

JAERI-M

8750

トカマクにおける径電界の振舞と不純物
輸送についての理論的研究

1980年3月

津田 孝

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

トカマクにおける径電界の振舞と
不純物輸送についての理論的研究

日本原子力研究所東海研究所核融合研究部

津 田 孝

(1980年2月1日 受理)

軸対称トラス中のプラズマが持つ角運動量保存の性質を用いて、径方向電界の振舞と不純物イオンの輸送について調べた。さらに、軸対称性の破れ(トロイダル磁場のリップル)が径方向電界の振舞に与える影響や不純物イオンのリップル拡散について解析した。

トカマク型核融合装置における中性粒子入射加熱に際して、強い径電界が発生する可能性がある。発生した径電界(ポロイダル方向の回転)はイオンの衝突時間程度の時間尺度で磁力線方向へのプラズマの流れ(トロイダル方向への回転)に変換される。このトロイダル方向への回転は、トロイダル磁場のリップルや中性粒子との荷電交換の効果によって緩やかに減衰する。JT-60等の大型トカマク装置における中性粒子入射加熱実験で発生する径電界は、これらの減衰機構によって十分小さな値に抑えられる。

高電荷の軽い不純物イオンは、プラズマ・イオンとの衝突によってプラズマの中心方向に拡散して行き、準定常状態では、プラズマ柱の中心部に集中することが示された。重い不純物イオンの輸送は、プラズマ中に存在する両極性の径電界の影響を受け、不純物イオンのプラズマ柱の中心部への集中が抑えられる場合があることが示された。また、不純物イオンの異常輸送の原因となる不純物ドリフト波の安定性を調べ、不純物イオンのプラズマ・イオンとの衝突による安定化効果を求めた。

Behavior of Radial Electric Field and Impurity Ion Transport
in Tokamak

Takashi TUDA

Division of Thermonuclear Fusion Research,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received February 1, 1980)

We examined behavior of radial electric field and impurity ion transport in axi-symmetric torus by the momentum conservation law of plasma, and also the effect of toroidal field ripple on radial electric field behavior and ripple diffusion of impurity ions.

Large radial electric field may be excited during strong NBI heating in the Tokamak. This radial electric (poroidal rotation of a plasma colume) is converted to plasma flow along the magnetic field on a time scale of ion collision τ_{ii} . This toroidal rotation is damped gradually by the effect of toroidal field ripple or the charge exchange with thermal neutral particles. This damping mechanism suppresses the radial electric field during NBI heating in a large Tokamak device such as JT-60.

High-Z light impuritics diffsing into the center of plasma colume have a plofile peaked at the center in a quasi-steady state. However, the transport of heavy impurity ions is influenced by the ambipolar electric field in plasma and their peaking at the center may be suppressed. We also examined stability of impurity drift modes and obtained the stabilizing conditions in impurity collision with plasma ion.

Keywords; Radial electric Field, Tokamak, Ambipolar Diffusion,
Impurity Ion Transport, Ripple Diffusion, Plasma Rotation,
NBI Heating, Toroidal Field Ripple

目 次

概説	
1. 序論	1
1.1 トカマク装置による制御核融合	1
1.2 トカマク研究の現状	2
1.3 本研究の目的と意義	3
2. 閉じ込め磁場中におけるプラズマの輸送過程	6
2.1 序	6
2.2 均一磁場中における拡散過程	6
2.2.1 両極性拡散	6
2.2.2 均一磁場中における径電界の変化	8
2.3 軸対称トーラス系における輸送過程	9
2.3.1 角運動量保存則と両極性拡散	9
2.3.2 平均自由行程が短い場合の輸送過程 (MHD 領域)	13
2.3.3 平均自由行程が長い場合の輸送過程 (バナナ・プトラ領域)	14
2.4 非軸対称トーラス系における輸送過程	17
2.5 第2章のまとめ	19
3. 閉じ込め磁場中における半径方向電界の振舞	21
3.1 序	21
3.2 軸対称トーラス系における径電界の緩和	22
3.2.1 バナナ領域における U_{11} の緩和	22
3.2.2 バナナ領域における径電界の緩和	30
3.2.3 プラトー領域における径電界の緩和	31
3.2.4 MHD 領域における径電界の緩和	32
3.3 径電界の緩和に対するリップルの効果	37
3.4 議論	39
3.5 結論	41
4. トーラス系における不純物イオン輸送	44
4.1 序	44
4.2 軸対称トーラス系における不純物イオン輸送	45
4.3 不純物イオン輸送に対する径電界の影響	49
4.4 非軸対称トーラス系における不純物イオン輸送	58
4.5 不純物イオンのドリフト波不安定性	61
4.6 結論	68
5. 結言	70
謝 辞	70

附録 A	磁化プラズマの誘電率	75
附録 B	施回中心の運動	78
附録 C	プラズマの角運動量	81
附録 D	リップル拡散	84
附録 E	MHD 領域におけるプラズマの平衡	86

Contents

Abstract

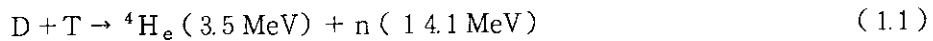
Chap. 1	Introduction	1
1.1	Tokamak for Controlled Nuclear Fusion	1
1.2	Present State of Tokamak Research	2
1.3	Purposes and Significances	3
Chap. 2	Transport Process of Plasma in Confinement Systems	6
2.1	Introduction	6
2.2	Diffusion Process in an Uniform Magnetic Field	6
2.2.1	Ambipolar Diffusion	6
2.2.2	Change of Radial Electric Field in an Uniform Magnetic Field..	8
2.3	Transport Process in Axisymmetric Toroidal Systems	9
2.3.1	Angular Momentum Conservation and Ambipolar Diffusion	9
2.3.2	Transport Process in Short Mean Free Path Case (MHD Regime)..	13
2.3.3	Transport Process in Long Mean Free Path Case (Banana and Plateau Regime)	14
2.4	Transport Process in Non-Axisymmetric Toroidal Systems	17
2.5	Summary of Chap.2	19
Chap. 3	Behavior of Radial Electric Field in Confinement Systems	21
3.1	Introduction	21
3.2	Relaxation of Radial Electric Field in Axisymmetric Toroidal Systems	22
3.2.1	Relaxation of U_{11} in Banana Regime	22
3.2.2	Relaxation of Radial Electric Field in Banana Regime	30
3.2.3	Relaxation of Radial Electric Field in Plateau Regime	31
3.2.4	Relaxation of Radial Electric Field in MHD Regime	32
3.3	Effects of Field Ripple on Relaxation of Radial Electric Field..	37
3.4	Discussion	39
3.5	Conclusions	41
Chap. 4	Impurity Transport in Toroidal Systems	44
4.1	Introduction	44
4.2	Impurity Transport in Axisymmetric Toroidal Systems	45

4.3	Effects of Radial Electric Field on Impurity Transport	49
4.4	Impurity Transport in Non-Axisymmetric Toroidal Systems	58
4.5	Impurity Drift Wave Instability	61
4.6	Conclusion	68
Chap. 5	Summary	70
Acknowledgment	70
Appendix A	Electric Permittivity of Magnetized Plasma	75
Appendix B	Motion of Guiding Center	78
Appendix C	Angular Momentum of Plasma	81
Appendix D	Ripple Diffusion	84
Appendix E	Plasma Equilibrium in MHD Regime	86

1. 序 論

1.1 トカマク装置による制御核融合

核融合反応のうちで、最初に発電炉に利用されるものとしては、比較的、低温で熱核融合反応が起ることから



の反応が考えられている。このD-T反応によって核融合炉を成立させる為に必要とされるプラズマのパラメーターは Lawson¹⁾ によって次の様に与えられている。

$$\begin{aligned} T_i &\geq 10 \text{ keV} \\ n \tau_E &\geq 10^{20} \text{ sec/m}^3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

但し

T_i ; イオン温度

n ; プラズマ密度

τ_E ; エネルギー閉じ込め時間

さらに、トカマクやステラレーター等の低ベーター・トーラス装置では核融合反応によるエネルギー発生をサイクロトロン輻射による損失よりも大きくする為に、プラズマのベーター値 ($\beta \equiv 2 \mu_0 p / B^2$; プラズマの圧力と磁気圧の比) をある値より大きくしなければならない²⁾。又、炉の経済性からも、なるべく高いベーター値が得られることが望ましい。

トカマク装置で得られる最大のベーター値は、平衡及び巨視的な安定性から制限される。例えば、電流分布が平坦な円断面のプラズマに対して得られる最大のベーター値は平衡の条件から³⁾

$$\beta_c = \frac{\epsilon}{q^2} \quad (1.3)$$

但し

$$\epsilon = \frac{a}{R} \quad ; \text{逆アスペクト比}$$

$$q \equiv \frac{a B_T}{R B_P} \quad ; \text{安定係数}$$

R ; トーラスの主半径

a ; トーラスの副半径

B_T ; トロイダル磁場

B_P ; ポロイダル磁場

と与えられている。しかし、FCT⁴⁾ (Flux-Conserving Tokamak) の考え方による数値計算では、平衡のベータ値は(1.3)式の制限を受けず、例えば、 $\epsilon = 0.25$, $q = 3.9$ で20%以上のベータ値で平衡が存在することが示されている⁵⁾。しかし、プラズマのベータ値が高くなると、種々の巨視的不安定性が発生し、プラズマの閉じ込めを悪化させる。実際には、これらの巨視的不安定性の安定化条件によってベータ値の上限が与えられると考えられる。例えば、ベータ値が高くなるとバルーニング・モードが不安定となる^{6), 7)} この不安定が発生するベータ値は近似的に(1-3)式で与えられる。さらに $m=1$, $n=1$ (m, n はそれぞれポロイダル及びトロイダル・モード数)のキック不安定性及び内部キック不安定性が安定であるためには、プラズマの全領域で

$$q(r) > 1 \quad (1.4)$$

であることが必要である⁸⁾。又、上の条件を満たしていれば、トカマクは平均極小磁場配位となるため、交換型不安定性は安定化される⁸⁾。

トカマクでは、壁やリミッターから種々の原因で不純物イオンが混入してくる⁹⁾。もし核融合炉でプラズマ中に多価に電離した不純物イオンが存在すると

- (i) 輻射損失を非常に大きくし、必要な $n\tau_E$, T_i の条件が厳しくなる¹⁰⁾。
- (ii) 燃焼に有効な D, T の割合がプラズマ中で少なくなり、同じ出力密度を得る為にはベータ値を高くする必要がある。

といった困難を引き起こす。

従って、トカマク装置で核融合炉を実現する為には

- (i) 巨視的に安定な平衡を保つ。
- (ii) 必要な $n\tau_E$, T_i , β の値を得る。
- (iii) プラズマ中の不純物イオンの量を低く抑える。

の3つの条件を満たすことが必要である。

1.2 トカマク研究の現状

1967~68年にかけてクルチャトフ研究所(ソ連)の T-3A 装置で

$$\begin{aligned} T_{e\max} &\sim 1 \text{ keV} \\ T_i &\sim 400 \text{ eV} \\ n_e &\sim 5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \\ \tau_E &\sim 5 \text{ msec} \end{aligned}$$

のプラズマ・パラメーターが得られた¹¹⁾。この結果は総合的に見て、それまでに各種の方式の実験装置で得られていた結果に比べて格段に優れたものであった。その上、実験から得られた比例法則からは、トカマク装置の大型化により §1.1 で述べた核融合炉の条件が満足されることが予想された。

それ以後、それまではソ連でしか行われていなかったトカマク方式の研究が各国でも行われだし、ST(プリンストン大学)、JFT-2(原研)、ORMAK(オークリッジ研究所)等のトカマ

ク装置により、T-3Aの実験の追試が行われ、同程度の良好なプラズマ閉じ込めが得られ、核融合装置としてトカマク方式が有望視されるようになった。

これらのトカマク装置によって、プラズマ閉じ込めの詳しい物理機構が研究されるとともに、もっと大型あるいは強磁場のT-4（クルチャトフ研究所）、TFR（フォンテネ・オ・ローズ研究所）、Alcator（MIT）が建設され、高温、高密度のプラズマの長時間の閉じ込めが達成されている。例えば、TFRでは $T_e \sim 3 \text{ keV}$ 、 $T_i \sim 1 \text{ keV}$ 、 $n \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 、 $\tau_E \sim 20 \text{ msec}$ 、Alcatorでは $T_e \sim T_i \sim 1 \text{ keV}$ 、 $n \tau_E \sim 2 \times 10^{19} \text{ sec} \cdot \text{m}^{-3}$ に達している。現在では、さらに大型のT-10（クルチャトフ研究所）、PLT（プリンストン大学）の運転が開始されている。

現在までに、各国のトカマク装置で得られている主な実験結果をまとめると¹²⁾、¹³⁾下の様になる。

- (i) 安定係数 q の値が4～5程度で最良の閉じ込め時間を示す。又、特別の場合を除いては、 $q < 2.5$ にすることは、巨視的な不安定性の為、困難である。
- (ii) イオンの熱伝導、中性粒子入射加熱の際の高エネルギー・イオンの減速過程等のイオン成分のトカマク・プラズマ中での振舞は新古典理論及び古典理論で説明できる。
- (iii) 電子による熱伝導損失は、新古典理論による評価に比べて非常に大きい。（約100倍程度）又、現在の多くのトカマクでは、新古典理論や擬古典理論による比例則と異なり、閉じ込め時間は密度の上昇とともに長くなる。（Hugill と Sheffield¹⁴⁾）
- (iv) 不純物イオンの混入はプラズマのエネルギー・バランスに関係するだけでなく、電流分布に影響を与え、巨視的な安定性にも重要な役割を与える。

さらに、現在、ローソン条件に近い $T_i \geq 5 \text{ keV}$ 、 $n \tau_E \geq 5 \times 10^{19} \text{ sec} / \text{m}^3$ のプラズマ・パラメーターの実現を目的としたTFTR（米）、JT-60（日）、T-15（ソ連）、JET（ヨーロッパ）の大型トカマクの計画¹⁵⁾が進められている。

現在のトカマク（TFR、Alcator）ではジュール加熱だけで1 keV程度のイオン温度が得られている。しかし、もっと大型のトカマク装置によっても、ジュール加熱のみでは核融合炉に必要とされる5～10 keVのイオン温度を得ることは不可能であると考えられており、何か他の加熱手段を開発する必要がある¹⁶⁾。この第二段加熱に必要なパワーは10 MW以上であると考えられる。現在のところ、中性粒子入射加熱とLower Hybrid共鳴やイオン・サイクロトロン共鳴を利用した高周波加熱の実験が進められている。

これまでのところ、高周波加熱について核融合炉に対する有効性を実証する様な大電力の実験が行われていないこともあって、中性粒子入射加熱が将来の大型トカマクや核融合炉に対する加熱手段として有力であると考えられている。

しかし、中性粒子入射加熱では、入射された中性ビームがプラズマを加熱するとともに、運動量も与える。この為、プラズマ柱が回転したり、輸送現象に影響を与えたりする。又、密度の上昇や不純物イオンの混入といった問題を引き起こす。

1.3 本研究の目的と意義

低ベーター・トーラス系における二成分プラズマ（電子と一種類のイオン）の輸送理論の研究

は Pfirsh と Schlüter¹⁷⁾ や Galeev と Sagdeev¹⁸⁾ によって始められ、現在では新古典理論として確立されたものになっている。¹⁹⁾しかし、将来の大型トカマクにおける中性粒子入射加熱の重要性とプラズマ中の不純物イオンの挙動を知る必要性から考えて、それらの物理的問題を解明するために、新古典理論を以下の点において拡張する必要がある。

中性粒子入射加熱に際して、高エネルギーの中性粒子がプラズマ中で電離した時、イオンと電子ではラーマー半径の大きさと施回中心の位置が異なるために荷電分離が生じ、径電界が成長する可能性がある。強い径電界の存在はプラズマの閉じ込めに悪影響を与える場合があるために、発生する径電界の大きさを評価する必要がある。従来の新古典理論では、両極性拡散の状態のみを取り扱い、径電界の時間変化（径方向の電流）については考慮していない。

高温プラズマ中の高電荷の不純物イオンの存在は、プラズマからの輻射損失を非常に大きくするとともに、プラズマ柱の電流分布に大きな影響を与え、巨視的安定性にも関係してくる。この為、プラズマ中における不純物イオンの輸送過程の研究が非常に重要であり、新古典理論を多種類イオンが混在する場合に拡張する必要がある。

本論文の第二章において、プラズマの角運動量保存という観点から、両極性拡散が達成される機構に重点を置きつつ、新古典理論の再構成を行う。第三章においては、プラズマの角運動量の保存則を用いて、軸対称トーラス系における径電界の緩和の機構を明らかにする。又、トロイダル磁場のリップルが径電界の振舞に与える影響を調べる。第四章において、軸対称トーラス系における不純物イオン輸送の定性的性質を、プラズマの角運動量保存則を用いて調べる。又、重い不純物イオンの輸送に対する両極性の径電界の影響を解析する。さらに、不純物イオン輸送に大きく影響する不純物ドリフト波についても同じ章で調べる。

特に断わらない限り、本論文では完全電離した磁化プラズマ ($\nu \ll \omega_c, \nu$; クーロン衝突周波数, ω_c ; サイクロトロン周波数) について考察する。

又、単位系は MKS 有理単位系を用いる。但し、温度 T は、ボルツマン定数 k_B を省略する為に、数式中ではジュール単位で表わす。

第一章の参考文献

- (1) J.D. Lawson, Proc. Phys. Soc. B, Vol LXX, 6, 1957.
- (2) M.N. Rosenbluth, Nuclear Fusion 10 (1970) 340.
- (3) V.S. Mukhovatov and V.D. Shafranov, Nuclear Fusion 11 (1971) 605.
- (4) J.F. Clarke and D.J. Sigmar, Phys. Rev. Letters 38 (1977) 70.
- (5) R.A. Dory and Y.K.M. Peng, Nuclear Fusion 17 (1977) 21.
- (6) A.M.M Todd et al, Phys. Rev. Letters 38 (1977) 826.
- (7) G. Bateman and Y.K.M. Peng, Phys. Rev. Letters 38 (1977) 829.
- (8) V.D. Sharranov, Sov. Phys. - Tech. Phys., 15 (1970) 175.
- (9) R. Behrisch and B.B. Kadomtsev, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Reserch, Vol2, IAEA (1975) p.229
- (10) R.V. Jensen et al, Nuclear Fusion 17 (1977) 1187.
- (11) L.A. Artsimovich et al, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vol 1 IAEA (1969) 17.
- (12) L.A. Artsimovich, Nuclear Fusion 12 (1972) 215.
- (13) H.P. Furth, Nuclear Fusion 15 (1975) 487.
- (14) J. Hugill and J. Sheffield, Nuclear Fusion 18 (1978) 15.
- (15) A.H. Spano, Nuclear Fusion 15 (1975) 909.
- (16) D.R. Sweetman, Nuclear Fusion 13 (1973) 157.
- (17) D. Pfirsch and A. Schlüter, MPI/PA/7/62 (1962).
- (18) A.A. Galeev and R.Z. Sagdeev, Sov. Phys. - JETP 26 (1968) 233.
- (19) F.L. Hinton and R.D. Hazeltine, Rev. Mod. Physis 48 (1976) 239.

第2章 閉じ込め磁場中におけるプラズマの輸送過程

2.1 序

プラズマの拡散現象が他の気体の場合と異なっているのは、拡散による粒子束が各成分で独立でなく両極性拡散の条件を満たすことである。即ち、 j 種の粒子の電荷を e_j 、粒子束を Γ_j とすれば

$$\sum_j e_j \Gamma_j = 0 \quad (2.1)$$

でなければならない。もし、(2.1)式の条件が速やかに満たされなければプラズマ中に急速に強い電界が成長し、電界のエネルギーが始めにプラズマが持っていた内部エネルギーよりも大きくなるという不合理を引き起こす。

この両極性拡散の状態を実現する為に満たされなければならない物理的な条件は、閉じ込め磁場配位の種類やプラズマ・パラメーターによって異なる。

この章では、両極性拡散が達される条件に重点を置いて、各種の磁場配位におけるプラズマの輸送理論の概略について述べる。特に軸対称トラスでは、プラズマの角運動量が保存されることをDrift Kinetic Equationを用いて導出し、それを利用して、両極性拡散の状態が径電界の値によらないことを示す。

この章と第三章では、特に断らない限り、2成分プラズマ(電子と1種類のイオン)のプラズマのみを考える。又、簡単の為に、イオンの電荷数 Z は1とする。しかし、 $Z > 1$ の場合への議論の拡張は容易である。

2.2 均一磁場中における拡散過程

2.2.1 両極性拡散

まず、均一磁場中の磁界を横切る拡散過程を考える。座標系としては、直角座標 (x, y, z) を用いる。均一で強い磁界 \vec{B} が z 方向にあり、プラズマは端の効果を考えなくてもよいほど z 方向に長いものとする。粒子密度 n の勾配は x 方向にあるとする。問題を簡単にする為、温度 T は空間的に一様で各成分で等しいものとする。又、粒子のラーマー半径 ρ は密度勾配の特徴的な長さ

$$r_n = \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^{-1}$$

よりも十分に小さいものとする。粒子のランダム・ウォークに基づく議論¹⁾を用いてLongmirとRosenbluth²⁾は上の条件における磁界をよこぎる x 方向の粒子束を計算した。それによれば、成分 β とのクーロン衝突による成分 α の粒子束は $O(\rho/r_n)$ の精度で

$$\Gamma_{\alpha}(\beta) = \frac{1}{6\sqrt{2}\pi^{3/2}} \left(\frac{m_{\alpha\beta}}{T}\right)^{1/2} \left(\frac{e_{\beta}}{\epsilon_0 B}\right)^2 \ln A$$

$$\times e_{\alpha} n_{\alpha} n_{\beta} \left(\frac{1}{e_{\beta} n_{\beta}} \frac{dn_{\beta}}{dx} - \frac{1}{e_{\alpha} n_{\alpha}} \frac{dn_{\alpha}}{dx}\right) \quad (2.2)$$

但し

$$m_{\alpha\beta} \equiv \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}$$

$$\epsilon_0 \equiv \frac{10^7}{4\pi c^2} ; \text{真空の誘電率}$$

で与えられる。ここで n, e, m はそれぞれの成分の粒子の数密度、電荷及び質量を表わす。又、 $\ln A$ はクーロン対数と呼ばれ、Spitzer³⁾ によって

$$\ln A = 23.4 - 1.15 \log n + 3.45 \log T_e, \quad T_e < 50 \text{ eV}$$

$$\ln A = 25.3 - 1.15 \log n + 2.3 \log T_e, \quad T_e > 50 \text{ eV}$$

と与えられている。但し、上式は T_e は eV、 n は cm^{-3} で表わされている。 $\ln A$ の値は、高温の実験室プラズマでは 10~20 程度である。

(2.2) 式より、均一磁場中での完全電離プラズマの拡散過程では

(i) 同種粒子間の衝突は拡散にきかない。

(ii) 密度勾配方向の電界に関係なく粒子束は両極性拡散となる。

といった性質をもっている。(i) 及び (ii) が成立するのはクーロン衝突で運動量が保存するからである⁴⁾。弱電離プラズマの場合には、主として中性粒子との衝突が拡散にきき、かならずしも両極性拡散とはならない。 $O(\rho/r_n)$ の精度で両極性拡散となる為には、 x 方向の電界がある値にまで成長しなければならない⁴⁾。

水素プラズマに対して (2.2) 式は

$$\Gamma_e = \Gamma_i = -\nu_e \rho_e^2 \frac{dn}{dx} \quad (2.3)$$

但し

$$\nu_e \equiv \frac{ne^4 \ln A}{6\sqrt{2}\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T^{3/2}}$$

$$\rho_e \equiv \left(\frac{2m_e T}{e^2 B^2}\right)^{1/2}$$

となる。従って、拡散係数 D の大きさは

$$D \sim \nu_{ei} \rho_e^2 \approx \nu_{ie} \rho_i^2 \quad (2.4)$$

となる。一方、熱伝導係数も同様にして

$$\chi_e \sim \nu_e \rho_e^2, \quad \chi_i \sim \nu_{ii} \rho_i^2 \quad (2.5)$$

で与えられる⁶⁾。イオンの熱伝導率 χ_i は、電子の熱伝導率 χ_e や拡散係数 D に比べて $\sqrt{m_i/m_e}$ 倍大きくなっている。

2.2.2 均一磁場中における径電界の変化

前節と同様に粒子のランダム・ウォークの手法を用いて粒子束を $O(\rho^3/r_n^3)$ までの精度で計算すると同種粒子間のクーロン衝突の粒子束への寄与を評価できる。

この同種粒子間の衝突による粒子束は、文献(2)で

$$\Gamma_\alpha(\alpha) = \frac{1}{30\pi^{3/2}} \left(\frac{m_\alpha}{T}\right)^{1/2} \left(\frac{e_\alpha}{\epsilon_0 B}\right)^2 \frac{m_\alpha T}{e^2 B^2} \ln A n_\alpha^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n_\alpha} \frac{d^2 n_\alpha}{dx^2}\right) \quad (2.6)$$

と与えられている。従って、 $O(\rho^3/r_n^3)$ の精度ではイオンと電子の粒子束は等しくはならず、この為 x 方向の電界はゆっくりと変化する⁵⁾。(2.6)式の粒子束の計算では、電界 \vec{E} の空間変化の効果は考慮されていない。しかし、 $O(\rho^3/r_n^3)$ の精度では、電界の大きさの空間変化で荷電粒子のラーマー軌道が変形し、粒子束に影響を与える。この電界の空間変化の効果は Golant⁵⁾によって計算された。即ち、 T/er_n 程度の大きさまで電界が成長すれば、この効果による粒子束の変化は、(2.6)式の粒子束と同程度の値になり、 $O(\rho^3/r^3)$ の精度でも両極性拡散の状態になる。この電界が変化する時定数を評価してみよう。

マックスウェル方程式 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t)$ の x 成分に磁化プラズマの誘電率を考慮すると(附録A参照)

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = - \frac{B^2}{m_i n} \sum_j e_j \Gamma_j, \quad j = e, i \quad (2.7)$$

が得られる。電界の大きさを T/er_n 、粒子束を(2.6)式より $\nu \rho^2 n / r_n^3$ と評価すると、電界が成長する時間は

$$\tau_c \sim \frac{r_n^2}{\nu_{ii} \rho_i^2} \quad (2.8)$$

となる。同様の結論は文献(6)の8章で論じられているように、MHD方程式系を用いても導くことが出来る。この場合にはイオンの粘性項がプラズマ柱の $\vec{E} \times \vec{B}$ による運動を制動する。電界の変化の時定数は、やはり(2.8)式で与えられる。

2.3 軸対称トーラス系における輸送過程

2.3.1 角運動量保存則と両極性拡散

トカマク等の強いトロイダル磁場をもった軸対称の低ベーター・トーラス配位でのプラズマの輸送過程について述べ、その両極性拡散について考察する。

使用する座標系は、いわゆる擬トロイダル座標 (r, θ, φ) である(図1参照)。 r, θ は磁気軸を中心とした極座標で、 $\theta = 0$ はトーラスの外側にとる。

φ は主軸 (major axis) のまわりの角度である。線素 ds は次の式で与えられる。

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + R^2 h^2 (d\varphi)^2 \quad (2.9)$$

但し

$$h \equiv 1 + \varepsilon \cos \theta$$

$$\varepsilon \equiv \frac{r}{R} \ll 1 ; \text{アスペクト比の逆数}$$

R ; トーラスの主半径

トーラス装置に閉じ込められたプラズマの場合には、その密度や温度は磁力線に沿ってほぼ等しくなるので、半径方向の粒子束や熱流を磁気面上で平均して輸送係数を求めればよい。この場合には、磁気面の变形等の磁場配位の差異は輸送係数の性質にはあまり影響しないので、以下では円断面のプラズマを考え、 $r = \text{const}$ が磁気面を表わすものとする。従って、平衡磁場配位を

$$\vec{B} = (0, \Theta B_0 / h, B_0 / h) \quad (2.10)$$

但し

$$\Theta(r) \equiv \frac{B_\theta}{B_\varphi}$$

で与えられるものとする。又、主にトカマク配位について考察するので、巨視的な安定性の条件より、安定係数 q は

$$q(r) \equiv \frac{r B_\varphi}{R B_\theta} > 1 \quad (2.11)$$

の条件を満たしているものとする。従って、ポロイダル磁界とトロイダル磁界の比、 Θ は

$$\Theta \ll 1 \quad (2.12)$$

となる。又、磁界の強さ B は

$$B \simeq \frac{B_0}{h} \quad (2.13)$$

で与えられる。さらに、荷電粒子のラーマー半径 ρ は平衡量の変化する特徴的な距離 ($\sim r$) に比べて十分に小さいものとする。即ち、

$$\frac{\rho}{\theta r} \ll 1 \quad (2.14)$$

但し

$$\left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right)^{-1} \sim r$$

荷電粒子のラーマー半径は小さく、現象の時間変化はラーマー周期に比べてゆっくりしている
ので、速度空間の座標としては、ラーマー周期で平均化された座標 (κ, μ, σ) ,

$$\kappa = \frac{mv^2}{2} + e\phi \quad (2.15)$$

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

$$\sigma = \pm 1$$

但し

ϕ ; 静電ポテンシャル

v ; 粒子の速度

v_{\perp} ; 粒子の磁力線に垂直方向の速度

σ ; 粒子の磁力線方向の速度の向き

を用いる。すると磁力線方向の速度 v_{\parallel} は

$$v_{\parallel} = \sigma \left[\frac{2}{m} (\kappa - e\phi - \mu B) \right]^{1/2} \quad (2.16)$$

で表わされ、速度空間の体積素は

$$d^3v = \sum_{\sigma} \frac{2\pi B d\mu d\kappa}{m^2 |v_{\parallel}|} \quad (2.17)$$

となる。

まず、軸対称トーラス配位中の単一粒子の運動を考える。系が軸対称性を持っているので荷電
粒子は ϕ についての一般化運動量を保存する。即ち、

$$\frac{d}{dt} (hm v_{\phi} + eA_{\phi}) = 0 \quad (2.18)$$

が成立する。ここで A_{ϕ} はベクトル・ポテンシャルの ϕ 成分で

$$A_{\phi} \equiv - \int_0^r h B_{\theta} dr = -B_0 \int_0^r \theta dr$$

で定義される。 $\epsilon \ll 1$ より上式の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{dA_\varphi}{dt} &= \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{dr}{dt} B_\theta h \\ &\simeq -E_\varphi - v_{Dr} B_\theta h \end{aligned}$$

但し

E_φ ; φ 方向の電界

v_{Dr} ; 荷電粒子の施回中心の r 方向へのドリフト速度 (附録の (B-5) 式を参照)

となる。又、 $\theta \ll 1$ より $v_\varphi \simeq v_{11}$ とみなせるから (2.18) 式は

$$\frac{d}{dt} (m v_{11}) - e E_\varphi - e \theta B_\theta v_{Dr} = 0 \quad (2.19)$$

と書ける。

次に単一の荷電粒子の角運動保存則がクーロン衝突のある実際のトーラス・プラズマにどう反映するかを調べる。平衡量 (n, T, ϕ, B 等) の時間, 空間的变化はラーマー周期 $2\pi/\omega_c$, ラーマー半径 ρ に比べて十分に緩やかである。従って, プラズマの振舞を記述する Kinetic Equation として荷電粒子のラーマー運動での平均化を行った Drift Kinetic Equation を用いることが出来る。即ち, 軸対称トーラス配位において (附録 B 参照)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial t} + e_j \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial \kappa} + e_j E_{11} v_{11} \frac{\partial f_j}{\partial \kappa} + \frac{v_{11} \theta}{r} \frac{\partial f_j}{\partial \theta} \\ + \frac{m_j}{e_j r} \left[v_{11} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f_j}{\partial r} - v_{11} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f_j}{\partial \theta} \right] = \sum_k C_{jk} \end{aligned} \quad (2.20)$$

但し

$j = e, i$

C_{jk} ; j 成分の k 成分との衝突項

を用いる。さて, (2.20) 式の両辺に $v_{11} h^2$ を掛け速度空間での積分を行い θ で平均すると (附録 C 参照) (2.19) 式と同じ精度で

$$\begin{aligned} m_j n_j \frac{\partial U_{11j}}{\partial t} - e_j n_j E_\varphi - e_j \theta B_\theta \Gamma_j \\ = \sum_k m_j \oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{11} C_{jk} (f_j) \end{aligned} \quad (2.21)$$

但し

$$\Gamma \equiv \oint \frac{h d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{Dr} f$$

$$U_{11} \equiv \oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{11} f$$

を得る。ここで Γ は径方向への粒子束を表わし, U_{11} は磁力線方向の平均流速を表わす。(2.21)

式は単一粒子の角運動量保存則(2.19)式のプラズマの場合へ拡張である。(2.21)式を用いて、軸対称トーラスにおける拡散過程の性質を調べることが出来る。そこで、軸対称トーラスで両極性拡散が成立する条件について調べてみよう。

クーロン衝突では荷電粒子間の運動量は保存されるので

$$\begin{aligned} \int d^3 v v_{||} C_{ee} &= 0 \\ \int d^3 v v_{||} C_{ii} &= 0 \\ m_e \int d^3 v v_{||} C_{ei} + m_i \int d^3 v v_{||} C_{ie} &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

の関係が成立する。従って、(2.21)式を各成分で和をとれば

$$\sum_j m_j n_j \frac{\partial U_{||j}}{\partial t} - \theta B_0 \sum_j e_j \Gamma_j = 0$$

となる。準定常状態 ($\partial U_{||} / \partial t \simeq 0$) では

$$e_e \Gamma_e + e_i \Gamma_i = 0 \quad (2.23)$$

が成立する。即ち、径電界 E_r の値に関係なく両極性拡散の状態が実現している。この事実は、均一磁場中での拡散過程が $O(\rho/r_n)$ の精度では径電界の値とは関係なく自動的に両極性拡散となる事と似ている。(2.23)式が成立するのは軸対称系では荷電粒子の運動が角運動量を保存し、クーロン衝突が運動量を保存することの反映である⁷⁾。ここで次の事に注意しておく。

(2.21)式及び(2.22)式を用いると粒子束は

$$\Gamma = -\frac{E_\varphi}{\theta B_0} + \frac{m_e}{e \theta B_0} \oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{||} C_{ei}(f_e)$$

と表わせる。この粒子束の表式には、同種粒子間の衝突項 C_{ee} は陽には表われていない。この為、新古典理論の発展の初期には、均一磁場中の拡散過程と同様に、軸対称トーラス系においても、同種粒子間の衝突は拡散に寄与しないという結論も出された。しかし、これは正しい議論ではない。なぜなら、上式の右辺に入っている分布関数 f_e は同種粒子間の衝突項 C_{ee} を含んだ Drift Kinetic Equation (2.20) 式の解であり、唯、上式では、 C_{ee} からの寄与が陽に表われていないだけである。

上述の様に、軸対称トーラス系においては、両極性拡散となる為には、 $\partial U_{||} / \partial t = 0$ であればよい。第三章で詳しく述べるように、 $\partial U_{||} / \partial t = 0$ となる為には、径電界 E_r と磁力線方向のプラズマの平均流 $U_{||}$ の間にある関係が成立していなければならない。もし、 $\partial U_{||} / \partial t \neq 0$ の場合には、両極性拡散とならず半径方向に電流が流れ、径電界 E_r の値は $\partial U_{||} / \partial t = 0$ となるように変化する。この時、径方向の電流の大きさの程度は、イオンの電流 $e_i \Gamma_i$ の方が電子のそれと比べて $\sqrt{m_i/m_e}$ の程度大きい。従って、両極性拡散の条件は $\partial U_{||} / \partial t \simeq 0$ となる。

2.3.2 平均自由行程が短い場合の輸送過程 (MHD 領域)

粒子の平均自由行程がトーラス装置の連結距離 ($L_c \equiv Rq$) より十分に短い場合にはプラズマの振舞を記述するのに MHD 方程式系⁶⁾ を用いることが出来る。

よく知られているように、単純なトロイダル磁場中のプラズマは磁界の不均一性による ∇B ドリフト、曲率ドリフト運動の為に荷電分離を起し、電界が発生する。

この電界による $E \times B$ ドリフト運動によって、プラズマはトーラス中から急速に失なわれる。この荷電分離を中和して平衡を得る為に、軸対称トーラス系では有限の回転変換用 ($\iota = 2\pi/q$) が必要である。回転変換が存在すれば、荷電分離は磁力線に沿って流れる電流によって中和される。この中和電流の大きさは $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$, $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ の関係を用いて評価でき、

$$\tilde{j}_{11} = - \frac{2\epsilon}{\theta B_0} \frac{dp}{dr} \cos \theta \quad (2.24)$$

但し

$$p = n(T_e + T_i) ; \text{プラズマ圧力}$$

で与えられる。プラズマの抵抗 η が有限であると電子とイオンの間にこの電流に比例した摩擦力が働らく。

この力は単位体積当り⁶⁾

$$\tilde{F}_{ei} = -e \eta_{11} \tilde{j}_{11} \quad (2.25)$$

但し

$$\eta_{11} = 0.51 \frac{m_e \nu_e}{e^2 n^2}$$

$$\nu_e = \frac{n e^4 \ln A}{6 \sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}$$

である。軸対称トーラスにおける角運動量保存則 (2.21) 式で $\partial U_{11} / \partial t = 0$, $E_\varphi = 0$ と置くと

$$\begin{aligned} e \theta B_0 \Gamma &= -m_e \oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{11} C_{ei}(f_e) \\ &= - \oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \tilde{F}_{ei} \end{aligned} \quad (2.26)$$

となるから、(2.24) 式~(2.26) 式を用いて粒子束として

$$\Gamma = - \frac{4 \eta_{11} \epsilon^2 T}{\theta^2 B_0^2} \frac{dn}{dr} \quad (2.27)$$

を得る。あるいは、拡散係数は

$$D = \frac{4 \eta_{11} \epsilon^2 T}{\theta^2 B_0^2} \simeq \nu_e \rho_e^2 q^2 \quad (2.28)$$

となる。即ち、トーラス系での拡散係数は、MHD 領域において、古典拡散の場合に比べて q^2 倍大きくなる。この領域での粒子束の評価は最初、Pfirsch と Schlüter⁸⁾ によって計算された。又、この領域におけるイオンの熱伝導率も Shafranov⁹⁾ によって

$$\chi_i = 1.6 q^2 \nu_i \rho_i^2 \quad (2.29)$$

と与えられている。(付録 E 参照)

上に述べた Pfirsch と Schlüter の理論は磁気面上で密度が一定であることを仮定している。しかし、Stringer はこの仮定が、強い径電界(プラズマ柱の回転)がある場合には正しくなく、粒子束が(2.27)式の値より遥かに大きくなる場合がある事を示した¹⁰⁾。プラズマ柱がまっすぐな場合には $\vec{E} \times \vec{B}$ によるプラズマ柱の回転運動 ($v_E = E_r / B_\phi$) はプラズマの圧縮・膨脹を伴わない。しかし、トーラス・プラズマの場合には $\nabla \cdot (n \vec{v}_E) \neq 0$ であるため、回転はプラズマの圧縮・膨脹を引き起こす。それに従って、回転が無い場合には磁気面上で一定であった密度がプラズマ柱の回転に伴ない

$$n(r) \rightarrow n_0(r) + \tilde{n}(r, \theta)$$

となる可能性がある。 E_r の値が小さい場合には、磁力線に沿ってのプラズマの流れ(流速 \leq イオン音波の位相速度)によって \tilde{n} の値は小さく留まり、その粒子束への影響は無視しうる。しかし、 E_r の値が大きくなり、プラズマ柱が1回転する時間がイオン音波がトーラスの連結距離 Rq を伝わる時間と同程度になると \tilde{n} は大きく励起され粒子束に大きな影響を与える。実際には径電界 E_r の値は、任意に与えることは出来ず、両極性拡散の条件から定まる。平均自由行程 λ が短かく

$$\lambda = \frac{v_T}{\nu} < Rq \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/4}$$

となっている場合やポロイダル磁場が弱く

$$\frac{\rho}{\theta r} \geq 1$$

となっている場合には、両極性拡散の状態での粒子束は(2.27)式の値より大きくなる¹¹⁾。しかし、通常のカマクのように $\nu Rq / v_T < (m_i / m_e)^{1/4}$ かつ $\rho_i / \theta r < 1$ であればイオンの粘性や電子の Thermal Force によって E_r の値は小さく抑えられ、粒子束は(2.27)式で与えられる^{11), 12)}。

2.3.3. 平均自由行程が長い場合の輸送過程(バナナ・プラトー領域)

荷電粒子の平均自由行程がトーラス装置の連結距離よりも長くなるとプラズマの振舞を記述す

るのに MHD 方程式系を用いることは出来ず、Kinetic Equation を直接解かねばならない。この領域での輸送過程の研究は Galeev と Sagdeev¹³⁾ によって始められた。

クーロン衝突の効果が無視出来るとすると、磁力線方向にゆっくり ($v_{11} < \sqrt{\epsilon} v_T$) と運動する荷電粒子はトロイダル磁場の不均一性 ($\sim \epsilon$) によって捕捉され、いわゆるバナナ軌道を描く。この捕捉粒子の割合は $\sqrt{\epsilon}$ 程度である。バナナ運動の周期 τ_b は $Rq/\sqrt{\epsilon} v_T$ の程度であり、その間に、荷電粒子はトーラスの上下方向に ∇B ドリフト ($v_D \sim T/eBR$) で運動する為、捕捉粒子は磁気面から

$$\Delta r \sim \tau_b v_D \sim \frac{\sqrt{\epsilon} \rho}{\theta} \quad (2.30)$$

の程度まで離れて運動する。即ち、粒子の軌道はラーマー半径 ρ より $\sqrt{\epsilon}/\theta$ 倍大きく磁気面からずれる。

さらに Kinetic Equation でクーロン衝突の効果を表わすランダウの衝突項は

$$C(f) \sim \nu v_T^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

の様に速度の2階微分の項を持っている為、捕捉粒子はわずかな v_{11} の変化 ($\Delta v_{11} \sim \sqrt{\epsilon} v_T$) によって捕捉状態から逃れる。従って、捕捉粒子に対する実効的な衝突周波数 ν_{eff} は ν/ϵ の程度となる。これらの事から、衝突周波数の小さな極限

$$\nu_{eff} \ll \frac{1}{\tau_b} \quad \text{あるいは} \quad \nu \ll \frac{\epsilon^{3/2} v_T}{Rq} \quad (2.31)$$

での拡散係数は

$$D \sim \langle \text{捕捉粒子の割合} \rangle \times \nu_{eff} (\Delta r)^2 \sim \frac{\nu_e q^2 \rho_e^2}{\epsilon^{3/2}} \quad (2.32)$$

となる¹³⁾。又、イオンの熱伝導率も同様にして

$$\chi_i \sim \frac{\nu_i q^2 \rho_i^2}{\epsilon^{3/2}} \quad (2.33)$$

となる。(2.32) 式の結果は、前節の MHD 領域の場合と同様に (2.26) 式の関係を用いて導く事が出来る。この目的の為に、捕捉電子とイオンの間に働く摩擦力の大きさ評価する。密度勾配があると、同じ磁気面上で磁力線方向に互いに逆向に運動する捕捉粒子の数に差 ($\Delta n \sim \sqrt{\epsilon} \Delta r \, dn/dr$) が生じる。

従って、捕捉粒子は平均として磁力線方向に流れを持っている。この捕捉電子が持つ磁力線方向の運動量がイオンとのクーロン衝突で単位時間に失なわれる割合は

$$F_{ei} \sim \nu_{\text{eff}} \Delta n \sqrt{\epsilon} m_e v_{Te} \sim \nu_e \frac{\sqrt{\epsilon}}{\theta} \rho_e m_e v_{Te} \frac{dn}{dr} \quad (2.34)$$

と評価出来る。(2.34)式を(2.26)式に代入すると粒子束として

$$\Gamma \simeq - \frac{\nu_e q^2 \rho_e^2}{\epsilon^{3/2}} \frac{dn}{dr}$$

が得られ、(2.32)式と同じ結果が得られる。

衝突周波数が

$$\frac{\epsilon^{3/2} v_T}{Rq} \ll \nu \ll \frac{v_T}{Rq} \quad (2.35)$$

の範囲にある場合には $v_{11} < \sqrt{\epsilon} v_T$ の捕捉粒子に対してはクーロン衝突は充分に多く、この部分の分布関数はマックスウェル分布に近いとすることが出来る。この領域の輸送係数は Galeev と Sagdeev¹³⁾ によって、波のランダウ減衰からの類推を用いて計算された。この場合の電子とイオンの間に働く摩擦力は、(2.34)式の ν_{eff}^{-1} の代わりにバナナ運動が1周期する間に同じだけの運動量を失なうものとして

$$F_{ei} \sim \frac{v_{Te}}{Rq} \frac{\epsilon^2}{\theta} \rho_e m_e v_{Te} \frac{dn}{dr} \quad (2.36)$$

と評価できる。従って、拡散係数及び熱伝導係数はそれぞれ

$$D \sim \frac{v_{Te}}{Rq} q^2 \rho_e^2 \quad (2.37)$$

$$\chi_i \sim \frac{v_{Ti}}{Rq} q^2 \rho_i^2$$

で与えられる。

この新古典理論と呼ばれるトラス系における輸送過程は、計算の精密化とともに、輸送係数の非対角成分を計算するという点からさらに研究が進められてきた。

それらには

- (i) トロイダル効果による抵抗率の増加¹⁴⁾
- (ii) トロイダル電界による捕捉粒子のピンチ効果¹⁵⁾
- (iii) Bootstrap 電流¹⁶⁾

等がある。さらに Galeev¹⁷⁾ や Rosenbluth et al¹⁸⁾ はこれらを統一的に議論した。又、文献¹⁸⁾では線型の非平衡熱力学から一般的に要請される Onsager の相反定理の成立することが示された。最近では $\nu < v_T/Rq$ の領域を同時に取り扱う計算¹⁹⁾ も行われている。

最近の理論^{18)~20)}の結果で、以下での議論の為に特に注意しておくことは、両極性拡散が実現している状態 (§ 2.3.1での議論より $\partial U_{11i}/\partial t \simeq 0$) ではイオンの磁力線方向への平均流

速がある値になっていなければならないことである。この値は全ての領域を通じて²⁰⁾

$$U_{11} = - \frac{T_i}{e \theta B_0} \left[\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} - \left(\frac{3}{2} - y \right) \frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right] \quad (2.38)$$

但し

$$y \equiv 1.31 \frac{1 + 1.65 \nu_*^{1/2}}{1 + 0.862 \nu_*^{1/2}}$$

$$\nu_* \equiv \frac{\nu_i R q}{v_{Ti} \epsilon^{3/2}}$$

と与えられている。(2.38)式が成立していない場合には $\partial U_{11} / \partial t \neq 0$ となり、前にも述べたように、粒子束はもはや両極性拡散とはならない。この時には径方向に電流が流れ、(2.38)式が成立するように径電界が変化する。この過程は第三章で詳しく調べる。

2.4 非軸対称トーラス系における輸送過程

軸対称性のないステラレーターやトロイダル磁場にリップルがあるトカマクでも、平均自由行程が短い場合には、輸送過程は軸対称トーラス系での場合と本質的に変わりはない^{8), 11)}しかし、平均自由行程が十分に長くなり、トロイダル磁場のリップルやヘリカル巻線による磁場に荷電粒子が捕捉されるようになると、粒子が磁気面を大きく離れてドリフト運動するようになり、軸対称系での場合に比べて粒子束や熱流が非常に大きくなる可能性がある。

以下では、磁界の強さが

$$B \simeq B_0 [1 + \delta \cos (L\theta - N\phi) - \epsilon \cos \theta] \quad (2.39)$$

で与えられる場合について考える。ここで括弧内の第2項は $L \neq 0$ の場合にはヘリカル巻線による磁場、 $L = 0$ の場合にはトロイダル磁場のリップル成分を表わす。通常のトカマクの場合には $L = 0$ 、 $\delta \ll \epsilon \ll 1$ であり、 N はトロイダル磁場コイルの個数を表わす。

まずトロイダル磁場のリップルで軸対称性が少しだけ破れているトカマクについて考える。磁力線方向にゆっくりと運動 ($v_{11} < \delta v_T$) する荷電粒子はトロイダル磁場のリップルに捕捉される。捕捉粒子の割合は $\sqrt{\delta}$ の程度である。この捕捉粒子はトーラスの上下方向に速度 $v_D \sim T / e B_0 R$ でドリフト運動する。捕捉粒子がクーロン衝突で通過粒子となる時間 τ_c は δ / ν の程度であるから、捕捉粒子がドリフト運動で磁気面から離れることの出来る距離は

$$\Delta r \sim \frac{\delta T}{\nu e B_0 R} \quad (2.40)$$

である。従って、リップルの効果による拡散係数は

$$D \sim \langle \text{捕捉粒子の割合} \rangle \times \frac{(\Delta r)^2}{\tau_c} \sim \frac{\delta^{3/2}}{\nu} \left(\frac{T}{\epsilon BR} \right)^2 \quad (2.41)$$

の程度となる。衝突周波数が小さい極限では、(2.40)式の Δr はプラズマ半径より大きくなってしまふ。この場合は、分布関数はLoss Cone分布となり閉じ込め時間は ν^{-1} の程度となる。衝突周波数を変化した時の拡散係数の変化の様子は図2に示してある。

上の議論では、(2.39)式で表わされる磁界の δ の項(リップル)による磁気鏡は常に出来るとしたが、実際には、トロイダル磁場のトロイダル効果を表わす ϵ の項によってリップルによる磁気鏡が $\theta = \pm \pi/2$ の近傍では形成されなくなる²¹⁾。この効果で(2.41)式の拡散係数がどの程度小さくなるかはパラメーター

$$\alpha \equiv \frac{\epsilon}{Nq\delta} \quad (2.42)$$

だけに依存する。補正係数 $G(\alpha)$ の値は $\alpha < 1$ で $G(\alpha) \sim 1$ であり、 $\alpha > 1$ では1よりかなり小さくなる。 $G(\alpha)$ の数値はConnorとHaste²²⁾によって計算されており、 $\alpha \gg 1$ での漸近値は

$$G(\alpha) \simeq \frac{0.02}{\alpha^3} \quad (2.43)$$

となる。

(2.41)式の拡散係数の大きさは、イオンと電子で異なっている。即ち $D_e/D_i \sim \sqrt{m_e/m_i}$ であり、イオンの粒子束が大きくなる。従って、径電果が成長して、イオンの粒子束を小さな値に抑える。Kinetic Equationを用いた計算から²²⁾イオンの粒子束は

$$r_i \propto \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} + \frac{3.37}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \quad (2.44)$$

で与えられるから、両極性拡散となる為には

$$\frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{3.37}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \quad (2.45)$$

が成立していなければならない。(附録D参照)

又、リップルによる熱流 Q_R と軸対称トーラス系のバナナ領域での熱流 Q_B を比べると

$$\frac{Q_R}{Q_B} \simeq G(\alpha) (\epsilon \delta)^{3/2} \frac{v_T^2}{\nu^2 q^2 R^2} \propto T^4 \quad (2.46)$$

となる。従って、現在のトカマクより高温となる将来の大型トカマクのプラズマ・パラメーターでは、 Q_R の値はかなり大きなものとなる可能性がある。従って、トロイダル磁場のリップルを小さな値に抑えることが必要である。

リップル拡散の粒子束や熱流の具体的な数値は附録Dに示してある。

$\epsilon \geq \delta$ の場合のステラレーターでは $G(\alpha) \simeq 1$ とすれば上の議論はそのまま当てはまり、附録Dの表式をそのまま用いることが出来る。ヘリカル巻線による磁界成分が大きく、 $\delta < \epsilon$ であるステラレーターの場合にはヘリカル磁場の不均一性による荷電粒子のドリフト運動が重要となってくる。しかし、衝突周波数があまり小さくなく、スーパー・バナナによる拡散が問題にならない条件での計算²³⁾では上の場合と同程度の結果を与えている。

2.5 第2章のまとめ

プラズマの磁界を横切る拡散は、両極性拡散 ($\Gamma_e = \Gamma_i$) となっていなければならない。この章では、均一磁場、軸対称トーラス系、非軸対称トーラス系のそれぞれにおいて、両極性拡散が達成される為の条件を調べた。

特に、軸対称トーラス系については、Drift Kinetic Equation から、プラズマの角運動保存則を導出し、プラズマの磁力線方向の平均流が時間的に変化しなければ、両極性拡散となることを示した。

各々の磁場配位で、プラズマが両極性拡散となる為の条件を以下に要約する。

- (i) 均一磁場中での拡散過程には同種粒子間の衝突は影響を与えず、粒子束は径電界の値と関係なく両極性拡散となる。
- (ii) 軸対称トーラス系では、両極性拡散となる為には磁力線方向のプラズマの平均流と径電界の間に (2.38) 式

$$U_{11} = -\frac{T_i}{e\theta B_0} \left[\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} - \left(\frac{3}{2} - y \right) \frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right]$$

の関係が成立していなければならない。

- (iii) 非軸対称トーラス系では両極性拡散となる為に径電界の値は (2.45) 式

$$E_r = \frac{T_i}{e} \left[\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{3.37}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right]$$

となっていなければならない。

第二章の参考文献

- (1) S. Chandrasekhar, Rev. Modern Phys. 15 (1943) 1.
- (2) C.L. Longmire and M.N. Rosenbluth, Phys. Rev. 103 (1956) 507.
- (3) L. Spitzer, Jr., "Physics of Fully Ionized Gases",
(Interscience, 1962, New York).
- (4) V.E. Golant, Sov. Phys. - Uspekhi 79 (1963) 161.
- (5) V.E. Golant, Sov. Phys. - Tech. Phys. 8 (1963) 189.
- (6) S.I. Braginskii, in "Reviews of Plasma Physics" ed. M.A. Leontovich,
(Consultant Bureau, 1965, New York,) Vol 1, p.205.
- (7) A.A. Galeev and R.Z. Sagdeev, Sov. Phys. - Dokl. 14 (1970) 1198.
- (8) D. Pfirsch and A. Schlüter, Max-Planck Institute-Report,
MPI/PA/7/62 (1962).
- (9) V.D. Shafranov, Soviet Atomic Energy 19 (1965) 1008.
- (10) T.E. Stringer, Phys. Rev. Letters 22 (1969) 770.
- (11) T.E. Stringer, Phys. Fluids 13 (1970) 1586.
- (12) A.A. Galeev, JETP Lett. 10 (1970) 225.
- (13) A.A. Galeev and R.Z. Sagdeev, Sov. Phys. - JETP 26 (1968) 233.
- (14) F.L. Hinton and C. Oberman, Nuclear Fusion 9 (1969) 319.
- (15) A.A. Ware, Phys. Rev. Letters 25 (1970) 916.
- (16) R.J. Bickerton, J.W. Connor and J.B. Taylor, Nature Phys. Sci. 229
(1970) 110
- (17) A.A. Galeev, Sov. Phys. - JETP 32 (1971) 752.
- (18) M.N. Rosenbluth, R.D. Hazeltine and F.L. Hinton, Phys. Fluids 15
(1972) 116.
- (19) F.L. Hinton and M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids 16 (1973) 836.
- (20) R.D. Hazeltine and F.L. Hinton, Phys. Fluids 16 (1973) 1883.
- (21) T.E. Stringer, Nuclear Fusion 12 (1972) 689.
- (22) J.W. Connor and R.J. Hastie, Nuclear Fusion 13 (1973) 221.
- (23) J.W. Connor and R.J. Hastie, Phys. Fluids 17 (1974) 114.

第3章 閉じ込め磁場中における半径方向電界の振舞

3.1 序

各種の閉じ込め磁場配位の中でのプラズマの拡散は両極性拡散 ($\Gamma_e = \Gamma_i$) となっている。例えば、軸対称トーラス系においては、径電界の値に関係なく両極性拡散となる。しかし軸対称トーラス系においても、いくつかの原因によって径電界が成長する。この機構としては、次の様なものが考えられる。

- (i) 核融合反応で出てくる α 粒子のような高エネルギーを持つ荷電粒子は、ポロイダル磁場の弱い装置ではバナナ巾が大きくなりすぎ、閉じ込めることが不可能となり、直接、壁やリミッターに失なわれる。この為、プラズマは負に帯電する。
- (ii) 電磁流体 (MHD) 的不安定性や不整磁場の為に完全な磁気面が形成されていない場合には、逃走電子等の高速の電子はイオンより先に、磁力線に沿って閉じ込め領域からリミッターや真空壁へ逃れ出る。従って、プラズマは正に帯電する。
- (iii) 中性粒子入射加熱において入射された高速中性粒子がプラズマ中で電離した時、電子とイオンのラーマ半径の大きさと施回中心の位置が異なる為、荷電分離を生じる。これが強い径電界発生の原因となりうる。
- (iv) 静電的な乱れによる乱流輸送はかならずしも両極性拡散とはならない。

もし、これらの原因で発生する径電界が成長し続けるならば、MHD 的な平衡が存在しなくなったり¹⁾、径方向の粒子束を増大させたり²⁾、あるいは Kelvin-Helmholtz 型不安定性³⁾の原因となったりする可能性がある。

両極性拡散の状態から上述した様な原因により径電界が少しズレた場合を考える。この状態では粒子束が両極性拡散ではなくなり、半径方向に電流が流れる。この結果、付加された径電界は減衰して両極性拡散の状態にもどる。この章では、軸対称トーラスではプラズマの角運動量が保存されることを用いて径電界の緩和過程を解析する。さらに、トロイダル磁場のリップルの様な、小さな非軸対称性がプラズマの径電界に与える影響についても調べる。現在のトカマクのプラズマ・パラメータでは多くの場合、電子はバナナ領域、イオンはプラトー領域にあるが、将来の大型トカマクでは、イオンもバナナ領域に入ることが期待されている。そこで、イオンがバナナ領域に入っている場合については、Drift Kinetic Equation を用いて詳しく解析をする。

径電界が変化する現象は、荷電粒子のラーマ周期に比べて十分に長い時間尺度で起こる。従って、電界の時間変化による荷電粒子の r 方向への分極ドリフト運動は無視しうる。しかし、電界の時間変化を計算する為には、この分極ドリフト運動によるプラズマの実効的誘電率の増加を考慮する必要がある。(付録A 参照)

径電界の時間変化を与える式はマックスウエル方程式

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

の径方向の成分を磁気面で平均し、電荷の保存則を用いれば得られる。ここで \vec{H} は磁束密度、 \vec{j} は電流密度、 \vec{D} は電束密度である。付録Aより高アスペクト比($\epsilon \ll 1$)のトーラス・プラズマにおける径電界の時間変化を記述する式は

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = -\frac{B_0^2}{m_i n} \sum_j e_j \Gamma_j + \frac{B_0^2}{m_i n r_0} \int_0^r r \sigma_s dr \quad (3.1)$$

となる。ここで Γ は粒子束、 σ_s は外部からプラズマ内へ単位時間、単位体積当り導入される電荷の量である。

§ 3.2では軸対称トーラス系におけるプラズマの両極性拡散の状態への緩和の問題を取り扱う。⁴⁾ § 3.3では軸対称性の小さな破れが径電界の振舞に与える影響について述べる⁵⁾。径電界の時間変化に影響を与える他の効果と実際のトカマクでの径電界の振舞は § 3.4で議論する。

3.2 軸対称トーラス系における径電界の緩和

3.2.1 バナナ領域における U_{11} の緩和

第2章で述べたように、軸対称トーラス系で両極性拡散が成立する為には、プラズマ(イオン)の磁力線方向の平均流速 U_{11} と平衡量の間(2.39)式の関係が成立していなければならない。

まず、プラズマ・パラメーターがバナナ領域

$$\nu \ll \frac{\epsilon^{3/2} v_T}{Rq}$$

にある場合について考える。この領域では、磁力線方向の速度が小さい粒子($v_{11} \leq \sqrt{\epsilon} v_T$)はトロイダル磁場の不均一性に捕捉され、いわゆるバナナ軌道を描く。その巾は $\sqrt{\epsilon} \rho/\theta$ の程度である。この時、例えば密度勾配があれば、同じ磁気面上において磁力線方向に互いに逆方向に運動する捕捉粒子の数の差が生じる。この捕捉粒子の平均としての磁力線方向の流れがクーロン衝突を介して通過粒子の流れを創り出す。

主としてイオン成分について、この捕捉粒子と通過粒子の間での運動量のやりとりが釣合った状態で $\partial U_{11}/\partial t = 0$ となり、(2.23)式の両極性拡散の状態が成立する。この時の U_{11} の値は、新古典拡散理論⁶⁾より、バナナ領域で

$$U_{11} = -\frac{T_i}{e \theta B_0} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} - \frac{0.17}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right) \quad (3.2)$$

で与えられる。この流れが創り出されるのに必要な時間は、プラズマの流れを創る捕捉粒子の数の密度が全粒子の数の密度の $\sqrt{\epsilon}$ 倍程度であることから、 $1/\sqrt{\epsilon} \nu_i$ の程度である。

上の結論をより定量的な計算で確かめる。プラズマの運動を記述するのに、Drift Kinetic Equation (附録B参照)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_j}{\partial t} + e_j \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial \kappa} + e_j E_{11} v_{11} \frac{\partial f_j}{\partial \kappa} + \frac{v_{11} \Theta}{r} \frac{\partial f_j}{\partial \theta} \\ & + \frac{m}{e_j r} \left[v_{11} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f_j}{\partial r} - v_{11} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f_j}{\partial \theta} \right] = \sum_k C_{jk} \end{aligned} \quad (3.3)$$

但し

$$\kappa = \frac{m_j v^2}{2} + e_j \Phi$$

v_{11} ; 粒子の磁力線方向の速度

を用いる。通常の新古典拡散理論の場合と同様に微小なパラメーター

$$\varepsilon^{1/2}, \frac{\nu R q}{\varepsilon^{3/2} v_T}, \frac{\sqrt{\varepsilon} \rho}{\Theta r}, \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$$

による展開を利用して計算を進める。プラズマの運動量の時間変化に対する電子の寄与はイオンのそれに比べて $\sqrt{m_e/m_i}$ の程度であり無視しうる。従って、イオンについてだけ考慮するので、粒子の種類を示す添字は省略する。又、トロイダル電界 $E_\varphi \simeq E_{11}$ は §2.3 での議論より両極性拡散の状態には影響を与えないので $E_\varphi = 0$ とする。

ラーマー半径での展開 ($\sqrt{\varepsilon} \rho / \Theta r \ll 1$) によって分布関数を

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

と書く。近似の最低次では (3.3) 式は

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} + \frac{\Theta v_{11}}{r} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} = C(f_0) \quad (3.4)$$

となる。上式の解としてマックスウェル分布

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{\kappa - e\Phi}{T} \right) \quad (3.5)$$

を選ぶ。バナナ領域では n, T, Φ の θ 微分は $O(\rho^2/r^2, \nu R q \rho / \varepsilon^{3/2} \Theta v_T r)$ の量⁷⁾であり、さらに、 n 及び T の時間変化は $O(\nu \rho^2 q^2 / \varepsilon^{3/2} r_n^2)$ の量であり無視しうるので

$$n = n(r)$$

$$T = T(r)$$

$$\Phi = \Phi(r, t)$$

と表わせる。又、(3.4) 式の第1項、第2項は、(3.5) 式を代入すれば

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial t} f_0$$

$$e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} = -\frac{e}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial t} f_0$$

であるから、打消し合う。又、衝突項 $C(f_0)$ は明らかに消える。従って、マックスウェル分布(3.5)式は(3.4)式の解である。

近似の次の精度では(3.3)式は

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial \kappa} \right) + \frac{v_{11} \theta}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{mv_{11}}{er} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f_0}{\partial r} = C(f_1) \quad (3.6)$$

となる。但し、 $C(f_1)$ は線形化した衝突項で、その具体的な形は後に与える。(3.6)式は、通常の新古典拡散理論の場合⁶⁾と比べると、第1項 $(\partial/\partial t + e \partial \Phi/\partial t \cdot \partial/\partial \kappa) f_1$ が存在する為、解析的に解くことは困難である。しかし、この項は、両極性拡散の状態から径電界を少しズラした事によって出てきた項であるので、十分に小さな径電界の励起に対しては、左辺の第2項、第3項に比べて小さいとする事が可能である。従って、第1項の f_1 には第1項を0とした解を第1近似として代入し、逐次近似法で解くことにする。この取り扱いの正当性は、結果と矛盾しないことから保証される。従って f_1 を

$$f_1 = f_1^{(0)} + f_1^{(1)}$$

と書く。但し、 $f_1^{(0)}$ は、方程式

$$\frac{v_{11} \theta}{r} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{mv_{11}}{er} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f_0}{\partial r} = C(f_1^{(0)})$$

の解で、例えば、文献(6)で与えられている。 $f_1^{(1)}$ は両極性拡散の状態からズレていることによ f_1 の $f_1^{(0)}$ からのズレである。

$f_1^{(0)}$ は文献(6)において

$$f_1^{(0)} = -\frac{m_i v_{11}}{e \theta B_0} \left\{ \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\Phi}{dr} - \left(\frac{3}{2} - \frac{\kappa - e\Phi}{T_i} \right) \frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right\} f_0 + \frac{1}{e \theta T_i} \frac{dT_i}{dr} \left(1.33 - \frac{\kappa - e\Phi}{T_i} \right) f_0 H(\mu_T - \mu) \int_{\mu}^{\mu_T} \frac{d\mu}{\mu \langle v_{11} h \rangle} \quad (3.7)$$

と与えられる。ここで $H(x)$ は階段関数で

$$\begin{aligned} H(x) &= 1, & x > 0 &; & \text{通過粒子} \\ H(x) &= 0, & x \leq 0 &; & \text{捕捉粒子} \end{aligned}$$

で定義される。又、 μ_T は捕捉粒子と通過粒子の境界の μ の値であり

$$\mu_T = \frac{(\kappa - e\phi)(1 - \varepsilon)}{B_0}$$

で与えられる。さらに $\langle hA \rangle$ は磁気面での平均で

$$\langle hA \rangle \equiv \oint \frac{h d\theta}{2\pi} A$$

但し

$$h = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

で定義される。(3.7)式の第1項は shifted Maxwell 分布であり、磁力線方向へのプラズマの流れを示している。第2項は捕捉粒子と通過粒子の境界付近に局在しており、トロイダル効果による分布関数の変形を示す。ここで計算したいのはプラズマの磁力線方向への平均流速 U_{11} だけであるので f_1 として必要なのは shifted Maxwell 分布の項である。従って、 $f_1^{(0)}$ として近似的に

$$f_1^{(0)} \simeq \frac{v_{11} U_{11}}{v_T^2} f_0 \quad (3.7)'$$

を用いる。従って(3.6)式の左辺第1項は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) f_1^{(0)} &\simeq \frac{U_{11} f_0}{v_T^2} \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial t} + e \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial v_{11}}{\partial \kappa} \right) \\ &\quad + \frac{v_{11} f_0}{v_T^2} \frac{dU_{11}}{dt} \end{aligned}$$

となる。ところが v_{11} の定義から

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial t} = \frac{\partial v_{11}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{e}{m v_{11}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{及び} \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial \kappa} = \frac{1}{m v_{11}}$$

であるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) f_1^{(0)} \simeq \frac{v_{11} f_0}{v_T^2} \frac{dU_{11}}{dt}$$

となる。従って(3.6)式は

$$\begin{aligned} \frac{v_{11} \theta}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{m v_{11}}{e r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f_0}{\partial t} \\ = C(f_1) - \frac{v_{11} f_0}{v_T^2} \frac{dU_{11}}{dt} \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。

以下では捕捉粒子と通過粒子の間のクーロン衝突による運動量のやりとりを計算する。この場合に重要なのは、(3.8)式の衝突項 $C(f_1)$ が運動量を保存することとピッチ角散乱を正確に取り扱えることである。

又、イオンについて考えているので、電子との衝突の効果は、イオン-イオン衝突の項に比べて $\sqrt{m_e/m_i}$ 程度の大きさしかないので無視しうる。これらの条件を満たすイオンの衝突項として

$$C(f_1) = \nu \left\{ \frac{m v_{11}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} v_{11} \mu \frac{\partial f_1}{\partial \mu} + f_0 \frac{v_{11} P}{v_T^2} \right\} \quad (3.9)$$

但し

$$P \equiv \frac{1}{\nu^*} \int d^3 v \nu v_{11} f_1$$

$$\nu^* \equiv \frac{m}{nT} \int d^3 v \nu v_{11}^2 f_0$$

$$\nu \equiv \frac{\sqrt{2} n e^4 \ln A}{16 \pi \epsilon_0^2 m^{1/2} T^{3/2}} x^{3/2} h(x)$$

$$x = \frac{\kappa - e\phi}{T}$$

$$h(x) = \eta(x) + \frac{d\eta(x)}{dx} - \frac{\eta(x)}{2x}$$

$$\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t} \sqrt{t} dt$$

を用いる⁶⁾。(3.9)式の第1項はイオン-イオン衝突によるピッチ角散乱を示す。第2項は運動量を保存する目的で導入された。

以下の計算の手順は、新古典輸送を取り扱った参考文献(6)の Appendix A と同様である。まず

$$f_1 = -\frac{m v_{11}}{e \theta B} \frac{\partial f_0}{\partial r} + g \quad (3.10)$$

と置くと(3.8)式は

$$\frac{v_{11} \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} = C(g) - C\left(\frac{m v_{11}}{e \theta B} \frac{\partial f_0}{\partial r}\right) - \frac{v_{11} f_0}{v_T^2} \frac{d U_{11}}{dt} \quad (3.11)$$

となる。ここで、(3.5)式より、

$$\frac{\partial f_0}{\partial r} = \left(A_1 + \frac{\kappa - e\phi}{T} A_2 \right) f_0 \quad (3.12)$$

但し

$$A_1 \equiv \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{3}{2T} \frac{dT}{dr} + \frac{e}{T} \frac{d\phi}{dr}$$

$$A_2 \equiv \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$$

であるから、(3.11)式の右辺第2項は(3.9)式を用いて

$$C \left(\frac{m v_{11}}{e \theta B} \frac{\partial f_0}{\partial r} \right) = \nu \frac{m v_{11} A_2 f_0}{e \theta B_0} \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu^*} - \frac{\kappa - e\phi}{T} \right)$$

但し

$$\bar{\nu} \equiv \frac{m}{nT} \int d^3 v \nu v_{11}^2 \frac{\kappa - e\phi}{T} f_0$$

と書ける。上式で A_1 に関する項は(3.9)式の ν^* の定義より消えた。従って(3.11)式は

$$\frac{v_{11} \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \nu \frac{m v_{11}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} v_{11} \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \nu v_{11} S \quad (3.13)$$

但し

$$S \equiv \left\{ - \frac{m A_2}{e \theta B} \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu^*} - \frac{\kappa - e\phi}{T} \right) - \frac{m}{\nu T} \frac{d U_{11}}{d t} + \frac{m}{n T \nu^*} \int d^3 v \nu v_{11} g \right\} f_0$$

と表わせる。

$\nu \ll \epsilon^{3/2} v_T / Rq$ の領域を考えているので、衝突周波数で g を展開して

$$g = g_0 + g_1$$

と置くと(3.13)式の第1次近似は

$$\frac{\partial g_0}{\partial \theta} = 0 \quad (3.14)$$

となる。展開の次の精度では、(3.13)式は

$$\frac{v_{11} \theta}{r} \frac{\partial g_1}{\partial \theta} - \frac{\nu m v_{11}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} v_{11} \mu \frac{\partial g_0}{\partial \mu} = \nu v_{11} S \quad (3.15)$$

となる。上式の両辺を v_{11} で割り、 θ で平均すると g_1 を消去することが出来

$$-\frac{\nu m}{B_0} \frac{\partial}{\partial \mu} \langle v_{11} h \rangle \mu \frac{\partial g_0}{\partial \mu} = \nu \langle S \rangle$$

但し

$$\langle A \rangle \equiv \oint \frac{d\theta}{2\pi} A$$

$$h = 1 + \epsilon \cos \theta$$

となる。上式より、 g_0 に対する適当な解として⁶⁾

$$\frac{\partial g_0}{\partial \mu} = -\frac{B_0 \langle S \rangle}{m \langle v_{11} h \rangle} H(\mu_T - \mu) \quad (3.16)$$

但し

$$\mu_T = \frac{(\kappa - e\Phi)(1 - \epsilon)}{B_0}$$

及び

$$H(x) = 1, \quad x \geq 0; \text{ 通過粒子}$$

$$H(x) = 0, \quad x < 0; \text{ 捕捉粒子}$$

である。

(3.16) 式を用いて (3.13) 式の S を計算する。 S の第3項は

$$\begin{aligned} \int d^3v \nu v_{11} g &\simeq \int d^3v \nu v_{11} g_0 \\ &= - \int d^3v \nu v_{11} \mu \frac{\partial g_0}{\partial \mu} \end{aligned}$$

であるから (3.16) 式を代入して

$$\begin{aligned} \int d^3v \nu v_{11} g &= \int d^3v \nu \frac{v_{11}}{\langle v_{11} h \rangle} \frac{\mu B_0}{m} f_0 \langle S \rangle H(\mu_t - \mu) \\ &= \int d^3v \nu \frac{v_{11}}{\langle v_{11} h \rangle} \frac{\mu B_0}{m} f_0 H(\mu_t - \mu) \\ &\times \left\{ -\frac{mA_2}{e\theta B_0} \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu^*} - \frac{\kappa - e\Phi}{T} \right) - \frac{1}{\nu} \frac{dU_{11}}{dt} + \frac{m}{nT\nu^*} \int d^3v \nu v_{11} g \right\} \end{aligned}$$

となる。上式の右辺の g の積分に関する項を左辺に移行すると上式は $O(\epsilon^{1/2})$ の精度で

$$\sqrt{2\epsilon} \int d^3v \nu v_{11} g \simeq -n \frac{dU_{11}}{dt}$$

を得る。従って S は

$$S \simeq -\frac{mA_2}{e\theta B} \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu^*} - \frac{\kappa - e\phi}{T} \right) - \frac{m}{\nu^* T \sqrt{2\epsilon}} \frac{dU_{11}}{dt} \quad (3.17)$$

で与えられる。(3.10)式に(3.16)式, (3.17)式を代入すると, f_1 が定まり U_{11} を計算できる。即ち,

$$\begin{aligned} U_{11} &= \left\langle \frac{h}{n} \int d^3v v_{11} f_1 \right\rangle \\ &= - \oint \frac{h d\theta}{2\pi} \int d^3v v_{11} \mu \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ &\simeq - \frac{T}{e\theta B_0} (A_1 + 1.33 A_2) - \frac{1.8}{\sqrt{\epsilon} \nu_0} \frac{dU_{11}}{dt} \end{aligned} \quad (3.18)$$

但し

$$\nu_0 \equiv \frac{\sqrt{2} ne^4 \ell n A}{16\pi \epsilon_0^2 m^{1/2} T^{3/2}}$$

となる。上の結果を得るのに下の数値積分の結果を用いた。

$$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{h(x)} dx = 7.2$$

$$\int_0^\infty h(x) e^{-x} dx = 0.53$$

$$\int_0^\infty x h(x) e^{-x} dx = 0.71$$

定常状態 ($\partial U_{11}/\partial t = 0$) では(3.18)式は(3.2)式で示した文献(5)の新古典拡散理論での両極性拡散の状態に一致する。(3.18)式を書き換えて

$$\frac{dU_{11}}{dt} = -\frac{\sqrt{\epsilon} \nu_0}{1.8} \left\{ \frac{T}{e\theta B_0} (A_1 + 1.33 A_2) + U_{11} \right\} \quad (3.19)$$

を得る⁴⁾。上式は, バナナ領域におけるプラズマの磁力線方向の平均流 U_{11} の時間変化を与える式である。

3.2.2 バナナ領域における径電界の緩和

粒子束 F とプラズマの平均流束の時間変化 dU_{11}/dt の間の関係を表わす (2.21) 式を (3.1) 式に代入すると

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} \simeq -\frac{B_0}{\theta} \frac{dU_{11}}{dt} + \frac{\omega_{ci} B_0}{enr} \int_0^r r \sigma_s dr \quad (3.20)$$

となる。但し、上式を得る際に $O(\sqrt{m_e/m_i})$ の程度の寄与である電子の粒子束の寄与を無視した。

簡単な例として、 $\sigma_s(t)$ がデルタ関数の場合を考える。ここでは系の線形応答を考えているので、このパルス応答について考察するだけで充分である。

時刻 $t < 0$ では、系は (3.2) 式の両極性拡散の状態にあるとし、径電界 $-\partial\phi/\partial r$ は E_0 であるとする。 $t = 0$ で有限の量の電荷が外部から与えられ $t = +0$ で電界の値が $E_0 + E_{ex}$ に変化したとする。 $t > 0$ における E_r 及び U_{11} の値を計算する。

$t = -0$ と $t \rightarrow \infty$ では定常状態であるから (3.2) 式よりそれぞれの時刻で U_{11} の値は

$$U_{11}(-0) = U_0 = -\frac{T}{e\theta B_0} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{0.17}{T} \frac{dT}{dr} \right) + \frac{E_0}{\theta B_0} \quad (3.21)$$

$$U_{11}(\infty) = U_f = -\frac{T}{e\theta B_0} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{0.17}{T} \frac{dT}{dr} \right) + \frac{E_f}{\theta B_0}$$

となる。但し、 E_f 及び U_f は十分に時間が経過した後の径電界及びプラズマの磁力経方向の平均流速の値である。

(3.19) 式と (3.20) 式より

$$\frac{d^2 E_r}{dt^2} = -\nu_{eff} \frac{dE_r}{dt} \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 U_{11}}{dt^2} = -\nu_{eff} \frac{dU_{11}}{dt}$$

但し

$$\nu_{eff} \equiv 0.56 \frac{\sqrt{\epsilon} \nu_0}{\theta^2}$$

が得られる。(3.22) 式の解は

$$E_r(t) = (E_0 + E_{ex} - E_f) \exp(-\nu_{eff} t) + E_f \quad (3.23)$$

$$U_{11}(t) = (U_0 - U_f) \exp(-\nu_{eff} t) + U_f$$

で与えられる。上式より $t = +0$ で

$$\left. \frac{dU_{11}}{dt} \right|_{t=0} = -\nu_{\text{eff}} (U_0 - U_f)$$

であり、又、(3.21)式より

$$U_f - U_0 = \frac{E_f - E_0}{\theta B_0}$$

であるから

$$\left. \frac{dU_{11}}{dt} \right|_{t=0} = -\nu_{\text{eff}} \frac{E_f - E_0}{\theta B_0}$$

となる。上式が(3.19)式の $t = +0$ での値

$$\left. \frac{dU_{11}}{dt} \right|_{t=0} = -\nu_{\text{eff}} \frac{\theta E_{\text{ex}}}{B_0}$$

と等しくなるという事から

$$E_f - E_0 = \theta^2 E_{\text{ex}} \tag{3.24}$$

$$U_f - U_0 = \frac{\theta E_{\text{ex}}}{B_0}$$

を得る。上式を(3.23)式に代入することにより $t > 0$ での $E_r(t)$, $U_{11}(t)$ の振舞が得られ

$$E_r(t) = E_0 + \theta^2 E_{\text{ex}} + (1 - \theta^2) E_{\text{ex}} \exp(-\nu_{\text{eff}} t) \tag{3.25}$$

$$U_{11}(t) = U_0 + \frac{\theta E_{\text{ex}}}{B_0} - \frac{\theta E_{\text{ex}}}{B_0} \exp(-\nu_{\text{eff}} t)$$

となる。即ち、外部的に加えられた電界 E_{ex} は $\theta^2/\sqrt{\epsilon} \nu_i$ 程度の時間がたつと θ^2 程度まで小さくなる。この時、 U_{11} は $\theta E_{\text{ex}}/B_0$ だけ増加(減少)する。

もし ν_{eff}^{-1} よりずっと長い時間尺度でこの系を観測するならば、電界が θ^2 だけ小さくなっていることから、この系の実効的な誘電率が、均一磁場中でのプラズマの誘電率(附録A参照)の値に比べて θ^{-2} 倍大きくなったと考えることが出来る。

3.2.3 プラト-領域における径電界の緩和 イオンの衝突周波数が

$$\epsilon^{3/2} \frac{v_T}{Rq} \ll \nu \ll \frac{v_T}{Rq}$$

の範囲にある場合(プラト-領域)にある場合について考える。粒子束や $\partial U_{11}/\partial t$ に対する

径電界の効果はパラメーター

$$A_1 = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{3}{2T} \frac{dT}{dr} + \frac{e}{T} \frac{d\phi}{dr}$$

を通じてのみ入ってくる。この為、(2.36)式からの類推で、

$$m_i n \frac{dU_{11}}{dt} \simeq m_i n \frac{v_T \epsilon^2}{Rq} \frac{E_{ex}}{\theta B_0} \quad (3.26)$$

と評価できる。同じ結果は、Galeev が波と共鳴粒子の相互作用に対する準線形理論との類推を用いた計算で得ている⁷⁾。(3.26)式を(3.20)式に代入することにより、径電界の緩和する特徴的時間を評価でき

$$\nu_{eff} \sim \frac{v_T q}{R} \quad (3.27)$$

を得る。

3.2.4 MHD 領域における径電界の緩和

イオンの衝突周波数が

$$\frac{v_T}{Rq} < \nu < \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \frac{v_T}{Rq} \quad (3.28)$$

の領域を考える。この領域でプラズマの平衡(定常状態)を決める主要な散逸機構はイオンの磁力線方向の粘性で、電気抵抗はあまり重要でない。従って、以下では、散逸項としてイオンの磁力線方向の粘性のみを考慮する。又、解析を簡単にする為に温度勾配は無いものとする。T ≠ 0 の場合の計算は附録 E を参照されたい。もし、平均自由行程が短かく

$$\nu > \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \frac{v_T}{Rq}$$

となると、径電界の振舞には電気抵抗が主にきき、粒子束が Pfirsch-Schlüter の値に比べて遥かに大きくなったり⁷⁾、プラズマ柱が Rotational 不安定性に対して不安定になったりする⁸⁾。しかし、この様に平均自由行程が短い場合は、現在のトカマクではあまり重要でない。

計算を簡単にする為、プラズマの運動を記述するのに Guiding Center Fluid 方程式系⁸⁾を用いる。

即ち、イオンの運動を

$$\vec{v} = \frac{v_{11} \vec{B}}{B} + \vec{v}_b + \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad (3.29)$$

で表わす。v_b は磁場の曲率と ∇B による粒子(流体)のドリフト速度であり、v₀ 及び v₁ は

E × Bドリフトを表わし

$$\vec{v}_b = - \frac{2T}{eBR} (\vec{e}_r \sin \theta + \vec{e}_\theta \cos \theta)$$

$$\vec{v}_0 = - \frac{\nabla \phi \times \vec{B}}{B^2}, \quad \phi = \phi(r)$$

$$\vec{v}_1 = - \frac{\nabla \tilde{\phi} \times \vec{B}}{B^2}, \quad \tilde{\phi} = \tilde{\phi}(r, \theta)$$

である。但し、 $\tilde{\phi}$ はトロイダル効果によって発生する θ 方向の電界を示し

$$\frac{e \tilde{\phi}}{T} \sim O(\epsilon)$$

の量である。(3.29)式と連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \vec{v}) = 0$$

及び磁力線方向の運動方程式

$$\begin{aligned} n m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right)_{11} \\ = -\nabla_{11} p - e \nabla_{11} \phi + \mu_{11} \nabla_{11}^2 \vec{v}_{11} \end{aligned}$$

を用いて、 $O(\epsilon)$ の精度でプラズマの平衡状態を求める。但し、運動方程式では粘性項として磁力線方向の粘性のみを考慮した。ここで $\mu_{11} \sim nT/\nu_i$ は粘性係数である。近似の最低次では、全ての物理量は r のみの関数である。 $O(\epsilon)$ の精度では

$$n = n(r) + \tilde{n}(r, \theta) \tag{3.30}$$

$$v_{11} = U_{11}/h + \tilde{v}_{11}(\theta)$$

であるとする。ここで U_{11} は v_{11} の θ 平均である。又、 $\tilde{n}/n \sim O(\epsilon)$ である。

まず、電子の運動に対しては散逸の効果は無視できるので、ボルツマン分布

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_e} = \frac{e \tilde{\phi}}{T_e} \tag{3.31}$$

が成立している。

イオンの密度 \tilde{n}_i を求める為に、連続の式に(3.29)式を代入する。ここで、(2.9)式の擬トロイダル座標においては、divの演算の θ 成分に働く部分は $O(\epsilon)$ の精度で

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\epsilon}{r} \sin \theta$$

であるから

$$\nabla \cdot (\vec{v}_0 + \theta U_{11} \vec{e}_\theta / h) = - \frac{2\epsilon}{r} (v_0 + \theta U_{11}) \sin \theta \quad (3.32)$$

但し

$$v_0 = \frac{1}{B} \frac{d\phi}{dr}$$

及び

$$\nabla \cdot (n \vec{v}_b) = - \frac{2\epsilon T}{e r B} \frac{dn}{dr} \sin \theta \quad (3.33)$$

の関係が成立するから、連続の式は、 $O(\epsilon)$ の精度で

$$\begin{aligned} \frac{v_0 + \theta U_{11}}{r} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial \theta} - \frac{1}{B} \frac{dn}{dr} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{n \theta}{r} \frac{\partial v_{11i}}{\partial \theta} \\ = \frac{2n \epsilon}{r} (U_i + v_0 + \theta U_{11}) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.34)$$

但し

$$U_i = \frac{T_i}{e B n} \frac{dn}{dr}$$

となる。イオンの磁力線方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} n m_i \frac{v_0 + \theta U_{11}}{r} \frac{\partial v_{11i}}{\partial \theta} \\ = - T_i \frac{\theta}{r} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial \theta} - \frac{e n \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\mu_{11} \theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_{11i}}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。

解くべき式は、すべて線型であるので、計算を簡単にする為、フーリエ変換を利用する。即ち

$$\tilde{n}, \tilde{\phi}, \tilde{v}_{11} \rightarrow (\tilde{n}, \tilde{\phi}, \tilde{v}_{11}) e^{i\theta} \quad (3.36)$$

と置換する。この時 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は

$$\begin{aligned} \sin \theta &\rightarrow -i \exp(i\theta) \\ \cos \theta &\rightarrow \exp(i\theta) \end{aligned}$$

と置換すればよい。粒子束等の計算をする場合には、複素数のまま計算を進め、最後に結果の実数部を取ればよい。

(3.36)式の変換を用いると、(3.35)式は

$$\tilde{v}_{11i} = - \frac{\theta T_i}{n m_i} \frac{\tilde{n}_i + e n \tilde{\phi} / T_i}{v_0 + \theta U_{11} - ip} \quad (3.37)$$

但し

$$p = \frac{\mu_{11} \theta^2}{r m_i n}$$

となる。(3.37)式を(3.34)式に代入すれば

$$\tilde{n}_i = - \frac{e n \tilde{\phi}}{T_i} + 2 n \epsilon \frac{(U_i + v_0 + \theta U_{11})(v_0 + \theta U_{11} - ip)}{\theta^2 T_i / m_i} \quad (3.38)$$

が得られる。

デバイ長はプラズマ半径に比べて十分に短いので、準中性条件 $\tilde{n}_e = -\tilde{n}_i$ に(3.31)式と(3.38)式を代入し $\tilde{\phi}$ を求めると

$$\frac{e \tilde{\phi}}{T_i} = 2 \epsilon \frac{(U_i + v_0 + \theta U_{11})(v_0 + \theta U_{11} - ip)}{\theta^2 (T_e + T_i) / m_i} \quad (3.39)$$

となる。(3.39)式を用いると、(3.37)式、(3.38)式はそれぞれ

$$\tilde{v}_{11i} = -2 \epsilon (U_i + v_0 + \theta U_{11}) \quad (3.40)$$

及び

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_i} = 2 \epsilon \frac{T_e}{T_e + T_i} \frac{(U_i + v_0 + \theta U_{11})(v_0 + \theta U_{11} - ip)}{\theta^2 T_i / m_i} \quad (3.41)$$

となる。バナナやプラトー領域の場合と同様に、上の結果から、プラズマの磁力線方向の平均流 U_{11} の時間変化を計算し、角運動量保存の関係式(2.21)を用いて粒子束を評価する。磁力線方向の運動方程式の直流成分は、慣性項 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ は、ラーマー展開の高次となるので無視すると

$$m_i n \frac{\partial U_{11}}{\partial t} \approx \frac{1}{2\pi} \oint d\theta (1 + \epsilon \cos \theta) \left(- \frac{\theta T_i}{r} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial \theta} - \frac{e n \theta}{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} + \frac{\mu_{11} \theta^2}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_{11}}{\partial \theta^2} \right)$$

となり、(3.40)式及び(3.41)式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{11}}{\partial t} &= - \frac{\epsilon^2}{\theta} \frac{p (U_i + v_0 + \theta U_{11})}{r} \\ &\approx - \frac{\epsilon^2 \theta v_{Ti}^2}{r^2 \nu_i} (U_i + v_0 + \theta U_{11}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる。粒子束は(2.21)式を用いると

$$\Gamma_i \approx \frac{m_i n v_{Ti}^2}{e B_0 r^2 \nu_i} (U_i + v_0 + \theta U_{11}) \quad (3.43)$$

で与えられる。

同じ結果は

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint n v_r h d\theta$$

但し

$$v_r = - \frac{1}{rB} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} - \frac{2\epsilon T}{erB} \sin \theta \quad (3.44)$$

という粒子束の表式に(3.41)式を代入することによっても得られる。

電界の緩和の特徴的時間は、(3.42)式を(3.20)式に代入することにより求まり

$$\nu_{eff} \sim \frac{R^2 \nu_i}{v_{Ti}^2} \quad (3.45)$$

となる。定常状態(両極性拡散)となる為にはイオンの粒子束が電子の粒子束($\Gamma_e \sim (m_e/m_i)^{1/2} \Gamma_i$)と等しくなければならないから、 $\Gamma_i \approx 0$ より

$$U_{11} = - \frac{T_i}{e\theta B_0} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} \right) \quad (3.46)$$

の関係が成立する。このことからMHD領域においても、バナナ領域と同様に平衡状態で磁力線方向にプラズマの平均流量が存在することが判る。

Stringer は径電界が輸送に与える影響を調べた論文の中で両極性の径電界($\sim T/er$)が立ち上る時間を評価し、(3.45)式の時定数を得ている⁸⁾。我々がここで得た結果は、このStringerの結果の $U_{11} \neq 0$ の場合への拡張となっている。

温度勾配が0でない場合には附録の(E-24)式より、定常状態で

$$U_{11} = - \frac{T_i}{e\theta B_0} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right) \quad (3.47)$$

が成立する。電界の時間変化の割合は、温度勾配の無い場合と同様に(3.45)式で与えられる。

全領域での径電界緩和の様子を図3に示す。§3.2.2で述べたように、外部から加えられた径電界 E_{ex} はこの緩和過程によって θ^2 だけ小さくなり、プラズマの磁力線方向への平均流 U_{11} が $\theta E_{ex}/B_0$ だけ変化する。この為、軸対称トラス系では、径電界に対する実効的な誘電率が均一磁場中での値に比べて $1/\theta^2$ 倍大きくなったものとみなすことが出来る。

3.3 径電界の緩和に対するリップルの効果

トロイダル磁場にリップルがあるトカマクやステラレータでは軸対称のトラス系に比べて粒子束や熱流が増加する。又、両極性拡散の状態も変化する。(§2.4参照)この様な軸対称性の小さな破れの径電界の緩和に対する影響を調べる。磁場配位は磁界の強さが(2.39)式、

$$B \simeq B_0 [1 + \delta \cos(L\theta - N\phi) - \epsilon \cos\theta]$$

で与えられているとする。§2.4で述べた様に、荷電粒子の平均自由行程が十分に長くなり

$$\lambda \equiv \frac{v_T}{\nu} > \frac{R}{N\delta^{3/2}} \quad (3.48)$$

となると磁力線方向にゆっくりと運動 ($v_{11} < \sqrt{\delta} v_T$) する粒子はトロイダル磁場のリップルに捕捉され、このリップル捕捉粒子が輸送過程に影響を与えるようになる。

この時、両極性拡散となる為には、径電界 E_r の値は(2.45)式より

$$E_r = \frac{T_i}{e} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{3.37}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right) \quad (3.49)$$

となっていなければならない。 E_r の値が上式からズレた場合には、イオンと電子の粒子束は等しくならず、半径方向に電流が流れ、径電界の値は、(3.49)式の値に緩和する。

例えば、バナナ領域にあるトカマクを考える。バナナ領域での軸対称系での粒子束

$$\Gamma \sim \frac{\nu \rho^2 q^2}{\epsilon^{3/2}} \frac{dn}{dr}$$

がリップルによる粒子束

$$\Gamma \sim \frac{\delta^{3/2}}{\nu} \left(\frac{T}{eBR} \right)^2 \frac{dn}{dr}$$

より大きければ、§3.2で得られた結論がたとえ、多少の軸対称性の破れがあっても適用できる。

即ち、 δ の値が

$$\delta < \epsilon \left(\frac{\nu R q}{\epsilon^{3/2} v_T} \right)^{4/3} \quad (3.50)$$

であればよい。この時、 U_{11} と E_r の間に(3.2)式の関係

$$U_{11} = - \frac{T_i}{e \theta B_0} \left\{ \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{e E_r}{T} - \frac{0.17}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right\}$$

が成立している。又、§ 3.2 で述べたように、実効的な誘電率は均一磁場中のプラズマに比べて θ^{-2} 倍大きくなっている。従って、電界の時間変化を計算するには、(3.1) 式の代わりに

$$\frac{en}{\omega_{ci} B_0 \theta^2} \frac{e E_{ex}}{\partial t} \simeq - e \Gamma_i \quad (3.51)$$

を用いる。粒子束 Γ_i の値として附録の (D-3) 式を用いれば、電界の減衰の特徴的な時定数として

$$\tau_R = \frac{m_i \nu_i R^2}{9.29 \delta^{3/2} G(\alpha) \theta^2 T_i} \quad (3.52)$$

を得る。さらに U_{11} の時間変化は、(3.2) 式の関係を用いて

$$\frac{\partial U_{11}}{\partial t} = - \frac{U_{11} - U_0}{\tau_R} \quad (3.53)$$

但し

$$U_0 \equiv \frac{3.54}{e \theta B_0} \frac{dT_i}{dr}$$

で与えられる⁵⁾。

リップル磁場の影響としては、リップル拡散によるもの以外に、Connor と Cordey が考えたリップル磁場に捕捉された粒子と、平均として U_{11} で流れている通過粒子の間の摩擦力がある¹⁰⁾。§ 2.3.3 での議論と同様に、この力は

$$F_M \sim - m_i n \delta^{1/2} \nu_i U_{11} \quad (3.53)$$

と評価できる。この摩擦力によって生じる粒子束は、(2.21) 式より

$$\begin{aligned} \Gamma_M &\sim \frac{F_M}{e \theta B_0} \sim - \frac{m_i n \delta^{1/2} \nu_i}{e \theta B_0} U_{11} \\ &\sim \frac{m_i n \delta^{1/2} \nu_i}{e \theta^2 B_0^2} E_{ex} \end{aligned}$$

となる。これに対しリップル拡散による粒子束は (D-3) 式を用いて

$$\Gamma_R \sim \frac{\delta^{3/2}}{\nu} \left(\frac{T}{e B_0 R} \right)^2 \frac{en}{T} E_{ex}$$

である。両者を比べると

$$\frac{\Gamma_M}{\Gamma_R} \sim \frac{\nu^2 R^2}{\delta \theta^2 \nu_T^2} \quad (3.54)$$

となる。(3.48)式の条件のもとでは、上の比は通常、1より小さくなる。従って、径電界の緩和を考える時、このリップルに捕捉された粒子と通過粒子の間の摩擦力の効果は無視しうる。

これまでの議論は $\delta \ll \epsilon$ の場合について行ったものであるが、ステラレータ-磁場配位の様に $\delta \sim \epsilon$ であると、リップル磁場に捕捉された粒子の拡散による電界の時間変化が早く、 U_{11} の値は、軸対称トラス系における両極性拡散の状態、即ち、(3.2)式となることが出来ず、又、実効的な誘電率が $1/\theta^2$ 倍になることもない。従って、この場合には電界の緩和時間は

$$\tau_R' \sim \frac{m_i \nu_i R^2}{\delta^{3/2} T_i} \quad (3.55)$$

となる。

3.4 議論

§3.2で、軸対称トラス系では、プラズマの実効的な誘電率が、均一磁場中での場合に比べて $1/\theta^2$ 倍大きくなることが示された。この現象は次の様に解釈出来る。附録Aで述べられている様に、磁化プラズマでは、電界のエネルギーがプラズマの $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフト運動の運動エネルギーとしてプラズマ中に貯えられる為、その誘電率は真空の場合に比べて増大する¹¹⁾。ところが、軸対称トラス系においては、両極性拡散となる為には、 $U_{11} \sim E_r / \theta B_0$ という磁力線方向へのプラズマの平均流が必要である。この流れの大きさは、 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフト速度より $1/\theta$ 倍大きい為、同じだけの電界をプラズマ中に創ると、均一磁場中の場合に比べて $1/\theta^2$ 倍の運動エネルギーがプラズマ中に貯えられる。この為、実効的な誘電率が $1/\theta^2$ 倍大きくなる。しかし、この時、加えられた電界のエネルギーのうち θ^2 だけの部分がプラズマの運動エネルギーに変換されるだけで、残りは熱エネルギーに散逸してしまう。

軸対称トラス系に加えられた径電界のエネルギーは、§3.2で述べたように、プラズマの両極性拡散への緩和で θ^2 だけ小さくなる。もし、衝突周波数が十分に小さければ、§3.3で述べた様に、トロイダル磁場の小さなリップルの効果によって、この残りの径電界は(3.49)式、

$$E_r = \frac{T_i}{e} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{3.37}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right)$$

の値へ緩和する。以下では、電界の緩和の他の機構について考える。

これまでは、完全電離プラズマのみを考えて、プラズマ中の中性粒子の存在は無視してきた。プラズマが比較的低温で、弱電離プラズマの場合には、輸送過程において中性粒子との衝突も考慮しなければならない¹²⁾。この場合には§2.3.1での議論は成立せず、両極性拡散となる様に、径電界の値は一意的に決まる。

現在のトカマク・プラズマでは、低温の中性粒子と高温のプラズマ・イオンの間の荷電交換がイオンのエネルギー・バランス¹³⁾や径電界の緩和¹⁴⁾に重要な割合をはたしている。即ち、荷電交換で発生した高速の中性粒子の平均自由行程はかなり長く、現在のトカマクのプラズマ・パラメーターでは、ほとんど直接、壁やリミッターに失なわれる。この時、エネルギーとともにプラズマの運動量も失なわれる。この効果によるプラズマの磁力線方向の流速の時間変化は

$$\frac{dU_{11}}{dt} \sim -\frac{U_{11}}{\tau_{cx}} \quad (3.56)$$

となる。ここで τ_{cx} は荷電交換の特徴的時間である。もし、外部からの中性粒子の流入でプラズマの密度が時間的にほぼ一定に保たれていれば、 τ_{cx} は粒子の閉じ込め時間程度となる。

§ 2.2.2 で述べたように、均一磁場中では、ラーマー展開の高次の項からの寄与による径電界の緩和の特徴的時間は

$$\tau_c = \frac{r^2}{\nu_i \rho_i^2} \quad (3.57)$$

となる。軸対称トーラス系におけるラーマー展開の高次の項からの寄与による径電界の緩和は、平均自由行程の長い領域では Rosenbluth et al¹⁵⁾、MHD 領域では, Hazeltine¹⁶⁾ によって調べられている。いずれの場合にも、径電界の緩和時間は

$$\tau_s \sim \frac{r^2}{\nu_i \rho_i^2 q^2} \quad (3.58)$$

となって、径電界は、この時定数でイオン温度の勾配で定まるある値に近づいていく。(3.58)式の特徴的時間は長いので、実際のトカマクのプラズマでは、このラーマー展開の高次の効果が主要な径電界の緩和の機構となる場合はない。即ち、平均自由行程の長い場合には、§ 3.3 で述べた、トロイダル磁場のリップルの効果がきく。又、平均自由行程が比較的短いトカマクでは、荷電交換による緩和の方がより効果的である。

他の可能性として、不安定性による径電界の緩和が考えられる。ここで考えている問題に関して重要な不安定性は、磁力線方向のプラズマの流れ U_{11} の値が半径方向に変化している為に起る Kelvin - Helmholtz 型不安定性³⁾である。この不安定性の成長率は

$$r \sim k_{\perp} \rho_i \frac{dU_{11}}{dr} \quad (3.59)$$

k_{\perp} ; 磁力線に垂直方向の波数ベクトル

の程度である。この不安定性に対しては、磁場のシェアによる安定化効果はあまり期待出来ず、密度勾配の影響が大きい。この不安定性の安定化条件は Catto 等によって³⁾

$$\left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)^{-1} \frac{-dU_{11}}{dr} \frac{1}{(1+T_e/T_i) v_{Ti}} < 1 \quad (3.60)$$

と与えられている。もし、上の条件が破れ、Kelvin-Helmholtz型不安定性が発生した場合には、プラズマ内で U_{11} の値は急速に一様となると考えられる。

上の結果を用いて、現在及び将来のトカマクに対して中性粒子入射加熱を行った時に発生する径電界について考える。加熱時間 τ_H を W/P_{inj} (W ; プラズマのエネルギー, P_{inj} ; 入射エネルギー)で定義する。 P_{inj} は技術的にあまり大きくはとれないので、通常 τ_H は τ_E の数分の1程度である。

まず§3.2で述べた過程は τ_E , τ_H に比べて非常に早いので、発生した径電界 E_r (poloidal rotation)は直ちに θ^2 倍だけ小さな値となってそのエネルギーは U_{11} (toroidal rotation)に変換される。発生する電界の最大値を見積る為に、入射されたエネルギーはすべて運動エネルギー $-m_i n U_{11}^2/2$ に変換されるとする。これは、一方向のみの平行入射に相当する。垂直入射の場合には、発生する U_{11} 及び E_r は θ^2 だけ小さくなる。

現在のトカマクの多部分では、中性粒子入射加熱で励起された U_{11} は§3.4で述べたように荷電交換の効果によって減衰する。この場合には $\tau_{cx} \sim \tau_n \geq \tau_E \geq \tau_H$ であるから、 $U_{11} \geq v_{Ti}$, $E_r \geq \theta B_0 v_{Ti}$ となりうる。即ち、(3.60)式の条件が破れ、中性粒子入射加熱を行うことによってKelvin-Helmholtz型不安定性が発生する可能性がある。従って、平行入射の場合には、この不安定性による悪影響をさける為に中性粒子束を互いに逆向に入射し、運動量を打消すといった工夫が必要であろう。

一方、将来の大型トカマクでは、励起された U_{11} は(ii)の τ_R の時間尺度で緩和するが、 $\tau_R \ll \tau_H \leq \tau_E$ である為、中性粒子入射加熱によって発生する径電界は十分に小さい。従って、発生する径電界の点からは、中性粒子束の入射法に特に制限は生じない。

3.5 結 論

この章では、プラズマの角運動量保存の関係式を用い、軸対称トーラス系における径電界の緩和の機構について解析した。又、リップル拡散の表式を利用して、非軸対称トーラス系における径電界の緩和を調べた。この章で得られた主な結論を以下に示す。

- (i) 軸対称トーラス系においては、径電界の緩和 (decay of poloidal rotation) の過程で電界のエネルギーの一部がプラズマの運動エネルギー ($\sim m_i n U_{11}^2/2$) に変換され、プラズマの実効的な誘電率は均一磁場中での場合に比べて θ^{-2} 倍大きくなる。この過程の特徴的な時定数は

$$\tau \sim \frac{\epsilon^{3/2}}{\nu_i q^2} ; \quad \nu_i < \frac{\epsilon^{3/2} v_{Ti}}{Rq}$$

$$\tau \sim \frac{R}{v_{Ti} q} ; \quad \frac{\epsilon^{3/2} v_{Ti}}{Rq} < \nu_i < \frac{v_{Ti}}{Rq}$$

$$\tau \sim \frac{R^2 \nu_i}{v_{Ti}^2} ; \quad \frac{v_{Ti}}{Rq} < \nu_i < \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4} \frac{v_{Ti}}{Rq}$$

で与えられる。

- (ii) 平均自由行程が十分に長いトカマクの場合には非両極性のリップル拡散によって U_{11} (toroidal rotation) は緩和する。その時定数は

$$\tau_R \sim \frac{\nu_i R^2}{\delta^{3/2} \theta^2 v_{Ti}^2}$$

である。

第三章の参考文献

- (1) H.P. Zehrfeld and B.J. Green, Nuclear Fusion 12 (1972) 569.
- (2) T.E. Stringer, Phys. Rev. Letters 22 (1969) 770.
- (3) P.J. Catto et al, Phys. Fluids 16 (1973) 1719.
- (4) T. Tuda, J. Phys. Soc. Japan 39 (1975) 1358.
- (5) T. Tuda, Nuclear Fusion 15 (1975) 541.
- (6) M.N. Rosenbluth, R.D. Hazeltine and F.L. Hinton, Phys. Fluids 15 (1972) 116.
- (7) A.A. Galeev, Sov. Phys. JETP 26 (1968) 233.
- (8) T.E. Stringer, Phys. Fluids 13 (1970) 1586.
- (9) R.D. Hazeltine, E.P. Lee and M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids 14 (1971) 361.
- (10) J.W. Connor and J.G. Cordy, Nuclear Fusion 14 (1974) 185.
- (11) C.L. Longmire, "Elementary Plasma Physics"
(John Wiely & Son, Inc, 1963, London)
- (12) L.M. Kovriznikh, Sov. Phys. JETP 29 (1969) 475.
- (13) L.A. Berry, J.F. Clarke and J.T. Hogan, Phys. Rev. Letters 32 (1974) 362.
- (14) D.J. Sigmar et al, Phys. Rev. Letters 33 (1974) 1376.
- (15) M.N. Rosenbluth et al, Plasma Physics and Contralled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1971), Vol 1, p.495
- (16) R.D. Hazeltine, Phys. Fluids 17 (1974) 961.

第4章 トーラス系における不純物イオン輸送

4.1 序

高温プラズマ中に多価の不純物イオンが存在することは非常に大きな輻射損失の原因となる。¹⁾ この為、トカマクやステラレータ等の低ベーター・トーラス装置によって核融合炉を実現する為には、プラズマ中に混入する不純物イオン（特に、Mo, W等の重金属イオン）の量を低く抑えることが基本的な条件の1つとなっている²⁾。

又、現在のトカマク装置の実験においても、プラズマ中に存在する僅かな不純物イオンがプラズマの閉じ込めに大きな影響を与えている³⁾。これらの理由で、磁化プラズマ中に2種以上のイオンが混在する状況での輸送過程を研究することは重要である。

均一磁場中の場合は、§2.2で述べたLongmireとRosenbluth⁴⁾の理論がそのまま多種のイオンが混在する場合の拡散過程にも適用できる。(2.2)式より、 β 種の荷電粒子との衝突による粒子 a の拡散束は

$$\Gamma_a(\beta) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \pi^{3/2} \left(\frac{m_{a\beta}}{T} \right) \left(\frac{e_\beta}{\epsilon_0 B} \right)^2 \ln \Lambda e_a n_a n_\beta \left\{ \frac{1}{e_\beta n_\beta} \frac{dn_\beta}{dx} - \frac{1}{e_a n_a} \frac{dn_a}{dx} \right\} \quad (4.1)$$

但し

$$m_{a\beta} = \frac{m_a m_\beta}{m_a + m_\beta}$$

ϵ_0 : 真空の誘電率

となる。ここで、イオン間の衝突による拡散を考える場合には、 e_a と e_β は同符号であることに注意しなければならない。多種類のイオンが混在する場合の輸送過程の特徴としては次の3点をあげることが出来る。

i) プラズマ中の径電界の値と関係なく自動的に両極性拡散となる。即ち、

$$\sum_a e_a \Gamma_a = 0 \quad (4.2)$$

ii) 二成分プラズマの場合には、中性条件 ($n_e = n_i$) を用いることによって、粒子束は自身自身の密度勾配だけに比例する形式 (Fick's law) で表わすことが出来る。しかし、イオンが多成分の場合には粒子束は自分自身の密度勾配だけでなく衝突する相手のイオンの密度勾配にも関係する。すなわち

$$\Gamma_a \propto \frac{1}{e_\beta n_\beta} \frac{dn_\beta}{dr} - \frac{1}{e_a n_a} \frac{dn_a}{dr} \quad (4.3)$$

例えば、外部から入ってきた不純物イオンはプラズマ・イオン ($dn_i/dr < 0$) との衝突によ

ってプラズマ柱の内部へ拡散していく。(inward diffusion) 又、異なる種類のイオン間の衝突による拡散係数は

$$D \sim \nu_i \rho_i^2$$

の程度となり、電子の拡散係数

$$D_e \sim \nu_e \rho_e^2$$

に比べて $(m_i/m_e)^{1/2}$ 倍の程度の大きさである。

iii) 準定常状態で、電子との衝突の効果 ($\sim \sqrt{m_e/m_i}$) を無視すれば、多価の不純物イオンはプラズマ柱の中心に集中した分布となる。すなわち、電荷数 Z の不純物イオンは水素プラズマ中で、定常な分布として

$$\frac{n_z(r)}{n_z(o)} \approx \left\{ \frac{n_i(r)}{n_i(o)} \right\}^z \quad (4.4)$$

をとる。

均一磁界中での不純物イオンの輸送に関して ii) と iii) の性質が成立することは Taylor⁵⁾ によって、初めて指摘された。これらは、プラズマ中の不純物イオンの量を低く抑えるには望ましくない性質である。トーラス・プラズマ中での不純物イオンの輸送が同様の性質を持つかどうかは制御核融合を実現するうえで重要な問題である。

以下では、トーラス系における不純物イオンの輸送の性質を調べる。§ 4.2 では軸対称トーラス系における軽い不純物イオンの輸送について述べる^{6),7)}。§ 4.3 では不純物イオンが重く、径電界の効果が無視出来ない場合の輸送を調べる^{8),9)}。§ 4.4 では非軸対称トーラス系における不純物イオン輸送について解析する¹⁰⁾。§ 4.5 では不純物イオンの異常輸送に関係が深い不純物ドリフト波不安定性について述べる^{11),12)}。

4.2 軸対称トーラス系における不純物イオン輸送

まず、不純物イオンがあまり重くなく、不純物イオンのラーマー半径 ρ_i も電子やプラズマ・イオンと同様に条件

$$\frac{\rho_i}{\theta r} \ll 1 \quad (4.5)$$

を満たしているとする。この場合には、軸対称トーラス系でのプラズマの角運動量保存則を用いた二成分プラズマの両極性拡散に対する議論(第3章)は多種類のイオンが混在する場合に容易に拡張出来る。(2.21)式より、軸対称トーラス系におけるプラズマの角運動量保存則は

$$\begin{aligned}
 m_a n_a \frac{\partial U_{11a}}{\partial t} - e_a n_a E_\varphi - e_a \theta B_0 \Gamma_a \\
 = \sum_\beta m_a \oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{11} C_{a\beta}(f_a)
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

但し

$$\Gamma = \oint \frac{h d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{Dr} f \quad : \text{粒子束}$$

$$U_{11} = \oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3 v v_{11} f \quad : \text{磁力線方向の平均流速}$$

$$h = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

で与えられる。上式を各成分について和をとれば、クーロン衝突が運動量を保存する(2.22)式ことから

$$\sum_a m_a n_a \frac{\partial U_{11a}}{\partial t} - \theta B_0 \sum_a e_a \Gamma_a = 0
 \tag{4.7}$$

の関係を得る。異種イオンが混在する場合には、イオン-イオン間の摩擦力が大きい為、全ての種類のイオンの磁力線方向の平均流速 U_{11a} は等しくなる。さらに、径電界 E_r の値は、径方向の電流 $\sum_a e_a \Gamma_a$ によって

$$\sum_a m_a n_a \frac{\partial U_{11a}}{\partial t} = 0
 \tag{4.8}$$

を満たすように変化して両極性拡散

$$\sum_a e_a \Gamma_a = 0
 \tag{4.9}$$

となる。イオン-イオン間のクーロン衝突が拡散にきかなくなる条件は、(2.38)式で与えられる U_{11a} の値が各成分で等しくなることである。温度勾配を無視するとこの条件は

$$\frac{1}{e_a n_a} \frac{dn_a}{dr} = \frac{1}{e_\beta n_\beta} \frac{dn_\beta}{dr}$$

となり、均一磁場中での場合の(4.4)式と同じ結果を得る。すなわち、軸対称トーラス系においても、均一磁場中の場合と同様、不純物イオンの輸送に関して性質 ii) 及び iii) が成立する。

まず各成分ともMHD領域

$$\nu_a \gg \frac{v_{Ta}}{Rq}
 \tag{4.10}$$

にある場合について考察する^{6),7)}。座標系の平衡配位は(2.9)式で与られるとする。粒子の平

均自由行程が短いので、プラズマの運動を記述するのに流体方程式系を用いることが出来る。又、各イオン成分の間で温度が緩和する時間は粒子の閉じ込め時間 τ_n やエネルギー閉じ込め時間 τ_E に比べて十分に短いので、成分の温度は等しいとする。各々の成分に対して連続の式及び運動方程式（運動量保存の式）を次の様に書く。

$$\nabla \cdot (n_a \vec{v}_a) = 0 \quad (4.11)$$

$$\nabla p_a = e_a n_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) + \vec{R}_a \quad (4.12)$$

ここで n, v, p は各成分の密度、流速及び圧力を表わし、 R_a は他の成分とのクーロン衝突によって a 成分に作用する摩擦力であり、下の様に与えられる¹³⁾。

$$\vec{R}_a = - \sum_{\beta} \frac{m_{a\beta} n_a}{\tau_{a\beta}} (\vec{v}_a - \vec{v}_\beta) \quad (4.13)$$

但し

$$m_{a\beta} = \frac{m_a m_\beta}{m_a + m_\beta}$$

$$\tau_{a\beta} = \frac{6\sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_0^2 \sqrt{m_{a\beta}} T^{3/2}}{e_a^2 e_\beta^2 n_\beta \ln \Lambda}$$

(4.13) 式の R_a の値は、各成分の速度分布関数が shifted Maxwell 分布であると仮定して求められている。同種粒子間の衝突による分布関数の歪まで考慮していないので、場合によっては 50% 程度の誤差を生じる。

又 運動方程式 (4.12) には慣性項 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ が入っていない。この近似はイオンのラーマー半径が小さいという (4.5) の条件が成立する場合には正しい。不純物イオンが重く、(4.5) の条件が破れる場合は、§ 4.3 で、慣性項の効果を考慮に入れて考察する。

(4.12) 式及び (4.13) 式を解くに当って、各項を小さなパラメーター ϵ 及び ν/ω_c (ν は衝突周波数、 ω_c はサイクロトロン周波数) で展開する。まず、 ν/ω_c の最低次では散逸項は無視できて (4.12) 式は

$$\nabla p_a = e_a n_a (\vec{v}_a \times \vec{B})$$

となり、これより、磁力線に垂直方向の流体の流れは

$$n_a v_{a\perp} = \frac{1}{e_a B} \frac{d p_a}{d r} \quad (4.14)$$

となる。(4.14) 式を (4.11) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla_{\parallel} \cdot (n_a \vec{v}_a)_{\parallel} &= - \nabla_{\perp} \cdot (n_a \vec{v}_a)_{\perp} \\ &\simeq - \frac{2 \varepsilon}{e_a B_0 r} \frac{d p_a}{d r} \sin \theta \end{aligned}$$

が得られる。ここで添字 \perp , \parallel はそれぞれ磁力線に垂直及び平行方向の成分であることを示す。さらに $\theta \equiv B_{\theta}/B_{\varphi} \ll 1$ より

$$\nabla_{\parallel} \simeq \frac{\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

であるから、 θ で1回積分を行って

$$n_a v_{a\parallel} \simeq - \frac{2 \varepsilon}{e_a B_0 \theta} \frac{d p_a}{d r} \cos \theta \quad (4.15)$$

が得られる。

近似の次の精度では、(4.12)式の磁力線方向の成分より

$$E_{\theta} \simeq \frac{1}{e_a n_a r} \frac{\partial p_a}{\partial \theta} - \frac{R_{a\parallel}}{\theta}$$

が得られる。この E_{θ} の値を(4.12)式の θ 成分に代入することにより、 r 方向の粒子束は

$$n_a v_{a r} \simeq \frac{1}{e_a B} \left(R_{a\perp} - \frac{R_{a\parallel}}{\theta} \right) \quad (4.16)$$

で表わされる。上式の $R_{a\parallel}$, $R_{a\perp}$ の値は、(4.14)式、(4.15)式を(4.13)式に代入することによって得られる。

磁気面($r = \text{一定}$)を貫く粒子束は

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \frac{1}{2\pi} \oint d\theta \, h n_a v_{a r} \\ &= - \sum_{\beta} \frac{m_{a\beta} n_a}{e_a \tau_{a\beta}} \frac{1+2q^2}{B_0^2} \left(\frac{1}{e_a n_a} \frac{d p_a}{d r} - \frac{1}{e_{\beta} n_{\beta}} \frac{d p_{\beta}}{d r} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる^{6), 7)}。(4.13)式の粒子束は、温度が空間的に一様であるとすれば、均一磁場中での粒子束(4.1)式にPfirsch-Schlüter係数 $(1+2q^2)$ を乗じたものになっている。Pfirsch-Schlüter係数のうち1は磁界に垂直方向の散逸による拡散で(4.1)式に相当し、係数 $2q^2$ はトロイダル効果による粒子束の増加を示す。従って、軸対称トーラス(MHD領域)の場合にも§4.1で述べた不純物イオンの輸送に際しての性質i)~iii)が成立する。

総ての成分がバナナ領域

$$\nu_{\alpha} \ll \epsilon^{3/2} \frac{v_{T\alpha}}{Rq}$$

にある場合の不純物イオンの粒子束は Connor¹⁴⁾ と Hirshmann 等¹⁵⁾ によって計算された。粒子束は捕捉粒子の効果によって (4.17) 式の係数 $2q^2$ が $\epsilon^{-3/2}$ 倍程度大きくなる。

各成分が異なった衝突領域にあるような一般の場合の輸送過程の解析は非常に複雑になる。しかし、そのような場合でも温度が空間的に一様であれば粒子束は

$$\Gamma_{\alpha} \propto - \frac{1}{e_{\alpha} n_{\alpha}} \frac{dn_{\alpha}}{dr} + \frac{1}{e_{\beta} n_{\beta}} \frac{dn_{\beta}}{dr}$$

という (4.3) 式と同じ形式で表わされ、不純物イオンの輸送に際して性質 i) ~ iii) が成立する。現在のトカマクで重要なのは、不純物イオンが MHD 領域にあり、プラズマ・イオンがバナナあるいはプラトー領域にある場合である。Hirshman¹⁶⁾ の計算によれば、この時には、粒子束は主として不純物イオンの衝突領域によって決まり、不純物イオンの粒子束は (4.17) 式で与えられる。

4.3 不純物イオン輸送に対する径電界の影響

軸対称トーラス系における二成分プラズマ (電子と1種類のイオン) の輸送に対する径電界の影響は Stringer¹⁷⁾ を始めとする多くの研究者によって調べられている。¹⁸⁾ これらの結果によれば、粒子の平均自由行程が

$$\lambda = \frac{v_T}{\nu} > Rq \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/4} \quad (4.18)$$

であれば、イオンの磁力線方向の粘性や電子の Thermal Force の効果で径電界 E_r の値は小さく抑えられ、両極性拡散の状態での粒子束は径電界の影響を無視した場合と大差はない。しかし、平均自由行程が短い場合は、プラズマ中に強い径電界が発生し、粒子束が増加する。この粒子束の増加は、プラズマ柱の回転により、プラズマ内に

$$\omega = \frac{E_r}{rB}, \quad m=1, \quad k_{11} = \frac{1}{Rq}$$

のドリフト波やイオン音波が励起されることと関係している¹⁷⁾。ここで、 ω は回転しているプラズマに乗って観測した波の周波数、 m は θ 方向のモード数、 k_{11} は磁力線方向の波数である。

この θ 方向の密度及び静電ポテンシャルの揺動が励起される為には、プラズマ柱が1回転する時間とイオン音波が連結距離 Rq を伝わる時間が同程度になる必要がある。即ち、 $T_e \sim T_i$ として

$$\frac{E_r}{rB_0} \sim \frac{v_{Ti}}{Rq}$$

であることが必要である。ところが、プラズマの平均自由行程が長く、(4.18)の条件を満たしていれば静電ポテンシャルの大きさは $e\phi/T_i \sim 1$ に抑えられ、上の条件は

$$\frac{\rho_i}{\theta r} \sim 1$$

但し、

$$\theta \equiv \frac{B_\theta}{B_0} \ll 1$$

となる、ところが、通常のトカマクのプラズマ・パラメーターでは $\rho_i/\theta r \ll 1$ であり、プラズマ柱の回転によって波が励起されることはない。従って、二成分プラズマの輸送過程に対する径電界の影響は小さい。

不純物イオンが存在する場合には、プラズマ柱の回転によって、不純物ドリフト波及び不純物音波 (§4.5 参照) が励起される可能性がある。不純物音波の磁力線方向の位相速度は不純物イオンの熱速度 v_{TI} の程度である為、たとえ径電界の値が小さくとも、十分に重い不純物イオンに対しては

$$\frac{E_r}{r B_0} \sim \frac{v_{TI}}{R_q}$$

となり、不純物音波が励起される。この為、重い不純物イオンの輸送は径電界によって大きな影響を受ける。

ここではこの不純物イオンの輸送に対する径電界の影響を MHD 領域において調べる。平衡配位と座標系は (2.9) 式、(2.10) 式を用いる。以下では3成分、即ち、電子とプラズマ・イオン (電荷数=1, 質量数=1) 及び不純物イオン (電荷数=Z, 質量数=A>1) からなるプラズマを考える。電気的中性の条件より

$$n_e(r, \theta) = n_i(r, \theta) + Z n_I(r, \theta) \quad (4.19)$$

が成立していなければならない。ここで、添字 I は不純物イオンについての量であることを示す。簡単の為に不純物イオンの量は少なく

$$Z^2 n_I \ll n_i \sim n_e \quad (4.20)$$

であるとする。従って、プラズマ・イオンの運動を考える時には不純物イオンとの衝突は無視し、不純物イオンの運動を考える時には不純物イオンの同種粒子間衝突の効果は無視する。

不純物イオンの量が少ない為、両極性拡散の状態は、プラズマ・イオンのパラメーターで定まる。(第2章及び第3章を参照) プラズマ・イオンが MHD 領域にある場合の平衡解は附録 E に与えられている。ここでは仮に、磁力線方向のプラズマの平均流速 $U_{||}$ が 0 の場合について解析を行うが、 $U_{||} \neq 0$ の場合には、以下で得られる結果を

$$v_0 \rightarrow v_0 + \theta U_{11} \quad (4.21)$$

但し

$$v_0 \equiv -\frac{E_r}{B_0} = \frac{1}{B_0} \frac{d\phi}{dr}$$

と置換すればよい。

プラズマ・イオンの衝突周波数が(4.18)の条件

$$\nu_i < \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \frac{v_{Ti}}{Rq}$$

を満たし、ラーマー半径が

$$\frac{\rho_i}{\theta r} \ll 1 \quad (4.22)$$

但し

$$\theta = \frac{B_\theta}{B_0} \ll 1$$

であれば、静電ポテンシャルの大きさは $e\phi/T_i \sim 1$ となり、(4.22)の条件は

$$v_0^2 \ll \theta^2 v_{Ti}^2 \quad (4.23)$$

と書ける。又、不純物イオンは十分に重く

$$v_0^2 \sim \theta v_{Ti}^2 \quad (4.24)$$

となりうるものとする。

以下では、不純物イオンはMHD領域にあるものとする。即ち

$$\delta \equiv \frac{v_{Ti} \tau_{ii}}{Rq} \ll 1 \quad (4.25)$$

但し

$$\tau_{ii} \sim \frac{\sqrt{A}}{Z^2} \tau_{ii}$$

を仮定する。

不純物イオンの振舞を記述する基本式は

$$\text{div}(n_I \vec{v}_I) = 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & m_I n_I (\vec{v}_I \cdot \nabla \vec{v}_I) \\ & = -\nabla p_I + e_I n_I (\vec{E} + \vec{v}_I \times \vec{B}) - \nabla \vec{n}_I + \vec{R} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\frac{3}{2} n_I (\vec{v}_I \cdot \nabla T_I) + p_I \operatorname{div} \vec{v}_I = - \operatorname{div} \vec{q}_I + \Delta Q \quad (4.28)$$

を用いる。ここで Π_I は不純物イオンの非等方圧力テンソルである。ここでは不純物イオンの同種粒子間衝突の効果は考慮しないので、 Π_I として磁気粘性項のみを考慮する。 \vec{R} は不純物イオンとプラズマ・イオンの間に働らく摩擦力であり、(4.13)式で与えられる。

粒子束のうち、磁力線に垂直方向の敬逸による項は小さいので \vec{R} は無視し、 \vec{R}_{11} のみを考慮して計算を行う。

\vec{q}_I は不純物イオンによる熱流であり、ドリフト熱流

$$\vec{q}_{Id} = \frac{5}{2} \frac{n_I T_I}{Z e B_0^2} (\vec{B} \times \nabla T_I) \quad (4.29)$$

及び、磁力線方向の熱流

$$\vec{q}_{11} = -\chi_{11I} \nabla T_I \quad (4.30)$$

但し

$$\chi_{11I} \sim \frac{n_I T_I \tau_{Ii}}{m_i}$$

からなっている。磁力線に垂直方向の熱伝導による熱流は、磁力線方向の成分に比べて、 $(\theta \tau_{Ii} \omega_{CI})^{-2}$ の程度なので、ここでは無視しうる。 ΔQ は、不純物イオンとプラズマ・イオンとの間の温度の緩和による熱の交換で

$$\Delta Q = n_I \frac{T_i - T_I}{\tau_T} \quad (4.31)$$

但し

$$\begin{aligned} \tau_T &= \frac{3\sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_i m_I}{Z^2 n_i e^2 \ell n A} \left(\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_I}{m_I} \right)^{3/2} \\ &\sim \frac{m_I}{m_i} \frac{3\sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{Z^2 n_i e^4 \ell n A} \end{aligned}$$

で与えられる⁸⁾。

前節と同様に、(4.26)式～(4.28)式の各項を小さなパラメーター ϵ 及び ν/ω_c で展開する。まず ν/ω_c の最低次の近似では、散逸項及び慣性項を無視し、密度、温度等は r にのみ依存するとみなすことが出来る。そこで、(4.27)式より

$$\begin{aligned}
 v_{I\theta}^{(0)} &= \frac{1}{ZeB} \frac{dp_I}{dr} - \frac{E_r}{B} \\
 &= \frac{v_0 + U_{pI}}{h}
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

但し

$$U_{pI} = \frac{1}{ZeB_0 n_I} \frac{dp_I^{(0)}}{dr}$$

及び

$$v_{Ir}^{(0)} = 0
 \tag{4.31}$$

を得る。ここで上付の添字(0)は微量 ν/ω_c による展開の最低次の量であることを示す。擬トロイダル座標系(2.9)式においては div の演算は $O(\epsilon)$ の精度で

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &\simeq \frac{\partial A_r}{\partial r} + h \frac{A_r}{r} \\
 &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} \epsilon \sin \theta \\
 &\quad + \frac{1}{Rh} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

であるから

$$\text{div}(v_I^{(0)}) = -\frac{2\epsilon}{r} \sin \theta (v_0 + U_{pI})
 \tag{4.32}$$

となる。又、前節で述べたように $\tau_T \ll \tau_E, \tau_n$ であるので

$$T_I^{(0)}(r) = T_i^{(0)}(r)
 \tag{4.33}$$

とする。 $O(\nu/\omega_c)$ の精度で、密度と温度は

$$f(r, \theta) = f^{(0)}(r) + \tilde{f}(\theta)
 \tag{4.34}$$

但し

$$f^{(0)} \gg \tilde{f}$$

で表わすことが出来る。解くべき式をすべて純型化するので、計算を簡単にする為、フーリエ変換を利用する。即ち、

$$\tilde{n}, \tilde{T}, \phi, \tilde{v}_{11} \rightarrow (\tilde{n}, \tilde{T}, \phi, \tilde{v}_{11}) e^{i\theta}
 \tag{4.35}$$

と置換する。但し、 ϕ は $O(\nu/\omega_c, \epsilon)$ の程度の静電ポテンシャルを表わす。この時、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は

$$\begin{aligned} \sin \theta &\rightarrow -ie^{i\theta} \\ \cos \theta &\rightarrow e^{i\theta} \end{aligned}$$

と置換すればよい。粒子束等を求める場合には複素数のまま計算を進め最後に結果の実数部をとればよい。又、以下では上付の添字(0)は省略する。

磁力線方向の運動方程式は附録の(E-14)式の導出の場合と同様に、磁気粘性ランソル \vec{H}_I の具体的な形⁸⁾を用いて

$$\frac{n_I m_I v_0}{r} \frac{\partial v_{11I}}{\partial \theta} = -\frac{Z e n_I \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\theta}{r} \frac{\partial \tilde{p}_I}{\partial \theta} + \tilde{R}_{11}$$

となる。さらに R_{11} として(4.13)式の表現を用いた後、(4.35)式の変換を用いると、磁力線方向の運動方程式は

$$(v_0 - is) \tilde{v}_{11I} = -\frac{\theta T_I}{m_I} \left(\frac{Z e \phi}{T_I} \quad \frac{\tilde{p}_I}{n_I T_I} \right) - is \tilde{v}_{11I} \quad (4.36)$$

但し

$$s \equiv \frac{r m_{iI}}{\tau_{iI} m_I}$$

となる。

プラズマ・イオンの磁力線方向への流速 \tilde{v}_{11I} は、(4.18)の条件のもとでは附録Eより

$$\tilde{v}_{11I} = -\frac{2\epsilon}{\theta} (v_0 + U_{pI}) \quad (4.37)$$

で与えられる。上式を(4.26)式に代入し、 v_{11I} を求め、それを連続の式(4.26)式に代入すると

$$\begin{aligned} &\left[(v_0 - is)(v_0 + U_{TI}) - \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right] \frac{\tilde{n}_I}{n_I} \\ &- \left[U_{nI} (v_0 - is) + \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right] \left(\frac{\tilde{T}_I}{T_I} + \frac{Z e \phi}{T_I} \right) \\ &= -2\epsilon v_0 (v_0 + U_{pI}) + i 2\epsilon s (U_{pI} - U_{pi}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

但し

$$U_{nI} = \frac{T_I}{Z e B_0 n_I} \frac{dn_I}{dr}$$

$$U_{TI} = \frac{1}{ZeB_0} \frac{dT_I}{dr}$$

を得る。

エネルギー・バランスの式(4.28)は $O(\nu/\omega_c)$ の精度で

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{n_I v_0}{r} \frac{\partial \tilde{T}_I}{\partial \theta} - \frac{3}{2} \frac{n_0}{B_0 r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{dT_I}{dr} + n_I T_I \left[\frac{\theta}{r} \frac{\partial \tilde{v}_{II}}{\partial \theta} - \frac{2\varepsilon}{r} \sin \theta (v_0 + U_{pI}) \right] \\ & - \chi_{II} \frac{\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}_I}{\partial \theta^2} - \frac{5\varepsilon}{r} \sin \theta \frac{n_I T_I}{ZeB_0} \frac{dT_I}{dr} = -n_I \frac{\tilde{T}_I - \tilde{T}_i}{\tau_T} \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる。上式に(4.36)式及び(4.37)式を代入し、附録の(E20)式より、 \tilde{T}_i/T_i は小さいとして無視すると

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{3}{2} v_0 - i \frac{\chi_{II} \theta^2}{n_I r} - i \frac{r}{\tau_T} \right) (v_0 - is) - \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right] \frac{\tilde{T}_I}{T_I} \\ & - \left[\frac{3}{2} U_{TI} (v_0 - is) + \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right] \frac{Ze\phi}{T_I} - \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \frac{\tilde{n}_I}{n_I} \\ & = -2\varepsilon v_0 (v_0 + U_{pI} + \frac{5}{2} U_{TI}) - i 2\varepsilon s (U_{pI} - U_{pI} - \frac{5}{2} U_{TI}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

を得る。

さらに、展開の1次のポテンシャル ϕ は中性条件

$$\tilde{n}_e = \tilde{n}_i + Z \tilde{n}_I$$

より決定されるが、文献(14)によれば $e\phi/T_i$ の大きさは

$$\frac{e\phi}{T_i} \sim O\left(\varepsilon \frac{v_0^2}{\theta^2 v_{Ti}^2}\right) + O\left(\varepsilon \frac{Z n_I}{n_i}\right) \quad (4.41)$$

の量であり、(4.38)式と(4.40)式において $Ze\phi/T_i$ の項は無視しうる。

次に微小量 $\delta = v_{Ti} \tau_{Ti} / Rq$ を用いて、 s , χ_{II} , τ_T を含んだ項の大きさを見積る。即ち、

$$\begin{aligned} & \frac{\theta v_{TI}}{s} \sim \delta \\ & \frac{\theta \chi_{II} / r n_I}{v_{TI}} \sim \delta \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\frac{v_0 s}{\theta^2 v_{Ti}^2} \lesssim 1$$

$$\frac{\tau_{Ts}}{r} \sim 1$$

である。従って、(4.38)式と(4.40)式より

$$\frac{\tilde{T}_I}{T_I} \sim \varepsilon \delta^2 \quad (4.43)$$

及び

$$\frac{\tilde{n}_I}{n_I} = 2\varepsilon \frac{P+iQ}{D^2} \quad (4.44)$$

但し

$$D^2 = \left[v_0 (v_0 + U_{TI}) - \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right]^2 + s^2 (v_0 + U_{TI})^2$$

$$P = -v_0 (v_0 + U_{pI}) \left\{ v_0 (v_0 + U_{TI}) - \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right\}$$

$$+ s^2 (v_0 + U_{TI}) (U_{pI} - U_{pi})$$

$$Q = s \left[v_0 (v_0 + U_{pI}) (v_0 + U_{TI}) \right.$$

$$\left. + \left\{ v_0 (v_0 + U_{TI}) - \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right\} (U_{pI} - U_{pi}) \right]$$

を得る。

径方向の不純物イオンの流速は、(4.27)式に(4.41)式、(4.43)式の結果を用いて

$$\tilde{v}_r = - \frac{T_I}{e n_I B r} \frac{\partial \tilde{n}_I}{\partial \theta}$$

であるから、磁気面を貫ぬく粒子束は、(4.44)式を用いて

$$\Gamma_I = \frac{1}{2\pi} \oint n v_r h d\theta$$

$$= - \frac{T_I}{2\pi Z e B_0 r} \oint d\theta \left(2\varepsilon \cos \theta \frac{\partial n_I}{\partial \theta} + \frac{n_I}{n_I} \frac{\partial n_I}{\partial \theta} \right)$$

$$= \frac{2\varepsilon^2 n_I T_I}{Z e r B_0} \frac{Q}{D^2} \quad (4.45)$$

で与えられる。⁹⁾ 上の結果の性質を知る為に、いくつかの極限での(4.45)式の具体的な表現を与える。

i) 不純物イオンのラーマ半径が小さい極限
不純物イオンのラーマ半径が小さく

$$\frac{\rho_I}{\theta r} \ll 1 \quad (4.46)$$

であると, $v_0^2, U^2 \ll \theta^2 T_I / m_I$ となり (4.45) 式は

$$\Gamma_I \approx - \frac{2 \epsilon n_i T_I}{Z e r B_0} \frac{\theta^2 T_I}{m_I D^2} (U_{pi} - U_{pi}) \quad (4.47)$$

となる。温度が空間的に一様であれば, 上の粒子束は

$$\Gamma_I \propto \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr} - \frac{1}{Z n_I} \frac{dn_I}{dr}$$

となり, 不純物イオンの輸送に際して § 4.1 で述べた性質 i) ~ iii) が成立する。さらに

$$\frac{\rho_I}{\theta r} < \frac{v_{TI} \tau_{Ii}}{R q} \quad (4.48)$$

とすると $v_0 s \ll \theta^2 T_I / m_I$ となり, (4.47) 式は

$$\Gamma_I \approx -2 q^2 \frac{m_{iI} n_I}{\tau_{Ii} Z e^2 B_0} \left(\frac{1}{Z n_I} \frac{dp_I}{dr} - \frac{1}{n_i} \frac{dp_i}{dr} \right)$$

となる。この節では無視した磁力線に垂直方向の散逸による粒子束の部分を除いて, 上式は前節の (4.17) 式に一致する。従って, 不純物イオンの粒子束に慣性項が影響しない条件は (4.48) 与えられる。いずれにせよ, 軽い不純物イオンの場合には, その粒子束の向きは径電界の影響を受けない。

ii) プラズマ・イオンが MHD 領域にある場合

プラズマ・イオンが MHD 領域にある場合には, 両極性拡散となる為に, 径電界の値は, (2.38) 式あるいは附録 (E 23) 式より

$$v_0 = - U_{pi} \quad (4.49)$$

でなければならない。従って, 不純物イオンの粒子束は (4.45) 式に (4.49) 式を代入して

$$\Gamma_I = - \frac{2 \epsilon^2 s n_I T_I}{Z e B_0 r D^2} \left\{ \frac{\theta^2 T_I}{m_I} - 2 U_{pi} (U_{pi} - U_{TI}) \right\} (U_{pi} - U_{pi}) \quad (4.50)$$

与えられる。この時, 不純物イオンが重く

$$\frac{\theta^2 T_I}{m_I} < 2 U_{pi} (U_{pi} - U_{TI}) \quad (4.51)$$

の条件を満たすと、不純物イオンの粒子束は、i)の場合と比べて逆向きとなる。例えば、通常のトカマクの場合の様に $U_{pi} < 0$ の状態で、不純物イオンはプラズマ内部に侵入できない。

iii) プラズマ・イオンの平均自由行程が長い場合

プラズマ・イオンがバナナ及びプラトー領域にある場合は、(2.38)式で $y \simeq 1.5$ となる。

従って、径電界は

$$v_0 \simeq -U_{ni} \quad (4.52)$$

で与えられる。

この場合の不純物イオンの粒子束は、(4.52)式を(4.45)式に代入して

$$\begin{aligned} \Gamma_I = & -\frac{2\epsilon^2 s n_I T_I}{ZeB_0 r D^2} \left[U_{ni} (U_{ni} - U_{pI}) (U_{ni} - U_{TI}) \right. \\ & \left. + (U_{pi} - U_{pI}) \left\{ U_{ni} (U_{ni} - U_{TI}) - \frac{\theta^2 T_I}{m_I} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

で与えられる。この場合にも

$$\frac{\theta^2 T_I}{m_I} \ll U_{ni}^2 \quad (4.54)$$

の条件を満たすような十分に重い不純物イオンの粒子束は、 $U_{ni} < 0$ の状態で外向きになる。

この節の最初に述べた様に、半径方向の電界によりプラズマ柱が回転し、これが不純物ドリフト波を励起する時、不純物イオンの粒子束が径電界の影響を大きく受ける。従って、この節での粒子束の評価は、不純物ドリフト波が安定な時にだけ意味を持つ。不純物イオンが少ないという(4.20)の条件のもとでは、不純物ドリフト波はイオン-イオン衝突によって容易に安定化されることが §4.5 で示される。

4.4 非軸対称トーラス系における不純物イオン輸送

トロイダル磁場にリップルがあるトカマクやステラレータ等の粒子束や熱流は、リップル捕捉粒子の効果で軸対称トーラスにおける場合と比べて増加する。2成分プラズマ(電子と1種類のイオン)の非軸対称トーラス系における輸送過程は §2.4 で述べた。この節では不純物イオンの輸送過程に対する非軸対称性の影響を調べる。§2.4 におけると同様、磁場配位は(2.39)式

$$B \simeq B_0 \{ 1 + \delta \cos(L\theta - N\varphi) - \epsilon \cos\theta \}$$

で与えられるものとする。トカマクの場合には、 δ はトロイダル磁場のリップルの深さ、 N はトロイダル磁場コイルの個数を表わす。

不純物イオンの平均自由行程があまり長くなければ ($v_{TI}/v_I < R \delta^{3/2}/N$)、不純物イオンの

輸送過程の取り扱いには軸対称トーラス系における取り扱い (§4.2, §4.3)と同様でよい。平均自由行程が長くなり、不純物イオンが閉じ込め磁場の非軸対称成分に捕捉されるようになると、この捕捉粒子のドリフト運動によって、不純物イオンの粒子束が増加する。

各成分の衝突周波数が

$$\delta^{3/4} \frac{\rho}{r} \frac{v_T}{R} \ll \nu \ll \delta^{3/2} \frac{N v_T}{R} \quad (4.55)$$

の領域にあるとする。文献(19)及び(20)の手順に従って計算を行うと、j種の成分の粒子束 Γ 及び熱流 Q としてそれぞれ

$$\begin{aligned} \Gamma_j = & -\frac{64}{9} \frac{\delta^{3/2} G(\alpha) n_j}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{T_j}{e_j B_0 R} \right)^2 \int_0^\infty dx_j \frac{x_j^{5/2} e^{-x_j}}{\sum_k \nu_{jk}(x_j)} \\ & \times \left\{ \frac{1}{n_j} \frac{dn_j}{dr} + \frac{e_j}{T_j} \frac{d\Phi}{dr} - \left(\frac{3}{2} - x_j \right) \frac{1}{T_j} \frac{dT_j}{dr} \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

及び

$$\begin{aligned} Q_j = & -\frac{64}{9} \frac{\delta^{3/2} G(\alpha) n_j}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{T_j}{e_j B_0 R} \right)^2 \int_0^\infty dx_j \frac{x_j^{7/2} e^{-x_j}}{\sum_k \nu_{jk}(x_j)} \\ & \times \left\{ \frac{1}{n_j} \frac{dn_j}{dr} + \frac{e_j}{T_j} \frac{d\Phi}{dr} - \left(\frac{3}{2} - x_j \right) \frac{1}{T_j} \frac{dT_j}{dr} \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

但し

$$\begin{aligned} x_j & \equiv \frac{m_j v^2}{2 T_j} \\ \nu_{jk} & \equiv \frac{n_k e_j^2 e_k^2 \ell n A}{8 \sqrt{2} \pi \epsilon_0^2 m_j^{1/2} T_j^{3/2}} x_j^{-3/2} h(x_k) \\ x_k & = \frac{m_k T_j}{m_j T_k} x_j \\ h(x) & \equiv \eta(x) + \frac{d\eta(x)}{dx} - \frac{\eta(x)}{2x} \\ \eta(x) & \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t} \sqrt{t} dt \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $G(\alpha)$, $\alpha = \epsilon/Nq\delta$ は§2.4で述べたリップル拡散のトロイダル効果による補正係数であり、1より小さな値をとる。 $G(\alpha)$ の数値はConnorとHaste²⁰⁾によって与え

られている。

積分を数値的に行えば (4.56) 式は

$$\Gamma_j = - \frac{\delta^{3/2} G(\alpha) n_j}{\nu_j} \left(\frac{T_j}{e B_0 R} \right)^2 \alpha_j \left\{ \frac{1}{n_j} \frac{dn_j}{dr} + \frac{e_j}{T_j} \frac{d\phi}{dr} + \frac{\beta_j}{T_j} \frac{dT_j}{dr} \right\} \quad (4.58)$$

但し

$$\nu_j \equiv \frac{n_e e^2 e_j^2 \ell n A}{6 \sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_j^{1/2} T_j^{3/2}}$$

$$n_e = \sum_{j \neq e} e_j n_j$$

と書ける。数値計算の結果得られる α_j と β_j はイオンの成分比で定まる数係数である。

具体例として、水素プラズマ中に少量の不純物イオン（電荷数 = Z, 質量数 = A）が混在する場合を考える。又、議論を簡単にする為、 $n_i > n_I$, $T = T_i = T_I$ とする。添字の i はプラズマ・イオン（陽子）、I は不純物イオンを示す。計算は $n_e = n_i + Z n_I$ を一定に保ちながら

$$Z_{\text{eff}} \equiv \frac{n_i + Z^2 n_I}{n_i + Z n_I} \quad (4.59)$$

を変えて行った¹⁰⁾。 α_I と β_I の計算結果の例は図4と図5に示してある。この時、 α_i の値は 1~10, β_i の値は ~3 である。この場合、各々のイオンの粒子束の比は

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_i} \sim A^{1/2} Z^{-4} \frac{n_I}{n_i} \ll 1$$

であるから、両極性拡散となる径電界の値は、主として、 $\Gamma_i \approx 0$ の条件で決まり、(2.45) 式と同様に

$$\frac{e d\phi}{T dr} \approx - \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr} - \frac{\beta_i}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \quad (4.60)$$

で与えられる。この値を用いると (4.56) 式より不純物イオンの粒子束は

$$\Gamma_I \approx \frac{\delta^{3/2} G(\alpha) n_I}{\nu_I} \left(\frac{T}{e B_0 R} \right)^2 \alpha_I \left\{ \frac{1}{n_I} \frac{dn_I}{dr} - \frac{Z}{n_i} \frac{dn_i}{dr} + \frac{\beta_I - Z \beta_i}{T} \frac{dT}{dr} \right\} \quad (4.61)$$

で与えられる。従って、温度勾配が無い場合には、不純物イオンの粒子束は

$$\Gamma_I \propto - \frac{1}{Z n_I} \frac{dn_I}{dr} + \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr}$$

の形式に書くことが出来、軸対称トーラス系や均一磁場中における輸送過程の場合と同様に、非軸対称トーラス系においても不純物イオンの輸送に際して § 4.1 で述べた性質 ii) と iii) が成立

する。又、 β_i と β_I の値は 3~3.5 の値をとるので、通常のとカマクのように温度勾配が負の場合には、温度勾配の効果で、プラズマ周辺にある不純物イオンがプラズマ内部に拡散していく速度が早められる。

トロイダル磁場のリップルによるイオンの熱流の増加は § 2.4 で述べたように、将来の大型トカマクのプラズマ・パラメータは重大な問題である。このイオンの熱流に対する不純物イオンの影響を考える。(4.60) 式を (4.57) 式に代入すると、トロイダル磁場のリップルによる熱流が求められる。数値計算を行うと j 種の成分の運ぶ熱流として

$$Q_j = - \frac{\delta^{3/2} G(\alpha) n_j}{\nu_j} \left(\frac{T}{e B_0 R} \right)^2 r_j \frac{dT}{dr} \quad (4.62)$$

を得る。この場合、熱流のうちで主要なものは、プラズマ・イオンの運ぶもので、不純物イオンの寄与は小さい。 r_j の数値は図 6 に示してある¹⁰⁾。この値は A の値を 8~100 に変化しても、ほとんど変わらない。リップル磁場によるイオンの熱流は、不純物イオンの存在によって、実効的な衝突周波数が増加し、ほぼ $1/Z_{\text{eff}}$ 小さくなる。

4.5 不純物イオンのドリフト波不安定性

不純物イオンの密度勾配があると、2成分プラズマ中では存在しなかった不純物ドリフト波の不安定性が起りうる。2成分プラズマでは発生する各種の不安定性によって、磁界中における荷電粒子の拡散速度は古典理論(新古典理論)に比べて非常に大きくなる可能性がある²¹⁾。不純物イオン輸送に関しても、もし不純物ドリフト波が不安定であれば、これまでに述べてきた古典的(新古典的)な輸送理論に比べて、不純物イオンの輸送を増大したり、その性質を変化させたりする可能性がある。以下では、この不純物ドリフト波の安定性を調べる。

電子、プラズマ・イオン(陽子)及び不純物イオンからなる3成分プラズマを考える。この不安定性には磁力線の曲率の効果は重要でないので、均一磁場配位(磁界は z 方向にあるとする)の場合を考える。プラズマの密度勾配は x 方向にあり、電気的中性の条件より

$$n_e(x) = n_i(x) + Z n_I(x) \quad (4.63)$$

となっている。簡単の為に、不純物イオンの数は少なく

$$n_i > Z^2 n_I \quad (4.64)$$

が成立するとする。又、異なるイオンの間の温度の緩和は早いので各々のイオン温度は等しくなっている($T_i = T_I$)とする。密度、静電ポテンシャル等の揺動として

$$\tilde{n}, \tilde{\phi} \propto \exp i(k_y y + k_z z - \omega t) \quad (4.65)$$

の型を考える。又、 $k_x (dn/dx)^{-1} \gg 1$ として、 $\tilde{n}, \tilde{\phi}$ の x 座標に対する依存性は無視する。

さらに、波の磁力線方向の位相速度として

$$v_{Ti}^2 \ll \left(\frac{\omega}{k_z} \right)^2 \ll v_{Ti}^2 \quad (4.66)$$

の範囲のものを考える。Coppi 等²²⁾は、無衝突型不安定性について解析を行った。即ち、プラズマ・イオンの衝突周波数 ν_{ii} は小さいとして、

$$\nu_{ii}^2 \ll k_z^2 v_{Ti}^2 \quad (4.67)$$

の場合を考える。彼等は、衝突項は無視し、線形化した Vlasov 方程式を解いて分散式を求めた。その結果は、不純物イオンの量が少ないという (4.64) 式の条件のもとでは

$$\text{Re } \omega \simeq \frac{Z^2 n_I}{(1+\tau) n_i} \omega_{nI} = \omega_0 \quad (4.68)$$

及び

$$\text{Im } \omega \simeq - \frac{\sqrt{\pi}}{1+\tau} \frac{\omega_0 \omega_{ni}}{k_z v_{Ti}} \quad (4.69)$$

但し

$$\omega_{ni} \equiv - \frac{T_j}{e_j B n_j} \frac{dn_j}{dx}, \quad j = i, I$$

$$\tau \equiv \frac{n_e T_i}{n_i T_e}$$

となる。不安定となる条件は

$$\frac{dn_i}{dx} \cdot \frac{dn_I}{dx} < 0 \quad (4.70)$$

である。従って、不純物イオンが外部からプラズマ柱に入ってきた時、上の条件を満たし、不純物ドリフト波が励起され、不純物イオンは古典理論や新古典理論 (§ 4.1 及び § 4.2 参照) による評価よりも早くプラズマ内部に侵入していくと考えられる。

この不安定性は不純物ドリフト波不安定性 (Impurity Drift Mode) と呼ばれる。無衝突型の場合、この波を励起する機構はプラズマ・イオンの逆ランダウ減衰である。以下では、この不純物ドリフト波に対する散逸及び捕捉粒子の効果を調べる。最初にプラズマ・イオンは衝突が充分に多く MHD 方程式系⁸⁾で取り扱えるとして散逸の効果を調べる。即ち、プラズマ・イオンの衝突周波数 ν_{ii} が

$$\nu_{ii}^2 \gg k_z^2 v_{Ti}^2 \quad (4.71)$$

の条件を満たしているものとする。電子の応答は、(4.66) の波を考えているので、ボルツマン分布

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_e} = \frac{e\tilde{\phi}}{T_e} \quad (4.72)$$

とすることが出来る。プラズマ・イオンについては、連続の式及び磁力線方向の運動方程式を線形化して

$$\omega \frac{\tilde{n}_i}{n_i} - \omega_{ni} \frac{e\tilde{\phi}}{T_i} - k_{11} \tilde{v}_z = 0 \quad (4.73)$$

及び

$$\begin{aligned} & \omega_{ni} m_i \tilde{v}_{zi} \\ & = k_z (T_i \tilde{n}_i + n_i \tilde{T}_i) - i(k_z^2 \mu_{11} + k_y^2 \mu_{\perp}) \tilde{v}_{zi} + \tilde{R} \end{aligned} \quad (4.74)$$

但し

$$\begin{aligned} \mu_{11} & \simeq \frac{1.28 n_i T_i}{\nu_{ii}} \\ \mu_{\perp} & \simeq 1.2 \frac{\nu_{ii} n_i T_i}{\omega_{ci}^2} \end{aligned}$$

を得る。ここで \tilde{R} は(4.13)式で与えられる異なるイオンの間の衝突による摩擦力である。不純物イオンは十分に重いとして

$$\tilde{v}_{zI} = 0 \quad (4.75)$$

とすると \tilde{R} は

$$\tilde{R} = -\sqrt{Z} \frac{Z^2 n_I}{n_i} m_i n_i \nu_{ii} \tilde{v}_{zi}$$

で表わされる。上式を用いると、(4.74)式は

$$(\omega + i\mu_{\text{eff}}) \tilde{v}_{zi} = \frac{k_z T_i}{m_i} \left(\frac{\tilde{n}_i}{n_i} + \frac{\tilde{T}_i}{T_i} + \frac{e\tilde{\phi}}{T_i} \right) \quad (4.76)$$

但し

$$\mu_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{m_i n_i} (k_z^2 \mu_{11} + k_y^2 \mu_{\perp}) + \sqrt{Z} \frac{Z^2 n_I}{n_i} \nu_{ii}$$

と書ける。エネルギー・バランスの式を線形化して \tilde{v}_{zi} の場合と同様に \tilde{T}_i に対して

$$\left(\frac{3}{2} \omega + i\chi_{\text{eff}} \right) \frac{\tilde{T}_i}{T_i} = \frac{3}{2} \omega_T \frac{e\tilde{\phi}}{T_i} + k_z \tilde{v}_{zi} \quad (4.77)$$

但し

$$\omega_T \equiv -\frac{k_y}{eB} \frac{dT_i}{dx}$$

$$\chi_{\text{eff}} \equiv \frac{k_z^2 \chi_{11}}{n_i} + \frac{k_y^2 \chi_{\perp}}{n_i}$$

を得る。ここで χ_{11} と χ_{\perp} は磁力線方向及びそれに垂直方向の熱伝導率で

$$\chi_{11} = \frac{3.9 n_i T_i}{m_i \nu_{ii}}$$

$$\chi_{\perp} = \frac{2 \nu_{ii} n_i T_i}{m_i \omega_{ci}^2}$$

で与えられる⁸⁾。 μ_{eff} 及び χ_{eff} は $(k_y \rho_i)^2 \ll 1$, $Z^2 n_I / n_i \ll 1$ の条件のもとではそれぞれ近似的に

$$\mu_{\text{eff}} \simeq \frac{k_z^2 \mu_{11}}{m_i n_i} \quad (4.78)$$

$$\chi_{\text{eff}} \simeq \frac{k_z^2 \chi_{\perp}}{n_i} \quad (4.79)$$

となる。(4.73) 式、(4.76) 式及び(4.77) 式を用いてプラズマ・イオンの密度の揺動

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_i} \simeq - \left\{ 1 + i \frac{\mu_{\text{eff}} \omega_{ni}}{k_z^2 T_i / m_i} + i \frac{\omega_{ni} (1 - \frac{3}{2} \eta)}{\chi_{\text{eff}}} \right\} \frac{e \tilde{\phi}}{T_i} \quad (4.80)$$

但し

$$\eta \equiv \frac{d \ell^n T_i}{d \ell^n n_i}$$

を得る。

不純物イオンは磁力線に垂直方向に

$$\tilde{v}_{xI} = -\frac{i k_y \tilde{\phi}}{B} \quad (4.81)$$

及び

$$\tilde{v}_{yI} = -i k_y D_I \left(\frac{\tilde{n}_I}{n_I} - Z \frac{\tilde{n}_i}{n_i} \right) \quad (4.82)$$

但し

$$D_I \equiv \frac{\sqrt{2} \nu_{ii} m_i T_i}{e^2 B^2}$$

で運動する。 v_{xI} は $E \times B$ ドリフト運動, v_{yI} はプラズマ・イオンとの衝突で不純物イオンが y 方向に拡散することを示す。(4.82) 式は異なるイオン同志の衝突による粒子束の表式(4.1)より得られる。(4.75) 式, (4.81) 式及び(4.82) 式を連続の式

$$-i \omega \tilde{n}_I + \text{div} (n_I \vec{v}_I) = 0$$

に代入することにより

$$\frac{\tilde{n}_I}{n_I} \simeq \frac{\omega_{nI} - i k_y^2 D_I}{\omega + i k_y^2 D_I} \quad (4.83)$$

を得る。

準中性条件 ($k^2 \lambda_D^2 \ll 1$, λ_D はデバイ長) より

$$\tilde{n}_e = \tilde{n}_i + Z \tilde{n}_I$$

である。上式に(4.72) 式, (4.80) 式及び(4.83) 式を代入すると分散式

$$1 + \tau = \frac{\omega_{nI} - i k_y^2 D_I}{\omega + i k_y^2 D_I} \frac{Z^2 n_I}{n_i} - i \frac{\mu_{\text{eff}} \omega_{ni}}{k_z^2 T_i / m_i} - i \frac{\omega_{ni} (1 - \frac{3}{2} \eta)}{\chi_{\text{eff}}} \quad (4.84)$$

但し

$$\tau \equiv \frac{n_e T_i}{n_i T_e}$$

を得る。上式より

$$\begin{aligned} \text{Re } \omega &\simeq \omega_0 \\ \text{Im } \omega &\simeq -\mu_{\text{eff}} \frac{\omega_0 \omega_{ni}}{k_z^2 T_i / m_i} - \left(1 - \frac{3}{2} \eta\right) \frac{\omega_0 \omega_{ni}}{\chi_{\text{eff}}} - k_y^2 D_I \end{aligned} \quad (4.85)$$

但し

$$\omega_0 \equiv \frac{Z^2 n_I}{(1 + \tau) n_i} \omega_{nI}$$

を得る。上式の第1項は近似的に

$$-\mu_{\text{eff}} \frac{\omega_0 \omega_{ni}}{k_z^2 T_i / m_i} \simeq -\frac{\omega_0 \omega_{ni}}{(1 + \tau) \nu_{ii}}$$

で表わされる。この項はプラズマ・イオンの磁力線方向の粘性による項で、無衝突型不安定性に対する(4.69)式の場合と同様に $\nabla n_i \cdot \nabla n_I < 0$ の時不安定にきく。又、MHD方程式の適用限界である $\nu_{ii} \rightarrow k_z v_{Ti}$ の極限をとると、この項は、無衝突型不安定性の成長率(4.69)式に一致する。又、第2項はイオンの磁力線方向の熱伝導率が有限であることにより生ずる項で

$$\left(1 - \frac{3}{2} \eta\right) \frac{dn_i}{dx} \cdot \frac{dn_I}{dx} < 0$$

の時不安定にきく。

第3項はプラズマ・イオンとの衝突で不純物イオンが拡散することによる安定化項である。第1項、第2項と第3項の大きさを比べることにより、不純物ドリフト波の安定化の十分条件として

$$\frac{n_I}{n_i} < \frac{\nu_{ii} r_n^2}{Z v_{Ti}^2} \tag{4.86}$$

でありかつ

$$\frac{n_I}{n_i} < \frac{k_z^2 r_n^2}{Z} \tag{4.87}$$

但し

$$r_n \sim \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}\right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}\right)^{-1}$$

を得る¹¹⁾。さらに、条件式(4.86)は成長率が(4.69)式で与えられている無衝突型不安定性に対する安定化条件としても適用出来る。上の解析から、不純物ドリフト波不安定性は、不純物イオンの数が十分に少なければ安定化されることが判る。

衝突周波数が十分に小さくなり、バナナ領域

$$\nu \ll \epsilon^{3/2} \frac{v_T}{Rq} \tag{4.88}$$

に入ると、磁力線方向にゆっくり運動する荷電粒子はトロイダル磁場の弱いトーラスの外側に捕捉され、いわゆるバナナ軌道を描く。この領域では捕捉粒子の存在がプラズマの輸送過程(第2章参照)や安定性に大きく影響してくる。例えば、プラト領域では電子の逆ランダウ減衰で不安定となる無衝突ドリフト波は、バナナ領域に入ると、捕捉電子のクーロン衝突によって起こる散逸型捕捉電子不安定性²³⁾に移行する。以下では、プラズマ・イオンがバナナ領域にあるとし、この領域における不純物ドリフト波不安定性について考えてみる。電子及び不純物イオンの密度の揺動は、衝突の効果を見捨ると、(4.72)式及び(4.83)式より、それぞれ

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_e} = \frac{e \tilde{\phi}}{T_e} \tag{4.89}$$

及び

$$\frac{\tilde{n}_I}{n_I} \simeq \frac{\omega_{nI}}{\omega} \frac{Z e \tilde{\phi}}{T_I} \quad (4.90)$$

で与えられる。プラズマ・イオンの密度の揺動は文献(23)の電子に対して与えられた結果を用いて

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_e} = - \frac{e \tilde{\phi}}{T_e} + \sqrt{\epsilon} \left\langle \frac{\omega - \omega_T}{\omega + i \nu_{eff}} \right\rangle \frac{e \tilde{\phi}}{T_e} \quad (4.91)$$

但し

$$\omega_T \equiv - \frac{k_y T_i}{e B n_i} \frac{dn_i}{dx} \left\{ 1 + \eta \left(\frac{m_i v^2}{2 T_i} - \frac{3}{2} \right) \right\}$$

$$\nu_{eff} \equiv \frac{\nu_{ii}}{\epsilon} \left(\frac{2 T_i}{m_i v^2} \right)^{3/2}$$

で与えられる。ここで $\langle \rangle$ はマックスウェル分布での平均を表わす。準中性条件より分散式は

$$\omega \simeq \omega_0 + \sqrt{\epsilon} \frac{\omega_0}{1 + \tau} \left\langle \frac{(\omega_0 - \omega_T)(\omega_0 - i \nu_{eff})}{\omega_0^2 + \nu_{eff}^2} \right\rangle \quad (4.92)$$

となる¹²⁾。簡単の為、 $\eta = 0$ ($dT_i/dr = 0$) の場合を考える。(4.92)式の成長率は $\nu_{ii}/\epsilon \gg \omega_0$ に対して

$$\text{Im } \omega \simeq - \frac{\epsilon^{3/2} \omega_0^2}{\nu_{ii}} \frac{n_i}{Z n_I} \frac{d \ln n_i}{d \ln n_I} \quad (4.93)$$

$\nu_{ii}/\epsilon \ll \omega_0$ に対して

$$\text{Im } \omega \simeq - \frac{\nu_{ii}}{\sqrt{\epsilon}} \frac{n_i}{Z n_I} \frac{d \ln n_i}{d \ln n_I} \quad (4.94)$$

となる。どちらの場合も不安定となるのは

$$\frac{dn_i}{dx} \cdot \frac{dn_I}{dx} < 0$$

の場合である。(4.93)式、(4.94)式の成長率の値は、(4.69)式の無衝突型の成長率に比べて非常に大きくなりうる。又、この領域では、衝突周波数が小さい為、(4.85)式の第3項の不純物イオンの散乱による安定化効果は小さくなり、期待出来ない。磁力線方向の波長を Rq 程度とした時の全領域での成長率の様子は図7に示してある。但し、 $\nu_{ii} > k_z v_{Ti}$ の領域では(4.69)式のイオンの粘性による項のみを示してある。

4.6 結論

この章では、軸対称トーラス系における不純物イオン軸送の定性的性質を、プラズマの角運動量の保存則を用いて調べた。又、リップル拡散の表式を、多種類のイオンが混在する場合に拡張し、不純物イオンの粒子束を数値的に求めた。この章で得られた主な結論は、

i) 軸対称トーラス系における不純物イオンの輸送は均一磁場中の場合と同様に、粒子束は自分自身の密度勾配だけではなく、プラズマ・イオンの勾配にも関係する。すなわち

$$\Gamma_I \propto \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr} - \frac{1}{Z n_I} \frac{dn_I}{dr}$$

となる。例えば、外部から入ってきた不純物イオンはプラズマ・イオンの密度勾配の影響でプラズマ柱の内側に入っていく。又、拡散係数は均一磁場中の場合に比べて、トロイダル効果によって、MHD領域では q^2 倍、バナナ領域では $q^2/\epsilon^{3/2}$ 倍大きくなる。

ii) 重い不純物イオン ($m_I/m_i \geq \theta^2 r_n^2/\rho_i^2$) に対しては、両極性の径電界の輸送過程への影響は軸対称トーラス系においても無視できない。十分に重い不純物イオンの粒子束が逆転する場合もある。

iii) 非軸対称トーラス系でも両極性の径電界の効果によって i) で述べた性質が同様に成立する。

iv) 不純物イオンの量が十分に少なく

$$\frac{n_I}{n_i} < \frac{\nu_{ii} r_n^2}{Z v_i^2}$$

であれば、散逸型及び無衝突型の不純物ドリフト波は安定化される。不純物ドリフト波が不安定な場合 ($\nabla n_I \cdot \nabla n_i < 0$) には、不純物イオンの輸送を増大させる可能性がある。

第四章の参考文献

- (1) R.F. Post, Plasma Phys. 3 (1961) 273.
- (2) D.M. Meade, Nuclear Fusion 14 (1974) 289.
- (3) V.A. Vershkov and S.V. Mirnov, Nuclear Fusion 14 (1974) 383.
- (4) C.L. Longmire and M.N. Rosenbluth, Phys. Rev. 103 (1956) 507.
- (5) J.B. Taylor, Phys. Fluids 4 (1961) 1142.
- (6) T. Tuda and M. Tanaka, JAERI-M 5376 (1973) In Japanese.
- (7) T. Tuda and M. Tanaka, J. Phys. Soc. Japan 38 (1975) 1128.
- (8) T. Tuda, JAERI-M 6096 (1975) In Japanese.
- (9) T. Tuda, JAERI-M 6965 (1977) In Japanese.
- (10) T. Tuda, JAERI-M 6171 (1975) In Japanese.
- (11) T. Tuda and M. Tanaka, J. Phys. Soc. Japan 43 (1977) 1407.
- (12) T. Tuda and M. Tanaka, J. Phys. Soc. Japan 38 (1975) 1792.
- (13) S.I. Braginskii, in "Reviews of Plasma Physics" ed. M.A. Leontovich, (Consultant Bureau, 1965, New York) Vol 1. p.205
- (14) J.W. Connor, Plasma Phys. 15 (1973) 765.
- (15) S.P. Hirshmann, D.J. Sigmar and J.F. Clarke, Phys. Fluids 19 (1976) 155.
- (16) S.P. Hirshmann, Phys. Fluids 19 (1976) 656.
- (17) T.E. Stringer, Phys. Fluids 13 (1970) 1586.
- (18) B.J. Greene, Nuclear Fusion 12 (1972) 475.
- (19) T.E. Stringer, Nuclear Fusion 12 (1972) 689.
- (20) J.W. Connor and R.J. Hastie, Nuclear Fusion 13 (1973) 221.
- (21) B.B. Kadomtsev, "Plasma Turbulence" (Academic Press, 1965, London).
- (22) B. Coppi, H.P. Furth, M.N. Rosenbluth and R.Z. Sagdeev, Phys. Rev. Letters 17 (1966) 337.
- (23) B.B. Kadomtsev and O.P. Pogutse, Nuclear Fusion 11 (1971) 67.

5. 結 言

本論文では、トカマク型核融合装置における径電界の緩和と不純物イオンの輸送の機構について理論的に研究した。

第二章では、軸対称トーラス系においてプラズマの角運動量が保存されることを利用し、両極性拡散となる為には、プラズマの磁力線方向の流れが定常状態にあることが必要であることを示した。

第三章では、プラズマの角運動量が、軸対称トーラス系において保存されることを用いて、軸対称トーラス系における径電界の緩和の機構について解析した。径電界によるプラズマ柱のトロイダル方向への回転がイオン-イオン間のクーロン衝突によって磁力線方向の流れ（トロイダル方向の回転）に変換される。この過程において径方向に電流が流れ、径電界が緩和される。トロイダル磁場にリップルがあれば、リップル拡散によってトロイダル方向へのプラズマの回転も緩和される。

第四章では、軸対称トーラス系における不純物イオン輸送の定性的性質を、プラズマの角運動量保存則を用いて調べた。又、不純物イオンの粒子束を数値的に求めた。いずれの場合にも、高電荷の不純物イオンはプラズマ柱の中心部に集中する傾向があることが示された。

本研究において今後に残された問題点について述べる。本研究では、荷電粒子のラーマー半径がプラズマ半径に比べて十分に小さく、分布関数はマックスウェル分布に近い現象を取り扱っている。しかし、非常に大出力の中性粒子入射加熱、TCT炉、あるいは核融合炉における α 粒子の存在等の場合の様に、高エネルギーの荷電粒子の密度が大きい場合には、分布関数はマックスウェル分布で近似出来なくなるし、静電ポテンシャル ϕ も磁気面上で一定でなくなる。このような場合に、プラズマの平衡（分布関数）がどのように形成され、両極性の径電界や不純物イオンの輸送がどうなるかは今後の問題である。又、中性粒子入射加熱は、径電界を誘起するとともに、不純物イオンの輸送に影響を与える可能性がある。この点についても解析を行う必要がある。

謝 辞

本論をまとめるに当たり、終始懇切多大の御指導と御鞭撻を頂いた京都大学工学部電子工学教室板谷良平教授に心から感謝の意を表わします。又、名古屋大学プラズマ研究所百田弘教授には種々の御批判及び御助言を頂いた。ここに厚く感謝いたします。

本研究は、日本原子力研究所核融合研究部に於て田中正俊次長の御指導と種々の御配慮の結果達せられたものである。ここに改めて感謝いたします。終始、御対話及び御助言をしていただいた理論解析研究室の皆様へ感謝いたします。

5. 結 言

本論文では、トカマク型核融合装置における径電界の緩和と不純物イオンの輸送の機構について理論的に研究した。

第二章では、軸対称トーラス系においてプラズマの角運動量が保存されることを利用し、両極性拡散となる為には、プラズマの磁力線方向の流れが定常状態にあることが必要であることを示した。

第三章では、プラズマの角運動量が、軸対称トーラス系において保存されることを用いて、軸対称トーラス系における径電界の緩和の機構について解析した。径電界によるプラズマ柱のトロイダル方向への回転がイオン-イオン間のクーロン衝突によって磁力線方向の流れ（トロイダル方向の回転）に変換される。この過程において径方向に電流が流れ、径電界が緩和される。トロイダル磁場にリップルがあれば、リップル拡散によってトロイダル方向へのプラズマの回転も緩和される。

第四章では、軸対称トーラス系における不純物イオン輸送の定性的性質を、プラズマの角運動量保存則を用いて調べた。又、不純物イオンの粒子束を数値的に求めた。いずれの場合にも、高電荷の不純物イオンはプラズマ柱の中心部に集中する傾向があることが示された。

本研究において今後に残された問題点について述べる。本研究では、荷電粒子のラーマー半径がプラズマ半径に比べて十分に小さく、分布関数はマックスウェル分布に近い現象を取り扱っている。しかし、非常に大出力の中性粒子入射加熱、TCT炉、あるいは核融合炉における α 粒子の存在等の場合の様に、高エネルギーの荷電粒子の密度が大きい場合には、分布関数はマックスウェル分布で近似出来なくなるし、静電ポテンシャル ϕ も磁気面上で一定でなくなる。このような場合に、プラズマの平衡（分布関数）がどのように形成され、両極性の径電界や不純物イオンの輸送がどうなるかは今後の問題である。又、中性粒子入射加熱は、径電界を誘起するとともに、不純物イオンの輸送に影響を与える可能性がある。この点についても解析を行う必要がある。

謝 辞

本論をまとめるに当たり、終始懇切多大の御指導と御鞭撻を頂いた京都大学工学部電子工学教室板谷良平教授に心から感謝の意を表わします。又、名古屋大学プラズマ研究所百田弘教授には種々の御批判及び御助言を頂いた。ここに厚く感謝いたします。

本研究は、日本原子力研究所核融合研究部に於て田中正俊次長の御指導と種々の御配慮の結果達せられたものである。ここに改めて感謝いたします。終始、御対話及び御助言をしていただいた理論解析研究室の皆様へ感謝いたします。

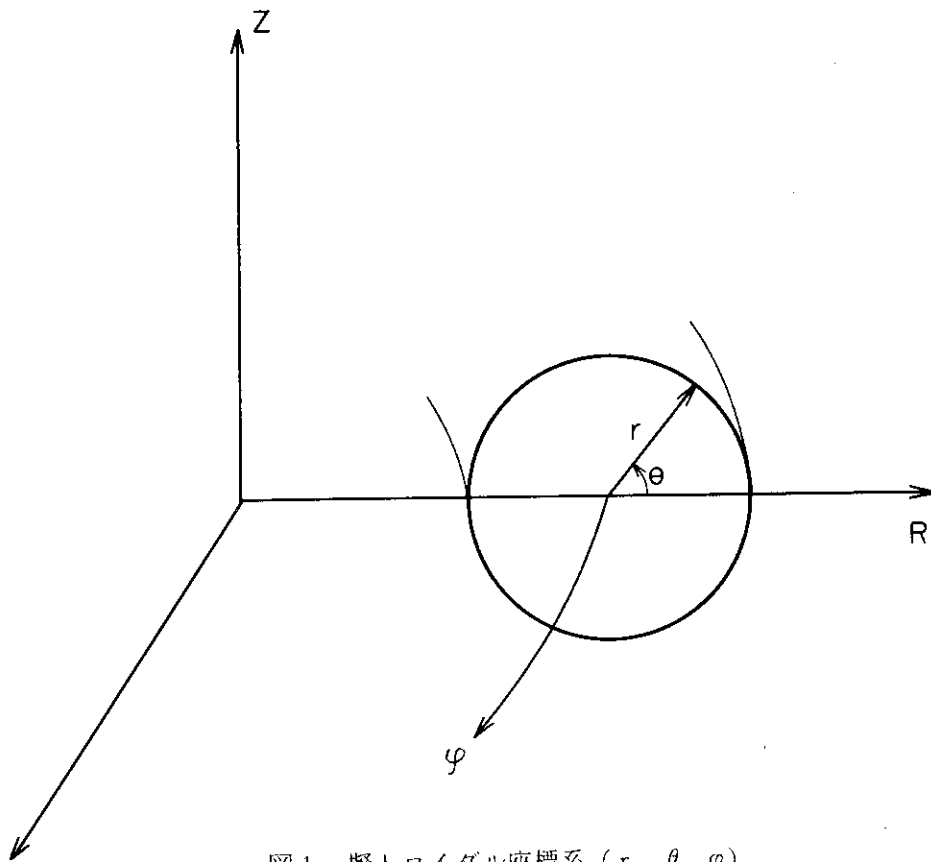


図1 擬トロイダル座標系 (r, θ, φ) .

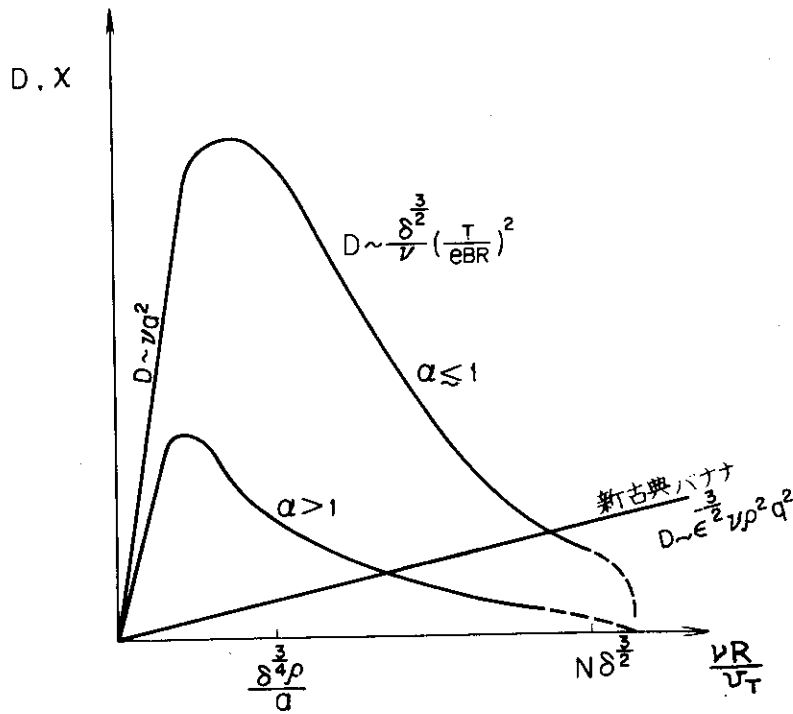


図2 リップル拡散, $B = B_0 (1 + \delta \cos N\varphi - \epsilon \cos \theta)$,
 $a \equiv \epsilon / Nq \delta$.

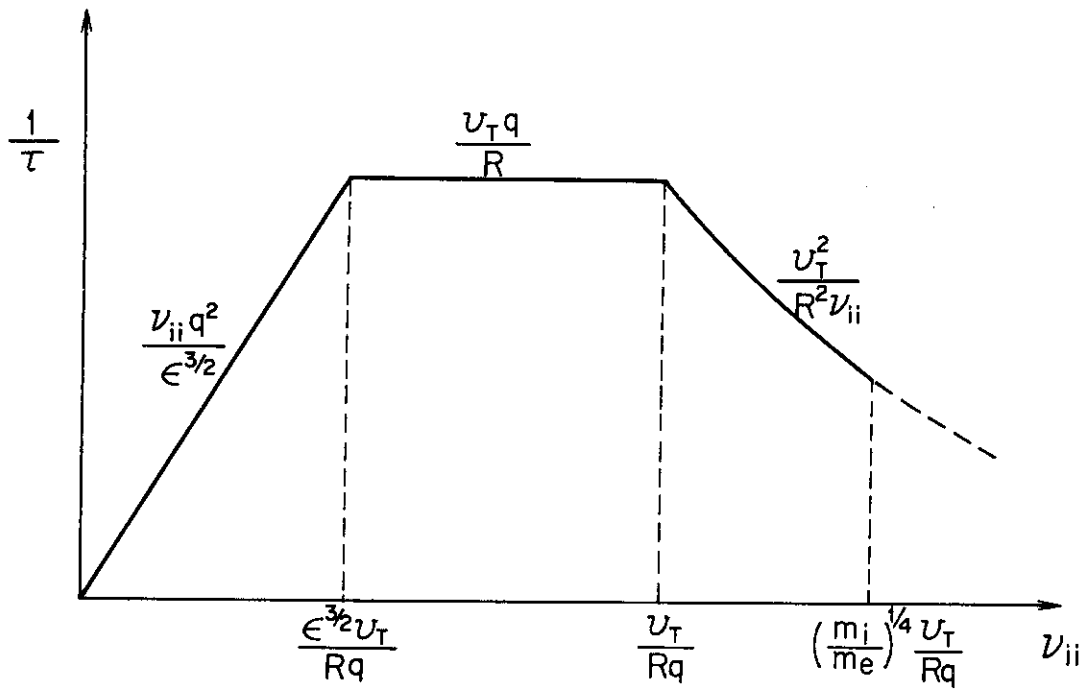


図3 軸対称トーラス系における径電界の緩和時間 τ

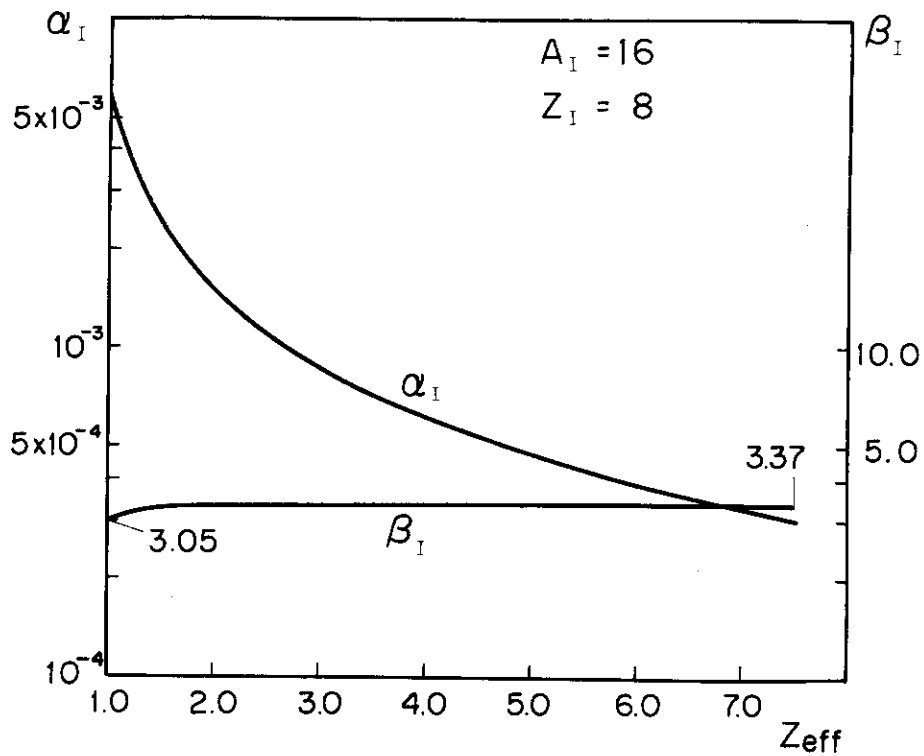


図4 リップル拡散による不純物イオンの粒子束,
 $A = 16, Z = 8.$

$$\Gamma_I = - \frac{\delta^{3/2} G(\alpha) n_I}{\nu_I} \left(\frac{T}{e B_0 R} \right)^2 \alpha_I \left(\frac{1}{n_I} \frac{dn_I}{dr} + \frac{e_I}{T} \frac{d\phi}{dr} + \frac{\beta_I}{T_I} \frac{dT_I}{dr} \right)$$

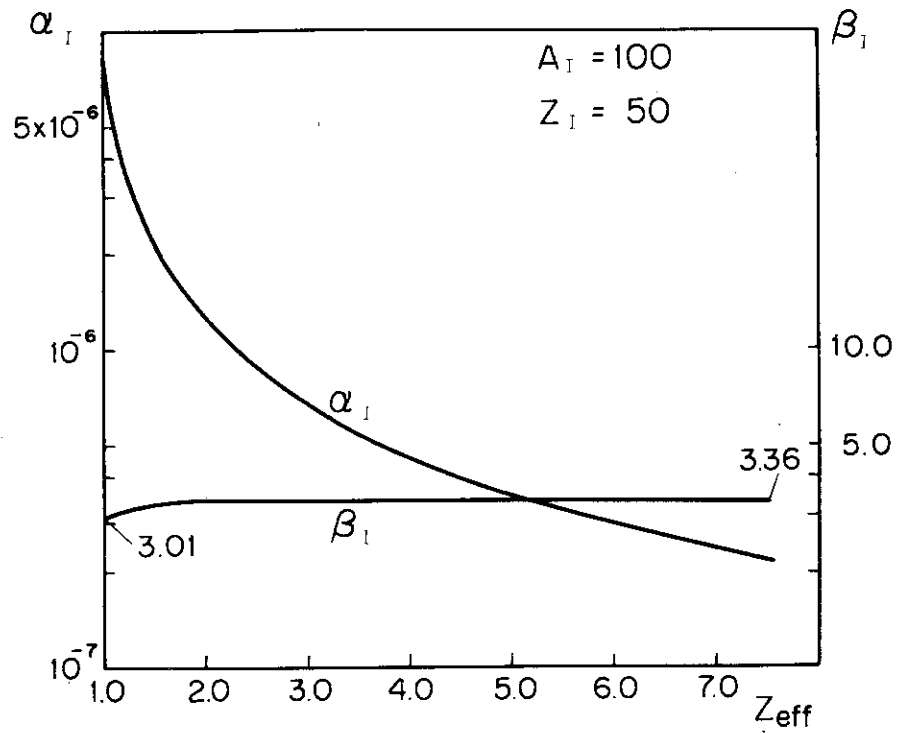


図5 リップル拡散による不純物イオンの粒子束,
 $A = 100, Z = 50.$

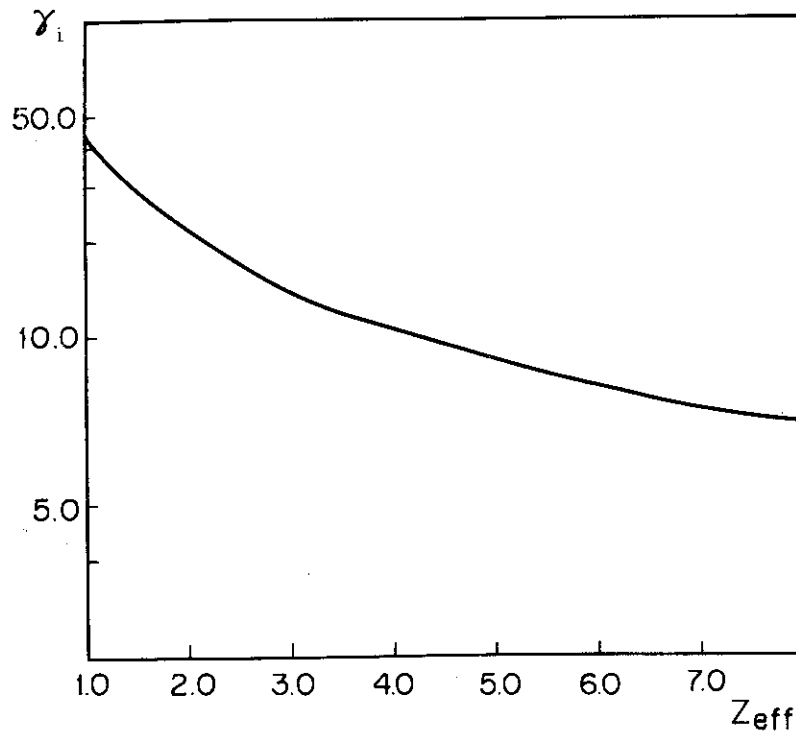


図6 不純物イオンが存在する場合のリップルによるイオンの熱流,

$$Q = - \frac{\partial^{3/2} G(\alpha) n_i}{\nu_i} \left(\frac{T}{eBR} \right)^2 r_i \frac{dT}{dr}$$

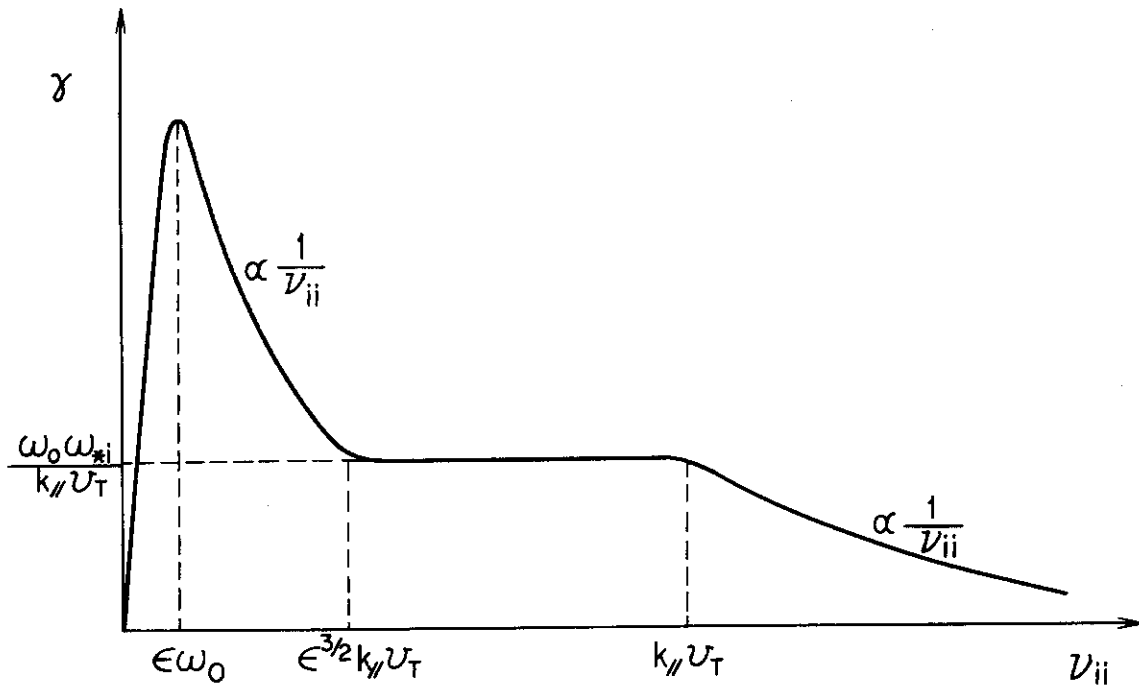


図7 不純物ドリフト破不安定性 ($k_{i1} \sim 1/Rq$) の成長率 γ

附録A 磁化プラズマの誘電率

磁化プラズマ中における磁界に垂直方向の電界の緩やかな時間変化を記述する方程式を導出する。ここで、緩やかな時間変化とは

$$\frac{1}{\omega_{ci}} \frac{\partial E}{\partial t} \ll 1 \quad (\text{A-1})$$

ω_{ci} ; イオンのサイクロトロン周波数

を意味する。

座標系としては、直角座標 (x, y, z) を用いる。均一で強い磁界 \vec{B} が z 方向にあり、電界 \vec{E} は x 方向であるとする。電界の時間変化を記述する為には、荷電粒子の分極ドリフト運動によるプラズマの実効的な誘電率の増加を考慮しなければならない。 x 方向の分極ドリフト運動の大きさは

$$v_{Pj} = \frac{1}{\omega_{cj} B} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad j = e, i \quad (\text{A-2})$$

で表わされる。この分極ドリフト運動は、イオンと電子で大きさと向きが異なるので、電界の時間変化があると、それに応じて分極電流が流れる。

ポアソン方程式

$$\text{div } \vec{D} = \rho_c \quad (\text{A-3})$$

但し

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\epsilon_0 \equiv \frac{10^7}{4\pi c^2}; \quad \text{真空の誘電率}$$

c ; 光速

ρ_c ; 電荷密度

\vec{P} ; 電気分極

の両辺の時間微分をとり、電荷の連続の式を用いると

$$\text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\text{div } \vec{J} + \sigma_s \quad (\text{A-4})$$

となる。ここで、 \vec{J} はプラズマ電流、 σ_s は外部から単位時間、単位体積当り系に導入される電荷を表わす。

電気分極 P の x 成分の時間変化は (A-2) 式を用いて

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} = \sum_j e_j n_j v_{pj} = \sum_j \frac{e_j n_j}{\omega_{cj} B} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

で与えられる。従って、電束の時間変化は

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \left(\epsilon_0 + \sum_j \frac{e_j n_j}{\omega_{cj} B} \right) \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (\text{A-5})$$

と表わされる。ここで、(2.10)式の $\partial E_x / \partial t$ にかかっている係数は、磁化プラズマが持つ実効的な誘電率と考えられる。低ベーター・トーラス装置における一般的なプラズマ・パラメータでは第1項の ϵ_0 に比べて第2項がはるかに大きくなる。例えば $n = 5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $B = 5 \text{ T}$ の水素プラズマでは、第2項は 3.3×10^{-9} であるが、 ϵ_0 の値は 8.8×10^{-12} である。

この磁化プラズマにおける実効的な誘電率の増加は電界が持つエネルギーについての考察からも理解できる。

真空中では、電界 \vec{E} は単位体積当り

$$W_0 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

を持つ。つまり、真空中に電界 \vec{E} を加えるのに必要なエネルギーが単位体積当り W_0 である。これに対し、磁化プラズマ中では、磁界に垂直方向に電界が存在すると荷電粒子は $E \times B$ ドリフト運動を行う。このドリフト運動によるプラズマの運動エネルギーは単位体積当り

$$W_{E \times B} = \frac{1}{2} \sum_j m_j n_j \left(\frac{E}{B} \right)^2$$

である。従って、プラズマ中の電界はエネルギーとして、単位体積当り

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 + \sum_j \frac{m_j n_j}{B^2} \right) E^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 + \sum_j \frac{e_j n_j}{\omega_{cj} B} \right) E^2 \end{aligned}$$

を持つ。 W_0 と W を比べることによって、磁化プラズマでは、実効的な誘電率が ϵ_0 より増加するのが判わる。

(A-5) 式を (A-4) 式に代入し、 x で1回積分を行うと

$$\left(\epsilon_0 + \sum_j \frac{e_j n_j}{\omega_{cj} B} \right) \frac{\partial E_x}{\partial t} = - \sum_j e_j \Gamma_j + \int^x \sigma(x) dx \quad (\text{A-6})$$

が得られる。ここで Γ は粒子束である。あるいは、 $m_e \ll m_i$, $\epsilon_0 \ll en / \omega_{ci} B$ の関係を用いると

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} \simeq - \frac{B^2}{m_i n} \sum_j e_j \Gamma_j + \frac{B^2}{m_i n} \int^x \sigma(x) dx \quad (\text{A-7})$$

となる。上式が、求める電界の時間変化を記述する式である。高アスペクト比 ($\epsilon \ll 1$) の円断面トカマク・プラズマの場合には、(A-7)式の代わりに

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = - \frac{B_0^2}{m_i n} \sum_j e_j \Gamma_j + \frac{B_0^2}{m_i n r} \int_0^r \sigma_s dr \quad (\text{A-8})$$

を用いればよい。

附録B 旋回中心の運動

Kinetic Equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \nabla_v f = C(f) \quad (\text{B-1})$$

を, $\rho/r \ll 1$, $\nu/\omega_c \ll 1$ の近似のもとに変形し低ベクター・軸対称トラス系における Drift Kinetic Equation を導出する。但し

$$\left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dr} \right)^{-1} \sim r$$

とする。

荷電粒子の旋回中心の運動は

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{n}}{eB} \times \left\{ \mu \nabla B + v_{\perp}^2 (\vec{n} \cdot \nabla \vec{n}) + e \nabla \phi \right\} \quad (\text{B-2})$$

但し

$$\vec{n} = \frac{\vec{B}}{B}$$

で与えられる。ここでは、低ベクター・プラズマについて考えているので、 $\text{rot } \vec{B} = 0$ とすることが出来る。従って (B-2) 式は

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{n}}{eB} \times \left\{ \left(\mu + \frac{m v_{\perp}^2}{B} \right) \nabla B + e \nabla \phi \right\}$$

となる。荷電粒子の運動に伴って μ は保存されるから

$$\begin{aligned} \vec{v}_D &= \frac{\vec{n}}{eB} \times \left\{ \frac{m v_{\perp}^2}{B} \nabla B + \nabla (\mu B + e \phi) \right\} \\ &= \frac{\vec{n}}{eB} \times \left\{ \frac{m v_{\perp}^2}{B} \nabla B + \nabla \left(\kappa - \frac{m v_{\perp}^2}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

と書ける。上式で κ に関する項からの寄与を考える。

κ の粒子の軌道に沿っての変動

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = e v_{\perp} E_{\parallel} + e \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{B-4})$$

のうち、第1項は \vec{v}_D には寄与しない。第2項から分極ドリフト

$$\vec{v}_p = \frac{1}{\omega_c B} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \times \nabla \phi)$$

が生じる。しかし、電界の時間変化が荷電粒子のラーマー周期に比べて十分にゆっくりしていれば、この分極ドリフト速度は小さく無視しうる。実際、この論文で取り扱っている問題では、電界の時間変化の早さは、せいぜい $\partial/\partial t \sim O(\nu_i)$ であり、トカマクのプラズマ・パラメータでは十分に小さな値となる。

従って (B-3) 式は

$$\begin{aligned} \vec{v}_D &= -\frac{m v_{11} \vec{n}}{e B} \times \left(\nabla v_{11} - v_{11} \frac{\nabla B}{B} \right) \\ &= -\frac{m}{e} v_{11} \vec{n} \times \nabla \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \end{aligned}$$

となる。上式を擬トロイダル座標 (r, θ, φ) でよければ、

$$\begin{aligned} v_{Dr} &= \frac{m v_{11}}{e r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \\ v_{D\theta} &= -\frac{m v_{11}}{e} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \end{aligned} \tag{B-5}$$

を得る。上式には、低ベータ-磁場配位における ∇B ドリフト、曲率ドリフト及び $E \times B$ ドリフトを含んでいる。

さて、Kinetic Equation (B-1) 式を

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial f}{r \partial \theta} + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \kappa} = C(f)$$

但し

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Theta v_{11} + v_{D\theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v_{Dr}$$

と書き変える。上式に (B-4), (B-5) 式を代入すると

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \kappa} + e E_{11} v_{11} \frac{\partial f}{\partial \kappa} + \frac{\Theta v_{11}}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$+ \frac{m v_{11}}{e r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f}{\partial r} - v_{11} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\} = C(f) \quad (\text{B-6})$$

となる。これが求める低ベーター・軸対称トーラス系における Drift Kinetic Equation である。

附録C プラズマの角運動量

低ベーター・軸対称トラス系におけるプラズマの角運動量保存則を $O(\rho/r)$ の精度で調べる。但し、 ρ はラーマー半径、 r はプラズマ半径で

$$\left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr}\right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dr}\right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^{-1} \sim r$$

であるとする。軸対称トラス系では、Drift Kinetic Equation は (B-6) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \kappa} + e E_{11} v_{11} \frac{\partial f}{\partial \kappa} + \frac{\Theta v_{11}}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ + \frac{m v_{11}}{e r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\} = C(f) \end{aligned} \quad (C-1)$$

と表わすことが出来る。以下では、トロイダル電界 $E_{\varphi} \simeq E_{11}$ は十分に小さいとする。分布関数を小さなパラメーター、 ρ/r で展開し

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

と置く。近似の最低次では (C-1) 式は

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} = C(f_0) \quad (C-2)$$

となる。(C-2) 式の解としてマックスウェル分布

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{\kappa - e\Phi}{T} \right) \quad (C-3)$$

を選ぶ。但し、 n 、 T は r のみの関数で、 θ には依存しないものとする。 Φ は時刻 t に依存してもよいとする。密度 n 及び温度 T の時間変化は $O(\rho^2/r^2)$ の量であるので無視する。従って

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} &= \frac{e}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial t} f_0 \\ e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} &= - \frac{e}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial t} f_0 \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} = 0 \quad (C-4)$$

となる。

角運動量保存則を導出する為に、(C-1)式の両辺 $v_{11} h^2$ 担し $h = 1 + \epsilon \cos \theta$ を掛け、速度空間での積分を行い、 θ で平均する。左辺第1項及び第2項は(C-4)式より f_0 に関する項が消えるから

$$\oint \frac{h^2 d\theta}{2\pi} \int d^3v v_{11} \frac{\partial f_1}{\partial t} = n \frac{\partial U_{11}}{\partial t}$$

及び

$$\begin{aligned} e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \int d^3v v_{11} \frac{\partial f_1}{\partial \kappa} &= e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \iint_{\sigma} \frac{2\pi B d\mu d\kappa}{m^2 |v_{11}|} v_{11} \frac{\partial f_1}{\partial \kappa} \\ &= e \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sum_{\sigma} \int d\mu \frac{2\pi \sigma B}{m^2} (f_1)_{\kappa=e\Phi}^{\infty} = 0, \end{aligned}$$

但し

$$\sigma = \pm 1$$

となる。又、左辺第3項は

$$\int d^3v e E_{11} v_{11}^2 \frac{\partial f}{\partial \kappa} = - \frac{e E_{11} n}{m}$$

となる。左辺第4項は θ で部分積分を行うと

$$\begin{aligned} &\oint \frac{d\theta}{2\pi} \int d\kappa \int d\mu \sum_{\sigma} \frac{2\pi B_0}{m^2 |v_{11}|} v_{11}^2 h \frac{\partial}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ &= - \frac{e \theta B_0}{m} \oint \frac{d\theta}{2\pi} \int d^3v \frac{m v_{11}}{e r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) f \\ &= - \frac{e \theta B_0}{m} \oint \frac{h d\theta}{2\pi} \int d^3v v_{Dr} f \\ &= - \frac{e \theta B_0}{m} \Gamma \end{aligned}$$

となる。但し、 v_{Dr} は粒子の r 方向へのドリフト速度で、(B-5)式で与えられる。又、 Γ は半径方向への粒子束である。左辺第5項も同様に

$$\begin{aligned} &\oint \frac{d\theta}{2\pi} \int d^3v \frac{m v_{11}^2 h^2}{e r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{11}}{B} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \oint \frac{h d\theta}{2\pi} r v_{Dr} v_{11} f = \frac{1}{mr} \frac{\partial}{\partial r} r P \end{aligned}$$

但し

$$P \equiv m \oint \frac{h d \theta}{2 \pi} \int d^3 v v_{11} v_{Dr} f$$

となる。このPは、磁力線方向の運動量 ($\sim m n U_{11}$) が半径方向への粒子のドリフト運動 v_{Dr} で半径方向に輸送される割合を示す。我々が考えている問題では、プラズマの磁力線方向への平均流 U_{11} の大きさは $\rho v_T / r$ の程度であるから、Pは $O(\rho^2 / r^2)$ の量である。

上の各項から、軸対称トラスにおけるプラズマの角運動量保存則は

$$\begin{aligned} n_j \frac{\partial U_{11j}}{\partial t} - \frac{e_j n_j E_\varphi}{m_j} + \frac{1}{m_j r} \frac{\partial}{\partial r} r P_j - \frac{e \theta B_0}{m_j} \Gamma_j \\ = \sum_k \oint \frac{h^2 d \theta}{2 \pi} \int d^3 v v_{11} C_{jk} (f_j) \end{aligned} \quad (C-5)$$

と表わすことが出来る。

附録D リップル拡散

トロイダル磁場のリップルに捕捉された粒子の、粒子束及び熱流への寄与の表式を与える。リップルに捕捉された粒子の実効的な衝突周波数 ($\nu_{eff} \sim \nu/\delta$) がそのバナナ運動の周波数 ($\omega_b \sim N \delta v_T/R, N$; トロイダル・コイルの個数) より小さく、かつ、粒子のリップル損失によって分布関数がマックスウェル分布から大きくずれない為には、衝突周波数は

$$\frac{\delta^{3/4} \rho v_T}{r R} < \nu < \frac{N \delta^{3/2} v_T}{R} \quad (D-1)$$

の範囲になければならない。この場合の粒子束及び熱流は、電子とイオンについてそれぞれ

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= -4.33 \frac{\delta^{3/2} G(\alpha)}{\nu_e} \left(\frac{T_e}{e B R} \right)^2 n \\ &\times \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{e}{T_e} \frac{d\phi}{dr} + \frac{3.44}{T_e} \frac{dT_e}{dr} \right) \end{aligned} \quad (D-2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= -9.29 \frac{\delta^{3/2} G(\alpha)}{\nu_i} \left(\frac{T_i}{e B R} \right)^2 n \\ &\times \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} + \frac{3.37}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right) \end{aligned} \quad (D-3)$$

$$\begin{aligned} Q_e &= -2.14 \frac{\delta^{3/2} G(\alpha)}{\nu_e} \left(\frac{T_e}{e B R} \right)^2 n T_e \\ &\times \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{e}{T_e} \frac{d\phi}{dr} + \frac{4.45}{T_e} \frac{dT_e}{dr} \right) \end{aligned} \quad (D-4)$$

$$\begin{aligned} Q_i &= -4.52 \frac{\delta^{3/2} G(\alpha)}{\nu_i} \left(\frac{T_i}{e B R} \right)^2 n T_i \\ &\times \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} + \frac{4.39}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right) \end{aligned} \quad (D-5)$$

但し

$$\nu_e \equiv \frac{n e^4 \ell n \Lambda}{6 \sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}$$

$$\nu_i \equiv \frac{n e^4 \ell n \Lambda}{6 \sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}}$$

$G(\alpha)$; 装置の形状で決まる数係数

で与えられる。(D-2)式, (D-5)式に, 両極性拡散の条件($\Gamma_e = \Gamma_i$ すなわち $\Gamma_i \approx 0$)である

$$\frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{3.37}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \quad (D-6)$$

の関係を代入すると

$$\begin{aligned} \Gamma = & -4.33 \frac{\delta^{3/2} G(\alpha)}{\nu_e} \left(\frac{T_e}{eBR} \right)^2 n \\ & \times \left[\frac{1}{n} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{dn}{dr} + \frac{3.37}{T_e} \frac{dT_i}{dr} + \frac{3.34}{T_e} \frac{dT_e}{dr} \right] \end{aligned} \quad (D-7)$$

$$Q_i = -46.1 \frac{\delta^{3/2} G(\alpha)}{\nu_i} \left(\frac{T_i}{eBR} \right)^2 n \frac{dT_i}{dr} \quad (D-8)$$

となる。

附録E MHD領域におけるプラズマの平衡

MHD領域におけるイオンの平衡量及び粒子束、熱流を計算する。イオンのラーマー半径はあまり大きくなく

$$\frac{\rho_i}{\theta r} \ll 1 \quad (\text{E-1})$$

但し

$$r \sim \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dr} \right)^{-1}$$

$$\theta \equiv \frac{B_\theta}{B_\phi} \ll 1$$

の条件を満たしているとする。又、イオンの衝突周波数は、MHD領域であるとともに、電子とイオンの間に働らく摩擦力がイオンの磁力線方向の粘性より小さいとして

$$\frac{v_{Ti}}{Rq} < \nu_i < \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4} \frac{v_{Ti}}{Rq} \quad (\text{E-2})$$

の条件を満たしているとする。この場合には、系の平衡状態は、主にイオンの散逸機構（粘性及び熱伝導）できまり電子の散逸機構は無視しうる。従って、電子は磁力線方向に自由に動くとして、電子温度は磁力線に沿って等しく、密度分布はボルツマン分布になっているとする。又、計算を簡単にする為、プラズマの磁力線方向への平均流 U_{11} はゼロとする。 $U_{11} \neq 0$ の場合には、得られた結果を

$$v_0 \rightarrow \theta U_{11} + v_0 \quad (\text{E-3})$$

但し

$$v_0 = \frac{1}{B_0} \frac{d\phi}{dr}$$

と置換すればよい。以下ではイオンについてのみ計算を行うので成分を示す添字は省略する。

基本式は

$$\text{div} (n\vec{v}) = 0 \quad (\text{E-4})$$

$$mn (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p$$

$$+ en (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \cdot \Pi \quad (\text{E-5})$$

$$\frac{3}{2} n (\vec{v} \cdot \nabla T) + p \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \vec{q} \quad (\text{E-6})$$

を用いる。ここで \vec{P} と \vec{q} はそれぞれ非等方圧力テンソル及び熱流である。イオンの散逸機構としては磁力線方向の粘性と熱伝導のみを考える。即ち、

$$(\nabla \cdot \vec{P})_{\parallel} = \mu_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 v_{\parallel} \quad (\text{E-7})$$

及び

$$q_{\parallel} = -\chi_{\parallel} \nabla_{\parallel} T \quad (\text{E-8})$$

但し

$$\mu_{\parallel} = \frac{4}{3} \times 0.96 n T \tau_i$$

$$\chi_{\parallel} = 3.9 \frac{n T \tau_i}{m_i}$$

$$\tau_i \equiv \frac{12 \pi^2 \epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{n e^4 \ln A}$$

を用いる。又、イオンの熱流としては (E-8) 式の磁力線方向の熱流の他にドリフト熱流

$$\vec{q}_{\perp} = \frac{5}{2} \frac{n T}{e B^2} (\vec{B} \times \nabla T) \quad (\text{E-9})$$

を考慮しなければならない。

以下では

$$\epsilon, \tau_i \omega_c \ll 1$$

として逐次近似法で解く。第0次の近似としては散逸項及び慣性項を無視し、 n, T は r のみの関数となる。従って、(E-5)式より

$$v_{\theta}^{(0)} = \frac{1}{enB} \frac{dp}{dr} - \frac{E_r}{B} = (v_o + U_p) / h \quad (\text{E-10})$$

但し

$$U_p = \frac{1}{enB_0} \frac{dp}{dr}$$

$$v_o = \frac{1}{B_0} \frac{d\phi}{dr}$$

$$h = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

が得られる。(2.9)式の擬トロイダル座標系を用いると $O(\varepsilon)$ の精度で

$$\operatorname{div} (v_{\theta}^{(0)}) = -\frac{2\varepsilon}{r} \sin \theta (v_o + U_p) \quad (E-11)$$

となる。次の近似まででは、全ての物理量は

$$f(r, \theta) = f^{(0)}(r) + \tilde{f}(\theta) \quad (E-12)$$

但し

$$\left| \frac{\tilde{f}}{f^{(0)}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial f^{(0)}}{\partial r} \right| \gg \left| \frac{\partial f^{(1)}}{\partial r} \right|$$

と書ける。即ち、(E-1)式の仮定のもとでは \tilde{f} の r 依存性は無視しうる。従って電界 \vec{E} は

$$\vec{E} = \left(-\frac{d\phi}{dr}, -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, 0 \right)$$

で表わすことにする。

(E-5)式の θ 成分から

$$\tilde{v}_r = -\frac{1}{B_o r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{en B_o r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \quad (E-13)$$

が得られる。又、磁力線方向の成分から

$$\nabla_{11} \simeq \frac{\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

及び

$$\vec{v}_{\perp} \cdot \nabla \vec{v}_{11} + \frac{(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Pi}_{mag})_{11}}{mn} = \frac{v_o}{r} \frac{\partial \vec{v}_{11}}{\partial \theta}$$

$\overleftrightarrow{\Pi}_{mag}$; 磁気粘性項

の関係を利用して

$$\frac{mn v_o}{r} \frac{\partial \vec{v}_{11}}{\partial \theta} = \frac{\theta}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - \frac{en \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mu_{11} \frac{\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{v}_{11}}{\partial \theta^2}$$

(E-14)

が得られる。ここでは方程式系が θ 依存性を持つ \tilde{n} , \tilde{T} , ϕ 及び $\varepsilon \sin \theta, \varepsilon \cos \theta$ に関して線型

であるからフーリエ変換を利用する。 \tilde{n} , \tilde{T} , ϕ を $e^{i\theta}$ に比例するとすると, θ 微分及び $\cos \theta$, $\sin \theta$ は, それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} &\rightarrow i \\ \cos \theta &\rightarrow e^{i\theta} \\ \sin \theta &\rightarrow -ie^{i\theta} \end{aligned} \right\} \quad (E-15)$$

と置換すればよい。すると (E-15) 式は

$$\left(\frac{m}{T} \frac{v_0}{\theta^2} - i \frac{\mu_{11}}{mT_r} \right) \tilde{v}_{11} = - \frac{1}{\theta} \left(\frac{\tilde{p}}{p} + \frac{e\phi}{T} \right)$$

となる。ここで, 電子はボルツマン分布,

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_e} = \frac{e\phi}{T_e}$$

であることと, 中性条件 ($\tilde{n}_e = \tilde{n}_i$) を用いると,

$$(v_0 + i\mu_{eff}) \tilde{v}_{11} = - \frac{\theta T}{m} \left\{ (1+\tau) \frac{\tilde{n}}{n} + \frac{\tilde{T}}{T} \right\} \quad (E-16)$$

但し

$$\mu_{eff} \equiv \frac{\theta^2 \mu_{11}}{m_i n r}$$

$$\tau \equiv \frac{T_e}{T_i}$$

が得られる。

連続の式 (E-6) は同様にして

$$\theta \tilde{v}_{11} = -2\varepsilon (v_0 + U_p) - \{ v_0 + U_p - (1+\tau) U_n \} \frac{\tilde{n}}{n} + U_n \frac{\tilde{T}}{T} \quad (E-17)$$

但し

$$U_n = \frac{T}{enB_0} \frac{dn}{dr}$$

となる。又, エネルギー・バランスの式 (E-6) は

$$\frac{3}{2} n \vec{v}_{\perp} \cdot \nabla T + p \operatorname{div} \vec{v}_{\perp} + \operatorname{div} q_{\perp} = \frac{3}{2} n v_o \frac{\partial \tilde{T}}{r \partial \theta}$$

の関係が成立することに注意すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} v_o - i \chi_{\text{eff}} \right) \frac{\tilde{T}}{T} - \frac{3}{2} \tau U_T \frac{\tilde{n}}{n} + \theta \tilde{v}_{11} \\ = -2 \epsilon \left(v_o + U_p + \frac{5}{2} U_T \right) \end{aligned} \quad (\text{E-18})$$

但し

$$\chi_{\text{eff}} = \frac{\theta^2 \chi_{11}}{r n}$$

$$U_T = \frac{1}{e B_o} \frac{dT}{dr}$$

となる。

(E-1) 式及び (E-2) 式の関係から

$$\frac{\theta^2 T}{m} \gg v_o^2, U_p^2, U_n^2, U_T^2$$

$$\frac{\mu_{\text{eff}} U}{\theta^2 T/m} \sim \frac{\rho}{\theta r} \frac{v_T \tau_i}{Rq} \ll 1$$

$$\frac{\chi_{\text{eff}} U}{\theta^2 T/m} \sim \frac{\rho}{\theta r} \frac{v_T \tau_i}{Rq} \ll 1$$

$$\frac{U}{\chi_{\text{eff}}} \sim \frac{\rho}{\theta r} \frac{Rq}{v_T \tau_i} \ll 1$$

が成立する。上の関係を利用すると (E-16) 式 ~ (E-18) 式より

$$\frac{\tilde{n}}{n} \simeq i \frac{5 \epsilon U_T}{(1+\tau) \chi_{\text{eff}}} - i \frac{2 \epsilon \mu_{\text{eff}} (v_o + U_p)}{(1+\tau) \theta^2 T/m} \quad (\text{E-19})$$

$$\frac{\tilde{T}}{T} \simeq -i \frac{5 \epsilon U_T}{\chi_{\text{eff}}} \quad (\text{E-20})$$

が得られる。

磁気面を貫く粒子束は

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint n v_r h d\theta$$

で計算出来る。 v_r の値として(E-13)式を用いると

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\frac{1}{2\pi} \oint d\theta h^2 (n^{(0)} + \tilde{n}) \left(\frac{1}{B_0 r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{enB_0 r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{nT}{2\pi e B_0 r} \left[\oint d\theta 2\epsilon \cos \theta \left\{ (1+\tau) \frac{1}{n} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \oint d\theta \frac{\tilde{n}}{n} \left\{ (1+\tau) \frac{1}{n} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} \right\} \right] \quad (E-21) \end{aligned}$$

となる。上式に(E-19)式及び(E-20)式を代入すると、イオンの粒子束として

$$\Gamma = -\frac{2\epsilon^2 \mu_{11}}{eB_0 r^2} (v_0 + U_p) \quad (E-22)$$

が得られる。しかし、両極性拡散である為には、この Γ_i が電子の粒子束に等しい必要がある。電子の粒子束は Γ_i に比べて $O(\sqrt{m_e/m_i})$ の量であるから、結局、両極性拡散である為には

$$v_0 \simeq -U_p \quad (E-23)$$

の条件を満たす必要がある。(E-3)式で述べた様に、(E-22)式の Γ はプラズマの磁力線方向への平均流 U_{11} がゼロの場合の計算であるから、 $U_{11} \neq 0$ の場合には、(E-22)式の代りに

$$\Gamma_i = -\frac{2\epsilon^2 \mu_{11}}{eB_0 r^2} (v_0 + U_{pi} + \theta U_{11}) \quad (E-24)$$

となる。従って、両極性拡散の条件(E-23)式は

$$U_{11} = -\frac{T_i}{eB_0 \theta} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{e}{T_i} \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dr} \right) \quad (E-25)$$

となる。

又、磁気面を貫くイオンの熱流は

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \oint h \tilde{q}_r d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{5}{2} \frac{nT_i}{eB_0 r} \oint d\theta 2\epsilon \cos \theta \frac{\partial T_i}{\partial \theta} \\ &= -1.6 \frac{q^2 \rho_i^2}{\tau_i} n \frac{dT}{dr} \quad (E-26) \end{aligned}$$

で得られる。従って、MHD領域におけるイオンの熱伝導率は

$$\chi_i = 1.6 \nu_i \rho_i^2 q^2 \quad (\text{E-27})$$

で与えられる。