

JAERI - M  
87-125

マニピュレータ運動学に対する新しい表現方法

1987年8月

佐々木 忍

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division  
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-  
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1987

編集兼発行 日本原子力研究所  
印刷 株高野高速印刷

マニピュレータ運動学に対する新しい表現方法

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1987年7月28日受理)

マニピュレータのリンク機構解析に同次座標変換法を適用する代りにベクトル法を導入した。各ジョイントの位置と姿勢を求め、手先方向と回転演算子の反転操作から、通常のリックの運動学方程式に対する異なった表現式を引出した。さらに、得られた式の内、第6番目の関節角 $\theta_6$ による方向余弦の記述が、逆問題の解法における代数方程式の導出過程で用いたパラメータの表現式と完全に対応することを発見し、パラメータのもつ意味付けをも明確にした。

今回の手法は、リンク間の有益な関係式を引出す上で役立つ。

A New Representation for Kinematics of Manipulator

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering  
Tokai Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received July 28, 1987)

In place of the homogeneous co-ordinates transformation method, a vector formulation was introduced to the analysis of manipulator linkage mechanism. After calculating the location and orientation of individual joints, a combined operation of both the orientation of the finger-tip and the inversion of rotation operators led to kinematic descriptions different from those derived in the ordinary way.

In addition, among them, direction cosines represented by the sixth joint angle  $\theta_6$  were found to completely correspond to the expression of several parameters defined previously in the course of derivation of an algebraic equation in solving the inverse kinematics, and thereby, implication of each parameter became clear.

The present approach will help to derive a variety of relationships between links.

Keywords: Co-ordinate Transformation Matrix, Vector Formulation, Rotation, Operators, Kinematics, Analysis of Linkage Mechanism

## 目 次

|                        |    |
|------------------------|----|
| 1. はじめに .....          | 1  |
| 2. 関係式の誘導 .....        | 2  |
| 2.1 位置ベクトルと姿勢の計算 ..... | 2  |
| 2.2 リンク関係式の導出 .....    | 12 |
| 3. おわりに .....          | 18 |
| 謝 辞 .....              | 18 |
| 参考文献 .....             | 18 |
| 付 録 .....              | 19 |

## Contents

|   |    |
|---|----|
| 1. Introduction .....   | 1  |
| 2. Formulation of Kinematics .....                                    | 2  |
| 2.1 Computation of Position and Orientation Vector .....              | 2  |
| 2.2 Derivation of Various Kinematic Relationships Between Links ..... | 12 |
| 3. Concluding Remarks .....   | 18 |
| Acknowledgement .....   | 18 |
| References .....  | 18 |
| Appendices .....  | 19 |

## 1. はじめに

今日、マニピュレータのリンク機構を運動学的立場から解析的に究明する方法として、位置と姿勢を一括した表現形式で取り扱える  $4 \times 4$  同次変換行列がもっとも一般的でかつ便利な手法とされている<sup>(1), (2)</sup>。つまり、それは3次元空間における位置を  $4 \times 1$  行列で記述し、また姿勢を  $4 \times 1$  行列で構成される3つの単位ベクトルで形式的に表現したもので、リンクの個数が増大しても機械的な行列計算を行えば運動学方程式を得る目的は十分に達成される利点をもつ。

しかし、この方法はその便利さと相反して、得られた結果に対して直感的理解を妨げる面をもつ。それは、この同次変換法が予め各リンクに任意な座標系を設定する必要があるため手先の位置・姿勢を実現するための各リンクの座標系が独立に動く結果、空間的対応関係の把握を困難にさせていることが要因と考えられる。この場合、手先の移動に対して座標系を動かすよりも、固定した座標系のみで手先を動かす考え方のほうが、空間リンク機構の解析者にとってはるかに理解しやすい。

そこで、文献(3)では、固定した座標系内を自由に動くことが可能な3次元ベクトルおよび回転演算子と呼んだ3行3列のマトリクスを用いてリンク間の関係式を導き出す方法を提案した。手先の位置・姿勢を算出することに重点をおいた同次座標変換行列の機械的な乗法演算に比べて、このベクトル法はジョイントの動きを各段階で明らかにするとともに演算を簡単化する上で有益な手段と言える。

本報では、既報の回転演算子を用いて運動学方程式を導いた経緯を再度振り返り、リンク機構に対する運動学方程式を異なる見地から回転演算子と手先方向余弦を使って表現する方法を考え、具体的にそれらを誘導することを目的とする。まず、回転軸が肩部で一点に集中していたり、また手首で一点に集中するなどの関節構造の特徴に従って回転演算子（以下では変換行列とも呼ぶ。）を各段階で1つの統合した形で表現しておき、手先のところまでに存在するそれらを掛合わせる操作（丁度以前用いたA行列の積に類似した演算）によって各ジョイントの位置と姿勢を定める。その後、この回転演算子の反転操作と手先の方向余弦から新たな関係式を導き出す。こうした一連の操作を導入することの意義は、ベース（すなわち、運動学方程式を導き出すうえでの基準座標系とその位置）から手先までの各関節計算の子細が段階的に把握できるうえに、さらに手先・ベース間の関係として順方向に計算した  $4 \times 4$  のコンポーネントからなる12個の運動学の関係式に比べ、より多彩な表現が得られる点にある。とりわけ、後述する関節角の正弦・余弦を含む式と手先方向余弦に関する式を両者組み合わせ生成される表現には、3つのグループにわたった詳しい説明を与え、内2つのグループから運動学方程式の新しい記述を得た。ここに示した操作は、従来の定着化したA行列の計算から導き出すことが困難な表現や気がつかなかったリンク関係の表現、またかなりの工夫を必要とする表現を引出すうえで役に立つ。そのことは、場合によって逆問題の解決への糸口を与えることも十分に考えられる。

## 2. 関係式の誘導

### 2.1 位置ベクトルと姿勢の計算

Fig. 1a は本研究の対象となるマニピュレータの関節構造を示したものである。一方, Fig. 1b は今回の解析に適するように基準となる座標系  $\Sigma_0$  を Fig. 1a の肩の部分 A に設定して第 1, 第 2 関節をこの部分にまとめて表現したモデルである。第 4, 第 5 軸もまとめて 5 軸の位置に吸収させた。したがって, Fig. 1b の関節の配置は, 肩部の原点 0 から順に, A, B, C, D となる。各関節の回転方向については, マニピュレータの各関節角を零とした状態 (初期状態と呼ぶ。) を基準にして右ネジの方向を正と定め, これは基準座標系の各軸に沿った単位ベクトル  $i, j, k$  の正方向に等しいものとする。

ここで, 以下の解析で登場する簡略記号の簡単な説明を与える。

$$c_i \triangleq \cos \theta_i, s_i \triangleq \sin \theta_i, c_{ij} \triangleq \cos (\theta_i + \theta_j), s_{ij} \triangleq \sin (\theta_i + \theta_j)$$

各直交座標軸のまわりの回転演算子として次の 3 つを使用する。

$$\text{Rot}(x, \theta) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(x軸のまわりの回転)} \\ \end{array} \quad (2.1.1)$$

$$\text{Rot}(y, \theta) \triangleq \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(y軸のまわりの回転)} \\ \end{array} \quad (2.1.2)$$

$$\text{Rot}(z, \theta) \triangleq \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(z軸のまわりの回転)} \\ \end{array} \quad (2.1.3)$$

$P_1, P_2, P_3, P_4$  : それぞれ肩部 0 を原点として手先に向けてリンク上の A, B, C, D における位置ベクトル。(Fig. 2a 参照)

$T_1, T_2, T_3, T_4$  : それぞれ原点 0, A, B, C における座標変換行列。

$${}^1T_j = \prod_{i=1}^j T_i \quad (j=2, 3, 4) \quad (2.1.4)$$

$l_1, l_2, l_3, l_4$  : ベクトル  $\vec{0A}, \vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$ 。(Fig. 2a 参照)

$$|l_1| = a_2, |l_2| = a_{34}, |l_3| = a_5, |l_4| = a_6 \quad (2.1.5)$$

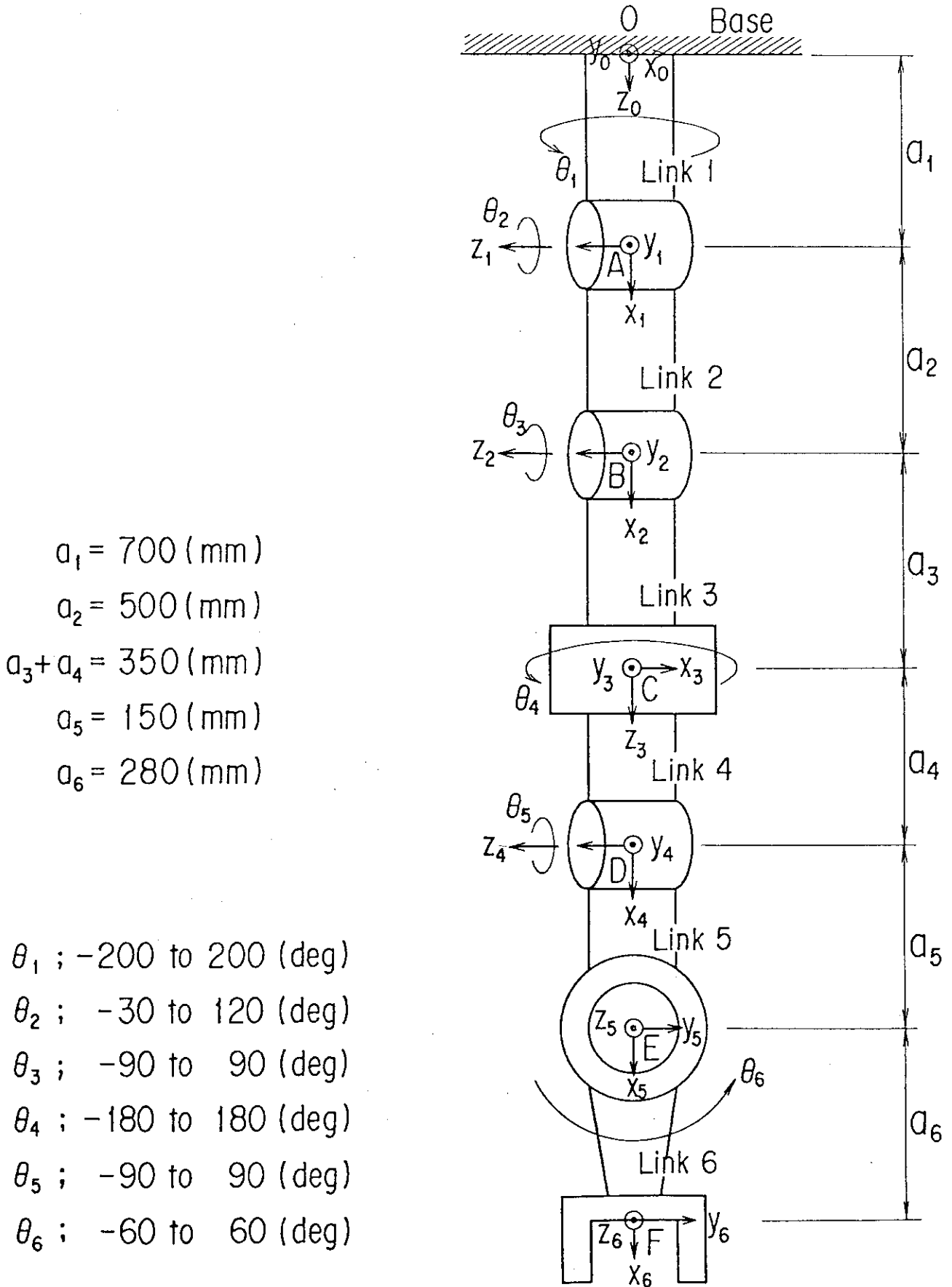


Fig.1a Schematics of a six-link manipulator



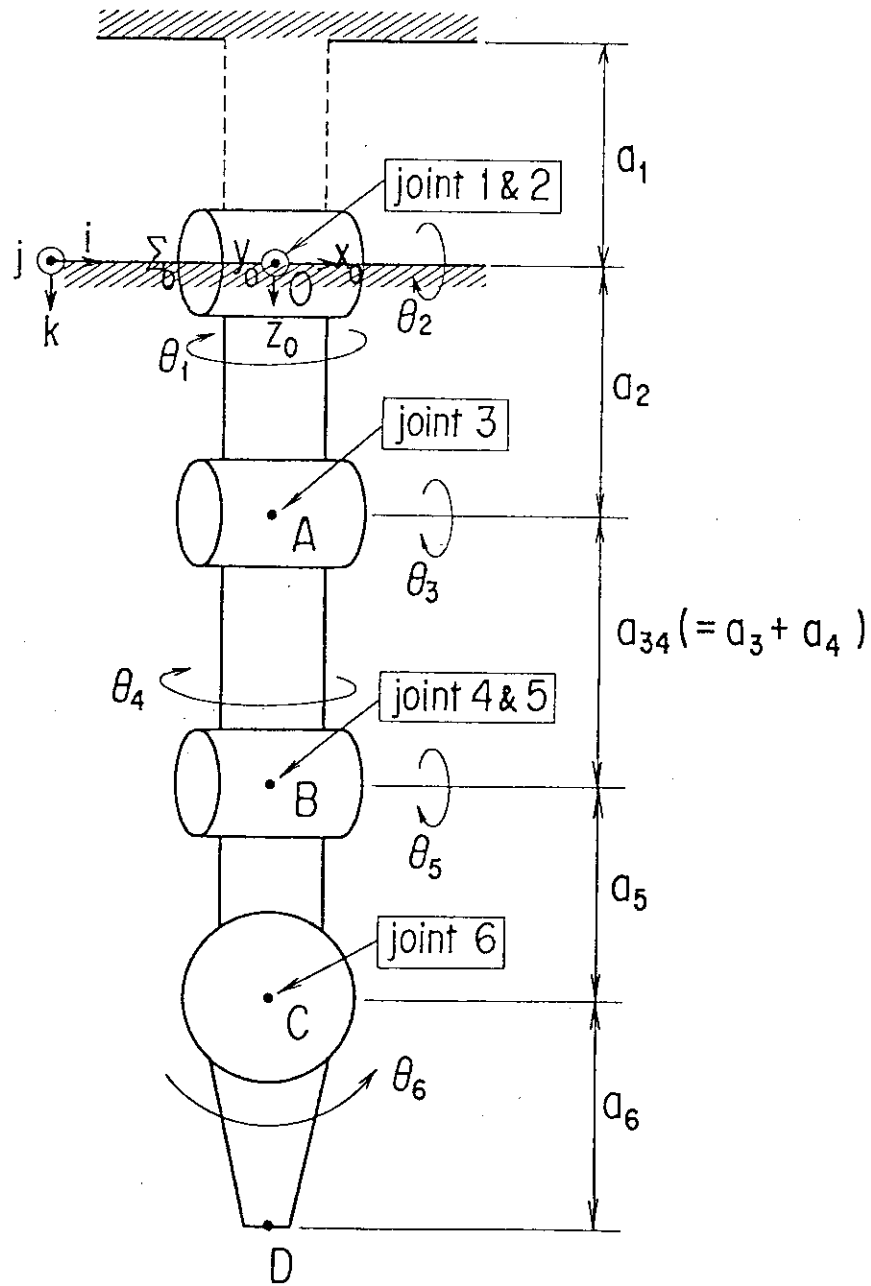


Fig.1b Reduced model for the present analysis

Fig. 2aを参照すると、

$$P_1 = l_1 \quad (2.1.6)$$

$$P_2 = l_1 + l_2 = P_1 + l_2 \quad (2.1.7)$$

$$P_3 = l_1 + l_2 + l_3 = P_2 + l_3 \quad (2.1.8)$$

$$P_4 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = P_3 + l_4 \quad (2.1.9)$$

の関係が明らかとなる。

つぎに、ベクトル  $l_1 \sim l_4$  を変換行列を使って肩部から順次求めて行く。

(1) 肩部0を起点としたA点の動き

Fig. 1aに示した実際のマニピュレータは根元(ベース)と肩部の間が  $a_1$  だけ離れているため解析上は単に下方へ平行移動させて基準系の原点を肩部のところにもっていき、ここを中心に直交した  $z$ ,  $x$  軸のまわりにまわる2自由度分の変換を回転演算子  $T_1$  で表現する。即ち、

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{Rot}(z, \theta_1) \text{Rot}(x, \theta_2) \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ s_1 & c_1 c_2 & -c_1 s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{vmatrix} \triangleq [\alpha_{ij}] \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

肩部に固定された座標系  $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$  が上記回転により  $\Sigma^2(x_1, y_1, z_1)$  に移動したとする。座標変換の定義より、新しい座標系  $\Sigma^2(x_1, y_1, z_1)$  におけるある点の座標  $(x_1, y_1, z_1)$  を旧座標系  $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$  での座標  $(x_0, y_0, z_0)$  で表せば、

$$(x_0, y_0, z_0)^T = T_1 (x_1, y_1, z_1)^T \quad (2.1.11)$$

の関係があり、これはベクトルの変換とも解釈できる。(ここで  $T$  は転置を示す。)  $\Sigma_0$  系内の点Aは初期状態で垂直下方に向いたベクトル  $(0, 0, a_2)^T$  で、この点が  $\theta_1, \theta_2$  の回転により  $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$  と移動しても回転後の新座標系  $\Sigma^2$  における座標はやはり  $A_2(0, 0, a_2)$  であるから、 $l_1$  に対して、

$$\begin{aligned} P_1 = l_1 &= T_1 (0, 0, a_2)^T \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ s_1 & c_1 c_2 & -c_1 s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 s_1 s_2 \\ -a_2 c_1 s_2 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

を得る。(Fig. 2b参照)

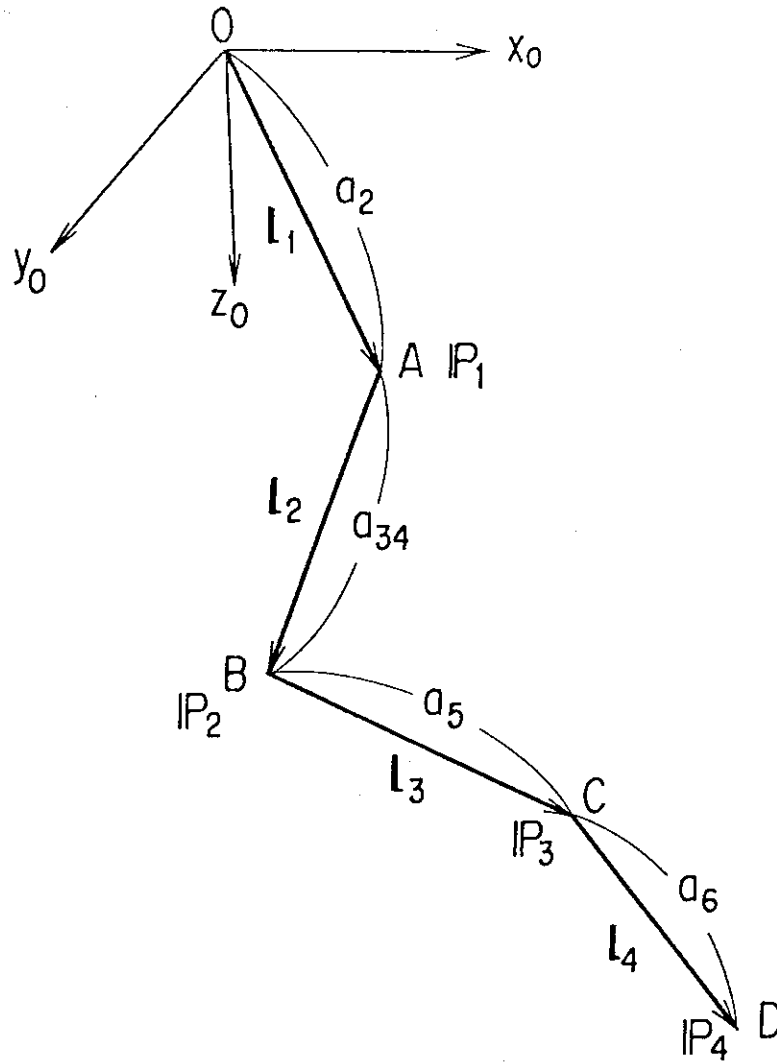


Fig.2a Manipulator represented by vector notation

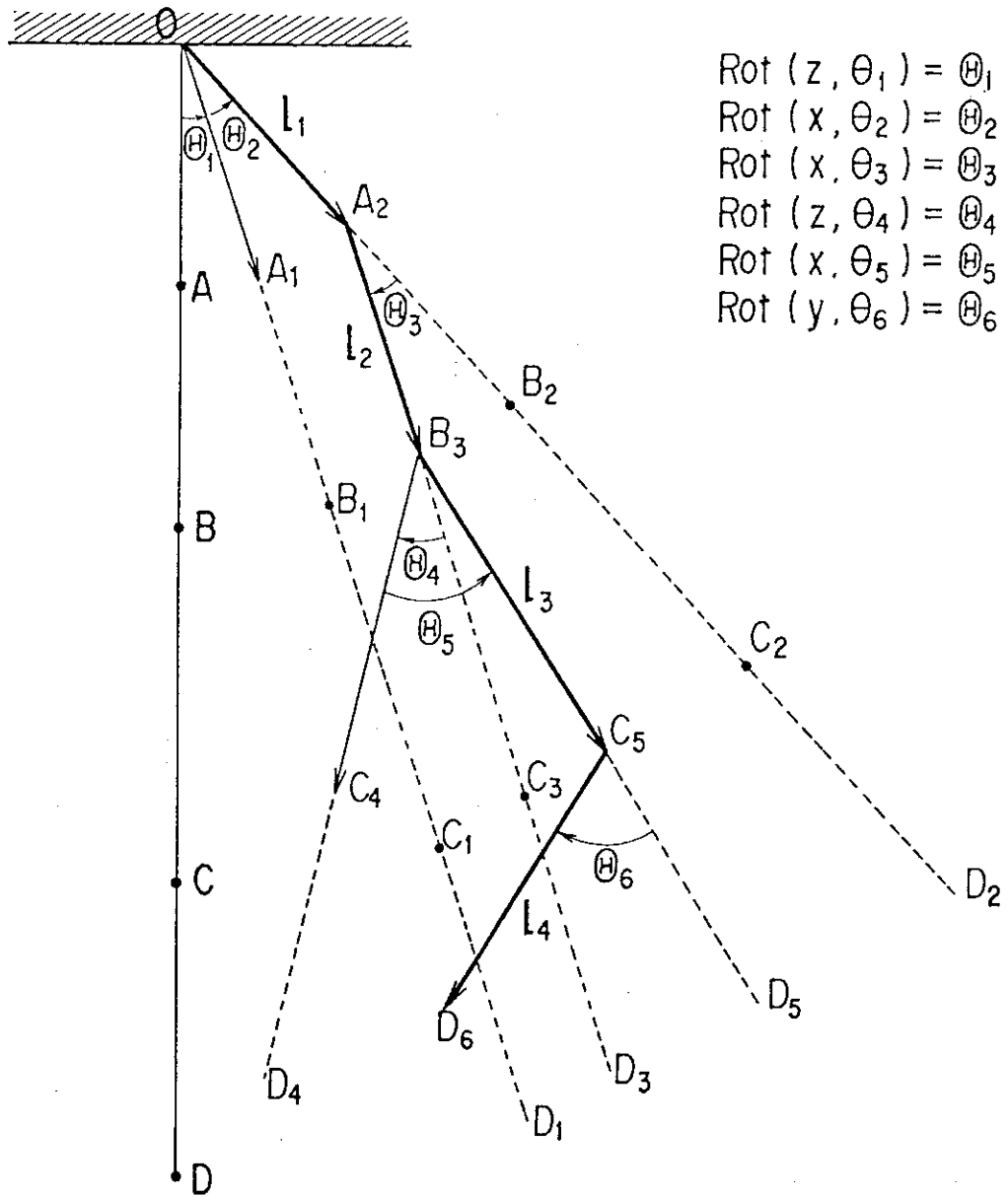


Fig.2b Vector computation corresponding to co-ordinate transformation

(2) B点の動き

次に、 $\theta_1, \theta_2$  による点Aの移動および回転  $\theta_3$  により、ベクトル  $l_2$  の先端が  $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3$  へ移動したとする。点Aを原点とする  $\Sigma_A$  が  $\theta_3$  だけ回転したときの回転演算子は、

$$T_2 = \text{Rot}(x, \theta_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 0 & s_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (2.1.13)$$

で与えられるから基準系に対する座標変換は、

$${}^1T_2 = T_1 T_2$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ s_1 & c_1 c_2 & -c_1 s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 0 & s_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3 & s_1 c_2 s_3 + s_1 s_2 c_3 \\ s_1 & c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ 0 & s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} \\ s_1 & c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{vmatrix} \triangleq [\beta_{ij}] \quad (2.1.14)$$

となる。従って、ベクトル  $\overrightarrow{A_2 B_3}$  すなわち  $l_2$  は次のようにして導かれる。(Fig. 2b 参照)

$$l_2 = {}^1T_2(0, 0, a_{34})^T = \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} \\ s_1 & c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{34} s_1 s_{23} \\ -a_{34} c_1 s_{23} \\ a_{34} c_{23} \end{vmatrix} \quad (2.1.15)$$

これより、点  $B_3$  の位置ベクトル  $P_2$  は

$$P_2 = l_1 + l_2 = P_1 + l_2 = a_2 \begin{vmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \beta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 s_1 s_2 \\ -a_2 c_1 s_2 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{34} s_1 s_{23} \\ -a_{34} c_1 s_{23} \\ a_{34} c_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) s_1 \\ -(a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) c_1 \\ a_2 c_2 + a_{34} c_{23} \end{vmatrix} \quad (2.1.16)$$

として求まる。

(3) C 点の動き

前述した Fig. 1b の関節構成により、点  $B_3$  を起点にした  $z$  軸回りの回転、および  $x$  軸回りの回転を 1 つにまとめ、その演算子を

$$T_3 = \text{Rot}(z, \theta_4) \text{Rot}(x, \theta_5)$$

$$= \begin{vmatrix} C_4 & -S_4 C_5 & S_4 S_5 \\ S_4 & C_4 C_5 & -C_4 S_5 \\ 0 & S_5 & C_5 \end{vmatrix} \quad (2.1.17)$$

と定める。求めるベクトル  $l_3$  の先端すなわち点  $C$  が、 $\theta_1 \sim \theta_5$  の回転で  $C \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_5$  へ移動したとし、ベクトル  $\overrightarrow{B_3 C_3}$  から  $\overrightarrow{B_3 C_5}$  への変換を  $T_3$  とする。同様の手続きで、ベースに関しての変換は次の式となる。

$${}^1T_3 = T_1 T_2 T_3 = {}^1T_2 T_3 = \begin{vmatrix} C_1 & -S_1 C_{23} & S_1 S_{23} \\ S_1 & C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} \\ 0 & S_{23} & C_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_4 & -S_4 C_5 & S_4 S_5 \\ S_4 & C_4 C_5 & -C_4 S_5 \\ 0 & S_5 & C_5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} C_1 C_4 - S_1 S_4 C_{23} & -C_1 S_4 C_5 - S_1 C_{23} C_4 C_5 + S_1 S_{23} S_5 & C_1 S_4 S_5 + S_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_{23} C_5 \\ S_1 C_4 + C_1 C_{23} S_4 & -S_1 S_4 C_5 + C_1 C_4 C_{23} C_5 - C_2 S_{23} S_5 & S_1 S_4 S_5 - C_1 C_{23} C_4 S_5 - C_1 S_{23} C_5 \\ S_4 S_{23} & C_4 C_5 S_{23} + S_5 C_{23} & -C_4 S_5 S_{23} + C_5 C_{23} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = [r_{ij}] \quad (2.1.18)$$

これより、ベクトル  $\overrightarrow{B_3 C_5}$  すなわち  $l_3$  と点  $C_5$  の位置ベクトル  $P_3$  が決定する。

$$l_3 = {}^1T_3(0, 0, a_5)^T = \begin{vmatrix} a_5 (C_1 S_4 S_5 + S_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_{23} C_5) \\ a_5 (S_1 S_4 S_5 - C_1 C_{23} C_4 S_5 - C_1 S_{23} C_5) \\ a_5 (C_5 C_{23} - C_4 S_5 S_{23}) \end{vmatrix} \quad (2.1.19)$$

(2.1.19) の各成分は、 $\Sigma_B$  系におけるベクトル  $(0, 0, a_5)^T$  を基準系に移したときの  $x, y, z$  方向の大きさを示す。

$$P_3 = P_2 + l_3 = a_2 \begin{vmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \beta_{33} \end{vmatrix} + a_5 \begin{vmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 S_1 S_2 \\ -a_2 C_1 S_2 \\ a_2 C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{34} S_1 S_{23} \\ a_{34} C_1 S_{23} \\ a_{34} C_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_5 (C_1 S_4 S_5 + S_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_{23} C_5) \\ a_5 (S_1 S_4 S_5 - C_1 C_{23} C_4 S_5 - C_1 S_{23} C_5) \\ a_5 (C_5 C_{23} - C_4 S_5 S_{23}) \end{vmatrix} \quad (2.1.20)$$

(4) D点すなわち手先の動き

最後に、手先にもっと近い関節の変換行列を

$$T_4 = \text{Rot}(y, \theta_6)$$

$$= \begin{vmatrix} c_6 & 0 & s_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 \end{vmatrix} \quad (2.1.21)$$

と定めると、基準系から回転  $\theta_1 \sim \theta_6$  による全体の変換行列は

$${}^1T_4 = {}^1T_3 T_4$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23} & -c_1 s_4 c_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_1 s_{23} s_5 & c_1 s_4 s_5 + s_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5 \\ s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 & -s_1 s_4 c_5 + c_1 c_4 c_{23} c_5 - c_1 s_{23} s_5 & s_1 s_4 s_5 - c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 \\ s_4 s_{23} & c_4 c_5 s_{23} + s_5 c_{23} & -c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} c_6 & 0 & s_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) - s_6 (c_1 s_4 c_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_1 s_{23} s_5) & -c_1 s_4 c_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_1 s_{23} s_5 \\ c_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) - s_6 (s_1 s_4 c_5 + c_1 c_4 c_{23} c_5 - c_1 s_{23} s_5) & -s_1 s_4 c_5 + c_1 c_4 c_{23} c_5 - c_1 s_{23} s_5 \\ c_6 (s_4 s_{23}) - s_6 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23}) & c_4 c_5 s_{23} + s_5 c_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) + c_6 (c_1 s_4 c_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_1 s_{23} s_5) \\ s_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) + c_6 (s_1 s_4 c_5 + c_1 c_4 c_{23} c_5 - c_1 s_{23} s_5) \\ s_6 (s_4 s_{23}) + c_6 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23}) \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{vmatrix} \quad (2.1.22)$$

の如く決定される。この結果が、マニピュレータの姿勢を表現したものである。ベクトル  $l_4$  と手先の位置は次のようになる。

$$l_4 = {}^1T_4(0, 0, a_6)^T = \begin{vmatrix} a_6 [s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) + c_6 (c_1 s_4 c_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_1 s_{23} s_5)] \\ a_6 [s_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) + c_6 (s_1 s_4 c_5 + c_1 c_4 c_{23} c_5 - c_1 s_{23} s_5)] \\ a_6 [s_6 (s_4 s_{23}) + c_6 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23})] \end{vmatrix} \quad (2.1.23)$$

$$P_4 = P_3 + l_4$$

$$= \begin{vmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \beta_{33} \end{vmatrix} + a_5 \begin{vmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{33} \end{vmatrix} + a_6 \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & (a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) s_1 + a_5 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5) \\
 & + a_6 [s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) + c_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5)] \\
 = & - (a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) c_1 + a_5 (s_1 s_4 s_5 - c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 c_{23} c_5) \\
 & + a_6 [s_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) + c_6 (s_1 s_4 s_5 - c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5)] \\
 & a_2 c_2 + a_{34} c_{23} + a_5 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23}) \\
 & + a_6 [s_6 (s_4 s_{23}) + c_6 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23})]
 \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

以上、われわれは、マニピュレータのジョイント0からDにいたる三次元位置をベクトル計算で求めた。(2.1.24)に示すように、 $P_4$ の各成分、例えば $x_4$ は $a_2, a_{34}, a_5, a_6$ の長さをもった各リンクが基準系の $x$ 軸へ射影した総和を示し、その場合の $\alpha_{13}, \beta_{13}, \gamma_{13}, a_x$ が $x$ 軸との余弦である。このように、ベクトル法によるリンクの解析は従来の方法よりもその導出過程がはるかに理解し易いことがわかる。



## 2.2 リンク関係式の導出

前節で導いた変換行列  ${}^1T_j$  ( $j = 2, 4$ ) とベクトル  $l_j$  ( $j = 2, 4$ ) により, Fig. 1a または Fig. 1b に対するマニピュレータのリンク機構を解析する運動学方程式は確立された。(ただし, モデルの相違による取り扱い上の注意事項については後述する。) この方程式は従来の各リンクに適切な座標系を定めた上で4次の同次座標変換法を利用した結果と当然一致する。ここでは, 方程式を導いた過程を振り返り, 逆問題の解決に必要な一連の運動学方程式を違った表現形式で導き出せないかを考察する。

周知のごとく, 基準系  $\Sigma_0$  のベクトル  $x_0$  と手先座標系  $\Sigma_D$  におけるベクトル  $x_H$  の関係は,

$$x_0 = T_1 T_2 T_3 T_4 x_H = {}^1T_4 x_H \quad (2.2.1)$$

と記述される。この式に演算子  $T_1 T_2 T_3$ ,  $T_1 T_2$ ,  $T_1$  の反転したものを左側から作用させることを考え, 順にグループ1, グループ2, グループ3と名付ける。行列の反転操作と手先方向の関係をj使って新しい関係式を各段階で決定していくことを本節で詳しく述べる。そのことが本報の中核でもある。

### (1) グループ1: $(T_1 T_2 T_3)^{-1}$ の作用

まず, 手先方向と手先にもっとも近い関節角  $\theta_6$  を残りの関節角との関係として引出すために,  $T_4$  を残し他の  $T_1, T_2, T_3$  の積の逆行列を式 (2.2.1) に左から乗じる。即ち, これは

$$(T_1 T_2 T_3)^{-1} x_0 = T_4 x_H \quad (2.2.2)$$

と書ける。ここで座標変換行列は直交座標系で定義されていたので直交行列となる性質を有しているため, 逆行列は計算するまでもなく直ちに転置行列に置き換えて

$$({}^1T_3)^{-1} x_0 = ({}^1T_3)^T x_0 = T_4 x_H \quad (2.2.3)$$

となる。(付録1参照)

手先に固定した座標系  $\Sigma_D$  の  $x$  方向単位ベクトル  $(1, 0, 0)^T$  は基準系からみたベクトルとして, (2.1.2.2) で与えた全体の変換行列の  $x$  成分 (即ち, 行列の第1列成分)  $(n_x, n_y, n_z)^T$  に対応することから, (2.1.1.8) 式の  ${}^1T_3$  を (2.2.3) に代入すると,

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}^T x_0 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{vmatrix} x_0 = \begin{vmatrix} c_6 & 0 & s_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 \end{vmatrix} x_H$$

から

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_6 & 0 & s_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_6 \\ 0 \\ -s_6 \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

を得る。

行列を展開して,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} n_x + \gamma_{21} n_y + \gamma_{31} n_z &= c_6 \\ \gamma_{12} n_x + \gamma_{22} n_y + \gamma_{32} n_z &= 0 \\ \gamma_{13} n_x + \gamma_{23} n_y + \gamma_{33} n_z &= -s_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

なる関係式を引出すことができる。後でこれをもっと分かりやすい形に書き換える。

同様に,  $\Sigma_0$  に対する  $\Sigma_D$  の  $y_6$  軸の方向余弦 ((2.1.2.2) の  $o_x, o_y, o_z$  に相当) を使った記述は,

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} & o_x \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & o_y \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & o_z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} c_6 & 0 & s_6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -s_6 & 0 & c_6 & 0 \end{array} \right| \quad (2.2.6)$$

となり, 次の3つの関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} o_x + \gamma_{21} o_y + \gamma_{31} o_z &= 0 \\ \gamma_{12} o_x + \gamma_{22} o_y + \gamma_{32} o_z &= 1 \\ \gamma_{13} o_x + \gamma_{23} o_y + \gamma_{33} o_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

続いて, 座標系  $\Sigma_D$  の  $z$  方向単位ベクトル  $(0, 0, 1)^T$  と  $(a_x, a_y, a_z)^T$  の代入により,

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} & a_x \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & a_y \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & a_z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} c_6 & 0 & s_6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 & 1 \end{array} \right| \quad (2.2.8)$$

から次のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} a_x + \gamma_{21} a_y + \gamma_{31} a_z &= s_6 \\ \gamma_{12} a_x + \gamma_{22} a_y + \gamma_{32} a_z &= 0 \\ \gamma_{13} a_x + \gamma_{23} a_y + \gamma_{33} a_z &= c_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

(2) グループ2 :  $(T_1 T_2)^{-1}$  の作用

今度は, Fig. 2 b で示したリンク構成に対して, 関節角  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  と残りの角との関係を引出すために,  $T_1 T_2$  と  $T_3 T_4$  を分離させ, 前者の反転したものを (2.2.1) に左側から掛ける。

$$(T_1 T_2)^{-1} \mathbf{x}_0 = T_3 T_4 \mathbf{x}_H \quad (2.2.10)$$

(1) で詳述したと同様にして,  $\Sigma_D$  系のベクトル  $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T$  および  $(0, 0, 1)^T$  に対するベクトル  $(n_x, n_y, n_z)^T, (o_x, o_y, o_z)^T, (a_x, a_y, a_z)^T$  を (2.2.10) に代入する。以後の操作は類似しているので, 過程の記述は付録2にまわし, 結果のみを書き上げる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} n_x + \beta_{21} n_y + \beta_{31} n_z &= c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6 \\ \beta_{12} n_x + \beta_{22} n_y + \beta_{32} n_z &= s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6 \\ \beta_{13} n_x + \beta_{23} n_y + \beta_{33} n_z &= -c_5 s_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} o_x + \beta_{21} o_y + \beta_{31} o_z &= -s_4 c_5 \\ \beta_{12} o_x + \beta_{22} o_y + \beta_{32} o_z &= c_4 c_5 \\ \beta_{13} o_x + \beta_{23} o_y + \beta_{33} o_z &= s_5 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} a_x + \beta_{21} a_y + \beta_{31} a_z &= c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6 \\ \beta_{12} a_x + \beta_{22} a_y + \beta_{32} a_z &= s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6 \\ \beta_{13} a_x + \beta_{23} a_y + \beta_{33} a_z &= c_5 c_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.13)$$

(3) グループ 3 :  $T_1^{-1}$  の作用

最後に、1軸2軸の回転角と残りのそれらの関係を知るために、回転演算子  $T_1$  の反転を (2.2.1) に掛け単位ベクトルの関係を代入すると手先方向を含めた目的の式を得る。(付録2参照)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} n_x + \alpha_{21} n_y + \alpha_{31} n_z &= c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6 \\ \alpha_{12} n_x + \alpha_{22} n_y + \alpha_{32} n_z &= c_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) + s_3 c_5 s_6 \\ \alpha_{13} n_x + \alpha_{23} n_y + \alpha_{33} n_z &= s_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) - c_3 c_5 s_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} o_x + \alpha_{21} o_y + \alpha_{31} o_z &= -s_4 c_5 \\ \alpha_{12} o_x + \alpha_{22} o_y + \alpha_{32} o_z &= c_3 c_4 c_5 - s_3 s_5 \\ \alpha_{13} o_x + \alpha_{23} o_y + \alpha_{33} o_z &= s_3 c_4 c_5 + c_3 s_5 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} a_x + \alpha_{21} a_y + \alpha_{31} a_z &= c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6 \\ \alpha_{12} a_x + \alpha_{22} a_y + \alpha_{32} a_z &= c_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) - s_3 c_5 c_6 \\ \alpha_{13} a_x + \alpha_{23} a_y + \alpha_{33} a_z &= s_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) + c_3 c_5 c_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.16)$$

以上で、手先に固定された座標系の単位ベクトルとベースに関するその表現から、関節角を3つのグループに分離させた上で (2.2.5), (2.2.7), (2.2.9), (2.2.11) ~ (2.2.16) の形の関係式を誘導した。次に、これらをもうすこし分かりやすい形に表現しなおす。

まず、最初のグループの式 (2.2.5) ~ (2.2.7) は9個の未知数  $r_{11} \sim r_{33}$  を含む9個の連立方程式で求解は可能であるが、次のようにすれば  $r_{11} \sim r_{33}$  の決定ははるかに簡単に求まる。即ち、取上げた式は方向余弦を規則的に含むことから、それに着目する。

$r_{11}$  を求めるために、(2.2.5) ~ (2.2.7) のそれぞれ最初の行に書かれた式を取り出し、1番目の式に  $n_x$  を2番目の式に  $o_x$  をそして3番目のそれに  $a_x$  を掛け、それらを互いに加え合わせて  $r_{11}$  を決定する。ここでは、次の方向余弦の直交関係が大いに役立っている。

$$\left. \begin{aligned} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \\ n_x^2 + o_x^2 + a_x^2 &= n_y^2 + o_y^2 + a_y^2 = n_z^2 + o_z^2 + a_z^2 = 1 \\ n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z &= n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z = o_x a_x + o_y a_y + o_z a_z = 0 \\ n_x n_y + o_x o_y + a_x a_y &= n_x n_z + o_x o_z + a_x a_z = n_y n_z + o_y o_z + a_y a_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.17)$$

同様な操作によって  $r_{12} \sim r_{33}$  を決定し、それらを下記にまとめる。

$$r_{11} = c_6 n_x + s_6 a_x = c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23} \quad (2.2.18)$$

$$r_{21} = c_6 n_y + s_6 a_y = s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4 \quad (2.2.19)$$

$$r_{31} = c_6 n_z + s_6 a_z = s_4 s_{23} \quad (2.2.20)$$

$$r_{12} = o_x = -c_1 s_4 c_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_1 s_{23} s_5 \quad (2.2.21)$$

$$r_{22} = o_y = -s_1 s_4 c_5 + c_1 c_4 c_{23} c_5 - c_1 s_{23} s_5 \quad (2.2.22)$$

$$r_{32} = o_z = c_4 c_5 s_{23} + s_5 c_{23} \quad (2.2.23)$$

$$r_{13} = -s_6 n_x + c_6 a_x = c_1 s_4 s_5 + s_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5 \quad (2.2.24)$$

$$r_{23} = -s_6 n_y + c_6 a_y = s_1 s_4 s_5 - c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 \quad (2.2.25)$$

$$r_{33} = -s_6 n_z + c_6 a_z = -c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23} \quad (2.2.26)$$

これらの式をよくみると、 $(T_1 T_2 T_3)^{-1}$  の操作のところで述べたように、(2.2.18) ~ (2.2.26) の  $\theta_6$  と方向余弦で表した関係が右辺に記された残りの角度の関係式と結びつけられていることがわかる。 $r_{12}$ ,  $r_{22}$ ,  $r_{32}$  については、直交関係の性質から残りの  $r_{ij}$  を使って表現できることから、結局  $\theta_6$  の関数となる。

さて、われわれは以前マニピュレータの逆問題を厳密に解く方法として、手先に関する代数方程式への変換を通して解を導いたが<sup>(4)</sup>、ここでその状況についてすこし振り返ってみる。4 × 4 行列から基準座標に対するマニピュレータの手先方向と位置を表す非線形方程式を式の特徴から第6軸の関節角の正弦余弦について整理し、同一項をパラメータ A, B, C 等に置き換えることから出発した。式の単純化と上記関節角を変数とする定式化の見通しをはっきりさせることが当初の目標であった。結果的にはそれぞれのパラメータが手先にもっとも近い関節角で表現したことが、首尾よく方程式を導出した要因であろう。

ところで、上で導いた  $r_{11} \sim r_{33}$  はこの A, B, C 等のパラメータに一致することが判明し、同時に、パラメータは第6関節のひとつ手前第5関節の基準座標でみた方向余弦を表していることが明らかになった。これらのことは、式(2.2.18)から(2.2.26)と文献(4)のパラメータを比較することにより了解できる。その場合文献(4)の関節構造のモデルと現在のモデルとの間には、次の差異が存在することに注意することが必要である。

- (i)  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_5$  の回転正方向が逆にとってある。
- (ii) 初期状態における手先の座標系の向きが異なる。
- (iii) 基準座標における原点の位置が z 方向  $a_1$  だけずれている。

ちなみに、文献(4)の手先座標系に  $\text{Rot}(x_6, 90^\circ) \text{Rot}(y_6, 90^\circ)$  を乗じると Fig. 1b で示した手先座標系が得られるので、今回のモデルにおける x 方向ベクトル  $(n_x, n_y, n_z)^T$  は文献(4)の  $(o_x, o_y, o_z)^T$  に、 $(o_x, o_y, o_z)^T$  は  $(a_x, a_y, a_z)^T$  に、また  $(a_x, a_y, a_z)^T$  は  $(n_x, n_y, n_z)^T$  に対応することになる。従って、

$$\begin{aligned} r_{11} &\Leftrightarrow B, & r_{21} &\Leftrightarrow D, & r_{31} &\Leftrightarrow F, \\ r_{13} &\Leftrightarrow A, & r_{23} &\Leftrightarrow C, & r_{33} &\Leftrightarrow E \end{aligned}$$

となることがわかる。

尚, A, B, C 等が第 5 軸の方向余弦を表すことは, 文献(5)の式(8)でも了解できる。

次に,  $\beta_{11} \sim \beta_{33}$  も同様な操作で (2.2.27) から (2.2.35) に記述したが, 式の利用の仕方によっては, むしろ (2.2.11) ~ (2.2.13) のままで (2.1.14) で与えた  $\beta_{ij}$  の値を直接代入したほうが見やすいことも考えられる。念のためそれらを (2.2.27)<sup>+</sup> ~ (2.2.35)<sup>+</sup> に合わせて示した。

$$\beta_{11} = (c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6) n_x + (-s_4 c_5) o_x + (c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6) a_x = c_1 \quad (2.2.27)$$

$$\beta_{21} = (c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6) n_y + (-s_4 c_5) o_y + (c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6) a_y = s_1 \quad (2.2.28)$$

$$\beta_{31} = (c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6) n_z + (-s_4 c_5) o_z + (c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6) a_z = 0 \quad (2.2.29)$$

$$\beta_{12} = (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) n_x + (c_4 c_5) o_x + (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) a_x = -s_1 c_{23} \quad (2.2.30)$$

$$\beta_{22} = (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) n_y + (c_4 c_5) o_y + (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) a_y = c_1 c_{23} \quad (2.2.31)$$

$$\beta_{32} = (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) n_z + (c_4 c_5) o_z + (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) a_z = s_{23} \quad (2.2.32)$$

$$\beta_{13} = (-c_5 s_6) n_x + s_5 o_x + (c_5 c_6) a_x = s_1 s_{23} \quad (2.2.33)$$

$$\beta_{23} = (-c_5 s_6) n_y + s_5 o_y + (c_5 c_6) a_y = -c_1 s_{23} \quad (2.2.34)$$

$$\beta_{33} = (-c_5 s_6) n_z + s_5 o_z + (c_5 c_6) a_z = c_{23} \quad (2.2.35)$$

$$c_1 n_x + s_1 n_y = c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6 \quad (2.2.27)^+$$

$$(-s_1 c_{23}) n_x + (c_1 c_{23}) n_y + s_{23} n_z = s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6 \quad (2.2.28)^+$$

$$(s_1 s_{23}) n_x + (-c_1 s_{23}) n_y + c_{23} n_z = -c_5 s_6 \quad (2.2.29)^+$$

$$c_1 o_x + s_1 o_y = -s_4 c_5 \quad (2.2.30)^+$$

$$(-s_1 c_{23}) o_x + (c_1 c_{23}) o_y + s_{23} o_z = c_4 c_5 \quad (2.2.31)^+$$

$$(s_1 s_{23}) o_x + (-c_1 s_{23}) o_y + c_{23} o_z = s_5 \quad (2.2.32)^+$$

$$c_1 a_x + s_1 a_y = c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6 \quad (2.2.33)^+$$

$$(-s_1 c_{23}) a_x + (c_1 c_{23}) a_y + s_{23} a_z = s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6 \quad (2.2.34)^+$$

$$(s_1 s_{23}) a_x + (-c_1 s_{23}) a_y + c_{23} a_z = c_5 c_6 \quad (2.2.35)^+$$

3 番目のグループから引出された関節角  $\theta_1$  と  $\theta_2$  と他の角との関係も 2 通りの表現を示しておく。

$$\alpha_{11} = (c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6) n_x + (-s_4 c_5) o_x + (c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6) a_x = c_1 \quad (2.2.36)$$

$$\alpha_{21} = (c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6) n_y + (-s_4 c_5) o_y + (c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6) a_y = s_1 \quad (2.2.37)$$

$$\alpha_{31} = (c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6) n_z + (-s_4 c_5) o_z + (c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6) a_z = 0 \quad (2.2.38)$$

$$\alpha_{12} = [c_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) + s_3 c_5 s_6] n_x + [c_3 c_4 c_5 - s_3 s_5] o_x + [c_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) - s_3 c_5 c_6] a_x = -s_1 c_2 \quad (2.2.39)$$

$$\alpha_{22} = [c_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) + s_3 c_5 s_6] n_y + [c_3 c_4 c_5 - s_3 s_5] o_y + [c_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) - s_3 c_5 c_6] a_y = c_1 c_2 \quad (2.2.40)$$

$$\alpha_{32} = [c_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) + s_3 c_5 s_6] n_z + [c_3 c_4 c_5 - s_3 s_5] o_z + [c_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) - s_3 c_5 c_6] a_z = s_2 \quad (2.2.41)$$

$$\alpha_{13} = [s_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) - c_3 c_5 s_6] n_x + [s_3 c_4 c_5 + c_3 s_5] o_x + [s_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) + c_3 c_5 c_6] a_x = s_1 s_2 \quad (2.2.42)$$

$$\alpha_{23} = [s_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 s_6) - c_3 c_5 s_6] n_y + [s_3 c_4 c_5 + c_3 s_5] o_y + [s_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) + c_3 c_5 c_6] a_y = -c_1 s_2 \quad (2.2.43)$$

$$\alpha_{33} = [s_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 c_6) - c_3 c_5 s_6] n_z + [s_3 c_4 c_5 + c_3 s_5] o_z + [s_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) + c_3 c_5 c_6] a_z = c_2 \quad (2.2.44)$$

$$c_1 n_x + s_1 n_y = c_4 c_6 - s_4 s_5 s_6 \quad (2.2.36)^+$$

$$(-s_1 c_2) n_x + (c_1 c_2) n_y + s_2 n_z = c_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 c_6) + s_3 c_5 s_6 \quad (2.2.37)^+$$

$$(s_1 s_2) n_x + (-c_1 s_2) n_y + c_2 n_z = s_3 (s_4 c_6 + c_4 s_5 c_6) - c_3 c_5 s_6 \quad (2.2.38)^+$$

$$c_1 o_x + s_1 o_y = -s_4 c_5 \quad (2.2.39)^+$$

$$(-s_1 c_2) o_x + (c_1 c_2) o_y + s_2 o_z = c_3 c_4 c_5 - s_3 s_5 \quad (2.2.40)^+$$

$$(s_1 s_2) o_x + (-c_1 s_2) o_y + c_2 o_z = s_3 c_4 c_5 + c_3 s_5 \quad (2.2.41)^+$$

$$c_1 a_x + s_1 a_y = c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6 \quad (2.2.42)^+$$

$$(-s_1 c_2) a_x + (c_1 c_2) a_y + s_2 a_z = c_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) - s_3 c_5 c_6 \quad (2.2.43)^+$$

$$(s_1 s_2) a_x + (-c_1 s_2) a_y + c_2 a_z = s_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) + c_3 c_5 c_6 \quad (2.2.44)^+$$

最後に、位置ベクトルを (2.2.18) ~ (2.2.26) の  $r_{ij}$  を使って簡略化しておく。

$$\begin{aligned} P_x &= (a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) s_1 + a_5 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5) + \\ &\quad a_6 \{ s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) + c_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5) \} \\ &= (a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) s_1 + a_5 r_{13} + a_6 (r_{11} s_6 + r_{13} c_6) \\ &= (a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) s_1 + a_5 r_{13} + a_6 a_x \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

$$\begin{aligned} P_y &= -(a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) c_1 + a_5 (s_1 s_4 s_5 - c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5) + \\ &\quad a_6 \{ s_6 (s_1 c_4 + c_1 c_{23} s_4) + c_6 (s_1 s_4 s_5 - c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5) \} \\ &= -(a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) c_1 + a_5 r_{23} + a_6 (r_{21} s_6 + r_{23} c_6) \\ &= -(a_2 s_2 + a_{34} s_{23}) c_1 + a_5 r_{23} + a_6 a_y \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

$$\begin{aligned} P_z &= a_2 c_2 + a_{34} c_{23} + a_5 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23}) + \\ &\quad a_6 \{ s_6 (s_4 s_{23}) + c_6 (c_5 c_{23} - c_4 s_5 s_{23}) \} \\ &= (a_2 c_2 + a_{34} c_{23}) + a_5 r_{33} + a_6 \{ r_{31} s_6 + r_{33} c_6 \} \\ &= (a_2 c_2 + a_{34} c_{23}) + a_5 r_{33} + a_6 a_z \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

### 3. お わ り に

マニピュレータのリンク機構を解析する際、逆運動学の問題はたえず考慮にいれなければならない項目の1つである。しかしながら、これを解く一般的手法が確立していない以上、リンク機構に応じた運動学的関係式をできるだけバラエティに富んだ記述として与えておけば、解を発見する見通しもたてやすくなると考えられる。そこで、運動学方程式を決定する段階でただ機械的な座標変換に頼って式を誘導する従来の方法では、場合によってそれ以上のリンクに関する情報を得ることが容易でないから、観点を異とした取り組み方を試みた。即ち、関節機構を認識した上で比較的直感がきくベクトル法で話を展開し、回転演算子の逆行列の作用で有益な関係式を導き出した。多項式法で逆問題を解く際に解発見の動機となった6つのパラメータとそれを含む式が今回導いた式の中にも存在し、かつパラメータの意味付けも十分理解できた。運動学に対する異なる表現形式の採用は、逆問題解決への1つの有力な手掛となることが期待される。

### 謝 辞

本稿を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に貴重なアドバイスと激励を賜り感謝いたします。

### 参 考 文 献

- 1) Paul, R. P. : " Robot Manipulators ;Mathematics, Programming and Control", The MIT Press, 1981.
- 2) 若松清司他編："ロボットの制御", 計測自動制御学会, 1985.
- 3) Sasaki S. : "Derivation of Manipulator Kinematics Based on a Vector Formulation", JAERI-M 86-122, July 1986.
- 4) Sasaki S. : " A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arms", JAERI-M 86-018, Jan. 1986.
- 5) 佐々木忍：" マニピュレータ構造に依存した行列による運動学の表現とその逆問題の解法", JAERI-M 87-039, Mar. 1987.

### 3. お わ り に

マニピュレータのリンク機構を解析する際、逆運動学の問題はたえず考慮にいれなければならない項目の1つである。しかしながら、これを解く一般的手法が確立していない以上、リンク機構に応じた運動学的関係式をできるだけバラエティに富んだ記述として与えておけば、解を発見する見通しもたてやすくなると考えられる。そこで、運動学方程式を決定する段階でただ機械的な座標変換に頼って式を誘導する従来の方法では、場合によってそれ以上のリンクに関する情報を得ることが容易でないから、観点を異とした取り組み方を試みた。即ち、関節機構を認識した上で比較的直感がきくベクトル法で話を展開し、回転演算子の逆行列の作用で有益な関係式を導き出した。多項式法で逆問題を解く際に解発見の動機となった6つのパラメータとそれを含む式が今回導いた式の中にも存在し、かつパラメータの意味付けも十分理解できた。運動学に対する異なる表現形式の採用は、逆問題解決への1つの有力な手掛となることが期待される。

### 謝 辞

本稿を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に貴重なアドバイスと激励を賜り感謝いたします。

### 参 考 文 献

- 1) Paul, R. P. : " Robot Manipulators ; Mathematics, Programming and Control", The MIT Press, 1981.
- 2) 若松清司他編："ロボットの制御", 計測自動制御学会, 1985.
- 3) Sasaki S. : " Derivation of Manipulator Kinematics Based on a Vector Formulation ", JAERI-M 86-122, July 1986.
- 4) Sasaki S. : " A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arms ", JAERI-M 86-018, Jan. 1986.
- 5) 佐々木忍：" マニピュレータ構造に依存した行列による運動学の表現とその逆問題の解法", JAERI-M 87-039, Mar. 1987.



### 3. おわりに

マニピュレータのリンク機構を解析する際、逆運動学の問題はたえず考慮にいれなければならない項目の1つである。しかしながら、これを解く一般的手法が確立していない以上、リンク機構に応じた運動学的関係式をできるだけバラエティに富んだ記述として与えておけば、解を発見する見通しもたてやすくなると考えられる。そこで、運動学方程式を決定する段階でただ機械的な座標変換に頼って式を誘導する従来の方法では、場合によってそれ以上のリンクに関する情報を得ることが容易でないから、観点を異とした取り組み方を試みた。即ち、関節機構を認識した上で比較的直感がきくベクトル法で話を展開し、回転演算子の逆行列の作用で有益な関係式を導き出した。多項式法で逆問題を解く際に解発見の動機となった6つのパラメータとそれを含む式が今回導いた式の中にも存在し、かつパラメータの意味付けも十分理解できた。運動学に対する異なる表現形式の採用は、逆問題解決への1つの有力な手掛となることが期待される。

### 謝 辞

本稿を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に貴重なアドバイスと激励を賜り感謝いたします。

### 参 考 文 献

- 1) Paul, R. P. : " Robot Manipulators :Mathematics, Programming and Control", The MIT Press, 1981.
- 2) 若松清司他編："ロボットの制御", 計測自動制御学会, 1985.
- 3) Sasaki S. : "Derivation of Manipulator Kinematics Based on a Vector Formulation", JAERI-M 86-122, July 1986.
- 4) Sasaki S. : " A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arms", JAERI-M 86-018, Jan. 1986.
- 5) 佐々木忍：" マニピュレータ構造に依存した行列による運動学の表現とその逆問題の解法", JAERI-M 87-039, Mar. 1987.

付録1 直交座標系における座標変換行列の性質

直交座標系  $0-XYZ$  の各座標軸を原点  $0$  の回りに回転させて、新しい座標系  $0-X_1Y_1Z_1$  を作る (Fig. A 参照)。これらの座標系の基本ベクトルを、それぞれ  $i, j, k$  および  $i_1, j_1, k_1$  とする。いま、

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= a_{11}i + a_{21}j + a_{31}k \\ j_1 &= a_{12}i + a_{22}j + a_{32}k \\ k_1 &= a_{13}i + a_{23}j + a_{33}k \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.1})$$

とおけば、行列記号を用いて (A. 1.1) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} (i_1, j_1, k_1) &= (i, j, k) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (i, j, k) A \end{aligned} \quad (\text{A. 1.2})$$

$$\text{但し, } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A. 1.3})$$

$i_1, j_1, k_1$  は互いに直交する単位ベクトルであるから、スカラー積は

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_1 &= j_1 \cdot j_1 = k_1 \cdot k_1 = 1 \\ i_1 \cdot j_1 &= j_1 \cdot k_1 = k_1 \cdot i_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 1.4})$$

となる。

従って、(A. 1.1) を上の式に代入すると行列  $A$  の要素  $a_{ij}$  は次の関係を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (a_{j1})^2 &= \sum_{j=1}^3 (a_{j2})^2 = \sum_{j=1}^3 (a_{j3})^2 = 1 \\ \sum_{j=1}^3 a_{j2} a_{j3} &= \sum_{j=1}^3 a_{j3} a_{j1} = \sum_{j=1}^3 a_{j1} a_{j2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.5})$$

これより行列  $A$  とその転置行列  $A^T$  を乗じると

$$A^T A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 (a_{j1})^2 & \sum_{j=1}^3 a_{j1} a_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{j1} a_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{j2} a_{j1} & \sum_{j=1}^3 (a_{j2})^2 & \sum_{j=1}^3 a_{j2} a_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{j3} a_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{j3} a_{j2} & \sum_{j=1}^3 (a_{j3})^2 \end{vmatrix} = E$$

となり、次のように書き表せる。

$$A^T A = E \quad \text{または} \quad A^{-1} = A^T \quad (\text{A. 1.6})$$

ここで、 $A^{-1}$  は  $A$  の逆行列を、 $E$  は単位行列を表す。

われわれは、(A. 1.6) を満たす行列  $A$  を直交行列と呼ぶ。

尚 (A. 1.2) または (A. 1.3) から  $i, j, k$  を求めると、(A. 1.6) を利用して次の式を得る。

$$(i, j, k) = (i_1, j_1, k_1) A^{-1} = (i_1, j_1, k_1) A^T$$

展開形は、

$$\begin{aligned} i &= a_{11} i_1 + a_{12} j_1 + a_{13} k_1 \\ j &= a_{21} i_1 + a_{22} j_1 + a_{23} k_1 \\ k &= a_{31} i_1 + a_{32} j_1 + a_{33} k_1 \end{aligned}$$

となる。

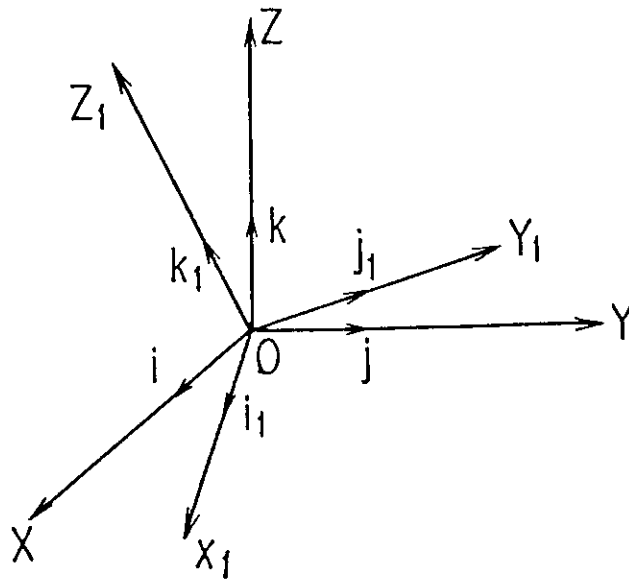


Fig.A Rotation of co-ordinate system

付録2 グループ2, グループ3の計算過程

(1) グループ2 :  $(T_1 T_2)^{-1}$  の作用

$x_0 = T_1 T_2 T_3 T_4 x_H = {}^1T_4 x_H$  の関係に左から  $(T_1 T_2)^{-1}$  を作用させる。

$$({}^1T_2)^{-1} x_0 = ({}^1T_2)^T x_0 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} x_0 = T_3 T_4 x_H \quad (\text{A.2.1})$$

$$\begin{aligned} \text{右辺は, } T_3 T_4 x_H &= \begin{vmatrix} C_4 & -S_4 C_5 & S_4 S_5 \\ S_4 & C_4 C_5 & -C_4 S_5 \\ 0 & S_5 & C_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_6 & 0 & S_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_6 & 0 & C_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 & -S_4 C_5 & C_4 S_6 + S_4 S_5 C_6 \\ S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6 & C_4 C_5 & S_4 S_6 - C_4 S_5 C_6 \\ -C_5 S_6 & S_5 & C_5 C_6 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

と計算される。これより,

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{vmatrix} = T_3 T_4 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 \\ S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6 \\ -C_5 S_6 \end{vmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

をとおして

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} n_X + \beta_{21} n_Y + \beta_{31} n_Z &= C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 \\ \beta_{12} n_X + \beta_{22} n_Y + \beta_{32} n_Z &= S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6 \\ \beta_{13} n_X + \beta_{23} n_Y + \beta_{33} n_Z &= -C_5 S_6 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.4})$$

を導く。同様にして, (A.2.5), (A.2.7) から (A.2.6), (A.2.8) を引出す。

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} o_X \\ o_Y \\ o_Z \end{vmatrix} = T_3 T_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -S_4 C_5 \\ C_4 C_5 \\ S_5 \end{vmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} o_X + \beta_{21} o_Y + \beta_{31} o_Z &= -S_4 C_5 \\ \beta_{12} o_X + \beta_{22} o_Y + \beta_{32} o_Z &= C_4 C_5 \\ \beta_{13} o_X + \beta_{23} o_Y + \beta_{33} o_Z &= S_5 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.6})$$

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = T_3 T_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_4 S_6 + S_4 S_5 C_6 \\ S_4 S_6 - C_4 S_5 C_6 \\ C_5 C_6 \end{vmatrix} \quad (\text{A. 2.7})$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} a_x + \beta_{21} a_y + \beta_{31} a_z &= C_4 S_6 + S_4 S_5 C_6 \\ \beta_{12} a_x + \beta_{22} a_y + \beta_{32} a_z &= S_4 S_6 - C_4 S_5 C_6 \\ \beta_{13} a_x + \beta_{23} a_y + \beta_{33} a_z &= C_5 C_6 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.8})$$

(2) グループ 3 :  $T_1^{-1}$  の作用

最後に, (2.2.1) に  $T_1^{-1}$  に作用させて以下の関係式を得る。

$$\mathbf{x}_0 = T_1 T_2 T_3 T_4 \mathbf{x}_H = {}^1 T_4 \mathbf{x}_H$$

$$T_1^{-1} \mathbf{x}_0 = T_1^T \mathbf{x}_0 = T_2 T_3 T_4 \mathbf{x}_H \quad (\text{A. 2.9})$$

$$\begin{aligned} T_2 T_3 T_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & -S_3 \\ 0 & S_3 & C_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 & -S_4 C_5 & C_4 S_6 + S_4 S_5 C_6 \\ S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6 & C_4 C_5 & S_4 S_6 - C_4 S_5 C_6 \\ -C_5 S_6 & S_5 & C_5 C_6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 & -S_4 C_5 & C_4 S_6 + S_4 S_5 C_6 \\ C_3 (S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) + S_3 C_5 S_6 & C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5 & C_3 (S_4 S_6 - C_4 S_5 C_6) - S_3 C_5 C_6 \\ S_3 (S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) - C_3 C_5 S_6 & S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5 & S_3 (S_4 S_6 - C_4 S_5 C_6) + C_3 C_5 C_6 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A. 2.10})$$

(A. 2.9) に  $\mathbf{x}_0 = (n_x, n_y, n_z)^T$ ,  $\mathbf{x}_H = (1, 0, 0)^T$  を代入して

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = T_2 T_3 T_4 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 \\ C_3 (S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) + S_3 C_5 S_6 \\ S_3 (S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) - C_3 C_5 S_6 \end{vmatrix} \quad (\text{A. 2.11})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} n_x + \alpha_{21} n_y + \alpha_{31} n_z &= C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 \\ \alpha_{12} n_x + \alpha_{22} n_y + \alpha_{32} n_z &= C_3 (S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) + S_3 C_5 S_6 \\ \alpha_{13} n_x + \alpha_{23} n_y + \alpha_{33} n_z &= S_3 (S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) - C_3 C_5 S_6 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.12})$$

を導き, また同じ (A. 2.9) に  $\mathbf{x}_0 = (o_x, o_y, o_z)^T$ ,  $\mathbf{x}_H = (0, 1, 0)^T$  を代入して (A. 2.14) を得る。

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{vmatrix} = T_2 T_3 T_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -S_4 C_5 \\ C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5 \\ S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5 \end{vmatrix} \quad (\text{A. 2.13})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} o_x + \alpha_{21} o_y + \alpha_{31} o_z &= -S_4 C_5 \\ \alpha_{12} o_x + \alpha_{22} o_y + \alpha_{32} o_z &= C_3 C_4 C_5 - S_3 S_5 \\ \alpha_{13} o_x + \alpha_{23} o_y + \alpha_{33} o_z &= S_3 C_4 C_5 + C_3 S_5 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.14})$$

最後に、 $x_0 = (a_x, a_y, a_z)^T$ ,  $x_H = (0, 0, 1)^T$ を代入したものが (A. 2.16) である。

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = T_2 T_3 T_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6 \\ c_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) - s_3 c_5 c_6 \\ s_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) + c_3 c_5 c_6 \end{vmatrix} \quad (\text{A. 2.15})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} a_x + \alpha_{21} a_y + \alpha_{31} a_z &= c_4 s_6 + s_4 s_5 c_6 \\ \alpha_{12} a_x + \alpha_{22} a_y + \alpha_{32} a_z &= c_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) - s_3 c_5 c_6 \\ \alpha_{13} a_x + \alpha_{23} a_y + \alpha_{33} a_z &= s_3 (s_4 s_6 - c_4 s_5 c_6) + c_3 c_5 c_6 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.16})$$