

JAERI-M
8757

種々の確率紙上における分布関数グラフ
の形状と分布則の定性的判別法

1980年3月

松井 浩・渡辺 宏道^{*}・国分 守信

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問合せは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

種々の確率紙上における分布関数グラフの形状と分布則の
定性的判別法

日本原子力研究所東海研究所保健物理部

松井 浩・渡辺 宏道・国分 守信

(1980年2月1日受理)

放射線管理データを解析する場合、種々のデータがどんな分布則に従っているかを決定することは重要なことである。それぞれのデータの従う分布則を判別する一つの方法として、種々の確率紙上における異なる分布関数グラフの形状を把握することにより、分布則を定性的に判別する方法を検討した。とくに、利用し易い対数正規確率紙上でのグラフ形状およびデータの統計処理過程で得られる情報をできる限り利用して分布則を推定する方法を示した。

Shapes of Graphs for Distribution Function on the Different
Probability Papers; Method of Guessing the Distribution

Hiroshi MATSUI, Hiromichi WATANABE *

and Morinobu KOKUBU

Division of Health Physics,

Tokai Research Establishment, JAERI

(Received February 1, 1980)

In statistical analysis of radiation monitoring data, the determination of a distribution is important. A method is proposed of guessing the distribution from the information obtained during the process of statistical data analysis and the form of a graph drawn on the lognormal probability paper.

Keywords: Statistical Analysis, Radiation Monitoring Data,
Distribution Function, Probability Paper,
Distribution Determination Method, Graph Shape.

目 次

1.はじめに.....	1
2.分布関数.....	2
1) 正規分布.....	2
2) 対数正規分布.....	2
3) ガンマ分布.....	2
4) ワイブル分布.....	3
5) 指数分布.....	3
6) 二重指数分布.....	3
7) 対数二重指数分布.....	3
3.各種の確率紙上における分布関数グラフの形状.....	4
3.1 直線目盛における確率密度関数のグラフ.....	4
3.2 各種の確率紙上における分布関数のグラフ.....	4
1) 正規確率紙.....	4
2) 対数正規確率紙	5
3) ワイブル確率紙	5
4) 二重指数確率紙	5
5) 対数二重指数確率紙	6
4.確率紙上のグラフの形状による分布則の推定.....	6
4.1 統計処理過程で得られる主な情報.....	6
4.2 主な情報による分布則の推定.....	7
1) 情 報 (A)	7
2) 情 報 (B)	7
3) 情 報 (C)	8
4.3 ガンマ分布とワイブル分布との判別について.....	8
4.4 その他の注意事項.....	9
参考文献.....	9
付録 確率紙の使い方.....	35
1. 正規確率紙	35
2. 対数正規確率紙	35
3. ワイブル確率紙	35
4. 二重指数確率紙	36
5. 対数二重指数確率紙	37

Contents

1. Introduction -----	1
2. Distribution functions -----	2
1) Normal distribution -----	2
2) Lognormal distribution -----	2
3) Gamma distribution -----	2
4) Weibull distribution -----	3
5) Exponential distribution -----	3
6) Double exponential distribution -----	3
7) Log-double exponential distribution -----	3
3. Shapes of graphs of distribution functions on the different probability papers -----	4
3.1 Graph of a probability density function on linear scale paper -----	4
3.2 Graphs of distribution functions on the different probability papers -----	4
1) Normal probability paper -----	4
2) Lognormal probability paper -----	5
3) Weibull probability paper -----	5
4) Double exponential probability paper -----	5
5) Log-double exponential probability paper -----	6
4. Guessing of a distribution function from the shapes of graphs on the probability papers -----	6
4.1 Information obtained during the statistical analysis -----	6
4.2 Guessing of a distribution function by the information -----	7
1) Information A -----	7
2) Information B -----	7
3) Information C -----	8
4.3 Differentiation between gamma and weibull distribution -----	8
4.4 Cautions to be taken -----	9
References -----	9
Appendix Procedure for using probability paper -----	35
1) Normal probability paper -----	35

2)	Lognormal probability paper -----	35
3)	Weibull probability paper -----	35
4)	Double exponential probability paper -----	36
5)	Log-double exponential probability paper -----	37

1. はじめに

放射線管理データを統計的に整理すると、種々のデータは、それぞれ固有の分布則に従って分布していることが知られる。もし、ある管理データに対して固有の分布則が見出されるならば、それを用いて、同一場所での同一管理方式に対して、ある一定値以上のデータの出現割合を予想したり、管理方式や作業方法を改善した場合の効果を数量的に比較するのにも役立てることができる。また、高い値のデータが得られた場合、その値が統計的に不自然な値でないか否かなど、データの妥当性を評価し、作業の特異性あるいは異常性を検討することにも役立てることができる。それらは、必ずしも単純にはできないが、多くの経験を蓄積することによって可能ならしめるものと思われる。

種々の管理データがどんな分布則に従うかは一義的に決まるものではないが、これまでに経験的に知られている連続型の分布則として次のものがある。

分 布 則	管 理 デ 一 タ
正 規 分 布	環境 γ 線量率 ^{1~3)} , 環境試料中放射能濃度(海底土, 陸土) ⁵⁾
対 数 正 規 分 布	作業場の空間線量率 ^{6,7)} , 年間個人被曝線量 ^{6,8)} , 放射性エアロゾルの粒度分布 ^{9~15)} , 空気中放射能濃度 ¹⁶⁾ , バイオアツセイデータ ¹⁷⁾ , 環境試料中放射能濃度(土壤 ⁴⁾)
ガ ン マ 分 布	気象データにおける風速分布(1時間毎の10分間平均値) ^{18,19)}
ワ イ ブ ル 分 布	環境試料中の放射能濃度(降下塵) ²⁰⁾
二 重 指 数 分 布	作業者の年間最大被曝線量 ^{21,22)} ,
対 数 二 重 指 数 分 布	作業者の年間最大被曝線量 ²³⁾ , 床の表面汚染密度 ²⁴⁾ , および最大表面汚染密度 ²⁵⁾ , 衣服の最大表面汚染密度 ²⁶⁾ , 原子力施設事故の年間最大損失高 ²³⁾

そこで、筆者らは、通常使用される連続型の分布則、すなわち、正規分布、対数正規分布、ガンマ分布、ワイブル分布、指数分布、二重指數分布、対数二重指數分布について、夫々の確率紙上におけるグラフの形状を示すとともに、放射線管理データ解析上最も取扱い易い対数正規確率上における種々の分布グラフの形状から、適合する分布則を推定する方法を検討した。

2. 分 布 関 数

本報で対象とする分布として、正規分布、対数正規分布、ガンマ分布、ワイブル分布、指数分布、二重指數分布、対数二重指數分布の分布関数および確率密度関数を示す。^{27~29)}

1) 正規分布

$$\text{確率密度関数} ; f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1)$$

$$\text{分布関数} ; F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (2)$$

$$\text{平均値} ; \bar{t} = \mu \quad (3)$$

$$\text{分散} ; V = \sigma^2 \quad (4)$$

2) 対数正規分布

$$\text{確率密度関数} ; f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(\ell n t - \ell n \eta)^2}{2\sigma^2} \right] \quad \begin{cases} t \geq 0, \\ \eta > 0, \sigma > 0 \end{cases} \quad (5)$$

$\sigma = \ell n \sigma_g$ (σ_g ; 幾何標準偏差, η ; 幾何平均値と呼ばれる)。

$$\text{分布関数} ; F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\ell n t} \exp \left[-\frac{(\ell n t - \ell n \eta)^2}{2\sigma^2} \right] d(\ell n t) \quad (6)$$

$$\text{平均値} ; \bar{t} = \eta e^{\sigma^2/2} \quad (7)$$

$$\text{分散} ; V = \eta^2 e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (8)$$

対数正規分布は、横軸を対数にとると、正規分布と同じように左右対称になる。

3) ガンマ分布

$$\text{確率密度関数} ; f(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(k)} (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} \quad \begin{cases} t \geq 0, \\ k > 0, \lambda > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{分布関数} ; F(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(k)} \int_0^t (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} dt \quad (10)$$

$$\text{平均値} ; \bar{t} = k/\lambda \quad (11)$$

$$\text{分散} ; V = k/\lambda^2 \quad (12)$$

ここで、パラメタ k は形のパラメタ、 $1/\lambda$ は尺度のパラメタと呼ばれる。また、 $k = 1$ のとき指数分布になる。

(4) ウイブル分布

$$\text{確率密度関数} ; f(t) = \frac{m t^{m-1}}{t_0} \exp\left[-\frac{t^m}{t_0}\right] \quad \begin{cases} m > 0 \\ t_0 > 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{分 数 関 数} ; F(t) = 1 - \exp\left[-\frac{t^m}{t_0}\right] \quad (14)$$

$$\text{平 均 値} ; \bar{t} = t_0^{1/m} \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \quad (15)$$

$$\text{分 散} ; V = t_0^{2/m} \left[\Gamma(1 + \frac{2}{m}) - \left\{ \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \right\}^2 \right] \quad (16)$$

ここで、 m は形のパラメタ、 t_0 は尺度のパラメタと呼ばれる。また、 $m=1$ のとき指数分布になる。

(5) 指数分布

$$\text{確率密度関数} ; f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0) \quad (17)$$

$$\text{分 布 関 数} ; F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (18)$$

$$\text{平 均 値} ; \bar{t} = 1/\lambda \quad (19)$$

$$\text{分 散} ; V = 1/\lambda^2 \quad (20)$$

(6) 二重指数分布（最大値の漸近分布）

$$\text{確率密度関数} ; f(t) = \alpha \exp\{-y - \exp(-y)\} \quad (21)$$

$$\text{ただし } y = \alpha(t - u)$$

$$\text{分 布 関 数} ; F(t) = \exp\{-\exp(-y)\} \quad (22)$$

$$\text{平 均 値} ; \bar{t} = u + \frac{\gamma}{\alpha} \quad (23)$$

$$\gamma = 0.5772 \dots \text{ (オイラーの定数)}$$

$$\text{分 散} ; V = \frac{\pi^2}{6 \alpha^2} \quad (24)$$

ここで、 u は分布の最確値となり、 $1/\alpha$ は尺度のパラメタになる。最大値の漸近分布のほかに、最小値の漸近分布があるが、それは、式(21) (22)における変数 $(-y)$ を (y) 、すなわち、定数 (α) を $(-\alpha)$ とした場合の分布である。

(7) 対数二重指数分布

$$\text{確率密度関数} ; f(\ell n t) = \alpha \exp\{-y - \exp(-y)\} \quad (25)$$

$$\text{分 布 関 数} ; F(\ell n t) = \exp\{-\exp(-y)\} \quad (26)$$

$$\text{ただし } y = \alpha(\ell n t - \ell n \eta)$$

$$\text{平 均 値}^{(30)} ; \bar{t} = \exp(\ell n \eta) \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \quad (27)$$

$$\text{分 散}^{30)}; V = \exp(2 \ln \eta) \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \left\{ \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\}^2 \right] \quad 28$$

この分布は、粉体工学で用いられる Rosin-Rammler 分布と本質的に同じ分布である。

3. 各種の確率紙上における分布関数グラフの形状

3.1 直線目盛における確率密度関数のグラフ

Figs. 1～7 にそれぞれの確率密度関数のグラフを示す。対数正規分布、対数二重指数分布（他の分布でも、特定のパラメタに対して）は、ピークは小さい値に片寄り、また、大きい方に対する尾は長く引いた形となり、相互に類似の形状をしている。そのため、実際の統計解析において、頻度分布（確率密度関数グラフに対応）から分布則を推定することは困難である。

3.2 各種の確率紙上における分布関数のグラフ

Figs. 8～49 は各種の確率紙上におけるそれぞの分布関数グラフを示したものである。このうち、Figs. 8～14 は正規確率紙、Figs. 15～21 は対数正規確率紙、Figs. 22～28 はワイブル確率紙、Figs. 29～35 は二重指数確率紙、Figs. 36～42 は対数二重指数確率紙上における各分布関数グラフを示す。

確率紙は、本来、固有の分布関数グラフがその確率紙上で直線になるように作成されたものである。従って、正規分布関数は正規確率紙上で、対数正規分布関数は対数正規確率紙上で直線になるのが当然である。この性質を用いることにより、実際のデータ解析においては、各種の確率紙上にプロットした時のグラフの直線性から、そのデータに対する分布則を見出すことができる。

Figs. 8～49 における主な特徴を以下に示す。

1) 正規確率紙

分布関数	特徴
正規分布	完全直線
対数正規分布	上に凸形、 $F < 50\%$ では t の減少に対して F が急減少する。
ガンマ分布	上に凸形、 $F < 50\%$ では t に対し急変化するが、 $F > 50\%$ では緩やかに変化する。
ワイブル分布	上に凸形、 $m=3$ 付近で直線に近くなり、この分布を正規分布で代用することもできる。
指數分布	上に凸形、 $t \rightarrow 0$ となるにつれて F は急減少し、ガンマ分布に類似した形状をしている。

$$\text{分 散}^{30)}; \quad V = \exp(2 \ln \eta) \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \left\{ \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\}^2 \right] \quad 28$$

この分布は、粉体工学で用いられる Rosin - Rammler 分布と本質的に同じ分布である。

3. 各種の確率紙上における分布関数グラフの形状

3.1 直線目盛における確率密度関数のグラフ

Figs. 1～7 にそれぞれの確率密度関数のグラフを示す。対数正規分布、対数二重指数分布（他の分布でも、特定のパラメタに対して）は、ピークは小さい値に片寄り、また、大きい方に対する尾は長く尾を引いた形となり、相互に類似の形状をしている。そのため、実際の統計解析において、頻度分布（確率密度関数グラフに対応）から分布則を推定することは困難である。

3.2 各種の確率紙上における分布関数のグラフ

Figs. 8～49 は各種の確率紙上におけるそれぞの分布関数グラフを示したものである。このうち、Figs. 8～14 は正規確率紙、Figs. 15～21 は対数正規確率紙、Figs. 22～28 はワイブル確率紙、Figs. 29～35 は二重指数確率紙、Figs. 36～42 は対数二重指数確率紙上における各分布関数グラフを示す。

確率紙は、本来、固有の分布関数グラフがその確率紙上で直線になるように作成されたものである。従って、正規分布関数は正規確率紙上で、対数正規分布関数は対数正規確率紙上で直線になるのが当然である。この性質を用いることにより、実際のデータ解析においては、各種の確率紙上にプロットした時のグラフの直線性から、そのデータに対する分布則を見出すことができる。

Figs. 8～49 における主な特徴を以下に示す。

1) 正規確率紙

分布関数	特 徵
正規分布	完全直線
対数正規分布	上に凸形、 $F < 50\%$ では t の減少に対して F が急減少する。
ガンマ分布	上に凸形、 $F < 50\%$ では t に対し急変化するが、 $F > 50\%$ では緩やかに変化する。
ワイブル分布	上に凸形、 $m=3$ 付近で直線に近くなり、この分布を正規分布で代用することもできる。
指 数 分 布	上に凸形、 $t \rightarrow 0$ となるにつれて F は急減少し、ガンマ分布に類似した形状をしている。

分布関数	特徴
二重指指数分布	上に凸形, $\alpha=1$ 付近の分布は非常に広い分布をするが, 他の α に対する変化傾向は対数正規分布に類似している。
対数二重指指数分布	上に凸形, 二重指指数分布, 対数正規分布に類似した形状であるが, t の大きい値に対する F の変化は緩やかである。

2) 対数正規確率紙

正規分布	下に凸形, $F < 50\%$ では t に対する F の変化は急激に緩やかになる。
対数正規分布	完全直線
ガンマ分布	下に凸形, $F < 50\%$ では $F > 50\%$ よりも変化が緩やかである。
ワイブル分布	下に凸形, ガンマ分布に類似している。
指數分布	下に凸形, $F < 50\%$ における変化は緩やかである。ガンマ分布の $k = 1$, ワイブル分布の $m = 1$ に相当する分布である。
二重指指数分布	下に凸形, $F < 50\%$ における変化は非常に緩やかである。
対数二重指指数分布	上に凸形, $F > 50\%$ では変化が緩やかである。

3) ワイブル確率紙

正規分布	$\sigma \geq \frac{1}{3}$ では下に凸形, $\sigma \approx 0.2$ では直線に近いがやや上に凸形となる。
対数正規分布	上に凸形, 全体に円弧状である。
ガンマ分布	$k \geq 2$ では上に凸形となり, ワイブル分布よりも広がりの大きいことを示す。
ワイブル分布	完全直線
指數分布	完全直線, ワイブル分布の $m = 1$ あるいはガンマ分布の $k = 1$ に相当する分布である。
二重指指数分布	$\alpha > 5$ では, 上に凸形, $\alpha < 3$ では中間に変曲点をもち上下に凸となる。
対数二重指指数分布	上に凸形, $F > 50\%$ における変化は非常に緩やかである。

4) 二重指指数確率紙

正規分布	下に凸形, 緩やかに変化する。
対数正規分布	$\sigma_g \geq 1.5$ ではほど直線になる。すなわち, この範囲での対数正規分布は二重指指数分布によって代用することもできる。 $\sigma_g > 1.5$ では上に凸形の曲線となる。

分布関数	特徴
ガンマ分布	$F < 70\%$ では上に凸形、また、 $F > 70\%$ では下に凸形と変化する。
ワイブル分布	$m > 3$ では下に凸形、 $m = 1$ は上に凸形となる。
指數分布	上に凸形、 $F > 70\%$ ではほど直線になる。
二重指數分布	完全直線
対数二重指數分布	上に凸形、円弧状である。

5) 対数二重指數確率紙

正規分布	すべて、下に凸形、ほど類似の変化傾向を示す。
対数正規分布	
ガンマ分布	
ワイブル分布	
指數分布	
二重指數分布	
対数二重指數分布	完全直線

4. 確率紙上のグラフの形状による分布則の推定

一つのグラフから直ちに分布則なり分布関数等を推定することは、特殊な場合を除いては、非常に困難なことであるが、統計処理の段階で得られる全ての情報を利用すれば、かなりの程度まで分布則を推定することができる。分布則が分かれば、その後、分布関数（パラメタ）を決定することは容易である。そこで、統計処理過程で得られる全ての情報および対数正規確率紙上のグラフの形状を用いて分布則を推定する手順を述べる。

4.1 統計処理過程で得られる主な情報

大略、次の情報が得られる。

処理過程	主な情報
測定データの収集	(A) 最大値、最小値
度数表の作成	(B) 頻度分布（確率密度に対応）の形状
累積値の確率紙へのプロット	(C) 確率紙上における曲線の形状

分布関数	特徴
ガンマ分布	$F < 70\%$ では上に凸形、また、 $F > 70\%$ では下に凸形と変化する。
ワイブル分布	$m > 3$ では下に凸形、 $m = 1$ は上に凸形となる。
指 数 分 布	上に凸形、 $F > 70\%$ ではほど直線になる。
二重指數分布	完全直線
対数二重指數分布	上に凸形、円弧状である。

5) 対数二重指數確率紙

正規分布	すべて、下に凸形、ほど類似の変化傾向を示す。
対数正規分布	
ガンマ分布	
ワイブル分布	
指 数 分 布	
二重指數分布	
対数二重指數分布	完全直線

4. 確率紙上のグラフの形状による分布則の推定

一つのグラフから直ちに分布則なり分布関数等を推定することは、特殊な場合を除いては、非常に困難なことであるが、統計処理の段階で得られる全ての情報を利用すれば、かなりの程度まで分布則を推定することができる。分布則が分かれば、その後、分布関数（パラメタ）を決定することは容易である。そこで、統計処理過程で得られる全ての情報および対数正規確率紙上のグラフの形状を用いて分布則を推定する手順を述べる。

4.1 統計処理過程で得られる主な情報

大略、次の情報が得られる。

処理過程	主な情報
測定データの収集	(A) 最大値、最小値
度数表の作成	(B) 頻度分布（確率密度に対応）の形状
累積値の確率紙へのプロット	(C) 確率紙上における曲線の形状

4.2 主な情報による分布則の推定

統計処理過程で各段階ごとに得られる主な情報 (A, B, C) から下記のことが推定できる。ここで、グラフの形状から分布則 (種類) を推定するには、データをプロットした時、一定のまとまったグラフ形状が得られなければならない。そのため、データ数は少なくとも 100 個位が要求される。データ数が数 10 以下の場合は、あたかも数種類の分布則に適合するように見えるので、グラフによる判別はかなり困難である。

1) 情報 (A)

A-1) データの最大値 (X_{\max}) と最小値 (X_{\min}) との比が 3 ~ 5 以内、すなわち

$$\frac{X_{\max}}{X_{\min}} \lesssim 3 \sim 5$$

ならば、正規分布となる可能性が大きい。したがって、度数表は等差区分によって作成する方がよい。度数表が作られた段階で、さらに、 $X_m = (X_{\min} + X_{\max}) / 2$ の値が、度数表におけるピーク値に対応するならば、正規分布の可能性はさらに強くなる。

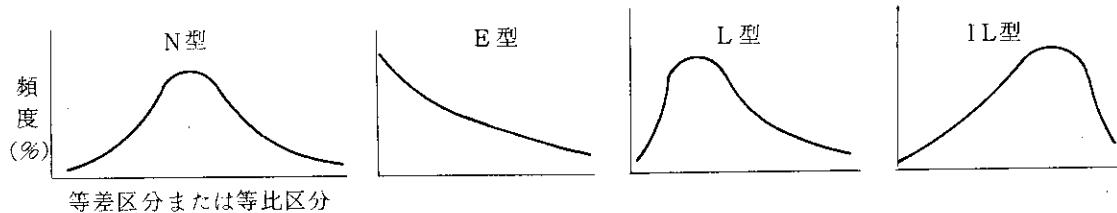
A-2) 比の値が 5 を越える場合、すなわち

$$\frac{X_{\max}}{X_{\min}} > 5$$

ならば、正規分布以外の分布になる可能性が大きい。したがって、度数表は等比区分によって作成する方がよい。

2) 情報 (B)

度数表の作成過程で得られる情報から確率密度関数に対応する頻度分布の形状が推定できる。頻度分布の形状を次の 4 種* に分類する。



B-1) 等差区分 (A-1) で得られる頻度分布 (度数表)において、それぞれ、上記の形状が得られた場合には、次のように推定できる。

- a) N型ならば、正規分布である。
- b) E型ならば、指数分布または正規分布などの上側部分である。片対数紙上で直線ならば

* N型=Normal Type, E型=Exponential Type, L型=Logarithmic Type,

IL型=Inverse Logarithmic Type と名づける。

指數分布である。

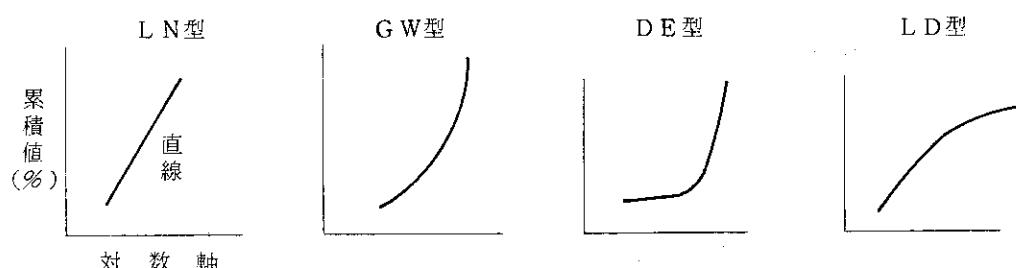
- c) L型ならば、対数正規分布、ガンマ分布、ワイブル分布($m \leq 3$)、二重指數分布などのいずれか一つである。この判別は対数正規確率紙によって行うことができる(Fig. 8 ~ 49との比較による)。
- d) IL型ならば、ワイブル分布($m > 3$)または二重指數分布のうち最小値分布(本文、2の6)を参照)である。

B-2) 等比区分(A-2)で得られる頻度分布(度数表)において、それぞれ、上記の形状が得られた場合は、次のように推定できる。

- a) N型ならば、対数正規分布である。
- b) E型ならば、指數分布または対数正規分布などの上側部分である。
- c) L型ならば、対数二重指數分布である。
- d) IL型ならば、ガンマ分布、ワイブル分布、二重指數分布などのいずれかである。

3) 情報(C)

等比区分データを対数正規確率紙にプロットした場合のグラフの形状(正規分布は含めない)を次の4種^{**}に分類する。



対数確率紙上のグラフの形状が、それぞれ、上記の形状になった場合、次のように推定できる。

- a) LN型ならば、対数正規分布である。
- b) GW型ならば、ガンマ分布、ワイブル分布または指數分布のいずれかである。
- c) DE型ならば、二重指數分布である。
- d) LD型ならば、対数二重指數分布である。

4.3 ガンマ分布とワイブル分布との判別について

両分布は、 $m = 1, k = 1$ の場合、ともに指數分布になるので、度数表の形状からも指數分布と判るが、 $m \neq 1, k \neq 1$ の場合確率密度関数グラフ、また、対数確率紙上における分布関数のグラフは、一見したところ類似しているので簡単には判別できない。しかし、これらをワイ

^{**} LN型=Log-Normal Type, GW型=Gamma Weibull Type, DE型=Double Exponential Type, LD=Log-Double Exponential Type と名づける。

ブル確率紙にプロットするならば、ワイブル分布のとき直線になり、ガンマ分布のとき上に凸形のグラフになるので容易に判別できる。また、指数分布もワイブル確率紙上で直線になる。

4.4 その他の注意事項

分布の形状を明確なものにし、分布則を推定できるようにするためには、できるだけ多数のデータが必要である。データ数が少ない場合には、種々の分布則に適合するかに見えることもある。分布則(種類)を推定するに必要な最少のデータ数は一概には言えない。データ数(N)が $N \geq 100$ ならば、ある程度の分布形状が得られ、 $N = 500 \sim 1000$ ならば、殆んどの場合、分布則は容易に判別される。 $N \leq 20$ では、対数正規分布と対数二重指數分布さえ判別できないことが多い。したがって、分布決定のためには、できる限り多数のデータを使用する必要がある。

本報をまとめるに際して、保健物理部線量計測課の熊沢蕃氏および環境安全研究部次長今井和彦氏には統計解析と分布則に関する御教授・御助言を頂いた。また、保安管理室の角川正義博士には本文に対する貴重な御助言を頂いた。これらの方々に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) 小林秀雄ほか：「環境放射線監視システムによる γ 線量の評価」，保健物理と安全管理 No.20, JAERI-M 7979, p. 148 (1979)
- 2) N. Ito, H. Katagiri, H. Kobayashi, K. Obata, T. Iijima, M. Kokubu : "Monitoring of low level environmental gamma exposure by the centralized radiation monitoring system", Presented to Second Asian Regional Congress on Radiation, 5 - 9 Nov., 1979, Manila, Philippines.
- 3) 東海地区放射線管理協議会：平常時の東海・大洗地区環境放射能監視と分担に関する報告書, p. 58 (1967)
- 4) 同 上, p. 60
- 5) 人見清一, 梁瀬芳晃, 松井浩, 国分守信：「原研における環境試料測定データの統計解析——分布形について——」，保健物理学会第14回研究発表会報告, 名古屋, (1979)
- 6) H. J. Gale : "The lognormal distribution and some examples of its application in the field of radiation protection", AERE-R-4736 (1965)
- 7) H. J. Gale : "Some examples of the application of the lognormal distribution in radiation protection", Ann. Occup. Hyg. 10, 39 (1967)
- 8) 穴沢豊, 加藤正平, 松野見爾, 岩谷正男, 古田敏城, 秋山勇, 浅野善江：「原研における

ブル確率紙にプロットするならば、ワイブル分布のとき直線になり、ガンマ分布のとき上に凸形のグラフになるので容易に判別できる。また、指数分布もワイブル確率紙上で直線になる。

4.4 その他の注意事項

分布の形状を明確なものにし、分布則を推定できるようにするためには、できるだけ多数のデータが必要である。データ数が少ないのである場合には、種々の分布則に適合するかに見えることもある。分布則(種類)を推定するに必要な最少のデータ数は一概には言えない。データ数(N)が $N \geq 100$ ならば、ある程度の分布形状が得られ、 $N = 500 \sim 1000$ ならば、殆んどの場合、分布則は容易に判別される。 $N \leq 20$ では、対数正規分布と対数二重指數分布さえ判別できないことが多い。したがって、分布決定のためには、できる限り多数のデータを使用する必要がある。

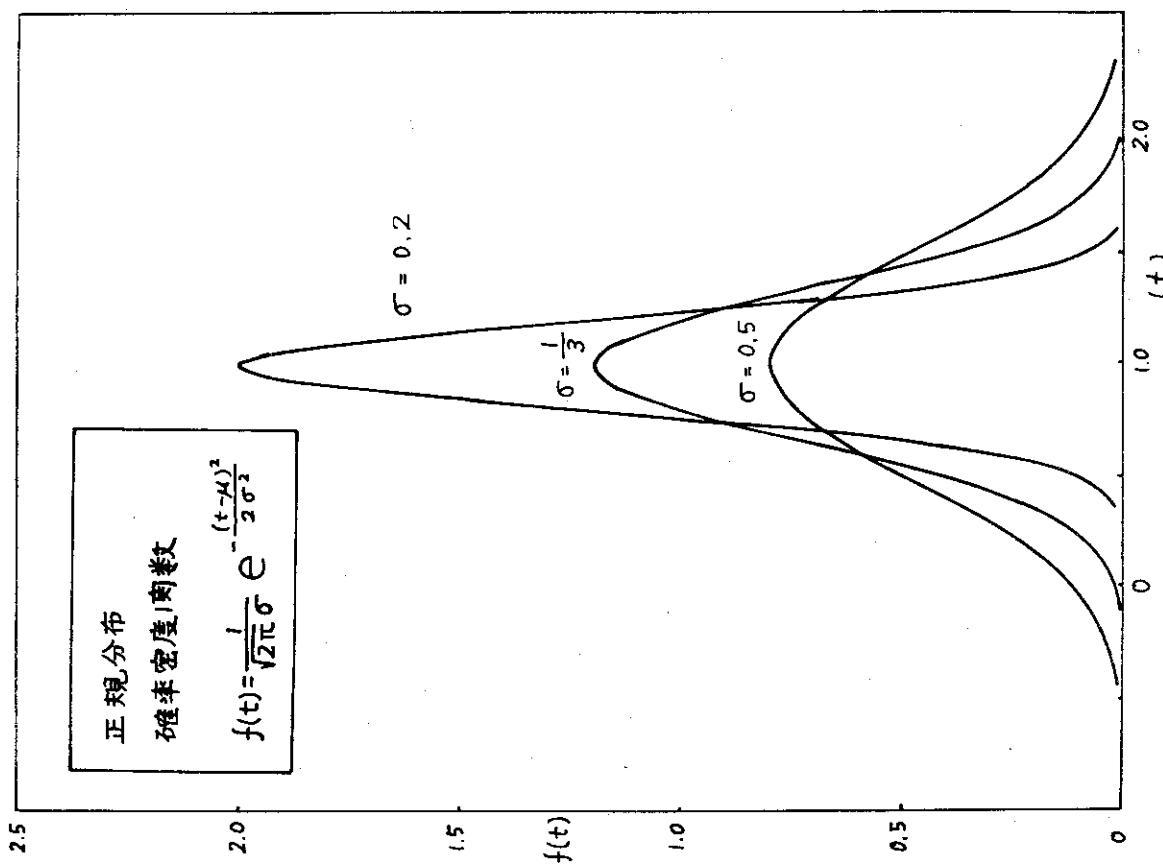
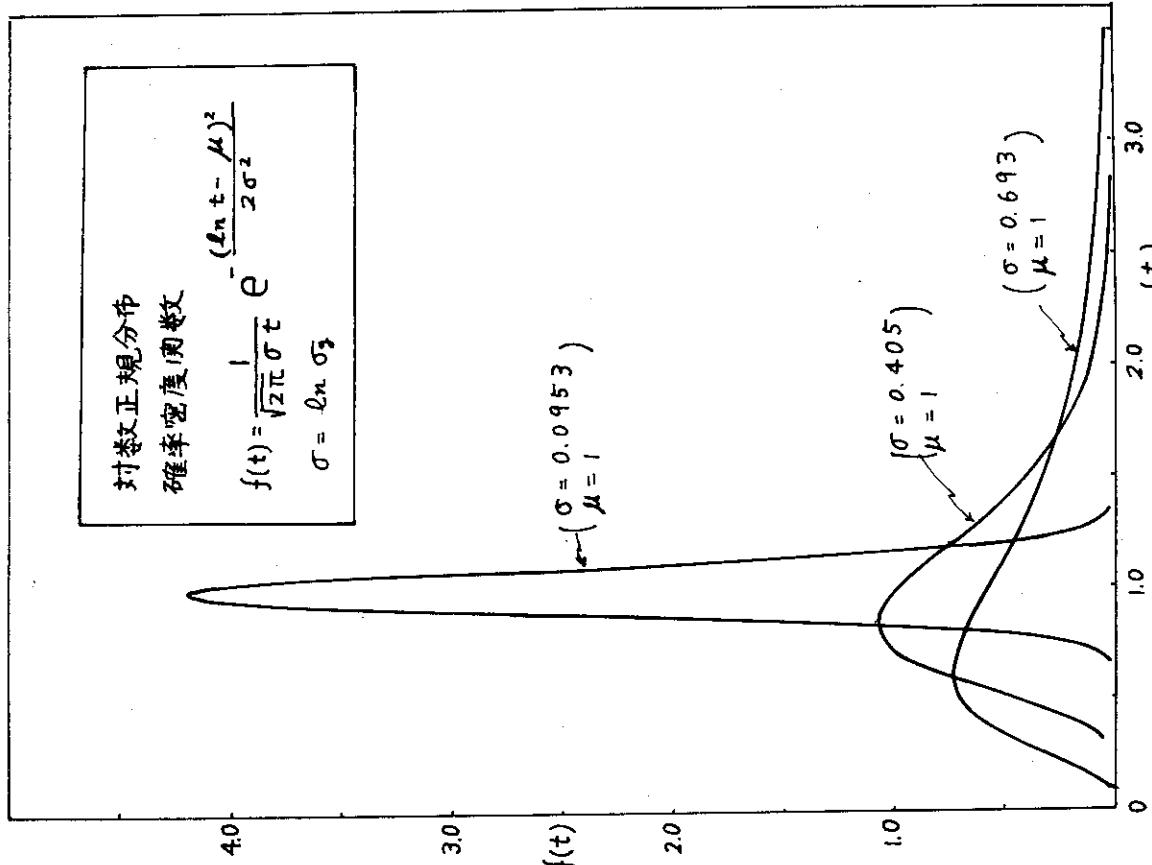
本報をまとめるに際して、保健物理部線量計測課の熊沢蕃氏および環境安全研究部次長今井和彦氏には統計解析と分布則に関する御教授・御助言を頂いた。また、保安管理室の角川正義博士には本文に対する貴重な御助言を頂いた。これらの方々に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) 小林秀雄ほか：「環境放射線監視システムによる γ 線量の評価」，保健物理と安全管理 No 20, JAERI-M 7979, p. 148 (1979)
- 2) N. Ito, H. Katagiri, H. Kobayashi, K. Obata, T. Iijima, M. Kokubu : "Monitoring of low level environmental gamma exposure by the centralized radiation monitoring system", Presented to Second Asian Regional Congress on Radiation, 5 - 9 Nov., 1979, Manila, Philippines.
- 3) 東海地区放射線管理協議会：平常時の東海・大洗地区環境放射能監視と分担に関する報告書, p. 58 (1967)
- 4) 同 上, p. 60
- 5) 人見清一, 梁瀬芳晃, 松井浩, 国分守信：「原研における環境試料測定データの統計解析——分布形について——」，保健物理学会第14回研究発表会報告, 名古屋, (1979)
- 6) H. J. Gale : "The lognormal distribution and some examples of its application in the field of radiation protection", AERE-R-4736 (1965)
- 7) H. J. Gale : "Some examples of the application of the lognormal distribution in radiation protection", Ann. Occup. Hyg. 10, 39 (1967)
- 8) 穴沢豊, 加藤正平, 松野見爾, 岩谷正男, 古田敏城, 秋山勇, 浅野善江：「原研における

- 放射線管理データの統計解析(2)動力試験炉」，保健物理学会第13回研究発表会要旨集，
p. 45 (1978)
- 9) J. Aichison., J. A. C. Brown : "The lognormal distribution",
London, Cambridge Univ. Press, (1957)
 - 10) A. Goldman et al. : "On the proper use of transformations of
lognormal functions in small particles", LA-3262 (1964)
 - 11) G. Herdan et al., "Small particle statistics", London, Butterworths,
p. 81 (1960)
 - 12) R. D. Cadle : "Particle size determination", New York, Interscience
Pub., p. 40 (1955)
 - 13) C. Orr. Jr., J. M. D. Valle : Fine particle measurement, New York,
Macmillan, p. 29 (1959)
 - 14) B. V. Anderson : "Plutonium aerosol particle size distribution in
room air", Health Phys., 10, 899 (1964)
 - 15) R. A. Kirchner : "A plutonium particle size study in production areas
at Rocky Flats", Amer. Ind. Hyg. Ass. J., 27, 396 (1966)
 - 16) R. F. Hornam : "An application of the lognormal distribution to some
air sampling results and recommendations on the interpretation of air
sampling data", AERE-M-1469 (1965)
 - 17) 泉幸男, 藤田稔, 矢部明: 「ヨウ素-131 の甲状腺沈着割合と有効半減期」, 保健物理,
7(4), 213 (1972)
 - 18) 今井和彦: 「平均風速の頻度分布」, 保健物理安全管理部の活動 No 10, p. 135
(1968)
 - 19) 鈴木栄一: 気象統計学, 地人書館, 東京, p. 28 (1976)
 - 20) M. Kinoshita, Y. Kishimoto, K. Shinohara : "Application of statistical
probability plotting to the analysis of environmental surveillance data",
Tokai Works Semi-Annual Progress Report, PNCT 831-78-01, p. 137
(1978)
 - 21) 角川正義, 立田初巳, 笹沼義雄, 穴沢豊: 「放射線管理下における被曝者出現の予測に関する確率的考察」, 保健物理学会第8回研究発表会要旨集, p. 6 (1973)
 - 22) 西健雄, 熊沢蕃, 伊藤精, 沼宮内弼雄: 「原研における全身外部被曝線量の統計解析」,
保健物理, 投稿中
 - 23) 角川正義: 「放射線事故等の予測に関する集団現象論的考察」, 保健物理と安全管理No 15
JAERI-M 5370, p. 193 (1973)
 - 24) 松井浩: 「放射線作業場における表面汚染度の分布則」, 保健物理, 4, 544 (1969)
 - 25) 大畑勉, 宮本俊寛, 黒沢義昭, 井沢庄治, 鈴木紘: 「原研における放射線管理データの統
計的解析 — (1)ホットラボー —」, 保健物理学会第13回研究発表会要旨集, p. 44
(1978)

- 26) 熊沢蕃, 宮永一郎: 「衣服汚染の統計的考察」, 原子力学会昭和50年々会要旨集, F 34 (1975)
- 27) 土肥清一, 大津亘, 山崎喜光: 設計・製造・管理技術者のための信頼性の理論と実際(上), 富士通編, オーム社, 東京 (1966)
- 28) 市田嵩: 保全性工学入門, 日科技連出版社, 東京 (1976)
- 29) 増山元三郎: 少数例のまとめ方(1), 竹内書店, 東京 (1964)
- 30) 熊沢蕃, 松井浩: 「放射線管理データの高い値の出現頻度推定法に関する考察」, 保健物理, 投稿中

Fig. 1 正規分布の密度関数グラフ ($\mu = 1.0$ の場合)Fig. 2 対数正規分布の密度関数グラフ ($\mu = 1.0$ の場合)

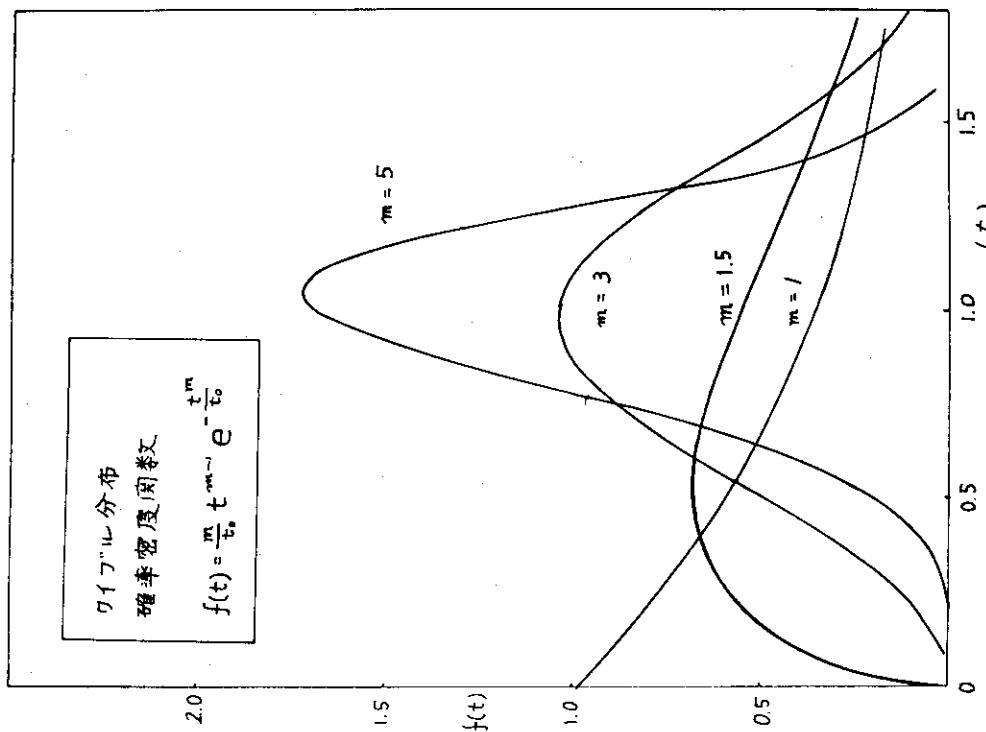


Fig. 4 ワイブル分布の確率密度関数グラフ
(平均値が1となるように t_0 を選んだ)

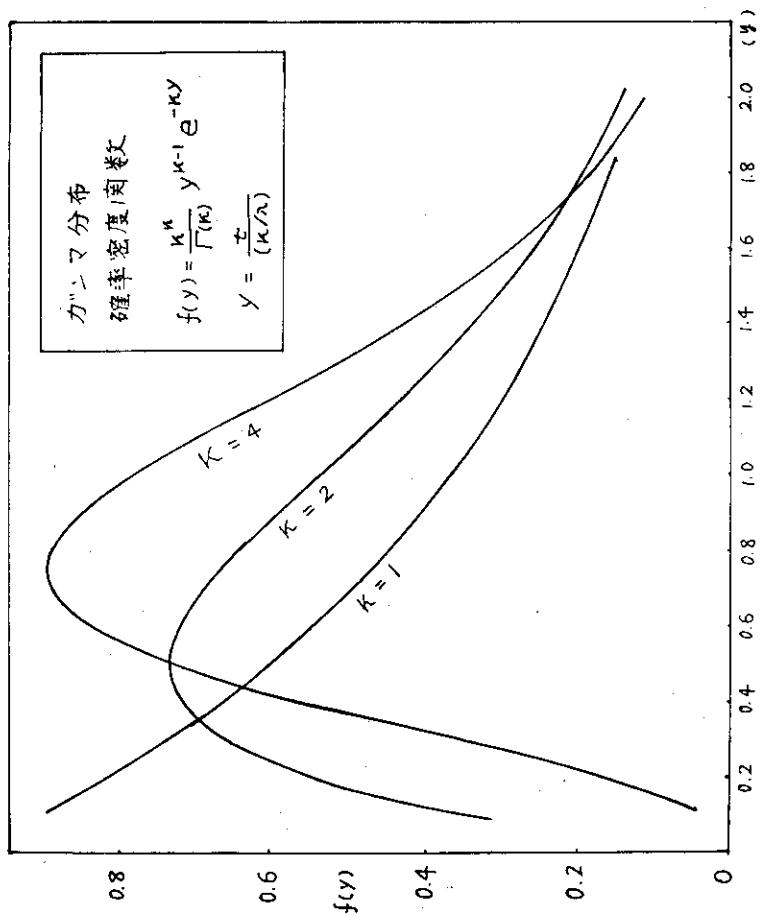


Fig. 3 ガンマ分布の密度関数グラフ

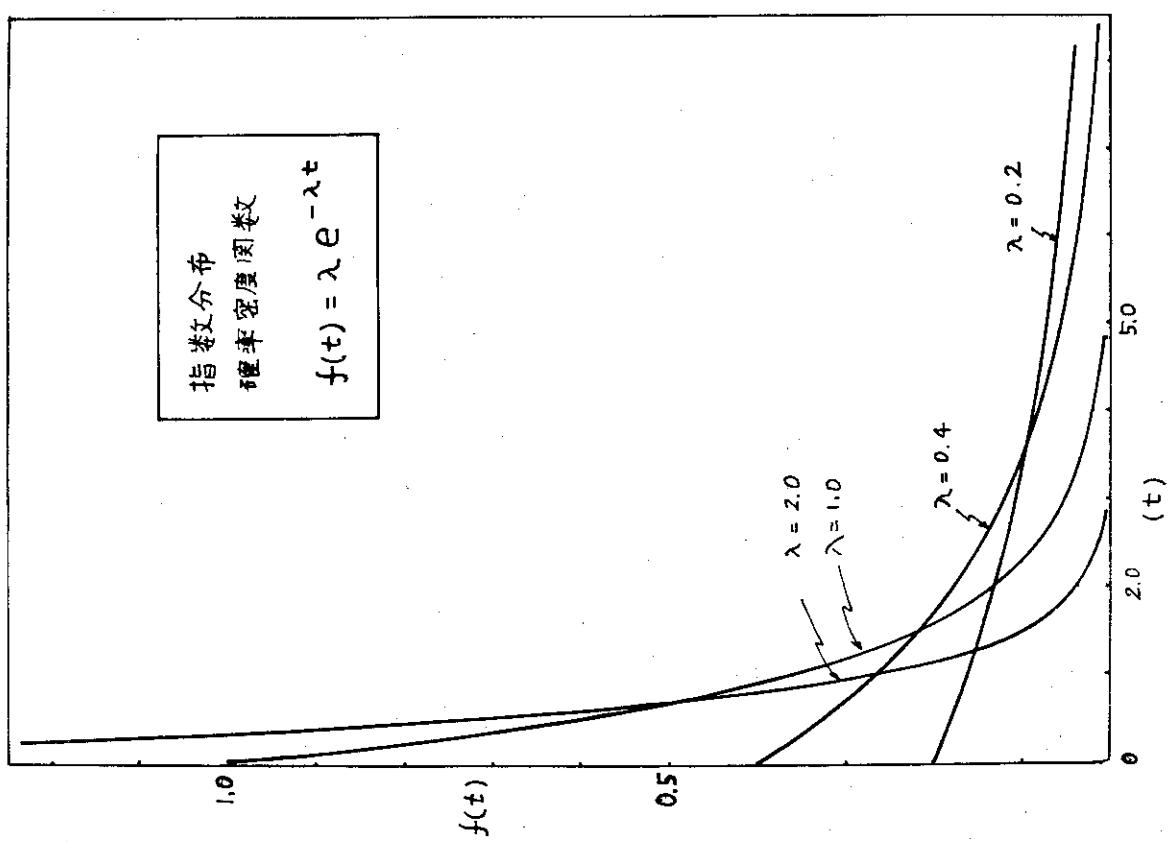


Fig.5 指数分布の密度関数グラフ

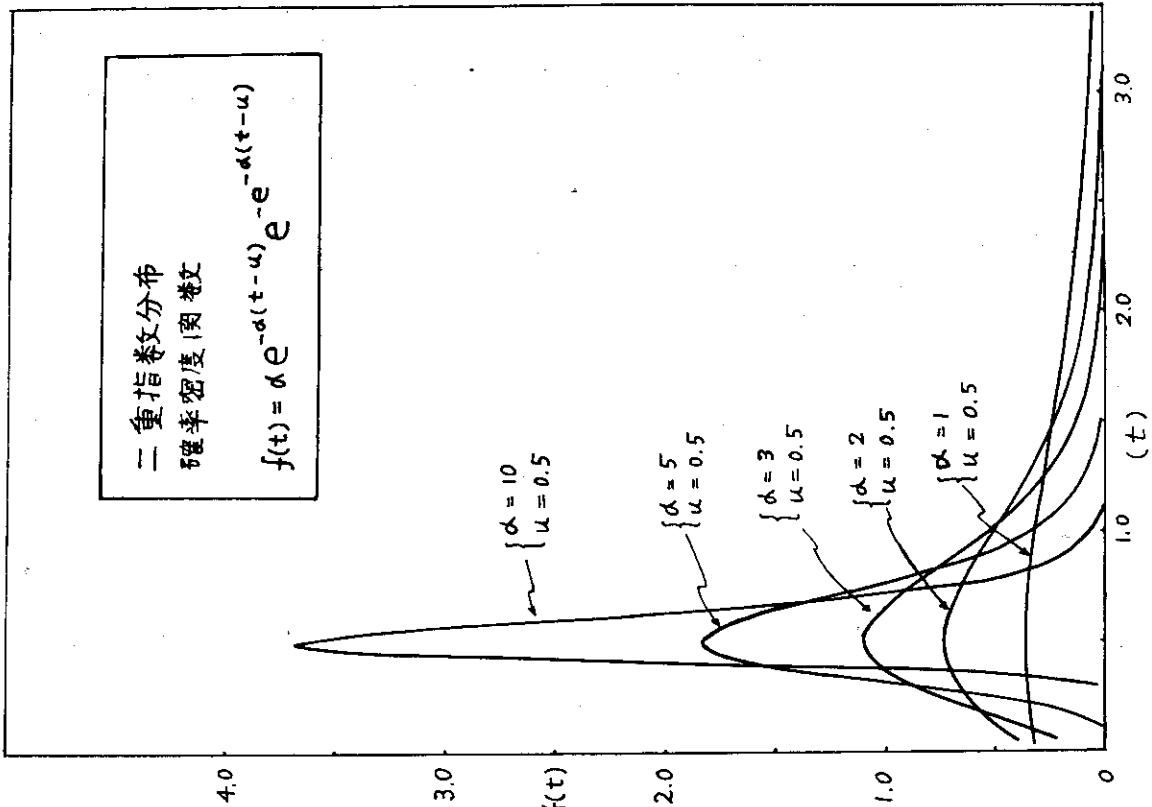


Fig.6 二重指数分布の密度関数グラフ

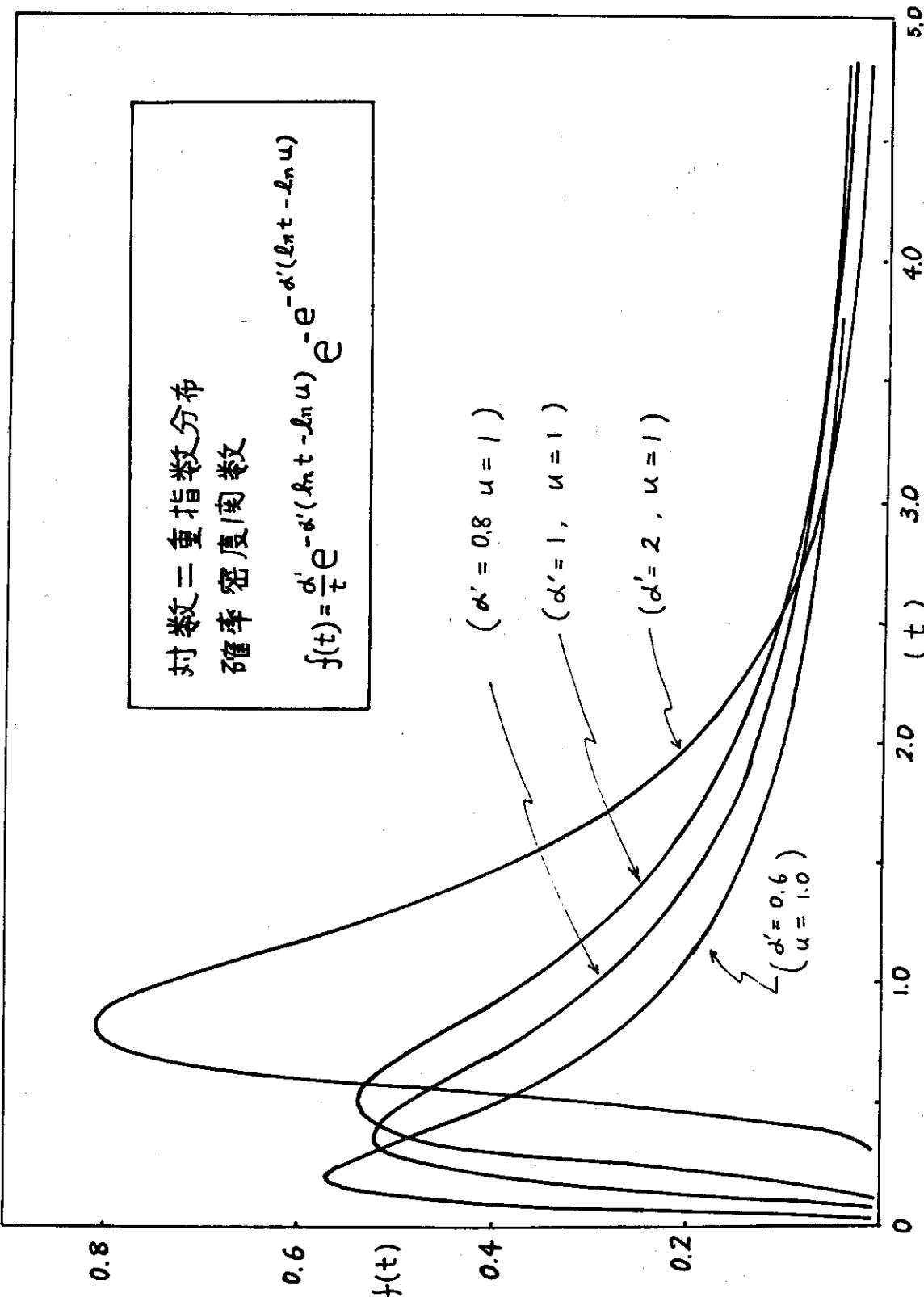


Fig.7 対数二重指數分布の密度関数グラフ

正規確率紙

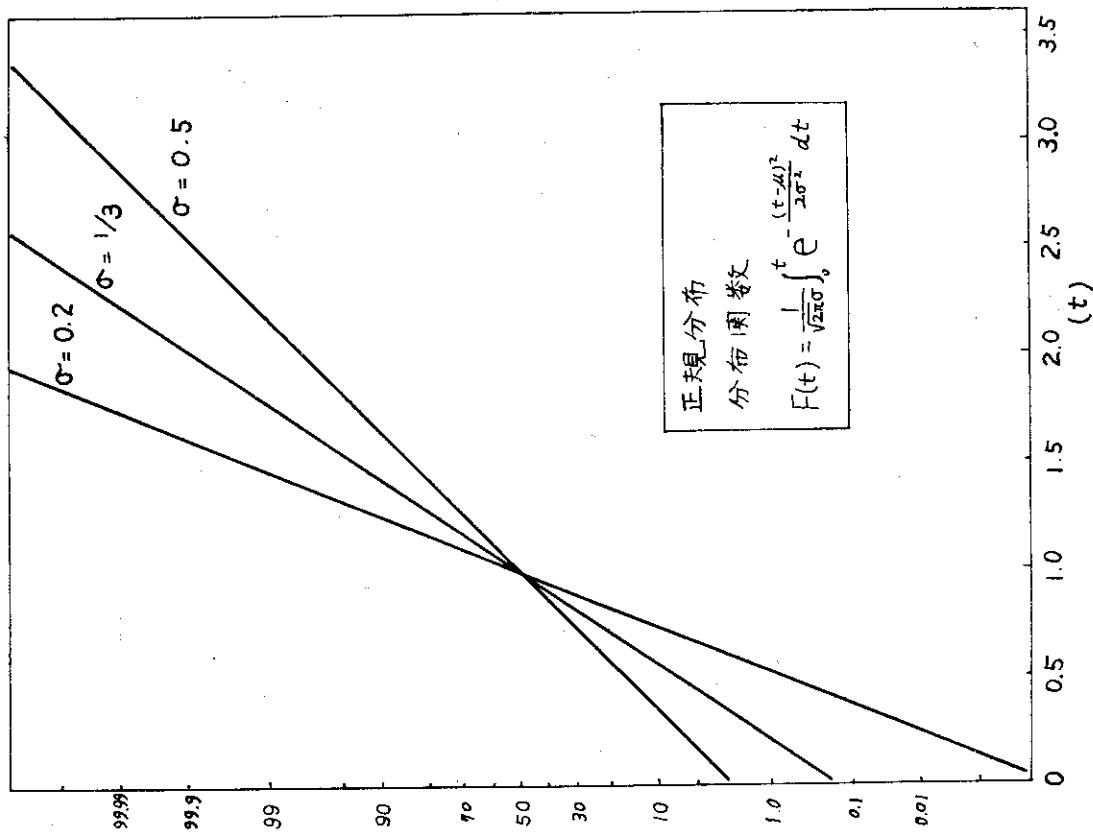


Fig. 8 正規確率紙における正規分布関数のグラフ

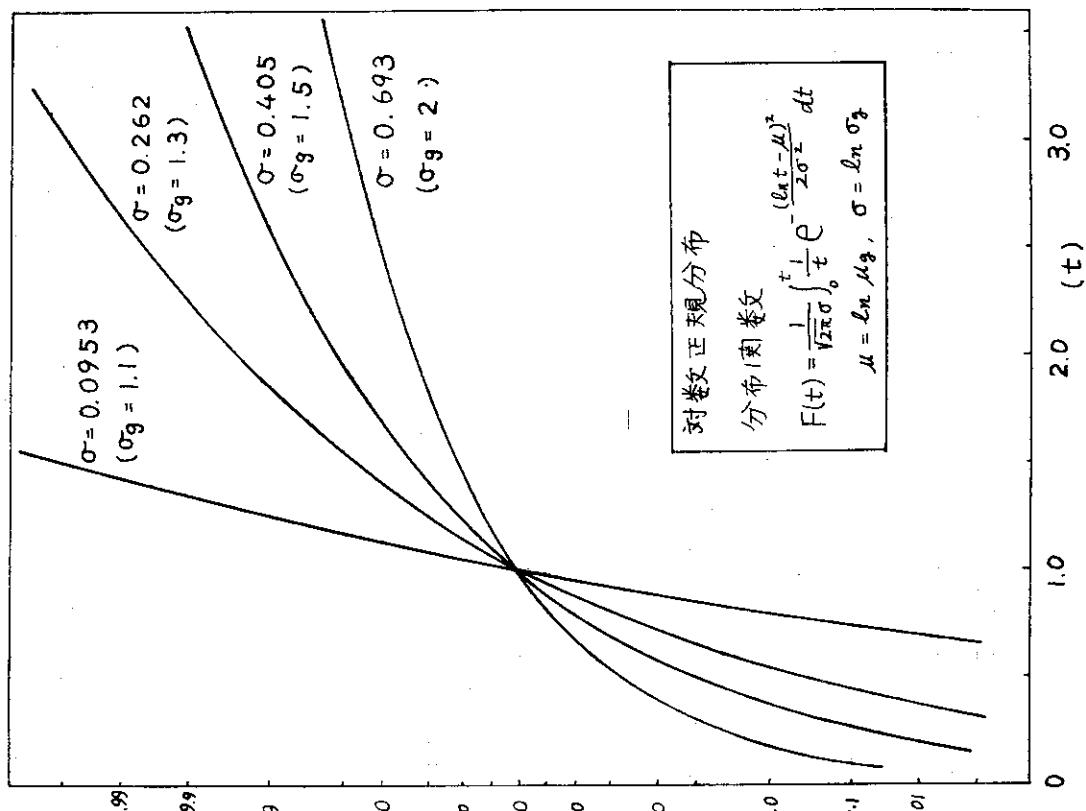


Fig. 9 正規確率紙における対数正規分布関数のグラフ

正規確率紙

正規確率紙

JAERI-M 8757

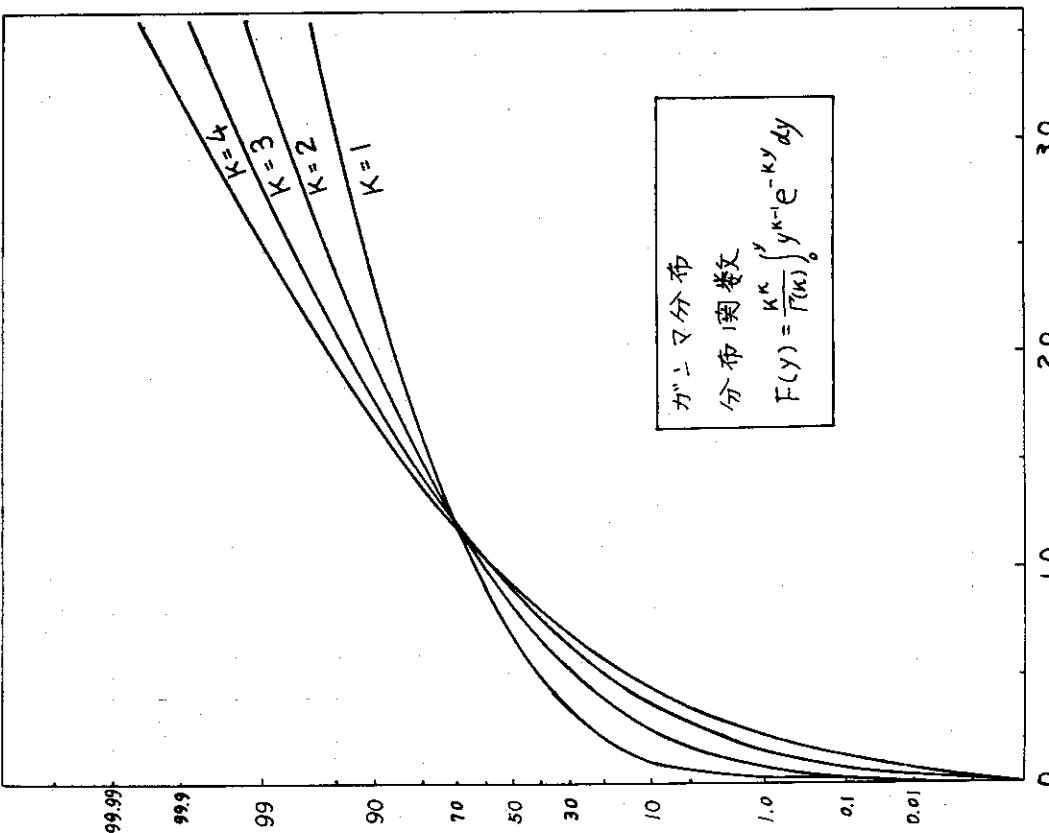


Fig. 10 正規確率紙におけるガンマ分布関数のグラフ

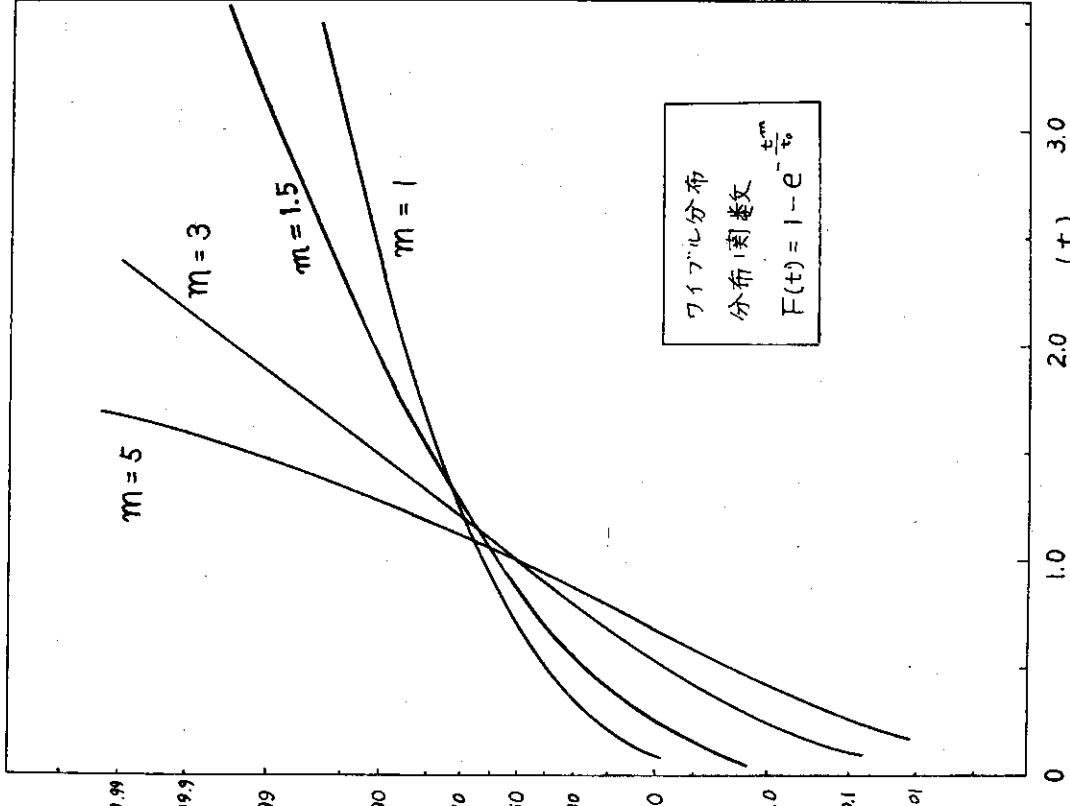


Fig. 11 正規確率紙におけるワイブル分布関数のグラフ

正規確率紙

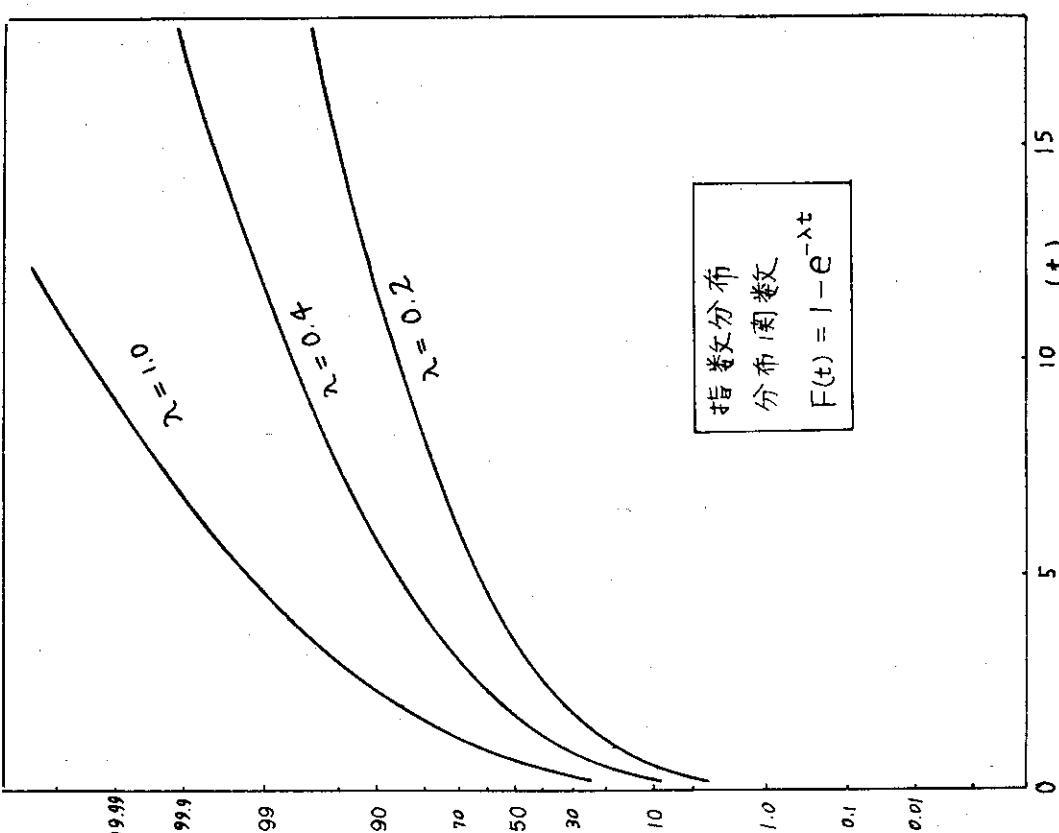


Fig. 12 正規確率紙における指數分布関数のグラフ

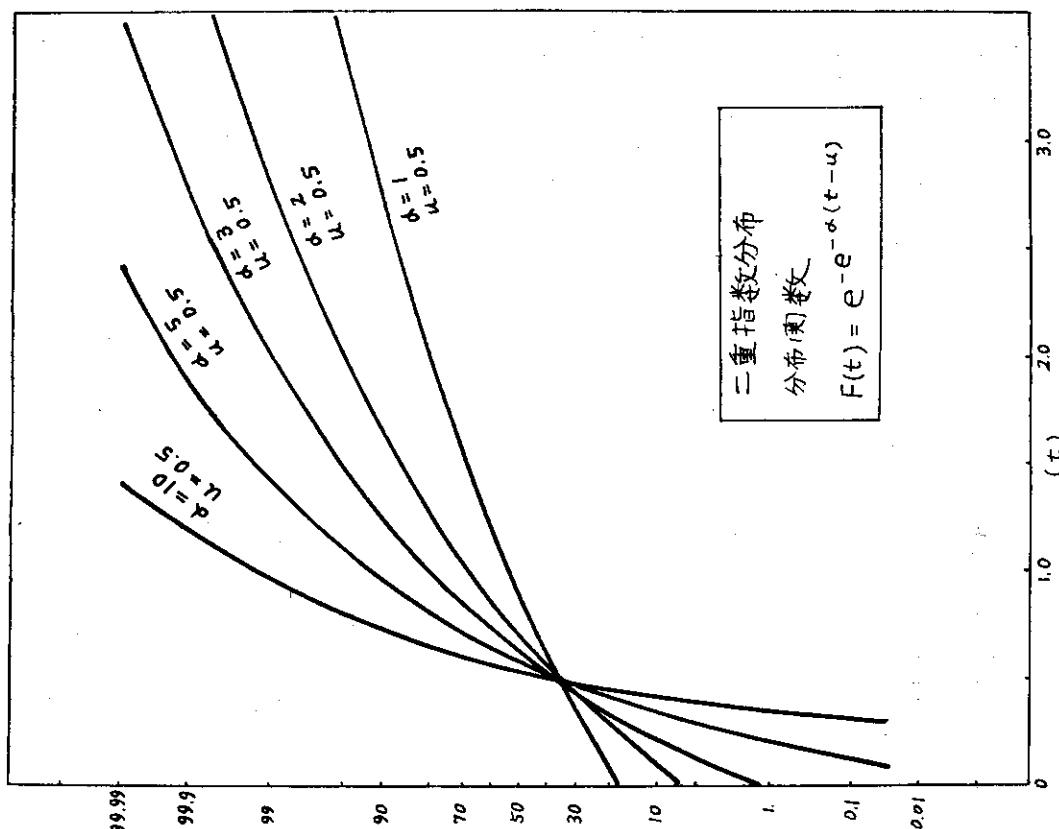
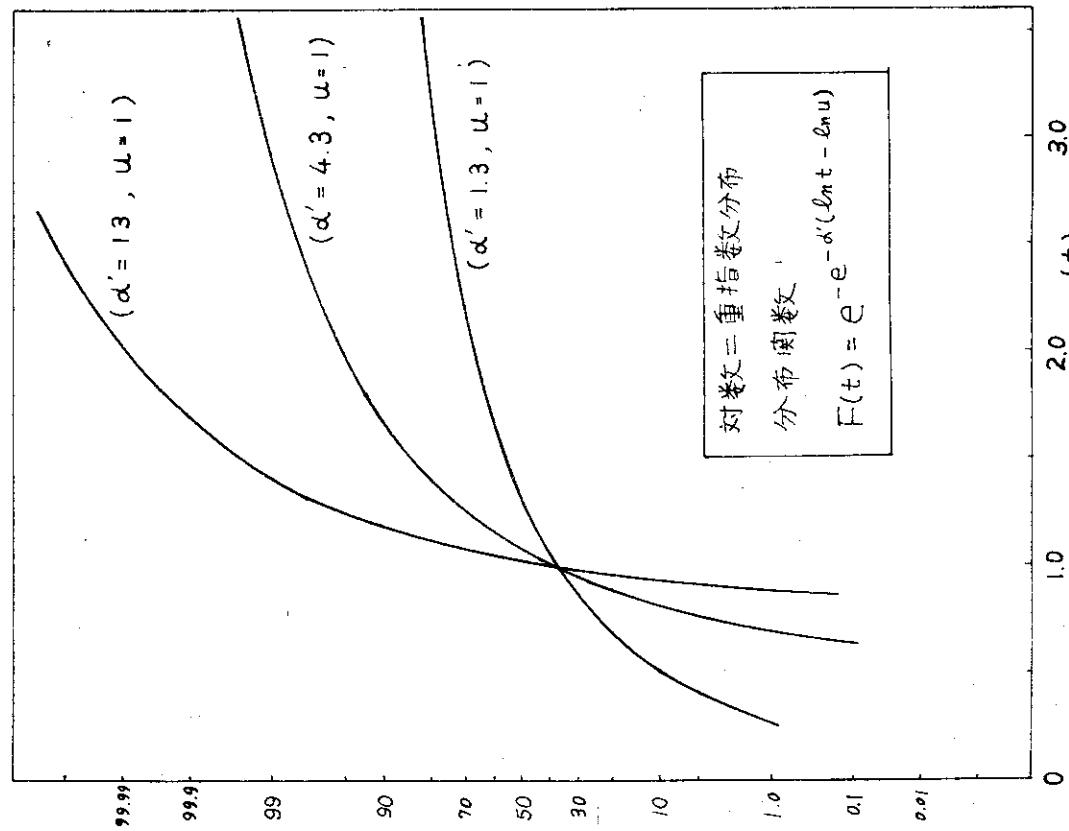


Fig. 13 正規確率紙における二重指數分布関数のグラフ

正規確率紙



対数正規確率紙

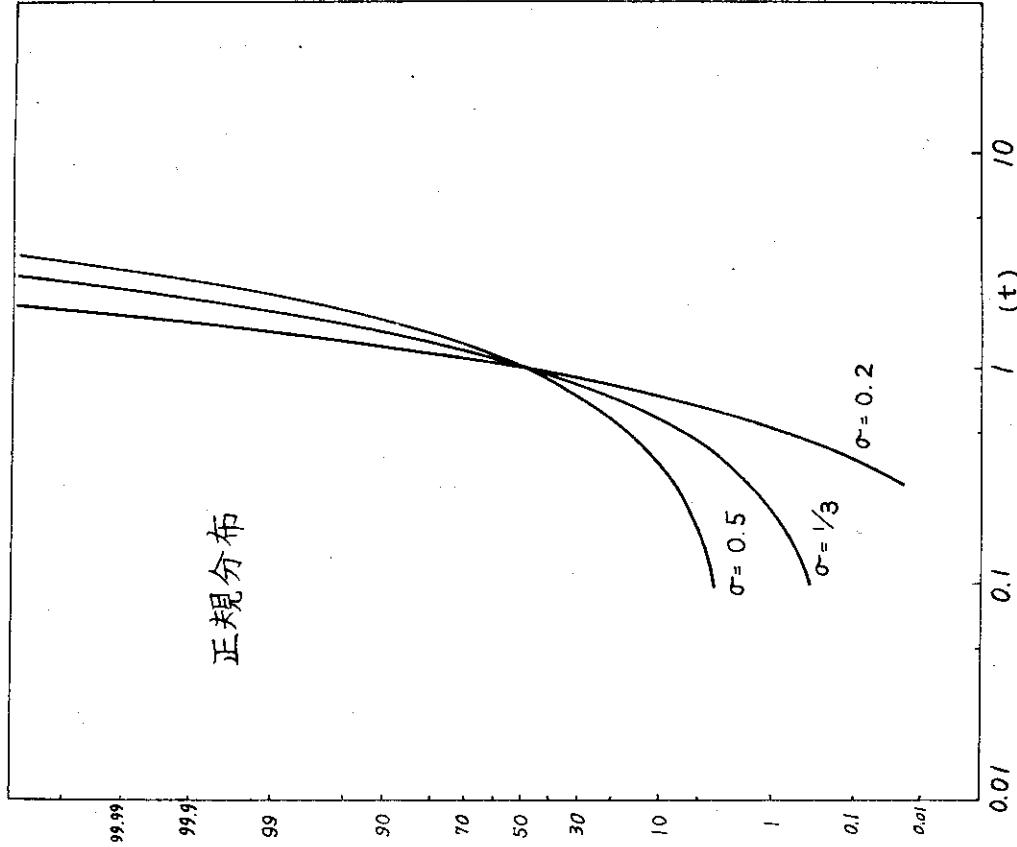


Fig. 14 正規確率紙における対数二重指數分布関数のグラフ

Fig. 15 対数正規確率紙における正規分布関数のグラフ

対数正規確率紙

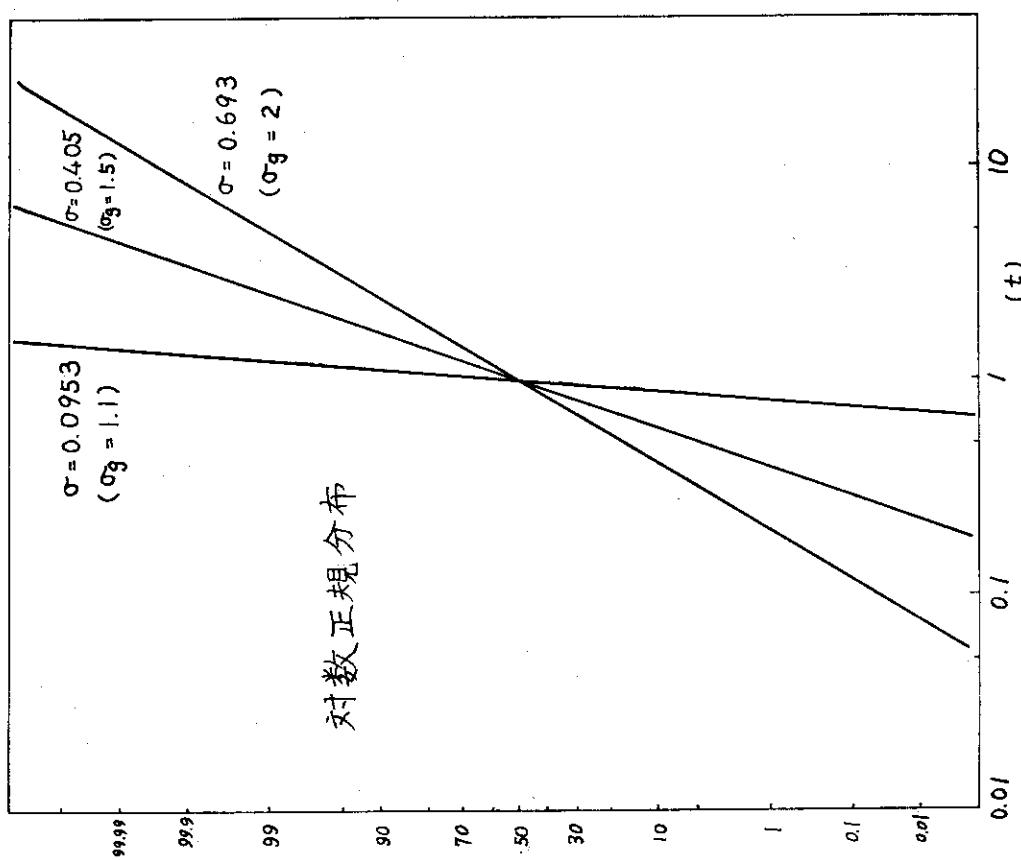


Fig. 16 対数正規確率紙における対数正規分布関数のグラフ

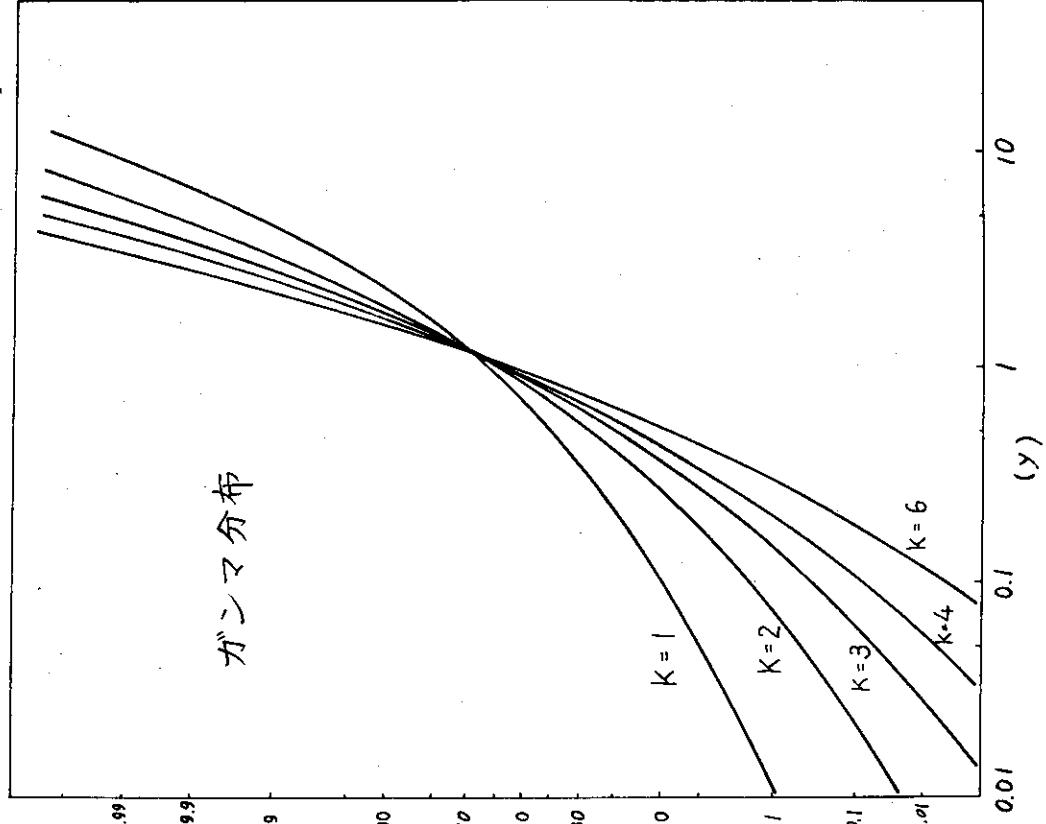


Fig. 17 対数正規確率紙におけるガニマ分布関数のグラフ

対数正規確率紙

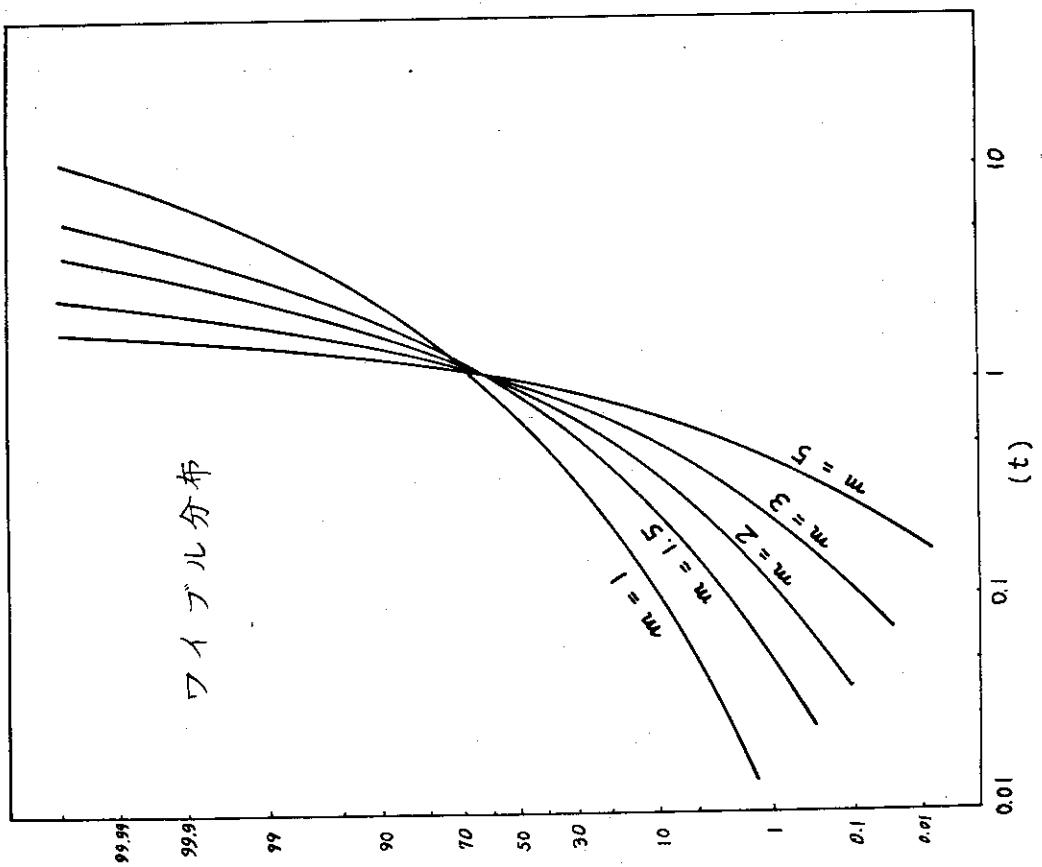


Fig. 18 対数正規確率紙におけるワイル分布関数のグラフ

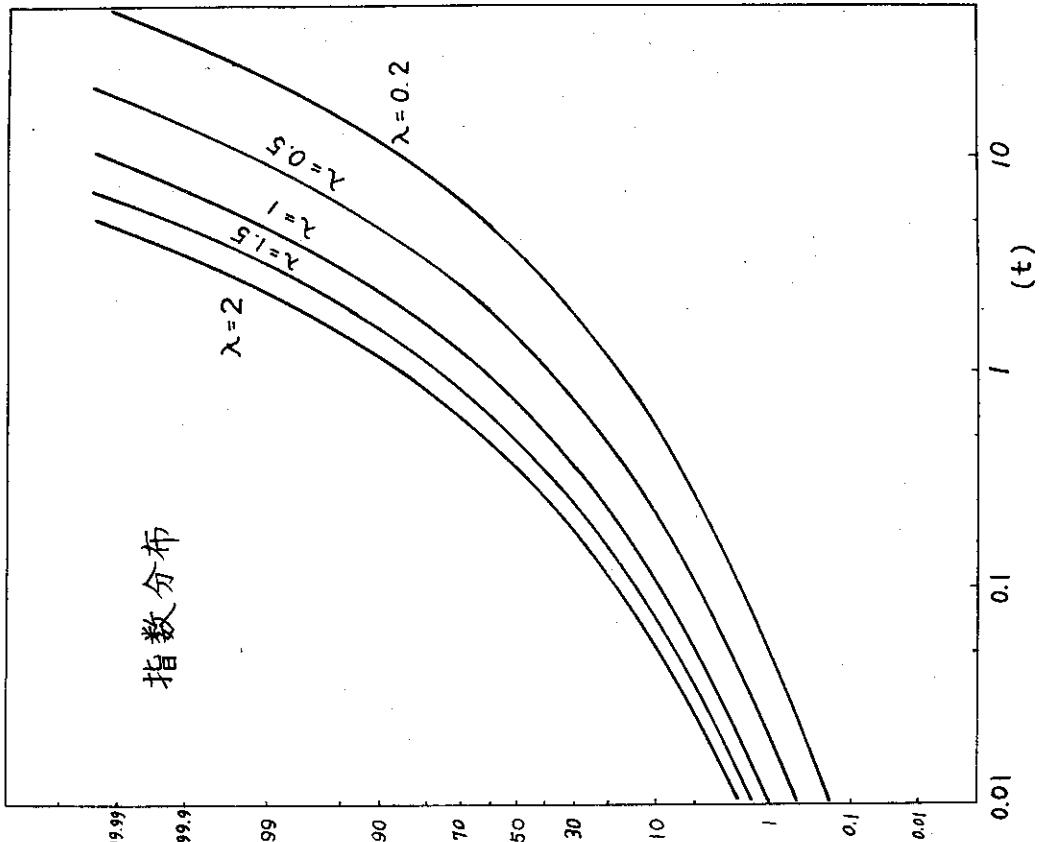


Fig. 19 対数正規確率紙における指數分布関数のグラフ

対数正規確率紙

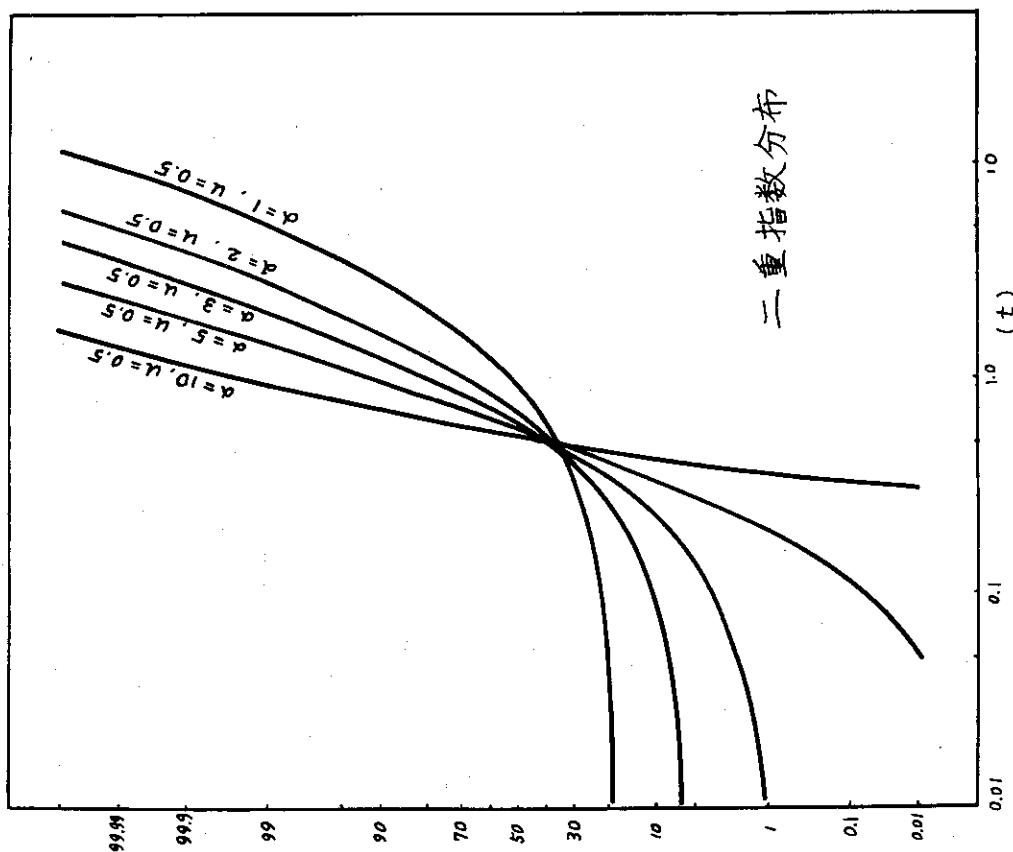


Fig. 20 対数正規確率紙における二重指數分布関数のグラフ

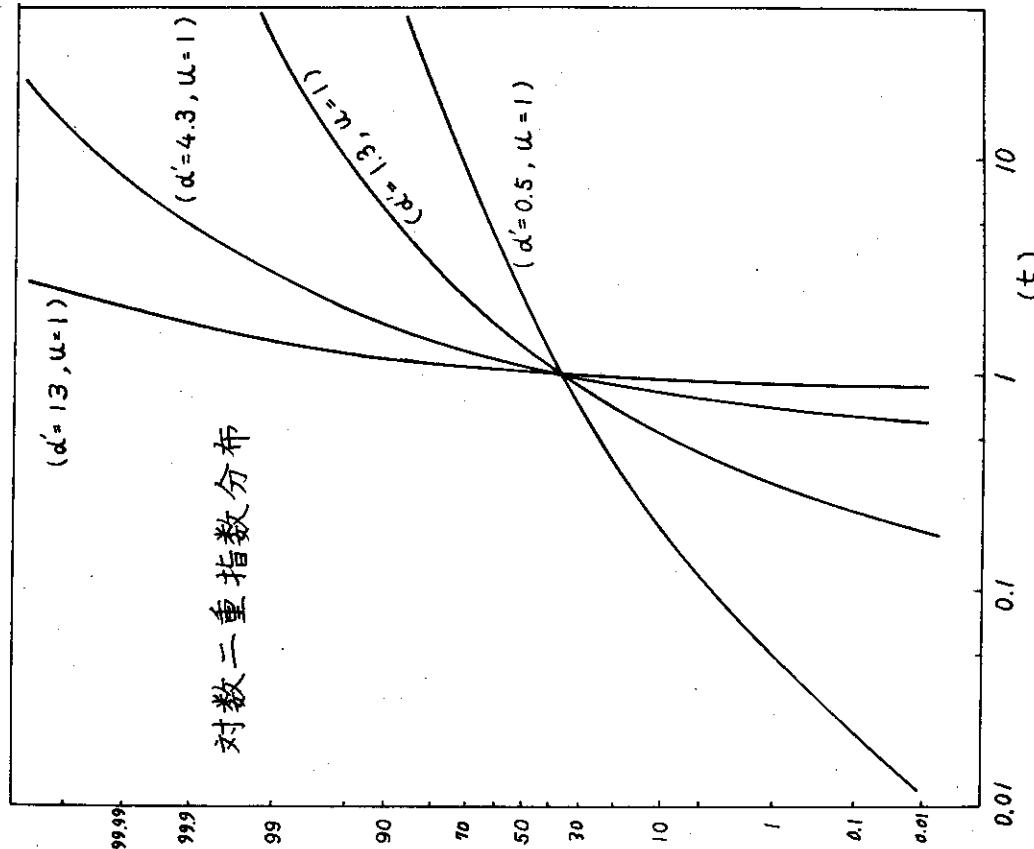


Fig. 21 対数正規確率紙における対数二重指數分布関数のグラフ

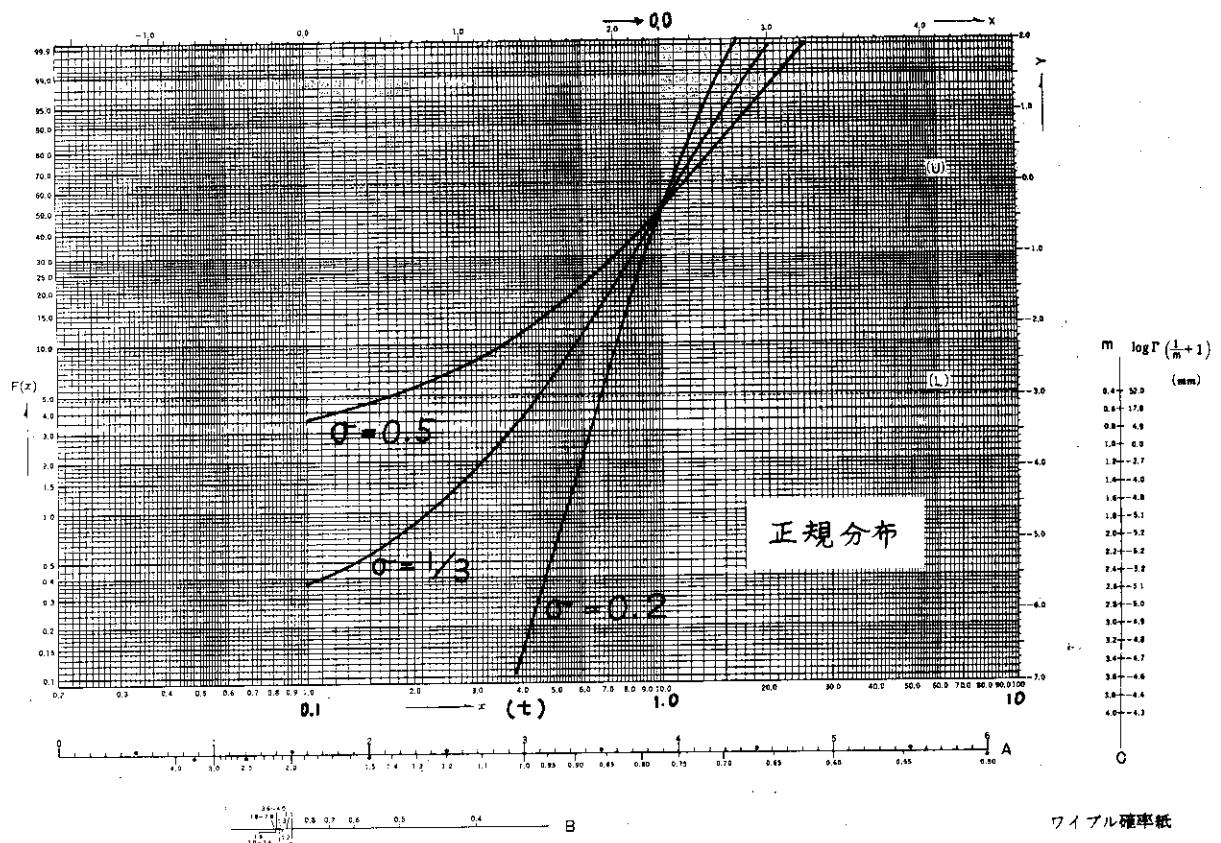


Fig. 22 ワイブル確率紙における正規分布関数のグラフ

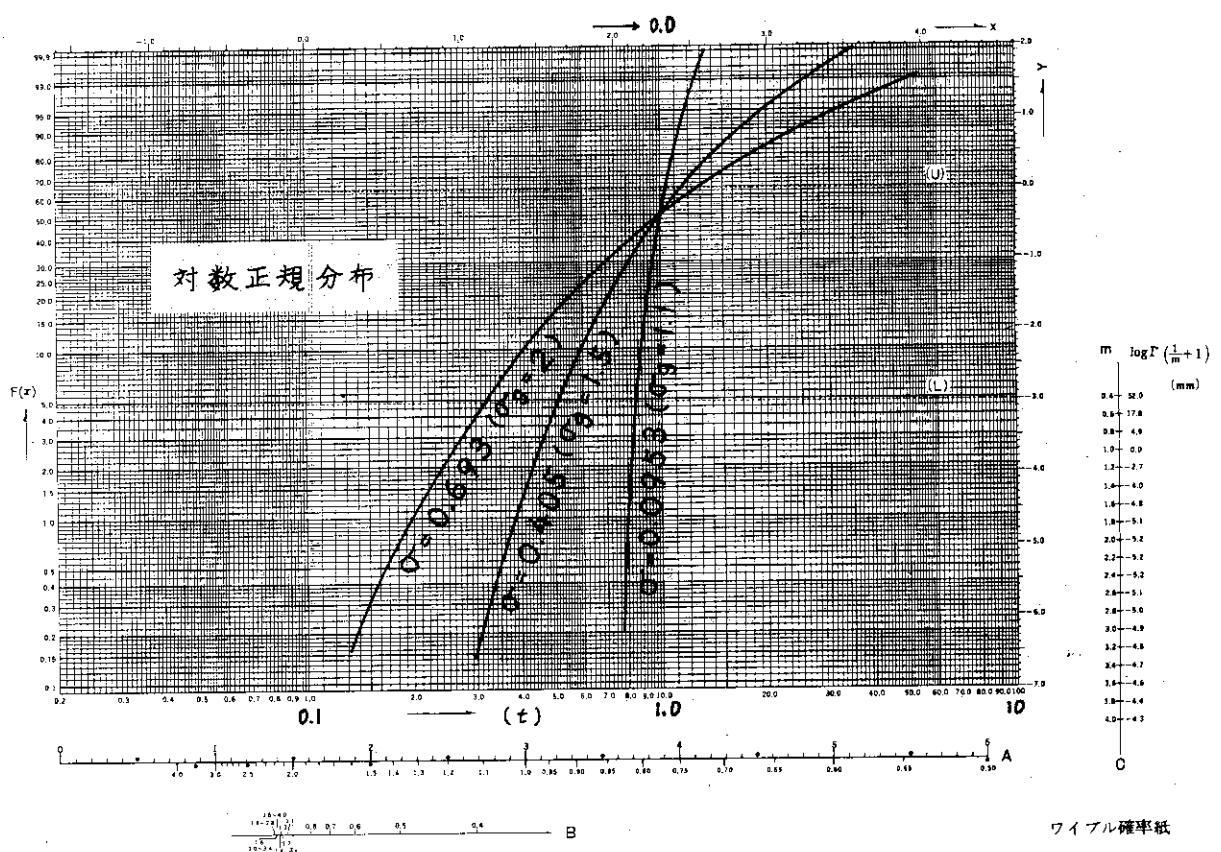


Fig. 23 ワイブル確率紙における対数正規分布関数のグラフ

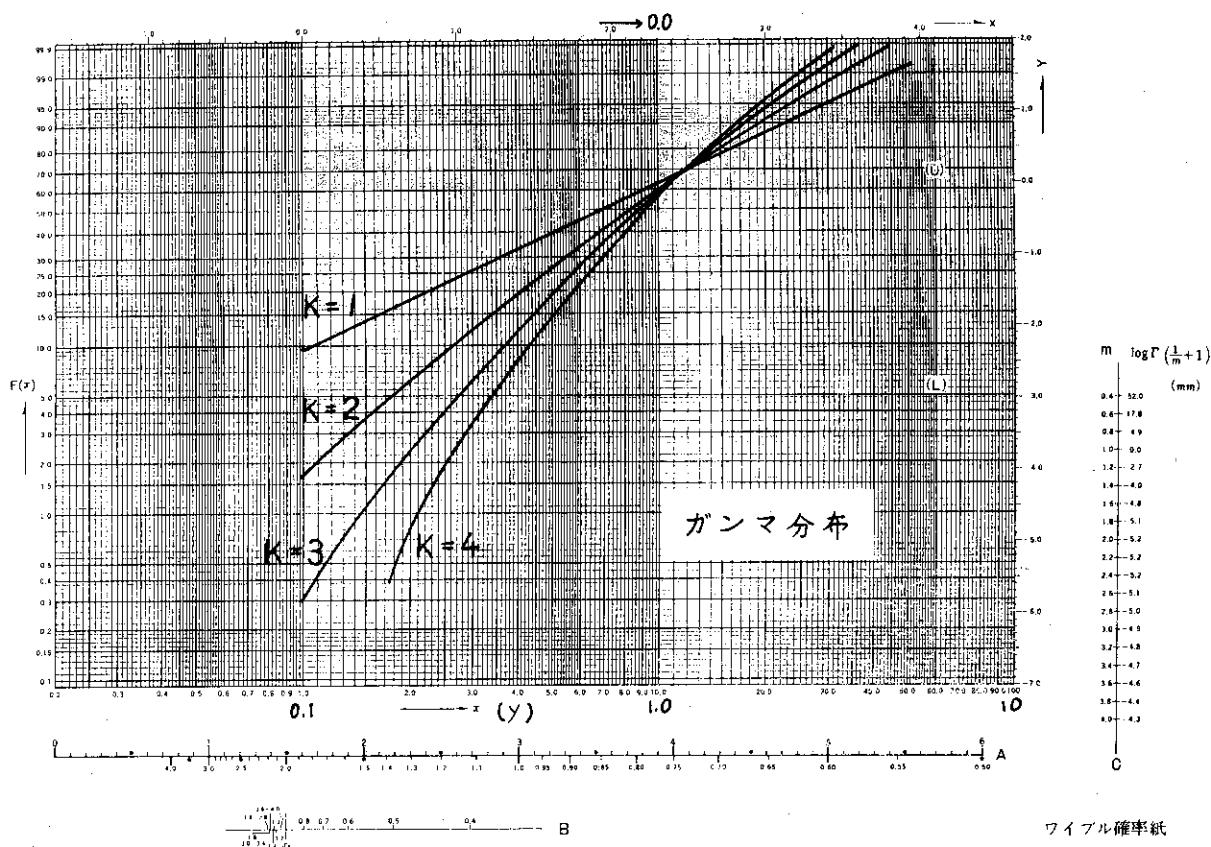


Fig. 24 ワイブル確率紙におけるガンマ分布関数のグラフ

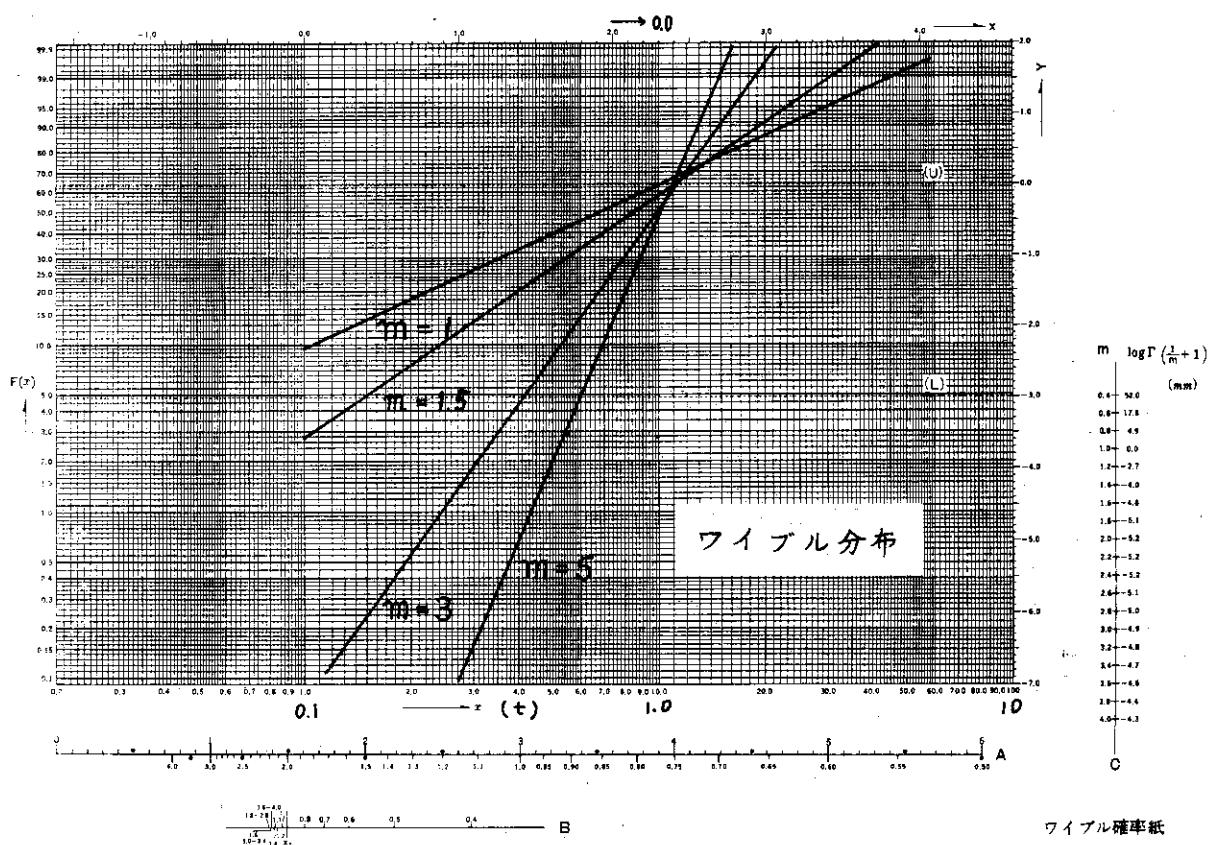


Fig. 25 ワイブル確率紙におけるワイブル分布関数のグラフ

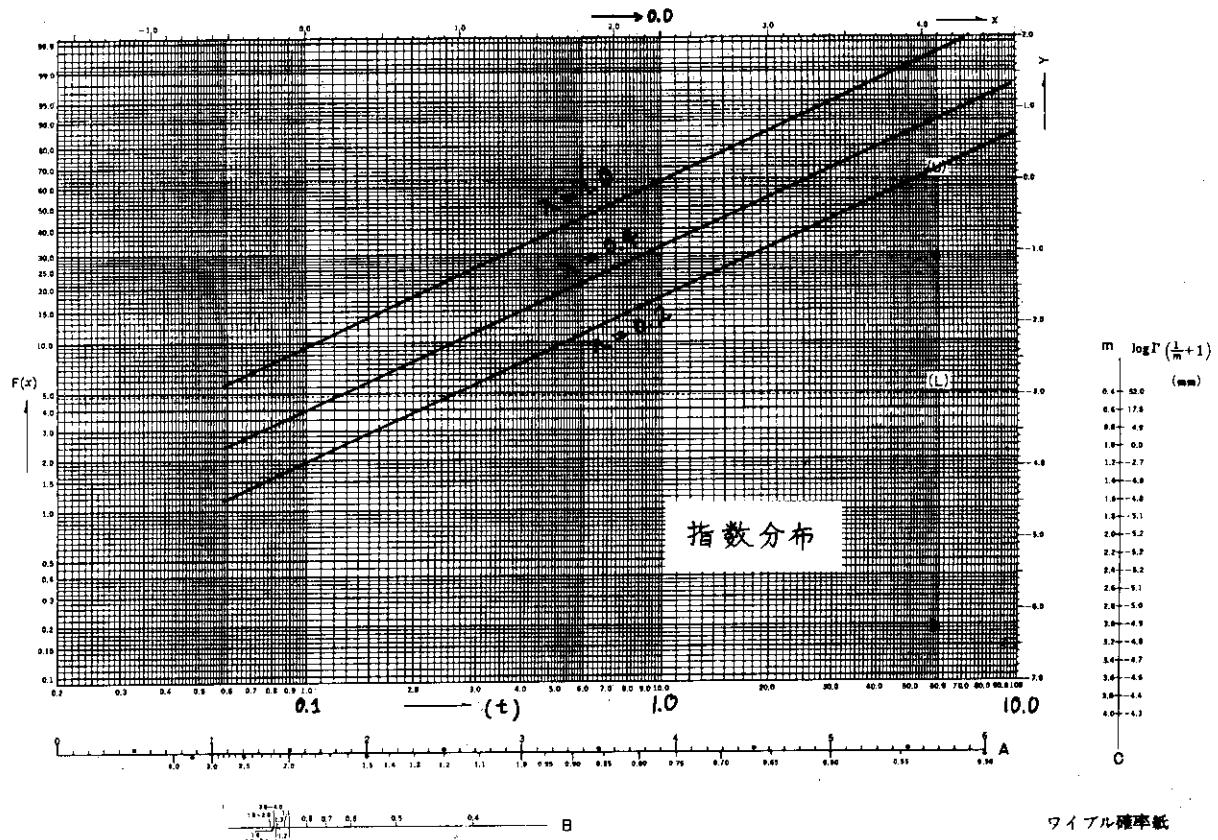


Fig. 26 ワイブル確率紙における指数分布関数のグラフ

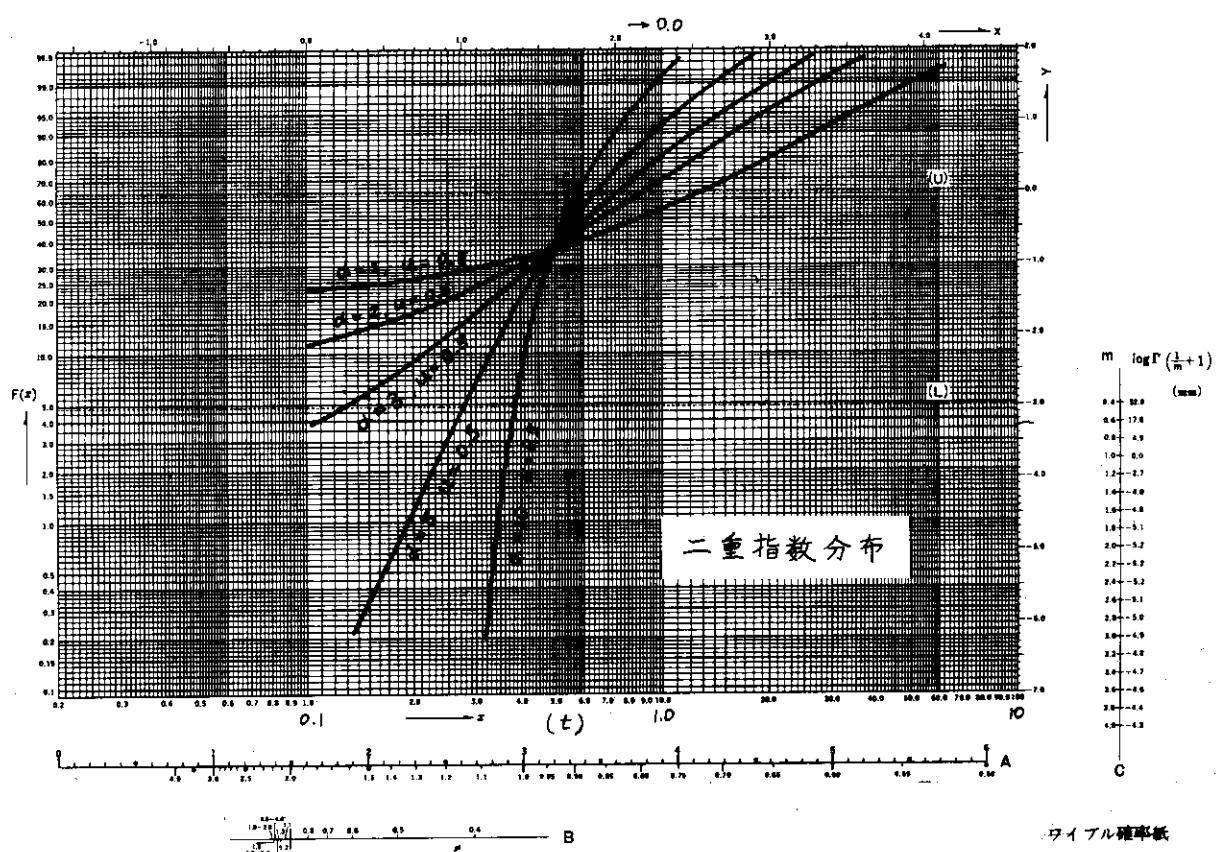


Fig. 27 ワイブル確率紙における二重指数分布関数のグラフ

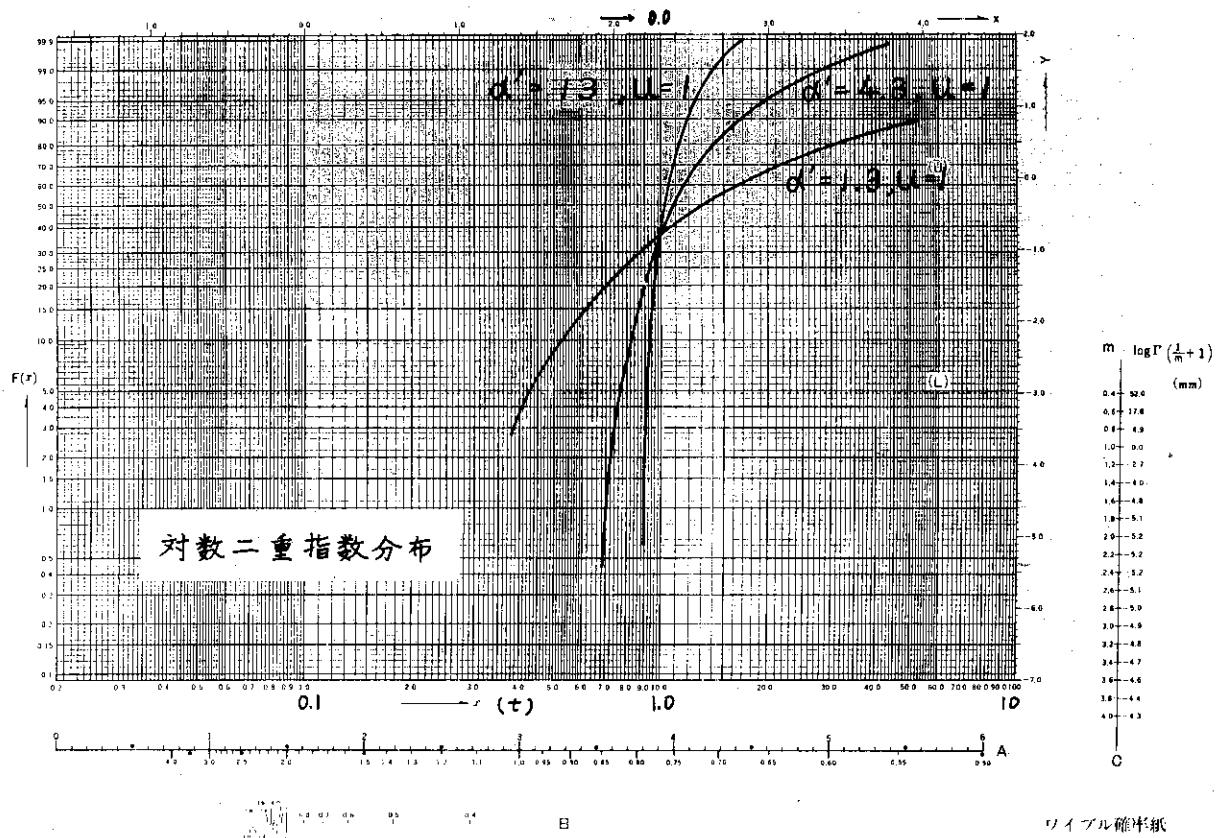


Fig. 28 ワイブル確率紙における対数二重指数分布関数のグラフ

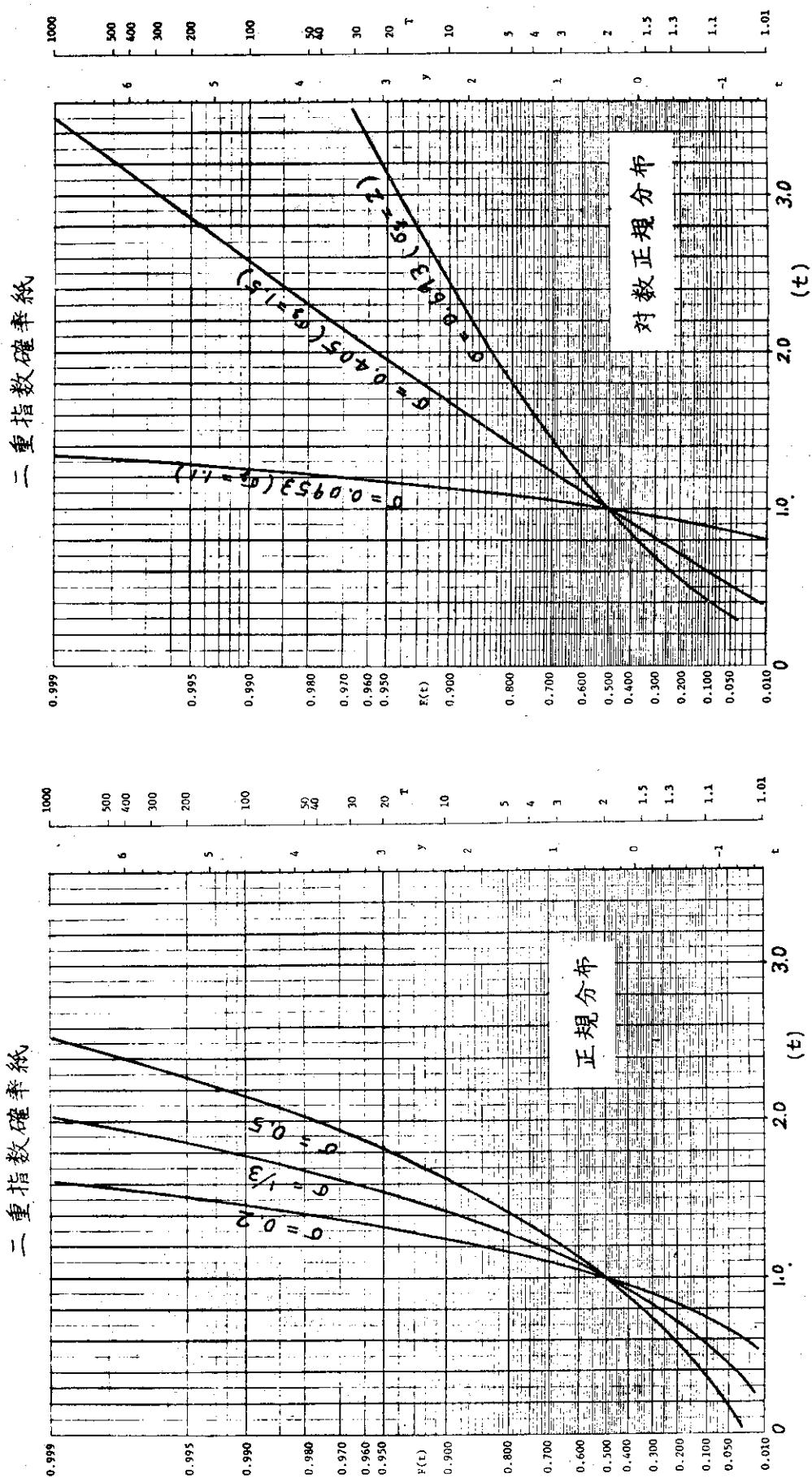


Fig. 29 二重指數確率紙における正規分布関数のグラフ

Fig. 30 二重指數確率紙における対数正規分布関数のグラフ

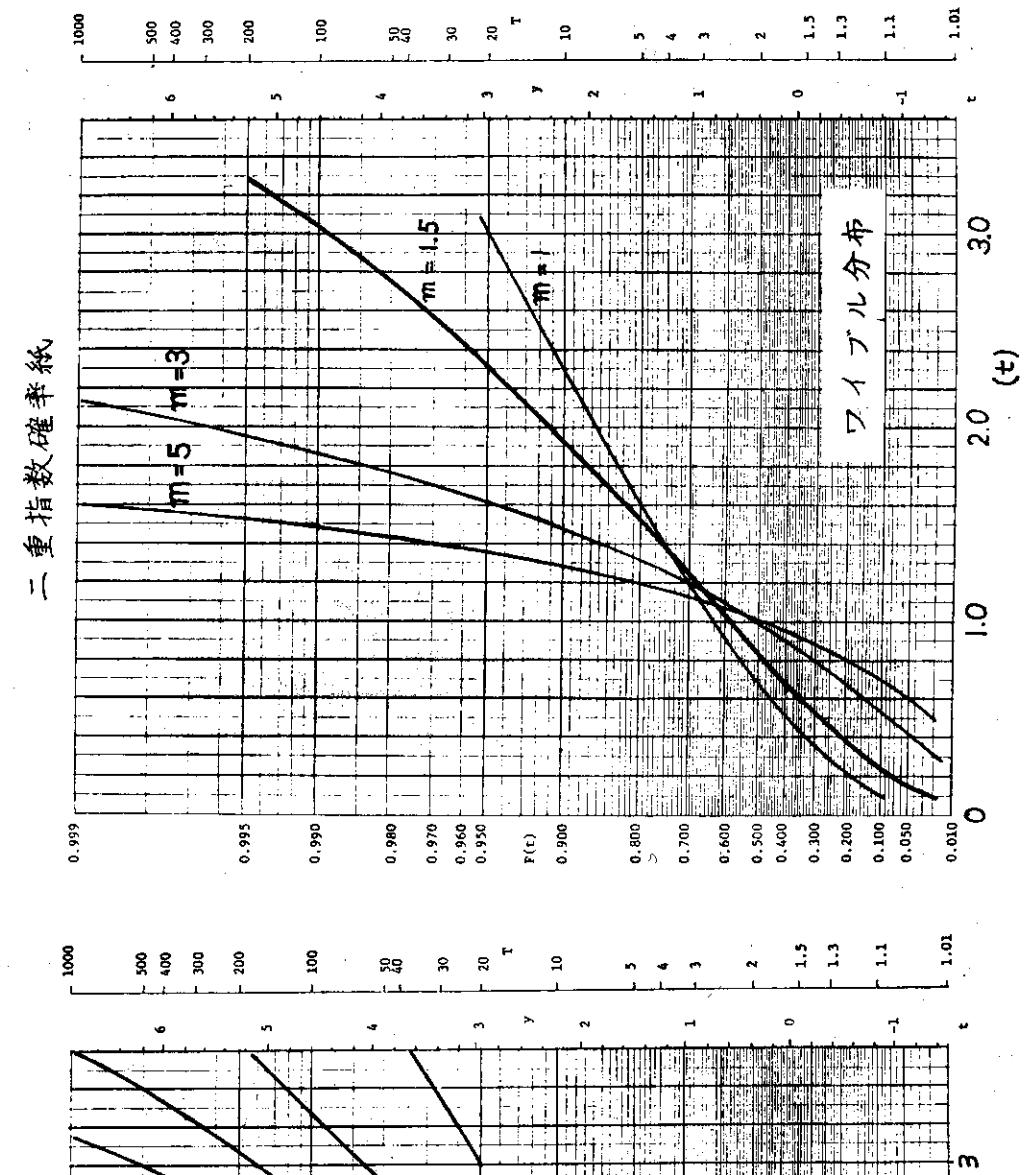
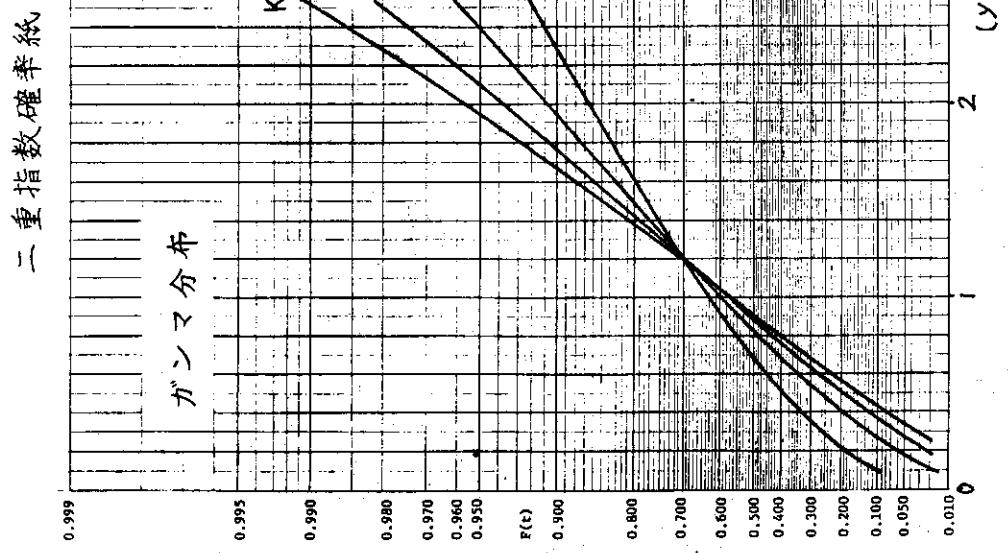


Fig. 31 二重指數確率紙におけるガンマ分布関数のグラフ

Fig. 32 二重指數確率紙におけるワイルブル分布関数のグラフ

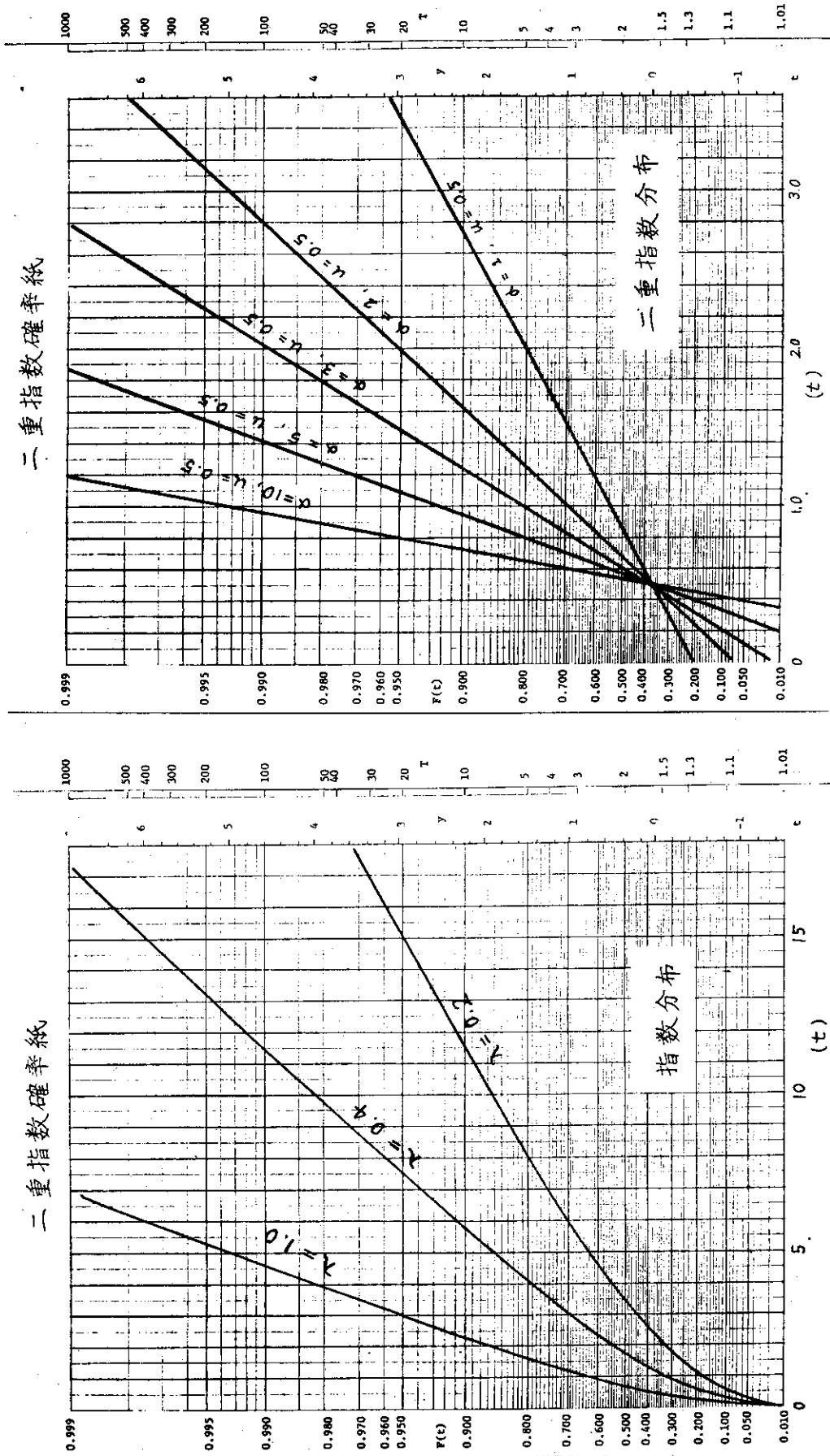


Fig. 33 二重指數確率紙における指數分布関数のグラフ

Fig. 34 二重指數確率紙における二重指數分布関数のグラフ

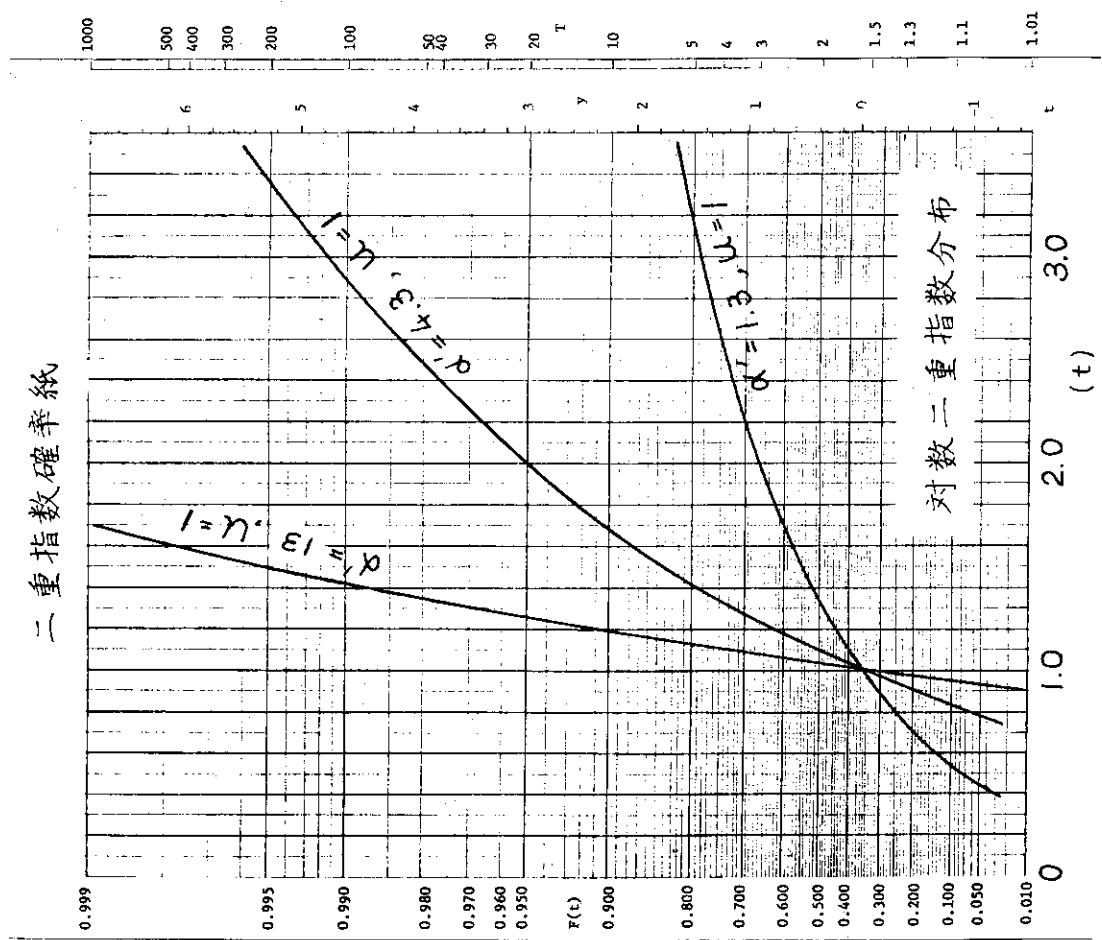


Fig. 35 二重指數確率紙における対数二重指數分布関数のグラフ

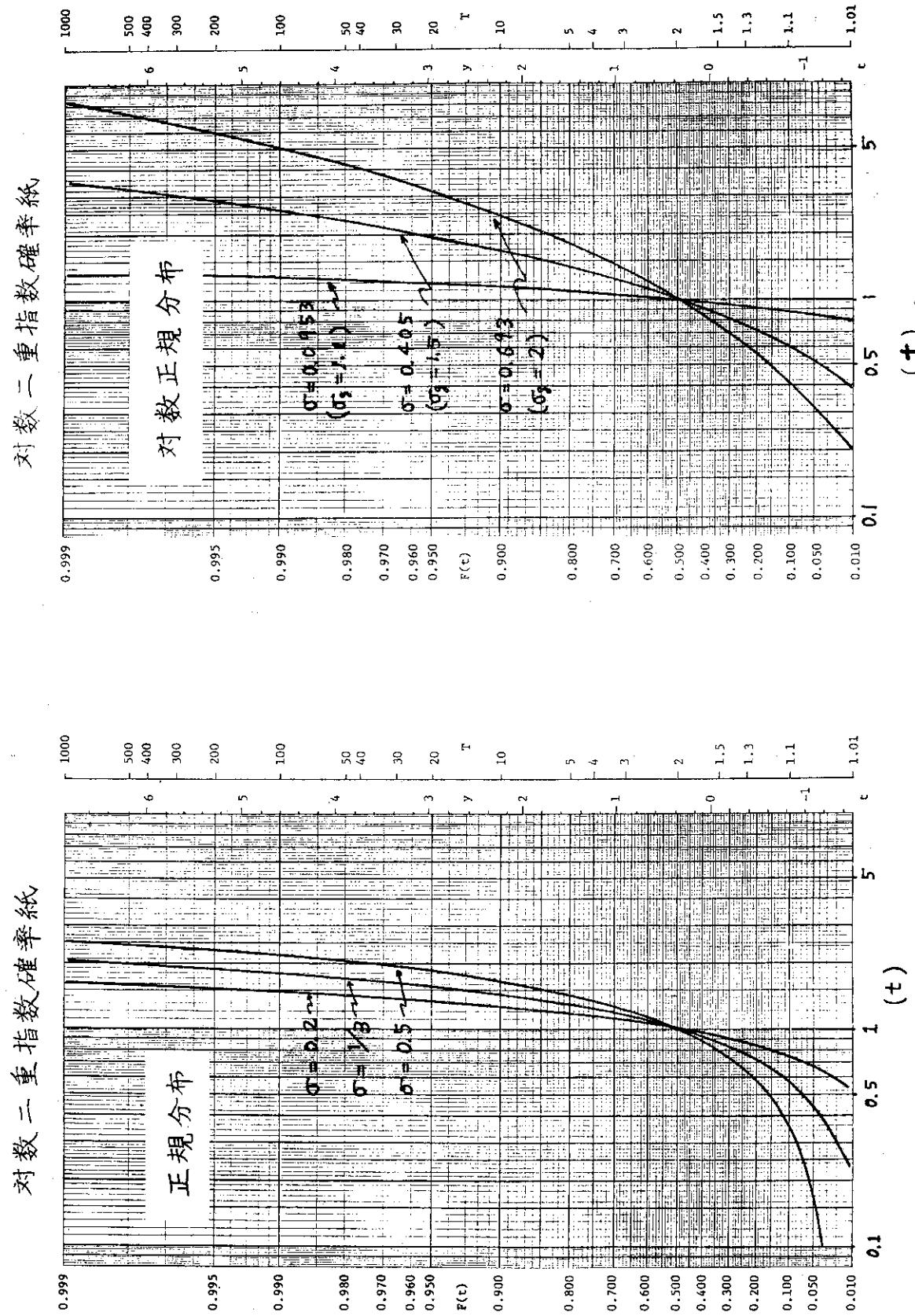


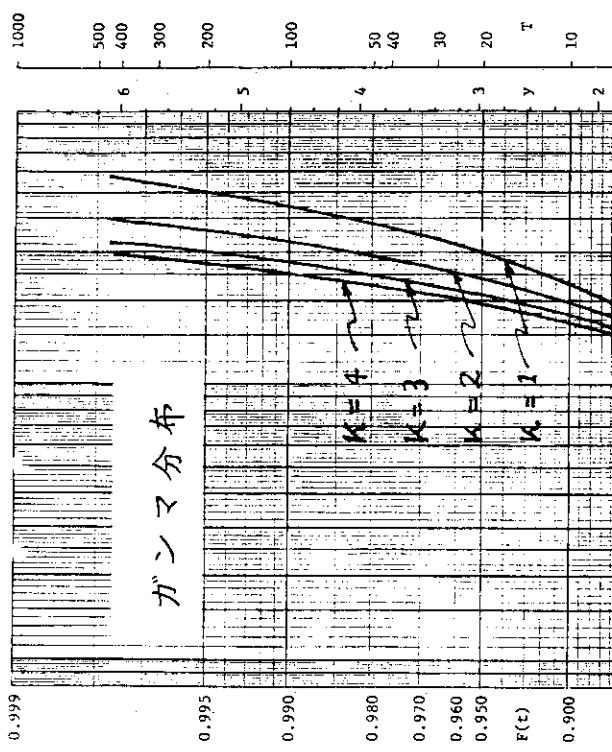
Fig. 36 対数二重指數確率紙における正規分布関数のグラフ



Fig. 37 対数二重指數紙における対数正規分布関数のグラフ

対数二重指數確率紙

ガンマ分布



対数二重指數確率紙

ワイルブル分布

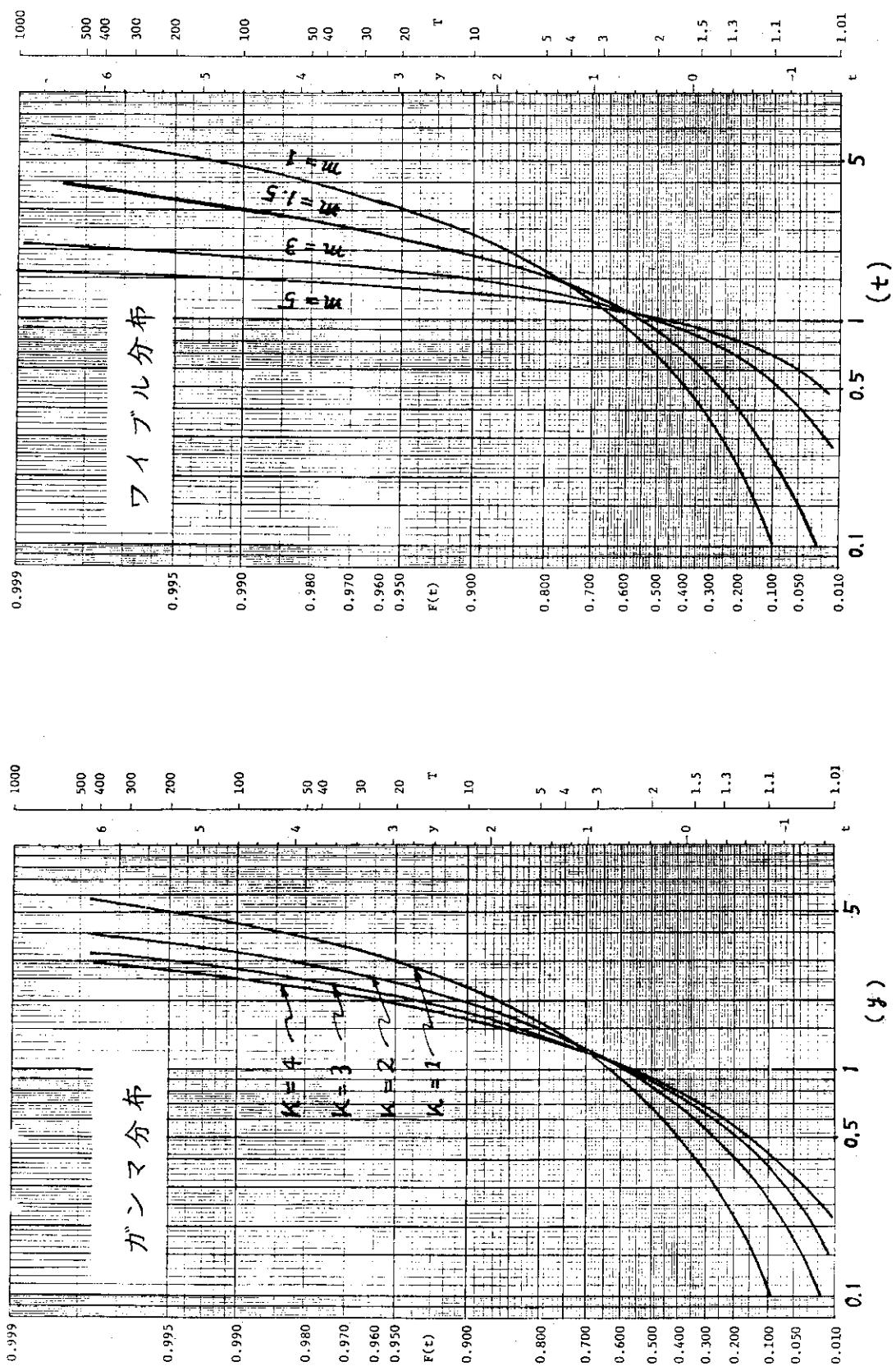


Fig. 38 対数二重指數確率紙におけるガンマ分布関数のグラフ

Fig. 39 対数二重指數確率紙におけるワイルブル分布関数のグラフ

対数二重指數確率紙

対数二重指數確率紙

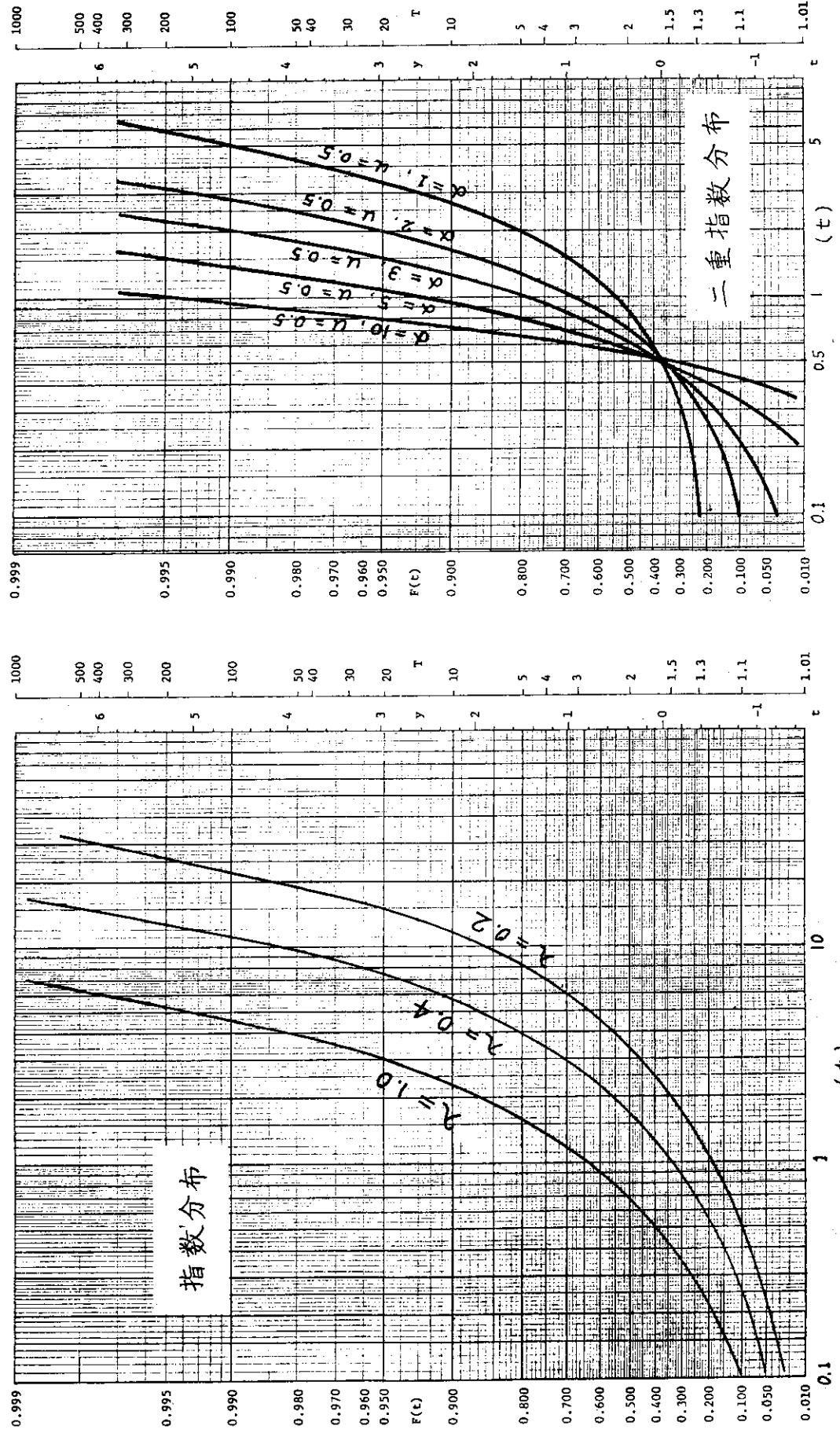


Fig. 40 対数二重指數確率紙における指數分布関数のグラフ

JAERI-M 8757

Fig. 41 対数二重指數確率紙における二重指數分布関数のグラフ

対数二重指數確率紙

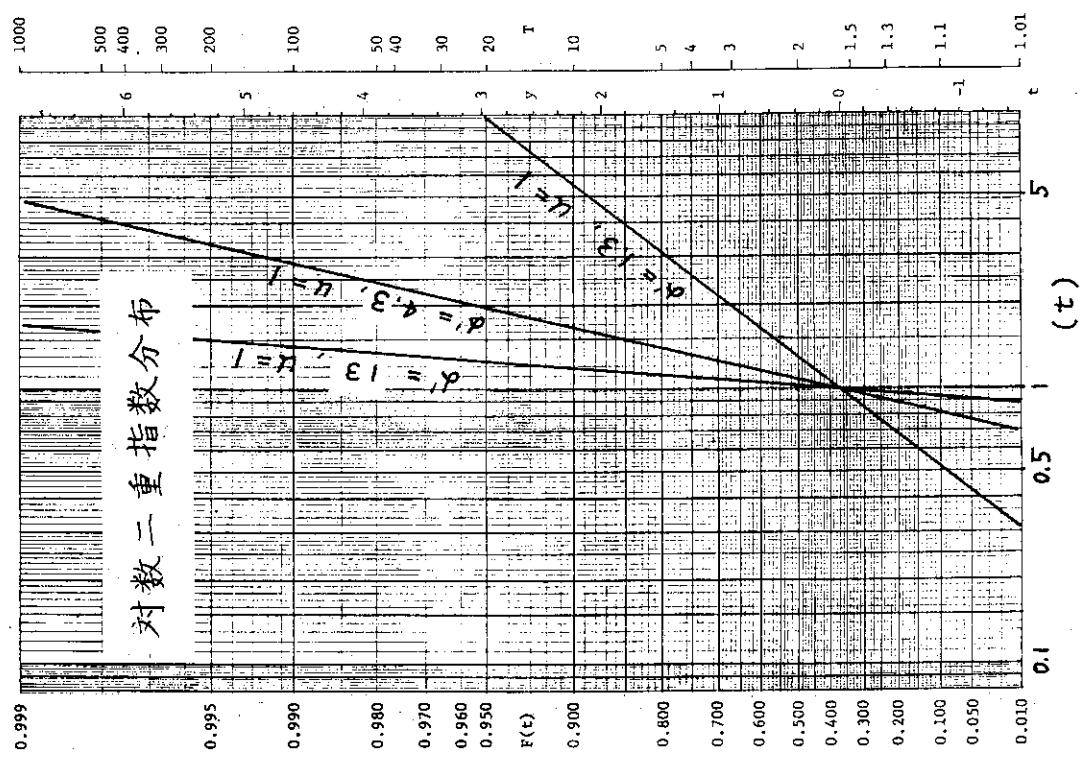


Fig. 42 対数二重指數確率紙における対数二重指數分布関数のグラフ

付録 確率紙の使い方

確率紙は、すべて、対応する分布グラフが直線になるように作られている。そのため、その直線が確率紙上の特定値を通るときの変数値からパラメタを決定することができる。

1. 正規確率紙（用紙1）

構成 用紙は横軸に測定値（直線目盛）、縦軸に確率を取って作成されている。したがってデータのプロットおよびパラメタの決定は次のように行う。

- 手順 1) 測定値と累積相対度数（F %）との関係を確率紙にプロットする。
- 2) プロットした点に最適の直線を引いた後、F = 50 %に対応する測定値を読み取れば、その値が平均値（ μ ）である。
- 3) F = 15.87 %あるいはF = 84.13 %に対応する測定値を読み取れば、それぞれ、 $t_1 = \mu - \sigma$, $t_2 = \mu + \sigma$ の値となるので、平均値 μ を用い、 $\sigma = \mu - t_1$ または $\sigma = t_2 - \mu$ により標準偏差（ σ ）を求めることができる。

2. 対数正規確率紙（用紙2）

構成 横軸に対数目盛を取ること以外は、すべて、正規確率紙と同じである。

- 手順 1) 測定値と累積相対度数（F %）との関数を確率紙にプロットする。
- 2) プロットした点に最適の直線を引いた後、F = 50 %に対応する測定値を読み取れば、その値は、幾何平均値 η （本文中、式(5)）になる。
- 3) F = 15.87 %あるいはF = 84.13 %に対応する値を読み取れば、それぞれ、 $\ln t_1 = \ln \eta - \sigma$ および $\ln t_2 = \ln \eta + \sigma$ の値となるので、 $\sigma = \ln \eta - \ln t_1$ あるいは $\sigma = \ln t_2 - \ln \eta$ が求まる。 $\sigma = \ln \sigma_g$ と $\sigma = \ln \eta - \ln t_1 = \ln t_2 - \ln \eta$ とより、幾何標準偏差 $\sigma_g = \eta / t_1 = t_2 / \eta$ が求まる。

3. ウイブル確率紙（用紙3）

構成 分布関数（本文中、式(14)）を変形する。

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \frac{t^m}{t_0} \right] \quad (14)$$

$$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - F(t)} \right] = m \ln t - \ln t_0 \quad (AP-1)$$

したがって、縦軸に $\ln \ln [1/(1-F(t))]$ 、横軸に $\ln t$ を目盛るとグラフは直線になり、 m は勾配から、また t_0 は $t=1$ に対する縦軸の値を基に求められる。

ワイブル確率紙は、このような関係を用いて作成されている。すなわち、横軸は対数目盛とし、縦軸の左側に $F(t)$ を、右側に $Y = \ln \ln [1/(1-F(t))]$ $= \ln(t^m/t_0)$ を目盛つてある。さらに、 m の値も図上で読み取る工夫がなされている。

ここで、 t_0 と m をすべて図によって読み取る工夫は、計算の手数を省略するために行われているが、その手順に慣れるのは少々面倒である。電卓の普及している現在では、任意の点の値を読み取り、 t_0, m を計算によって算出する方が容易である。したがって、後者を基礎として手順を述べる。

- 手順 1) 測定値と累積相対度数（縦軸左側目盛 $F\%$ ）との関係を確率紙にプロットする。
 2) プロットした点に適合する直線を引いた後、離れた任意の2点 (t_1, Y_1) (t_2, Y_2) を読み取り、次式によってパラメタ (t_0, m) を算出する。

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{\ln t_2 - \ln t_1} \quad (\text{AP-2})$$

$$\ln t_0 = m \ln t_1 - Y_1$$

$$t_0 = \exp[m \ln t_1 - Y_1] \quad (\text{AP-3})$$

ここで、 Y は縦軸右側に目盛られた値、 $Y = \ln \ln [1/(1-F(t))]$ $= \ln(t^m/t_0)$ である。

4. 二重指數確率紙（用紙 4）

構成 最大値分布の場合を示す。分布関数（本文中、式(22)）を変形する。

$$F(t) = \exp\{-\exp(-y)\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} y &= \alpha(t-u) \\ -\ln \ln \left\{ \frac{1}{F(t)} \right\} &= y \\ &= \alpha(t-u) \end{aligned} \quad (\text{AP-4})$$

したがって、縦軸に $y = -\ln \ln [1/F(t)]$ を目盛り、横軸に t を目盛れば、 u は $F(t) = 1/e$ ($y = 0$) に対する t の値として、また、 α は直線の勾配から求められる。

二重指數確率紙は、この関係を用いて作成したものである。すなわち、横軸 t は直線目盛であるが、縦軸左側に $F(t)$ を、左側に $y = -\ln \ln [1/F(t)]$ を目つてある。

- 手順 1) 測定値と累積相対度数（縦軸左側目盛、 $F\%$ ）との関係を確率紙にプロットする。

- 2) プロットした点に適合する直線を引いた後、 $y = 0$ に対する t の値を読み取れば、そのまま、 u の値になる。

この u を式 (AP-4) に代入し、さらに、任意の点 (t_1, y_1) を読み取れば、 α は次式より求められる。

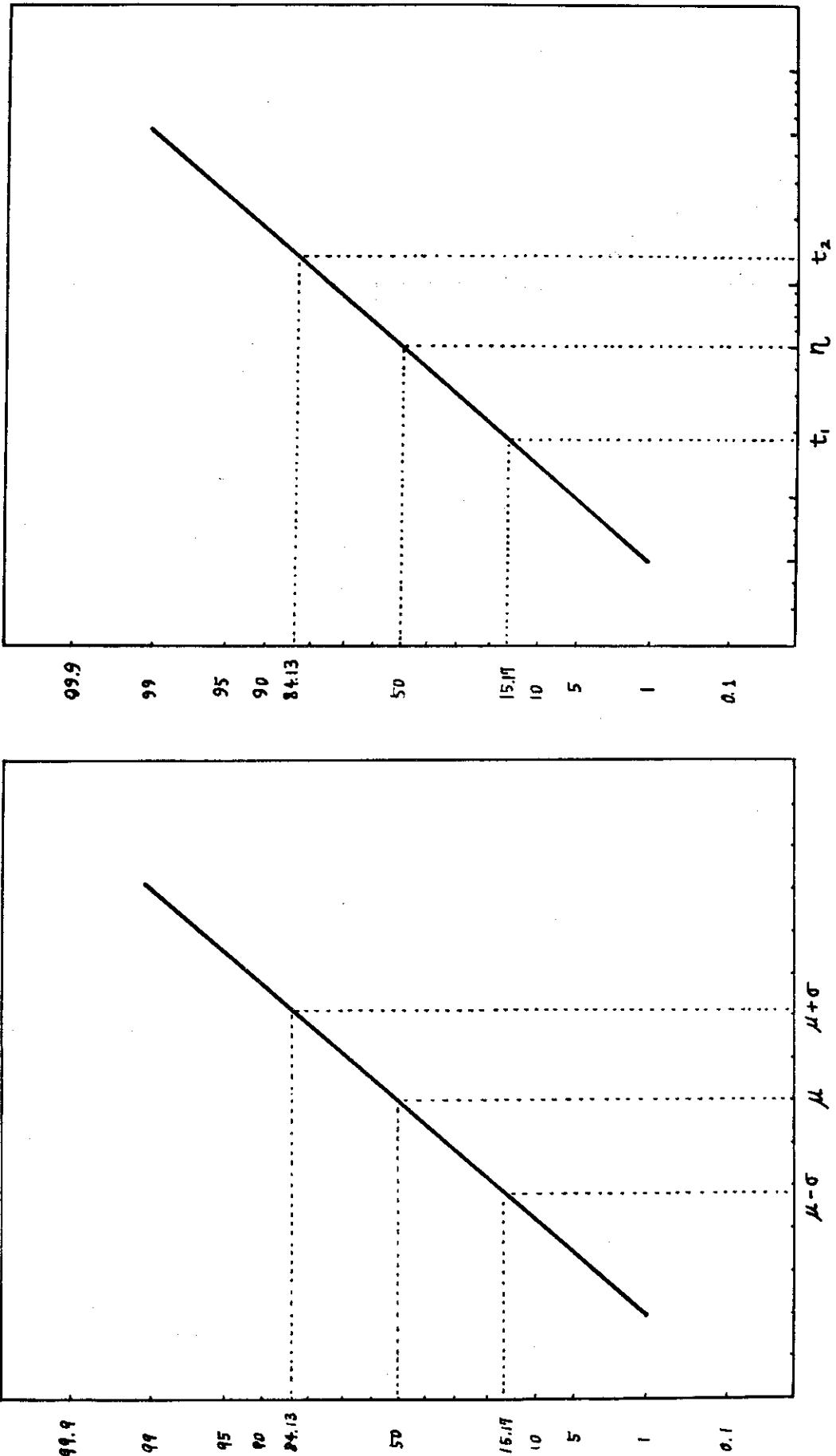
$$\alpha = \frac{y_1}{t_1 - u} \quad (AP-5)$$

5. 対数二重指數確率紙（用紙 5）

構成 横軸を対数目盛とする以外は、すべて、二重指數確率紙と同じである。分布関数（本文中、式(26)）のパラメタをグラフより決定する手順を述べる。

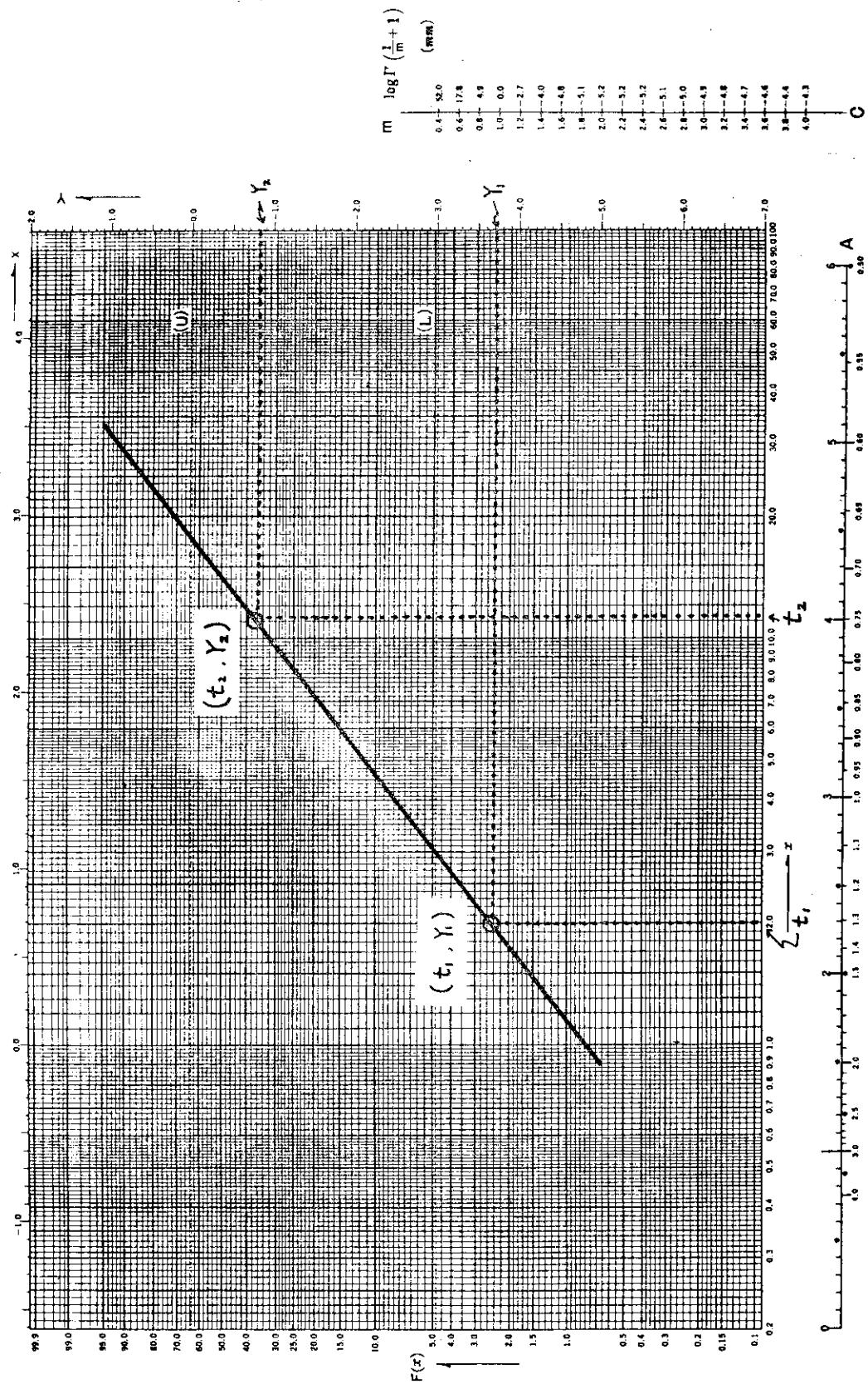
- 手順 1) 測定値と累積相対度数（縦軸左側目盛、F %）との関係を確率紙にプロットする。
 2) プロットした点に適合する直線を引いた後、 $y = 0$ に対する t の値を読み取れば、それは $u = \ln \eta$ における η の値となる。この η を用い、任意の点 (t_1, y_1) を読み取ることにより、 α は次式により求められる。

$$\alpha = \frac{y_1}{\ln t_1 - \ln \eta} \quad (AP-6)$$

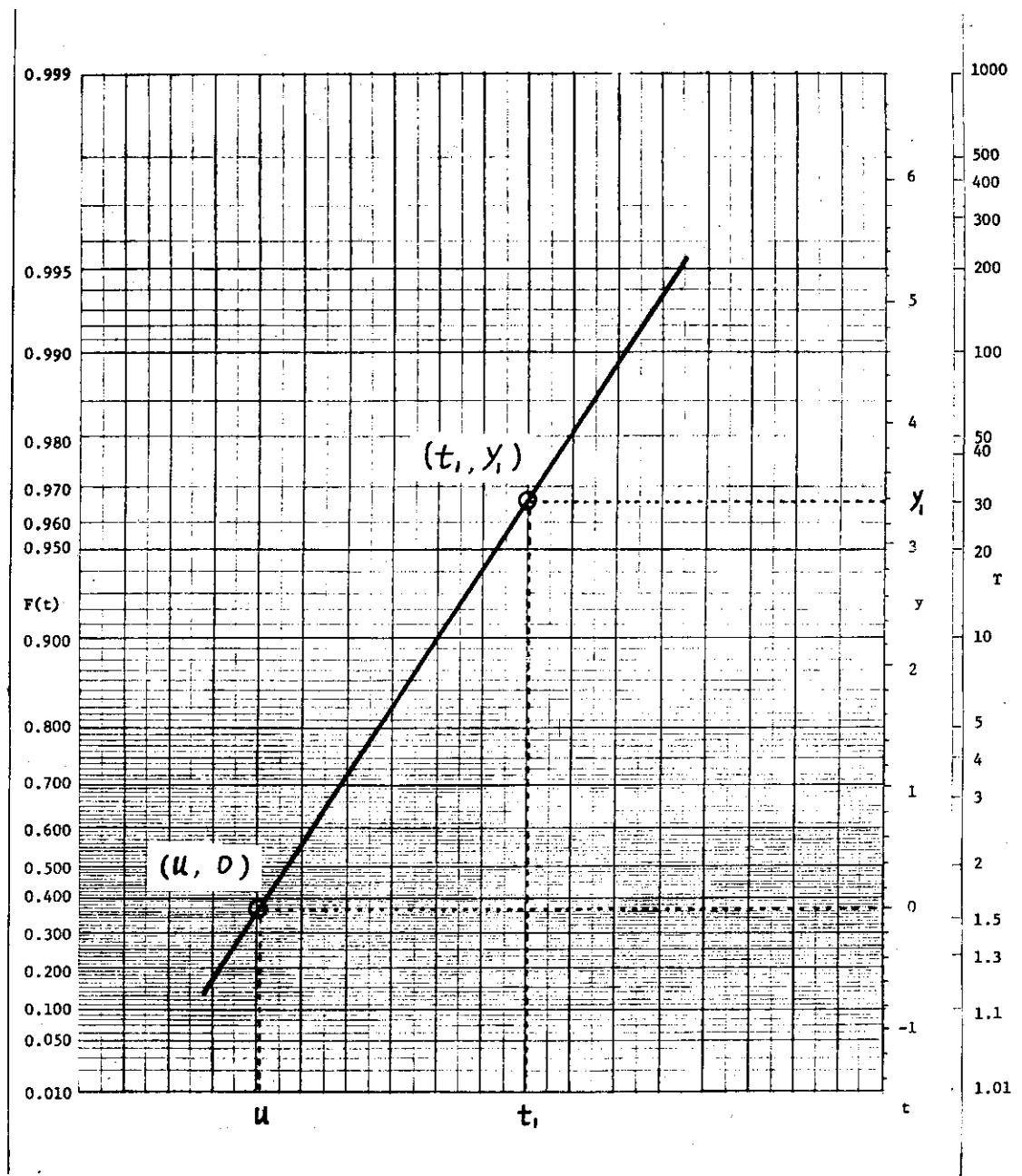


用紙 1 正規確率紙の構成

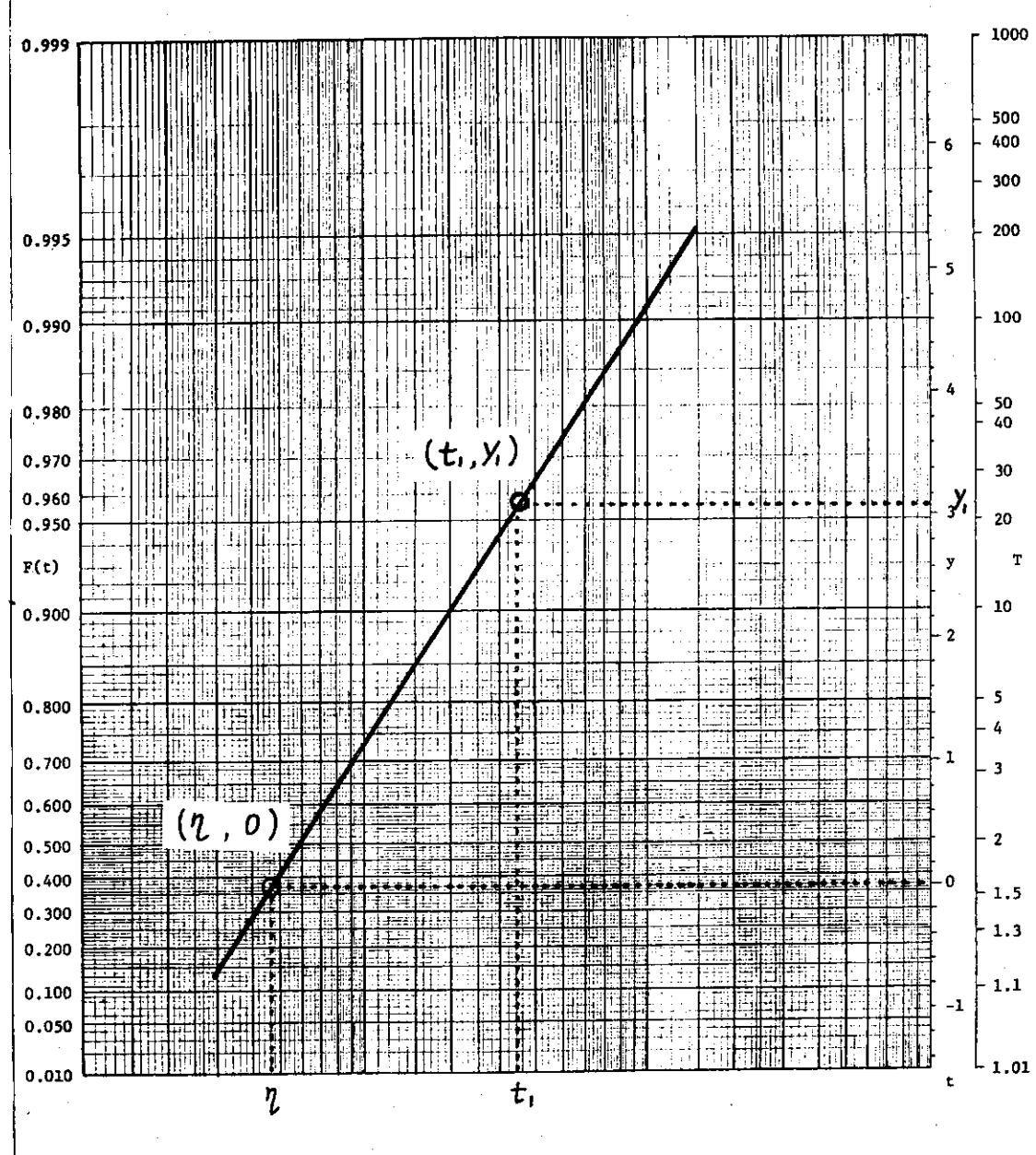
用紙 2 対数正規確率紙の構成



用紙3 ワイブル確率紙の構成



用紙 4 二重指數確率紙の構成



用紙 5 対数二重指數確率紙の構成