

JAERI - M  
87-028

トカマクにおける2次元中性粒子輸送の解析

1987年2月

清水 勝宏・安積 正史

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division  
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-  
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1987

編集兼発行 日本原子力研究所  
印刷 刷 燃高野高速印刷

トカマクにおける2次元中性粒子輸送の解析

日本原子力研究所那珂研究所臨界プラズマ研究部

清水 勝宏・安積 正史

(1987年1月30日受理)

トカマクにおける中性粒子の輸送解析は、プラズマ粒子及びエネルギー・バランスの評価に、また不純物のスパッタリング、NBI加熱の荷電交換損失等の評価に重要である。

JT-60の中性粒子の二次元分布について調べるため、モンテカルロ法に基づく輸送コードを開発した。このコードを用いて、ジュール加熱実験の粒子閉じ込め時間の評価を行なった。またNBI加熱時における高ベータプラズマの平衡が、中性粒子の密度分布にどう影響するかについて調べた。

Two Dimensional Neutral Transport Analysis in Tokamak Plasma

Katsuhiro SHIMIZU and Masafumi AZUMI

Department of Large Tokamak Research  
Naka Fusion Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Nak-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received January 30, 1987)

Neutral particle influences the particle and energy balance, and play an important role on sputtering impurity and the charge exchange loss of neutral beam injection. In order to study neutral particle behaviour including the effects of asymmetric source and divertor configuration, the two dimensional neutral transport code has been developed using the Monte-Carlo techniques. This code includes the calculation of the  $H_{\alpha}$  radiation intensity based on the collisional-radiation model. The particle confinement time of the joule heated plasma in JT-60 tokamak is evaluated by comparing the calculated  $H_{\alpha}$  radiation intensity with the experimental data. The effect of the equilibrium on the neutral density profile in high- $\beta$  plasma is also investigated.

Keywords: Neutral Transport, Monte-Carlo Code, JT-60, Particle Confinement Time, Collisional-Radiation Model

## 目 次

1. はじめに .....	1
2. 計算モデル .....	1
2.1 形 状 .....	1
2.2 衝突断面積 .....	2
2.3 壁での反射モデル .....	4
2.4 $H_{\alpha}$ の強度計算モデル .....	5
2.5 ソース .....	9
2.6 モンテカルロのアルゴリズム .....	10
3. 計算例 .....	13
3.1 AURORAコードとの比較 .....	13
3.2 JT-60実験の解析 .....	15
3.3 ハロー中性粒子 .....	19
3.4 高ベータ・プラズマにおける中性粒子の密度分布 .....	21
4. 結 語 .....	24
謝 辞 .....	24
参考文献 .....	25
付録1 $H_{\alpha}$ の強度計算に用いている遷移確率 .....	26

## CONTENTS

1. Introduction .....	1
2. Model .....	1
2.1 Geometry .....	1
2.2 Cross Section Data .....	2
2.3 Wall Reflection Model .....	4
2.4 Collisional-Radiation Model of $H_{\alpha}$ Radiation .....	5
2.5 Source .....	9
2.6 Monte-Carlo Algorithm .....	10
3. Exsample Calculation .....	13
3.1 Comparison with AURORA Code .....	13
3.2 Analysis of JT-60 Experiments .....	15
3.3 Halo Neutral .....	19
3.4 Neutral Density Profile in High- $\beta$ Plasma .....	21
4. Conclusion .....	24
Acknowledgements .....	24
References .....	25
Appendix 1 Transition Probability in Collisional Radiation Model .....	26

## 1. はじめに

プラズマ中の中性粒子の振舞いは、プラズマの粒子及びエネルギー・バランスの評価に、また、不純物のスパッタリング、NBI加熱における荷電交換損失等の評価に重要な役割りを果たしている。中性粒子の挙動を解析するコードとして、これまで、同心円磁気面を仮定した一次元中性粒子輸送コードが用いられてきた。しかし、 $H_{\alpha}$ の強度測定から粒子閉じ込め時間を評価する等、測定データの詳細な解析を行う為には、中性粒子密度の2次元分布を知る事が必要である。特に、JT-60のダイバータ放電では、粒子のリサイクリングが、ダイバータ側にかたよっており、中性粒子の密度分布がポロイダル方向に強い不均一性を持つ事が実験的にも知られている。この為、MHD平衡配位をもとにした2次元中性粒子モンテカルロ輸送コードを開発した。

本報告書では、第2章で計算モデルについて、水素原子の衝突断面積、壁での反射モデル、 $H_{\alpha}$ 放射強度計算モデル、中性粒子のソース源、そしてモンテカルロのアルゴリズムについて述べる。 $H_{\alpha}$ 放射強度計算で用いている遷移確率の表式は付録にまとめた。第3章では、計算例について述べる。まず、一次元中性粒子輸送コードであるAURORAコードとの比較を行ない、コードの正常な動作を確認した。次にJT-60のジュール加熱時の典型的なダイバータ放電の粒子閉じ込め時間の評価を行なった。NBI加熱時のプラズマ中心のシフトが中性粒子の分布にどう影響するかについても調べた。

## 2. 計算モデル

この章では、2次元の中性粒子輸送コードで用いているモデルについて述べる。

### 2.1 形状

計算は、実平衡配位のもとで行なう。magnetic fittingコードより得られた平衡を用いる。プラズマパラメータは、磁気面上で一定であり、ポロイダル・フラックス・ファンクション $\psi$ の関数である。

$$n_e(\vec{r}) = n_e(\psi), T_e(\vec{r}) = T_e(\psi), T_i(\vec{r}) = T_i(\psi) \quad \dots\dots(1)$$

実形状の壁を用いるのではなく、

$$\psi = \psi_w \quad \dots\dots(2)$$

によって決められる計算上の壁を用いる。

計算によって、中性粒子の分布  $n_0(R, Z)$ 、イオン化によるプラズマ粒子のソース  $S_i(\psi)$ 、イオンの荷電交換損失  $P_{cx}$ 、壁への粒子及び熱フラックス  $\Gamma_{wall}$ 、 $P_{wall}$ 等が求まる。特に $S_i$ のプロファイルは、電子のエネルギー・バランスで、convection loss  $\frac{5}{2}T_e\Gamma_e$ を評価する時に

## 1. はじめに

プラズマ中の中性粒子の振舞いは、プラズマの粒子及びエネルギー・バランスの評価に、また、不純物のスパッタリング、NBI加熱における荷電交換損失等の評価に重要な役割りを果たしている。中性粒子の挙動を解析するコードとして、これまで、同心円磁気面を仮定した一次元中性粒子輸送コードが用いられてきた。しかし、 $H_{\alpha}$ の強度測定から粒子閉じ込め時間を評価する等、測定データの詳細な解析を行う為には、中性粒子密度の2次元分布を知る事が必要である。特に、JT-60のダイバータ放電では、粒子のリサイクリングが、ダイバータ側にかたよっており、中性粒子の密度分布がポロイダル方向に強い不均一性を持つ事が実験的にも知られている。この為、MHD平衡配位をもとにした2次元中性粒子モンテカルロ輸送コードを開発した。

本報告書では、第2章で計算モデルについて、水素原子の衝突断面積、壁での反射モデル、 $H_{\alpha}$ 放射強度計算モデル、中性粒子のソース源、そしてモンテカルロのアルゴリズムについて述べる。 $H_{\alpha}$ 放射強度計算で用いている遷移確率の表式は付録にまとめた。第3章では、計算例について述べる。まず、一次元中性粒子輸送コードであるAURORAコードとの比較を行ない、コードの正常な動作を確認した。次にJT-60のジュール加熱時の典型的なダイバータ放電の粒子閉じ込め時間の評価を行なった。NBI加熱時のプラズマ中心のシフトが中性粒子の分布にどう影響するかについても調べた。

## 2. 計算モデル

この章では、2次元の中性粒子輸送コードで用いているモデルについて述べる。

### 2.1 形状

計算は、実平衡配位のもとで行なう。magnetic fittingコードより得られた平衡を用いる。プラズマパラメータは、磁気面上で一定であり、ポロイダル・フラックス・ファンクション $\psi$ の関数である。

$$n_e(\vec{r}) = n_e(\psi), T_e(\vec{r}) = T_e(\psi), T_i(\vec{r}) = T_i(\psi) \quad \dots\dots(1)$$

実形状の壁を用いるのではなく、

$$\psi = \psi_w \quad \dots\dots(2)$$

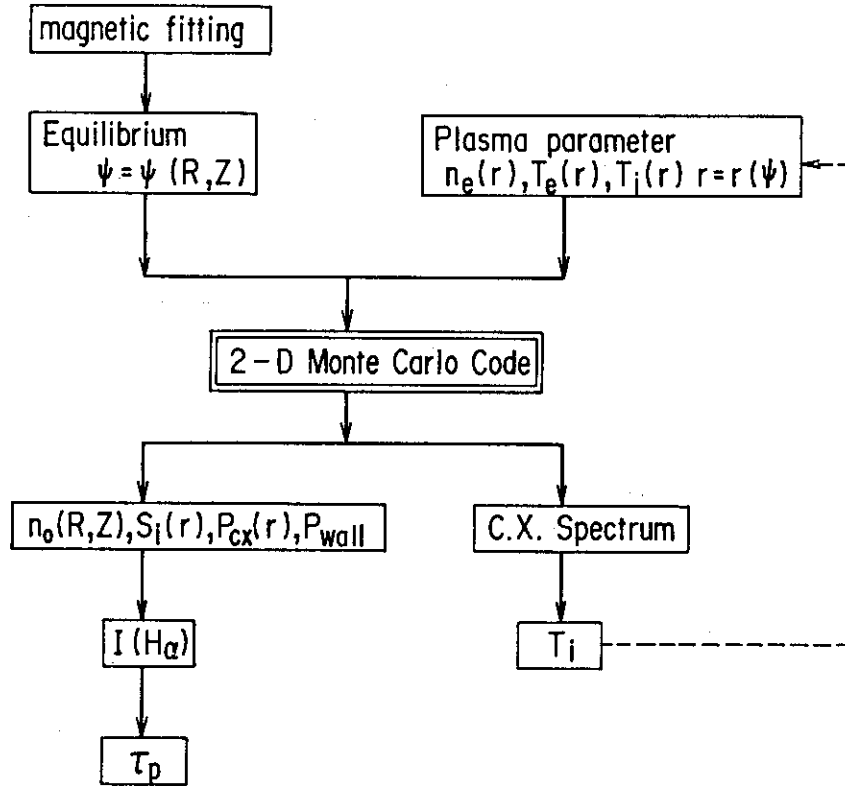
によって決められる計算上の壁を用いる。

計算によって、中性粒子の分布  $n_0(R, Z)$ 、イオン化によるプラズマ粒子のソース  $S_i(\psi)$ 、イオンの荷電交換損失  $P_{cx}$ 、壁への粒子及び熱フラックス  $\Gamma_{wall}$ 、 $P_{wall}$ 等が求まる。特に $S_i$ のプロファイルは、電子のエネルギー・バランスで、convection loss  $\frac{5}{2}T_e \Gamma_e$  を評価する時に



必要である。  $n_0(R, Z)$  がわかると、  $H_\alpha$  の強度が計算され、測定値との比較によって、粒子閉じ込め時間  $\tau_p$  が評価できる。データ相互の関係を第1図に示す。

2-D NEUTRAL TRANSPORT CODE

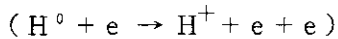


第1図 2D中性粒子輸送コードにおけるデータ相互の関係。

2.2 衝突断面積

水素原子の衝突断面積のデータは、Riviere<sup>1)</sup>によって次のように与えられている。

(a) 電子によるイオン化断面積

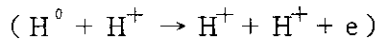


$$\sigma_{ie} = \frac{6.513 \times 10^{-14}}{E_{ion}^2} g(x) \dots\dots\dots (3)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{3/2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{2x} \right) \ln(2.7 + \sqrt{x-1}) \right] \dots (4)$$

$$x = E/E_{ion} \quad E_{ion} = 13.605 \text{ eV}$$

(b) イオンによるイオン化断面積



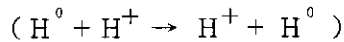
$E < 150 \text{ keV}$ の時

$$\log_{10} \sigma_{ip} = -0.8712 (\log_{10} E)^2 + 8.156 (\log_{10} E) - 3.4833 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$E > 150 \text{ keV}$ の時

$$\sigma_{ip} = 3.6 \times 10^{-12} E^{-1} \log_{10} (0.1666E) \quad \dots\dots\dots (6)$$

(c) 荷電交換の断面積



$$\sigma_{cx} = \frac{0.6937 \times 10^{-14} (1 - 0.155 \log_{10} E)^2}{1 + 0.1112 \times 10^{-14} E^{3.3}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\sigma(E)$  は  $\text{cm}^2$  単位であり、 $E$  は  $\text{eV}$  である。

Maxwell 分布しているプラズマ粒子 (質量  $m_p$ , 温度  $T_p$ ) との反応断面積  $\langle \sigma v \rangle$  は

$$\langle \sigma v \rangle = \int d^3 \vec{v}_p \sigma (|\vec{v}_p - \vec{v}_0|) |\vec{v}_p - \vec{v}_0| f_p(\vec{v}_p) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$f_p(\vec{v}) = \left( \frac{m_p}{2\pi T_p} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_p}{2T_p} v^2}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

ここで中性粒子 (質量  $m_0$ , エネルギー  $E_0$ ) は  $v_0$  の速度をもつ。 $\vec{v}$  を極座標表示 ( $v, \theta, \varphi$ ) すると、 $\theta$  と  $\varphi$  について積分可能で、これを行なうと(8)式は次のようになる。

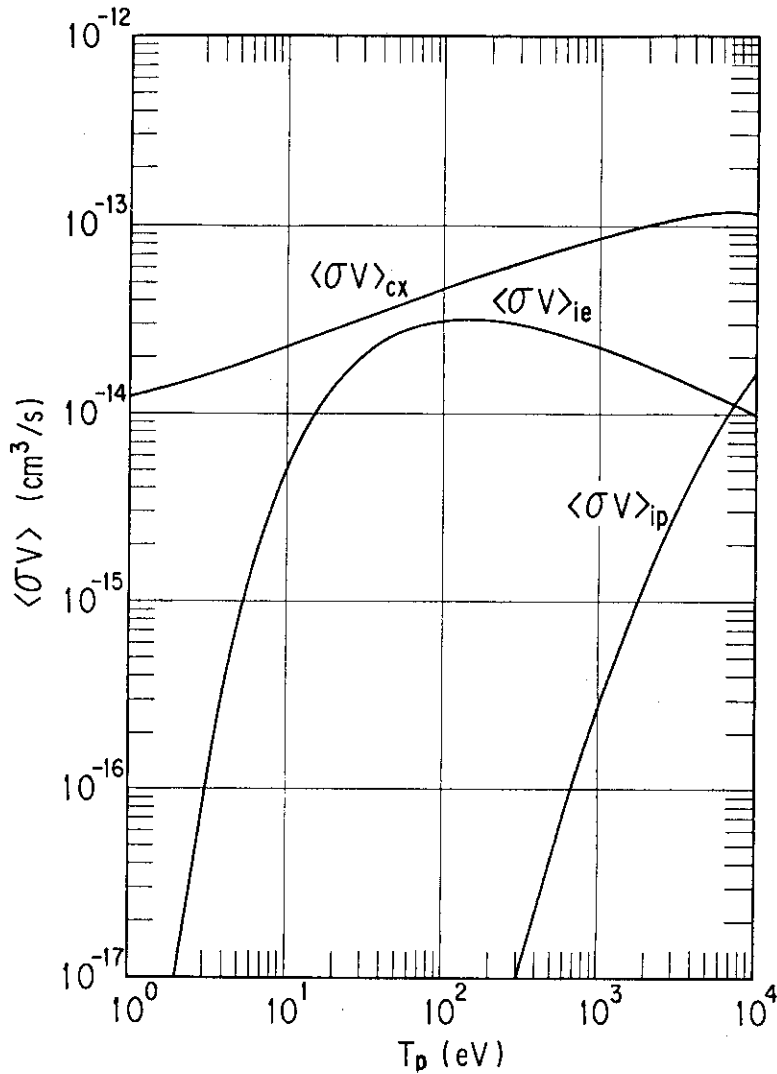
$$\frac{1}{v_0} \langle \sigma v \rangle = \frac{1}{x_0^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sigma(E_c) x^2 \{ e^{-(x-x_0)^2} - e^{-(x+x_0)^2} \} dx \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$E_c = T_p x^2$$

$$x_0^2 = \frac{m_p}{m_0} \frac{E_0}{T_p}$$

$E_0$  と  $T_p$  について、 $\langle \sigma v \rangle$  のテーブルが作成されており、モンテ・カルロ計算では、このテ-

ブルより補間する。第2図に  $E_0 = 1 \text{ eV}$  とした場合の反応断面積を示す。



第2図 反応断面積  $\langle \sigma v \rangle$ 。  
 中性粒子のエネルギーは、 $E_0 = 1 \text{ eV}$  とした。

荷電交換の反応断面積が最も大きく、プロトンによる電離が問題になるのは、イオン温度が  $5 \text{ keV}$  以上であることがわかる。

### 2.3 壁での反射モデル

中性粒子が壁に衝突すると、ある割合で一部は back scatter し、一部は壁に吸着した後解離する。

壁に垂直に入射した場合の粒子及びエネルギー反射係数は、それぞれ次のようになる。<sup>21)</sup>

$$R_N^\perp(E_0) = -0.237 \log_{10} (E_0 / E_L) + 0.19 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$R_E^\perp(E_0) = -0.22 \log_{10}(E_0/E_L) + 0.06 \quad \dots\dots\dots(11)$$

$E_0$  は入射エネルギー (keV) であり、 $E_L$  は壁の材質により異なる定数である。水素原子が鉄の壁に衝突する場合  $E_L = 2.61 \text{ keV}$  である。 $\theta$  の入射角で衝突した場合、反射係数は、

$$R_N(E_0) = R_N^\perp + \frac{2}{\pi} \theta (1 - R_N^\perp) \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$R_E(E_0) = R_E^\perp + \frac{2}{\pi} \theta (1 - R_E^\perp) \quad \dots\dots\dots(13)$$

壁に衝突した中性粒子のうち、 $R_N(E_0)$  の割合で反射させる。その時のエネルギーは

$$E_1 = \frac{R_E(E_0)}{R_N(E_0)} E_0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

であり、その方向は cosine 分布とする。残りの部分  $(1 - R_N(E_0))$  は壁に吸着した後解離するものとする。解離した粒子のもつエネルギーは、3 eV とし、その速度分布は cosine 分布とする。

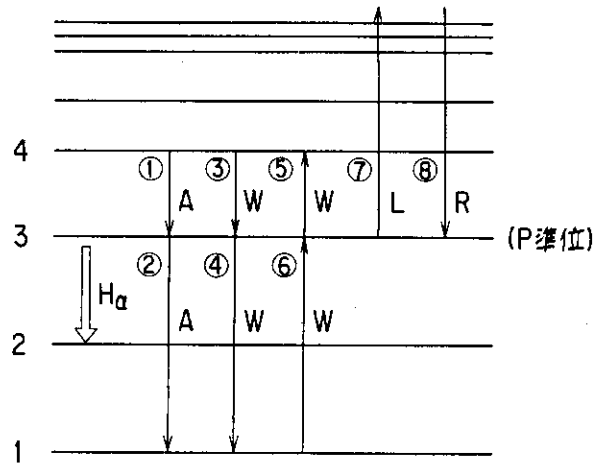
#### 2.4 $H\alpha$ の強度計算モデル

$H\alpha$  の強度を計算するには、各準位にある水素原子の密度を求める必要がある。collisional-radiative モデルが成りたつとすると、レベル  $P$  にある原子密度の rate 方程式は、<sup>3), 4)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dn(p)}{dt} = & \sum_{q=p+1}^M A_{qp} n(q) - \sum_{q=1}^{p-1} A_{pq} n(p) + \sum_{q=p+1}^M W_{qp} n(q) \\ & - \sum_{q=1}^{p-1} W_{pq} n(p) - \sum_{q=p+1}^M W_{pq} n(p) + \sum_{q=1}^{p-1} W_{qp} n(q) \\ & - L_p n(p) + R_p n_i \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

- $A_{pq}$  :  $p \rightarrow q$  への自然放出の確率
- $W_{pq}$  :  $p \rightarrow q$  への電子衝突による遷移確率
- $L_p$  :  $p$  準位にある原子の電子によるイオン化確率
- $R_p$  : 再結合確率
- $n_i$  : イオン密度

各項の意味は、第3図に示す。高いエネルギー準位ほど  $n(p)$  はオーダーで小さくなるので、 $M$  より高いエネルギー準位は無視する。普通  $M = 10$  まで考慮すれば十分である。再結合確率  $R_p$  はイオン化



第3図 collisional-radiative モデルの rate 方程式(15)の各項の意味。

確率  $L_p$  に比べて，7～8 オーダ小さい。従って水素原子がイオン密度に比べて，7～8 オーダ小さい限り，再結合による密度変化は無視できる。

基底状態を除いて全てのレベルは定常状態にあると仮定する。

$$\dot{n}(p) = 0 \quad p \neq 1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

再結合のプロセスを無視すると， $\dot{n}(1)$  は

$$\dot{n}(1) = - \sum_{p=1}^M L_p n(p) = -S_i \quad \dots\dots\dots (17)$$

$\dot{n}(1)$  は，イオン化による電子密度のソース  $S_i$  とバランスする。

以上の仮定のもとに方程式系(15)をマトリックス表示すると

$$D_{pq} n(q) = \dot{n}(p) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$D_{pq} = \begin{cases} W_{qp} & (q < p-1) \\ - \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ A_{pr} + \left(\frac{r}{p}\right)^2 \exp\left(\frac{\chi_{rp}}{T}\right) \right\} - \sum_{r=p+1}^M W_{pr} - L_p & (q = p) \\ A_{qp} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 \exp\left(\frac{\chi_{pq}}{T_e}\right) W_{pq} & (q > p+1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで，電子による de-excitation と excitation の遷移確率の間で成り立つ関係式を用いた。

$$W_{qp} = \left( \frac{p}{q} \right)^2 \exp (E_{pq} / T_e) W_{pq} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$\chi_{pq}$  は  $p-q$  間のポテンシャル・エネルギーである。A, W, L の各係数については、付録 1 にまとめる。

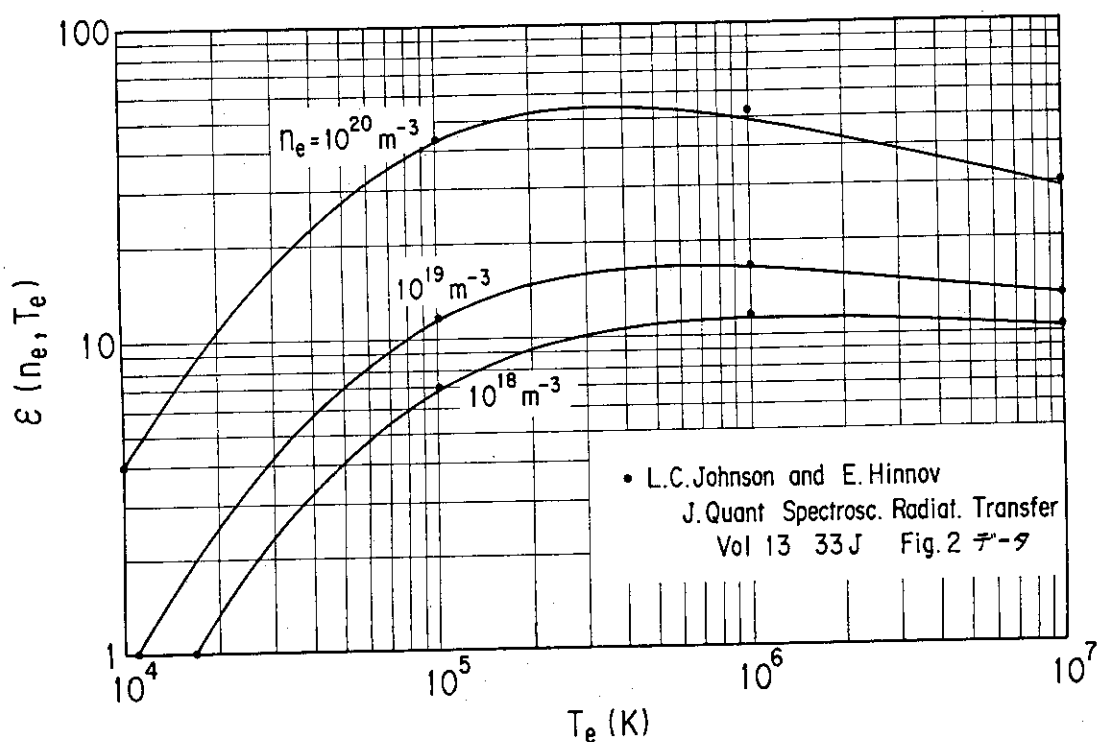
$H_{\alpha}$  の光子は、次のように計算される。

$$\dot{n} (H_{\alpha}) = n (3) A_{32} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで  $H_{\alpha}$  の放出数 1 コ当たりの水素原子の電離数  $\epsilon$  を定義する。

$$\epsilon (n_e, T_e) = S_i / \dot{n} (H_{\alpha}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

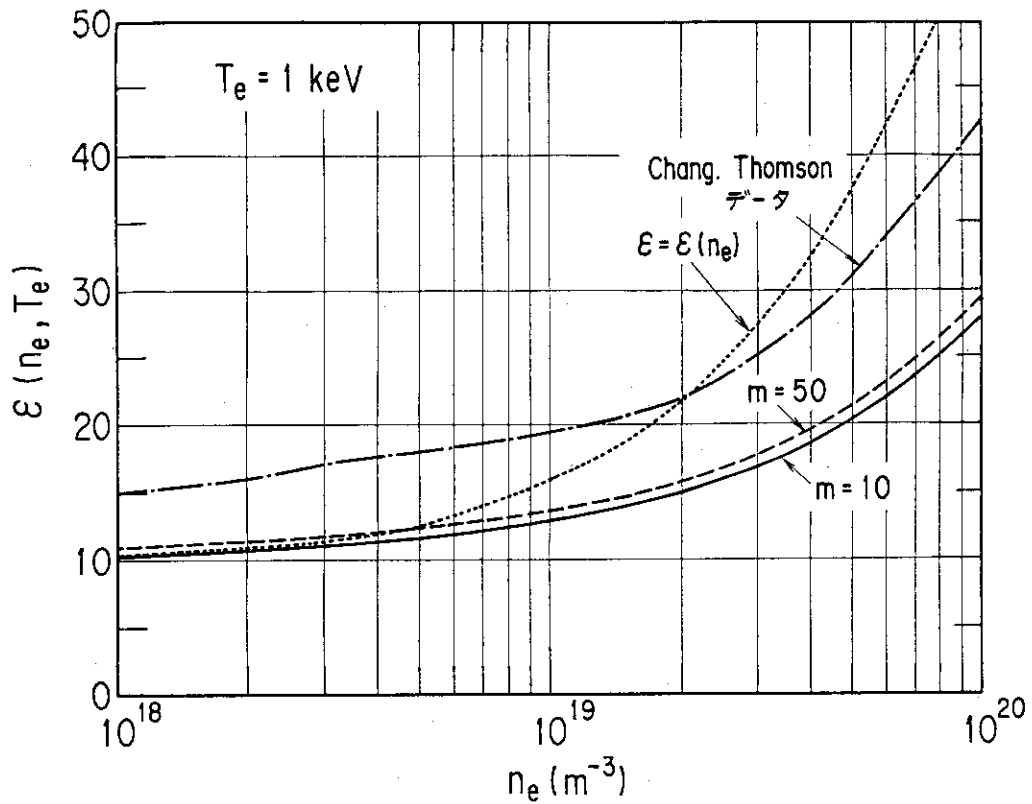
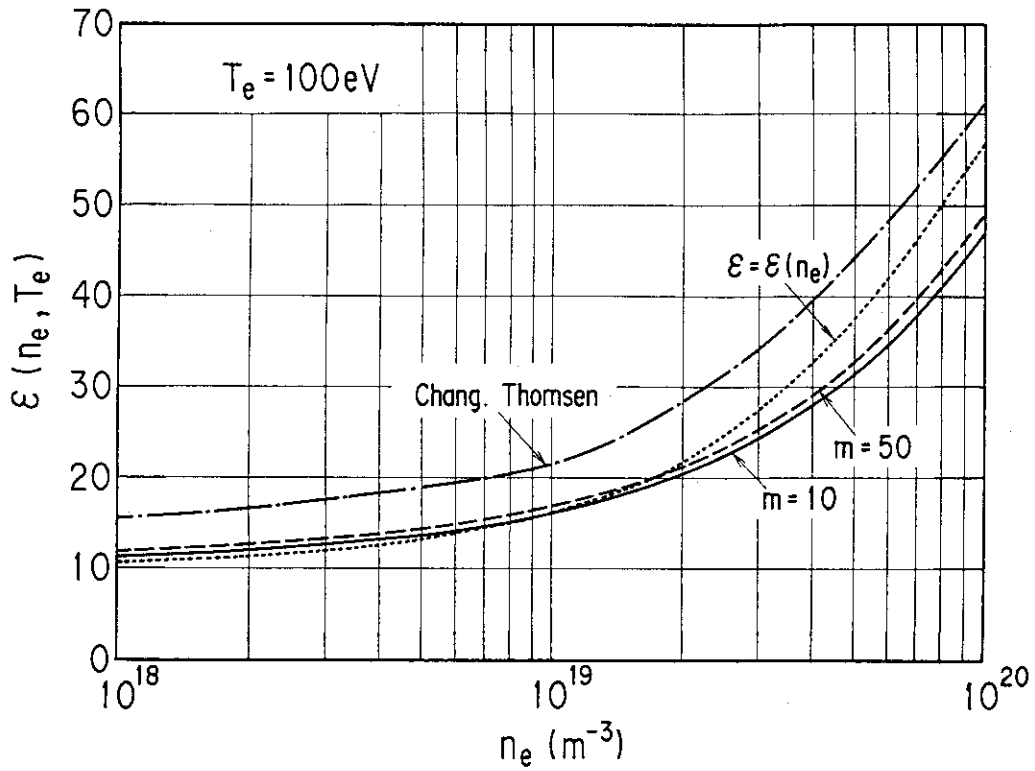
第 4 図は、 $\epsilon$  の  $T_e$  依存性を示したものである。Johnson and Hinno の結果<sup>5)</sup> を・印で示す。比



第 4 図  $H_{\alpha}$  の放出数 1 コ当たりの水素原子の電離数  $\epsilon$  の電子温度依存性。

黒丸印は、L. C. Johnson らの計算結果であり、我々の結果と非常に良く一致している。

較のため、 $T_e$  は eV 単位ではなく、K である。両者の結果は非常に良く一致している。 $T_e$  が 20 eV から 100 eV の範囲内 ( $H_{\alpha}$  が最も強く放出されるプラズマ境界は、この温度範囲内にあると思われる) で  $\epsilon (n_e, T_e)$  は  $T_e$  にほとんど依存しない。第 5 図は、 $\epsilon$  の  $n_e$  依存性を示したものである。破線は、cut-off Level M を 50 にとった場合である。M = 10 とした場合は、5% 程度しか結



第5図  $H_{\alpha}$  の放出数1コ当たりの水素原子の電離数  $\epsilon$  の密度依存性。  
 実線は cut off level として、 $m=10$ とした場合であり、破線は  $m=50$  の場合である。  
 点線は、近似式 (23) をあらわす。プラズマ境界でのパラメータにおいては良い近似であることがわかる。

果に差がない。点線は、JT-60の粒子閉じ込め時間  $\tau_p$  の評価<sup>6)</sup>に用いた近似式

$$\epsilon(n_e) = 70 - 1.6 \times 10^{-39} (n_e - 1.937 \times 10^{20})^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

である。プラズマ境界でのパラメータ ( $T_e = 20 \sim 100 \text{ eV}$ ,  $n_e \sim 10^{19} \text{ m}^{-3}$ )においてこの式は良い近似である事がわかる。電子による遷移確率W, イオン化確率Lとして、半経験的な式を用いた場合の結果を<sup>4)</sup>、一点鎖線で示す。この場合40%程度の差がある。

## 2.5 ソース

中性粒子のソースは、edgeソースとvolumeソースの二つに大きく分けられる。edgeソースは、中性粒子がプラズマの端より侵入してくるものであり、ガスバフ中性粒子、あるいは、壁又はリミターでリサイクルする中性粒子がある。volumeソースは、再結合過程もしくは、高速中性粒子との荷電交換(ハロー中性粒子)によって生まれる中性粒子である。

ガス・バフによって供給される水素ガス  $H_2$  は、電子との衝突で電離され、 $H_2^+$ になる。これが解離して、生じた中性粒子  $H^0$  は、3~5 eV程度のエネルギーをもつ。(フランク・コンドン粒子)モノ・エネルギーで、速度分布は等方的であるとする。

リミター放電の場合、リミターでリサイクル中性粒子によるソース源が、粒子バランスにおいて重要となる。イオンがリミターで反射するときのモデルは、2.2で述べた反射モデルを用いる。その時、イオンの入射エネルギーとして、プラズマ端でのイオン温度でMaxwell分布している中から選ぶ。

volumeソースについては、中性粒子が生まれた場所でのイオン温度でMaxwell分布している中から、新しい速度を選ぶ。その統計的加重  $\omega_0$  は、局所的な反応率に比例する。再結合中性粒子が、プラズマ内で生まれる割合は、

$$\dot{N} = \int n_i \cdot n_e \langle \sigma v \rangle_R dV_p \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで  $\langle \sigma v \rangle_R$  は、再結合の反応率である。ハロー中性粒子については、次の様になる。

$$\dot{N} = \sum_{J=1}^3 \left( \frac{I_J}{e} \right) \frac{1}{\pi a^2} \int \frac{\lambda_{CX}^{-1}}{\lambda_{TOT}^{-1}} H_J(r) 2\pi r dr \quad \dots\dots\dots (25)$$

Jは、ビーム成分をあらわし、 $I_J$  はJ成分の等価な電流値、 $H_J(r)$  は、高速イオン生成分布である。 $H_J(r)$  は、プラズマ体積で積分した値が、高速中性粒子の電離される割合  $\eta_J$  になるように規格化されている。

$$\eta_J = \frac{1}{\pi a^2} \int H_J(r) 2\pi r dr \quad \dots\dots\dots (26)$$

$\lambda_{CX}^{-1} / \lambda_{TOT}^{-1}$  は、高速中性粒子がイオン化される時に、荷電交換によるものが占める割合である。



2.6 モンテカルロのアルゴリズム

プラズマは磁気面によって分割され、密度及び温度等のプラズマ・パラメータは、これらのゾーンの中で一様とする。edge ソースについては、サンプル粒子はプラズマの端より発射され、volume ソースについては、プラズマの内部で発生する。それぞれのゾーンで、イオン化及び荷電交換の原子過程を考慮しながら、サンプル粒子の軌道追跡が行なわれる。荷電交換が生じた場合、そのゾーン内のイオン温度の Maxwell 分布から新しい速度が選ばれる。サンプル粒子が壁に衝突した場合、粒子及びエネルギーの反射係数を考慮して、新しい速度で粒子を backscatter させる。

アルゴリズムとして、path-length estimator method<sup>7)</sup>を用いる。中性粒子の密度  $n_0$  及びエネルギー  $E_0$  は、サンプル粒子のゾーンに滞在する時間より計算される。

$$n_j = \frac{\Gamma \cdot A}{V_j} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \omega_{ij} t_{ij}}{\sum_{i=1}^N \omega_{i0}} \quad \dots\dots\dots (27)$$

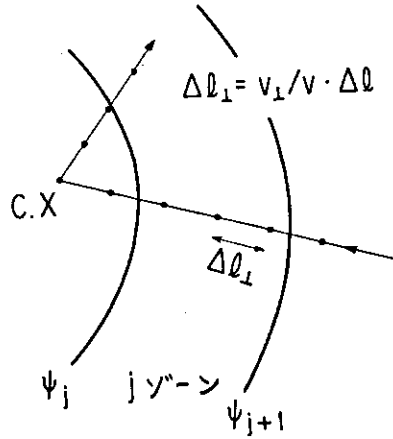
$$E_j = \frac{2}{3} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 \omega_{ij} t_{ij}}{\sum_{i=1}^N \omega_{ij} t_{ij}} \quad \dots\dots\dots (28)$$

- N : サンプル粒子数
- $t_{ij}$  : i 粒子が j ゾーンを通過する時間
- $\omega_{ij}$  : i 粒子が j ゾーンを通過する時の統計的重み
- $\omega_{i0}$  : i 粒子が発生した時の統計的重み
- $V_j$  : j ゾーンの体積
- A : プラズマの表面積
- $\Gamma$  : プラズマ境界からの単位面積あたりの中性粒子の influx

ハロー中性粒子の場合、 $\Gamma \cdot A$  はプラズマの全体積で、単位時間に発生するハロー中性粒子の個数  $\dot{N}$  である。

サンプル粒子がゾーンを通過する時間を正確に計算することは、非常に時間がかかる。計算時間を節約するため、粒子軌道の追跡は、一定のステップ巾  $\Delta \ell$  ずつ、サンプル粒子を進めることによって、これを行なう。サンプル粒子の位置での  $\psi$  (ポロイダル・フラックス・ファンクション) は、グリッド上で定義されている  $\psi(R_i, Z_j)$  より bi-linear 補間により補間し、粒子がどのゾーンにあるかを求める。こうして計算される粒子の滞在時間は近似的なものである。粒子軌道追跡の例を第 6 図に示す。ステップ巾  $\Delta \ell$  は、ゾーン間の距離  $\Delta R$  より小さくなければならない。

$$\Delta \ell < \Delta R$$



第6図 サンプル粒子の軌道追跡の例  
 粒子は、一定のステップ巾  $\Delta \ell$  ずつ進められる。

しかし、 $\Delta \ell$  を小さくとると、それに比例して計算時間がかかることになる。1つのゾーンに粒子が平均的に数回滞在するためには

$$\Delta \ell / \Delta R \simeq \frac{1}{2}$$

で十分である。

local な衝突断面積を  $\lambda$  とすると、 $\ell$  までに衝突する確率は、

$$P(\ell) = 1 - \exp\left(-\int_0^\ell \frac{ds}{\lambda}\right) \dots\dots\dots (29)$$

である。積分は直線の粒子軌道に沿って行なわれる。したがって、 $\Delta \ell$  の間に衝突する確率は、

$$P(\Delta \ell) = 1 - \exp(-\Delta \ell / \lambda) \dots\dots\dots (30)$$

である。イオン化の過程は、統計的重み  $\omega$  を小さくすることによって、その効果を取り入れる。即ち粒子を  $\Delta \ell$  ずつ進める毎に、 $\omega$  を

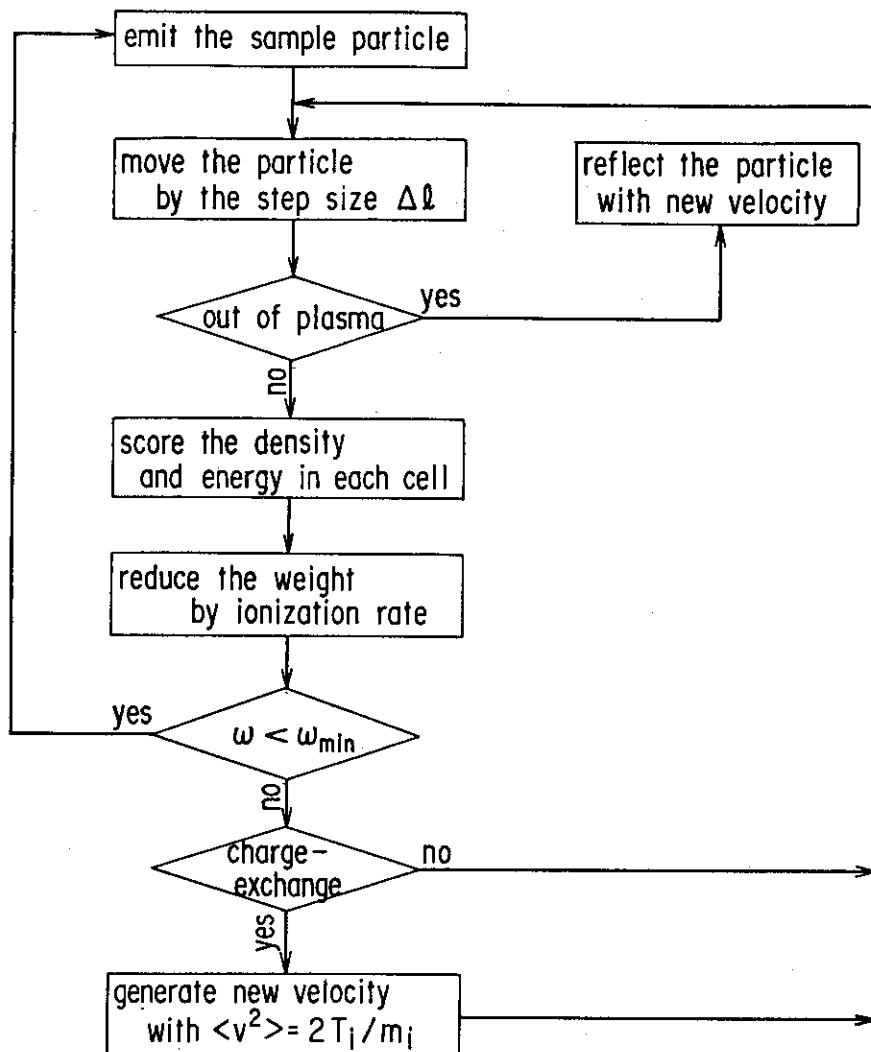
$$\omega^{\text{new}} = \omega^{\text{old}} \exp(-\Delta \ell / \lambda_{\text{ion}}) \dots\dots\dots (31)$$

とする。こうした方法は、モンテカルロ計算の統計精度を上げるために有効で、suppression of absorption と呼ばれる。 $\Delta \ell$  の間に荷電交換する確率は、次のように近似される。

$$P(\Delta \ell) = 1 - \exp(-\Delta \ell / \lambda_{\text{CX}}) \simeq \Delta \ell / \lambda_{\text{CX}} \dots\dots\dots (32)$$

粒子を  $\Delta \ell$  ずつ進める毎に一様乱数  $\xi$  を発生させ、 $\xi \leq \Delta \ell / \lambda_{\text{CX}}$  の時、衝突が生じたとして、その位置でのイオン温度の Maxwell 分布より速度を選び、粒子の追跡を続ける。アルゴリズムのフローチャートを第7図に示す。

## FLOW CHART



第7図 モンテカルロ計算のアルゴリズム

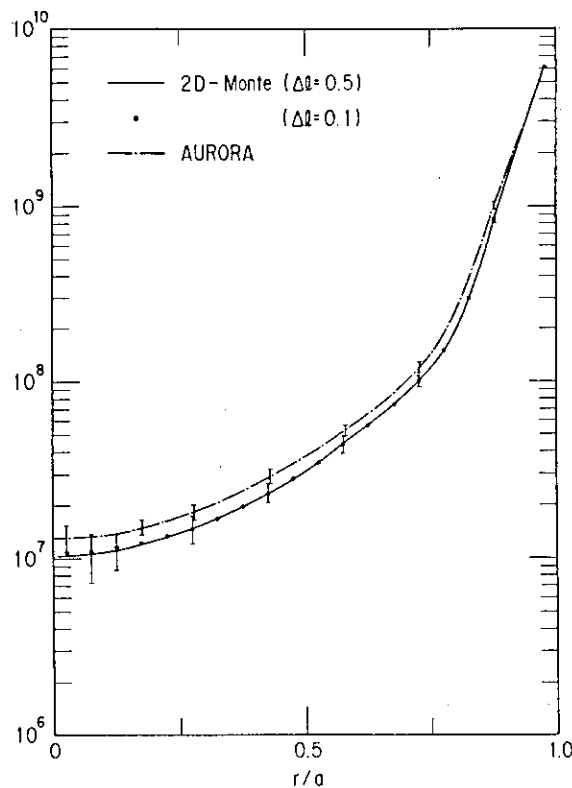
edge ソースの場合、中性粒子は、プラズマ境界から侵入するため、大部分はプラズマの外側で電離される。中心まで侵入してくるサンプル粒子は非常に少ないので、中心の統計精度は悪い。この点を改善するため、splitting with Russian roulette<sup>7)</sup>を用いる。

### 3. 計 算 例

この章では、2次元中性粒子輸送コードを用いた計算例について述べる。まず、Hughes, Post らの AURORA コードとの比較を行ない、コードの正常な動作を確認した。次に、OH 実験での典型的なダイバータ放電 (E 6 6 6) における中性粒子の分布を計算し、粒子閉じ込め時間  $\tau_p$  の評価を行なった。NBI 加熱時においては、プラズマ内部で、ハロー中性粒子が生まれる。この中性粒子の分布および、ビームの荷電交換損失について計算した。NBI 加熱されるとプラズマはベータ値が高くなり、プラズマの中心が外側へシフトする。これによって中性粒子の分布にどのような変化をもたらすかについて調べた。

#### 3.1 AURORAコードとの比較

AURORAコードは、同心円状の磁気面を仮定したモンテカルロによる1次元中性粒子輸送コードである。PLTのパラメータで計算を行なった結果を第8図に示す。実線は2次元モンテカルロによる計算結果であり、一点破線は、AURORAコードの結果である。両者の一致は、かなり良い。サンプル粒子を進めるステップ巾を小さくした場合 ( $\Delta\ell/\Delta R = 0.1$ ) の中性粒子の分布を・印で示す。結果にほとんど差がないことから、ステップ巾が  $\Delta\ell/\Delta R = 0.5$  でも、サンプル粒子のゾーンの滞在時間が、統計的に十分正確に求められていることがよくわかる。

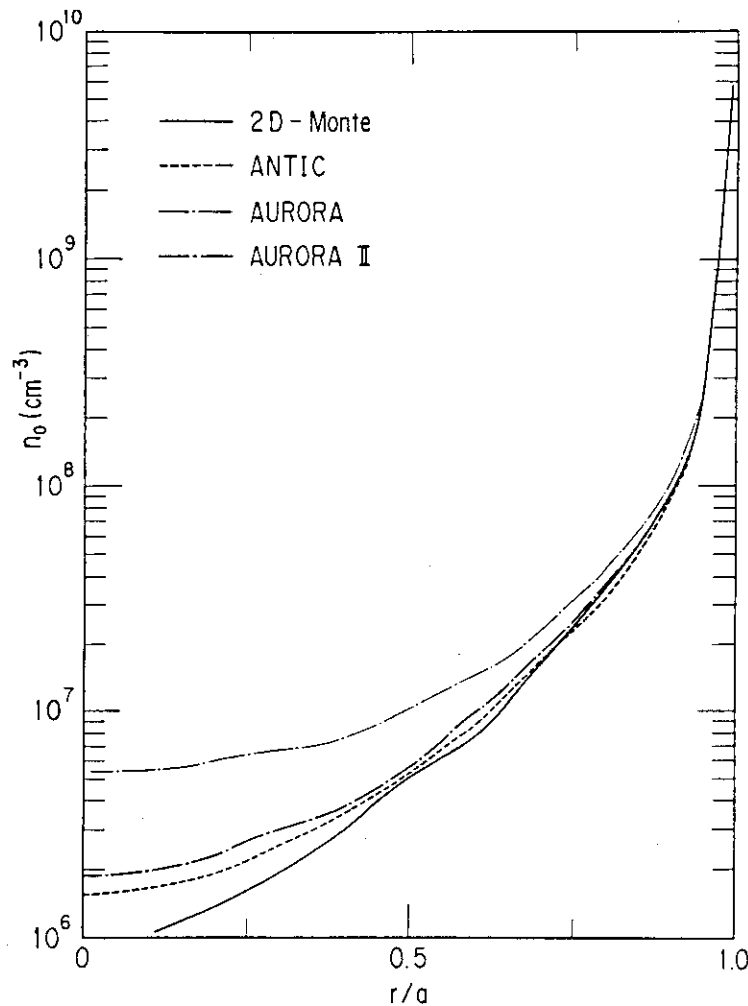


第8図 AURORAコードとの比較

PLTのパラメータを用いて計算を行なった。

黒丸印は、ステップ巾  $\Delta\ell/\Delta R = 0.1$  とした場合であり、 $\Delta\ell/\Delta R = 0.5$  としても、中性粒子の密度分布が統計的に十分正確に求められていることがわかる。

TFTR のパラメータで比較した例を第9図に示す。破線で示す結果は、ANTICコード<sup>(8)</sup>によるも



第9図 AURORAコード及び ANTICコードとの比較

TFTRのパラメータ(中心温度10 keV)を用いて計算を行なった。

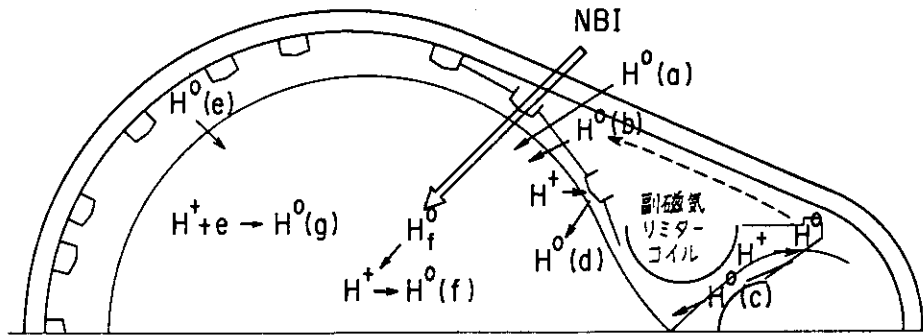
オリジナルな AURORAコードでは、イオンによる電離過程が無視されているため、中心付近での密度分布に大きな差が生じている。

のである。ANTICコードは、ボルツマンの輸送方程式を、モンテカルロによって解くのではなくて、積分方程式に変換し、これを解いている。オリジナルな AURORAコードでは、イオンによる電離過程が無視されている。中心での温度が10 keVと高いため、この過程を無視することはできない。AURORA IIというのは、2次元モンテカルロコードで用いている反応断面積のデータを使った場合である。これらの結果は、非常に良く一致している。

3.2 JT-60実験の解析

OH(I) 実験 (1985年) の標準的なダイバータ放電である E666 ( $I_p = 1\text{MA}$ ,  $\int n_e d\ell = 3.29 \times 10^{19} \text{m}^2$ ,  $T_{e0} = 1.2 \text{keV}$ ) について、中性粒子の分布を求めた。

JT-60 の中性粒子のソースについて、第10図と表1にまとめた。ガスバフ中性粒子や、リミ



第10図 JT-60 の中性粒子のソース

遮蔽板の設置後のダイバータ放電では、ダイバータスロートからの逆流する中性粒子が粒子バランスにおいて支配的である。

表1 中性粒子の発生場所とそのエネルギー

	ソ ー ス	発生場所	エネルギー
edge ソース	a ガス・バフ	30°ポート	数 eV
	b ダイバータ室から副磁気コイルを廻り込んで流入	30°ポート	数 eV
	c ダイバータ・スロートより逆流	スロート	10~50 eV
	d リミターでリサイクル	30°ポート	≲ 50 eV
	e プラズマ着火前に注入された初期ガスのうち未電 なガス	壁 全 体	数 eV
volume ソース	f ハロー中性粒子	プラズマ内	Ti(r)
	g 再結合中性粒子	プラズマ内	Ti(r)

ターでリサイクルする中性粒子は、30°ポートのまわりに局在している。ダイバータ室で中性化された粒子の一部は、副磁気リミターコイルを廻り込んでメインプラズマへ流入し、一部はダイバータスロートから逆流する。プラズマ着火前に注入された初期ガスのうち、未電離な粒子は真空容器の壁全体より発生する。(残留ガスと呼ぶ。)

OH(I) 実験では、遮蔽板が設けられていないので、ダイバータ放電の場合、ダイバータ室からコイルを廻り込んでメインに再供給される粒子が、粒子バランスで支配的である。この粒子は30°ポ

ートのまわりに局在しており、エネルギーも低いのでガスパフ粒子と呼ぶ。ダイバータ・スロートからの逆流は少ないため、以下の解析では、この効果は無視した。残留ガスと再供給粒子の二つのソースについて計算を行なった。再供給粒子が、ライナーのどの部分より、どのような分布で流入するかについては、明確ではない。従って以下の計算では、 $R = 3.15 \text{ m}$ より  $R = 4.0 \text{ m}$  の範囲内で、一様に中性粒子が流入するとした。計算には、主プラズマのパラメータとして、次の様なものを用いた。

$$n_e(r) = 2.6 \times 10^{19} \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) + 0.5 \times 10^{19} \quad \text{m}^{-3}$$

$$T_e(r) = 1.2 \times 10^3 \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right)^2 + 50 \quad \text{eV}$$

$$T_i(r) = 1.0 \times 10^3 \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) + 50 \quad \text{eV}$$

セパトリックス磁気面と  $30^\circ$  リミターのクリアランスは、 $2.4 \text{ cm}$ である。第11図-(a)に、ガスパフ粒子密度の2次元分布を、(b)に残留ガスの中性粒子の密度分布を示す。中性粒子のエネルギーは、共に  $5 \text{ eV}$ とした。U6ポートで測定された  $H_\alpha$  の線強度になるように、絶対値が決められている。 $H_\alpha$  の計算には、2.4節で述べた collisional-radiative モデルを用いた。表2に、計算結果をまとめる。残留ガス ( $\Gamma_w$ ) とガスパフの中性粒子のフラックス ( $\Gamma_G$ ) の比を

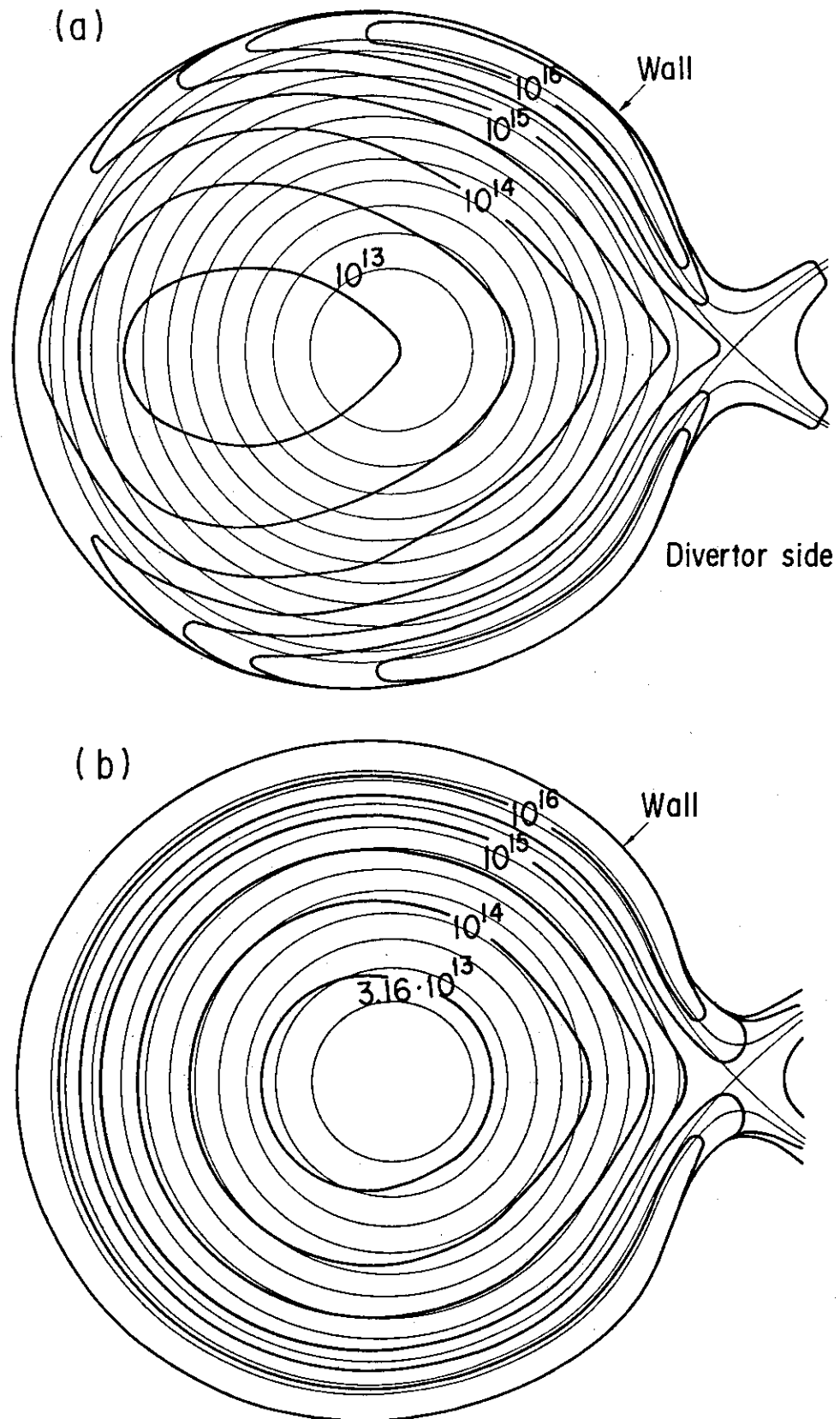
$$\Gamma_w / \Gamma_G = 0.12$$

とすると、実験での測定値を説明することができる。スクレイプ・オフ層を含むプラズマ全体の粒子閉じ込め時間は、

$$\tau_p = 0.11 \text{ sec}$$

である。この時の中性粒子の2次元分布を第12図に示す。文献(6)の中で用いた fitting 関数は、ダイバータスロート周辺を除いて、中性粒子の分布をよく再現している。この時評価された粒子閉じ込め時間は、 $0.10 \text{ sec}$ である。ダイバータスロート周辺での分布の違いは、 $\tau_p$  の評価に  $10 \sim 15\%$  程度の差しかもたらさないことがわかる。

OH(I) 実験 (1985年) 以降は、副磁気リミターコイルを廻り込む粒子を少なくするため遮蔽板が設置された。したがって、現在のダイバータ放電においては、スロートからの逆流が、粒子バランスで支配的である。遮蔽板設置後の NBI 加熱実験の典型的なダイバータ放電 (E2654) について、計算した結果を第13図に示す。(a)図は、中性粒子の2次元分布であり、(b)図は  $H_\alpha$  の線積分強度の主半径方向の分布を示す。・印が測定値である。この場合にも、実験結果をよく再現出来る事を示している。



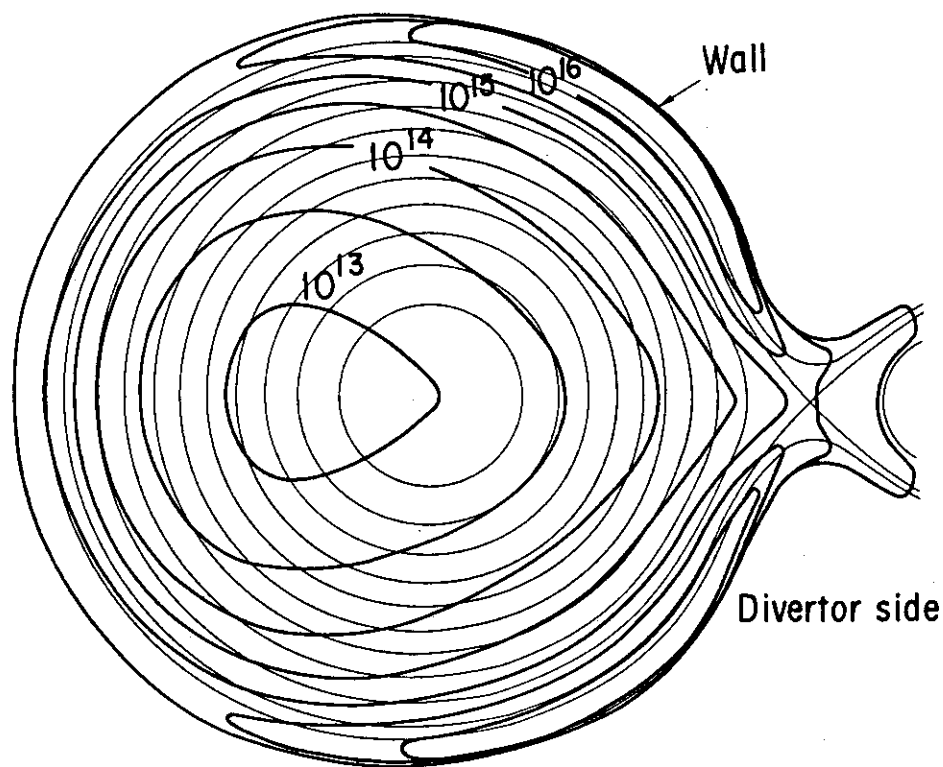
第11図 E666 ダイバータ放電における中性粒子の二次元分布。(a)は、ダイバータ室で中性化されて副磁気リミターコイルを廻り込んでプラズマへ流入する粒子。(b)は残留ガスの分布。  
両者とも、 $U_p$ ポートで測定された  $H_{\alpha}$  の線強度のデータより、絶対値を決めた。



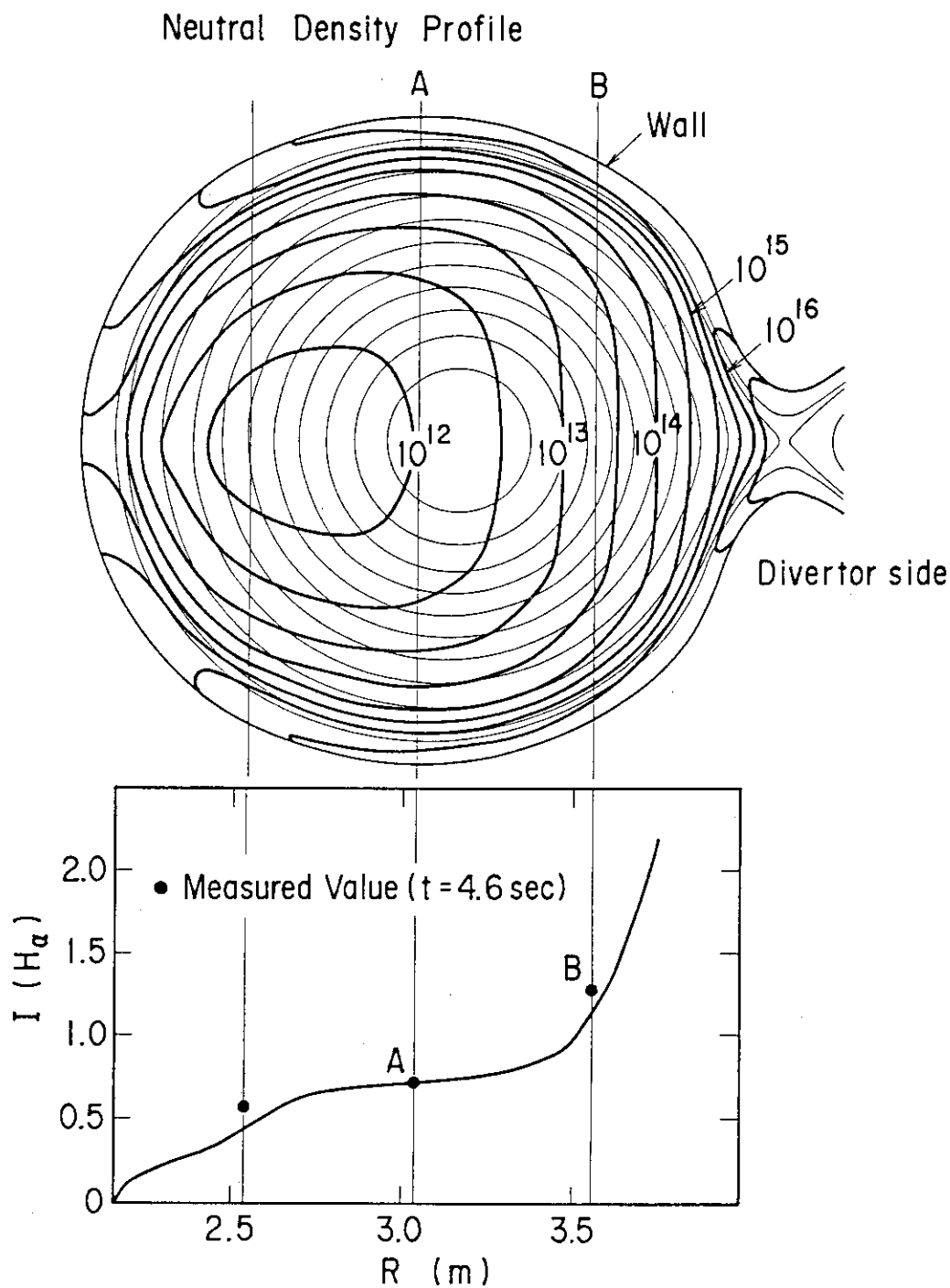
表2 H $\alpha$ 線強度の測定値と計算値

残留ガスと再供給粒子のフラックスの比を  $\Gamma_w / \Gamma_G = 0.12$  とすると測定値が説明できる。その時の粒子閉じ込め時間は  $\tau_p = 0.11$  である。

	$I_{24}$	$I_4$	$I_6$	$\tau_p$ (メイン)	$\tau_p$
測定データ	$2.6 \times 10^9$	$3.1 \times 10^{10}$	$3.85 \times 10^{10}$		
ガス・パフ	$1.1 \times 10^9$	$2.8 \times 10^{10}$	$3.85 \times 10^{10}$	0.15	0.12
残留ガス	$2.5 \times 10^{10}$	$7.3 \times 10^{10}$	$3.85 \times 10^{10}$	0.08	0.07
$\Gamma_w / \Gamma_G = 0.12$	$2.6 \times 10^{10}$	$3.1 \times 10^{10}$	$3.85 \times 10^{10}$	0.14	0.11



第12図 3本の H $\alpha$ 線強度の測定値より決めた中性粒子の二次元分布。  
 残留ガスと再供給粒子のフラックスの比  $\Gamma_w / \Gamma_G = 0.12$  である。

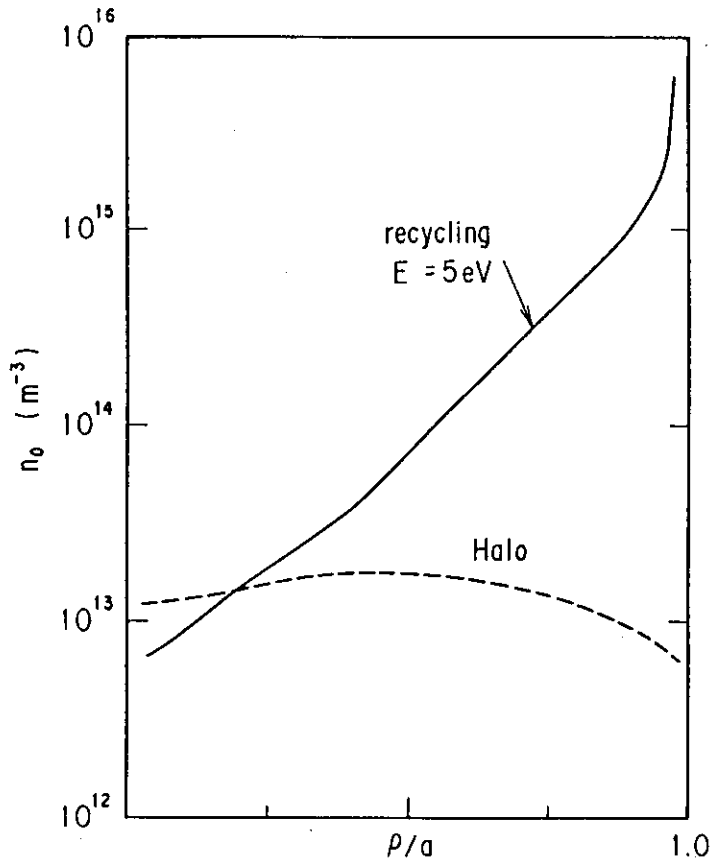


第13図 遮蔽板設置後のダイバータ放電における中性粒子の2次元分布と  $H_{\alpha}$  の線強度の分布。

### 3.3 ハロー-中性粒子

NBI 加熱が行なわれた場合、高速中性粒子は、電子及びイオンによって電離される。この時、高

速中性粒子とイオンとの荷電交換によって、イオン温度のエネルギーを持つ中性粒子がプラズマ内で生まれる。これがハロー中性粒子である。リサイクリング中性粒子は、プラズマ境界より侵入してくるので、大部分は外側で電離される。これに対して、高速中性粒子はエネルギーが非常に高いため、ハロー中性粒子はプラズマの内部で生まれる。密度が  $\bar{n}_e = 4.2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$  の場合の、リサイクル中性粒子とハロー中性粒子の磁気面で平均化した密度分布を、第14図に示す。リサイクル中性粒



第14図 リサイクル中性粒子とハロー中性粒子の密度分布。

子の絶対値を決める時の、粒子閉じ込め時間は、 $\tau_p = 50 \text{ msec}$  を仮定した。ハロー中性粒子の2次元分布は、ビームラインに局在しているが、磁気面平均した分布は、空間的にはほぼ一様であり、その密度は、 $10^{13} \text{ m}^{-3}$  程度である。この計算では、ビーム・エネルギーが50 keVとしたが、100 keVの場合、荷電交換によって高速中性粒子が電離される割合が減少して、ハロー中性粒子の密度は  $3 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$  程度となる。高速イオンが中性化されて、ロスするのは、プラズマの外側で荷電交換した粒子である。プラズマ内部で、荷電交換した粒子の大部分は、再電離されるので、損失にはならない。ハロー中性粒子は、プラズマ中心付近の密度にしか寄与しないので、これがNBI加熱の荷電交換損失に与える影響は無視できる。

### 3.4 高ベータ・プラズマにおける中性粒子の密度分布

JT-60は、20MWのNBI加熱と10MWのRF加熱をもって、臨界条件の達成を目指している。この臨界プラズマは、ベータ値として $\beta_p \simeq 1.5 \sim 2.0$ の値をもつ。この様な高ベータ・プラズマでは、プラズマ中心のシフトが顕著となる。これが中性粒子の輸送にどう影響するかについて調べた。

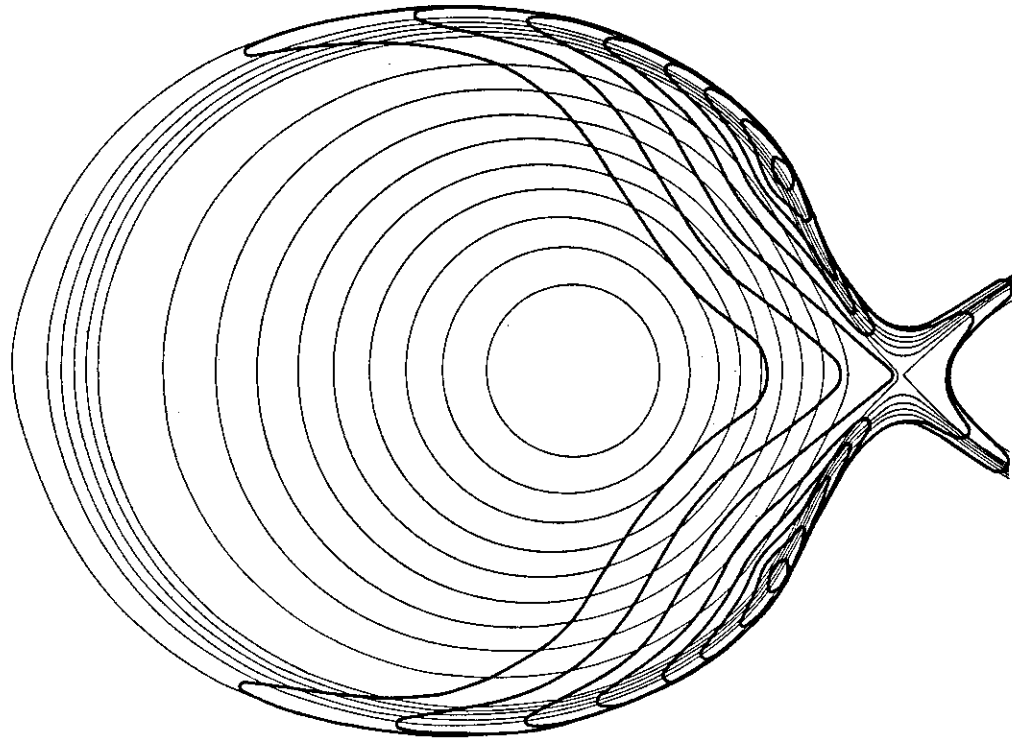
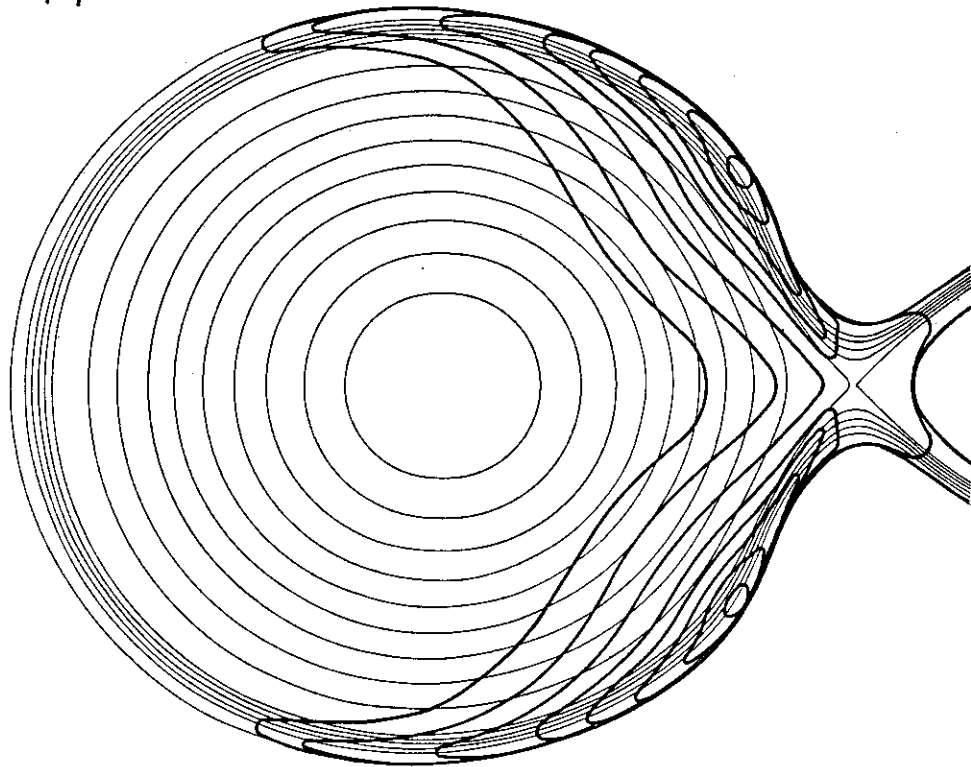
$\beta_p = 0.01$ と2.0の場合のリミター配位での2次元中性粒子の分布を第15図に示す。中性粒子は $30^\circ$ リミターの位置より発生している。平衡配位による密度分布の違いを見るために、計算に用いているプラズマ・パラメータは同じである。

$$n_e(r) = (10 \times 10^{19} - 1 \times 10^{19}) \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) + 1 \times 10^{19} \quad (\text{m}^{-3})$$

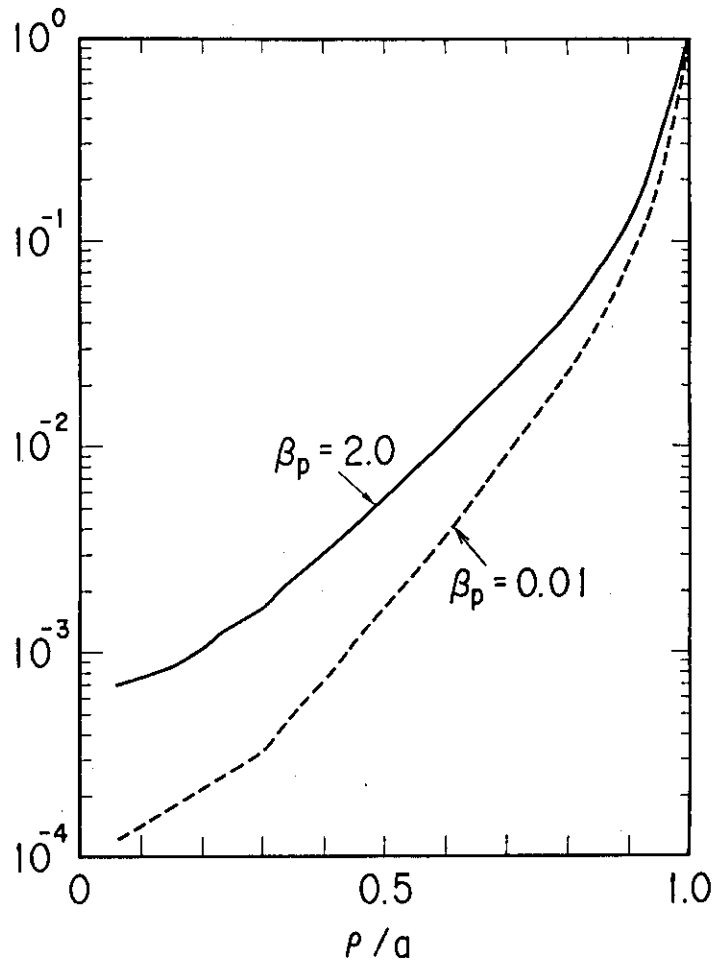
$$T_e(r) = (5 \times 10^3 - 100) \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right)^2 + 100 \quad (\text{eV})$$

$$T_i(r) = (5 \times 10^3 - 100) \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) + 100 \quad (\text{eV})$$

第16図は一次元の密度分布を示す。 $\beta_p = 2.0$ の場合プラズマ中心の外側へのシフトによって、ソース源からの距離が短くなって、中性粒子が中心まで深く浸入している事がわかる。これによって、実平衡を考慮した場合と同心円モデルの計算とでは、電離損失、荷電交換損失の評価において30～40%の差が生じる。

(a)  $\beta_p = 2.0$ (b)  $\beta_p = 0.01$ 

第15図 高ベータ・プラズマにおける中性粒子密度の二次元分布。(a)は、 $\beta_p = 2.0$ の平衡配位を考慮した場合であり、(b)は、同心円状磁気面を仮定した場合である。



第16図 高ベータ・プラズマにおける中性粒子密度の一次元分布。  
高ベータになると、プラズマ中心の外側へのシフトが、  
中性粒子の密度分布に大きな影響を持つ事がわかる。  
プラズマ表面での中性粒子の密度を1に規格化している。

## 4. 結 語

実平衡を考慮した、モンテカルロ法に基づく2次元の中性粒子の輸送コードを開発した。このコードの特色は、path length の計算を速く行なうため、一定のステップ巾ずつサンプル粒子を進め、その軌道追跡を行なう事である。実平衡における中性粒子の分布を求める上で、この方法が有効であった。このコードを用いて、オーミック加熱時の閉じ込め時間の評価を行なった。また、NBI加熱時の高ベータプラズマにおいて、実平衡を考慮した場合と磁気面が同心円と仮定した場合の中性粒子の分布を比較した。

このコードをさらに発展させるべき点として、次の様なものがある。

- (1) 壁の形状が、ポロイダル・フラックス・ファンクションによって規定されている。壁との反射による中性粒子の広がりをより正確に計算するには実形状を用いる必要がある。
- (2) 水素ガス  $H_2$  が  $H^0$  になる分子過程が含まれていない。
- (3) 計算時間短縮のためのベクトル化は、まだ行なわれていない。一般にモンテカルロコードは、ベクトル化率があまり高いものではないが、ベクトル化を行なうと2倍程度速くなるものと思われる。
- (4) OH(II)実験以降に設けられた遮蔽板のため、ダイバータスロートから逆流する中性粒子が、粒子バランスにおいて支配的である。ダイバータ部での中性粒子の挙動を調べるには、磁力線方向に沿ったプラズマパラメータの変化を扱えるようにする必要がある。

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたり、有益な議論と助言を頂いた、理論解析研究室の滝塚知典氏、臨界プラズマ実験室解析グループ諸氏、下村安夫臨界プラズマ実験室室長に深く感謝致します。山田喜美雄研究員には、collisional-radiative モデルを提供して頂き、深く感謝致します。さらに、御指導、御鞭撻を賜りました吉川允二臨界プラズマ研究部長、田村早苗次長に厚く謝意を表します。

## 4. 結 語

実平衡を考慮した、モンテカルロ法に基づく2次元の中性粒子の輸送コードを開発した。このコードの特色は、path length の計算を速く行なうため、一定のステップ巾ずつサンプル粒子を進め、その軌道追跡を行なう事である。実平衡における中性粒子の分布を求める上で、この方法が有効であった。このコードを用いて、オーミック加熱時の閉じ込め時間の評価を行なった。また、NBI加熱時の高ベータプラズマにおいて、実平衡を考慮した場合と磁気面が同心円と仮定した場合の中性粒子の分布を比較した。

このコードをさらに発展させるべき点として、次の様なものがある。

- (1) 壁の形状が、ポロイダル・フラックス・ファンクションによって規定されている。壁との反射による中性粒子の広がりをもより正確に計算するには実形状を用いる必要がある。
- (2) 水素ガス  $H_2$  が  $H^0$  になる分子過程が含まれていない。
- (3) 計算時間短縮のためのベクトル化は、まだ行なわれていない。一般にモンテカルロコードは、ベクトル化率があまり高いものではないが、ベクトル化を行なうと2倍程度速くなるものと思われる。
- (4) OH (II) 実験以降に設けられた遮蔽板のため、ダイバースロットから逆流する中性粒子が、粒子バランスにおいて支配的である。ダイバースロットでの中性粒子の挙動を調べるには、磁力線方向に沿ったプラズマパラメータの変化を扱えるようにする必要がある。

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたり、有益な議論と助言を頂いた、理論解析研究室の滝塚知典氏、臨界プラズマ実験室解析グループ諸氏、下村安夫臨界プラズマ実験室室長に深く感謝致します。山田喜美雄研究員には、collisional-radiative モデルを提供して頂き、深く感謝致します。さらに、御指導、御鞭撻を賜りました吉川允二臨界プラズマ研究部長、田村早苗次長に厚く謝意を表します。



## 参 考 文 献

- (1) A. C. Riviere , Nucl. Fusion 11, 363 (1971).
- (2) Y. Seki et al. , Nucl. Fusion 20, 10 (1980).
- (3) K. Yamada : private communication.
- (4) C. T. Chang and K. Thomsen , Nucl. Fusion 24, 697 (1984).
- (5) L. C. Johnson and E. Hinnov, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 13, 333 (1973).
- (6) K. Yamada et al. , JAERI-M 86-057 (1986).
- (7) M. H. Hughes and D. E. Post, "A Monte Carlo Algorithm for Calculating Neutral Gas Transport in Plasmas " Princeton Plasma Physics Laboratory Report No PPPL-1335 (1977).
- (8) S. Tamor , J. Comp. Physics 40, 104 (1981).

付録1  $H_{\alpha}$ の強度計算に用いている遷移確率

$H_{\alpha}$ の計算に用いている遷移確率の表式についてまとめる。

(1) 自然遷移確率  $A_{pq}$  ( $p > q$ )

$$A_{pq} = 1.69 \times 10^{45} \frac{g_p}{g_q} f_{pq} \chi_{pq}^2 \quad (\text{s}^{-1})$$

$g_p$  は  $p$  準位の統計的重率で  $g_p = 2p^2$  である。

$\chi_{pq}$  は  $p - q$  準位間のポテンシャル・エネルギーである。

$$\chi_{pq} = E_{\text{ion}} \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad E_{\text{ion}} = 13.6 \text{ eV}$$

$f_{pq}$  はオシレータストレングスで次のように表わせる。

$$f_{pq} = \frac{32}{3\sqrt{3}\pi} \frac{q}{p^3} \frac{1}{x^3} g(q, x)$$

$$x = 1 - \left( \frac{q}{p} \right)^2$$

$$g(n, x) = g_0(n) + g_1(n) \frac{1}{x} + g_2(n) \frac{1}{x^2}$$

$n =$	1	2	$\geq 3$
$g_0$	1.133	1.079	$0.994 + 0.233n^{-1} - 0.130n^{-2}$
$g_1$	-0.406	-0.232	$-n^{-1} (0.628 - 0.560n^{-1} + 0.530n^{-2})$
$g_2$	0.0701	0.0295	$n^{-2} (0.389 - 1.18n^{-1} + 1.47n^{-2})$

(2) 電子衝突による遷移確率  $W_{pq}$  ( $p < q$ )

$$W_{pq} = \pi a_0^2 n_e \left( \frac{8T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \frac{2p^2}{x} y^2$$

$$\left\{ C_{pq} \left\{ \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) E_1(y) - \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \right) E_1(z) \right\} + \left( B_{pq} - C_{pq} \ell \ln \frac{2 p^2}{x} \right) \left( \frac{1}{y} E_2(y) - \frac{1}{z} E_2(z) \right) \right\}$$

$n_e, T_e$  は電子の密度及び温度である。

$a_0$  は Bohr 半径である。

$$y = \chi_{pq} / T_e$$

$$z = r_{\ell} x + E_{pq} / T_e$$

$$C_{pq} = 2 p^2 f_{pq} / x$$

$$B_{pq} = 4 p^4 \left( 1 + \frac{4}{3 x} + \frac{b_p}{x^2} \right) / (q^3 x^2)$$

$$r_{\ell} = \begin{cases} 0.45 & (\ell = 1) \\ 1.94 \ell^{-1.57} & (\ell \geq 2) \end{cases}$$

$$b_{\ell} = \begin{cases} -0.603 & (\ell = 1) \\ \ell^{-1} (4.0 - 18.63 \ell^{-1} + 36.24 \ell^{-2} - 28.09 \ell^{-3}) & (\ell \geq 2) \end{cases}$$

$E_1$  は、指数積分である。

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$E_2(z) = e^{-z} - z E_1(z)$$

(3) 電子によるイオン化確率

$$L_p = \pi a_0^2 n_e \left( \frac{8 T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} 2 p^2 y^2$$

$$\left\{ C_p \left\{ \frac{1}{y} E_1(y) - \frac{1}{z} E_1(z) \right\} + (B_p - C_p \ell \ln 2 p^2) \{ \xi(y) - \xi(z) \} \right\}$$

$$y = \chi_p / T_e$$

$$z = r_p + E_p / T_e$$

ここで、 $\chi_p$  は  $p$  準位のイオン化エネルギーである。

$$C_p = \frac{3^2}{3\sqrt{3}\pi} - p \sum_{i=0}^2 \frac{g_i(p)}{i+3}$$

$$B_p = \frac{2}{3} p^2 (5 + b_p)$$

$$\xi(z) = E_0(z) - 2E_1(z) + E_2(z)$$

$$E_0(z) = e^{-z}/z$$