

JAERI - M

87-039

マニピュレータ構造に依存した行列による
運動学の表現とその逆問題の解法

1987年3月

佐々木 忍

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1987

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 いばらき印刷㈱

マニピュレータ構造に依存した行列による運動学の表現とその逆問題の解法

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1987年2月9日受理)

本報では、Denavit - Hartenberg に基づく方法で定めた同次座標変換行列 (A_i 行列) を使って 6 リンク・マニピュレータの運動学方程式を誘導し、ついでその逆問題の解法に触れる。

運動学方程式が正しく記述しているかを検討するために、同一のマニピュレータに対して任意の座標系で表現された運動学方程式の逆問題の厳密解と比較した。両者の関節解が完全に一致していることから、本法の正しさが確認された。ここに示したリンク間の隣接関係の定式化は、ある種のマニピュレータに対する逆問題を統一的に取り扱う手がかりを与えるであろう。

A Structure-Dependent Matrix Representation of Manipulator
Kinematics and Its Inverse Solution

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering,
Tokai Research Establishment,
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received February 9, 1987)

In this paper, derivation of kinematic equations for a six-link manipulator is presented using the homogeneous transformation (A_i -matrix) based on Denavit-Hartenberg method, and additionally a solution procedure of its inverse problem is outlined.

In order to examine the validity of a system of equations, solutions were compared with the exact ones of the inverse kinematics (for the same type of a manipulator) expressed in arbitrarily given co-ordinate systems. Through complete agreement of joint solutions between the two, the present purpose was accomplished. As shown in this paper, an explicit description between adjacent links will give a possible clue to a systematic treatment of the inverse problem for a class of manipulators.

Keywords: Multi-Joint Manipulator, Homogeneous Transformation Matrix,
Link Co-ordinate Systems, Inverse Kinematics

目 次

1. はじめに	1
2. 運動学方程式の決定	1
2.1 Denavit - Hartenberg 記法	1
2.2 6リンク・マニピュレータへの適用	3
3. 逆問題の解法	10
4. 解の検討	14
5. おわりに	15
謝 辞	16
参考文献	16

Contents

1. Introduction	1
2. Determination of Kinematics	1
2.1 Denavit-Hartenberg Notation	1
2.2 Application to a Six-Link Manipulator	3
3. Solution Procedure of Inverse Problem	10
4. Discussion of the Results	14
5. Concluding Remarks	15
Acknowledgement	16
References	16

1. はじめに

多関節型ロボット・マニピュレータの運動学は、マニピュレータの各関節を独立に動かした時手先の位置・姿勢が三次元空間内でいかに実現できるかを考究する機構学の一分野であり、解析的研究を展開する上でこれは通常順問題 (kinematic direct problem) と呼ばれている。

一方、手先の位置・姿勢からそれを満足するために各関節変位をいくらにすべきか論ずることをマニピュレータ運動学に対する逆問題 (inverse problem) という。順問題の解析では、各リンクが剛体であることおよびそれらが関節を介して直列につながった開ループ構造であることを前提として、マトリックス法やベクトル法が利用されている。いずれの方法も座標変換行列の概念が基礎となる。その場合、各リンク上に任意な座標系を設け、基準座標との相対位置関係から運動学方程式を導くのが一般的である。

本報では、Denavit - Hartenberg に基づく方法で定めた同次座標変換行列 (A_i 行列または A_i 行列) から手先までの幾何学的関係式を誘導し、ついでその逆問題の解法に触れる。

文献(1)～(5)等で扱った順問題の解析手法は、各リンクに座標系を勝手に指定して座標変換を進める点で基本的に同じ考え方といえるが、ここでは、リンク座標の設定に対して若干なりとも一定のルールをもたせ、それに基づく隣接リンク間の一般的関係式すなわち、 A_i 行列を使って機構全体の運動学方程式を演繹することが狙いである。この方法を用いると、どの関節をどの順序で並べるかによる形態の多様性やオフセットまで許した機構に対して、いかに関節の構造・組合せが複雑であっても一定の手順で根元・手先間の関係式が組織的に引出せるという利点がある。

しかしながら、このようにして得られた運動学方程式から各関節角の値を陽に求めることは一般的に無理であるため、ここでは従来開発してきた多項式法により厳密解を導き出す。6リンク・マニピュレータに適用した計算機シミュレーションの結果は、本報と異なる座標系で定めた運動学方程式の関節解と完全に一致していることを確認した。つまり、 A_i 行列の一般的指定法を用いて運動学方程式が正しく表現されていたことが、帰結できる。とりわけ、今回の解析の中核となる A_i 行列をベースにしてマニピュレータ手先関係の統一した記述は、裏返せば逆問題を統一に取り扱える可能性を示唆するものである。

2. 運動学方程式の決定

2.1 Denavit - Hartenberg 記法

マニピュレータの手先の空間運動を解析するためには、まず各リンクに直交座標系 x_i, y_i, z_i を設定することが必要である。この座標系をリンク座標系と呼び、 Σ_i で表現する。 Σ_i は、原点 O_i の位置と各直交座標軸の単位方向ベクトル n_i, o_i, a_i により表すことができる。リンク座標系の選び方として最も普及している Denavit - Hartenberg の方法を採用する。^{(6), (7), (8), (9)}

1. はじめに

多関節型ロボット・マニピュレータの運動学は、マニピュレータの各関節を独立に動かした時手先の位置・姿勢が三次元空間内でいかに実現できるかを考究する機構学の一分野であり、解析的研究を展開する上でこれは通常順問題 (kinematic direct problem) と呼ばれている。

一方、手先の位置・姿勢からそれを満足するために各関節変位をいくらにすべきか論ずることをマニピュレータ運動学に対する逆問題 (inverse problem) という。順問題の解析では、各リンクが剛体であることおよびそれらが関節を介して直列につながった開ループ構造であることを前提として、マトリックス法やベクトル法が利用されている。いずれの方法も座標変換行列の概念が基礎となる。その場合、各リンク上に任意な座標系を設け、基準座標との相対位置関係から運動学方程式を導くのが一般的である。

本報では、Denavit - Hartenberg に基づく方法で定めた同次座標変換行列 (A_i 行列または A_i 行列) から手先までの幾何学的関係式を誘導し、ついでその逆問題の解法に触れる。

文献(1)～(5)等で扱った順問題の解析手法は、各リンクに座標系を勝手に指定して座標変換を進める点で基本的に同じ考え方といえるが、ここでは、リンク座標の設定に対して若干なりとも一定のルールをもたせ、それに基づく隣接リンク間の一般的関係式すなわち、 A_i 行列を使って機構全体の運動学方程式を演繹することが狙いである。この方法を用いると、どの関節をどの順序で並べるかによる形態の多様性やオフセットまで許した機構に対して、いかに関節の構造・組合せが複雑であっても一定の手順で根元・手先間の関係式が組織的に引出せるという利点がある。

しかしながら、このようにして得られた運動学方程式から各関節角の値を陽に求めることは一般的に無理であるため、ここでは従来開発してきた多項式法により厳密解を導き出す。6リンク・マニピュレータに適用した計算機シミュレーションの結果は、本報と異なる座標系で定めた運動学方程式の関節解と完全に一致していることを確認した。つまり、 A_i 行列の一般的指定法を用いて運動学方程式が正しく表現されていたことが、帰結できる。とりわけ、今回の解析の中核となる A_i 行列をベースにしてマニピュレータ手先関係の統一した記述は、裏返せば逆問題を統一的に取り扱える可能性を示唆するものである。

2. 運動学方程式の決定

2.1 Denavit - Hartenberg 記法

マニピュレータの手先の空間運動を解析するためには、まず各リンクに直交座標系 x_i, y_i, z_i を設定することが必要である。この座標系をリンク座標系と呼び、 Σ_i で表現する。 Σ_i は、原点 O_i の位置と各直交座標軸の単位方向ベクトル n_i, o_i, a_i により表すことができる。リンク座標系の選び方として最も普及している Denavit - Hartenberg の方法を採用する。^{(6), (7), (8), (9)}

まず最初に、台座（ベース）を固定したリンク0とし、そこから手先に向けて1, 2, 3, ……と番号をつけ、リンク間をつなぐ関節に対しても、台座に近い側から先端に向けて、1, 2, 3, ……と番号をつける。関節 $i + 1$ の回転を z_i -軸とし、 z_{i-1} -軸と z_i -軸との共通法線が z_i -軸と交わる点を O_i とする。そして、この共通法線を z_i -軸の側へ延長した方向に x_i -軸をとり、 y_i -軸はリンク座標系 $O_i - x_i y_i z_i$ が右手系となるように定める。

Fig.1は第 $i - 1$ 番目のリンクに固定した座標系 Σ_{i-1} （すなわち、関節 i の座標系）と第 i 番目のリンクに固定した座標系 Σ_i （すなわち、関節 $i + 1$ の座標系）の関係を示したものである。各リンク座標系間の位置関係は、図に示した4つのリンクパラメータ θ_i , α_i , a_i , d_i により表される。用いる記号を要約すると、

- Σ_{i-1} : 関節 i における座標系 ($x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$)。
- θ_i : 関節 i における回転角 (右ねじの方向 (反時計方向) を正とする。)
- z_{i-1} : リンク $i - 1$ とリンク i との間の関節 i が、回転運動を行う軸。
- x_{i-1} : z_{i-2} -軸と z_{i-1} -軸間の共通法線に合せ、関節 $i - 1$ から関節 i の方向に向いた軸。
- y_{i-1} : z_{i-1} -軸と x_{i-1} -軸から右手座標系として定める軸。
- α_i : 正の z_{i-1} -軸から正の z_i -軸へ反時計方向 (正) のねじれ角度。
- d_i : 正の z_{i-1} -方向に沿って測った軸 x_{i-1} と x_i 間の距離。
- a_i : 正の x_{i-1} -方向 (即ち x_i -方向) に沿って測った軸 z_{i-1} と z_i 間の共通法線距離 (リンク長さ)。

である。

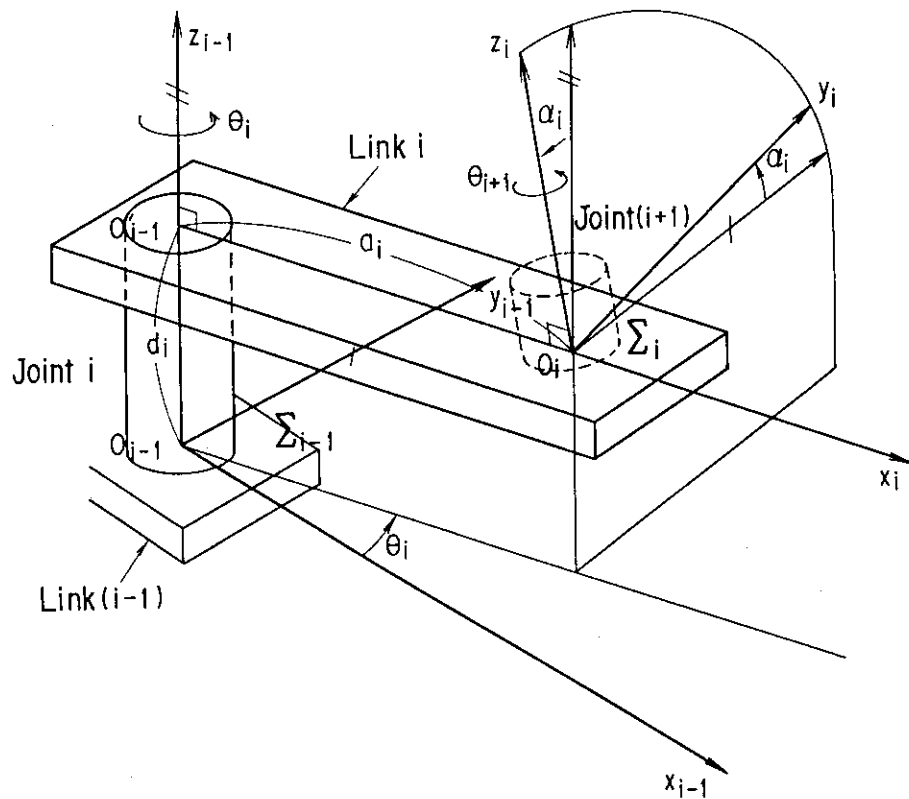


Fig.1 Kinematic Relation Between Link $i - 1$ and Link i

リンク座標系 Σ_i が定義されると、各座標系間の相対位置関係を解析することにより、マニピュレータの運動を解析できる。Fig. 1 を参考にして、座標系 Σ_{i-1} と Σ_i の間の位置関係は、次の4つの操作で確定する。

- (i) z_{i-1} -軸のまわりに θ_i だけ回転する。
- (ii) z_{i-1} -軸の正方向に沿って距離 d_i だけ並進する。
- (iii) 回転後の x_{i-1} -軸に沿って、正方向に長さ a_i の並進を行い、 x_i -軸を定める。
- (iv) x_i -軸のまわりにねじれ角 α_i だけ回転する。

即ち、このステップを定式化すると、 Σ_i から Σ_{i-1} への座標変換行列 A_i が次のようにして導き出せる。

$$\begin{aligned}
 A_i &= \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \text{Trans}(0, 0, d_i) \text{Trans}(a_i, 0, 0) \text{Rot}(x_i, \alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

n リンク・マニピュレータのリンク機構を行列 A_i を用いて組織的に解析する場合、各リンクパラメータ α_i, a_i, d_i を既知として与え、 n 個の 4×4 行列を右側から順次掛合わせると、基準座標系に対する手先の位置・姿勢関係が引出せる。つまり、行列積 $A_1 A_2 \cdots A_n$ の各要素が n 個の関節変数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ の関数として記述される。

2.2 6 リンク・マニピュレータへの適用

前述の関係式 (1) を Fig. 2 に示した 6 リンク・マニピュレータへ適用を試みる。

まず、各リンク上へ座標系を設定するに当たって、 A_i 行列の一般式が適用出来るためにマニピュレータの各関節角を零とした姿勢（零位置あるいは初期状態と呼ぶ。）を場合によっては多少変更する必要がある。マニピュレータの零位置と計算モデル上の基本姿勢の間に相違があっても同一の順問題として取扱が可能なのは、マニピュレータの根元に対する手先の機構学的位置関係が相対的な関係にあるからである。

以下、Fig. 2 に代わる Fig. 3 でもってその説明を行う。

(1) 第1関節

- (a) 台座に固定した座標系 Σ_0 は回転軸 z_0 を垂直下方に、また x_0 -軸を原点から図のように右方向正と定める。まず、 z_0 -軸のまわりに角度 θ_1 だけ回転する。
- (b) z_0 -方向へ d_1 の並進を行う。
- (c) x_0 -方向への並進を零とする。

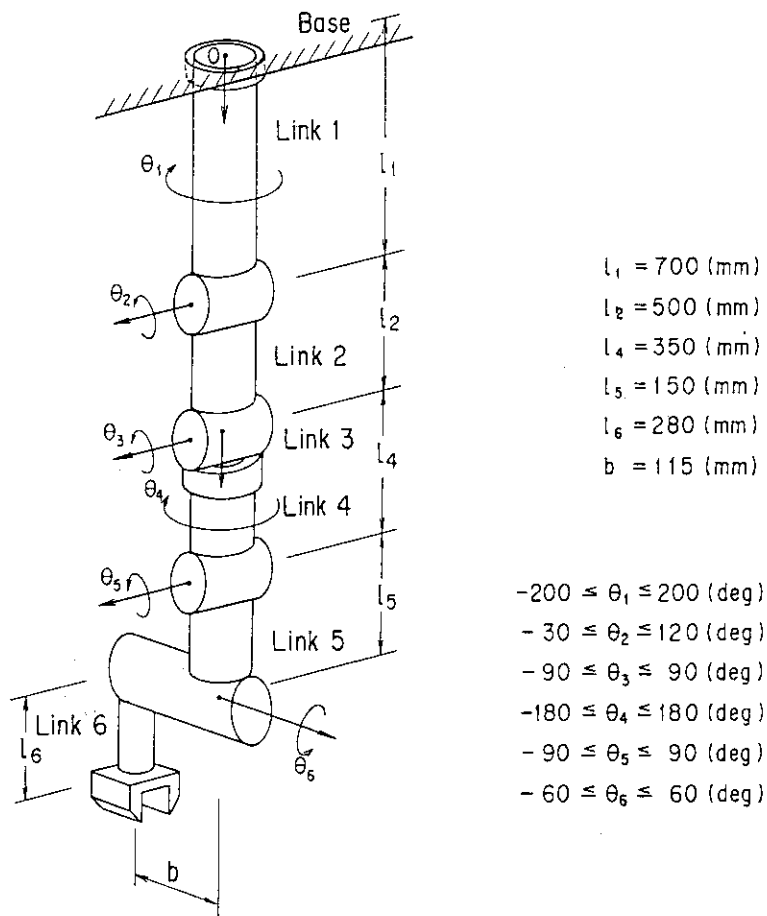


Fig.2 A Six-Link Manipulator Studied

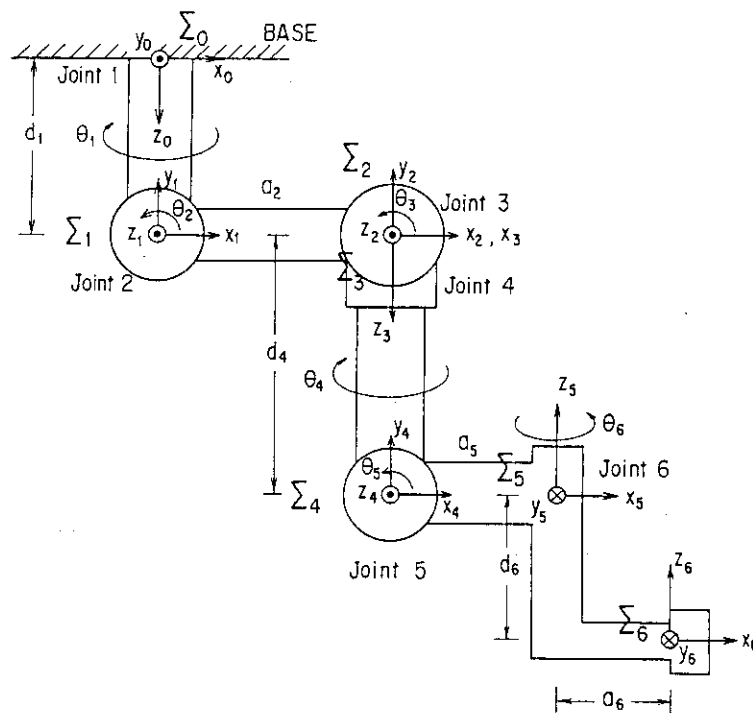


Fig.3 Definition of Link Co-ordinate Systems

(d) z_0 -軸を x_0 -軸のまわりに -90° 回転して (ねじれ角度 $\alpha_1 = -90^\circ$), 新しく z_1 -軸を定める。

(2) 第2関節

(a) x_1 -軸を x_0 -軸と同一方向に定め, また上の z_1 -軸の指定から Σ_1 が決定するが, しかし, この関節と次の第3関節との位置関係を調べると, Fig. 2 が示すように第3関節は第2関節から a_2 だけ真下にある。これは座標 y_1 -方向へ $-a_2$ の平行移動を意味するが, 前述の A_1 行列に対する関係式 (1) を適用する場合, 関節を z_0 -軸のまわりに回転した後 z -軸および x -軸に沿って並進させるステップ (ii), (iii) が含まれているため, Σ_1 の下方にリンク座標系を選ぶことはできない。第2関節にはオフセット機構がない (即ち, $d_2 = 0$) ため, x_1 -方向へリンクの連鎖を展開できる。そこで実在の第2リンク以下を図のように 90° 右まわりに回転して水平方向の x_1 -軸と一致させる。これを関節2につながるリンク2の基本姿勢とする。

(b) z_1 -軸を旋回軸として θ_2 だけ旋回する。(実際の零位置から換算するとそのとりうる値は, $\theta_2 + 90^\circ$ である。)

(c) x_1 -方向へ a_2 だけ並進する。(z_1 -方向への移動は零とする。)

(d) z_1 -軸から z_2 -軸へのねじれ角度 0° とした上で第3関節の座標系 $\Sigma_2 (x_2, y_2, z_2)$ を定める。

(3) 第3関節

(a) Σ_2 を定めた後, これに続く第4関節の回転軸は第3関節の x_2 -方向に一致することになる。

式 (1) の仮定では, 回転軸を z -方向と規定して関係式を導いているため, Fig. 3 のように 90° だけリンクを逆回転させ, z_3 -軸を垂直下方に, また, x_3 -軸と x_2 -軸が同一方向となる座標系 $\Sigma_3 (x_3, y_3, z_3)$ を選ぶ。

(b) 旋回軸 z_2 のまわりに θ_3 の旋回を与える。(実際の零位置から換算するとそのとりうる値は, $\theta_3 - 90^\circ$ である。)

(c) 第3, 第4関節は互いに隣接しているため x_2 -方向及び z_2 -方向への並進は零となる。

(d) z_3 -軸は, z_2 -軸を x_2 -軸のまわりに 90° 回転 (ねじれ角度 $\alpha_3 = 90^\circ$) したものである。

(4) 第4関節

(a) 軸 z_3 のまわりに θ_4 の回転を与える。

(b) この軸に沿って d_4 だけ並進する。

(c) x_3 -軸に沿っての並進は零とする。

(d) z_3 -軸を x_3 -軸のまわりに -90° 回転させ, z_4 -軸を得る。(ねじれ角度 $\alpha_4 = -90^\circ$)

(5) 第5関節

(a) 上の z_4 -軸および x_3 -軸と同一方向の x_4 -軸から, 右手座標系 $\Sigma_4 (x_4, y_4, z_4)$ が決定するが, 次の関節に対して第2関節の (a) で述べたと同様の理由により, リンク5を 90° 正方向に回転し, もとの x_4 -方向に a_5 だけ並進した位置が原点となる座標系 $\Sigma_5 (x_5, y_5, z_5)$ を設定する。図で右方向に x_5 -軸, 上方に z_5 -軸がくる。

(b) z_4 -軸を θ_5 だけ旋回する。(実際の零位置から換算するとそのとりうる値は, $\theta_5 + 90^\circ$ で

ある。)

(c) x_4 -方向に a_5 だけ並進し, また z_4 -軸に沿っての移動は零とする。

(d) z_4 -軸から z_5 -軸へのねじれ角度 α_5 は -90° である。

(6) 第6関節

(a) z_5 -軸を中心に角度 θ_6 だけ回転する。

(b) z_5 -軸の正方向にオフセット分 d_6 だけ並進し, 続いて x_5 -軸と平行に共通法線距離 a_6 だけ移動させて, 手先の座標系 $\Sigma_6 (x_6, y_6, z_6)$ を定める。

(c) z_5 -軸から z_6 -軸へのねじれ角度 α_6 は零とする。

以上の説明から, マニピュレータのリンク・パラメータは Table 1 に, また各 A_i 行列は以下のように与えられる。式の中に用いられる角度 θ の正弦と余弦を次のように略記する。

$$\sin \theta_i = s_i, \quad \cos \theta_i = c_i, \quad \sin(\theta_i + \theta_j) = s_{ij}, \quad \cos(\theta_i + \theta_j) = c_{ij}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & a_5 c_5 \\ s_5 & 0 & c_5 & a_5 s_5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 A_1 A_2 &= \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & -S_1 & a_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & C_1 & a_2 S_1 C_2 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & -a_2 S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_1 A_2 A_3 &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & d_1 - a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_1 A_2 A_3 A_4 &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4 & -C_1 S_{23} & -C_1 C_{23} S_4 - S_1 C_4 & d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4 & -S_1 S_{23} & -S_1 C_{23} S_4 + C_1 C_4 & d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2 \\ -S_{23} C_4 & -C_{23} & S_{23} S_4 & d_4 C_{23} + d_1 - a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5 & C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4 \\ S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5 & S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4 \\ -S_{23} C_4 C_5 - C_{23} S_5 & -S_{23} S_4 \\ 0 & 0 \\ -C_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_4 S_5 - C_1 S_{23} C_5 & a_5 (C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5) + d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2 \\ -S_1 C_{23} C_4 S_5 - C_1 S_4 S_5 - S_1 S_{23} C_5 & a_5 (S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5) + d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2 \\ S_{23} C_4 S_5 - C_{23} C_5 & -a_5 (S_{23} C_4 C_5 + C_{23} S_5) + d_4 C_{23} + d_1 - a_2 S_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A & B & D & X_1 \\ U & V & E & Y_1 \\ M & N & F & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ここに、各パラメータは、

$$A = C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5$$

$$B = C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4$$

$$U = S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5$$

$$V = S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4$$

$$M = -S_{23} C_4 C_5 - C_{23} S_5$$

$$N = -S_{23} S_4$$

$$D = UN - VM = -C_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_4 S_5 - C_1 S_{23} C_5 = a_x,$$

$$E = BM - AN = -S_1 C_{23} C_4 S_5 - C_1 S_4 S_5 - S_1 S_{23} C_5 = a_y,$$

$$F = AV - BU = S_{23} C_4 S_5 - C_{23} C_5 = a_z$$

$$X_1 = a_5 (C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5) + d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2$$

$$Y_1 = a_5 (S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5) + d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2$$

$$Z_1 = -a_5 (S_{23} C_4 C_5 + C_{23} S_5) + d_4 C_{23} + d_1 - a_2 S_2$$

となる。従って、台座に関するマニピュレータ先端の表示は、

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} A & B & D & X_1 \\ U & V & E & Y_1 \\ M & N & F & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

で与えられる。これが Fig.3 の座標系を基準にして導いたマニピュレータの台座と手先間の運動学方程式である。

参考までに Fig.2 で示したマニピュレータに別の任意の座標系 (Fig.4 参照) を与えた場合、その T_6 行列を求めると次のようになる。

$$T_6 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -c_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_4 c_{23}) + s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) \\ \sigma_{12} &= c_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) + s_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_4 c_{23}) \\ \sigma_{13} &= s_1 s_5 s_{23} - s_1 c_4 c_5 c_{23} - c_1 c_5 s_4 \\ \sigma_{14} &= p_x = -a_6 c_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_4 c_{23}) + a_6 s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) \\ &\quad - a_5 (c_5 s_1 s_{23} + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_4 c_{23}) - (a_3 + a_4) s_1 s_{23} \\ &\quad - a_2 s_1 s_2 - b (s_1 s_5 s_{23} - s_4 c_1 c_5 - s_1 c_4 c_5 c_{23}) \\ \sigma_{21} &= c_6 (c_1 c_5 s_{23} - s_1 s_4 s_5 + c_1 c_4 c_{23} s_5) + s_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) \\ \sigma_{22} &= c_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) - s_6 (c_1 c_5 s_{23} - s_1 s_4 s_5 + c_1 c_4 c_{23} s_5) \\ \sigma_{23} &= c_1 c_4 c_5 c_{23} - c_1 s_5 s_{23} - s_1 s_4 c_5 \\ \sigma_{24} &= p_y = a_6 c_6 (c_1 c_5 s_{23} - s_1 s_4 s_5 + c_1 c_4 c_{23} s_5) + a_6 s_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) \\ &\quad + a_5 (c_5 c_1 s_{23} - s_1 s_4 s_5 + c_1 c_4 c_{23} s_5) + (a_3 + a_4) c_1 s_{23} \\ &\quad + a_2 s_2 c_1 - b (c_1 c_4 c_5 c_{23} - c_1 s_5 s_{23} - s_1 s_4 c_5) \\ \sigma_{31} &= c_6 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23}) - s_4 s_{23} s_6 \\ \sigma_{32} &= -c_6 (s_4 s_{23}) + s_6 (c_4 s_5 s_{23} - c_5 c_{23}) \\ \sigma_{33} &= -(c_4 c_5 s_{23} + c_{23} s_5) \\ \sigma_{34} &= p_z = a_6 c_6 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23}) + a_6 (-s_4 s_{23}) s_6 + a_5 (c_5 c_{23} - s_5 s_{23} c_4) \\ &\quad + (a_3 + a_4) c_{23} + a_2 c_2 + a_1 + b (c_{23} s_5 + c_4 c_5 s_{23}) \end{aligned}$$

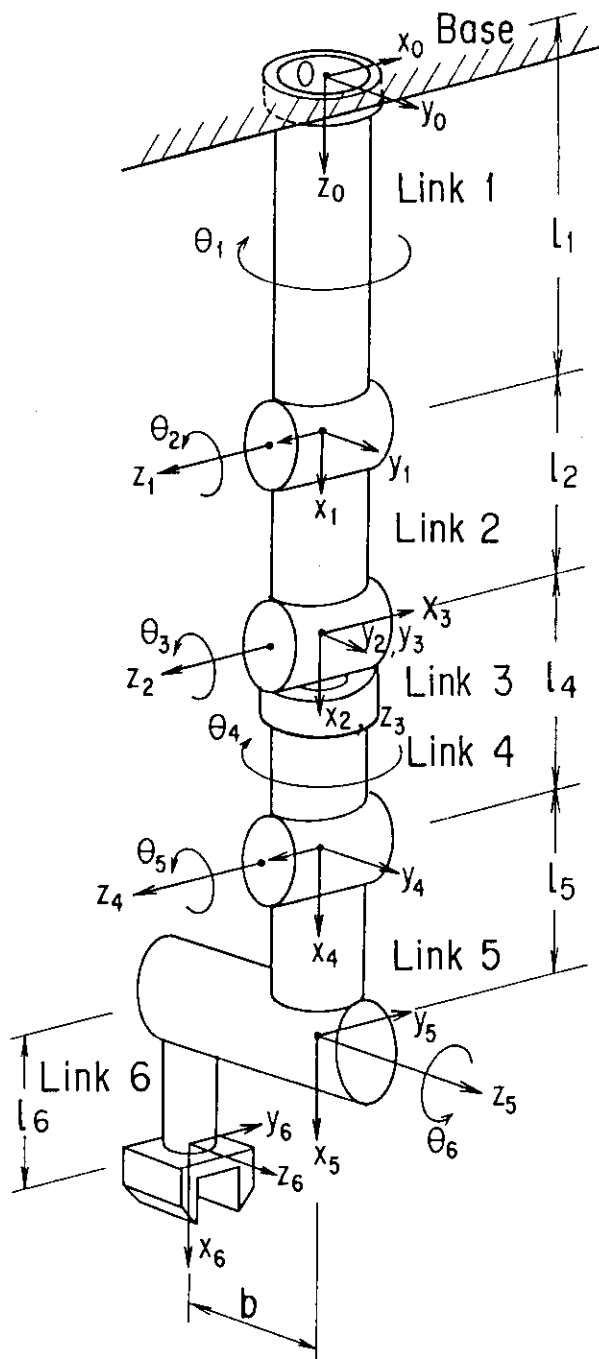


Fig.4 A Six-Link Manipulator with Arbitrary Link Co-ordinate Systems

Table 1 Link Parameters for a Six-Link Manipulator

関節	関節角	ねじれ角 α_i		リンク長さ a_i		x-軸間の距離 d_i	
1	θ_1	α_1	-90°	a_1	0(mm)	d_1	700(mm)
2	θ_2	α_2	0°	a_2	500(mm)	d_2	0(mm)
3	θ_3	α_3	90°	a_3	0(mm)	d_3	0(mm)
4	θ_4	α_4	-90°	a_4	0(mm)	d_4	350(mm)
5	θ_5	α_5	-90°	a_5	150(mm)	d_5	0(mm)
6	θ_6	α_6	0°	a_6	280(mm)	d_6	-115(mm)

3. 逆問題の解法

前節で扱ったマニピュレータの運動学方程式に対して、解析解を直接求めることは視察の結果断念せざるをえず、代わりに方程式系の特徴から従来の手法を用いて解を導くことが可能である。すなわち、関係式を一旦代数的処理で一変数の多項式に変換し、その実根から関節解を求める間接的なアプローチである。

まず、マニピュレータの手先位置・姿勢を次の行列で与え、解に致る過程の概略を述べる。

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(8)、(10)を等しく置き、次の位置パラメータに関する3式に注目することが、解法上のポイントである。

$$P_x = a_6(Ac_6 + Bs_6) + Dd_6 + Aa_5 + d_4c_1s_{23} + a_2c_1c_2 = a_6n_x + Aa_5 + d_6a_x + d_4c_1s_{23} + a_2c_1c_2 \quad (11)$$

$$P_y = a_6(Uc_6 + Vs_6) + Ed_6 + Ua_5 + d_4s_1s_{23} + a_2s_1c_2 = a_6n_y + Ua_5 + d_6a_y + d_4s_1s_{23} + a_2s_1c_2 \quad (12)$$

$$P_z = a_6(Mc_6 + Ns_6) + Fd_6 + Ma_5 + d_4c_{23} + d_1 - a_2s_2 = a_6n_z + Ma_5 + d_6a_z + d_4c_{23} + d_1 - a_2s_2 \quad (13)$$

ここで、式(11)× s_1 - 式(12)× c_1 を計算すると

$$\tan \theta_1 = \frac{P_y - a_6n_y - Ua_5 - d_6a_y}{P_x - a_6n_x - Aa_5 - d_6a_x} = \frac{YY - a_5n_yc_6 + a_5o_ys_6}{XX - a_5n_xc_6 + a_5o_xs_6}$$

Table 1 Link Parameters for a Six-Link Manipulator

関節	関節角	ねじれ角 α_i		リンク長さ a_i		x-軸間の距離 d_i	
1	θ_1	α_1	-90°	a_1	0 (mm)	d_1	700 (mm)
2	θ_2	α_2	0°	a_2	500 (mm)	d_2	0 (mm)
3	θ_3	α_3	90°	a_3	0 (mm)	d_3	0 (mm)
4	θ_4	α_4	-90°	a_4	0 (mm)	d_4	350 (mm)
5	θ_5	α_5	-90°	a_5	150 (mm)	d_5	0 (mm)
6	θ_6	α_6	0°	a_6	280 (mm)	d_6	-115 (mm)

3. 逆問題の解法

前節で扱ったマニピュレータの運動学方程式に対して、解析解を直接求めることは視察の結果断念せざるをえず、代わりに方程式系の特徴から従来の手法を用いて解を導くことが可能である。すなわち、関係式を一旦代数的処理で一変数の多項式に変換し、その実根から関節解を求める間接的なアプローチである。

まず、マニピュレータの手先位置・姿勢を次の行列で与え、解に致る過程の概略を述べる。

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(8)、(10)を等しく置き、次の位置パラメータに関する3式に注目することが、解法上のポイントである。

$$P_x = a_6(Ac_6 + Bs_6) + Dd_6 + Aa_5 + d_4c_1s_{23} + a_2c_1c_2 = a_6n_x + Aa_5 + d_6a_x + d_4c_1s_{23} + a_2c_1c_2 \quad (11)$$

$$P_y = a_6(Uc_6 + Vs_6) + Ed_6 + Ua_5 + d_4s_1s_{23} + a_2s_1c_2 = a_6n_y + Ua_5 + d_6a_y + d_4s_1s_{23} + a_2s_1c_2 \quad (12)$$

$$P_z = a_6(Mc_6 + Ns_6) + Fd_6 + Ma_5 + d_4c_{23} + d_1 - a_2s_2 = a_6n_z + Ma_5 + d_6a_z + d_4c_{23} + d_1 - a_2s_2 \quad (13)$$

ここで、式(11)× s_1 - 式(12)× c_1 を計算すると

$$\tan \theta_1 = \frac{P_y - a_6n_y - Ua_5 - d_6a_y}{P_x - a_6n_x - Aa_5 - d_6a_x} = \frac{YY - a_5n_yc_6 + a_5o_ys_6}{XX - a_5n_xc_6 + a_5o_xs_6}$$

(但し, $XX = P_x - a_6 n_x - d_6 a_x$, $YY = P_y - a_6 n_y - d_6 a_y$)

が得られる。

次に, $\tan(\theta_6/2) = t$ と置いて上の式を整理すると次のようになる。

$$\tan \theta_1 = \frac{Y_n + 2 a_5 o_y t + Y_p t^2}{X_n + 2 a_5 o_x t + X_p t^2} \quad (14)$$

ここに, $X_p = XX + a_5 n_x$, $X_n = XX - a_5 n_x$

$Y_p = YY + a_5 n_y$, $Y_n = YY - a_5 n_y$

また, 式(11)× c_1 + 式(12)× s_1 を実行すると, つぎの関係式を得る。

$$P_x c_1 + P_y s_1 = a_6 (n_x c_1 + n_y s_1) + a_5 (A c_1 + U s_1) + d_6 (a_x c_1 + a_y s_1) + d_4 s_{23} + a_2 c_2 \quad (15)$$

そこで, 式(13)と(15)に着目して

$$\psi = a_5 c_6 (n_z - o_z \tan \theta_6) - ZZ \quad (16)$$

$$\eta = P_x c_1 + P_y s_1 - a_6 (n_x c_1 + n_y s_1) - a_5 c_6 \{ n_x c_1 + n_y s_1 - (o_x c_1 + o_y s_1) \tan \theta_6 \} - d_6 (a_x c_1 + a_y s_1) \quad (17)$$

(但し, $ZZ = P_z - a_6 n_z - d_1 - d_6 a_z$)

と置くと, 両式は,

$$\left. \begin{aligned} \psi + d_4 c_{23} &= a_2 s_2 \\ \eta - d_4 s_{23} &= a_2 c_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

と簡略化される。さらに, 両辺を二乗して二式を加え合せると,

$$\psi^2 + \eta^2 - a = 2 d_4 (\eta s_{23} - \psi c_{23}) = 2 d_4 c_{23} (\eta \tan \theta_{23} - \psi) \quad (19)$$

(但し, $a = a_2^2 - d_4^2$)

が誘導される。

さて, 式(19)における未知変数 ψ , η , $\tan \theta_{23}$ 等を $t (= \tan(\theta_6/2))$ の有理関数で表現することがつぎの課題である。それらを整理しまとめると,

(i) ψ の表示

$$\psi = \frac{\sum_{i=1}^3 d o_i t^i}{(1+t^2)}$$

但し, $d o_1 = a_5 n_z - ZZ$, $d o_2 = -2 a_5 o_z$, $d o_3 = -(a_5 n_z + ZZ)$

(ii) η の表示

$$\eta = \frac{c_1 \{ \sum_{i=0}^4 b_i t^i + \sum_{i=0}^4 b_{i+5} t^i \}}{(1+t^2)(X_n + 2 a_5 o_x t + X_p t^2)} = \frac{c_1 \sum_{i=0}^4 k_i t^i}{(1+t^2)(X_n + 2 a_5 o_x t + X_p t^2)}$$

ここに,

$$\left\{ \begin{aligned} b_0 &= -a_5 (n_x X_n + n_y Y_n) \\ b_1 &= 2 a_5 \{ o_x X_n + o_y Y_n - a_5 (n_x o_x + n_y o_y) \} \\ b_2 &= a_5 \{ n_x X_n + n_y Y_n - (n_x X_p + n_y Y_p) + 4 a_5 (o_x^2 + o_y^2) \} \\ b_3 &= 2 a_5 \{ o_x X_p + o_y Y_p + a_5 (n_x o_x + n_y o_y) \} \\ b_4 &= a_5 \{ n_x X_p + n_y Y_p \} \\ b_5 &= XX \cdot X_n + YY \cdot Y_n \\ b_6 &= 2 a_5 (o_x \cdot XX + o_y \cdot YY) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} b_7 = (XX \cdot X_n + YY \cdot Y_n) + (XX \cdot X_p + YY \cdot Y_p) \\ b_8 = 2a_5(o_x \cdot XX + o_y \cdot YY) \\ b_9 = XX \cdot X_p + YY \cdot Y_p \\ k_i = b_i + b_{i+5} \quad (i = 0, \dots, 4) \end{cases}$$

(iii) c_i^2 の表示

$$c_i^2 = \frac{(X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2)^2}{\sum_{i=0}^4 f_i t^i}$$

但し,

$$\begin{cases} f_0 = X_n^2 + Y_n^2 \\ f_1 = 4a_5(o_x X_n + o_y Y_n) \\ f_2 = 2(X_n X_p + Y_n Y_p + 2a_5^2(o_x^2 + o_y^2)) \\ f_3 = 4a_5(o_x X_p + o_y Y_p) \\ f_4 = X_p^2 + Y_p^2 \end{cases}$$

(iv) $\psi^2 + \eta^2 - a$ の表示

$$\frac{\sum_{i=0}^8 j_i t^i}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i}$$

$$(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i = \sum_{i=0}^8 h_i t^i, \quad \sum_{i=0}^8 j_i t^i = \left(\sum_{i=0}^4 k_i t^i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 d o_i t^i\right)^2 \left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i\right) - a \sum_{i=0}^8 h_i t^i$$

(v) $\eta \tan \theta_{23}$ の表示

$$\eta \tan \theta_{23} = \frac{-(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^4 k_i t^i}{(1+t^2) \left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i\right)}$$

但し,

$$\begin{cases} l_0 = o_x X_n + o_y Y_n, \quad l_1 = 2a_5(o_x^2 + o_y^2) + 2(n_x X_n + n_y Y_n) \\ l_2 = o_x X_p + o_y Y_p - (o_x X_n + o_y Y_n) + 4a_5(n_x o_x + n_y o_y) \\ l_3 = -2a_5(o_x^2 + o_y^2) + 2(n_x X_p + n_y Y_p), \quad l_4 = -(o_x X_p + o_y Y_p) \end{cases}$$

(vi) c_{23}^2 の表示

$$c_{23}^2 = \frac{\left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i\right)^2}{\left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i\right)^2 + (o_z + 2n_z t - o_z t^2)^2 \left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i\right)} = \frac{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i}{\sum_{i=0}^8 L_i t^i}$$

これらを式(19)の二乗式のなかに代入して代数方程式を導くが、これ以後の導出過程は、文献(5)と同じようになるため省略する。

最終的に次のような代数方程式を得る。

$$F(t) = \sum_{i=0}^{24} R_i t^i = 0$$

この方程式の解法は Bairstow 法を利用する。解法の詳細についてはこれまでの文献に譲る。

以上のことから、各関節角は次のように定式化できる。

(1) θ_6 の解

$$\text{代数方程式の実根 } t \text{ から, } \theta_6 = 2 \tan^{-1} t$$

(2) θ_1 の解

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{Y_n + 2 a_5 o_y t + Y_p t^2}{X_n + 2 a_5 o_x t + X_p t^2} \right)$$

(3) θ_{23} の解

$$\theta_{23} = \tan^{-1} \left[\frac{\pm (\psi^2 + \eta^2 - a) / 2 d_4 \sqrt{\psi^2 + \eta^2 - a}}{\sqrt{1 - \{ (\psi^2 + \eta^2 - a) / 2 d_4 \sqrt{\psi^2 + \eta^2 - a} \}^2}} \right] + \tan^{-1} \left(\frac{\psi}{\eta} \right)$$

(4) θ_4 の解

$$c_4 = B s_1 - V c_1$$

$$s_4 = \frac{B c_1 + V s_1}{c_{23}} \quad (c_{23} \neq 0)$$

$$s_4 = \frac{-N}{s_{23}} \quad (c_{23} = 0)$$

従って,

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left(\frac{s_4}{c_4} \right)$$

(5) θ_5 の解

$$s_5 = -(A c_1 + U s_1) s_{23} - M c_{23}$$

$$c_5 = -(A s_1 - U c_1) / s_4 \quad (s_4 \neq 0)$$

$$= \{ (A c_1 + U s_1) - M s_{23} \} / c_4 \quad (s_4 = 0)$$

従って,

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left(\frac{s_5}{c_5} \right)$$

(6) θ_2 の解

$$s_2 = \{ a_5 M - Z Z + d_4 c_{23} \} / a_2$$

$$c_2 = \{ X X \cdot c_1 + Y Y \cdot s_1 + a_5 (A c_1 + U s_1) - d_4 s_{23} \} / a_2$$

より,

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{s_2}{c_2} \right)$$

(7) θ_3 の解

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2$$

4. 解 の 検 討

本節では、組織的な行列表示を使って導き出した運動学方程式がはたして根元・手先間の機構学的関係を正しく記述しているかを検討するために、その逆問題を解き、同一のマニピュレータに対して任意のリンク座標系から決定される運動学方程式の厳密解と比較を行った。

即ち、式(8)と(10)から作られた今回の運動学方程式を仮にKE1とし、またFig.4の任意の座標系による式(9)と(10)から作られた運動学方程式をKE2とすると、同一の手先運動軌道を模擬する各点での両者の関節解の値は、Table 2が示すように、完全に一致した。ちなみに与えた手先の軌道は、AB2点間を手先の方向を一定にした動作例である。即ち、KE2の基準座標系にはA(-0.10, 0.35, 1.63), B(0.10, 0.35, 1.63)(単位m)、(方向 $n_x=n_y=0, n_z=1$; $o_x=1, o_y=o_z=0$)が、またKE1の基準座標系にはA(0.35, 0.10, 1.63), B(0.35, -0.10, 1.63)、(方向 $n_x=n_y=0, n_z=1$; $o_y=-1, o_x=o_z=0$)が同一の軌道を実現する位置・姿勢データとなる。

Table 2の中で、左側の最初の6つの値がKE1の解に相当し、右側の6つがKE2のそれに対応する。6組の数字の上の段に書かれた“NO. … x … j”のうち、xは運動軌道の初期点と最終点の間の任意の位置を示し(出発点は0とする。), jはその位置における代数方程式から有意な実根が何番目に出てきたかを示すインデックスである。例えば、初期点における計算では、代数方程式の解として2個の異なる根が発見され、それに対して全部で4種類の関節解が引出されたことを示している。

このことから、運動学の解析では座標系をどのように設定してもよいという任意性は残るものの、ここで報告したルール、すなわち、

- (i) 各関節の回転軸をz-軸とする。
- (ii) x-軸を共通法線に合せ、関節iからi+1の方向にとる。
- (iii) 共通法線距離(リンクの長さ)を a_i 、関節iに沿って測った2本の法線間距離を d_i 、関節軸間のねじれ角度を α_i とする。

に従った方法をとるかぎり、隣接するリンク間の機構学的関係が最も一般的な式で表現でき、さらにこれを発展させれば、いかなる形態のマニピュレータに対する手先関係式の一般化も可能である。本報では、4つのパラメータを使った変換行列から運動学方程式を正しく導くことに限定しているので、逆問題の一般的アプローチには触れなかったが、この手法は、マニピュレータの一般的な運動学方程式に対する逆問題解決への糸口を与えるであろう。

最後に注意事項として、 A_i 行列を利用する場合、計算モデル上の基本姿勢がマニピュレータの零位置と必ずしも一致しない。したがって、関節角の補正操作を忘れてはならない。

5. お わ り に

統一的に記述した A_i 行列からマニピュレータの運動学方程式を誘導し、その記述の正しいことを検討した。 A_i 行列を指定する場合、リンクの基本姿勢となる幾何学的な連鎖状態およびその座標系の設定がポイントになる。

A_i 行列自身は決して一義的なものでなく、任意の関節とその隣接関係がここで示した同次座標変換行列 A_i に相当するもので表現されていればよいことであって、例えば、式(1)のステップでx-方向への並進をy-方向に代えたり、また、回転軸 z_i の一定方向に対して、その向きを変えたり、等々…、座標系の取り扱い方でその定式化も固定したものではないと考えられる。各リンクの座標系を全く任意に与えても運動学方程式を導くことは可能であったが、任意性のなかにも一定のルールを定めた A_i 行列を使って目的が達成できたことは、様々な表現形式を可能にするリンク機構の解析的研究の中でその基本的性質が把握できる観点からとくに都合がよい。さらに、 A_i 行列を軸としてマニピュレータ手先関係の統一した記述も可能となり、このことは逆問題を統一的に取り扱うための一つの指針となる。

謝 辞

本報を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に有益なコメントをいただき深謝いたします。

参 考 文 献

- (1) Sasaki, S. : "A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm", JAERI-M 86-018, Feb. 1986.
- (2) Sasaki, S. : "Computer Code ARMI for Solving the Inverse Kinematics of a Six-link Manipulator Arm", JAERI-M 86-059, Mar. 1986.
- (3) Sasaki, S. : "A Rigorous Algorithm for Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm", JAERI-M 86-108, July 1986.
- (4) Sasaki, S. : "Derivation of Manipulator Kinematics Based on a Vector Formulation", JAERI-M 86-122, July 1986.
- (5) Sasaki, S. and Nabeshima, K. : "Exact Solution of the Inverse Problem for a Six-Link Manipulator with a Mechanical Offset", JAERI-M 86-180. Dec. 1986.
- (6) Denavit, J. and Hartenberg, R.S. : "A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanism Based on Matrices", Trans. ASME, J. of Applied Mechanics, Jun. 1955, pp.215/221.
- (7) Paul, R.P. : "Robot Manipulators ; Mathematics, Programming and Control", The MIT Press, 1981.
- (8) 中野栄二 : "ロボット工学入門", オーム社, 1983.
- (9) 白井良明 : "ロボット", 共立出版, 1983.

謝 辞

本報を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に有益なコメントをいただき深謝いたします。

参 考 文 献

- (1) Sasaki, S. : "A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm", JAERI-M 86-018, Feb. 1986.
- (2) Sasaki, S. : "Computer Code ARMI for Solving the Inverse Kinematics of a Six-link Manipulator Arm", JAERI-M 86-059, Mar. 1986.
- (3) Sasaki, S. : "A Rigorous Algorithm for Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm", JAERI-M 86-108, July 1986.
- (4) Sasaki, S. : "Derivation of Manipulator Kinematics Based on a Vector Formulation", JAERI-M 86-122, July 1986.
- (5) Sasaki, S. and Nabeshima, K. : "Exact Solution of the Inverse Problem for a Six-Link Manipulator with a Mechanical Offset", JAERI-M 86-180. Dec. 1986.
- (6) Denavit, J. and Hartenberg, R.S. : "A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanism Based on Matrices", Trans. ASME, J. of Applied Mechanics, Jun. 1955, pp.215/221.
- (7) Paul, R.P. : "Robot Manipulators ; Mathematics, Programming and Control", The MIT Press, 1981.
- (8) 中野栄二 : "ロボット工学入門", オーム社, 1983.
- (9) 白井良明 : "ロボット", 共立出版, 1983.

Table 2 Comparisons of Articulated Solutions for Kinematic Equations KE1 and KE2

JOINTS SOLUTIONS OF KE1		JOINTS SOLUTIONS OF KE2			
UNIT DISTANCE	UNIT DISTANCE	UNIT DISTANCE	UNIT DISTANCE		
THETA (DEG)	THETA (DEG)	THETA (DEG)	THETA (DEG)		
1	2	3	4	5	6
NO. --- 0 --- 1	NO. --- 0 --- 1				
-176.8395	-13.5718	-70.9078	150.1452	-83.6413	29.7024
NO. --- 0 --- 1	NO. --- 0 --- 1				
3.1605	13.5718	70.9078	-29.8548	-83.6413	29.7024
NO. --- 0 --- 1	NO. --- 0 --- 1				
183.1605	-13.5718	-70.9078	150.1452	-83.6413	29.7024
NO. --- 0 --- 2	NO. --- 0 --- 2				
12.1508	72.5421	-72.7570	-12.1509	0.2101	-0.0452
NO. --- 1 --- 1	NO. --- 1 --- 1				
-177.1201	-13.5408	-71.1271	151.2998	-83.9945	28.5676
NO. --- 1 --- 1	NO. --- 1 --- 1				
2.8799	13.5408	71.1271	-28.7002	-83.9945	28.5676
NO. --- 1 --- 1	NO. --- 1 --- 1				
182.8799	-13.5408	-71.1271	151.2998	-83.9945	28.5676
NO. --- 1 --- 2	NO. --- 1 --- 2				
11.5845	72.5415	-72.9776	-11.5847	0.3625	-0.0755
NO. --- 2 --- 1	NO. --- 2 --- 1				
-177.3872	-13.5126	-71.4609	152.4878	-84.3366	27.3975
NO. --- 2 --- 1	NO. --- 2 --- 1				
2.6128	13.5126	71.4609	-27.5122	-84.3366	27.3975
NO. --- 2 --- 1	NO. --- 2 --- 1				
182.6128	-13.5126	-71.4609	152.4878	-84.3366	27.3975
NO. --- 2 --- 2	NO. --- 2 --- 2				
11.0145	72.5406	-73.0707	-11.0150	0.5203	-0.1013

1 2 3 4 5 6

NO. -- 3 --- 1						
-177.6406	-13.4872	-71.7287	153.7096	-84.6669	26.1918	
NO. -- 3 --- 1						
2.3594	13.4872	71.7287	-26.2904	-84.6669	26.1918	
NO. -- 3 --- 1						
182.3594	-13.4872	-71.7287	153.7096	-84.6669	26.1918	
NO. -- 3 --- 2						
10.4409	72.5394	-73.2160	-10.4416	0.6654	-0.1226	
NO. -- 4 --- 1						
-177.8800	-13.4643	-71.9896	154.9856	-84.9849	24.9502	
NO. -- 4 --- 1						
2.1200	13.4643	71.9896	-25.0344	-84.9849	24.9502	
NO. -- 4 --- 1						
182.1200	-13.4643	-71.9896	154.9856	-84.9849	24.9502	
NO. -- 4 --- 2						
9.8639	72.5381	-73.3536	-9.8649	0.8034	-0.1397	
NO. -- 5 --- 1						
-178.1052	-13.4438	-72.2431	156.2561	-85.2897	23.6726	
NO. -- 5 --- 1						
1.8948	13.4438	72.2431	-23.7439	-85.2897	23.6726	
NO. -- 5 --- 1						
181.8948	-13.4438	-72.2431	156.2561	-85.2897	23.6726	
NO. -- 5 --- 2						
9.2836	72.5366	-73.4833	-9.2848	0.9343	-0.1527	
NO. -- 6 --- 1						
-178.3160	-13.4255	-72.4881	157.5809	-85.5808	22.3590	
NO. -- 6 --- 1						
1.6839	13.4255	72.4881	-22.4190	-85.5808	22.3590	
NO. -- 3 --- 1						
-177.6406	-13.4872	-71.7287	153.7096	-84.6669	26.1918	
NO. -- 3 --- 1						
2.3594	13.4872	71.7287	-26.2904	-84.6669	26.1918	
NO. -- 3 --- 1						
182.3594	-13.4872	-71.7287	153.7096	-84.6669	26.1918	
NO. -- 3 --- 2						
10.4409	72.5394	-73.2160	-10.4416	0.6654	-0.1226	
NO. -- 4 --- 1						
-177.8800	-13.4643	-71.9896	154.9856	-84.9849	24.9502	
NO. -- 4 --- 1						
2.1200	13.4643	71.9896	-25.0344	-84.9849	24.9502	
NO. -- 4 --- 2						
182.1200	-13.4643	-71.9896	154.9856	-84.9849	24.9502	
NO. -- 4 --- 2						
9.8639	72.5381	-73.3536	-9.8649	0.8034	-0.1397	
NO. -- 5 --- 1						
-178.1052	-13.4438	-72.2431	156.2561	-85.2897	23.6726	
NO. -- 5 --- 1						
1.8948	13.4438	72.2431	-23.7439	-85.2897	23.6726	
NO. -- 5 --- 1						
181.8948	-13.4438	-72.2431	156.2561	-85.2897	23.6726	
NO. -- 5 --- 2						
9.2836	72.5366	-73.4833	-9.2848	0.9343	-0.1527	
NO. -- 6 --- 1						
-178.3160	-13.4255	-72.4881	157.5809	-85.5808	22.3590	
NO. -- 6 --- 1						
1.6839	13.4255	72.4881	-22.4190	-85.5808	22.3590	

	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
NO. --	6 --- 1							NO. --	6 --- 1				
181.6839	-13.4255	-72.4881	157.5809	-85.5808	22.3590			181.6839	-13.4255	-72.4881	157.5809	-85.5808	22.3590
NO. --	6 --- 2							NO. --	6 --- 2				
8.7001	72.5350	-73.6052	-8.7016	1.0579	-0.1619			8.7001	72.5350	-73.6052	-8.7016	1.0579	-0.1619
NO. --	7 --- 1							NO. --	7 --- 1				
-178.5125	-13.4094	-72.7238	158.9401	-85.2574	21.0096			-178.5125	-13.4094	-72.7238	158.9401	-85.2574	21.0096
NO. --	7 --- 1							NO. --	7 --- 1				
1.4875	13.4094	72.7238	-21.0598	-85.2574	21.0096			1.4875	13.4094	72.7238	-21.0598	-85.2574	21.0096
NO. --	7 --- 1							NO. --	7 --- 1				
181.4875	-13.4094	-72.7238	158.9401	-85.2574	21.0096			181.4875	-13.4094	-72.7238	158.9401	-85.2574	21.0096
NO. --	7 --- 2							NO. --	7 --- 2				
8.1136	72.5333	-73.7193	-8.1153	1.1741	-0.1674			8.1136	72.5333	-73.7193	-8.1153	1.1741	-0.1674
NO. --	8 --- 1							NO. --	8 --- 1				
-178.6946	-13.3952	-72.9492	160.3333	-86.1186	19.6250			-178.6946	-13.3952	-72.9492	160.3333	-86.1186	19.6250
NO. --	8 --- 1							NO. --	8 --- 1				
1.3054	13.3952	72.9492	-19.6667	-86.1186	19.6250			1.3054	13.3952	72.9492	-19.6667	-86.1186	19.6250
NO. --	8 --- 1							NO. --	8 --- 1				
181.3054	-13.3952	-72.9492	160.3333	-86.1186	19.6250			181.3054	-13.3952	-72.9492	160.3333	-86.1186	19.6250
NO. --	8 --- 2							NO. --	8 --- 2				
7.5243	72.5316	-73.8254	-7.5262	1.2826	-0.1694			7.5243	72.5316	-73.8254	-7.5262	1.2826	-0.1694
NO. --	9 --- 1							NO. --	9 --- 1				
-178.8625	-13.3827	-73.1633	161.7598	-86.3638	18.2059			-178.8625	-13.3827	-73.1633	161.7598	-86.3638	18.2059
NO. --	9 --- 1							NO. --	9 --- 1				
1.1375	13.3827	73.1633	-18.2402	-86.3638	18.2059			1.1375	13.3827	73.1633	-18.2402	-86.3638	18.2059
NO. --	9 --- 1							NO. --	9 --- 1				
181.1375	-13.3827	-73.1633	161.7598	-86.3638	18.2059			181.1375	-13.3827	-73.1633	161.7598	-86.3638	18.2059
NO. --	9 --- 2							NO. --	9 --- 2				
6.9326	72.5299	-73.9235	-6.9344	1.3334	-0.1682			6.9326	72.5299	-73.9235	-6.9344	1.3334	-0.1682

	1	2	3	4	5	6
NO. -- 10 --- 1	NO. -- 10 --- 1					
-179.0166	-13.3720	-73.3649	163.2187	-86.5921	16.7533	16.7533
NO. -- 10 --- 1	NO. -- 10 --- 1					
0.9834	13.3720	73.3649	-16.7813	-86.5921	16.7533	16.7533
NO. -- 10 --- 1	NO. -- 10 --- 1					
180.9834	-13.3720	-73.3649	163.2187	-86.5921	16.7533	16.7533
NO. -- 10 --- 2	NO. -- 10 --- 2					
6.3380	72.5282	-74.0336	-6.3401	1.4763	-0.1640	-0.1640
NO. -- 11 --- 1	NO. -- 11 --- 1					
-179.1572	-13.3627	-73.5531	164.7089	-86.8028	15.2684	15.2684
NO. -- 11 --- 1	NO. -- 11 --- 1					
0.8428	13.3627	73.5531	-15.2911	-86.8028	15.2684	15.2684
NO. -- 11 --- 1	NO. -- 11 --- 1					
180.8428	-13.3627	-73.5531	164.7089	-86.8028	15.2684	15.2684
NO. -- 11 --- 2	NO. -- 11 --- 2					
5.7414	72.5266	-74.0956	-5.7435	1.5612	-0.1570	-0.1570
NO. -- 12 --- 1	NO. -- 12 --- 1					
-179.2250	-13.3548	-73.7265	166.2288	-86.9951	13.7530	13.7530
NO. -- 12 --- 1	NO. -- 12 --- 1					
0.7150	13.3548	73.7265	-13.7712	-86.9951	13.7530	13.7530
NO. -- 12 --- 1	NO. -- 12 --- 1					
180.7150	-13.3548	-73.7265	166.2288	-86.9951	13.7530	13.7530
NO. -- 12 --- 2	NO. -- 12 --- 2					
5.1427	72.5250	-74.1696	-5.1448	1.6379	-0.1475	-0.1475
NO. -- 13 --- 1	NO. -- 13 --- 1					
-179.4007	-13.3481	-73.8842	167.7767	-87.1683	12.2088	12.2088
NO. -- 13 --- 1	NO. -- 13 --- 1					
0.5993	13.3481	73.8842	-12.2233	-87.1683	12.2088	12.2088
NO. -- 13 --- 1	NO. -- 13 --- 1					
180.5993	-13.3481	-73.8842	167.7767	-87.1683	12.2088	12.2088

1	2	3	4	5	6
NO. -- 13 --- 2					
4.5421	72.5236	-74.2354	-4.5442	1.7064	-0.1356
NO. -- 14 --- 1					
-179.5052	-13.3426	-74.0250	169.3503	-87.3216	10.6384
NO. -- 14 --- 1					
0.4948	13.3426	74.0250	-10.6497	-87.3216	10.6384
NO. -- 14 --- 1					
180.4948	-13.3426	-74.0250	169.3503	-87.3216	10.6384
NO. -- 14 --- 2					
3.9399	72.5223	-74.2930	-3.9418	1.7666	-0.1217
NO. -- 15 --- 1					
-179.5996	-13.3381	-74.1479	170.9470	-87.4544	9.0442
NO. -- 15 --- 1					
0.4004	13.3381	74.1479	-9.0530	-87.4544	9.0442
NO. -- 15 --- 1					
180.4004	-13.3381	-74.1479	170.9470	-87.4544	9.0442
NO. -- 15 --- 2					
3.3362	72.5211	-74.3425	-3.3379	1.8183	-0.1060
NO. -- 16 --- 1					
-179.6851	-13.3345	-74.2520	172.5640	-87.5660	7.4293
NO. -- 16 --- 1					
0.3149	13.3345	74.2520	-7.4360	-87.5660	7.4293
NO. -- 16 --- 1					
180.3149	-13.3345	-74.2520	172.5640	-87.5660	7.4293
NO. -- 16 --- 2					
2.7313	72.5201	-74.3538	-2.7328	1.8615	-0.0888
NO. -- 17 --- 1					
-179.7631	-13.3317	-74.3363	174.1982	-87.6560	5.7970

1	2	3	4	5	6
NO. -- 17 --- 1					
0.2369	13.3317	74.3363	-5.8018	-87.6560	5.7970
NO. -- 17 --- 1					
180.2369	-13.3317	-74.3363	174.1982	-87.6560	5.7970
NO. -- 17 --- 2					
2.1254	72.5193	-74.4168	-2.1266	1.8962	-0.0704
NO. -- 18 --- 1					
-179.8352	-13.3296	-74.4003	175.8459	-87.7239	4.1508
NO. -- 18 --- 1					
0.1648	13.3296	74.4003	-4.1541	-87.7239	4.1508
NO. -- 18 --- 1					
180.1648	-13.3296	-74.4003	175.8459	-87.7239	4.1508
NO. -- 18 --- 2					
1.5187	72.5187	-74.4416	-1.5196	1.9222	-0.0510
NO. -- 19 --- 1					
-179.9029	-13.3283	-74.4432	177.5035	-87.7694	2.4946
NO. -- 19 --- 1					
0.0971	13.3283	74.4432	-2.4965	-87.7694	2.4946
NO. -- 19 --- 1					
180.0971	-13.3283	-74.4432	177.5035	-87.7694	2.4946
NO. -- 19 --- 2					
0.9115	72.5193	-74.4581	-0.9120	1.9396	-0.0309
NO. -- 20 --- 1					
-179.9679	-13.3277	-74.4648	179.1672	-87.7922	0.8322
NO. -- 20 --- 1					
0.0321	13.3277	74.4648	-0.8328	-87.7922	0.8322
NO. -- 20 --- 1					
180.0321	-13.3277	-74.4648	179.1672	-87.7922	0.8322
NO. -- 20 --- 2					
0.3039	72.5181	-74.4664	-0.3040	1.9483	-0.0103

	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
NO. --	21	---	1					NO. --	21	---	1		
179.9679	-13.3277	-74.4648	-179.1672	-87.7922	-0.8322			179.9679	-13.3277	-74.4648	-179.1672	-87.7922	-0.8322
NO. --	21	---	1					NO. --	21	---	1		
-0.0321	13.3277	74.4648	0.8328	-87.7922	-0.8322			-0.0321	13.3277	74.4648	0.8328	-87.7922	-0.8322
NO. --	21	---	1					NO. --	21	---	1		
-180.0321	-13.3277	-74.4648	-179.1672	-87.7922	-0.8322			-180.0321	-13.3277	-74.4648	-179.1672	-87.7922	-0.8322
NO. --	21	---	2					NO. --	21	---	2		
-0.3039	72.5181	-74.4664	0.3040	1.9483	0.0103			-0.3039	72.5181	-74.4664	0.3040	1.9483	0.0103
NO. --	22	---	1					NO. --	22	---	1		
179.9029	-13.3283	-74.4432	-177.5035	-87.7694	-2.4946			179.9029	-13.3283	-74.4432	-177.5035	-87.7694	-2.4946
NO. --	22	---	1					NO. --	22	---	1		
-0.0971	13.3283	74.4432	2.4965	-87.7694	-2.4946			-0.0971	13.3283	74.4432	2.4965	-87.7694	-2.4946
NO. --	22	---	1					NO. --	22	---	1		
-180.0971	-13.3283	-74.4432	-177.5035	-87.7694	-2.4946			-180.0971	-13.3283	-74.4432	-177.5035	-87.7694	-2.4946
NO. --	22	---	2					NO. --	22	---	2		
-0.9115	72.5183	-74.4581	0.9120	1.9396	0.0309			-0.9115	72.5183	-74.4581	0.9120	1.9396	0.0309
NO. --	23	---	1					NO. --	23	---	1		
179.8352	-13.3296	-74.4003	-175.8459	-87.7239	-4.1508			179.8352	-13.3296	-74.4003	-175.8459	-87.7239	-4.1508
NO. --	23	---	1					NO. --	23	---	1		
-0.1648	13.3296	74.4003	4.1541	-87.7239	-4.1508			-0.1648	13.3296	74.4003	4.1541	-87.7239	-4.1508
NO. --	23	---	1					NO. --	23	---	1		
-180.1648	-13.3296	-74.4003	-175.8459	-87.7239	-4.1508			-180.1648	-13.3296	-74.4003	-175.8459	-87.7239	-4.1508
NO. --	23	---	2					NO. --	23	---	2		
-1.5187	72.5197	-74.4416	1.5196	1.5222	0.0510			-1.5187	72.5197	-74.4416	1.5196	1.5222	0.0510
NO. --	24	---	1					NO. --	24	---	1		
179.7631	-13.3317	-74.3363	-174.1982	-87.6560	-5.7970			179.7631	-13.3317	-74.3363	-174.1982	-87.6560	-5.7970
NO. --	24	---	1					NO. --	24	---	1		
-0.2369	13.3317	74.3363	5.8013	-87.6560	-5.7970			-0.2369	13.3317	74.3363	5.8013	-87.6560	-5.7970

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
NO. -- 24 --- 1						NO. -- 24 --- 1					
-180.2369	-13.3317	-74.3363	-174.1982	-87.6560	-5.7970	-180.2369	-13.3317	-74.3363	-174.1982	-87.6560	-5.7970
NO. -- 24 --- 2						NO. -- 24 --- 2					
-2.1254	72.5193	-74.4168	2.1266	1.8962	0.0704	-2.1254	72.5193	-74.4168	2.1266	1.8962	0.0704
NO. -- 25 --- 1						NO. -- 25 --- 1					
179.6851	-13.3345	-74.2520	-172.5640	-87.5660	-7.4293	179.6851	-13.3345	-74.2520	-172.5640	-87.5660	-7.4293
NO. -- 25 --- 1						NO. -- 25 --- 1					
-0.3149	13.3345	74.2520	7.4360	-87.5660	-7.4293	-0.3149	13.3345	74.2520	7.4360	-87.5660	-7.4293
NO. -- 25 --- 1						NO. -- 25 --- 1					
-180.3149	-13.3345	-74.2520	-172.5640	-87.5660	-7.4293	-180.3149	-13.3345	-74.2520	-172.5640	-87.5660	-7.4293
NO. -- 25 --- 2						NO. -- 25 --- 2					
-2.7313	72.5201	-74.3838	2.7328	1.8615	0.0888	-2.7313	72.5201	-74.3838	2.7328	1.8615	0.0888
NO. -- 26 --- 1						NO. -- 26 --- 1					
179.5996	-13.3381	-74.1479	-170.9470	-87.4544	-9.0442	179.5996	-13.3381	-74.1479	-170.9470	-87.4544	-9.0442
NO. -- 26 --- 1						NO. -- 26 --- 1					
-0.4004	13.3381	74.1479	9.0530	-87.4544	-9.0442	-0.4004	13.3381	74.1479	9.0530	-87.4544	-9.0442
NO. -- 26 --- 1						NO. -- 26 --- 1					
-180.4004	-13.3381	-74.1479	-170.9470	-87.4544	-9.0442	-180.4004	-13.3381	-74.1479	-170.9470	-87.4544	-9.0442
NO. -- 26 --- 2						NO. -- 26 --- 2					
-3.3362	72.5211	-74.3425	3.3379	1.8183	0.1060	-3.3362	72.5211	-74.3425	3.3379	1.8183	0.1060
NO. -- 27 --- 1						NO. -- 27 --- 1					
179.5052	-13.3426	-74.0250	-169.3503	-87.3216	-10.6384	179.5052	-13.3426	-74.0250	-169.3503	-87.3216	-10.6384
NO. -- 27 --- 1						NO. -- 27 --- 1					
-0.4948	13.3426	74.0250	10.6497	-87.3216	-10.6384	-0.4948	13.3426	74.0250	10.6497	-87.3216	-10.6384
NO. -- 27 --- 1						NO. -- 27 --- 1					
-180.4948	-13.3426	-74.0250	-169.3503	-87.3216	-10.6384	-180.4948	-13.3426	-74.0250	-169.3503	-87.3216	-10.6384
NO. -- 27 --- 2						NO. -- 27 --- 2					
-3.9399	72.5223	-74.2930	3.9418	1.7666	0.1217	-3.9399	72.5223	-74.2930	3.9418	1.7666	0.1217
NO. -- 28 --- 1						NO. -- 28 --- 1					
179.4007	-13.3481	-73.9842	-167.7767	-87.1683	-12.2083	179.4007	-13.3481	-73.9842	-167.7767	-87.1683	-12.2083

1 2 3 4 5 6

NO. -- 28 --- 1						
-0.5993	13.3481	73.8842	12.2233	-87.1683	-12.2088	
NO. -- 28 --- 1						
-180.5993	-13.3481	-73.8842	-167.7767	-87.1683	-12.2088	
NO. -- 28 --- 2						
-4.5421	72.5236	-74.2354	4.5442	1.7064	0.1356	
NO. -- 29 --- 1						
179.2850	-13.3548	-73.7265	-166.2288	-86.9951	-13.7530	
NO. -- 29 --- 1						
-0.7150	13.3548	73.7265	13.7712	-86.9951	-13.7530	
NO. -- 29 --- 1						
-180.7150	-13.3548	-73.7265	-166.2288	-86.9951	-13.7530	
NO. -- 29 --- 2						
-5.1427	72.5250	-74.1696	5.1448	1.6379	0.1475	
NO. -- 30 --- 1						
179.1572	-13.3627	-73.5531	-164.7089	-86.8028	-15.2684	
NO. -- 30 --- 1						
-0.8428	13.3627	73.5531	15.2911	-86.8028	-15.2684	
NO. -- 30 --- 1						
-180.8428	-13.3627	-73.5531	-164.7089	-86.8028	-15.2684	
NO. -- 30 --- 2						
-5.7414	72.5266	-74.0956	5.7435	1.5612	0.1570	
NO. -- 31 --- 1						
179.0166	-13.3720	-73.3649	-163.2157	-86.5921	-16.7533	
NO. -- 31 --- 1						
-0.9834	13.3720	73.3649	16.7813	-86.5921	-16.7533	
NO. -- 31 --- 1						
-180.9834	-13.3720	-73.3649	-163.2157	-86.5921	-16.7533	

	1	2	3	4	5	6
NO. -- 31 --- 2	NO. -- 31 --- 2					
-6.3380 72.5282	-6.3380 72.5282	-74.0136	6.3401	1.4763	0.1640	0.1640
NO. -- 32 --- 1	NO. -- 32 --- 1					
178.8625 -11.3827	178.8625 -11.3827	-72.1633	-161.7598	-86.3638	-18.2059	-18.2059
NO. -- 32 --- 1	NO. -- 32 --- 1					
-1.1375 11.3827	-1.1375 11.3827	73.1633	18.2402	-86.3638	-18.2059	-18.2059
NO. -- 32 --- 1	NO. -- 32 --- 1					
-181.1375 -11.3827	-181.1375 -11.3827	-73.1633	-161.7598	-86.3638	-18.2059	-18.2059
NO. -- 32 --- 2	NO. -- 32 --- 2					
-6.9324 72.5299	-6.9324 72.5299	-73.9235	6.9344	1.3834	0.1682	0.1682
NO. -- 33 --- 1	NO. -- 33 --- 1					
178.6946 -11.3952	178.6946 -11.3952	-72.9492	-160.3333	-86.1186	-19.6250	-19.6250
NO. -- 33 --- 1	NO. -- 33 --- 1					
-1.3054 11.3952	-1.3054 11.3952	72.9492	19.6667	-86.1186	-19.6250	-19.6250
NO. -- 33 --- 1	NO. -- 33 --- 1					
-181.3054 -11.3952	-181.3054 -11.3952	-72.9492	-160.3333	-86.1186	-19.6250	-19.6250
NO. -- 33 --- 2	NO. -- 33 --- 2					
-7.5243 72.5316	-7.5243 72.5316	-73.8254	7.5262	1.2826	0.1694	0.1694
NO. -- 34 --- 1	NO. -- 34 --- 1					
178.5125 -11.4094	178.5125 -11.4094	-72.7238	-158.9401	-85.8574	-21.0096	-21.0096
NO. -- 34 --- 1	NO. -- 34 --- 1					
-1.4875 11.4094	-1.4875 11.4094	72.7238	21.0598	-85.8574	-21.0096	-21.0096
NO. -- 34 --- 1	NO. -- 34 --- 1					
-181.4875 -11.4094	-181.4875 -11.4094	-72.7238	-158.9401	-85.8574	-21.0096	-21.0096
NO. -- 34 --- 2	NO. -- 34 --- 2					
-8.1136 72.5333	-8.1136 72.5333	-73.7193	8.1153	1.1741	0.1674	0.1674
NO. -- 35 --- 1	NO. -- 35 --- 1					
178.3160 -11.4255	178.3160 -11.4255	-72.4881	-157.5809	-85.5808	-22.3590	-22.3590
NO. -- 35 --- 1	NO. -- 35 --- 1					
-1.6539 11.4255	-1.6539 11.4255	72.4881	22.4190	-85.5808	-22.3590	-22.3590

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
NO. -- 35 --- 1						NO. -- 35 --- 1					
-181.6839	-13.4255	-72.4881	-157.5809	-85.5808	-22.3590	-181.6839	-13.4255	-72.4881	-157.5809	-85.5808	-22.3590
NO. -- 35 --- 2						NO. -- 35 --- 2					
-8.7001	72.5350	-73.6052	8.7016	1.0579	0.1619	-8.7001	72.5350	-73.6052	8.7016	1.0579	0.1619
NO. -- 36 --- 1						NO. -- 36 --- 1					
178.1052	-13.4438	-72.2431	-156.2561	-85.2897	-23.6726	178.1052	-13.4438	-72.2431	-156.2561	-85.2897	-23.6726
NO. -- 36 --- 1						NO. -- 36 --- 1					
-1.8948	13.4438	72.2431	23.7439	-85.2897	-23.6726	-1.8948	13.4438	72.2431	23.7439	-85.2897	-23.6726
NO. -- 36 --- 1						NO. -- 36 --- 1					
-181.8948	-13.4438	-72.2431	-156.2561	-85.2897	-23.6726	-181.8948	-13.4438	-72.2431	-156.2561	-85.2897	-23.6726
NO. -- 36 --- 2						NO. -- 36 --- 2					
-9.2836	72.5366	-73.4833	9.2848	0.9343	0.1527	-9.2836	72.5366	-73.4833	9.2848	0.9343	0.1527
NO. -- 37 --- 1						NO. -- 37 --- 1					
177.8800	-13.4643	-71.9896	-154.9656	-84.9849	-24.9502	177.8800	-13.4643	-71.9896	-154.9656	-84.9849	-24.9502
NO. -- 37 --- 1						NO. -- 37 --- 1					
-2.1200	13.4643	71.9896	25.0344	-84.9849	-24.9502	-2.1200	13.4643	71.9896	25.0344	-84.9849	-24.9502
NO. -- 37 --- 1						NO. -- 37 --- 1					
-182.1200	-13.4643	-71.9896	-154.9656	-84.9849	-24.9502	-182.1200	-13.4643	-71.9896	-154.9656	-84.9849	-24.9502
NO. -- 37 --- 2						NO. -- 37 --- 2					
-9.8639	72.5381	-73.3536	9.8649	0.8034	0.1397	-9.8639	72.5381	-73.3536	9.8649	0.8034	0.1397
NO. -- 38 --- 1						NO. -- 38 --- 1					
177.6406	-13.4872	-71.7237	-153.7096	-84.6669	-26.1918	177.6406	-13.4872	-71.7237	-153.7096	-84.6669	-26.1918
NO. -- 38 --- 1						NO. -- 38 --- 1					
-2.3594	13.4872	71.7237	26.2904	-84.6669	-26.1918	-2.3594	13.4872	71.7237	26.2904	-84.6669	-26.1918
NO. -- 38 --- 1						NO. -- 38 --- 1					
-182.3594	-13.4872	-71.7237	-153.7096	-84.6669	-26.1918	-182.3594	-13.4872	-71.7237	-153.7096	-84.6669	-26.1918
NO. -- 38 --- 2						NO. -- 38 --- 2					
-10.4409	72.5394	-73.2160	10.4416	0.6654	0.1226	-10.4409	72.5394	-73.2160	10.4416	0.6654	0.1226

1	2	3	4	5	6
NO. -- 39 --- 1					
177.3872	-13.5126	-71.4609	-152.4878	-84.3366	-27.3975
NO. -- 39 --- 1					
-2.6128	13.5126	71.4609	27.5122	-84.3366	-27.3975
NO. -- 39 --- 1					
-182.6128	-13.5126	-71.4609	-152.4878	-84.3366	-27.3975
NO. -- 39 --- 2					
-11.0145	72.5406	-73.0707	11.0150	0.5203	0.1013
NO. -- 40 --- 1					
177.1201	-13.5408	-71.1871	-151.2998	-83.9945	-28.5676
NO. -- 40 --- 1					
-2.8799	13.5408	71.1871	28.7002	-83.9945	-28.5676
NO. -- 40 --- 1					
-182.8799	-13.5408	-71.1871	-151.2998	-83.9945	-28.5676
NO. -- 40 --- 2					
-11.5845	72.5415	-72.9176	11.5847	0.3685	0.0755
NO. -- 41 --- 1					
176.8395	-13.5718	-70.9078	-150.1452	-83.6413	-29.7024
NO. -- 41 --- 1					
-3.1605	13.5718	70.9078	29.2548	-83.6413	-29.7024
NO. -- 41 --- 1					
-183.1605	-13.5718	-70.9078	-150.1452	-83.6413	-29.7024
NO. -- 41 --- 2					
-12.1508	72.5421	-72.7570	12.1509	0.2101	0.0452