

JAERI - M  
87-175

ベクトル・幾何学および多項式表現を用いた  
6リンク・マニピュレータの機構解析

1987年11月

佐々木 忍・篠原 慶邦

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division  
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-  
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1987

編集兼発行 日本原子力研究所  
印 刷 いばらき印刷株式会社

ベクトル・幾何学および多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの機構解析

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍・篠原 慶邦

(1987年10月5日受理)

本報では、リンク機構の解析に対してベクトルと幾何学の知識を利用した方法でリンク関係式と同時に各関節の角度を誘導する。回転(単位)ベクトルの変位の定式化と簡単なベクトル演算がこの方法の基本的考え方である。従来の座標変換法に比べて、関係式が直感的に作られ、また個々の関節解が陽的に導き出せることが本法の利点である。解析結果は、既報の結果と完全に一致していることを確認した。

Kinematic Analysis of a Six-Link Manipulator Based on  
Vector, Elementary Geometry and Polynomial Expression

Shinobu SASAKI and Yoshikuni SHINOHARA

Department of Reactor Engineering  
Tokai Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 5, 1987)

This paper is concerned with the description of relationships between links and the direct derivation of individual joint solutions using the knowledge relating vector and elementary geometry for analysing link mechanisms, in which formulation of angular displacement by means of rotational (unit) vector and simple vector arithmetics are the basic approaches. Compared with the traditional transformation method, the present advantages are to permit explicit angular solution for each joint as well as intuitive formulation. Analytical results show that they are in complete agreement with the previous results with respect to the precision or the number of solutions.

Keywords: Vector-Geometrical Approach, Linkage Mechanism, Direct and Inverse Kinematics, Manipulator

## 目 次

1. はじめに .....	1
2. リンク機構に対する解析表現と関節角の計算法 .....	2
2.1 関節角 $\theta_2, \theta_3$ の表現 .....	2
2.2 関節角 $\theta_4, \theta_5$ の表現 .....	6
2.3 関節Dの位置および関節角 $\theta_1, \theta_6$ の表現 .....	8
3. 個々の関節解を決定するための代数方程式の誘導 .....	13
4. おわりに .....	15
参考文献 .....	15
付 録 .....	16

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Analytical representation for linkage mechanism and computational method for joint angle solutions .....	2
2.1 Representation of joint angles $\theta_2$ and $\theta_3$ .....	2
2.2 Representation of joint angles $\theta_4$ and $\theta_5$ .....	6
2.3 Representation of a position of joint D and of joint angles $\theta_1$ and $\theta_6$ .....	8
3. Derivation of an algebraic equation for determining each joint solution .....	13
4. Concluding remarks .....	15
References .....	15
Appendices .....	16

## 1. はじめに

一般に多関節形ロボット・マニピュレータの運動学は、座標変換法を適用することでリンク機構の空間的な位置・姿勢が容易に計算される<sup>(1),(2)</sup>。一方、この運動学に対する逆問題は複雑な連立非線形方程式を解く問題となり、その解析解は一般的な手順で求められないので、それをいかに効率よく解くかが課題である。そのために、マニピュレータの根元から指先までの関係を同次座標変換法で導出した結果が複雑ゆえにその解法で苦慮するよりも、むしろリンク機構の構成因子である個々の関節の局所的性質に着目し、単位ベクトルのスカラー積やベクトル積などの演算と幾何の性質を併用して、各関節角を直接的に誘導することが考えられる。ベクトルの表示は、力学、運動学、曲線論等の分野で幅広く応用されているが、リンク機構の解析に対しても、リンクの空間的変位をベクトル量で表示し、幾何学的立場で解析を進めることが本報の重点目標であり、それらの簡潔な表示と容易な導出による新しいアプローチを報告する。以下では、座標変換法を用いない立場で話を展開するが、しかし、ベクトル法に基づくすべてのマニピュレータ・リンク解析を系統的に議論することはできないので、典型的な問題をとりあげてその考え方と解決方法にスポットをあてる。通常ベクトルを用いた質点の軌道などの定式化は、時間と共に変化する状態のダイナミクスが中心であるが、位置と関節角の対応を議論する運動学では、運動方向と向きのみを考えているので、以下では時間の依存性は扱わない。

## 2. リンク機構に対する解析表現と関節角の計算法

本報で解析の対象とするマニピュレータをFig.1に示す。通常、運動学の決定においては各リンクに独立した座標を指定することからはじめるが、以下の解析でも関節の単位ベクトルの動きが重要になるので図に示したような座標系を設定する\* )

各関節に固定した直交座標系  $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$  の  $x_i, y_i, z_i$  軸に沿っての単位ベクトルを  $\mathbf{n}_i, \mathbf{o}_i, \mathbf{a}_i$  とする。特に、指先  $F(x_h, y_h, z_h)$  のそれを  $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$  とする。また、成分で表したベクトルを  $\mathbf{n}_i = (n_{ix}, n_{iy}, n_{iz})^T, \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$  等と記す。(Tは転置記号。)

### 2.1 関節角 $\theta_2, \theta_3$ の表現

Fig.1に示すマニピュレータの機構上の主要な特徴は、根元から関節Dまでが同一平面を形成することであり、特に四角形OABCDに対して幾何学的側面から究明する。ただ、以下では解析の都合上この平面の一部、即ち $\triangle ABD$ について考える。(Fig.2参照)

図から明らかのように、マニピュレータの空間姿勢として、A, Dの位置を固定しても、関節Bが直線ADに対して、2つの異なった状態を取りうる事がわかる。このことはつまり  $\theta_2$  (また、 $\theta_3$ ) に2通りの違った解の可能性を示唆している。本節では、 $\theta_2, \theta_3, \omega_1$ 間の簡単な解析関係と解の表現を引出す。

まず、 $\triangle ABD$ について、幾何ベクトルの複素数表示を行うと、( $AB=l_2, BD=l_{34}, AD=L$ として)

$$L \exp(j\omega_1) = l_2 \exp(j\theta_2) + l_{34} \exp\{j(\theta_2 + \theta_3)\} \quad (1)$$

となる。ここに、 $\exp(z)$ は複素指数関数を表し、 $j$ は虚数単位( $j^2 = -1$ )とする。(1)を展開すると、

$$L(\cos \omega_1 + j \sin \omega_1) = l_2(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2) + l_{34}(\cos \theta_{23} + j \sin \theta_{23})$$

となり、両辺の実部、虚部を等しくおいて、

---

\* ) Fig.1のリンク機構に対して定義した各座標系  $\Sigma_i$  は、 $x, y, z$ のまわりの回転操作を  $\text{Rot}(x, \theta), \text{Rot}(y, \theta), \text{Rot}(z, \theta)$ 、また並進操作を  $\text{Trans}(a, b, c)$ と記すと、下記の意味をもつ。例えば、マニピュレータの第2関節に固定した座標系  $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$  は、軸  $x_2$ のまわりの回転と  $z_2$ 方向への並進を含めた操作  $\text{Rot}(x_2, \theta_2) \text{Trans}(0, 0, l_2)$ によって、第3関節の位置に新しい座標系  $\Sigma_3(x_3, y_3, z_3)$ を設定することを意味する。

$$\begin{aligned} \Sigma_0(x_0, y_0, z_0) & \dots\dots\dots \Sigma_1(x_1, y_1, z_1) \\ \Sigma_1(x_1, y_1, z_1) & \dots\dots \text{Rot}(z_1, \theta_1) \text{Trans}(0, 0, l_1) \dots\dots \Sigma_2(x_2, y_2, z_2) \\ \Sigma_2(x_2, y_2, z_2) & \dots\dots \text{Rot}(x_2, \theta_2) \text{Trans}(0, 0, l_2) \dots\dots \Sigma_3(x_3, y_3, z_3) \\ \Sigma_3(x_3, y_3, z_3) & \dots\dots \text{Rot}(x_3, \theta_3) \text{Trans}(0, 0, l_3) \dots\dots \Sigma_4(x_4, y_4, z_4) \\ \Sigma_4(x_4, y_4, z_4) & \dots\dots \text{Rot}(z_4, \theta_4) \text{Trans}(0, 0, l_4) \dots\dots \Sigma_5(x_5, y_5, z_5) \\ \Sigma_5(x_5, y_5, z_5) & \dots\dots \text{Rot}(x_5, \theta_5) \text{Trans}(0, 0, l_5) \dots\dots \Sigma_6(x_6, y_6, z_6) \\ \Sigma_6(x_6, y_6, z_6) & \dots\dots \text{Rot}(y_6, \theta_6) \text{Trans}(0, 0, l_6) \dots\dots \Sigma_H(x_h, y_h, z_h) \end{aligned}$$

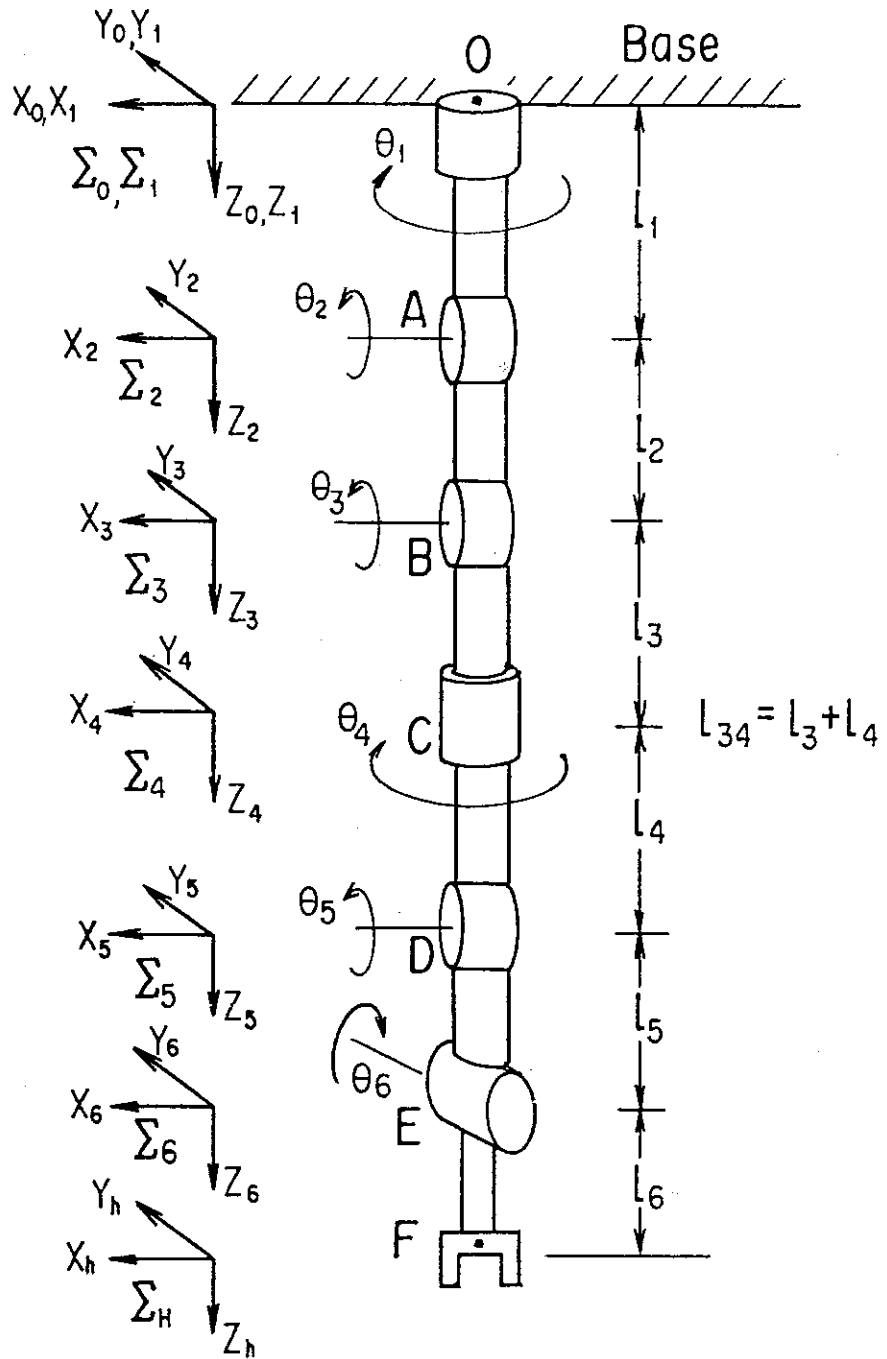


Fig.1 Six-Link Manipulator and Link Co-ordinates



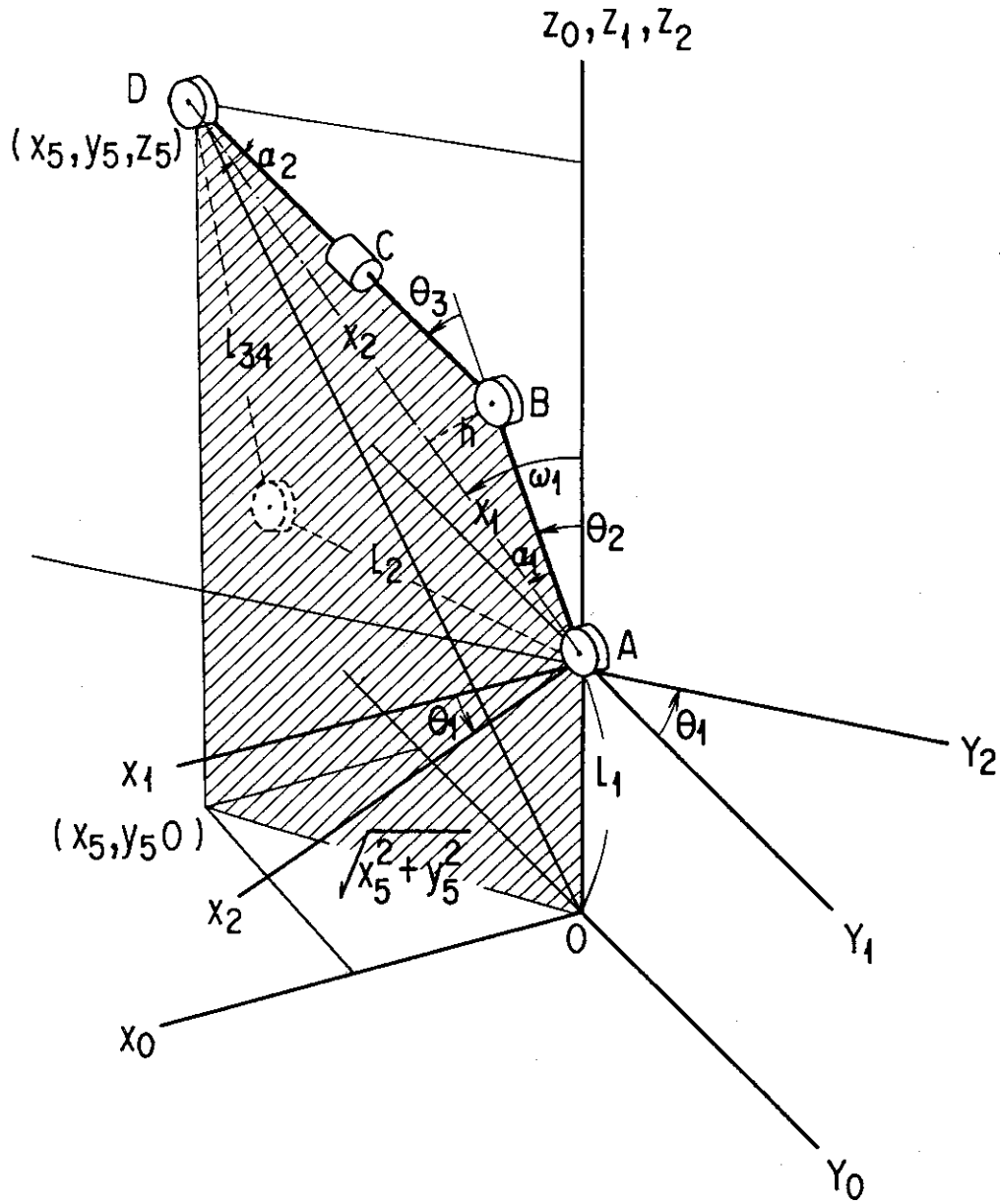


Fig.2 Geometrical Illustration of Links Between Joints 2 and 5

$$L \cos \omega_1 = l_2 \cos \theta_2 + l_{34} \cos \theta_{23} \quad (2)$$

$$L \sin \omega_1 = l_2 \sin \theta_2 + l_{34} \sin \theta_{23} \quad (3)$$

を得る。(但し、 $\theta_2 + \theta_3 = \theta_{23}$  と記す。) これより、 $\tan \omega_1$  が次の式で定まる。

$$\tan \omega_1 = \frac{l_2 \sin \theta_2 + l_{34} \sin \theta_{23}}{l_2 \cos \theta_2 + l_{34} \cos \theta_{23}} \quad (4)$$

また、(2)<sup>2</sup> + (3)<sup>2</sup> を実行すると、

$$\begin{aligned} L^2 &= l_2^2 + l_{34}^2 + 2 l_{34} l_2 (\cos \theta_2 \cos \theta_{23} + \sin \theta_2 \sin \theta_{23}) \\ &= l_2^2 + l_{34}^2 + 2 l_2 l_{34} \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

一方、(2)、(3) を次のように置き換えたうえで

$$l_2 \cos \theta_2 = L \cos \omega_1 - l_{34} \cos \theta_{23} \quad (2)^+$$

$$l_2 \sin \theta_2 = L \sin \omega_1 - l_{34} \sin \theta_{23} \quad (3)^+$$

辺々を二乗して加えると、

$$\begin{aligned} l_2^2 &= L^2 + l_{34}^2 - 2 L l_{34} (\cos \omega_1 \cos \theta_{23} + \sin \omega_1 \sin \theta_{23}) \\ &= L^2 + l_{34}^2 - 2 L l_{34} \cos (\theta_{23} - \omega_1) \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。この式から、

$$\cos (\theta_{23} - \omega_1) = (L^2 + l_{34}^2 - l_2^2) / 2 L l_{34} \quad (7)$$

となる。ここで、Fig. 2 に描かれた  $\triangle ABD$  に対して、余弦法則を適用すると

$$l_2^2 = l_{34}^2 + L^2 - 2 l_{34} L \cos \alpha_2 \quad (8)$$

$$l_{34}^2 = l_2^2 + L^2 - 2 l_2 L \cos \alpha_1 \quad (9)$$

が得られる。

$$\text{但し、} \begin{cases} l_{34} = l_3 + l_4 \\ L^2 = x_5^2 + y_5^2 + (z_5 - l_1)^2 \end{cases} \quad (10)$$

$L$  は第 2 関節 A と第 5 関節 D の 3 次元距離であり、 $(x_5, y_5, z_5)$  は基準系  $\Sigma_0$  に関する D の位置を示す。 $((x_5, y_5, z_5)$  の表現については 2.3 で説明する。)

(8)、(9) から容易に

$$\cos \alpha_1 = (l_2^2 + L^2 - l_{34}^2) / 2 l_2 L \quad (11)$$

$$\cos \alpha_2 = (l_{34}^2 + L^2 - l_2^2) / 2 l_{34} L \quad (12)$$

を導くことができる。

(7)、(12) を比較して

$$\cos (\theta_{23} - \omega_1) = \cos \alpha_2$$

$$\text{から、} \quad \theta_{23} - \omega_1 = \pm \alpha_2 \quad (13)$$

を得る。

同様にして、(2)、(3) より

$$l_{34} \cos \theta_{23} = L \cos \omega_1 - l_2 \cos \theta_2$$

$$l_{34} \sin \theta_{23} = L \sin \omega_1 - l_2 \sin \theta_2$$

を辺々二乗して加えると、

$$\begin{aligned} l_{34}^2 &= L^2 + l_2^2 - 2 L l_2 (\cos \omega_1 \cos \theta_2 + \sin \omega_1 \sin \theta_2) \\ &= L^2 + l_2^2 - 2 l_2 L \cos (\theta_2 - \omega_1) \end{aligned} \quad (14)$$

が引出され、次の

$$2L l_2 \cos(\theta_2 - \omega_1) = L^2 + l_2^2 - l_{34}^2$$

と(11)を利用すれば、 $\theta_2$ が簡潔な形で求まる。

$$\theta_2 - \omega_1 = \pm \alpha_1 \quad (15)$$

$\theta_3$ は、(13)を使って、直ちに解がでる。

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2 \quad (16)$$

それでは、つぎに $\theta_2$ 、 $\theta_3$ を確定する上でそこに含まれた $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ は、(11)、(12)の逆余弦関数( $\cos^{-1}$ )を使うと角度符号が不定のため、次のような初等幾何を利用した逆正接関数として表現する。

いま、 $\triangle ABD$ の頂点Bから対辺ADへ下した垂線がADを $x_1$ 、 $x_2$ に分割すると、

$$l_2^2 - x_1^2 = l_{34}^2 - x_2^2 \quad (l_2 > l_{34}) \quad (17)$$

$$x_1 + x_2 = L \quad (18)$$

が成立つ。(17)を移項した

$$x_1^2 - x_2^2 = l_2^2 - l_{34}^2 \quad (\triangleq a)$$

と(18)から $x_1$ 、 $x_2$ が求まる。

$$\therefore x_1 = (L^2 + l_2^2 - l_{34}^2) / 2L = (L^2 + a) / 2L \quad (19)$$

$$x_2 = (L^2 - l_2^2 + l_{34}^2) / 2L = (L^2 - a) / 2L \quad (20)$$

これを(17)に代入すると、

$$\begin{aligned} h^2 &= l_2^2 - x_1^2 = \{4L^2 l_2^2 - (L^2 + l_2^2 - l_{34}^2)^2\} / 4L^2 \\ &= \{(2Ll_2 + L^2 + l_2^2 - l_{34}^2)(2Ll_2 - L^2 - l_2^2 + l_{34}^2)\} / 4L^2 \\ &= \{(L + l_2)^2 - l_{34}^2\} \{l_{34}^2 - (L - l_2)^2\} / 4L^2 \\ &= (L + l_2 + l_{34})(L + l_2 - l_{34})(l_{34} + L - l_2)(l_{34} - L + l_2) / 4L^2 \\ &= 4s(s - l_{34})(s - l_2)(s - L) / L^2 \end{aligned} \quad (21)$$

(但し、 $s = (l_2 + l_{34} + L) / 2$ とおく。)

となり、平方根をとって

$$\therefore h = 2\sqrt{s(s - l_{34})(s - l_2)(s - L)} / L = 2H / L \quad (22)$$

$$\text{但し、} H = \sqrt{s(s - l_{34})(s - l_2)(s - L)} \quad (23)$$

が決る。これより、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ が次式で求まる。

$$\tan \alpha_1 = h / x_1 = 4H / (L^2 + a) = \sqrt{4L^2 l_2^2 - (L^2 + a)^2} / (L^2 + a) \quad (24)$$

$$\tan \alpha_2 = h / x_2 = 4H / (L^2 - a) = \sqrt{4L^2 l_2^2 - (L^2 + a)^2} / (L^2 - a) \quad (25)$$

以上で、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ が逆正接関数として定まったことになる。但し、右辺は未知数Lを含み、これについては後程詳しく述べる。

## 2.2 関節角 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ の表現

次に、Fig. 1に示した空間リンク機構における第5関節の単位ベクトルは $\mathbf{n}_5 \perp \mathbf{a}_4$ 、 $\mathbf{n}_5 \perp \mathbf{o}$ となることからわかる。従って、 $\mathbf{n}_5$ の記述を両者の外積に平行な単位ベクトルとして

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_5 &= \mathbf{o} \times \mathbf{a}_4 / |\mathbf{o} \times \mathbf{a}_4| \\
 &= [(a_{4z} o_y - a_{4y} o_z) \mathbf{n}_0 + (a_{4x} o_z - a_{4z} o_x) \mathbf{o}_0 + (a_{4y} o_x - a_{4x} o_y) \mathbf{a}_0] / P_a \\
 &= [(c_{23} o_y + c_1 s_{23} o_z) \mathbf{n}_0 + (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x) \mathbf{o}_0 + (-s_1 s_{23} o_y - c_1 s_{23} o_x) \mathbf{a}_0] / P_a
 \end{aligned} \tag{26}$$

と表す。ここで、 $\mathbf{a}_4 = (a_{4x}, a_{4y}, a_{4z})^T = (s_1 s_{23}, -c_1 s_{23}, c_{23})^T$  (27)

$$\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z)^T, \quad \mathbf{n}_2 = (c_1, s_1, 0)^T \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 P_a &= \sqrt{(c_{23} o_y + c_1 s_{23} o_z)^2 + (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x)^2 + (s_1 s_{23} o_y + c_1 s_{23} o_x)^2} \\
 &= \sqrt{1 - (c_1 s_{23} o_y - c_{23} o_z - s_1 s_{23} o_x)^2}
 \end{aligned} \tag{29}$$

また、 $\sin \theta_i = s_i$ ,  $\cos \theta_i = c_i$ ,  $\sin(\theta_i + \theta_j) = s_{ij}$ ,  $\cos(\theta_i + \theta_j) = c_{ij}$  なる略式記号を以下でも用いる。

前記のベクトル  $\mathbf{n}_5$  が定まると、第4関節について

$$\begin{aligned}
 c_4 &= \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n}_5 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_5 \text{ の関係がわかる。即ち,} \\
 c_4 &= \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_5 = \{c_{23} c_1 o_y + c_1^2 s_{23} o_z + s_1^2 s_{23} o_z - s_1 c_{23} o_x\} / P_a \\
 &= \{s_{23} o_z + c_{23} (c_1 o_y - s_1 o_x)\} / P_a
 \end{aligned} \tag{30}$$

と記述される。さらに、 $(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_5, \mathbf{a}_4) = s_4$  であることに注意すると、 $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_5$  のベクトル積は、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_5 &= \begin{vmatrix} \mathbf{n}_0 & \mathbf{o}_0 & \mathbf{a}_0 \\ c_1 & s_1 & 0 \\ n_{5x} & n_{5y} & n_{5z} \end{vmatrix} = (s_1 n_{5z}) \mathbf{n}_0 + (-n_{5z} c_1) \mathbf{o}_0 + (n_{5y} c_1 - n_{5x} s_1) \mathbf{a}_0 \\
 &= \mathbf{n}_0 \left\{ \frac{s_1 (-s_1 s_{23} o_y - c_1 s_{23} o_x)}{P_a} \right\} + \mathbf{o}_0 \left\{ \frac{-c_1 (-s_1 s_{23} o_y - c_1 s_{23} o_x)}{P_a} \right\} + \\
 &\quad \mathbf{a}_0 \left\{ \frac{c_1 (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x)}{P_a} - \frac{s_1 (c_{23} o_y + c_1 s_{23} o_z)}{P_a} \right\} \\
 &= \frac{(c_1 o_x + s_1 o_y)}{P_a} (-\mathbf{n}_0 s_1 s_{23} + \mathbf{o}_0 c_1 s_{23} - \mathbf{a}_0 c_{23})
 \end{aligned} \tag{31}$$

と書けることから、

$$\begin{aligned}
 s_4 &= (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_5, \mathbf{a}_4) = \frac{(c_1 o_x + s_1 o_y)}{P_a} \{-s_1^2 s_{23}^2 - c_1^2 s_{23}^2 - c_{23}^2\} \\
 &= \frac{-(c_1 o_x + s_1 o_y)}{P_a}
 \end{aligned} \tag{32}$$

結局、 $\theta_4$  は (31), (32) を使って次のような  $\theta_{23}, \theta_1$  を含む式となる。

$$\tan \theta_4 = \frac{s_4}{c_4} = \frac{-(c_1 o_x + s_1 o_y)}{s_{23} o_z + c_{23} (c_1 o_y - s_1 o_x)} \tag{33}$$

$\tan \theta_5$  は次のようにして算出できる。

(27) の  $\mathbf{a}_4 = (s_1 s_{23}, -c_1 s_{23}, c_{23})^T$  と次の  $\mathbf{a}_6$  の記述

$$\mathbf{a}_6 = (a_x c_6 - n_x s_6, a_y c_6 - n_y s_6, a_z c_6 - n_z s_6)^T \tag{34}$$

を使って、(但し、 $\mathbf{a}_6$  の記述は次節で詳述する。)

$$\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}_6 = c_5, \quad \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{o} = s_5 \tag{35}$$

なるスカラー積を計算すると、

$$\tan \theta_5 = \frac{s_5}{c_5} = \frac{(s_1 s_{23} o_x - c_1 s_{23} o_y + c_{23} o_z)}{(a_x c_6 - n_x s_6) s_1 s_{23} - (a_y c_6 - n_y s_6) c_1 s_{23} + (a_z c_6 - n_z s_6) c_{23}} \quad (36)$$

を導き出すことができる。

### 2.3 関節Dの位置および関節角 $\theta_1$ 、 $\theta_6$ の表現

前2節で、関節解  $\theta_2 \sim \theta_5$  の形式的な表現を述べた。ここでは、指先と指先に近い（第6、第5）関節間の関係をベクトル法を利用して導きだす。そのための定式化として、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_6 = c_6$ 、 $\mathbf{n}_6^2 = 1$ 、 $\mathbf{n}_6 \cdot \mathbf{o} = 0$  よりベクトル  $\mathbf{n}_6$  を指先方向ベクトル  $\mathbf{o}$ 、 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{a}$  と  $\theta_6$  で表現することを考える。

ここに、 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ 、 $\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z)^T$ 、 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$  は与えられた指先方向余弦ベクトルである。また、 $\mathbf{n}_6 = (n_{6x}, n_{6y}, n_{6z})^T$  は先端にもっとも近い関節の方向ベクトルとする。上のスカラ積を実行すると

$$n_x n_{6x} + n_y n_{6y} + n_z n_{6z} = c_6 \quad (37)$$

$$n_{6x}^2 + n_{6y}^2 + n_{6z}^2 = 1 \quad (38)$$

$$o_x n_{6x} + o_y n_{6y} + o_z n_{6z} = 0 \quad (39)$$

(39) より、 $n_{6z} = -(o_x n_{6x} + o_y n_{6y}) / o_z$  を (38)、(37) に代入して、

$$(o_z^2 + o_x^2) n_{6x}^2 + (o_z^2 + o_y^2) n_{6y}^2 + 2 o_x o_y n_{6x} n_{6y} = o_z^2 \quad (40)$$

$$(n_x o_z - n_z o_x) n_{6x} + (n_y o_z - n_z o_y) n_{6y} = o_z c_6 \quad (41)$$

と整理できる。

(41) より、 $n_{6y} = \{o_z c_6 - (n_x o_z - n_z o_x) n_{6x}\} / (n_y o_z - n_z o_y)$  を (40) に代入して

$$(o_z^2 + o_x^2) (n_y o_z - n_z o_y)^2 n_{6x}^2 + (o_z^2 + o_y^2) \{o_z c_6 - (n_x o_z - n_z o_x) n_{6x}\}^2 + 2 o_x o_y n_{6x} (n_y o_z - n_z o_y) \{o_z c_6 - (n_x o_z - n_z o_x) n_{6x}\} = o_z^2 (n_y o_z - n_z o_y)^2$$

これは  $n_{6x}$  に関する2次方程式と見做して各係数を整理する。

$n_{6x}^2$  の係数：

$$\begin{aligned} & (o_z^2 + o_x^2) (n_y o_z - n_z o_y)^2 + (o_z^2 + o_y^2) (n_x o_z - n_z o_x)^2 - \\ & 2 o_x o_y (n_y o_z - n_z o_y) (n_x o_z - n_z o_x) \\ & = (o_z^2 + o_x^2) a_x^2 + 2 o_x o_y a_x a_y + (o_z^2 + o_y^2) a_y^2 \\ & = o_z^2 (a_x^2 + a_y^2) + (o_x a_x + o_y a_y)^2 = o_z^2 (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) = o_z^2 \end{aligned} \quad (42)$$

$n_{6x}$  の係数：

$$\begin{aligned} & -2 (o_z^2 + o_y^2) (n_x o_z - n_z o_x) o_z c_6 + 2 o_x o_y (n_y o_z - n_z o_y) o_z c_6 \\ & = 2 o_z c_6 \{o_x o_y (n_y o_z - n_z o_y) - (o_y^2 + o_z^2) (n_x o_z - n_z o_x)\} = -2 o_z^2 n_x c_6 \end{aligned} \quad (43)$$

定数項：

$$\begin{aligned} & (o_y^2 + o_z^2) o_z^2 c_6^2 - o_z^2 (n_y o_z - n_z o_y)^2 \\ & = o_z^2 \{ (o_y^2 + o_z^2) c_6^2 - (n_y o_z - n_z o_y)^2 \} \end{aligned} \quad (44)$$

従って元の二次方程式は下記の形となる。

$$o_z^2 n_{6x}^2 - 2 o_z^2 n_x c_6 n_{6x} + o_z^2 \{ (o_y^2 + o_z^2) c_6^2 - (n_y o_z - n_z o_y)^2 \} = 0$$

さらに、 $o_z^2 \neq 0$  として (45) の簡潔な式に到達する。

$$n_{6x}^2 - 2 n_x c_6 n_{6x} + (o_y^2 + o_z^2) c_6^2 - (n_y o_z - n_z o_y)^2 = 0 \quad (45)$$

根を求めると、結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} n_{6x} &= n_x c_6 \pm \sqrt{n_x^2 c_6^2 - (o_y^2 + o_z^2) c_6^2 + a_x^2} = n_x c_6 \pm \sqrt{(n_x^2 - 1 + o_x^2) c_6^2 + a_x^2} \\ &= n_x c_6 \pm \sqrt{(1 - a_x^2 - 1) c_6^2 + a_x^2} = n_x c_6 \pm \sqrt{a_x^2 (1 - c_6^2)} = n_x c_6 \pm a_x s_6 \\ n_{6y} &= \{o_z c_6 - (n_x o_z - n_z o_x) n_{6x}\} / (n_y o_z - n_z o_y) \\ &= \{(a_x n_y - a_y n_x) c_6 + a_y (n_x c_6 \pm a_x s_6)\} / a_x = n_y c_6 \pm a_y s_6 \\ n_{6z} &= -(o_x n_{6x} + o_y n_{6y}) / o_z = -\{o_x (n_x c_6 \pm a_x s_6) + o_y (n_y c_6 \pm a_y s_6)\} / o_z \\ &= n_z c_6 \pm a_z s_6 \end{aligned}$$

以上で、ベクトル  $\mathbf{n}_6$  の要素は、次のように記述できる。

$$n_{6x} = n_x c_6 \pm a_x s_6 \tag{46}$$

$$n_{6y} = n_y c_6 \pm a_y s_6 \tag{47}$$

$$n_{6z} = n_z c_6 \pm a_z s_6 \tag{48}$$

ここで、マイナス符号は  $\theta_6$  を逆方向に回転した場合に相当するので、1つにまとめることができる。

同様にして、 $\mathbf{a}_6 = (a_{6x}, a_{6y}, a_{6z})$  を指先の姿勢と  $\theta_6$  で表現する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_6 &= a_x a_{6x} + a_y a_{6y} + a_z a_{6z} = c_6 \\ \mathbf{a}_6^2 &= a_{6x}^2 + a_{6y}^2 + a_{6z}^2 = 1 \\ \mathbf{o} \cdot \mathbf{a}_6 &= o_x a_{6x} + o_y a_{6y} + o_z a_{6z} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

これより、 $a_{6x}$  に関する方程式を作ると

$$a_{6x}^2 - 2c_6 a_x a_{6x} + (o_y^2 + o_z^2) c_6^2 - (a_y o_z - a_z o_y)^2 = 0 \tag{50}$$

と導かれて上と同様にして根を求める。ベクトル  $\mathbf{a}_6$  の要素は、

$$a_{6x} = a_x c_6 \pm n_x s_6 \tag{51}$$

$$a_{6y} = a_y c_6 \pm n_y s_6 \tag{52}$$

$$a_{6z} = a_z c_6 \pm n_z s_6 \tag{53}$$

となる。これと(46)～(48)の表現式に関して、 $\theta_6$  を逆回転したマイナス符号は奇関数  $s_6$  の中に吸収できることは明らかであるが、付録に記述した単位ベクトル  $\mathbf{n}_6$ ,  $\mathbf{a}_6$ ,  $\mathbf{o}_6$  間には一定の関係が存在することを考慮すると次のような唯一の表現式が定まる。

$$n_{6x} = n_x c_6 + a_x s_6, \tag{46}^+$$

$$n_{6y} = n_y c_6 + a_y s_6, \tag{47}^+$$

$$n_{6z} = n_z c_6 + a_z s_6, \tag{48}^+$$

$$a_{6x} = a_x c_6 - n_x s_6 \tag{51}^+$$

$$a_{6y} = a_y c_6 - n_y s_6 \tag{52}^+$$

$$a_{6z} = a_z c_6 - n_z s_6 \tag{53}^+$$

さて、上に導いた関係を使って次に指先と第5、第6関節の位置関係を明らかにする。マニピュレータの根元(ベース)に設定した基準座標系に関する指先位置を  $p_x, p_y, p_z$ , 位置ベクトルを  $\mathbf{P}$  とし、第6関節の座標を  $x_6, y_6, z_6$ , 位置ベクトルを  $\mathbf{p}_6$  で表す。Fig.3を参考にして、位置座標を求める。

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_6 + l_6 \mathbf{a} \tag{54}$$

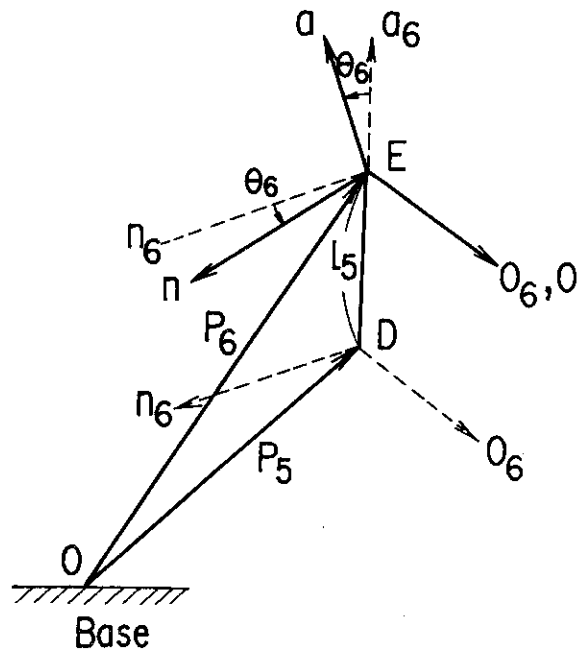
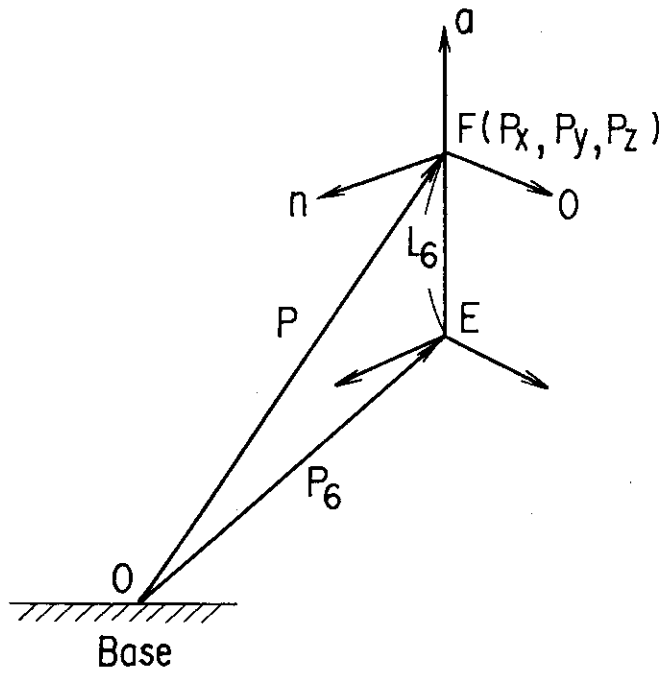


Fig.3 Position Expression of Joints 5 and 6

$$\mathbf{p}_6 = \mathbf{P} - l_6 \mathbf{a} = (p_x, p_y, p_z)^T - l_6 (a_x, a_y, a_z)^T = \begin{vmatrix} p_x - l_6 a_x \\ p_y - l_6 a_y \\ p_z - l_6 a_z \end{vmatrix} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \therefore x_6 &= p_x - l_6 a_x \\ y_6 &= p_y - l_6 a_y \\ z_6 &= p_z - l_6 a_z \end{aligned} \quad (56)$$

さらに、第5関節Dの位置ベクトル  $\mathbf{p}_5$  を与えられた指先位置と姿勢から導き出すと、

$$\mathbf{p}_6 = \mathbf{p}_5 + l_5 \mathbf{a}_6 \quad (57)$$

$$\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_6 - l_5 \mathbf{a}_6 = (x_6, y_6, z_6)^T - l_5 (a_{6x}, a_{6y}, a_{6z})^T$$

$$\begin{vmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_x - l_6 a_x \\ p_y - l_6 a_y \\ p_z - l_6 a_z \end{vmatrix} - l_5 \begin{vmatrix} a_x c_6 - n_x s_6 \\ a_y c_6 - n_y s_6 \\ a_z c_6 - n_z s_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_x - l_6 a_x - l_5 (a_x c_6 - n_x s_6) \\ p_y - l_6 a_y - l_5 (a_y c_6 - n_y s_6) \\ p_z - l_6 a_z - l_5 (a_z c_6 - n_z s_6) \end{vmatrix} \quad (58)$$

となる。

次に、この座標の簡略表示について検討してみる。以下、 $\tan(\theta_6/2) = t$  において  $c_6 = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ ,  $s_6 = 2t/(1 + t^2)$  と置き換えた上で、求めた座標を  $t$  のみで表現する。

まず、

$$\begin{aligned} x_5 &= p_x - l_6 a_x - l_5 (a_x c_6 - n_x s_6) = XX - l_5 a_x (1 - t^2)/(1 + t^2) + 2 l_5 n_x t/(1 + t^2) \\ &= \{XX(1 + t^2) - l_5 a_x + 2 l_5 n_x t + l_5 a_x t^2\}/(1 + t^2) \\ &= \{(XX - l_5 a_x) + 2 l_5 n_x t + (XX + l_5 a_x)t^2\}/(1 + t^2) \\ &= \{X_n + 2 l_5 n_x t + X_p t^2\}/(1 + t^2) = X/(1 + t^2) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\text{但し, } XX = p_x - l_6 a_x, \quad X_n = XX - l_5 a_x, \quad X_p = XX + l_5 a_x, \quad (60)$$

$$X = X_n + 2 l_5 n_x t + X_p t^2 = (1 + t^2) \{XX - l_5 (a_x c_6 - n_x s_6)\} \quad (61)$$

同様に

$$\begin{aligned} y_5 &= p_y - l_6 a_y - l_5 (a_y c_6 - n_y s_6) = YY - l_5 a_y (1 - t^2)/(1 + t^2) + 2 l_5 n_y t/(1 + t^2) \\ &= \{YY(1 + t^2) - l_5 a_y + 2 l_5 n_y t + l_5 a_y t^2\}/(1 + t^2) \\ &= \{(YY - l_5 a_y) + 2 l_5 n_y t + (YY + l_5 a_y)t^2\}/(1 + t^2) \\ &= \{Y_n + 2 l_5 n_y t + Y_p t^2\}/(1 + t^2) = Y/(1 + t^2) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\text{但し, } YY = p_y - l_6 a_y, \quad Y_n = YY - l_5 a_y, \quad Y_p = YY + l_5 a_y, \quad (63)$$

$$Y = Y_n + 2 l_5 n_y t + Y_p t^2 = (1 + t^2) \{YY - l_5 (a_y c_6 - n_y s_6)\} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} z_5 - l_1 &= p_z - l_6 a_z - l_5 (a_z c_6 - n_z s_6) - l_1 = ZZ - l_5 a_z (1 - t^2)/(1 + t^2) + 2 l_5 n_z t/(1 + t^2) \\ &= \{ZZ(1 + t^2) - l_5 a_z + 2 l_5 n_z t + l_5 a_z t^2\}/(1 + t^2) \\ &= \{(ZZ - l_5 a_z) + 2 l_5 n_z t + (ZZ + l_5 a_z)t^2\}/(1 + t^2) \\ &= \{Z_n + 2 l_5 n_z t + Z_p t^2\}/(1 + t^2) = Z/(1 + t^2) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\text{但し, } ZZ = p_z - l_6 a_z - l_1, \quad Z_n = ZZ - l_5 a_z, \quad Z_p = ZZ + l_5 a_z, \quad (66)$$

$$Z = Z_n + 2 l_5 n_z t + Z_p t^2 = (1 + t^2) \{ZZ - l_5 (a_z c_6 - n_z s_6)\} \quad (67)$$

この表示をした上で Fig.2 に戻って  $\tan \omega_1$  を算出すると、

$$\tan \omega_1 = \frac{\sqrt{x_5^2 + y_5^2}}{(z_5 - l_1)} = \frac{\sqrt{X^2/(1 + t^2)^2 + Y^2/(1 + t^2)^2}}{Z/(1 + t^2)} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \quad (68)$$



となり、また  $\tan \theta_1$  が、

$$\tan \theta_1 = \frac{-x_5}{y_5} = \frac{-X/(1+t^2)}{Y/(1+t^2)} = \frac{-X}{Y} \quad (69)$$

と導きだせる。この (68), (69) を以下では、

$$\tan \omega_1 = -Y/(Zc_1) \quad (70)$$

$$c_1^2 = Y^2/(X^2 + Y^2) \quad (71)$$

と表現して用いる。

### 3. 個々の関節解を決定するための代数方程式の誘導

2章の説明から、 $\theta_1 \sim \theta_5$  の値が  $\theta_6$  (即ち  $t$ ) で形式的に表されたので、残る問題は指定された指先位置・姿勢とリンク機構の特性を結ぶ閉じた  $\theta_6$  の方程式を確立することが必要である。

まず、(26) で求めたベクトル  $\mathbf{n}_5$  は  $\mathbf{a}_6$  に垂直なので、内積  $(\mathbf{n}_5, \mathbf{a}_6) = 0$  となる関係に気がつく。即ち、 $\mathbf{n}_5 \cdot \mathbf{a}_6 = n_{5x} a_{6x} + n_{5y} a_{6y} + n_{5z} a_{6z}$

$$= [(c_{23} o_y + c_1 s_{23} o_z)(a_x c_6 - n_x s_6) + (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x)(a_y c_6 - n_y s_6) - (s_1 s_{23} o_y + c_1 s_{23} o_x)(a_z c_6 - n_z s_6)] / p_a = 0$$

ここで、 $c_6 = (1-t^2)/(1+t^2)$ 、 $s_6 = 2t/(1+t^2)$  と置き換え  $t$  のみで表現すると、

$$(c_{23} o_y + c_1 s_{23} o_z) \phi_x + (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x) \phi_y - (s_1 s_{23} o_y + c_1 s_{23} o_x) \phi_z = 0 \quad (72)$$

但し、解析の便宜上

$$\phi_x \triangleq a_x - 2n_x t - a_x t^2, \quad \phi_y \triangleq a_y - 2n_y t - a_y t^2, \quad \phi_z \triangleq a_z - 2n_z t - a_z t^2 \quad (73)$$

と置き、この式をさらに  $c_{23}$  で割って次式を得る。

$$(o_y + c_1 o_z T_{23}) \phi_x + (s_1 o_z T_{23} - o_x) \phi_y - (s_1 o_y + c_1 o_x) T_{23} \phi_z = 0 \quad (74)$$

$T_{23} (= \tan \theta_{23})$  について整理すると

$$\begin{aligned} T_{23} &= \frac{(o_x \phi_y - o_y \phi_x)}{(c_1 \phi_x + s_1 \phi_y) o_z - (c_1 o_x + s_1 o_y) \phi_z} = \frac{(o_x \phi_y - o_y \phi_x)}{\{(\phi_x + T_1 \phi_y) o_z - (o_x + T_1 o_y) \phi_z\} c_1} \\ &= \frac{(o_x \phi_y - o_y \phi_x)}{\{(o_z \phi_x - o_x \phi_z) + T_1 (o_z \phi_y - o_y \phi_z)\} c_1} \quad (\text{但し, } T_1 = s_1 / c_1) \end{aligned} \quad (75)$$

となる。この分母分子の各項  $(o_z \phi_x - o_x \phi_z)$ 、 $(o_z \phi_y - o_y \phi_z)$ 、 $(o_x \phi_y - o_y \phi_x)$  は

$$\begin{aligned} o_z \phi_x - o_x \phi_z &= o_z (a_x - 2n_x t - a_x t^2) - o_x (a_z - 2n_z t - a_z t^2) \\ &= (o_z a_x - o_x a_z) - 2(o_z n_x - o_x n_z) t - (o_z a_x - o_x a_z) t^2 \\ &= n_y + 2a_y t - n_y t^2 \triangleq N_y \end{aligned} \quad (76)$$

のように2次式で表現でき同様にして、

$$o_z \phi_y - o_y \phi_z = -(n_x + 2a_x t - a_x t^2) \triangleq -N_x \quad (77)$$

$$o_x \phi_y - o_y \phi_x = n_z + 2a_z t - n_z t^2 \triangleq N_z \quad (78)$$

が導き出せる。この結果、(75) は次のような簡潔な表現になる。

$$\begin{aligned} T_{23} &= N_z / \{(N_y - T_1 N_x) c_1\} \\ &= Y N_z / \{(X N_x + Y N_y) c_1\} \end{aligned} \quad (79)$$

これが  $T_{23}$  を2変数  $t$  と  $\theta_1$  で表現したものである。 $T_{23}$  を結びつける他の関係式として、先に導いた  $\theta_2$ 、 $\theta_3$  の式を利用して  $t$  に関する多項式表現を確立させる。

まず、 $\theta_2$  と  $\theta_3$  の和を記述した (13) から、正接を計算する。即ち、

$$\pm \tan \alpha_2 = \tan (\theta_2 + \theta_3 - \omega_1) \quad (80)$$

$$\pm \tan \alpha_2 = (T_{23} - \tan \omega_1) / (1 + T_{23} \tan \omega_1)$$

$$= \frac{\{Y N_z / (X N_x + Y N_y) c_1\} - (-Y / Z c_1)}{1 + (-Y / Z c_1) \{Y N_z / (X N_x + Y N_y) c_1\}}$$

$$= \frac{(XN_x + YN_y + ZN_z)(X^2 + Y^2)c_1}{Y\{Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z\}} \quad (81)$$

(81) 式は  $c_1$  を含むため 2 乗して (71) の  $X$ ,  $Y$  で表現すると

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha_2 &= \frac{(XN_x + YN_y + ZN_z)^2 (X^2 + Y^2)^2}{Y^2 \{Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z\}^2} \frac{Y^2}{(X^2 + Y^2)} \\ &= \frac{(XN_x + YN_y + ZN_z)^2 (X^2 + Y^2)}{\{Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z\}^2} \end{aligned} \quad (82)$$

が得られる。この分母分子を簡略化すると、

$$\tan^2 \alpha_2 = \frac{\Psi_1^2 (X^2 + Y^2)}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \quad (83)$$

に到達する。(計算過程の詳細は付録 2 に記載する。)

ところで、以前求めた  $\tan \alpha_2$  に対する (25) 式を 2 乗して、

$$\tan^2 \alpha_2 = 16 H^2 / (L^2 - a)^2 = \{4 L^2 l_2^2 - (L^2 + a)^2\} / (L^2 - a)^2 \quad (84)$$

さらに、両辺に 1 を加えると次のようになる。

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = \frac{4 L^2 l_2^2 - (L^2 + a)^2 + (L^2 - a)^2}{(L^2 - a)^2} = \frac{4 L^2 l_2^2 - 4 a L^2}{(L^2 - a)^2} = \frac{4 L^2 l_{34}^2}{(L^2 - a)^2} \quad (85)$$

ここに、 $a = l_2^2 - l_{34}^2$

(10) で与えた  $L$  に対して、(59), (62), (65) と付録 2 の (B.5) を使って、

$$L^2 = x_5^2 + y_5^2 + (z_5 - l_1)^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)}{(1 + t^2)^2} = \frac{\Psi_2(t)}{(1 + t^2)} \quad (86)$$

と表せる。これを直接 (85) の右辺に代入すると、

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = \frac{4(\Psi_2 / 1 + t^2) l_{34}^2}{\{(\Psi_2 / 1 + t^2) - a\}^2} = \frac{4(1 + t^2)\Psi_2 l_{34}^2}{\{\Psi_2 - a(1 + t^2)\}^2} \quad (87)$$

なる  $t$  の有理関数が得られる。

一方、(83) の両辺に 1 を加えた式は、

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1^2 (X^2 + Y^2)}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} + 1 &= \frac{\Psi_1^2 (X^2 + Y^2) + \{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \\ &= \frac{\Psi_1^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) + \Psi_2 N_z (\Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z)}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} = \frac{\Psi_1^2 (1 + t^2)\Psi_2 + \Psi_2 N_z (\Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z)}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \\ &= \frac{\Psi_2 \{\Psi_1^2 (1 + t^2) + \Psi_2 N_z^2 - 2\Psi_1 N_z Z\}}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \end{aligned} \quad (88)$$

となるから、(88) の分子を計算して

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = \frac{\Psi_2 (1 + t^2) \{\Psi_1^2 + N_z \Psi_3\}}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \quad (89)$$

が得られる。(この計算も付録 2 に譲る。)

(87), (89) から因数  $\Psi_2 (1 + t^2)$  を除去することにより、次式を得る。

$$\frac{4 l_{34}^2}{\{\Psi_2 - a(1 + t^2)\}^2} = \frac{\Psi_1^2 + \Psi_3 N_z}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \quad (90)$$

これを書き直すと  $t$  に関する 8 次の代数方程式  $f(t) = \sum_{i=0}^8 h_i t^i = 0$  となる。  
 ここに  $\tan(\theta_6/2) = t$

#### 4. お わ り に

座標変換法から運動学方程式を導き出しその逆問題を求める通常のアプローチに対して、視点を変えたベクトルと幾何学の適用で 6 リンク・マニピュレータの関節角を誘導した。解析対象のマニピュレータの構造は解析解を求めることができないため、各関節解は  $\theta_6$  を含む形で記述し、この変数  $\theta_6$  を 8 次の代数方程式の根から決定した。関係式の簡略化の結果到達した多項式は 3 章で示した以上に共通因数を含まないことから、それは第 6 関節角を決定する最低の次数と言える。最終的な解引出しのために、代数方程式に帰着させた理由は、幾何学的に考えられるすべての解の組合せを方程式の根の中にすべて包含させるためである。解析結果は、当然のことながら、既報 (3)、(4) 等の結果と精度、多値性に関して完全に一致していることが確認された。

#### 参考文献

- 1) 中野 栄二 : "ロボット工学入門", オーム社, (1983).
- 2) Paul R.P. : "Robot Manipulator: Mathematics, Programming and Control," MIT Press, (1981).
- 3) Sasaki S. : "A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm," JAERI-M 86-018 (1986).
- 4) 佐々木 忍 : "6 関節形マニピュレータに対する改良された逆運動学計算法", JAERI-M 87-104 (1987).

これを書き直すと  $t$  に関する 8 次の代数方程式  $f(t) = \sum_{i=0}^8 h_i t^i = 0$  となる。  
 ここに  $\tan(\theta_6/2) = t$

#### 4. お わ り に

座標変換法から運動学方程式を導き出しその逆問題を求める通常のアプローチに対して、視点を変えたベクトルと幾何学の適用で 6 リンク・マニピュレータの関節角を誘導した。解析対象のマニピュレータの構造は解析解を求めることができないため、各関節解は  $\theta_6$  を含む形で記述し、この変数  $\theta_6$  を 8 次の代数方程式の根から決定した。関係式の簡略化の結果到達した多項式は 3 章で示した以上に共通因数を含まないことから、それは第 6 関節角を決定する最低の次数と言える。最終的な解引出しのために、代数方程式に帰着させた理由は、幾何学的に考えられるすべての解の組合せを方程式の根の中にすべて包含させるためである。解析結果は、当然のことながら、既報 (3), (4) 等の結果と精度、多値性に関して完全に一致していることが確認された。

#### 参考文献

- 1) 中野 栄二 : "ロボット工学入門", オーム社, (1983).
- 2) Paul R.P. : "Robot Manipulator: Mathematics, Programming and Control," MIT Press, (1981).
- 3) Sasaki S. : "A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm," JAERI-M 86-018 (1986).
- 4) 佐々木 忍 : "6 関節形マニピュレータに対する改良された逆運動学計算法", JAERI-M 87-104 (1987).

## 付 録

付録1 ベクトル  $\mathbf{a}_6$ ,  $\mathbf{n}_6$  の一意的な決定

2.3節の (46)<sup>+</sup> ~ (48)<sup>+</sup>, (51)<sup>+</sup> ~ (53)<sup>+</sup> で求めたベクトル  $\mathbf{n}_6$ ,  $\mathbf{a}_6$  を表現する上で,  $s_6$  を含む項の符号±はつぎの関係で一意的に決定できる。

その前に  $\mathbf{n}_6$ ,  $\mathbf{a}_6$  のなかのこの項の符号についての組合せは, 明らかに

$$\text{case 1 : } \mathbf{a}_6 (+), \mathbf{n}_6 (+),$$

$$\text{case 2 : } \mathbf{a}_6 (+), \mathbf{n}_6 (-),$$

$$\text{case 3 : } \mathbf{a}_6 (-), \mathbf{n}_6 (+),$$

$$\text{case 4 : } \mathbf{a}_6 (-), \mathbf{n}_6 (-)$$

の4ケースが該当する。

ここで, 例えば case 2 の  $\mathbf{a}_6 (+)$ ,  $\mathbf{n}_6 (-)$  は, ベクトル  $\mathbf{a}_6$  の  $s_6$  を含む項がプラスを表し, 対応するベクトル  $\mathbf{n}_6$  の  $s_6$  を含む項がマイナスであるものを組合せたことを意味する。

各々について  $\mathbf{a}_6$ ,  $\mathbf{n}_6$  のベクトル外積が  $\mathbf{o}_6$  である計算をすると, つぎの1ケースに限定することが明白となる。即ち, case 3 の計算を書き出すと,

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_6 = \mathbf{a}_6 \times \mathbf{n}_6 &= \begin{vmatrix} \mathbf{n}_0 & \mathbf{o}_0 & \mathbf{a}_0 \\ a_{6x} & a_{6y} & a_{6z} \\ n_{6x} & n_{6y} & n_{6z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{n}_0 (a_{6y} n_{6z} - a_{6z} n_{6y}) + \mathbf{o}_0 (a_{6z} n_{6x} - a_{6x} n_{6z}) + \mathbf{a}_0 (a_{6x} n_{6y} - a_{6y} n_{6x}) \\ &= \mathbf{n}_0 [(a_y c_6 - n_y s_6)(n_z c_6 + a_z s_6) - (a_z c_6 - n_z s_6)(n_y c_6 + a_y s_6)] + \\ &\quad \mathbf{o}_0 [(a_z c_6 - n_z s_6)(n_x c_6 + a_x s_6) - (a_x c_6 - n_x s_6)(n_z c_6 + a_z s_6)] + \\ &\quad \mathbf{a}_0 [(a_x c_6 - n_x s_6)(n_y c_6 + a_y s_6) - (a_y c_6 - n_y s_6)(n_x c_6 + a_x s_6)] \\ &= \mathbf{n}_0 [(a_y n_z - a_z n_y) c_6^2 + (a_y n_z - a_z n_y) s_6^2] + \\ &\quad \mathbf{o}_0 [(a_z n_x - a_x n_z) c_6^2 + (a_z n_x - a_x n_z) s_6^2] + \\ &\quad \mathbf{a}_0 [(a_x n_y - a_y n_x) c_6^2 + (a_x n_y - a_y n_x) s_6^2] \\ &= \mathbf{n}_0 (a_y n_z - a_z n_y) + \mathbf{o}_0 (a_z n_x - a_x n_z) + \mathbf{a}_0 (a_x n_y - a_y n_x) \end{aligned}$$

となる。ここで, 指先の座標系の内,  $Y_h$  軸の単位ベクトル  $\mathbf{o}$  は,  $\mathbf{o} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}$  の関係があるから, 結局,

$$\mathbf{o}_6 = o_x \mathbf{n}_0 + o_y \mathbf{o}_0 + o_z \mathbf{a}_0 = \mathbf{o}$$

が導かれ, case 3 のみが妥当であることが判明する。

即ち,

$$n_{6x} = n_x c_6 + a_x s_6, \quad n_{6y} = n_y c_6 + a_y s_6, \quad n_{6z} = n_z c_6 + a_z s_6$$

$$a_{6x} = a_x c_6 - n_x s_6, \quad a_{6y} = a_y c_6 - n_y s_6, \quad a_{6z} = a_z c_6 - n_z s_6$$

付録 2 関係式の簡略化

以下,  $\tan^2 \alpha_2 = \frac{(XN_x + YN_y + ZN_z)^2 (X^2 + Y^2)}{\{Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z\}^2}$  の簡潔な表現を試みる。

1)  $(XN_x + YN_y + ZN_z)$  に関して

X, Y, Z に対して (59), (62), (65) を代入して

$$J_1 = (XN_x + YN_y + ZN_z) = (1+t^2) \{XXN_x + YYN_y + ZZN_z\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{を得, さらに, } R_1 &\triangleq n_x XX + n_y YY + n_z ZZ \\ R_2 &\triangleq a_x XX + a_y YY + a_z ZZ \\ R_3 &\triangleq o_x XX + o_y YY + o_z ZZ \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

と定義して書き換えると,

$$J_1 = (1+t^2) \{R_1 + 2R_2 t - R_1 t^2\} = (1+t^2) \Psi_1(t) \quad (\text{B.2})$$

$$\text{となる。但し, } \Psi_1(t) \triangleq d_0 + d_1 t + d_2 t^2 \quad (\text{B.3})$$

$$d_0 = R_1, \quad d_1 = 2R_2, \quad d_2 = -R_1$$

2)  $Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z$  に関して

(61), (64), (67) を使って,

$$\begin{aligned} \text{まず, } X^2 + Y^2 + Z^2 &= (1+t^2)^2 [\{XX - l_5(a_x c_6 - n_x s_6)\}^2 + \{YY - l_5(a_y c_6 - n_y s_6)\}^2 + \\ &\quad \{ZZ - l_5(a_z c_6 - n_z s_6)\}^2] \\ &= (1+t^2)^2 [XX^2 + YY^2 + ZZ^2 - 2l_5 XX(a_x c_6 - n_x s_6) - 2l_5 YY(a_y c_6 - n_y s_6) \\ &\quad - 2l_5 ZZ(a_z c_6 - n_z s_6) + l_5^2(a_x c_6 - n_x s_6)^2 + l_5^2(a_y c_6 - n_y s_6)^2 \\ &\quad + l_5^2(a_z c_6 - n_z s_6)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

と変形し, さらに上で定義したパラメータ  $R_1, R_2, R_3$  等を使って簡潔な表現を行うと,

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= (1+t^2)^2 [R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - 2l_5 R_2 c_6 + 2l_5 R_1 s_6 + l_5^2] \\ &= (1+t^2) [R_1^2 + (R_2 - l_5)^2 + R_3^2 + 4l_5 R_1 t + \{R_1^2 + (R_2 + l_5)^2 + R_3^2\} t^2] \\ &= (1+t^2) \Psi_2(t) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

と記述できる。

$$\text{但し, } \Psi_2(t) \triangleq e_0 + e_1 t + e_2 t^2 \quad (\text{B.6})$$

$$e_0 = R_1^2 + (R_2 - l_5)^2 + R_3^2, \quad e_1 = 4l_5 R_1, \quad e_2 = R_1^2 + (R_2 + l_5)^2 + R_3^2$$

こうした準備のもとに, 2) の簡略化を実行すると,

$$\begin{aligned} J_2 &= Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z \\ &= Z\{(1+t^2)\Psi_1 - ZN_z\} - (X^2 + Y^2)N_z = (1+t^2)\Psi_1 Z - (X^2 + Y^2 + Z^2)N_z \\ &= (1+t^2)\Psi_1 Z - (1+t^2)\Psi_2 N_z = (1+t^2)\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

従って, (B.2), (B.7) に共通因数  $1+t^2$  が発見されたことから, 元の式は

$$\tan^2 \alpha_2 = \frac{(1+t^2)^2 \Psi_1^2 (X^2 + Y^2)}{(1+t^2)^2 \{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} = \frac{\Psi_1^2 (X^2 + Y^2)}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \quad (\text{B.8})$$

となる。

最後に、(88)式の分子  $\Psi_2 \{ \Psi_1^2 (1+t^2) + \Psi_2 N_z^2 - 2 \Psi_1 N_z Z \}$  の因数分解を行う。

まず、(B.3)、(B.5) で定義した  $\Psi_1$ 、 $\Psi_2$  を次のように書き換えて、

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= R_1 + 2 R_2 t - R_1 t^2 \\ \Psi_2 &= (1+t^2) \{ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2 - 2 l_5 (R_2 c_6 - R_1 s_6) \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

上の式の  $(\Psi_2 N_z - 2 \Psi_1 Z)$  に代入すると

$$\begin{aligned} \Psi_2 N_z - 2 \Psi_1 Z &= \Psi_2 N_z - 2 \Psi_1 \{ ZZ(1+t^2) - l_5 N_z \} \\ &= (1+t^2) [ \{ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2 - 2 l_5 (R_2 c_6 - R_1 s_6) \} (n_z + 2 a_z t - n_z t^2) \\ &\quad - 2 \{ ZZ - l_5 (a_z c_6 - n_z s_6) \} (R_1 + 2 R_2 t - R_1 t^2) ] \\ &= (1+t^2) [ (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) n_z - 2 R_1 ZZ + 2 \{ a_z (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) - \\ &\quad R_2 ZZ \} t + \{ -n_z (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) + 2 R_1 ZZ \} t^2 + \\ &\quad 2 l_5 (a_z R_1 - n_z R_2) (1+t^2) ] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

から、因数  $(1+t^2)$  が発見できる。

従って、(88)式の分子は

$$\begin{aligned} \Psi_2 \{ \Psi_1^2 (1+t^2) + \Psi_2 N_z^2 - 2 \Psi_1 N_z Z \} &= \Psi_2 \{ \Psi_1^2 (1+t^2) + N_z (\Psi_2 N_z - 2 \Psi_1 Z) \} \\ &= \Psi_2 \Psi_1^2 (1+t^2) + \Psi_2 N_z (1+t^2) [ (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) n_z - 2 R_1 ZZ + 2 l_5 (a_z R_1 - n_z R_2) + \\ &\quad 2 \{ a_z (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) - 2 R_2 ZZ \} t + \{ -n_z (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) + 2 R_1 ZZ + \\ &\quad 2 l_5 (a_z R_1 - n_z R_2) \} t^2 ] = \Psi_2 (1+t^2) \{ \Psi_1^2 + N_z \Psi_3 \} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

と表せる。ここに、 $\Psi_3 \triangleq b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) n_z - 2 R_1 ZZ + 2 l_5 (a_z R_1 - n_z R_2) \\ b_1 &= 2 \{ a_z (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) - 2 R_2 ZZ \} \\ b_2 &= \{ -n_z (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2) + 2 R_1 ZZ + 2 l_5 (a_z R_1 - n_z R_2) \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.12})$$