

JAERI-M  
87-215

低レベル放射性廃棄物浅地層処分の総合  
安全評価に関する部分モデルの開発(III)  
—コンクリートライニングドラム缶のコンク  
リート壁からの放射性核種の浸出モデル—

1988年1月

松鶴 秀夫・若林 徳映

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）  
あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城  
県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.  
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department  
of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun,  
Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1988

---

編集兼発行 日本原子力研究所  
印 刷 日立高速印刷株式会社

低レベル放射性廃棄物浅地層処分の  
総合安全評価に関する部分モデルの開発(Ⅲ)  
—コンクリートライニングドラム缶の  
コンクリート壁からの放射性核種の浸出モデル—

日本原子力研究所東海研究所環境安全研究部

松鶴 秀夫・若林 徳映

(1987年12月23日受理)

低レベル放射性廃棄物の浅地層処分に關するソースタームを評価するため、コンクリートライニングを施されたドラム缶のコンクリート壁からの放射性核種の浸出モデルを開発した。解析の対象とした浸出系は、巨視的にみて放射性物質が均一に分散している半無限の廃棄物(廃棄物内部における放射性核種の濃度分布は常に一定)が多孔質媒体であるコンクリート壁を隔てて半無限で均一組成の液相に接していると想定した。

この系についての放射性核種に関する物質収支から決定される物質輸送方程式を、想定した初期条件及び境界条件の下に解き、コンクリート壁からの放射性核種の浸出を表現する速度式を導出した。この速度式に基づいて解析コード(WPLATE)を開発し、実験データの解析及び各種の数値解析を行い、放射性核種の漏洩量を低減化する上でのコンクリートライニングの効果をコンクリート壁の厚さとの関連で明らかにした。

Development of Elementary Models of Comprehensive  
Safety Assessment Model for Shallow Land Disposal  
of Low-Level Radioactive Wastes (III)  
— Modeling of Radionuclide Leaching from Concrete  
Wall of Concrete Lined Drums —

Hideo MATSUZURU and Noriaki WAKABAYASHI  
Department of Environmental Safety Research  
Tokai Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received December 23, 1987)

The evaluation model for the prediction of leaching of radionuclides from a concrete wall which lines the inside of a steel drum (concrete lined drum) has been developed to evaluate the source term of a shallow land burial of low-level radioactive wastes.

The leaching system to be evaluated here consists of a waste as an infinite source, in which radionuclides uniformly disperse on the macroscopic scale regardless of the time, an infinite liquid phase with a uniform composition, and a concrete wall which contacts with both the liquid phase and the waste.

The mass-transport equation derived from the mass balance in the system considered here was solved under the initial and boundary conditions assumed, and the rate equation was derived to describe the leaching of radionuclides from the concrete wall. Numerical analyses have been carried out by using the analysis code (WPLATE) which was developed based on the rate equation, and the effect of the wall on the reduction in the amounts of radionuclides leached has been clarified in relation to the thickness of the wall.

Keywords: Leaching, Mathematical Simulation, Concrete Wall, Concrete Lined Drum, Mass-transport Equation, Diffusion Coefficient, Waste Disposal

## 目 次

1. 緒 言 .....	1
2. 数学モデル .....	2
2.1 浸出速度式の導出 .....	2
2.1.1 誤差関数による解 ( $t$ または $\lambda t$ が小さい場合) .....	2
2.1.2 三角関数による解 ( $t$ または $\lambda t$ が大きい場合) .....	4
2.2 無次元化パラメータ .....	5
2.2.1 濃度分布 .....	5
2.2.2 積算浸出量 .....	5
3. 数値解析 .....	8
3.1 コンクリート中での放射性核種の実効拡散係数 .....	8
3.2 コンクリート壁厚さの無次元化 .....	8
3.3 コンクリート中での放射性核種の濃度分布 .....	8
3.4 コンクリート壁からの放射性核種の浸出量 .....	9
4. 均一固化体の浸出性との比較 .....	19
4.1 均一固化体の浸出性評価モデル .....	19
4.2 浸出性予測 .....	20
5. 結 言 .....	23
謝 辞 .....	23
参考文献 .....	24
付 録 1 平板中の 1 次元拡散問題の解法 .....	25
付 録 2 半無限空間中の 1 次元拡散問題の解法 .....	31

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Mathematical Model .....	2
2.1 Derivation of Leaching Rate Equations .....	2
2.1.1 Solution in the Form of Error Function .....	2
(for the case of small $t$ or $\lambda t$ )	
2.1.2 Solution in the Form of Trigonometrical Function .....	4
(for the case of large $t$ or $\lambda t$ )	
2.2 Dimensionless Parameters .....	5
2.2.1 Concentration Distribution .....	5
2.2.2 Cumulative Amounts Leached .....	5
3. Numerical Analyses .....	8
3.1 Effective Diffusion Coefficients of Radionuclides in a Concrete Wall .....	8
3.2 Dimensionless Thickness of a Concrete Wall .....	8
3.3 Concentration Distributions of Radionuclides in a Concrete Wall .....	8
3.4 Estimations of Cumulative Fractions of Radionuclides Leached .....	9
4. Leachability Comparison with Solidified Waste Forms .....	19
4.1 Estimation Model for Leachability of Solidified Waste Forms .....	19
4.2 Leachability Assessments .....	20
5. Conclusion .....	23
Acknowledgements .....	23
References .....	24
Appendix 1 Solution of one-dimensional diffusion problem in a plane sheet .....	25
Appendix 2 Solution of one-dimensional diffusion problem in a semi-infinite media .....	31

## 1. 緒 言

低レベル放射性廃棄物の浅地層処分に際しては、処分の安全性を確保するため、処分された廃棄物からの放射性核種の環境放出量を合理的に低減化する目的で、低レベル放射性廃棄物は何等かの方法で安定化された後、廃棄物容器に封入される。軽水炉から発生する運転廃棄物のうち、蒸発缶濃縮廃液、使用済イオン交換樹脂（粒状及び粉末状）、フィルタースラッジ、焼却灰等は、セメント、アスファルト、プラスチック等によって、巨視的に見て均一な固化体にすることが可能である。しかし、いわゆる不燃性雑固体廃棄物（金属、ガラス、コンクリート片等）は、切断、圧縮等の軽度の処理が施された後、何等かの方法でパッケージ化されることになる。この場合、パッケージ化の方法には種々の選択肢がある。例えば廃棄物容器としてドラム缶を想定した場合、下記のような方法が考えられる。

- ① 廃棄物をライナー（コンクリートまたはプラスチック）付きドラム缶に収納し、周囲の空隙をセメントミルクまたは溶融アスファルトで充填する。
- ② 廃棄物を鋼鉄製の籠に入れ、これをドラム缶に収納し、周囲の空間及び空隙をセメントミルクまたは溶融アスファルトで充填する。

このようなパッケージからの放射性核種の浸出をシミュレーションするためには、

- ・廃棄物からの放射性核種の液相への移行、
- ・液相に移行した放射性核種の充填材中での拡散、
- ・放射性核種のライナー中での拡散、
- ・ドラム缶の腐食によるライナーの接液面積の経時変化、

の諸過程を表現するモデルを導出する必要がある。

雑固体廃棄物からの放射性核種の液相への放出は、廃棄物の種類、放射性核種の種類とその物理的・化学的存在状態、汚染の機構等によって異なる。特定のパッケージ中の廃棄物について上述の因子を正確に特定することは現実的には不可能であり、雑固体廃棄物からの放射性核種の放出を時間の関数として定式化することは困難と判断した。したがって、ここでは廃棄物を仮想的な液体として取り扱い、廃棄物中の放射性核種の濃度は巨視的に見て均一であり、内部における放射性核種の拡散は律速的過程ではないと仮定した。

充填材中での放射性核種の拡散は多孔質媒体中での物質移動として取り扱えるが、充填方法にもよるが廃棄物中の空隙を完全に充填することは現実的には不可能であり、不完全な充填によって内部に形成される水路のネットワークを適切に定量化し、水路中での放射性核種の浸透現象を数学的に表現することには限界がある。したがって、ここでは充填材の効果は取り敢えず無視した。勿論、マクロな空隙が排除できるような適切な充填方法がとられれば、充填された廃棄物を安全側の仮定として均一固化体と見做すことは妥当であり、均一固化体からの放射性核種の浸出に関しては既に評価に必要な広範な知見が集積されている。<sup>1)-10)</sup>

ドラム缶の腐食による接液面積の変化については、広範な研究<sup>11)</sup>がなされ、その成果を利用できる。

本研究では、不均一廃棄体のソースターム評価モデル開発の一環として、上述の諸仮定に基づいて、コンクリート壁からの放射性核種の浸出を表現する速度式を導出し、解析コード(WPLATE)を開発した。さらに、解析コードを用いて各種の数値解析を行い、放射性核種浸出量を低減化する上でのコンクリートライニングの効果をコンクリート壁の厚さ、放射性核種の拡散係数及び減衰定数との関連で明らかにした。

## 2. 数 学 モ デ ル

### 2.1 浸出速度式の導出

浸出系を模擬するため半無限拡散源モデルを用いる。ここで取り扱う浸出系は巨視的にみて放射性核種が均一に分布している半無限の廃棄物（内部において放射性核種の濃度勾配は生じない）が多孔質媒体であるコンクリート壁を隔てて半無限で均一組成を有する液相に接していると想定した（Fig. 1）。

放射性核種のコンクリート壁を通しての拡散速度は微小要素における物質収支から次に示す物質輸送方程式で与えられる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \lambda C \quad (1)$$

ここで、  
 $C$  : コンクリート壁中での放射性核種の濃度、  
 $D$  : コンクリート壁中での放射性核種の実効拡散係数、  
 $\lambda$  : 放射性核種の物理的崩壊定数。

前述の想定から初期及び境界条件は下記のごとく示される。

$$t = 0, \quad 0 < x \leq h, \quad C = 0, \quad (2)$$

$$t = 0, \quad x \leq 0, \quad C = C_0, \quad (3)$$

$$t > 0, \quad x = 0, \quad C = C_0 \exp(-\lambda t), \quad (4)$$

$$t > 0, \quad x = h, \quad C = 0. \quad (5)$$

ここで、  
 $C_0$  : 廃棄物中の放射性核種の初期濃度、  
 $h$  : コンクリート壁の厚さ。

(1)式を上記の初期及び境界条件で解くと、コンクリート壁中における放射性核種の濃度分布式が得られる（付録1参照）。この場合、 $t$ または $\lambda t$ の大小により解法を変える必要がある。

#### 2.1.1 誤差関数による解（ $t$ または $\lambda t$ が小さい場合）

$t$ または $\lambda t$ が小さい場合は、Laplace変換法による解法が適しており<sup>12)</sup>、コンクリート壁中における放射性核種の濃度分布 $C(x, t)$ は次式で与えられる（付録1参照）。

$$C(x, t) = C_0 \exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{2jh+x}{2\sqrt{Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \quad (6)$$



本研究では、不均一廃棄体のソースターム評価モデル開発の一環として、上述の諸仮定に基づいて、コンクリート壁からの放射性核種の浸出を表現する速度式を導出し、解析コード(WPLATE)を開発した。さらに、解析コードを用いて各種の数値解析を行い、放射性核種浸出量を低減化する上でのコンクリートライニングの効果をコンクリート壁の厚さ、放射性核種の拡散係数及び減衰定数との関連で明らかにした。

## 2. 数 学 モ デ ル

### 2.1 浸出速度式の導出

浸出系を模擬するため半無限拡散源モデルを用いる。ここで取り扱う浸出系は巨視的にみて放射性核種が均一に分布している半無限の廃棄物（内部において放射性核種の濃度勾配は生じない）が多孔質媒体であるコンクリート壁を隔てて半無限で均一組成を有する液相に接していると想定した（Fig. 1）。

放射性核種のコンクリート壁を通しての拡散速度は微小要素における物質収支から次に示す物質輸送方程式で与えられる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \lambda C \quad (1)$$

ここで、  
 C：コンクリート壁中での放射性核種の濃度、  
 D：コンクリート壁中での放射性核種の実効拡散係数、  
 λ：放射性核種の物理的崩壊定数。

前述の想定から初期及び境界条件は下記のごとく示される。

$$t = 0, \quad 0 < x \leq h, \quad C = 0, \quad (2)$$

$$t = 0, \quad x \leq 0, \quad C = C_0, \quad (3)$$

$$t > 0, \quad x = 0, \quad C = C_0 \exp(-\lambda t), \quad (4)$$

$$t > 0, \quad x = h, \quad C = 0. \quad (5)$$

ここで、  
 C<sub>0</sub>：廃棄物中の放射性核種の初期濃度、  
 h：コンクリート壁の厚さ。

(1)式を上記の初期及び境界条件で解くと、コンクリート壁中における放射性核種の濃度分布式が得られる（付録1参照）。この場合、tまたはλtの大小により解法を変える必要がある。

#### 2.1.1 誤差関数による解（tまたはλtが小さい場合）

tまたはλtが小さい場合は、Laplace変換法による解法が適しており<sup>12)</sup>、コンクリート壁中における放射性核種の濃度分布C(x, t)は次式で与えられる（付録1参照）。

$$C(x, t) = C_0 \exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{2jh+x}{2\sqrt{Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \quad (6)$$

コンクリート壁を通して液相に浸出する放射性核種の物質流速  $j(x, t)$  は、コンクリート壁中における放射性核種の濃度勾配と比例定数である拡散係数の積として与えられる。

$$j(x, t) = C_0 \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{2jh+x}{2\sqrt{Dt}}\right)^2 + \exp\left(-\frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{Dt}}\right)^2 \right\}. \quad (7)$$

時間  $t$  までに単位表面積のコンクリート壁から液相に浸出した放射性核種の積算量  $q(C_i)$  は、(7)式で示される物質流速の時間  $0$  から  $t$  までの積分によって与えられる。

$$q = \int_0^t -D \frac{\partial C}{\partial x} dt. \quad (8)$$

(8)式の積分は  $\lambda = 0$ 、と  $\lambda \neq 0$  で異なり次に示す(9)、(10)式でそれぞれ与えられる。

$\lambda \neq 0$  の時、

$$\begin{aligned} q = & \frac{C_0}{2} \sqrt{\frac{D}{\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \exp\left[-(2jh+x)\sqrt{\frac{D}{\lambda}}\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{2jh+x}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) \right. \\ & - \exp\left[(2jh+x)\sqrt{\frac{D}{\lambda}}\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{2jh+x}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \\ & + \exp\left[-(2(j+1)h-x)\sqrt{\frac{D}{\lambda}}\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) \\ & \left. - \exp\left[(2(j+1)h-x)\sqrt{\frac{D}{\lambda}}\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

$\lambda = 0$  の時、

$$\begin{aligned} q_{\lambda=0} = & 2C_0 \sqrt{D} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{2jh+x}{2\sqrt{Dt}}\right)^2 + \exp\left(-\frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{Dt}}\right)^2 \right] \right. \\ & \left. - \left[ \frac{2jh+x}{2\sqrt{D}} \operatorname{erfc}\left(\frac{2jh+x}{2\sqrt{Dt}}\right) + \frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{D}} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(j+1)h-x}{2\sqrt{Dt}}\right) \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

(9)式で与えられる単位面積当りの浸出積算量にはコンクリート壁から浸出した以降における減衰の補正がなされていないが、積算量に減衰の補正を加えると単位表面積当りの残存積算浸出量( $r$ )は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} r = & \int_0^t -D \frac{\partial C}{\partial x} \exp\{-\lambda(t-\alpha)\} d\alpha \\ = & q_{\lambda=0} \exp(-\lambda t). \quad (11) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha$  : 積分変数。

次に、具体的な解析対象として Fig. 2 に示す 200 ℓ ドラム缶サイズのパッケージを考える。

ここではコンクリート壁についての解析が主目的であるため、ドラム缶部分は無いものとして取り扱う。

接液面積  $S$  ( $2\pi(a/2)^2 + \pi al$ )、廃棄物容積  $V$   $\{\pi[(a-2h)/2]^2(1-2h)\}$  のパッケージからの放射性核種の積算浸出比( $f$ )は、(9)、(10)及び(11)式に対応してそれぞれ下記のごとく与えられる。

$\lambda \neq 0$  の場合：

$$f = \frac{q \cdot S}{C_0 \cdot V} \quad (12)$$

$\lambda = 0$  の場合：

$$f = \frac{q_{\lambda=0} \cdot S}{C_0 \cdot V} \quad (13)$$

積算部分に減衰の補正を加えた場合：

$$f = \frac{r \cdot S}{C_0 \cdot V} \quad (14)$$

### 2.1.2 三角関数による解 ( $t$ または $\lambda t$ が大きい場合 )

$t$  または  $\lambda t$  が大きい場合は、三角関数を用いた変数分離法による解法が適しており<sup>12)</sup>、コンクリート壁中での放射性核種の濃度分布  $C(x, t)$  は次式で与えられる ( 付録 1 参照 )。

$$C(x, t) = C_0 \exp(-\lambda t) \left\{ 1 - \frac{x}{h} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{h}\right) \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 D t}{h^2}\right) \right\} \quad (15)$$

コンクリート壁を通して液相に浸出する放射性核種の物質流速  $j(x, t)$  は次式で示される。

$$j(x, t) = \frac{C_0 D}{h} \exp(-\lambda t) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{h}\right) \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 D t}{h^2}\right) \right\} \quad (16)$$

時間  $t$  までに単位表面積のコンクリート壁から液相に浸出した放射性核種の積算量  $q(C_i)$  は、

$\lambda \neq 0$  の時、

$$q = \frac{C_0 D}{h \lambda} \left\{ 1 - \exp(-\lambda t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi x}{h}\right)}{1 + \frac{m^2 \pi^2 D}{h^2 \lambda}} \left[ 1 - \exp\left(-\lambda t - \frac{m^2 \pi^2 D t}{h^2}\right) \right] \right\} \quad (17)$$

$\lambda = 0$  の時、

$$q = \frac{C_0 D}{h} \left\{ t + \frac{2h^2}{\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{h}\right)}{m^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 D t}{h^2}\right) \right] \right\} \quad (18)$$

でそれぞれ与えられる。

積算量に減衰の補正を加えた単位表面積当たりの残存積算浸出量( $r$ )は次式で示される。

$$r = q_{\lambda=0} \exp(-\lambda t)。 \quad (19)$$

## 2.2 無次元化パラメータ

前述の放射性核種の分布式及び浸出式には多くのパラメータが含まれており、それらの相互の関連を把握することは比較的困難であるが、各パラメータを組み合わせた新たな無次元化パラメータを用いることにより、全体がひとつの相似形を持つことがわかる。このような操作により、あらゆるパラメータの組み合わせにおけるパラメータ相互の関連を明確にすることが可能となる。ここでは、コンクリート壁内部における放射性核種の濃度分布式に関する無次元化とコンクリート壁からの放射性核種の浸出式に関する無次元化を試みた。

### 2.2.1 濃度分布

$x$ -軸、コンクリートの厚さ及び時間について下記のような無次元化を行うと、

$$X = x / (D/\lambda)^{1/2}, \quad (20)$$

$$H = h / (D/\lambda)^{1/2}, \quad (21)$$

$$T = t / \lambda, \quad (22)$$

(6)及び(15)式はそれぞれ(23)及び(24)式のように書き換えることができる。

$$\frac{C(X, T, H)}{C_0 \exp(-T)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{2jH+X}{2\sqrt{T}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2(j+1)H-X}{2\sqrt{T}} \right) \right\}。 \quad (23)$$

$$\frac{C(X, T, H)}{C_0 \exp(-T)} = 1 - \frac{X}{H} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi X}{H} \right\} \exp \left( -\frac{m^2 \pi^2 T}{2\sqrt{T}} \right)。 \quad (24)$$

展開式の精度との関連で、 $(T)^{1/2}/H \geq 1$ の時は(24)式を、 $H/(T)^{1/2} \geq 1$ の時は(23)式が適用できる。

これらの式から、 $T$ をパラメータとして $X$ と $C/C_0$ の関係をプロットすることにより無次元化された濃度分布を与えることができる。

### 2.2.2 積算浸出量

$\lambda \neq 0$ の場合に、(20)、(21)及び(22)式の無次元化に加えて、下記のような無次元化を行うと、

$$J = j(\lambda D)^{1/2} / C_0, \quad (25)$$

$$Q = q / C_0 / (D/\lambda)^{1/2}, \quad (26)$$

$$R = r / C_0 / (D/\lambda)^{1/2}, \quad (27)$$

誤差関数を用いた(9)及び(11)式はそれぞれ下記のように変換できる。

$$\begin{aligned}
 Q = & \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \exp[-(2jH+X)] \operatorname{erfc}\left(\frac{2jH+X}{2\sqrt{T}} - \sqrt{T}\right) \right. \\
 & - \exp(2jH+X) \operatorname{erfc}\left(\frac{2jH+X}{2\sqrt{T}} + \sqrt{T}\right) \\
 & + \exp(-2(j+1)H-X) \operatorname{erfc}\left(\frac{2(j+1)H-X}{2\sqrt{T}} - \sqrt{T}\right) \\
 & \left. - \exp(2(j+1)H-X) \operatorname{erfc}\left(\frac{2(j+1)H-X}{2\sqrt{T}} + \sqrt{T}\right) \right\}. \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R = & \exp(-T) 2\sqrt{T} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \exp - \left(\frac{2jH+X}{2\sqrt{T}}\right)^2 + \exp\left(\frac{2(j+1)H-X}{2\sqrt{T}}\right)^2 \right] \right. \\
 & \left. - \frac{2jH+X}{2\sqrt{T}} \operatorname{erfc}\left(\frac{2jH+X}{2\sqrt{T}}\right) - \frac{2(j+1)H-X}{2\sqrt{T}} \operatorname{erfc}\left(\frac{2(j+1)H-X}{2\sqrt{T}}\right) \right\} \quad (29)
 \end{aligned}$$

三角関数を用いた場合も同様に(18)及び(19)式はそれぞれ下記のように書き換えられる。

$$Q = \frac{1}{H} \left\{ 1 - \exp(-T) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{H}\right)}{1 + \frac{m^2\pi^2}{H^2}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{m^2\pi^2 + H^2}{H^2} T\right) \right] \right\}. \quad (30)$$

$$R = \frac{\exp(-T)}{H} \left\{ T + \frac{2H^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{H}\right) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{m^2\pi^2 T}{H^2}\right) \right] \right\}. \quad (31)$$

前述のごとく、 $H/\sqrt{T} \geq 1$  の時は(28)、(29)式を、 $\sqrt{T}/H \geq 1$  の時は(30)、(31)式がそれぞれ適用できる(付録1参照)。

$\lambda = 0$  の場合、 $\parallel = 1/\sqrt{T}$  と書いて、下記のような無次元化が可能である。

$$X = x / (D/\parallel)^{1/2} = x / (D)^{1/2}, \quad (32)$$

$$H = h / (D/\parallel)^{1/2} = h / (D)^{1/2}, \quad (33)$$

$$T = T/\parallel = T, \quad (34)$$

$$J = j / C_0 / (\parallel D)^{1/2} = j / C_0 / (D)^{1/2}, \quad (35)$$

$$Q = q / C_0 / (D/\parallel)^{1/2} = q / C_0 / (D)^{1/2}, \quad (36)$$

$$R = r / C_0 / (D/\parallel)^{1/2} = r / C_0 / (D)^{1/2}, \quad (37)$$

この場合も(11)及び(19)式の関係が成立するので、

$$Q_{i=0} = R \exp(-T),$$

が得られる。

これらの式から、 $X$  をパラメータとして  $T$  と  $Q$  または  $R$  の関係をプロットすることにより無次元化された浸出量を与えることができる。

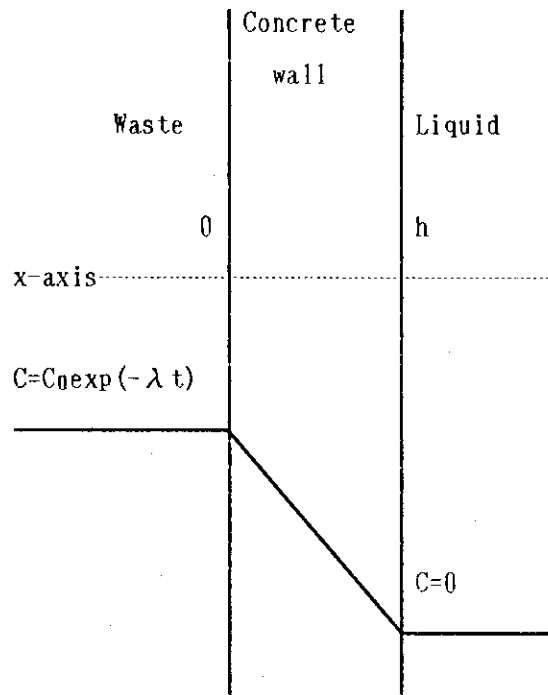


Fig. 1 Schematic diagram of the leaching system

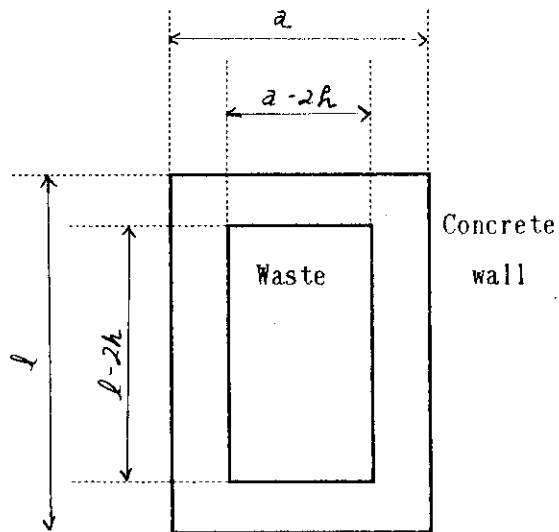


Fig. 2 Schematic diagram of the waste package

### 3. 数 値 解 析

前述の数学モデルにしたがって、コンクリートライニングドラム缶のコンクリート壁からの放射性核種の浸出を解析する計算コード(WPLATE)を作成した。本コードを用いて、軽水炉の運転廃棄物中に含まれる主要放射性核種である $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{90}\text{Sr}$ 及び $^{60}\text{Co}$ について、拡散係数及びコンクリート壁の厚さを変化させて各種の数値解析を行った。

#### 3.1 コンクリート中での放射性核種の実効拡散係数

数値解析を行うに際して、対象核種の拡散係数を任意に設定することは可能であるが、意味のある解析を行うためには、コンクリートまたは硬化したセメントペースト中での上記放射性核種の実効拡散係数の測定例に基づいて拡散係数の分布を把握し、設定すべき拡散係数の値を選定する必要がある。しかし、該当する拡散係数についての報告例は極めて少ない。Atkinson等は硬化したセメントペースト中での $\text{Cs}^+$ （溶液中での初期濃度：0.1 N CsCl）の拡散係数を水/セメント比(W/C)の関数として測定し、W/C比0.4において拡散係数として約 $8 \times 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$ （約 $7 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{d}$ ）を得た<sup>13)</sup>。この値は高濃度の硫酸ナトリウムを含んだ硬化したセメントペースト（水/セメント比：約0.4）からの $^{137}\text{Cs}$ の浸出に関する見かけの拡散係数とほぼ同等である<sup>1)</sup>。したがって、本解析ではセメント固化体からの放射性核種の浸出に関する見かけの拡散係数の値<sup>1)-10)</sup>を参考にして、コンクリート壁中での放射性核種の実効拡散係数として下記の値を採用した。

$$\begin{aligned} D_{\text{Cs}} &: 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{d} \\ D_{\text{Sr}} &: 1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{d} \\ D_{\text{Co}} &: 1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{d} \end{aligned}$$

#### 3.2 コンクリート壁厚さの無次元化

コンクリート壁の厚さを無次元化し、放射性核種の浸出量を低減化する効果の指標となる実効的な厚さを評価するため、コンクリートの実際の厚さ(h)、実効拡散係数(D)、減衰定数( $\lambda$ )を含む、 $h/(D/\lambda)^{1/2}$ を標準厚さ(Standardized thickness)と定義した。前述の実効拡散係数の値を用いて標準厚さを求めた結果をTable 1に示す。

#### 3.3 コンクリート中での放射性核種の濃度分布

コンクリート中での濃度分布は(6)または(5)式で与えられるが、全てのパラメータ（核種濃度、崩壊定数、実効拡散係数、コンクリートの厚さ、距離）を含んだ分布図を得るためには、無次元化パラメータを用いた(23)または(24)式を用いる必要がある。一定の標準厚さ $H(h/(D/\lambda)^{1/2})$

において、無次元化時間 $T(t\lambda)$ を変化させて(0.05から10.0まで)、無次元化距離 $X[x/(D/\lambda)^{1/2}]$ と濃度比 $(C/C_0)$ との関係を求めた例をFig. 3(H:9)に示す。この図から、コンクリート壁中での放射性核種(実効拡散係数が既知であるもの)の濃度比分布が推定される。例えば、 $^{137}\text{Cs}$ (実効拡散係数: $1\times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{d}$ , 崩壊定数: $6.3\times 10^{-5}\text{ d}^{-1}$ )の $x=4\text{ cm}$ (無次元化距離:3.18)における濃度比は11年後(無次元化時間:0.25)で約 $5\times 10^{-6}$ と推定される。

### 3.4 コンクリート壁からの放射性核種の浸出量

ライナーからの浸出量評価に関するパラメータ(崩壊定数, 実効拡散係数及びライナーの厚さ)を含んだ浸出量の時間の関数としての曲線を得るため, 無次元化時間( $T:t\lambda$ ), 無次元化した浸出量( $Q:q/C_0/(D/\lambda)^{1/2}$ ,  $R:r/C_0/(D/\lambda)^{1/2}$ ), 及び前述の標準厚さ( $H:h/(D/\lambda)^{1/2}$ )を用いた。標準厚さを1から50まで変化させ, 無次元化時間の関数として計算した無次元化浸出量(Q)と無次元化残存浸出量(R)をFig. 4とFig. 5にそれぞれ示す。

具体的評価例として, 前述の実効拡散係数の選定値(中央値)を用いて,  $^{137}\text{Cs}$ と $^{90}\text{Sr}$ の積算浸出比( $f(q)$ )及び積算残存浸出比( $f(r)$ )をライナーの厚さを1 cmから5 cmまで変化させて計算した結果をFigs. 6~9に示す。 $^{60}\text{Co}$ の積算浸出比はライナーの厚さが1 cmの場合でも最大値が $10^{-29}$ 以下と極めて低くなるので図に示さなかった。

さらに, 上記の計算で求められた積算浸出比と積算残存浸出比の最大値をTable 2に掲げる。



Table 1 Standardized thickness of a concrete wall depending on concrete wall thickness, intrinsic diffusion coefficients, and decay constants

Concrete wall thickness (cm)	Standardized thickness $h / (D / \lambda)^{1/2}$		
	Case 1	Case 2	Case 3
	<sup>137</sup> Cs		
1	0.252	0.796	2.52
2	0.504	1.59	5.04
3	0.756	2.39	7.56
4	1.01	3.18	10.1
	<sup>90</sup> Sr		
1	2.58	8.20	25.8
2	5.16	16.4	51.6
3	7.74	24.6	77.4
4	10.3	32.8	103
	<sup>60</sup> Co		
1	$6.02 \times 10^2$	$1.90 \times 10^3$	$6.02 \times 10^3$
2	$1.20 \times 10^3$	$3.80 \times 10^3$	$1.20 \times 10^4$
3	$1.81 \times 10^3$	$5.69 \times 10^3$	$1.81 \times 10^4$
4	$2.41 \times 10^3$	$7.59 \times 10^3$	$2.41 \times 10^4$

Case 1: highest intrinsic diffusion coefficient.

Case 2: medium intrinsic diffusion coefficient.

Case 3: lowest intrinsic diffusion coefficient.

Table 2 Maximum cumulative fractions of  $^{137}\text{Cs}$  and  $^{90}\text{Sr}$  leached from a concrete lined package (200 l)

Thickness of concrete wall (cm)	Maximum cumulative value	
	Leaching fraction	Residual leaching fraction
( $^{137}\text{Cs}$ )		
1	$6.81 \times 10^{-3}$	$2.26 \times 10^{-3}$
2	$6.09 \times 10^{-4}$	$1.67 \times 10^{-4}$
3	$5.49 \times 10^{-5}$	$7.35 \times 10^{-6}$
4	$4.98 \times 10^{-6}$	$9.90 \times 10^{-7}$
5	$4.53 \times 10^{-7}$	$9.02 \times 10^{-8}$
( $^{90}\text{Sr}$ )		
1	$7.30 \times 10^{-6}$	$1.70 \times 10^{-6}$
2	$2.30 \times 10^{-9}$	$3.66 \times 10^{-10}$
3	$7.30 \times 10^{-13}$	$1.08 \times 10^{-13}$
4	$2.32 \times 10^{-16}$	$2.36 \times 10^{-17}$
5	$7.42 \times 10^{-20}$	$8.35 \times 10^{-21}$

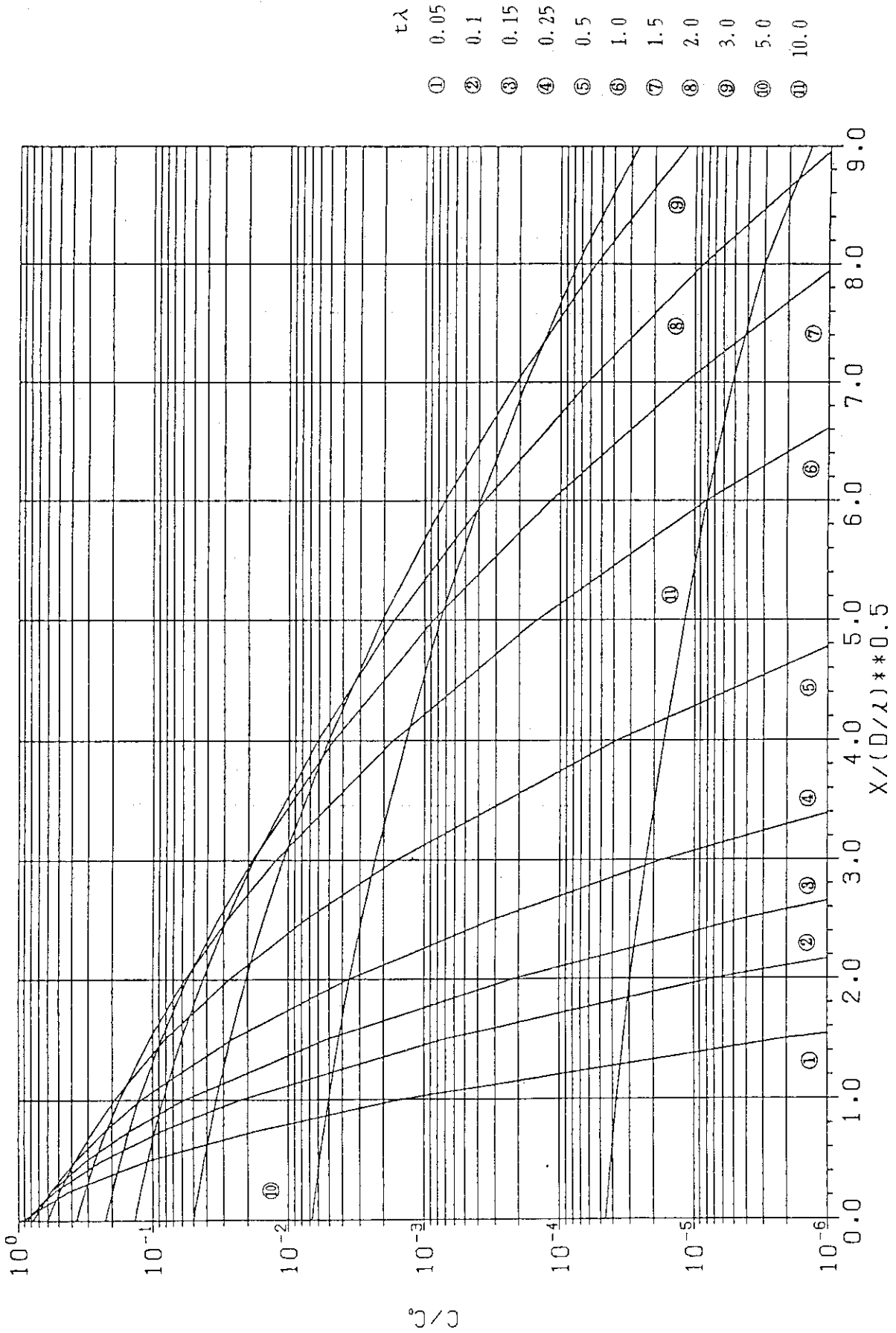


Fig. 3 Relationship between dimensionless parameters  $C/C_0$  and  $x/(D/\lambda)^{1/2}$  in relation with dimensionless time ( $\tau\lambda$ )

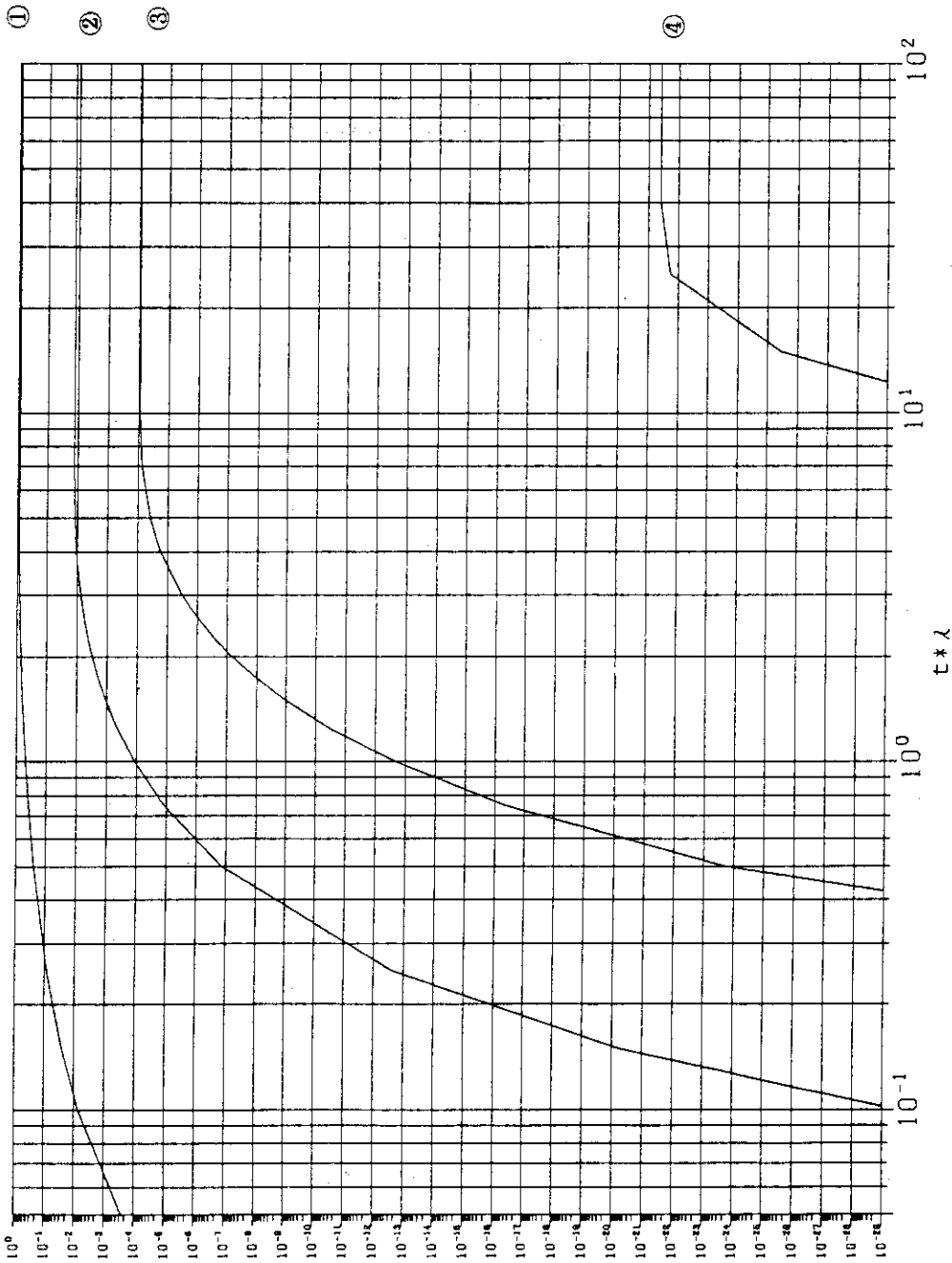


Fig. 4 Relationship between standardized amount of radionuclides leached  $[q/C_0/(D/\lambda)^{1/2}]$  and dimensionless time  $[t\lambda]$

Standardized thickness: ①; 1 cm, ②; 5 cm, ③; 10 cm, ④; 50 cm

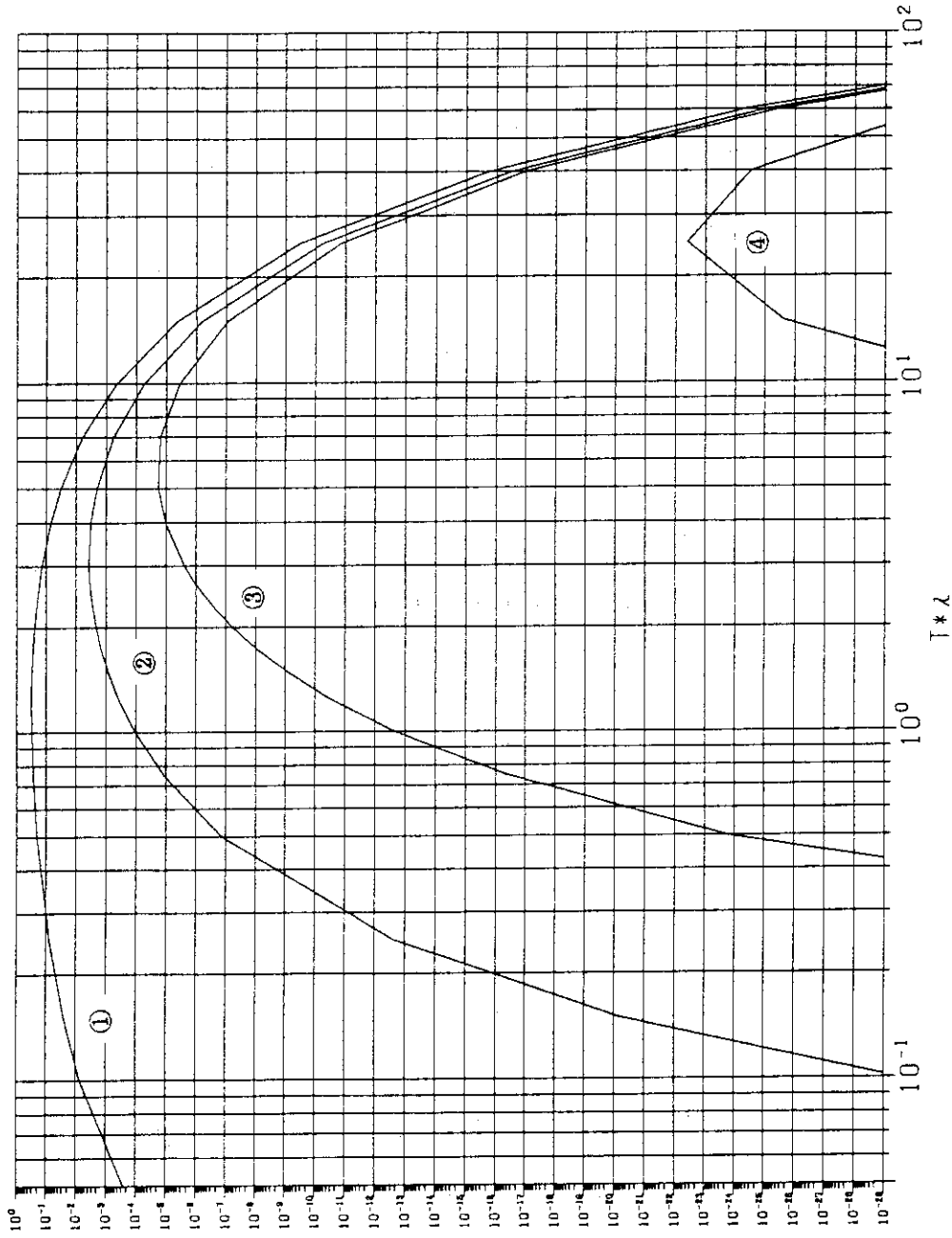


Fig. 5 Relationship between standardized residual amount of radionuclides leached  $[\gamma/C_0/(D/\lambda)^{1/2}]$  and dimensionless time  $[t\lambda]$

Standardized thickness: ①; 1 cm, ②; 5 cm, ③; 10 cm, ④; 50 cm

R

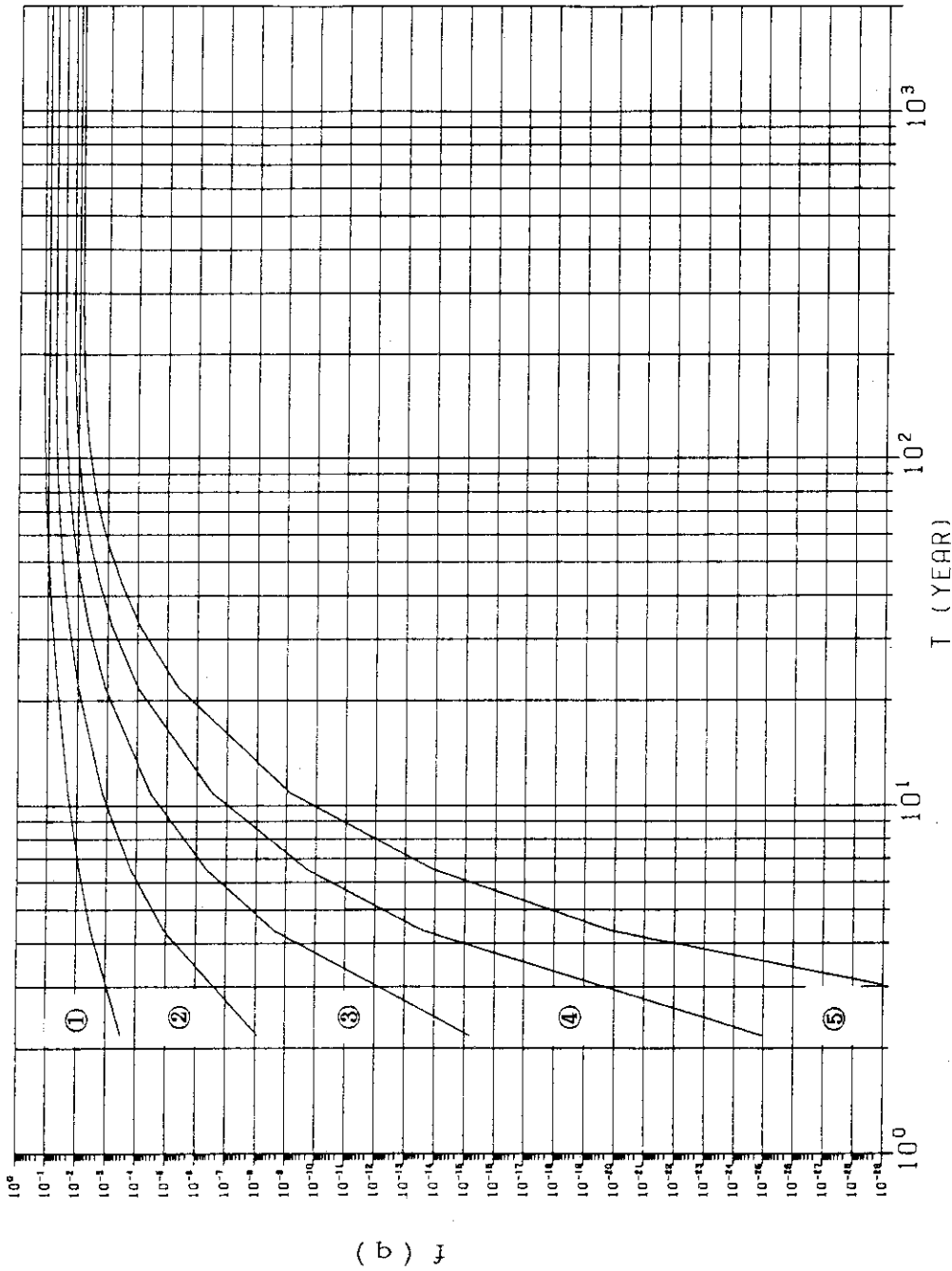


Fig. 6 Cumulative fraction of  $^{137}\text{Cs}$  leached from a concrete liner

Diffusion coefficient:  $1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{day}$   
 Liner thickness: ①; 1 cm, ②; 2 cm, ③; 3 cm, ④; 4 cm  
 ⑤; 5 cm

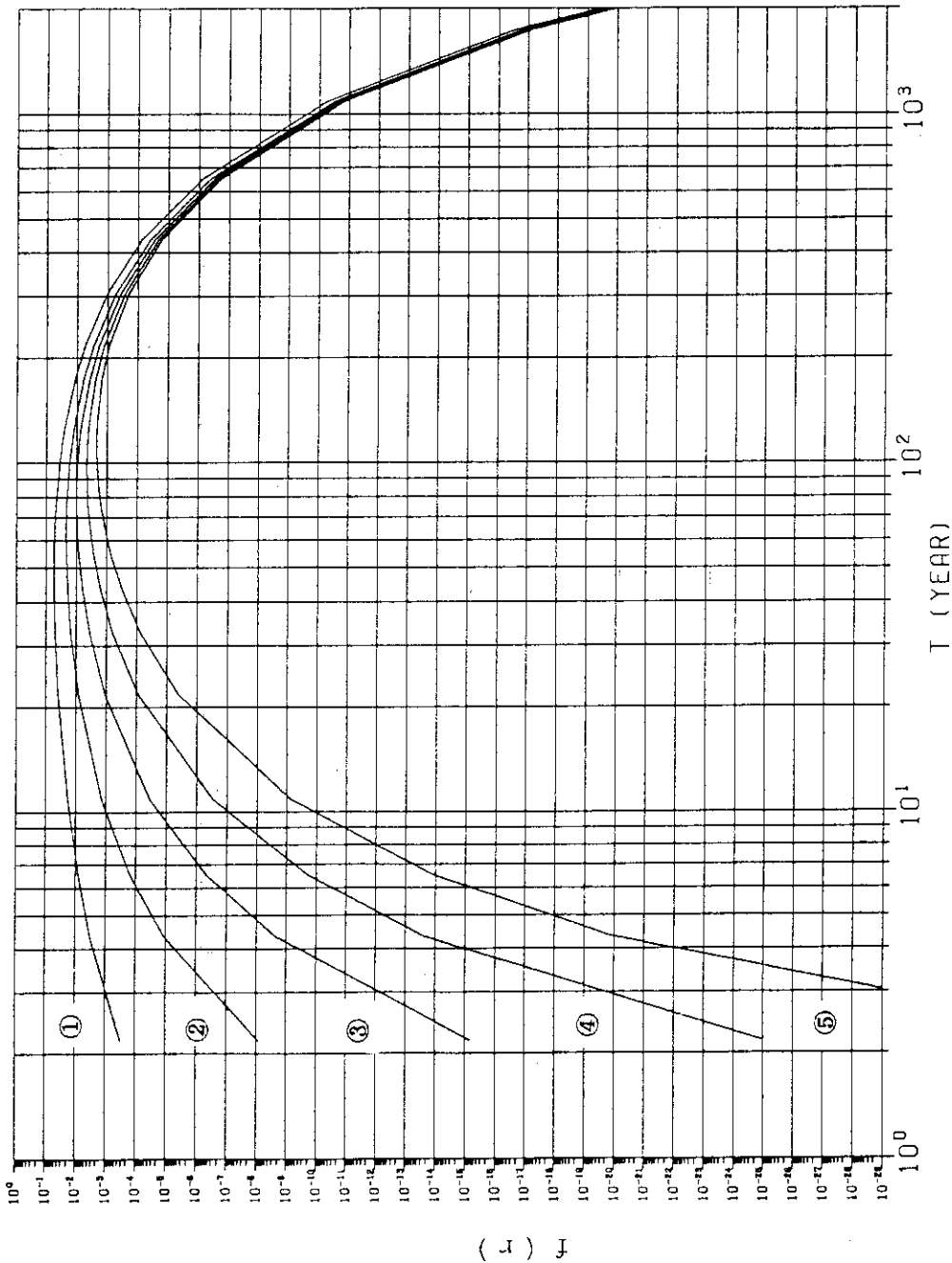


Fig. 7 Cumulative residual fraction of  $^{137}\text{Cs}$  leached from a concrete liner

Diffusion coefficient:  $1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{day}$

Liner thickness: ①: 1 cm, ②: 2 cm, ③: 3 cm, ④: 4 cm  
⑤: 5 cm

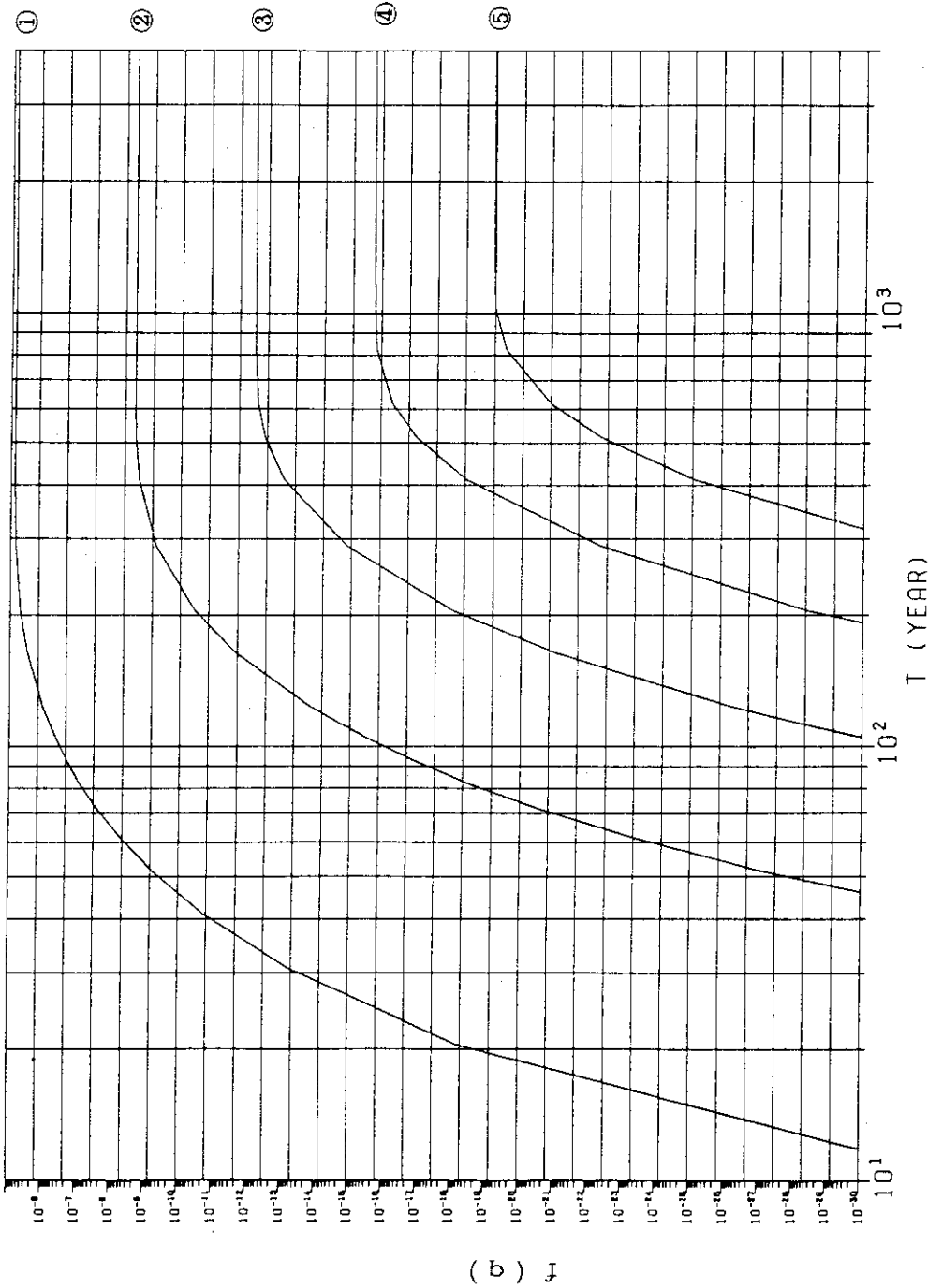


Fig. 8 Cumulative fraction of  $^{90}\text{Sr}$  leached from a concrete liner

Diffusion coefficient:  $1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{day}$

Liner thickness: ①; 1 cm, ②; 2 cm, ③; 3 cm, ④; 4 cm  
⑤; 5 cm



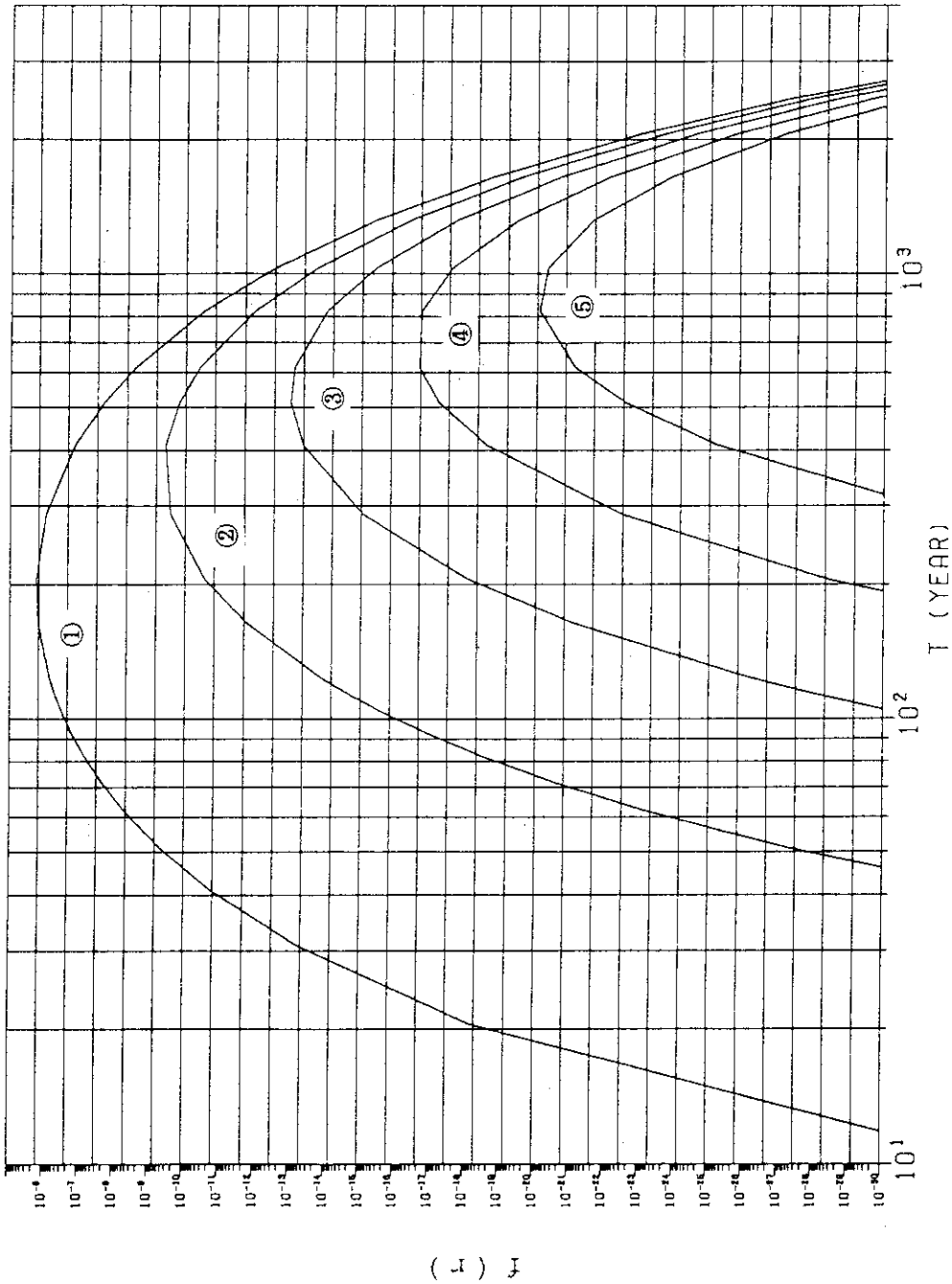


Fig. 9 Cumulative residual fraction of  $^{90}\text{Sr}$  leached from a concrete liner

Diffusion coefficient:  $1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{day}$

Liner thickness: ①; 1 cm, ②; 2 cm, ③; 3 cm, ④; 4 cm  
⑤; 5 cm

## 4. 均一固化体の浸出性との比較

### 4.1 均一固化体の浸出性評価モデル

軽水炉の運転廃棄物に含まれる蒸発缶濃縮廃液，使用済イオン交換樹脂，焼却灰等をセメント，アスファルト，プラスチック等で混合固化したものは，巨視的には均一固化体と見做せる。これらについては従来から多くの浸出試験が行われ，データの解析法も種々提案されてきた。今までに提案された解析法（速度式）は次のように分類できる。

- ① 物質輸送理論に基づく速度式。
- ② 物質輸送理論と化学反応論とに基づく速度式。
- ③ 半経験的速度式。

ここでは，①のうち半無限拡散源モデルを用いて均一固化体の浸出性を評価する。このモデルでは，浸出過程が固化体内部の拡散に律速されると仮定している。ここで考える浸出系は巨視的に見て放射性核種が均一に分散している半無限の固化体マトリックスとそれが浸漬されている無限で均一組成を有する液相とから成っている。この場合，拡散物質が固化体から浸出する速度は微小要素における物質収支から次式で与えられる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \lambda C \quad (39)$$

ここで， $C$ ：拡散物質の濃度，  
 $D$ ：実効拡散係数，  
 $\lambda$ ：崩壊定数。

初期条件及び境界条件は，

$$t = 0, \quad \infty > x > 0, \quad C = C_0, \quad (40)$$

$$t = 0, \quad x < 0, \quad C = 0, \quad (41)$$

$$t > 0, \quad x = 0, \quad C = 0, \quad (42)$$

$$t > 0, \quad x = \infty, \quad C = C_0 \exp(-\lambda t). \quad (43)$$

であり，ここで $C_0$ は拡散物質の初期濃度である。これらの条件で(39)式の解は次式で与えられる。

$$C = C_0 \exp(-\lambda t) \left( 1 - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (44)$$

表面積 $S$ ，体積 $V$ の固化体から時間 $t$ までの拡散物質の積算浸出比 $f(q)$ は次式で示される。

$$f(q) = \left( \frac{S}{V} \right) \sqrt{\frac{D}{\lambda}} (1 - \operatorname{erfc} \sqrt{\lambda t}) \quad (45)$$

さらに、浸出後における減衰をも補正した積算残留浸出比 ( $f(r)$ ) は次式で表される。

$$f(r) = 2 \left( \frac{S}{V} \right) \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \exp(-\lambda t) \quad (46)$$

#### 4.2 浸出性予測

上式を用いて、沸騰水型原子炉で発生する蒸発缶濃縮廃液のセメント固化体 (200 ℓ ドラム缶サイズ, ドラム缶が存在しない場合) からの放射性核種の積算浸出比 ( $f(q)$ ) 及び積算残留比 ( $f(r)$ ) を求めた結果を Figs.10 ~ 11 に示す。ここで、放射性核種の浸出に関する実効拡散係数を下記のように仮定した。

$$D_{Cs} : 1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{d},$$

$$D_{Sr} : 1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{d},$$

$$D_{Co} : 1 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{d}.$$

Table 2 に掲げたコンクリートライナーからの浸出比と比較するため、均一固化体からの浸出比の最大値を Table 3 に示す。評価した核種のうち、最も高い浸出性を示す  $^{137}\text{Cs}$  について、両表の比較から、均一セメント固化体と同等の浸出性を与えるためには、ライナーの厚さは 1 cm 程度で十分との結論が得られる。この結論は、ライナーに核種の浸出に有害な影響を与える可能性のある欠損及び劣化がないと仮定した場合のものである。

Table 3 Estimated leachability of a cement composite

$f(q)$  : Cumulative leaching fraction

$f(r)$  : Cumulative residual leaching fraction

Nclide	Maximum $f(q)$	Maximum $f(r)$
$^{137}\text{Cs}$	$1.7 \times 10^{-1}$	$5.9 \times 10^{-2}$
$^{90}\text{Sr}$	$1.4 \times 10^{-2}$	$5.6 \times 10^{-3}$
$^{60}\text{Co}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$2.4 \times 10^{-5}$

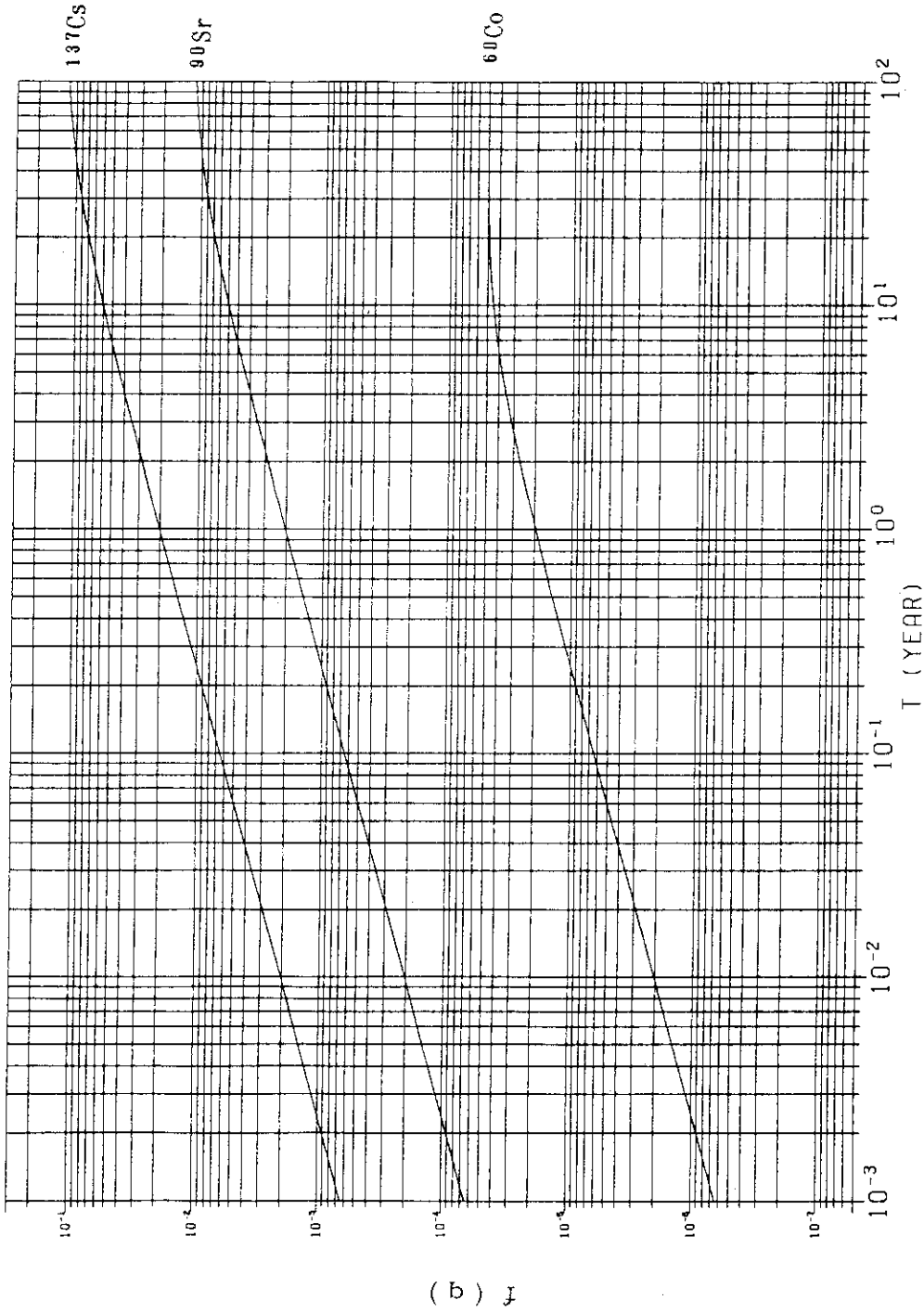


Fig. 10 Cumulative fraction leached from a cement composite

Diffusion coefficient:  $^{137}\text{Cs}$ ;  $1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{d}$ ,  $^{90}\text{Sr}$ ;  $1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{d}$ ,  
 $^{60}\text{Co}$ ;  $1 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{d}$

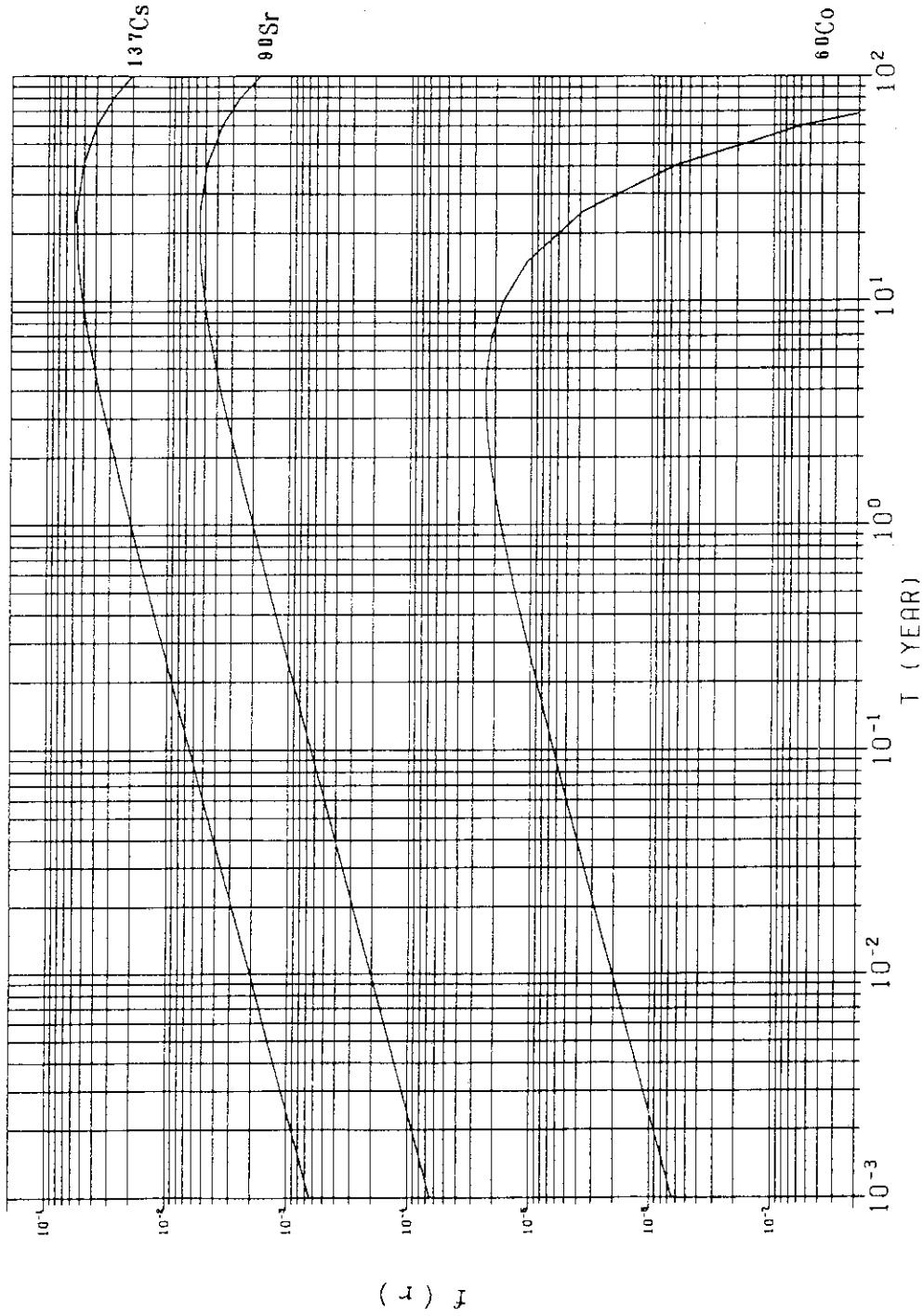


Fig. 11 Cumulative residual fraction leached from a cement composite

Diffusion coefficient:  $^{137}\text{Cs}$ ;  $1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{d}$ ,  $^{90}\text{Sr}$ ;  $1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{d}$ ,  
 $^{60}\text{Co}$ ;  $1 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{d}$

## 5. 結 言

低レベル放射性廃棄物の浅地層処分に関するソースターム評価モデル開発の一環として、コンクリートライニングを施したドラム缶に不均一廃棄物を封入した廃棄体（但し、ここではドラム缶がない場合を取り上げた）について、放射性核種の浸出量を評価するモデルを作成した。本モデル作成上の基本的仮定は下記の通りである。

- ① 廃棄物は半無限で、廃棄物内部における放射性核種の濃度分布は常に一定で変化しない。
- ② 廃棄物はコンクリートライニングを隔てて、半無限で均一組成の液相に接している。
- ③ 廃棄物からの放射性核種の浸出は、コンクリートライニング中での放射性核種の拡散過程に律速される。
- ④ 固液界面に形成される液境膜での放射性核種の拡散は、コンクリートライニング内部での拡散速度に比べて十分速い。
- ⑤ 放射性核種は固有の崩壊速度で減衰する。

上記の基本的仮定に基づいて、コンクリートライニング内部での微小要素における物質収支式を、本文中に述べた初期及び境界条件で解き、浸出式を得た。本モデルに基づいて作成した計算コード(WPLATE)は下記の計算機能を有している。

- ① 標準化（無次元化）時間及び標準化距離（コンクリートライニング内部）の関数として、標準化濃度分布を与える。
- ② 標準化時間及び標準化厚さ（コンクリートライニング）の関数として、標準化積算浸出量及び積算残留浸出量を与える。
- ③ 上記①及び②について、各パラメータに具体的な次元を与えた場合について、それぞれの計算を行う。

WPLATEを用いて、コンクリートライニングの厚さを変化させ、 $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{90}\text{Sr}$ 及び $^{60}\text{Co}$ の浸出量を求めた。それらの値と均一セメント固化体からの対応する浸出量との比較から、コンクリートライニング付き廃棄体が均一セメント固化体と同等の浸出性を与えるためには、どの程度のライナーの厚さが必要であるかを検討した。その結果、浸出性に関して支配的な核種である $^{137}\text{Cs}$ の浸出性から、ライナーの厚さは1 cm程度で十分であると判断された。

## 謝 辞

本報告書をまとめるに際して貴重な助言を頂いた環境安全研究部低レベル放射性廃棄物処理処分研究室和達嘉樹室長、並びに環境安全研究部前田 頌氏に感謝致します。

## 5. 結 言

低レベル放射性廃棄物の浅地層処分に関するソースターム評価モデル開発の一環として、コンクリートライニングを施したドラム缶に不均一廃棄物を封入した廃棄体（但し、ここではドラム缶がない場合を取り上げた）について、放射性核種の浸出量を評価するモデルを作成した。本モデル作成上の基本的仮定は下記の通りである。

- ① 廃棄物は半無限で、廃棄物内部における放射性核種の濃度分布は常に一定で変化しない。
- ② 廃棄物はコンクリートライニングを隔てて、半無限で均一組成の液相に接している。
- ③ 廃棄物からの放射性核種の浸出は、コンクリートライニング中での放射性核種の拡散過程に律速される。
- ④ 固液界面に形成される液境膜での放射性核種の拡散は、コンクリートライニング内部での拡散速度に比べて十分速い。
- ⑤ 放射性核種は固有の崩壊速度で減衰する。

上記の基本的仮定に基づいて、コンクリートライニング内部での微小要素における物質収支式を、本文中に述べた初期及び境界条件で解き、浸出式を得た。本モデルに基づいて作成した計算コード(WPLATE)は下記の計算機能を有している。

- ① 標準化（無次元化）時間及び標準化距離（コンクリートライニング内部）の関数として、標準化濃度分布を与える。
- ② 標準化時間及び標準化厚さ（コンクリートライニング）の関数として、標準化積算浸出量及び積算残留浸出量を与える。
- ③ 上記①及び②について、各パラメータに具体的な次元を与えた場合について、それぞれの計算を行う。

WPLATEを用いて、コンクリートライニングの厚さを変化させ、 $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{90}\text{Sr}$ 及び $^{60}\text{Co}$ の浸出量を求めた。それらの値と均一セメント固化体からの対応する浸出量との比較から、コンクリートライニング付き廃棄体が均一セメント固化体と同等の浸出性を与えるためには、どの程度のライナーの厚さが必要であるかを検討した。その結果、浸出性に関して支配的な核種である $^{137}\text{Cs}$ の浸出性から、ライナーの厚さは1 cm程度で十分であると判断された。

## 謝 辞

本報告書をまとめるに際して貴重な助言を頂いた環境安全研究部低レベル放射性廃棄物処理処分研究室和達嘉樹室長、並びに環境安全研究部前田 頌氏に感謝致します。

## 参 考 文 献

- 1) Matsuzuru, H. et al. : Health Phys., 32, 529 (1977).
- 2) Matsuzuru, H. et al. : Atomkernenrigie, 29, 287 (1977).
- 3) Matsuzuru, H. and Ito, A. : Ann. Nucl. Energy, 4, 465 (1977).
- 4) Matsuzuru, H. and Ito, A. : J. Nucl. Sci. Technol., 15, 296 (1978).
- 5) Matsuzuru, H. and Ito, A. : Health Phys., 34, 643 (1978).
- 6) Matsuzuru, H. et al. : Nucl. Sci. Eng., 80, 14 (1982).
- 7) Moore, J. G. et al. : Nucl. Technol., 32, 39 (1977).
- 8) Amarantos, S. G. and Petropoulos, J. H. : DEMO 81/2 (1982).
- 9) Corney, S. T. : NUREG/CR-4181 (1985).
- 10) Moore, J. G. et al. : ORNL-4962 (1975).
- 11) Maeda, S. and Wadachi, Y. : JAERI-M 85-181 (1985).
- 12) Crank, J. : The Mathematics of Diffusion, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1975.
- 13) Atkinson, A. and Nickerson, A. K. : AERE-R 10952 (1983).



## 付録 1 平板中の 1 次元拡散問題の解法

## 1.1 問題の設定

平板中の 1 次元拡散問題を支配する初期値・境界値問題を再掲する。以下の記号を用いる。

- $x$  : 空間座標 (L)  
 $t$  : 時間 (T)  
 $h$  : 平板の厚さ (L)  
 $C(x, t)$  : 濃度分布 ( $M/L^3$ )  
 $C_0$  : 初期濃度 ( $M/L^3$ )  
 $\lambda$  : 物理的減衰係数 ( $1/T$ )  
 $D$  : 実効拡散係数 ( $L^2/T$ )  
 $[0, h]$  :  $x$  に関する領域  
 $[0, \infty]$  : 時間に関する領域

## 〔問題 A〕

浸出系における物質収支式（支配方程式）及び初期及び境界条件を次のように設定する。

$$\partial C / \partial t = D \partial^2 C / \partial x^2 - \lambda C \quad (1)$$

$$t = 0 \text{ の時} : C(x, 0) = 0 \quad (2)$$

$$x = 0 \text{ の時} : C(0, t) = C_0 \exp(-\lambda t)$$

$$x = h \text{ の時} : C(h, t) = 0$$

濃度に付随する諸量は、次で定義する。

$$j(x, t) : \text{物質流速} (M/L^2/T)$$

$$q(x, t) : \text{浸出積算量} (M/L^2)$$

$$r(x, t) : \text{残存積算浸出量} (M/L^2)$$

$$j(x, t) = -D \partial C / \partial x \quad (3)$$

$$q(x, t) = \int_0^t j(x, \alpha) d\alpha$$

$$r(x, t) = \int_0^t j(x, \alpha) \exp\{-\lambda(t-\alpha)\} d\alpha$$

## 1.2 パラメータの無次元化と標準形

次のようなパラメータを無次元化するため次のような変数変換を行う。

$\lambda \neq 0$  の時

$$X = x / (D/\lambda)^{1/2} \quad (4)$$

$$H = h / (D/\lambda)^{1/2}$$

$$T = \lambda t$$

$$C_1 = C/C_0$$

$$J = j/C_0/\sqrt{(\lambda D)}$$

$$Q = q/C_0/\sqrt{(D/\lambda)}$$

$$R = r/C_0/\sqrt{(D/\lambda)}$$

$\lambda = 0$  の時 ( $\parallel = 1(1/T)$  と置く)

$$X = \bar{x}/(D/\parallel)^{1/2} \quad (5)$$

$$H = h/(D/\parallel)^{1/2}$$

$$T = \parallel t$$

$$C_1 = C/C_0$$

$$J = j/C_0/\sqrt{(\parallel D)}$$

$$Q = q/C_0/\sqrt{(D/\parallel)}$$

$$R = r/C_0/\sqrt{(D/\parallel)}$$

変数変換(4), (5)式を支配方程式に代入して, 次の標準形を得る。

[問題 B]

$\lambda \neq 0$  の時

$$\partial C_1/\partial T = \partial^2 C_1/\partial X^2 - C_1 \quad (6)$$

$$T=0 \text{ の時: } C_1(X, 0) = 0$$

$$X=0 \text{ の時: } C_1(0, T) = \exp(-T)$$

$$X=H \text{ の時: } C_1(H, T) = 0$$

$\lambda = 0$  の時

$$\partial C_1/\partial T = \partial^2 C_1/\partial X^2 \quad (7)$$

$$T=0 \text{ の時: } C_1(X, 0) = 0$$

$$X=0 \text{ の時: } C_1(0, T) = 1$$

$$X=H \text{ の時: } C_1(H, T) = 0$$

また, 以上の変数変換によって, 濃度に付随する諸量には次の関係があることが明確になる。

[性質 1]

$$J(X, T) = -\partial C_1/\partial X \quad (8)$$

$$Q(X, T) = \int_0^T J(X, A) dA$$

$$R(X, T) = \int_0^T J(X, A) \exp\{-\lambda(T-A)\} dA$$

ここで, さらに次の置換を行う。

$$\lambda \neq 0 \text{ の時: } C_1(X, T) = C_2(X, T) \exp(-T) \quad (9)$$

$$\lambda = 0 \text{ の時: } C_1(X, T) = C_2(X, T)$$

畢竟, 問題Bは $\lambda$ の値にかかわらず次に帰着される。

[問題 C]

$$\partial C_2/\partial T = \partial^2 C_2/\partial X^2 \quad (10)$$

$$T=0 \text{ の時: } C_2(X, 0) = 0$$

$$X = 0 \text{ の時: } C_2(0, T) = 1$$

$$X = H \text{ の時: } C_2(H, T) = 0$$

### 1.3 Laplace 変換を用いた解法

〔性質 2〕

問題 C の解は、次で与えられる。

$$C_2(X, T) = \sum_{i=0}^{\infty} [\operatorname{erfc}\{(X+2iH)/2\sqrt{T}\} - \operatorname{erfc}\{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}\}] \quad (11)$$

(簡略証明)

$$C_3(X, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pT) C_2(X, T) dT \quad (12)$$

と書いて、問題 C を Laplace 変換すると、次式を得る。

$$\partial^2 C_3 / \partial X^2 - p C_3 = 0 \quad (13)$$

$$C_3(0, p) = 1/p$$

$$C_3(H, p) = 0$$

(13) 式を解いて、その解を次のように等比級数に展開し、

$$\begin{aligned} C_3(X, p) &= [\exp(-\sqrt{p}) - \exp\{(X-2H)\sqrt{p}\}] / [p\{1 - \exp(-2H\sqrt{p})\}] \quad (14) \\ &= (1/p) \sum_{i=0}^{\infty} [\exp\{-(X+2iH)\sqrt{p}\} - \exp\{(X-2(i+1)H)\sqrt{p}\}] \end{aligned}$$

さらに、(14) 式で、項別に逆 Laplace 変換することにより (11) 式が得られる。

〔性質 3〕

問題 B の解は、次で与えられる。

$\lambda = 0$  の時

$$C_1(X, T) = \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{erfc}\{(2iH+X)/2\sqrt{T}\} - \operatorname{erfc}\{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}\} \quad (15)$$

$$J(X, T) = \sum_{i=0}^{\infty} [\exp\{-(2iH+X)^2/4T\} + \exp\{-(2(i+1)H-X)^2/4T\}] / \sqrt{(\pi T)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Q(X, T) &= 2\sqrt{T} \sum_{i=0}^{\infty} [[\exp\{-(2iH+X)^2/4T\} + \exp\{-(2(i+1)H-X)^2/4T\}] / \sqrt{\pi} \\ &\quad - \{(2iH+X)/2\sqrt{T}\} \operatorname{erfc}\{(2iH+X)/2\sqrt{T}\} \\ &\quad - \{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}\} \operatorname{erfc}\{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}\}] \quad (17) \end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$  の時

$$C_1(X, T) = \exp(-T) \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{erfc}\{(2iH+X)/2\sqrt{T}\} - \operatorname{erfc}\{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}\} \quad (18)$$

$$J(X, T) = \exp(-T) \sum_{i=0}^{\infty} [\exp\{-(2iH+X)^2/4T\} + \exp\{-(2(i+1)H-X)^2/4T\}] / \sqrt{(\pi T)} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 Q(X, T) = 0.5 \sum_{j=0}^{\infty} & \left[ \exp\{-(2iH+X)\} \operatorname{erfc}\{(2iH+X)/2\sqrt{T}-\sqrt{T}\} \right. \\
 & - \exp(2iH+X) \operatorname{erfc}\{(2iH+X)/2\sqrt{T}+\sqrt{T}\} \\
 & + \exp\{-(2(i+1)H-X)\} \operatorname{erfc}\{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}-\sqrt{T}\} \\
 & \left. - \exp\{2(i+1)H-X\} \operatorname{erfc}\{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}+\sqrt{T}\} \right] \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(X, T) = \exp(-T) 2\sqrt{T} \sum_{i=0}^{\infty} & \left[ \left[ \exp\{-(2iH+X)^2/4T\} + \exp\{-(2(i+1)H-X)^2/4T\} \right] / \sqrt{\pi} \right. \\
 & - \{(2iH+X)/2\sqrt{T}\} \operatorname{erfc}\{(2iH+X)/2\sqrt{T}\} \\
 & \left. - \{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}\} \operatorname{erfc}\{(2(i+1)H-X)/2\sqrt{T}\} \right] \quad (21)
 \end{aligned}$$

(簡略証明)

問題 C の解  $C_2(X, T)$  より, (15), (18)式が与えられる。また, (16), (19)式は, 各々  $C_1(X, T)$  を,  $X$  で微分した結果である。(17), (20), (21)式の証明には, 次の補題を用いる。

[補題 1]

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \exp(-\lambda \alpha - B/\alpha) / \sqrt{\alpha} d\alpha &= 2 \int_0^{\sqrt{t}} \exp(-\lambda y^2 - b/y^2) dy \\
 &= 0.5 \sqrt{(\pi/\lambda)} \left[ \exp\{-2\sqrt{(B\lambda)}\} \operatorname{erfc}\{\sqrt{(B/t)} - \sqrt{(\lambda t)}\} \right. \\
 & \quad \left. - \exp\{2\sqrt{(B\lambda)}\} \operatorname{erfc}\{\sqrt{(B/t)} + \sqrt{(\lambda t)}\} \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^t \exp(-B/\alpha) / \sqrt{\alpha} d\alpha = 2\sqrt{t} \exp\{-(B/t)\} - \sqrt{(\pi B)} \operatorname{erfc}\{\sqrt{(B/t)}\} \quad (23)$$

(17)式は, (16)式を項別に, 補題(23)で示される積分を行うことにより得られる。(20)式は, 同じく (19)式を項別に, 補題(22)式の積分を実施することで得られる。(21)式は, (19)式の両辺に  $\exp(-T-\alpha)$  =  $\exp(-T)\exp(\alpha)$  を掛けて積分するため,  $\exp(-T)$ を除いて(17)式と同じである。

性質 3 から, 次の性質が導かれる。

[性質 4]

$$\begin{aligned}
 \{C_1(X, T) : \lambda \neq 0\} &= \exp(-T) \{C_1(X, t) : \lambda = 0\} \quad (24) \\
 \{J(X, T) : \lambda \neq 0\} &= \exp(-T) \{J(X, t) : \lambda = 0\} \\
 \{R(X, T) : \lambda \neq 0\} &= \exp(-T) \{Q(X, t) : \lambda = 0\}
 \end{aligned}$$

なお, 問題 A の解は, 問題 B の解(15)~(21)式に, 無次元化の変数変換(4), (5)を, 逆に施すことで, 簡単に得られる。結果は, 本文中にある通りである。

#### 1.4 変数分離を用いた解法

[性質 5]

問題 C の解は, 次の形に求めることもできる。

$$C_2(X, T) = 1 - (X/H) - (2/\pi) \sum_{i=1}^{\infty} \left[ (1/i) \sin(i\pi X/H) \exp(-i^2 \pi^2 T/H^2) \right] \quad (25)$$

(簡略証明)

$$C_3(X, T) = 1 - (X/H) = (H-X)/H \quad (26)$$

と置くと、 $C_3(X, T)$  は、次式の解を与える。

$$\partial C_3 / \partial T = \partial^2 C_3 / \partial X^2 \quad (27)$$

$$T=0 \text{ の時: } C_3(X, 0) = 1 - (X/H)$$

$$X=0 \text{ の時: } C_3(0, T) = 1$$

$$X=H \text{ の時: } C_3(H, T) = 0$$

$$C_4(X, T) = C_2(X, T) - C_3(X, T) \quad (28)$$

と置くと、問題 C は、次の問題に帰着する。

[問題 D]

$$\partial C_4 / \partial T = \partial^2 C_4 / \partial X^2 \quad (29)$$

$$T=0 \text{ の時: } C_4(X, 0) = -1 + (X/H)$$

$$X=0 \text{ の時: } C_4(0, T) = 0$$

$$X=H \text{ の時: } C_4(H, T) = 0$$

ここで、次のような変数分離を行うと、

$$C_4(X, T) = S(T)W(X) \quad (30)$$

(29)式は次式のように表される。

$$(1/S) \partial S / \partial T = (1/W) \partial^2 W / \partial X^2 = -r_i^2 \quad (31)$$

但し、 $r_i : \text{Cte.}, \neq 0$ 。

したがって、(31)式の一般解は、以下の関係を(30)式に代入して(34)式で与えられる。

$$S(T) = C_i \exp(-r_i^2 T), \quad C_i : \text{Cte.}, \neq 0 \quad (32)$$

$S(T)$  は実数、かつ、 $T$  に関して有限のため、 $r_i$  は正の実数である。

$$W(X) = A_i \cos(r_i X) + B_i \sin(r_i X), \quad A_i, B_i : \text{Cte.}, A_i \cdot B_i \neq 0 \quad (33)$$

$A_i, B_i$  の任意性に、 $C_i$  を吸収して、

$$C_4(X, T) = \sum_{i=1}^{\infty} \{ A_i \cos(r_i X) + B_i \sin(r_i X) \} \exp(-r_i^2 T) \quad (34)$$

$C_4(X, T)$  は(29)式の一般解を与えるので、初期値及び境界値条件を代入する。

$$X=0, \text{ 任意の } T \text{ に対して, } \sum_{i=1}^{\infty} A_i \exp(-r_i^2 T) = 0 \text{ より,}$$

$$A_i = 0, \quad B_i \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots, \infty) \quad (35)$$

$$X=H, \text{ 任意の } T \text{ に対して, } \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin(r_i H) \exp(-r_i^2 T) = 0 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \sin(r_i H) &= 0 \\ r_i &= i\pi/H \quad (i=1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (36)$$

$T=0$ , 任意の  $X$  に対して、

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin(i\pi X/H) = -1 + (X/H) \quad (37)$$

(37)式の両辺に、 $\sin(i\pi X/H)$  をかけて、 $[0, H]$  で積分すれば、次の3式を用いて、 $B_i$  が求まる。

$$i \neq j \text{ の時: } \int_0^H \sin(i\pi X/H) \sin(j\pi X/H) dX = 0 \quad (38)$$

$$i = j \text{ の時: } \int_0^H \sin^2(i\pi X/H) dX = H/2$$

$$\int_0^H \sin(i\pi X/H) dX = \{1 - \cos(i\pi)\} H / (i\pi) \quad (39)$$

$$\int_0^H X \sin(i\pi X/H) dX = -H^2 \cos(i\pi) / (i\pi) \quad (40)$$

これらより,

$$B_i = -2 / (i\pi) \quad (41)$$

したがって,

$$C_4(X, T) = -(2/\pi) \sum_{i=1}^{\infty} [(1/i) \sin(i\pi X/H) \exp(-i^2\pi^2 T/H^2)] \quad (42)$$

これより,  $C_2(X, T) = C_3(X, T) + C_4(X, T)$  なる関係が導かれ, (25)式が得られる。

〔性質 6〕

問題 B の解は, 次の形に求めることもできる。

$\lambda = 0$  の時

$$C_1(X, T) = 1 - (x/H) - (2/\pi) \sum_{i=1}^{\infty} [(1/i) \sin(i\pi X/H) \exp(-i^2\pi^2 T/H^2)] \quad (43)$$

$$J(X, T) = (1/H) + (2/H) \sum_{i=1}^{\infty} [\cos(i\pi X/H) \exp(-i^2\pi^2 T/H^2)] \quad (44)$$

$$Q(X, T) = (T/H) + (2/H) \sum_{i=1}^{\infty} \{ [H^2 / (\pi^2 i^2)] \cos(i\pi X/H) \{ 1 - \exp(-i^2\pi^2 T/H^2) \} \} \quad (45)$$

$\lambda \neq 0$  の時

$$C_1(X, T) = \exp(-T) [1 - (x/H) - (2/\pi) \sum_{i=1}^{\infty} \{ (1/i) \sin(i\pi X/H) \exp(-i^2\pi^2 T/H^2) \}] \quad (46)$$

$$J(X, T) = \exp(-T) [(1/H) + (2/H) \sum_{i=1}^{\infty} \{ \cos(i\pi X/H) \exp(-i^2\pi^2 T/H^2) \}] \quad (47)$$

$$Q(X, T) = (1/H) [1 - \exp(-T)] \\ + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(i\pi X/H) \{ 1 - \exp(-i^2\pi^2 T/H^2 - T) \} / (i^2\pi^2/H^2 + 1) \quad (48)$$

$$R(X, T) = \{ \exp(-T) / H \} \\ \cdot [T + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \{ H^2 / (\pi^2 i^2) \} \cos(i\pi X/H) \{ 1 - \exp(-i^2\pi^2 T/H^2) \}] \quad (49)$$

(簡略証明)

性質 5 の解  $C_2(X, T)$  より, (43), (46)式が得られる。また, (44), (47)式は, それぞれ  $C_1(X, T)$  を  $X$  で微分した結果である。  $J(X, T)$  が  $T$  の大きな範囲で  $X, T$  につき一様に収束する級数であることを留意すると, (44), (47)式の項別積分により, (45), (48)式が得られる。(49)式も, 性質 3 の場合と同じように明らかである。

注意: 性質 6 の解も, 性質 4 を満たしており, また, 問題 A に対応する解は, 性質 6 の解から, 付録 1.3 節と同様に, パラメータの無次元化のための変数変換を逆に施すことによって簡単に得られ, その結果は本文中に示した通りである。

## 付録 2 半無限空間中の 1 次元拡散問題の解法

## 2.1 問題の設定

半無限空間中の 1 次元拡散問題を支配する初期値・境界値問題を、再掲する。付録 1 と同じ以下の記号を用いる。

- $x$  : 空間座標 (L)  
 $t$  : 時間 (T)  
 $C(x, t)$  : 濃度分布 ( $M/L^3$ )  
 $C_0$  : 初期濃度 ( $M/L^3$ )  
 $\lambda$  : 物理的減衰係数 ( $1/T$ )  
 $D$  : 実効拡散係数 ( $L^2/T$ )  
 $(x, t) \in [0, \infty) \cdot [0, \infty)$  : 領域

〔問題 E〕

$$\partial C / \partial t = D \partial^2 C / \partial x^2 - \lambda C \quad (50)$$

$$t = 0 \text{ の時 : } C(x, 0) = C_0 \quad (51)$$

$$x = 0 \text{ の時 : } C(0, t) = 0$$

$$x = \infty \text{ の時 : } C(\infty, t) = C_0 \exp(-\lambda t)$$

濃度に付随する諸量も、付録 1 と全く同様に次で定義する。

$$j(x, t) : \text{物質流速 (M/L}^2\text{/T)}$$

$$q(x, t) : \text{浸出積算量 (M/L}^2\text{)}$$

$$r(x, t) : \text{残存積算浸出量 (M/L}^2\text{)}$$

$$j(x, t) = -D \partial C / \partial x \quad (52)$$

$$q(x, t) = \int_0^t j(x, \alpha) d\alpha$$

$$r(x, t) = \int_0^t j(x, \alpha) \exp\{-\lambda(t-\alpha)\} d\alpha$$

## 2.2 パラメータの無次元化と標準形

付録 1.2 の(4), (5)式に示したパラメータの無次元化のための変数変換を行う。H に関する部分は省く。その結果、次の標準形の問題に帰着される。

〔問題 F〕

$\lambda \approx 0$  の時

$$\partial C_1 / \partial T = \partial^2 C_1 / \partial X^2 - C_1 \quad (53)$$

$$T = 0 \text{ の時 : } C_1(X, 0) = 1$$

$$X = 0 \text{ の時 : } C_1(0, T) = 0$$

$$X = \infty \text{ の時 : } C_1(\infty, T) = \exp(-T)$$

$\lambda = 0$  の時

$$\partial C_1 / \partial T = \partial^2 C_1 / \partial X^2 \quad (54)$$

$$T = 0 \text{ の時 : } C_1(X, 0) = 1$$

$$X = 0 \text{ の時 : } C_1(0, T) = 0$$

$$X = \infty \text{ の時 : } C_1(\infty, t) = 1$$

以上の変数変換によって、濃度に付随する諸量には、付録 1 の性質 1 [(8)式] と全く同じ関係が成立する。

ここで、さらに、付録 1 と同様な次の置換を行う。

$$\lambda \neq 0 \text{ の時 : } C_1(X, T) = C_2(X, T) \exp(-T) \quad (55)$$

$$\lambda = 0 \text{ の時 : } C_1(X, T) = C_2(X, T)$$

問題 F は、 $\lambda$  にかかわらず、次に帰着される。

[問題 G]

$$\partial C_2 / \partial T = \partial^2 C_2 / \partial X^2 \quad (56)$$

$$T = 0 \text{ の問 : } C_2(X, 0) = 1$$

$$X = 0 \text{ の問 : } C_2(0, T) = 0$$

$$X = \infty \text{ の問 : } C_2(\infty, T) = 1$$

### 2.3 Laplace 変換を用いた解法

[性質 7]

問題 G の解は次で与えられる。

$$C_2(X, T) = \operatorname{erf}\{X/(2\sqrt{T})\} = 1 - \operatorname{erfc}\{X/(2\sqrt{T})\} \quad (57)$$

(簡略証明)

$$C_3(X, p) = \int_0^\infty \exp(-pT) C_2(X, T) dT \quad (58)$$

と書いて、問題 C を Laplace 変換すると、次を得る。

$$\partial C_3 / \partial^2 X^2 = pC_3 - 1 \quad (59)$$

$$X = 0 \text{ の時 : } C_3(0, p) = 0$$

$$X = \infty \text{ の時 : } C_3(\infty, p) = 1/p$$

$$\begin{aligned} (59) \text{式を解くと,} \quad \text{斉次解} \quad C_3 &= A_1 \exp(\sqrt{p/X}) + A_2 \exp(-\sqrt{p/X}) \\ \text{特殊解} \quad C_3 &= 1/p \end{aligned}$$

が得られ、一般解は次式で示される。

$$C_3(X, p) = A_1 \exp(\sqrt{p/X}) + A_2 \exp(-\sqrt{p/X}) + (1/p) \quad (60)$$

(60)式に以下の境界条件を代入して、

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -(1/p) \quad (61)$$

(61)式が得られる。

$$C_3(X, p) = [1 - \exp\{(-\sqrt{p})X\}] / p \quad (62)$$

(62)式で、両辺を逆 Laplace 変換することにより (6) が得られる。



〔性質 8〕

問題 F の解は次で与えられる。

 $\lambda = 0$  の時

$$C_1(X, T) = \operatorname{erf}\{X/(2\sqrt{T})\} = 1 - \operatorname{erfc}\{X/(2\sqrt{T})\} \quad (63)$$

$$J(X, T) = -\exp(-X^2/4T)/\sqrt{(\pi T)} \quad (64)$$

$$Q(X, T) = -2\sqrt{(T/\pi)} \exp(-X^2/4T) + X \operatorname{erfc}(X/2\sqrt{T}) \quad (65)$$

 $\lambda \neq 0$  の時

$$C_1(X, T) = \exp(-T) \operatorname{erf}\{X/(2\sqrt{T})\} = \exp(-T) [1 - \operatorname{erfc}\{X/(2\sqrt{T})\}] \quad (66)$$

$$J(X, T) = -\exp\{-T - (X^2/4T)\}/\sqrt{(\pi T)} \quad (67)$$

$$Q(X, T) = -0.5 [\exp(-X) \operatorname{erfc}\{(X/2\sqrt{T}) - \sqrt{T}\} \\ - \exp(X) \operatorname{erfc}\{(X/2\sqrt{T}) + \sqrt{T}\}] \quad (68)$$

$$R(X, T) = \exp(-T) [-2\sqrt{(T/\pi)} \exp(-X^2/4T) + X \operatorname{erfc}(X/2\sqrt{T})] \quad (69)$$

(簡略証明)

問題 G の解  $C_2(X, T)$  より, (63), (66) 式が与えられる。また, (64), (67) 式は, 各々  $C_1(X, T)$  を  $X$  で微分した結果である。(65) 式は付録 1 の補題 1 の (23) 式を用いて, (64) 式を積分することで得られる。(68) 式は, 同じく (67) 式を補題 1 の (22) 式によって積分することで得られる。(69) 式は, (67) の両辺に  $\exp(-(T-\alpha)) = \exp(-T) \exp(\alpha)$  を掛けて積分するため,  $\exp(-T)$  を除いて (65) 式と同じである。

注意: 性質 8 から, 性質 4 の (24) 式が, この場合にも導かれる。なお, 問題 E の解は, 問題 F の解 (63) ~ (69) 式に, 無次元化の変数変換 (4), (5) 式を逆に施すことで簡単に得られる。結果は, 本文中に示した通りである。