件を容易に満足させることができた。このことは、境界値問題を射撃法で正確に解こうとする場合、重要なことである。したがって、当然のことながら、方程式を磁気軸から解いている。

逆平衡解法では、境界条件がプラズマの形状だけでなくプラズマ内部のポロイダル角 θ も決定するようになっているので、ポロイダル角 θ に制約条件を課すことは、ほとんど不可能である。制約条件を課すことは、ヤコビアン J そのものに附帯条件を課すことに等しい。FCT 平衡条件はヤコビアンの θ 方向にわたる平均 $\langle J \rangle$ に条件を課していることになっている。

アスペクト比 ε を展開パラメータとする高ベータ・トカマク近似とモーメント法とは独立な近似解法である。 $\varepsilon \ll 1$ ということは高ベータ・トカマク近似が成立することの必要条件で、求めた平衡が $\varepsilon \beta_p \sim 1$, $\beta/\varepsilon \sim 1$ を満たせば、それは有効な近似解を与える。しかし、展開

$$x = A + \rho s \cos \theta + \sum_{m=2}^{\infty} s X_m \cos m \theta$$

$$y = \kappa s \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} s Y_m \sin m \theta$$

で高次のフーリエ係数が早くゼロになることは保証しない。むしろ、モーメント法は、たとえば、境界条件

$$X_m(s=1) = Y_m(s=1) = 0 \quad (m \geq 2)$$

を課すと、プラズマ内部でも X_m , Y_m は小さいだろうとア・プリオリに仮定していることになっている。ただし、これら高次のモーメントは β 値が高くなると顕著になると予想される。したがって、フーリエ展開を有限で打ち切った場合、それが適切であるかどうかの検討が必要である。その有効な診断手段として、方程式 (3-6) および積分関係式 (6-7) があげられる。すなわち、モーメント数 M に対する関数 $F_1(\Psi)$ と (6-7) 式の収束を調べることによって、モーメント数 M が妥当であるかどうか判定できる。

本論文では $O(1)$ の高ベータ・トカマク近似の平衡を対象としたが $O(\varepsilon)$ の補正も容易に求まる。モーメント法により $O(\varepsilon)$ の補正は線形常微分方程式の境界値問題に帰着する。モーメント数 M を 2 以上にした数値計算の詳細および $O(\varepsilon)$ の補正については別の機会に論じる。

謝 辞

FCT平衡の逆平衡解法の定式化において津田 孝博士の有益な議論と助言をいただきました。また、境界値問題の数値解法に関して滝塚知典博士の助言をいただきました。ここに感謝します。また、研究遂行にあたり、核融合研究部田中正俊部長の御激励に感謝いたします。

文 献

1. V. D. Shafranov, "Plasma Equilibrium in A Magnetic Field", in Rev. of Plasma Phys. Vol. 2, Edited by M. A. Leontvich, Consultant Bureau, New York (1966).
2. 徳田伸二, " 計算機シミュレーションによるトカマク・プラズマの安定性の研究", JAERI-M 84-040 (1984).
3. T. Takeda and T. Tsunematsu, "A numerical code SELENE to calculate axisymmetric toroidal MHD equilibria", JAERI-M 8042 (1979).
4. J. Delucia, S. C. Jardin and A. M. M. Todd, J. Comput. Phys. 37 (1980) 183.
5. L. L. Lao, S. P. Hirshman and R. M. Wieland, Phys. of Fluid 24 (1981) 1431.
6. R. A. Dory and Y. K. M Peng, Nucl. Fusion 17 (1977) 1.
7. J. P. Freidberg, Rev. of Modern Phys. 54 (1982) 801.
8. S. M. Roberts and J. S. Shipman, "Two-Points Boundary Value Problem : Shooting Methods", Academic Press, New York, 1972.
9. A. Kolmogorov and S. Fomin, "Elements of the Theory of Functional Analysis", Academic Press, New York, 1960, Chap. 10.
10. L. E. Zakharov and V. D. Shafranov, Sov. Phys. Tech. Phys. 18 (1973) 151.
11. J. F. Clarke and D. J. Sigmar, Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 70.

謝 辞

F C T 平衡の逆平衡解法の定式化において津田 孝博士の有益な議論と助言をいただきました。また、境界値問題の数値解法に関して滝塚知典博士の助言をいただきました。ここに感謝します。また、研究遂行にあたり、核融合研究部田中正俊部長の御激励に感謝いたします。

文 献

1. V. D. Shafranov, "Plasma Equilibrium in A Magnetic Field", in Rev. of Plasma Phys. Vol. 2, Edited by M. A. Leontvich, Consultant Bureau, New York (1966).
2. 徳田伸二, " 計算機シミュレーションによるトカマク・プラズマの安定性の研究", JAERI-M 84-040 (1984).
3. T. Takeda and T. Tsunematsu, " A numerical code SELENE to calculate axisymmetric toroidal MHD equilibria", JAERI-M 8042 (1979).
4. J. Delucia, S. C. Jardin and A. M. M. Todd, J. Comput. Phys. 37 (1980) 183.
5. L. L. Lao, S. P. Hirshman and R. M. Wieland, Phys. of Fluid 24 (1981) 1431.
6. R. A. Dory and Y. K. M Peng, Nucl. Fusion 17 (1977) 1.
7. J. P. Freidberg, Rev. of Modern Phys. 54 (1982) 801.
8. S. M. Roberts and J. S. Shipman, " Two-Points Boundary Value Problem : Shooting Methods", Academic Press, New York, 1972.
9. A. Kolmogorov and S. Fomin, "Elementns of the Theory of Functional Analysis", Academic Press, New York, 1960, Chap. 10.
10. L. E. Zakharov and V. D. Shafranov, Sov. Phys. Tech. Phys. 18 (1973) 151.
11. J. F. Clarke and D. J. Sigmar, Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 70.

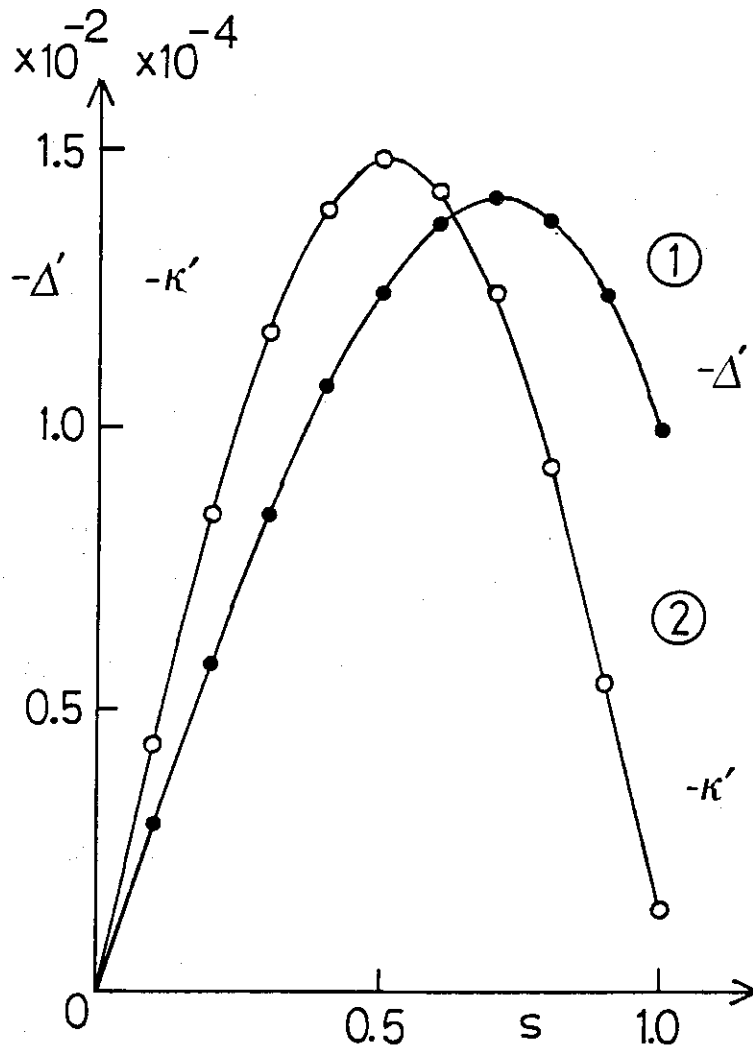


図1 $\beta/\epsilon=10^{-2}$ の時の $\Delta'(s)$ および $\kappa'(s)$ 。曲線①および②は、それぞれ、

$$\Delta'(s) = -3 \frac{\beta}{\epsilon} s \left(1 - \frac{2}{3} s^2\right) \text{ および } \kappa'(s) = -\frac{9}{2} \left(\frac{\beta}{\epsilon}\right)^2 s \left(1 - \frac{3}{2} s^2 + \frac{8}{15} s^4\right)$$

を表わす。・印および○印は、それぞれ、数値計算より求めた $\Delta'(s)$ および $\kappa'(s)$ である。

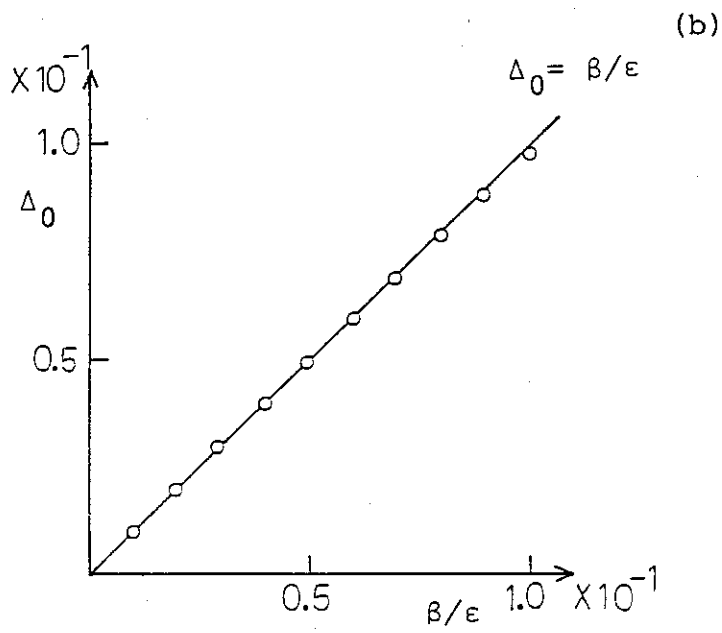
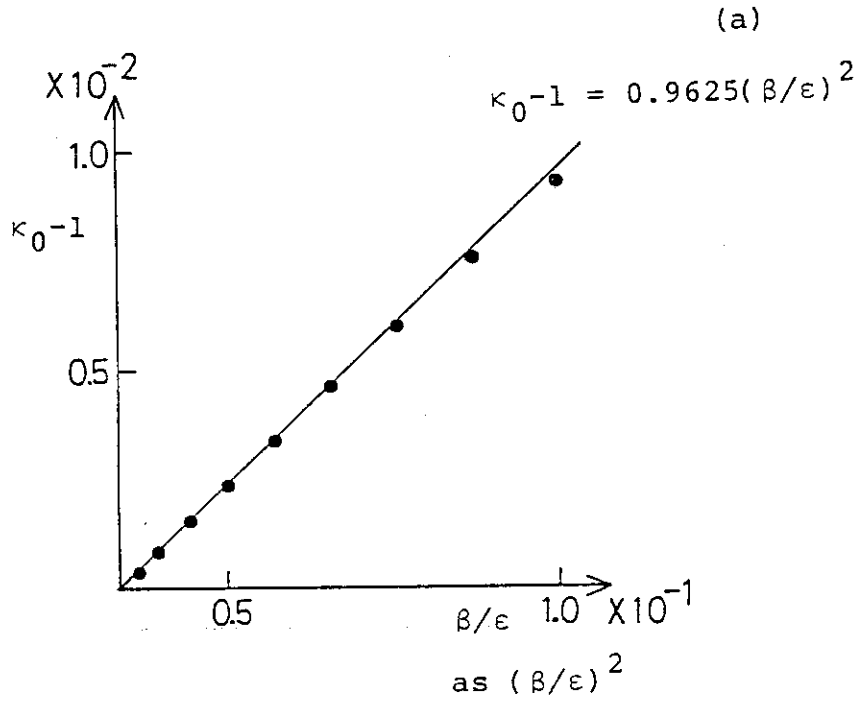


図2 κ_0 (図2(a))および Δ_0 (図2(b))の β/ϵ 依存性 ($\beta/\epsilon \leq 0.1$)

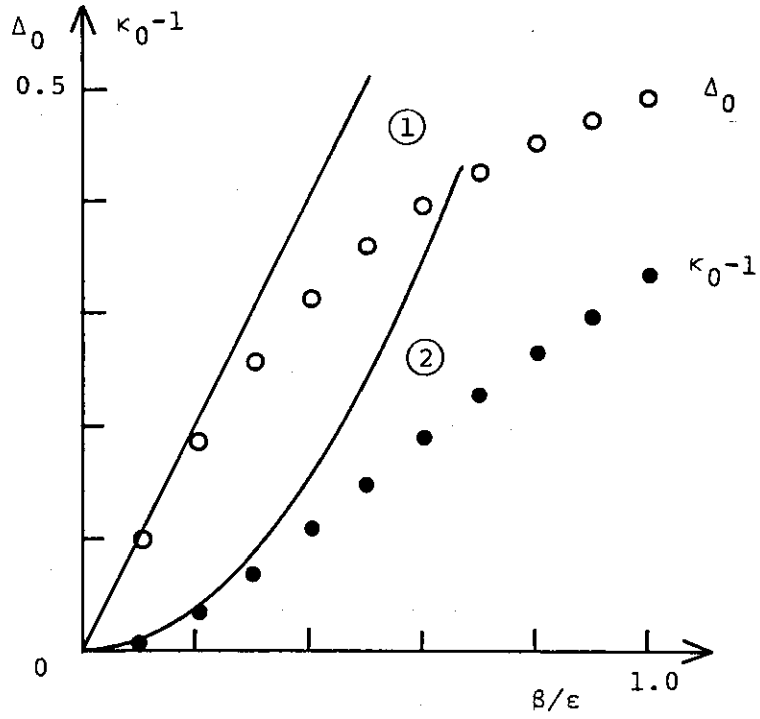


図3 κ_0 および Δ_0 の β/ϵ 依存性 ($\beta/\epsilon \leq 0.1$)。曲線①および②は、それぞれ、 $\Delta_0 = \beta/\epsilon$ および $\kappa_0 - 1 = 0.9625 (\beta/\epsilon)^2$ を表わす。

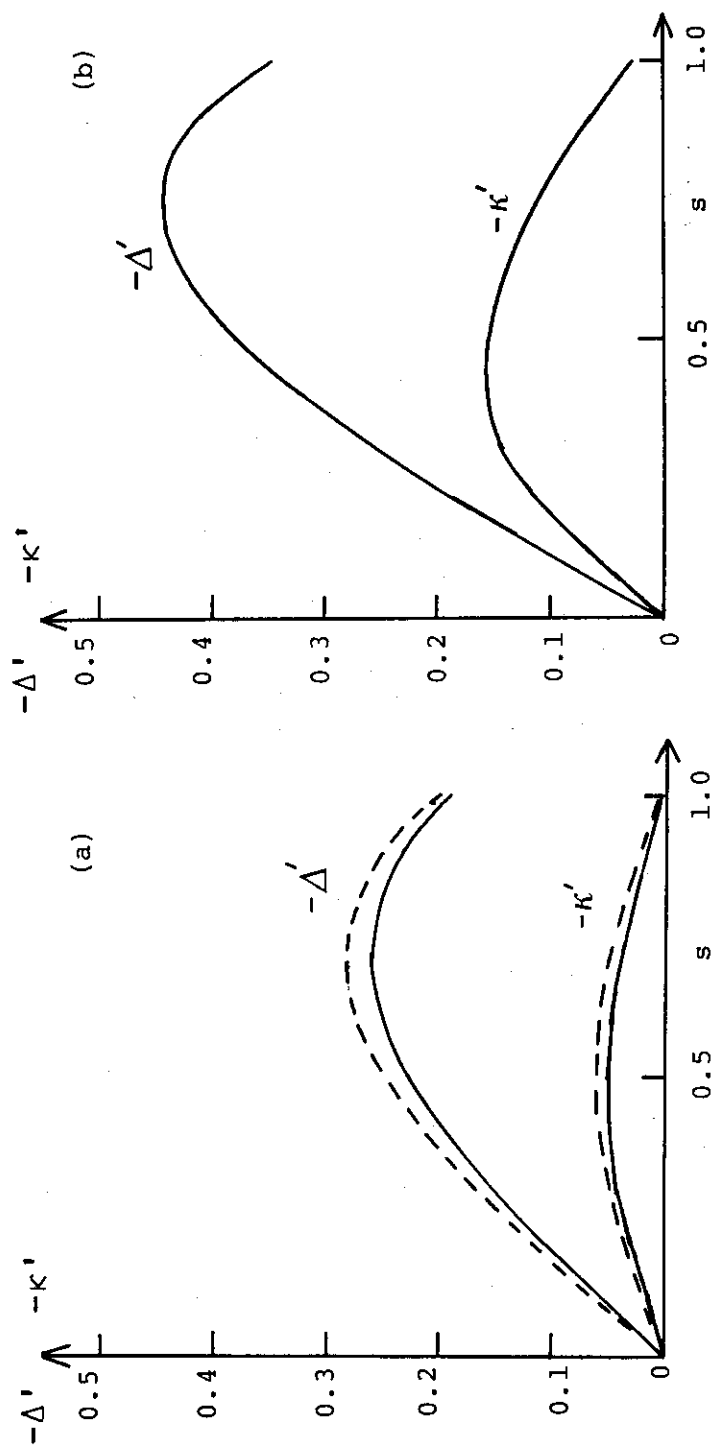


図4 $\beta/\epsilon = 0.2$ (図4(a))および $\beta/\epsilon = 0.4$ (図4(b))の時の数値計算より求めた $\Delta'(s)$ と $\kappa'(s)$ (実線)。図4(a)の破線は近似式(6-18)を表わす。

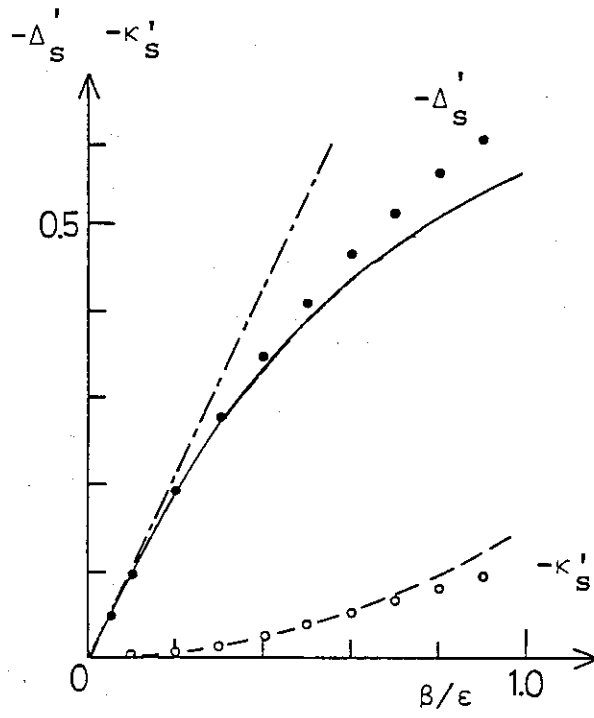


図5 Δ'_S (●印) と κ'_S (○印) の β/ϵ 依存性。一点鎖線および破線は、それぞれ $-\Delta'_S = \beta/\epsilon$ および $-\kappa'_S = 0.15 \left(\frac{\beta}{\epsilon}\right)^2$ を表わす。実線は (6-20) 式を表わしている。

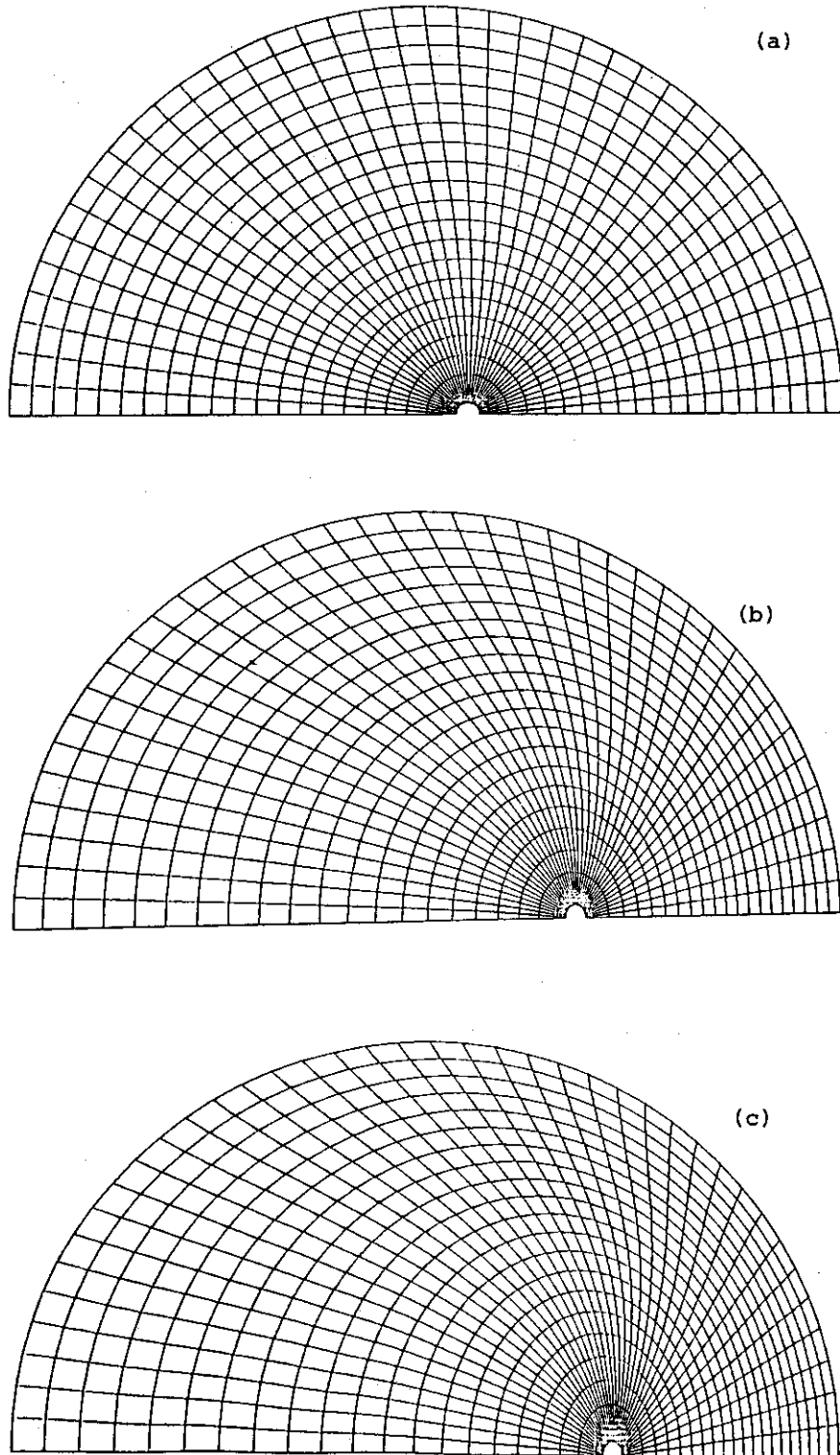


図6 数値計算より求めた磁気面((a): $\beta/\epsilon = 0.1$, (b): $\beta/\epsilon = 0.5$, (c): $\beta/\epsilon = 0.8$)。

付録A 作用素 $A_1\psi$ の近軸展開

(4-17) 式を使うと, G, θ, A は次のように展開される:

$$\begin{aligned}
 G &= g_0 + s g_1 \cos \theta + s^2 g_2 + \dots, \\
 g_0 &= \rho_0 \kappa_0, \\
 g_1 &= 2 (\kappa_0 \Delta_2 + \rho_0 \zeta_2 + \kappa_0 \xi_2), \\
 g_2 &= g_2^0 + g_2^1 \cos \theta + g_2^2 \cos 2\theta + g_2^3 \cos 3\theta, \\
 g_2^0 &= 2 (\kappa_0 \rho_2 + \rho_0 \kappa_2 + 2 \xi_2 \zeta_2), \\
 g_2^1 &= 3 \kappa_0 \Delta_3 + \frac{5}{2} (\rho_0 Y_2^2 + \kappa_0 X_2^2), \\
 g_2^2 &= 4 \Delta_2 \zeta_2 + (\kappa_0 \rho_2 - \rho_0 \kappa_2) + 3 (\kappa_0 \xi_3 + \rho_0 \zeta_3), \\
 g_2^3 &= \frac{1}{2} (\kappa_0 X_2^2 - \rho_0 Y_2^2),
 \end{aligned}
 \tag{A-1a}$$

$$\begin{aligned}
 \theta &= \omega_0 + s \omega_1 + s^2 \omega_2, \\
 \omega_0 &= \omega_0^0 + \omega_2^0 \cos 2\theta, \\
 \omega_0^0 &= [(\kappa_0)^2 + (\rho_0)^2] / 2, \\
 \omega_0^2 &= [(\kappa_0)^2 - (\rho_0)^2] / 2, \\
 \omega_1 &= \omega_1^1 \cos \theta + \omega_1^3 \cos 3\theta, \\
 \omega_1^1 &= 2 (\kappa_0 \zeta_2 + \rho_0 \xi_2), \\
 \omega_1^3 &= 2 (\kappa_0 \zeta_2 - \rho_0 \xi_2), \\
 \omega_2 &= \omega_2^0 + \omega_2^1 \cos \theta + \omega_2^2 \cos 2\theta + \omega_2^3 \cos 3\theta + \omega_2^4 \cos 4\theta, \\
 \omega_2^0 &= \kappa_0 \kappa_2 + \rho_0 \rho_2 + 2 [(\xi_2)^2 + (\zeta_2)^2], \\
 \omega_2^1 &= 2 (\kappa_0 Y_2^2 + \rho_0 X_2^2), \\
 \omega_2^2 &= \kappa_0 \kappa_2 - \rho_0 \rho_2 + 3 (\kappa_0 \zeta_3 + \rho_0 \xi_3), \\
 \omega_2^3 &= 2 (\kappa_0 Y_2^2 - \rho_0 X_2^2), \\
 \omega_2^4 &= 2 [(\zeta_2)^2 - (\xi_2)^2] + 3 (\kappa_0 \zeta_3 - \rho_0 \xi_3),
 \end{aligned}
 \tag{A-1b}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \lambda_0 + s \lambda_1 + s^2 \lambda_2 + \dots \\
 \lambda_0 &= \omega_0^2 \sin 2\theta, \\
 \lambda_1 &= \lambda_1^1 \sin \theta + \omega_1^3 \sin 3\theta, \\
 \lambda_1^1 &= -2 \rho_0 \Delta_2, \\
 \lambda_2 &= \lambda_2^1 \sin \theta + \lambda_2^2 \sin 2\theta + \lambda_2^3 \sin 3\theta + \omega_2^4 \sin 4\theta, \\
 \lambda_2^1 &= \frac{1}{2} (\kappa_0 Y_2^2 + \rho_0 X_2^2) - 3 \rho_0 \Delta_3, \\
 \lambda_2^2 &= 2 (\kappa_0 \kappa_2 - \rho_0 \rho_2) - 4 \Delta_2 \xi_2, \\
 \lambda_2^3 &= \frac{5}{4} \omega_2^3,
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A-1c)$$

(A-1) 式で ρ_2 と κ_2 は $g_2^0, g_2^2, \omega_2^0, \omega_2^2$ および λ_2^2 に現われ, Δ_3, X_2^3, Y_2^3 は他の係数に現われる。このため, ρ_2 と κ_2 を決める方程式と Δ_3, X_2^3, Y_2^3 を決める方程式は分離する。(A-1) 式を使って $\Delta_{\perp} \psi$ を

$$\Delta_{\perp} \psi = \frac{1}{sG} \partial_s \left(s^2 \frac{\theta}{G} \right) - \frac{2}{G} \partial_{\theta} \left(\frac{A}{G} \right) = N_0 + s N_1 \cos \theta + s^2 N_2(\theta) + \dots\dots\dots (A-2)$$

と展開すると

$$N_0 = \frac{2}{(g_0^0)^2} (2 \omega_0 - \partial_{\theta} \lambda_0) = \frac{4 \omega_0^0}{(g_0^0)^2}, \dots\dots\dots (A-3)$$

$$N_1 = \frac{2}{(g_0^0)^3} (5 \omega_0^0 + \omega_0^2) g_1 + \frac{1}{(g_0^0)^2} (6 \omega_1^1 - 2 \lambda_1^1), \dots\dots\dots (A-4)$$

$$N_2(\theta) = N_2^0 + N_2^1 \cos \theta + N_2^2 \cos 2\theta + N_2^3 \cos 3\theta + N_2^5 \cos 5\theta, \dots\dots\dots (A-5)$$

を得る。ここで ρ_2 と κ_2 は N_2^0 と N_2^2 だけに, Δ_3, X_2^3, Y_2^3 は N_2^1, N_2^3, N_2^5 だけに現われ, それらは各未知数について一次式である。そして, ρ_2, κ_2 を決める方程式を導く N_2^2 は次式で与えられる。

$$N_2^2 = - \frac{\kappa_0}{(g_0^0)^3} (12 \omega_0^0 + 8 \omega_0^2) \rho_2 + \frac{\rho_0}{(g_0^0)^3} (12 \omega_0^0 - 8 \omega_0^2) \kappa_2$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(g_1)^2}{(g_0)^4} (6 \omega_0^0 + 4 \omega_0^2) \\
 & - \frac{4}{(g_0)^3} \{ 3 \omega_0^0 [3 (\kappa_0 \xi_3 + \rho_0 \zeta_3) + 4 \Delta_2 \zeta_2] + 4 \omega_0^2 \xi_2 \zeta_2 \} \\
 & - \frac{g_1}{(g_0)^3} (7 \omega_1^1 + 2 \omega_1^3 - 3 \lambda_1^1) + \frac{(g_1)^2}{(g_0)^2} (3 \omega_0^0 + \omega_0^2) . \quad \dots\dots\dots (A-6)
 \end{aligned}$$

(A-1) 式に (A-4), (A-6) 式を代入すれば (4-20) 式より一次方程式 (4-21), (4-22) を得る。なお, (A-5) 式と $m=1, 3, 5$ に対する (4-20b) 式より, Δ_3, X_2^3, Y_2^3 に対する斉次な一次方程式が得られ, 結局

$$\Delta_3 = X_2^3 = Y_2^3 = 0 \quad \dots\dots\dots (A-7)$$

を得る。

付録B 積分関係式(6-6)式の導出

高ベータ・トカマク近似 G-S eq (2-10) はベクトル方程式の形式で

$$(\nabla_{\perp} \psi) \nabla \psi = -2 \alpha^2 x \nabla P - \alpha^2 \nabla F_1 \quad \dots\dots\dots (B-1)$$

と書くことができる。ここで $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ 。ベクトル \mathbf{A} を

$$\mathbf{A} \equiv \nabla Z \times \nabla \psi \quad \dots\dots\dots (B-2)$$

で定義すると

$$(\nabla_{\perp} \psi) \nabla \psi = \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots (B-3)$$

と書ける。ここで (B-1) 式の各辺と単位ベクトル $\mathbf{e}_x (= \nabla x)$ との内積をとって体積積分を行なう。ベクトル公式¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot (\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{A}) &= \text{rot } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{Q}) = \text{div} [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{Q})] + \mathbf{A} \cdot \text{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{Q}) \\ &= \text{div} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A} - \frac{1}{2} A^2 \mathbf{Q}] + \frac{1}{2} A^2 \text{div } \mathbf{Q} - \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{Q}] \quad \dots\dots\dots (B-4) \end{aligned}$$

で $\mathbf{Q} = \mathbf{e}_x$ を代入すると $\text{div } \mathbf{e}_x = 0$, $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{e}_x = 0$ およびガウスの積分公式より

$$\int (\nabla_{\perp} \psi) (\nabla \psi \cdot \mathbf{e}_x) dV = \frac{1}{2} \oint |\nabla \psi|^2 \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} - \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad \dots\dots\dots (B-5)$$

を得る。プラズマ表面で表面積分を行なうので $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$ である。次に

$$x \mathbf{e}_x \cdot \nabla P = \text{div} (xP \mathbf{e}_x) - P,$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \nabla F_1 = \text{div} (F_1 \mathbf{e}_x),$$

および、プラズマ表面で $P = 0$ であるので

$$-\alpha^2 \int [2 x \nabla P + \nabla F_1] \cdot \mathbf{e}_x dV = 2 \alpha^2 \int P dV - \alpha^2 F_1 (\psi = 1) \oint \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} \quad \dots\dots\dots (B-6)$$

を得る。以下に示すように (B-6) 式の右辺第2項はゼロになるので結局、(B-5), (B-6) 式より

$$\frac{1}{2} \oint |\nabla \psi|^2 \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} = 2 \alpha^2 \int P dV \quad \dots\dots\dots (6-6)$$

を得る。次に、(2-14)式で定義されるヤコビアン J を使うと

$$dV = J ds d\theta, \quad d\mathbf{S} = J \nabla_s d\theta \quad \dots\dots\dots (B-7)$$

および

$$\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} = J \frac{\partial s}{\partial x} d\theta = \partial_\theta y d\theta \quad \dots\dots\dots (B-8)$$

が得られ、(B-6)式右辺第2項が消えることが分る。さらに

$$|\nabla_s|^2 = \frac{\theta}{G^2}$$

であることと、 θ の定義式(6-3a)から(6-7)式を得る。